

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

Scuola di Scienze
Corso di Laurea in Fisica

Stelle nel mondo-brana

Relatore:
Prof. Roberto Casadio

Presentata da:
Svyatoslav Karabin

Sessione II
Anno Accademico 2015/2016

Prefazione

Lo scopo di questa tesi consiste nello studio delle proprietà generali di sistemi compatti statici e a simmetria sferica nell'ambito dei modelli che prevedono l'esistenza di dimensioni spaziali aggiuntive e che sono comunemente dette del mondo-brana.

Si comincerà con una breve descrizione di teorie gravitazionali a più dimensioni, in particolare si parte dalla teoria di Kaluza-Klein, per arrivare ai modelli ADD(Arkani-Hamed, Dimopoulos, Dvali) e infine a quelli RS(Rundall, Sundrum) che interessano direttamente questo studio.

Per questi modelli, vengono quindi ricavate le equazioni di campo multidimensionali dall'azione di Einstein-Hilbert e successivamente le si proietta, facendo uso delle equazioni di Gauss e Codazzi, su una brana massiva immersa in un "bulk" cinquedimensionale.

Infine si studiano le equazioni di campo di Einstein quadridimensionali per una generica metrica che può servire a descrivere stelle statiche, a simmetria sferica e costituite da un fluido perfetto isotropo. Successivamente si ripete la stessa analisi partendo dall'equazione di campo sulla brana e si confrontano i risultati nei due diversi contesti.

Indice

Prefazione	1
Introduzione	4
1 Modelli multidimensionali	6
1.1 Teoria di Kaluza-Klein	6
1.2 Teoria ADD	10
1.3 Modello Randall-Sundrum	11
1.3.1 RS1	11
1.3.2 RS2	13
2 Geometria del mondo-brana	14
2.1 Equazioni di Einstein in cinque dimensioni	14
2.2 Formalismo delle ipersuperfici	16
2.3 Curvatura intrinseca ed estrinseca	17
2.4 Equazioni di Gauss e Codazzi	19
2.5 Spazio anti-de Sitter	20
2.6 Le coordinate gaussiane normali	20
2.7 Tensore di Weyl	21
2.8 Condizioni di giunzione	22
2.9 Equazioni di campo sulla 3-brana	22
3 Stelle nel mondo-brana	26
3.1 Stelle in 4 dimensioni	26
3.2 Equazione di Tolman-Oppenheimer-Volkoff nel mondo brana	29
Bibliografia	38

Desidero ringraziare il mio relatore, il Prof. Casadio, per la grande disponibilità e l'aiuto fornitomi nella stesura. Un sentito ringraziamento a Chiara per aver scovato alcuni errori grammaticali. Inoltre, ringrazio Giuseppe per aver condiviso con me la sua esperienza in LaTeX.

Introduzione

Le più importanti teorie fisiche sono nate da conflitti e contraddizioni tra idee preesistenti. Ad esempio l'incompatibilità delle equazioni di Maxwell con le invarianze di Galileo spinse Einstein alla formulazione della relatività ristretta e quest'ultima, in contrasto con la relatività newtoniana, portò alla formulazione della relatività generale. Il problema di oggi è l'unificazione della relatività generale con la teoria quantistica dei campi. Tuttavia qualunque sforzo di quantizzare la relatività generale produce teorie nonrinormalizzabili. Com'è noto, la teoria della relatività generale è basata su un modello geometrico. Allora, se la quantizzazione della relatività incontra innumerevoli ostacoli, cosa si può dire della geometrizzazione delle altre forze?

Uno dei primi tentativi di creare un modello basato sul lavoro di Einstein fu svolto da Kaluza che ipotizzò che lo spazio potesse avere più di tre dimensioni. Questa concezione equivale ad estendere il tensore metrico $g_{\mu\nu}^{(4)}$ a $g_{\mu\nu}^{(5)}$, aggiungendo una riga ed una colonna alla sua rappresentazione matriciale. A questo punto era necessario giustificare la non accessibilità della quinta dimensione. I suggerimenti sono arrivati dal fisico svedese Oscar Klein e dalle successive teorie a dimensioni aggiuntive che assumono che la dimensione extra sia di grandezza infinitamente piccola e compatta, quindi impercettibile, oppure che sia più estesa ma non accessibile alle particelle del modello standard, ma esclusivamente ai gravitoni, particelle dell'interazione gravitazionale. Presto la teoria di Kaluza e Klein finì abbandonata a causa delle previsioni errate e fece emergere il cosiddetto problema della gerarchia, il quale consiste nelle eccessive differenze di ordine di grandezza tra le costanti di accoppiamento di varie interazioni fondamentali, in particolare di quella gravitazionale e elettrodebole, quindi consistenti differenze tra la scala elettrodebole $M_{EW} \sim 1TeV$ e la scala di Planck $M_{Pl} \sim 10^{16}TeV$. Allo scopo di risolvere questo inconveniente è stata formulata la teoria ADD e successivamente la teoria RS1 in cui la dimensione extra spaziale è più estesa rispetto alla teoria KK, dove viene considerato che la dimensione aggiunta sia paragonabile alla lunghezza di Planck, $l_{Pl} \sim 10^{-33}cm$. Una delle conseguenze più interessanti di queste teorie è la possibilità di esplorare gli effetti della gravità quantistica su livelli di energia che rientrano nelle possibilità del LHC. Le particelle previste da tali modelli infatti interagiscono ad ener-

gie simili a quelle della interazione debole e cioè a circa 1TeV . Queste particelle, dette «modi di Kaluza-Klein», si spostano nelle dimensioni extra ma lasciano una traccia nel nostro mondo a tre dimensioni.

ADD, RS1 e RS2 sono tra quelle teorie del mondo-brana in cui le dimensioni extra sono estese spazialmente e quindi molto più grandi della scala di Planck. Il modello standard è vincolato su una sottovarietà chiamata brana all'interno di uno spazio multidimensionale detto bulk. A basse energie la gravità è intrapolata come la materia ordinaria sulla brana ma ad alte energie può propagarsi nel bulk. Nell'ambito del mondo-brana si possono formulare differenti modelli, per esempio costruzioni in cui le brane si incurvano, si avvolgono attorno alle altre dimensioni, si scontrano. Potremmo ipotizzare un mondo costituito da più brane, detto anche multiverso, parallele alla nostra, con particelle e interazioni a noi sconosciute. Le dimensioni extra e le brane sono incorporate nella teoria delle stringhe che contiene ben dieci dimensioni extra(undici dimensioni la teoria M).

Originalmente Einstein formulò la relatività generale in quattro dimensioni. In realtà la sua teoria non si pronuncia a favore di un numero particolare di dimensioni ma funziona perfettamente in un numero arbitrario di dimensioni. Lo studio dei fenomeni fisici dal punto di vista del mondo-brana può portare a deviazioni più o meno significative dai risultati classici. Tale analisi generalmente avviene tramite formulazione covariante delle equazioni sulla varietà multidimensionale (bulk), cui segue una proiezione sulla 3-brana. Diversamente, può essere utilizzato un approccio di tipo perturbativo.

Uno dei laboratori per testare le proprietà del mondo-brana è costituito dalle stelle compatte, in particolare stelle a neutroni e nane bianche. Questi oggetti astronomici destano particolare interesse per le loro caratteristiche limite. Generalmente si studiano i valori della massa, del raggio e le relazioni tra queste quantità che ne garantiscono la stabilità della stella. L'equazione di Tolman-Oppenheimer-Volkoff insieme al limite di Chandrasekhar costituiscono una delle conquiste della relatività generale, poiché, rispettivamente, dal primo si ottiene il limite di compattezza per le stelle e il limite di massa per le stelle a neutroni, mentre dal secondo il limite di massa per le nane bianche. I risultati emersi dallo studio delle stesse equazioni dal punto di vista dello scenario multidimensionale ci indicano una deviazione rispetto alle previsioni della relatività generale per quanto riguarda la compattezza delle stelle soprannominate.

Capitolo 1

Modelli multidimensionali

I modelli fisici costruiti negli spazi multidimensionali ci propongono un punto di vista alternativo per approcciare i problemi di relatività generale, di cosmologia e dell'unificazione delle interazioni fondamentali. In questa sezione saranno affrontati, in ordine cronologico, alcuni modelli con dimensioni aggiuntive, sarà investigata la forma di queste dimensioni dal punto di vista geometrico-topologico e come possono influenzare la realtà fisica. Inizialmente sarà trattata la teoria di Kaluza-Klein che si basa su una dimensione aggiuntiva piccola e successivamente i modelli con dimensioni più grandi (ADD e RS). Inoltre verrà introdotto il concetto di bulk (varietà multidimensionale) e brana (sottovarietà immersa nel bulk).

1.1 Teoria di Kaluza-Klein

Uno dei primi tentativi d'impiego delle dimensioni aggiuntive è rappresentato dalla teoria di Kaluza-Klein, che aveva come scopo principale quello di creare una teoria unificata delle interazioni, è stata pubblicata nel 1921 dal fisico-matematico tedesco Theodor Kaluza e estesa nel 1926 dal fisico svedese Oscar Klein. L'idea base di Kaluza consiste nell'introduzione di una dimensione extra spaziale compatta al fine di ottenere uno spaziotempo cinquedimensionale che include il campo gravitazionale, elettromagnetico e scalare. Tuttavia questa teoria presenta alcune criticità, come ad esempio, il fatto che il calcolo della massa dell'elettrone non produca il riscontro con i dati sperimentali e non includa le forze nucleari. A causa di queste implicazioni fenomenologiche non trascurabili, il modello di KK è stato abbandonato. Tuttavia alcuni aspetti sono presenti in modelli più recenti ed è quindi importante studiare tali caratteristiche.

Per lavorare in cinque dimensioni innanzitutto è necessario costruire una metrica appropriata a tale struttura spaziotemporale. La possiamo riassumere nella seguente forma matriciale:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} g_{\mu\nu}^{(4)} & g_{\mu 5} \\ g_{\nu 5} & g_{55} \end{pmatrix}, \quad (1.1)$$

dove $g_{\mu\nu}^{(4)}$ è la metrica quattrodimensionale.

La struttura topologica dello spazio 5-dimensionale è costituita da $\mathcal{M}^4 \oplus \mathcal{S}^1$, dove \mathcal{M}^4 rappresenta spaziotempo di Minkowski e \mathcal{S}^1 topologia di un cerchio.

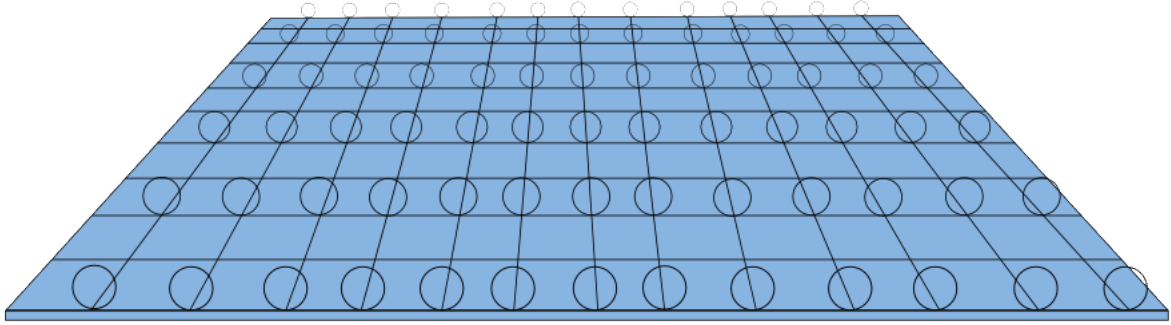


Figura 1.1: Piano 2d con la dimensione aggiuntiva rappresentata da un cerchio arrotolato in ogni punto

Possiamo immaginare lo spazio-tempo di KK come lo spazio tredimensionale con un cerchio in ogni suo punto. Kaluza formulò «cylinder condition» (1.2) che garantisce l'indipendenza delle componenti della metrica dalla dimensione extra e implica l'inosservabilità della quinta dimensione.

$$\partial_5 g_{\mu\nu} = 0 \quad (1.2)$$

La metrica può essere riscritta tramite la metrica indotta nella sua parte ortogonale e parallela al vettore

$$n^\mu \equiv \frac{\delta_5^\mu}{\sqrt{g_{55}}} = (0, 0, 0, 0, \frac{1}{\sqrt{g_{55}}}), \quad (1.3)$$

dopodiché usando il proiettore (metrica indotta):

$$g_{\mu\nu}^{(4)} = g_{\mu\nu} - n_\mu n_\nu. \quad (1.4)$$

Quindi:

$$g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}^{(4)} + \frac{\delta_{5\mu}}{\sqrt{g_{55}}} \frac{\delta_{5\nu}}{\sqrt{g_{55}}}, \quad (1.5)$$

e tenendo conto che $\delta_{5\mu} = \delta_{5\mu}$ e $\delta_{5\nu} = \delta_{5\nu}$, si ottiene:

$$g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}^{(4)} + \frac{g_{\mu 5} g_{\nu 5}}{g_{55}}, \quad (1.6)$$

dove $g_{\mu\nu}^{(4)}$ è la metrica 4-D di Minkowski. Ora definiamo:

$$A_\mu = \frac{g_{\mu 5}}{g_{55}}, \quad (1.7)$$

$$\phi = g_{55}, \quad (1.8)$$

Infine riscriviamo la metrica:

$$g_{\mu\nu} = \phi^{-\frac{1}{3}} \begin{pmatrix} g_{\mu\nu}^{(5)} + \phi A_\mu A_\nu & \phi A_\mu \\ \phi A_\nu & \phi \end{pmatrix}. \quad (1.9)$$

Kaluza considera la pura gravità descritta dall'azione:

$$S = \frac{1}{16\pi G^{(5)}} \int d^5x \sqrt{g} R^{(5)}. \quad (1.10)$$

Calcolando lo scalare di ricci tramite la relazione:

$$R = g^{\alpha\beta} (\partial_\gamma \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma - \partial_\beta \Gamma_{\alpha\gamma}^\gamma + \Gamma_{\alpha\beta}^\delta \Gamma_{\delta\gamma}^\gamma - \Gamma_{\alpha\gamma}^\delta \Gamma_{\beta\delta}^\gamma), \quad (1.11)$$

dove:

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \frac{1}{2} g^{\lambda\sigma} (\partial_\mu g_{\nu\sigma} + \partial_\nu g_{\sigma\mu} - \partial_\sigma g_{\mu\nu}). \quad (1.12)$$

Quindi inserendo la metrica (1.6) in (1.9) e successivamente in (1.11) si ottiene:

$$R^{(5)} = R^{(4)} - \frac{1}{4} \phi F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{6\phi^2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi. \quad (1.13)$$

Ora riscriviamo l'azione (1.10):

$$S = \frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{g} (R - \frac{1}{4} \phi F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{6\phi^2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi), \quad (1.14)$$

dove $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ è il tensore elettromagnetico e $G = G^{(5)} / \int dx^5$. Osserviamo che ponendo ϕ uguale a costante, otterremo la somma di azione Einstein-Hilbert e azione elettromagnetica.

Nel 1926 Klein assunse che la quinta dimensione sia di tipo spaziale e gli diede una topologia circolare di piccola scala (ordine della lunghezza di Planck) allora ogni quantità di tipo $f(x^\mu, x^5)$ divenne periodica:

$$f(x^\mu, x^5) = f(x^\mu, x^5 + 2\pi R), \quad (1.15)$$

dove R è il raggio della circonferenza.

Dal momento che ogni campo può essere sviluppato in serie di Fourier.

$$f(x^\mu, x^5) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} f_n(x^\mu) e^{\frac{inx^5}{R}} \quad (1.16)$$

I coefficienti f_n sono chiamati «modi di Kaluza-Klein». In questo modo è possibile sviluppare:

$$g_{\mu\nu}(x^\mu, x^5) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} g_{\mu\nu}^{(n)}(x^\mu) e^{\frac{inx^5}{R}}, \quad (1.17)$$

$$A_\mu(x^\mu, x^5) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} A_\mu^{(n)}(x^\mu) e^{\frac{inx^5}{R}}, \quad (1.18)$$

$$\phi(x^\mu, x^5) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \phi^{(n)}(x^\mu) e^{\frac{inx^5}{R}}. \quad (1.19)$$

I termini $g_{\mu\nu}^{(n)}$, $A_\mu^{(n)}$ e $\phi^{(n)}$ soddisfano l'equazione di d'Alambert:

$$\square_{(5)} g_{\mu\nu}^{(n)} + \frac{n^2}{L^2} g_{\mu\nu}^{(n)} = 0. \quad (1.20)$$

Risolviendo per il campo scalare:

$$\square_{(5)} \phi^{(n)} + \frac{n^2}{L^2} \phi^{(n)} = 0. \quad (1.21)$$

Che rappresenta l'equazione d'onda per i modi di Kaluza-Klein $\phi^{(n)}$ di massa $\frac{n}{L}$. I modi del campo scalare dipendono solamente dalle coordinate 'ordinarie' x^μ . Klein assunse che L sia estremamente piccolo, quindi i modi con $n > 0$ sarebbero fuori portata dalla verifica empirica. Un campo scalare non massivo ϕ_0 viene chiamato modo-zero e corrisponde ad una particella quattro-dimensionale.

La teoria di Kaluza-Klein può essere estesa al caso di più dimensioni. Abbiamo visto come l'invarianza $U(1)$ di gauge dell'elettromagnetismo viene estratta dall'invarianza per rotazioni della coordinata x^5 . Allo stesso modo, inserendo tutti i gruppi di simmetria del modello standard, si possono incorporare tutte le interazioni fondamentali, costruendo un modello consistente col mondo fisico. Innanzitutto è necessario determinare il numero di dimensioni aggiuntive ($1 + (3 + D)$) in modo tale che il nostro spaziotempo abbia la topologia $\mathcal{M}^4 \times \mathcal{B}^D$ dove \mathcal{B}^D contiene i gruppi di simmetria $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ rispettivamente per interazione forte, interazione debole e interazione elettromagnetica. Ovviamente tale spazio ha dimensione 7. Una scelta possibile sarebbe $\mathcal{CP}^2 \times \mathcal{S}^2 \times \mathcal{S}^1$ dove \mathcal{CP}^2 è lo spazio complesso proiettivo quattordimensionale, \mathcal{S}^2 è la 2-sfera e \mathcal{S}^1 è la 1-sfera. Quindi in un modello KK realistico si dovrebbero avere complessivamente 11 dimensioni.

Tuttavia, la teoria di Kaluza-Klein rimane particolarmente poco interessante perchè prevede che se la massa gravitazionale $M_p^2 \sim 1/G$ è abbastanza piccola da poter essere raggiunta nei nostri laboratori, i modi gravitazionali massivi avrebbero una massa $m \sim M_p/n$ abbastanza piccola da poter essere già esclusa sperimentalmente.

1.2 Teoria ADD

Nel 1998 Nima Arkani-Hamed, Savas Dimopoulos, e Gia Dvali proposero un modello basato su una concezione differente delle dimensioni aggiuntive. Nella teoria ADD le n dimensioni extra assumono una grandezza molto più grande di un millimetro e sono arrotolate. La loro inosservabilità è la conseguenza del fatto che tutte le interazioni eccetto quella gravitazionale sono confinate su una singola brana costituita da noi famigliari tre dimensioni spaziali. Lo scopo della teoria ADD era di dare una risposta al problema della gerarchia. La gravità, l'unica con l'accesso privilegiato rispetto alle altre dimensioni, ci appare più debole: l'attrazione gravitazionale tra due elettroni è più piccola di 42 ordini di grandezza rispetto a quella elettromagnetica, proprio perchè in parte si disperde nelle dimensioni aggiuntive. Quindi in aggiunta alle tre dimensioni temporali e una spaziale conosciute si aggiungono n dimensioni extra, piatte, di dimensione finita. L'insieme complessivo di $3 + n$ dimensioni spaziali è chiamato bulk (varietà $\mathcal{M}^4 \oplus \mathcal{B}^n$). Nell'ADD viene assunto che le particelle del modello standard (quark, leptoni, bosoni) siano abitanti del familiare iperspazio tredimensionale detto "3-brana", interno al bulk. Invece i gravitoni siano differenti in quanto possono penetrare nello spazio totale a $3 + n$ dimensioni.

In questo modello la scala fondamentale è M_\star che è generata dal volume della dimensione aggiuntiva:

$$M_{Pl}^2 = M_\star^{N+2} R^N, \quad (1.22)$$

dove $R = 2\pi r$ e N sono rispettivamente la grandezza e il numero delle dimensioni extra e r il raggio. M_{Pl} è la scala di Planck quadridimensionale e M_\star è la scala di Planck fondamentale che può essere interpretata come scala di energia fondamentale alla quale l'interazione gravitazionale diventa forte. La relazione (2.22) ci dà la dipendenza della grandezza delle dimensioni aggiuntive dal loro numero.

Dalla (1.19) possiamo stimare il raggio delle dimensioni extra per $1TeV$ (scala elettrodebole) con la relazione:

$$r = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{M_{Pl}^2}{M_\star^{n+2}} \right)^{\frac{1}{n}}. \quad (1.23)$$

Otteniamo i seguenti risultati:

numero delle dimensioni extra	r
$n = 1$	$r = 10^{12}m$
$n = 2$	$r = 10^{-3}m$
$n = 3$	$r = 10^{-8}m$
$n = 6$	$r = 10^{-11}m$

Ovviamente $N = 1$ è da escludere dato che in questo caso la dimensione extra avrebbe la dimensione astronomica, per $n = 2$ la sua grandezza sarebbe all'ordine dei centimetri.

Secondo la teoria originale per risolvere il problema della gerarchia si dovrebbe lavorare con $n \geq 3$ dimensioni.

1.3 Modello Randall-Sundrum

Nel 1999 Lisa Randall e Raman Sundrum proposero due modelli a dimensione aggiuntiva che, a differenza del modello ADD, presenta energia sulle brane e nel bulk che incurva lo spaziotempo con effetti gravitazionali non trascurabili. Nel primo lavoro (RS1), la dimensione extra è ancora di grandezza finita mentre nel secondo ha un'estensione infinita. Un'altra novità, che finora è stata trascurata, è la presenza di una geometria "warped", cioè una distorsione dello spaziotempo dovuta alla presenza delle brane massive.

1.3.1 RS1

In questo modello si lavora in un bulk costituito da cinque dimensioni: quattro spaziali e una temporale. Inoltre vengono previste due brane, mentre la prima intrappola la gravità, la seconda il modello standard. Il problema della gerarchia viene risolto con la geometria "warped", stabilizzando la distanza tra due brane. Poiché il nostro spaziotempo non riempie l'intero bulk, è necessario introdurre opportune condizioni al contorno. Si assume che la dimensione aggiuntiva sia localizzata su una sfera unodimensionale, identificata con la coordina periodica y . Topologicamente tale struttura è identificata $\mathcal{S}^1/\mathbb{Z}_2$ dove \mathcal{S}^1 rappresenta la topologia di una sfera unodimensionale e \mathbb{Z}_2 è il gruppo moltiplicativo $\{1, -1\}$. Il dominio del cerchio \mathcal{S}^1 è $0 \leq y < 2\pi R$ e, data la sua periodicità, si ha una condizione di frontiera $y = y + 2\pi R$. Ora consideriamo il gruppo discreto \mathbb{Z}_2 , per la proprietà di simmetria, avremo: $y \leftrightarrow -y$ e $y \leftrightarrow 2\pi R - y$, quindi i punti $y > \pi R$ sono identificati con i punti $y \leq \pi R$ e il cerchio viene ripiegato su se stesso.

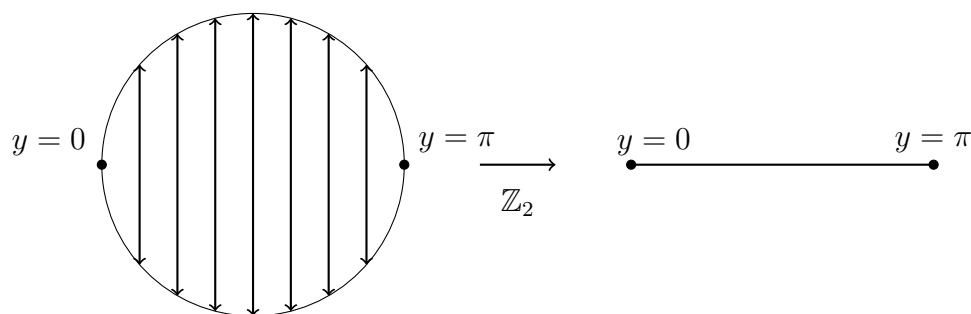


Figura 1.2: L'effetto del gruppo \mathbb{Z}_2 sul cerchio

Sono presenti due punti fissi (che non si identificano tra loro), uno nell'origine $y = 0$ e l'altro sull'estremità opposta del cerchio $y = \pi R = L$. In questi punti hanno origine due 3-brane a distanza L una dall'altra, immerse nel bulk.

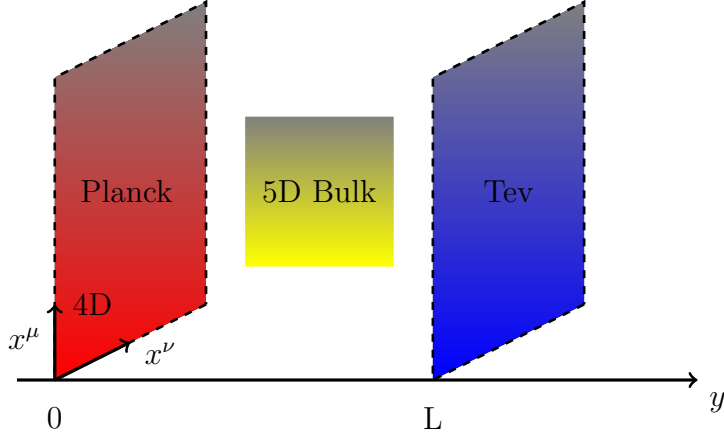


Figura 1.3: Rappresentazione grafica del modello RS1

L'azione classica che rappresenta tale configurazione è data da:

$$S = S_{Gr} + S_{vis} + S_{hid}, \quad (1.24)$$

dove

$$S_{Gr} = \int d^4x \int_{-\pi}^{\pi} dy \sqrt{-G} \{-\Lambda + 2M^3 R\}, \quad (1.25)$$

$$S_{vis} = \int d^4x \sqrt{-g_{vis}} \{\mathcal{L}_{vis} - V_{vis}\}, \quad (1.26)$$

$$S_{hid} = \int d^4x \sqrt{-g_{hid}} \{\mathcal{L}_{hid} - V_{hid}\}, \quad (1.27)$$

e

$$g_{\mu\nu}^{vis}(x^\mu) = G_{\mu\nu}(x^\mu, y = \pi), \quad g_{\mu\nu}^{hid}(x^\mu) = G_{\mu\nu}(x^\mu, y = 0). \quad (1.28)$$

Innanzitutto occorre trovare una metrica adatta al nostro problema. Siccome dobbiamo trovare una soluzione che riproduca al meglio la nostra realtà fisica, risolvendo le equazioni di Einstein in cinque dimensioni (1.30), dobbiamo richiedere l'invarianza della metrica sotto il gruppo di Poincaré. In questo modo l'universo 4D risulterà piatto e statico. Otterremo la seguente metrica:

$$ds^2 = e^{-2A(y)} \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + r_c^2 dy^2, \quad (1.29)$$

dove $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$ è la metrica di Minkowski, e il fattore $e^{-2A(y)}$ è il cosiddetto warp factor, scritto nella forma esponenziale per convenzione. Per ottenere la funzione $A(y)$ è necessario risolvere le equazioni di Einstein:

$$G_{\alpha\beta}^{(5)} = R_{\alpha\beta}^{(5)} - \frac{1}{2} R g_{\alpha\beta}^{(5)} = k^2 T_{\alpha\beta}^{(5)}, \quad (1.30)$$

dove per convenzione k assume:

$$k = \frac{1}{2M_{Pl}^3} \quad (1.31)$$

e il tensore energia-impulso è definito dall'azione 5D:

$$T_{\alpha\beta} = \frac{-2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_\alpha}{\delta g^{\alpha\beta}} = -g_{\alpha\beta} \Lambda. \quad (1.32)$$

Inserendo la metrica(1.28) si ottiene la seguente espressione per la funzione $A(y)$:

$$A(y) = r_c |y| \sqrt{\frac{-\Lambda}{24M^3}}. \quad (1.33)$$

Questa soluzione ovviamente ha senso solamente se $\Lambda < 0$, cioè se lo spazio tra le due brane è lo spazio anti-de Sitter(AdS_5). Un altro risultato importante ricavato dalla soluzione delle equazioni di Einstein è dato dal fatto che le due brane hanno la tensione uguale ma opposta:

$$V_{Planck} = -V_{SM} = 24M^3 k \quad (1.34)$$

e la costante cosmologica è data da:

$$\Lambda = -24M^3 k^2 \quad (1.35)$$

Quindi la metrica finale è:

$$ds^2 = e^{-2kr_c|y|} \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + r_c^2 dy^2. \quad (1.36)$$

Il raggio di compattificazione r_c è una costante arbitraria di integrazione.

1.3.2 RS2

Nel secondo modello di Lisa Randall e Raman Sundrum viene assunta un'impostazione in cui è presente una singola brana a tensione positiva all'interno di un bulk con una dimensione extra non compatta ma estesa infinitamente, sulla quale è intrappolato il modello standard. La curvatura dello spazio-tempo è tale che la gravità si addensa nella prossimità della brana e decresce esponenzialmente quando si allontana da essa: questo fenomeno, in letteratura, viene chiamato gravità localizzata. Il modello RS2 non è volto alla risoluzione del problema della gerarchia ma indirizzato allo studio degli effetti gravitazionali nelle dimensioni extra.

Capitolo 2

Geometria del mondo-brana

In questo capitolo verrà introdotto il formalismo necessario per lavorare sulle varietà curve multidimensionali e i loro sottospazi. Innanzitutto si ricavano le equazioni del campo di Einstein per il caso generico n -dimensionale e successivamente si proiettano sulla 3-brana, partendo dall'equazione di Gauss-Codazzi. Inoltre si discuterà di come questa equazione di campo si riducano all'equazione di campo standard nel limite di basse energie. Questo procedimento si baserà sul lavoro di Maeda, Sasaki e Shirumizu e ha il vantaggio di fornire la forma più generale delle equazioni di campo indipendentemente dalla forma della metrica di bulk.

2.1 Equazioni di Einstein in cinque dimensioni

Le equazioni di campo di Einstein cinquedimensionali possono essere ottenuti a partire dall'azione di Einstein-Hilbert. Innanzitutto risolviamo l'azione classica quattro-dimensionale e successivamente generalizziamo al caso multidimensionale. L'azione di Einstein-Hilbert in 4D ha la seguente forma:

$${}^{(4)}S^{EH} = \frac{1}{2k_{(4)}^2} \int d^4x \sqrt{-g^{(4)}} R. \quad (2.1)$$

Eseguiamo la variazione dell'azione:

$$\delta S^{EH} = \frac{1}{2k_{(4)}^2} \int d^4x \delta(\sqrt{-g^{(4)}} R). \quad (2.2)$$

Riscrivendo la curvatura scalare in termini di curvatura di Ricci, cioè: $R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$ avremo tre termini:

$$(\delta S)_1 = \frac{1}{2k_{(4)}^2} \int d^4x \sqrt{-g^{(4)}} g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu}, \quad (2.3)$$

$$(\delta S)_2 = \frac{1}{2k_{(4)}^2} k_2^{(4)} \int d^4x \sqrt{-g^{(4)}} R_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}, \quad (2.4)$$

e

$$(\delta S)_3 = \frac{1}{2k_{(4)}^2} \int d^4x R \delta \sqrt{-g^{(4)}}. \quad (2.5)$$

Per il primo termine sfruttiamo l'identità di Palatini:

$$\delta R_{\mu\nu} = (\delta \Gamma_{\mu\nu}^\lambda)_{;\lambda} - (\delta \Gamma_{\mu\lambda}^\lambda)_{;\nu}. \quad (2.6)$$

Quindi:

$$(\delta S)_1 = \frac{1}{2k_{(4)}^2} \int d^4x \sqrt{-g^{(4)}} [(\delta g^{\mu\nu} \Gamma_{\mu\nu}^\lambda)_{;\lambda} - (\delta g^{\mu\nu} \Gamma_{\mu\lambda}^\lambda)_{;\nu}]. \quad (2.7)$$

Si dimostra che il termine tra le parentesi quadre, per il teorema di Stokes, può essere settato a zero.

Per quanto riguarda il terzo termine sfruttiamo la seguente proprietà delle matrici quadrate con determinante non nullo: $\delta \det(M) = \det(M) \text{tr}(M^{-1} \delta M)$, allora avremo che:

$$\delta g = \delta \det(g_{\mu\nu}) = g(g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu}) = -g(g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}). \quad (2.8)$$

Quindi:

$$\delta \sqrt{-g^{(4)}} = \frac{-g}{2\sqrt{-g^{(4)}}} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} = -\frac{1}{2} \sqrt{-g^{(4)}} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}. \quad (2.9)$$

Infine la variazione totale è data da:

$$\delta S^{EH} = \frac{1}{2k_{(4)}^2} \int d^4x \sqrt{-g^{(4)}} [R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu}] \delta g^{\mu\nu}. \quad (2.10)$$

Allora le equazioni di Einstein nel vuoto assumono la seguente forma:

$$\frac{2k_{(4)}^2}{\sqrt{-g^{(4)}}} \frac{\delta S^{EH}}{\delta g^{\mu\nu}} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = 0. \quad (2.11)$$

Definiamo il tensore energia impulso:

$$T_{\mu\nu} = -2 \frac{1}{\sqrt{-g^{(4)}}} \frac{\delta S^M}{\delta g^{\mu\nu}}, \quad (2.12)$$

dove S^M è l'azione del campo di materia. Abbiamo che:

$$\delta S^{EH} + \delta S^M = 0. \quad (2.13)$$

Riscrivendo, otteniamo le equazioni di Einstein complete:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = k_{(4)}^2 T_{\mu\nu}, \quad (2.14)$$

dove:

$$k_{(4)}^2 = 8\pi G. \quad (2.15)$$

Nel caso delle n dimensioni è sufficiente riscrivere l'azione di Einstein-Hilbert nel seguente modo:

$${}^{(n)}S^{EH} = \frac{1}{2k_{(n)}^2} \int d^n x \int d^4 x \sqrt{-g^{(n)}} R^{(n)} \quad (2.16)$$

e l'azione per il campo di materia:

$${}^{(n)}S^M = \int d^n x \sqrt{-g^{(n)}} \mathcal{L}_M. \quad (2.17)$$

Come prima, eseguendo variazione si ottiene l'equazione di campo di Einstein in n dimensioni:

$$R_{ab}^{(n)} - \frac{1}{2}g_{ab}^{(n)} R = k_{(n)}^2 T_{ab}. \quad (2.18)$$

2.2 Formalismo delle ipersuperfici

Per lo studio delle geometrie definite in più dimensioni è doveroso definire alcuni strumenti matematici utili al contesto, dato che questo formalismo è centrale nella costruzione del mondo brana, perchè si opera su uno spazio multidimensionale (bulk) e sulle sue sottovarietà (ipersuperfici dette brane).

Definiamo ipersuperficie di dimensione $n - 1$ una sottovarietà Σ di dimensione n . Uno dei modi per identificare una ipersuperficie è di fissare una funzione a costante:

$$f(x^\mu) = f_\star. \quad (2.19)$$

Allora il campo vettoriale:

$$\xi^\mu = g^{\mu\nu} \nabla_\nu f \quad (2.20)$$

sarà normale all'ipersuperficie, cioè sarà ortogonale a tutti i vettori in $T_p \Sigma$. Definiamo anche la sua versione normalizzata:

$$n^\mu = \pm \frac{\xi^\mu}{|\xi_\mu \xi^\mu|^{\frac{1}{2}}}. \quad (2.21)$$

Si possono presentare tre situazioni:

- $n^\mu n_\mu = -1$ ipersuperficie di tipo spazio
- $n^\mu n_\mu = +1$ ipersuperficie di tipo tempo
- $n^\mu n_\mu = 0$ ipersuperficie nulla

Si definisce metrica indotta:

$$(\phi^*)_{ij} = \frac{\partial x^\mu}{\partial y^i} \frac{\partial x^\nu}{\partial y^j} g_{\mu\nu}. \quad (2.22)$$

dove la mappa:

$$\phi : \Sigma \rightarrow \mathcal{M} \quad (2.23)$$

definisce una sottovarietà immersa e ci permette di effettuare il pull-back da \mathcal{M} a Σ . Definiamo proiettore o metrica indotta o prima forma fondamentale:

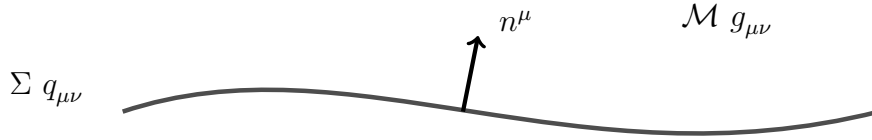


Figura 2.1: Ipersuperfici Σ immerse in una varietà \mathcal{M}

$$q_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - \sigma n_\mu n_\nu \quad (2.24)$$

dove $\sigma = n_\mu n^\mu$.

Consideriamo alcune proprietà del proiettore:

$$\begin{aligned} (q_{\mu\nu} V^\mu) n^\nu &= g_{\mu\nu} V^\mu n^\nu - \sigma n_\mu n_\nu V^\mu n^\nu \\ &= V^\mu n_\mu - \sigma^2 V^\mu n_\mu = 0, \end{aligned} \quad (2.25)$$

$$q_{\mu\nu} V^\mu W^\nu = g_{\mu\nu} V^\mu W^\nu, \quad (2.26)$$

$$q^\mu{}_\lambda q^\lambda{}_\nu = q^\mu{}_\nu. \quad (2.27)$$

2.3 Curvatura intrinseca ed estrinseca

La curvatura intrinseca, che fornisce una valutazione locale (puntuale) della curvatura, è definita in termini del trasporto parallelo ed è misurata dal tensore di Riemann. Il tensore di Riemann si introduce considerando il trasporto parallelo attorno ad un loop

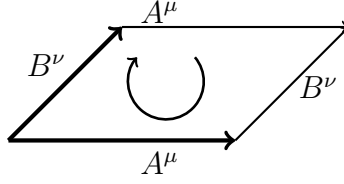


Figura 2.2: Loop infinitesimale definito da due vettori

infinitesimale. Ci aspettiamo che la variazione del vettore, dopo essere stato trasportato parallelamente lungo il percorso indicato in figura (2.3), assuma la forma:

$$\delta V^\rho = R^\rho_{\sigma\mu\nu} V^\sigma A^\mu B^\nu. \quad (2.28)$$

Il tensore di Riemann può essere ottenuto considerando il commutatore di due derivate covarianti:

$$[\Delta_\mu, \Delta_\nu]V^\rho = (\partial_\mu \Gamma^\rho_{\nu\sigma} - \partial_\nu \Gamma^\rho_{\mu\sigma} + \Gamma^\rho_{\mu\lambda} \Gamma^\lambda_{\nu\sigma} - \Gamma^\rho_{\nu\lambda} \Gamma^\lambda_{\mu\sigma})V^\sigma - 2\Gamma^\lambda_{[\mu\nu]} \Delta_\lambda V^\rho, \quad (2.29)$$

dove la quantità tra parentesi corrisponde al tensore di Riemann e l'ultimo termine è il tensore torsione.

La curvatura estrinseca dipende da come la varietà è immersa in uno spazio più grande. Supponiamo di avere una ipersuperficie Σ con campo vettoriale n^μ . La curvatura estrinseca di Σ è definita come la derivata di Lie del tensore di proiezione lungo il campo vettoriale normale n^μ :

$$K_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \mathcal{L}_n g_{\mu\nu} \quad (2.30)$$

oppure tramite la proiezione della derivata di Lie della metrica:

$$K_{\mu\nu} = \frac{1}{2} q^\alpha_\mu q^\beta_\nu \mathcal{L}_n g_{\alpha\beta}. \quad (2.31)$$

E la si può esprimere in termini di derivata covariante in seguente modo:

$$K_{\mu\nu} = q^\alpha_\mu q^\beta_\nu \nabla_{(\alpha} n_{\beta)}. \quad (2.32)$$

Definiamo il vettore accelerazione:

$$a^\mu = n^\nu \nabla_\nu n^\mu. \quad (2.33)$$

Allora la (2.32) è equivalente a :

$$K_{\mu\nu} = \nabla_\mu n_\nu - \sigma n_\mu a_\nu. \quad (2.34)$$

Qualora si avesse il campo vettoriale normale definito dalle geodetiche, allora $a^\mu = 0$ e il tensore di curvatura estrinseca sarebbe semplicemente:

$$K_{\mu\nu} = \nabla_\mu n_\nu. \quad (2.35)$$

La curvatura estrinseca a volte viene chiamata anche seconda forma fondamentale della sottovarietà. Elenchiamo alcune proprietà interessanti. È simmetrico:

$$K_{\mu\nu} = K_{\nu\mu}. \quad (2.36)$$

È ortogonale alla direzione normale:

$$n^\mu K_{\mu\nu} = 0. \quad (2.37)$$

2.4 Equazioni di Gauss e Codazzi

La derivata covariante(per esempio di un tensore T^μ_ν) agente lungo l'ipersuperficie si può definire proiettando la derivata standard sull'ipersuperficie:

$$\widehat{\nabla}_\sigma T^\mu_\nu = q^\alpha_\sigma q^\mu_\beta q^\gamma_\nu \nabla_\alpha T^\beta_\gamma \quad (2.38)$$

oppure di un vettore V^ρ :

$$\widehat{\nabla}_\sigma V^\rho = q^\alpha_\sigma q^\rho_\beta \nabla_\alpha V^\beta. \quad (2.39)$$

Possiamo costruire il tensore di curvatura di Riemann sulla superficie a partire dal commutatore:

$$\begin{aligned} [\widehat{\nabla}_\mu, \widehat{\nabla}_\nu]V^\rho &= (\widehat{\nabla}_\mu \widehat{\nabla}_\nu - \widehat{\nabla}_\nu \widehat{\nabla}_\mu)V^\rho \\ &= q^\delta_\mu q^\alpha_\nu q^\rho_\beta \nabla_\delta (q^\lambda_\alpha q^\beta_\gamma \nabla_\lambda V^\gamma) - q^\delta_\nu q^\alpha_\mu q^\rho_\beta \nabla_\delta (q^\lambda_\alpha q^\beta_\gamma \nabla_\lambda V^\gamma) \\ &= q^\delta_\mu q^\lambda_\nu q^\rho_\gamma \nabla_\delta \nabla_\lambda V^\gamma + q^\delta_\mu q^\lambda_\nu q^\rho_\beta \nabla_\delta (q^\beta_\gamma) \nabla_\lambda V^\gamma + q^\delta_\mu q^\alpha_\nu q^\rho_\gamma \nabla_\delta (q^\lambda_\alpha) \nabla_\lambda V^\gamma \\ &\quad - q^\delta_\nu q^\lambda_\mu q^\rho_\gamma \nabla_\delta \nabla_\lambda V^\gamma - q^\delta_\nu q^\lambda_\mu q^\rho_\beta \nabla_\delta (q^\beta_\gamma) \nabla_\lambda V^\gamma - q^\delta_\nu q^\alpha_\mu q^\rho_\gamma \nabla_\delta (q^\lambda_\alpha) \nabla_\lambda V^\gamma \\ &= q^\delta_\mu q^\lambda_\nu q^\rho_\gamma \nabla_\delta \nabla_\lambda V^\gamma - q^\lambda_\nu K^\rho_\mu n_\gamma \nabla_\lambda V^\gamma - q^\rho_\gamma K_{\mu\nu} n^\lambda \nabla_\lambda V^\gamma \\ &\quad - q^\delta_\nu q^\lambda_\mu q^\rho_\gamma \nabla_\delta \nabla_\lambda V^\gamma + q^\lambda_\mu K^\rho_\nu n_\gamma \nabla_\lambda V^\gamma + q^\rho_\gamma K_{\nu\mu} n^\lambda \nabla_\lambda V^\gamma \\ &= q^\delta_\mu q^\lambda_\nu q^\rho_\gamma \nabla_\delta \nabla_\lambda V^\gamma + K^\rho_\mu K_{\nu\gamma} V^\gamma + K_{\mu\nu} K^\rho_\gamma V^\gamma \\ &\quad - q^\delta_\nu q^\lambda_\mu q^\rho_\gamma \nabla_\delta \nabla_\lambda V^\gamma - K^\rho_\nu K_{\mu\gamma} V^\gamma - K_{\nu\mu} K^\rho_\gamma V^\gamma \\ &= q^\delta_\mu q^\lambda_\nu q^\rho_\gamma \nabla_\delta \nabla_\lambda V^\gamma - q^\delta_\nu q^\lambda_\mu q^\rho_\gamma \nabla_\delta \nabla_\lambda V^\gamma + K^\rho_\mu K_{\gamma\nu} V^\gamma - K^\rho_\nu K_{\gamma\mu} V^\gamma \\ &= q^\delta_\mu q^\lambda_\nu q^\rho_\sigma (\nabla_\delta \nabla_\lambda - \nabla_\lambda \nabla_\delta) + (K^\rho_\mu K_{\gamma\nu} - K^\rho_\nu K_{\gamma\mu}) V^\gamma \\ &= q^\delta_\mu q^\lambda_\nu q^\rho_\sigma q^\alpha_\gamma R^\gamma_{\rho\delta\lambda} V^\gamma + (K^\rho_\mu K_{\gamma\nu} - K^\rho_\nu K_{\gamma\mu}) V^\gamma. \end{aligned} \quad (2.40)$$

Allora il tensore di Riemann sull'ipersuperficie è dato da:

$$\widehat{R}^{\rho}_{\sigma\mu\nu} = q^{\rho}_{\alpha} q^{\beta}_{\rho} q^{\gamma}_{\mu} q^{\delta}_{\nu} R^{\alpha}_{\beta\gamma\delta} + (K^{\rho}_{\mu} K_{\sigma\nu} - K^{\rho}_{\nu} K_{\sigma\mu}). \quad (2.41)$$

Questa relazione viene chiamata equazione di Gauss.

Con lo stesso spirito si ricava l'equazione di Codazzi:

$$\widehat{\nabla}_{\mu} K_{\nu}{}^{\mu} - \widehat{\nabla}_{\nu} K = q^{\sigma}_{\nu} R_{\rho\sigma} n^{\rho}. \quad (2.42)$$

2.5 Spazio anti-de Sitter

Lo spazio Anti-de Sitter (AdS) $_{d+1}$ è uno spazio massimamente simmetrico con la costante cosmologica negativa e può essere immerso nello spazio $(d+1)$ -dimensionale di Minkowski $(X_1, X_2, \dots, X_n) \in \mathbb{R}^{d,2}$ con la segnatura $\eta = (-, +, +, \dots, +, +, -)$ e quindi:

$$ds^2 = -(dX^0)^2 + (dX^1)^2 + \dots + (dX^d)^2 - (dX^{d+1})^2 = \eta_{MN} dX^M dX^N. \quad (2.43)$$

Tale metrica definisce una ipersuperficie definita dall'equazione:

$$\eta_{MN} X^M X^N = -(X^0)^2 + \sum_{i=1}^d t_i (X^i)^2 - (X^{d+1})^2 = -L^2, \quad (2.44)$$

dove L è il raggio di curvatura dello spazio anti-de Sitter. AdS è invariante sotto il gruppo di trasformazioni $O(d, 2)$.

2.6 Le coordinate gaussiane normali

Le coordinate normali gaussiane sono particolarmente utili quando si vuole lavorare su una ipersuperficie Σ di dimensione $N - 1$ immersa in una varietà \mathcal{M} di dimensione N . La costruzione di tali coordinate avviene nel seguente modo: innanzitutto in ogni punto p di Σ si definisce un vettore di modulo unitario n^a appartenente allo spazio tangente di \mathcal{M} ($T_p\mathcal{M}$), ortogonale ad ogni vettore $T_p\Sigma$ cioè normale alla superficie Σ . Successivamente per ogni punto p di Σ di coordinate $(x^1, x^2, \dots, x^{n-1})$ si prende un'unica geodetica col vettore tangente n^a in p . Definiamo il punto q di coordinate $(x^1, x^2, \dots, x^{n-1}, t)$ localizzato sulla geodetica in un intorno di Σ con x^i le coordinate di p . Tali coordinate sono dette coordinate gaussiane normali.

In ogni punto p di \mathcal{M} sono definiti i campi vettoriali tangenti alle curve coordinate e i vettori $(\partial_1, \partial_2, \dots, \partial_{n-1}, \partial_t)$ ne costituiscono una base per $T_p\mathcal{M}$.

Ridefiniamo: $(\partial_i)^\mu = (w_i)^\mu$ e $(\partial_t)^\mu = n^\mu$.

Per le proprietà del tensore metrico abbiamo che:

$$g(\vec{v}, \vec{w}) = g_{\mu\nu} = g(\vec{e}_\mu, \vec{e}_\nu) v^\mu w^\nu = g\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}, \frac{\partial}{\partial x^\nu}\right) v^\mu w^\nu. \quad (2.45)$$

Per bilinearità si ottiene:

$$g(\partial_\mu, \partial_\nu) = g_{\mu\nu} + n_\mu n_\nu. \quad (2.46)$$

Quindi in coordinate gaussiane normali la metrica cinquedimensionale può essere riscritta nel seguente modo:

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + dy^2. \quad (2.47)$$

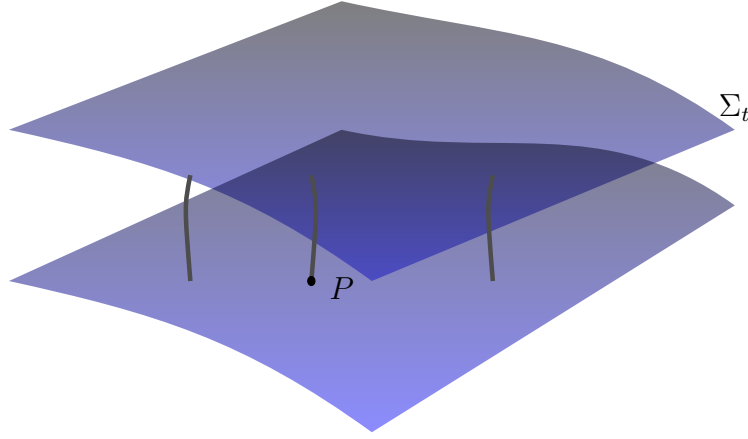


Figura 2.3: Geodetiche ortogonali attraverso la superficie Σ

2.7 Tensore di Weyl

Il tensore di curvature di Weyl codifica tutte le informazioni contenute nel tensore di Riemann a parte le contrazioni (cioè il contenuto del tensore di Ricci).

È definito nel seguente modo:

$${}^{(n)}C_{ABCD} = -\frac{1}{n-2}(g_{A[C} {}^{(n)}R_{D]B} - g_{B[C} {}^{(n)}R_{D]A}) + \frac{2}{(n-1)(n-2)} {}^{(n)}R g_{A[C} g_{D]B} + {}^{(4)}R_{ABCD}. \quad (2.48)$$

Qualunque contrazione degli indici del tensore di Weyl dà zero come risultato e ha le stesse simmetrie del tensore di Riemann. Mentre il tensore di Ricci è correlato col tensore di energia impulso, il tensore di Weyl racchiude le informazioni sulle forze di marea che contribuiscono alla curvatura dello spaziotempo.

2.8 Condizioni di giunzione

Nelle teorie gravitazionali spesso ci si imbatte in discontinuità nel passaggio attraverso una superficie, situazione fisica in cui è necessario introdurre condizioni di giunzione. Ad esempio, nel caso delle stelle, si ha una discontinuità sulla superficie dovuta alla differente scelta di metrica esterna e interna. Un altro esempio è dato nell'ambito dei modelli con le brane che separano il bulk in due regioni differenti. La curvatura estrinseca indotta sulla brana può variare in funzione del lato del bulk dal quale la si studia. Il problema è

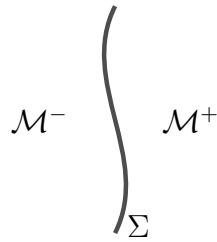


Figura 2.4: Bulk cinquedimensionale separato in due regioni dalla brana

stato affrontato dal punto di vista geometrico da Israel che si basò sui precedenti lavori di Darmois, Lanczos e Sen. Possiamo valutare, tramite la curvatura estrinseca, le geometrie nelle quali la brana è immersa. Si tratta di valutare le equazioni di campo sulla brana nel limite $y \rightarrow \pm 0$. Il nostro mondo quindi può essere rappresentato tramite l'equazione di Einstein cinquedimensionale:

$${}^{(5)}G_{ab} = 8\pi G S_{ab} \delta(y). \quad (2.49)$$

Israel derivò la seguente condizione di giunzione:

$$[K_{\mu\nu}] = -8\pi G_5 (S_{\mu\nu} - \frac{1}{3} q_{\mu\nu} S), \quad (2.50)$$

dove $[K_{\mu\nu}] = K_{\mu\nu}^+ - K_{\mu\nu}^-$ è il salto nella curvatura estrinseca attraverso la superficie.

2.9 Equazioni di campo sulla 3-brana

Dal punto di vista della teoria del mondo-brana, lo spaziotempo in cui viviamo coincide con la varietà a quattro dimensioni (\mathcal{M}^4, q_{ab}) immersa all'interno del bulk rappresentato da una varietà cinquedimensionale $(\mathcal{M}^5, g_{\mu\nu})$. Definiamo il vettore unitario n_α , vettore

ortogonale ad ogni vettore in \mathcal{M}^4 oppure alla varietà \mathcal{M}^4 stessa. E definiamo la metrica indotta, cioè la metrica sulla brana, tramite la relazione:

$$q_{ab} = g_{ab} - n_a n_b. \quad (2.51)$$

Si parte con equazione di Gauss:

$${}^{(4)}R^a{}_{bcd} = {}^{(5)}R^e{}_{fgh} q_e^a q_b^f q_c^g q_d^h + K^a{}_c K_{bd} - K^a{}_d K_{bc}. \quad (2.52)$$

Contraendo gli indici a e b e sfruttando la relazione (2.19) si ottiene:

$${}^{(4)}R_{fh} = {}^{(5)}R_{fgh} q_b^f q_d^h - {}^{(5)}R^e{}_{fgh} q_b^f q_d^h n_e n^g + K K_{bd} - K^a{}_d K_{ba}. \quad (2.53)$$

Ora contraendo gli indici f e h del tensore ${}^{(4)}R^f{}_h$ avremo:

$${}^{(4)}R = {}^{(5)}R - 2{}^{(5)}R_{fh} n^f n^h + 2{}^{(5)}R^e{}_{fgh} n_e n^f n^g n^h + K^2 - K^{ab}{}_{ab} \quad (2.54)$$

Quindi sostituendo la curvatura scalare e il tensore di Ricci nel tensore di Einstein otterremo:

$$\begin{aligned} {}^{(4)}G_{ab} = & {}^{(5)}R_{cd} - \frac{1}{2}{}^{(5)}R g_{cd} q_a^c q_b^d + {}^{(5)}R_{cd} n^c n^d q_{ab} - {}^{(5)}R^c{}_{def} n_c n^d q_a^e q_b^f + \\ & K K_{ab} - K^c{}_b K_{ac} - \frac{1}{2}(k^2 - K^{cd} K_{cd}) q_{ac}. \end{aligned} \quad (2.55)$$

Si procede scomponendo il tensore di Riemann in curvatura scalare, tensore di Ricci e tensore di Weyl:

$${}^{(5)}R_{abcd} = \frac{2}{3}(g_{a[c} {}^{(5)}R_{d]b} - g_{b[c} {}^{(5)}R_{d]a}) - \frac{1}{6}g_{a[c} g_{d]b} {}^{(5)}R + {}^{(5)}C_{abcd} \quad (2.56)$$

e facendo uso delle equazioni di Einstein in cinque dimensione allora dalla (2.23) si ricava:

$$\begin{aligned} {}^{(4)}G_{ab} = & \frac{2k_5^2}{3}[T_{cd} q_a^c q_b^d + (T_{cd} n^c n^d - \frac{1}{4}T^c{}_c) q_{ab}] + \\ & K K_{ab} - K_a{}^d K_{bd} - \frac{1}{2}q_{ab}(K^2 - K^{ef} K_{ef}) - {}^{(5)}C^e{}_{fcd} n_e n^c q_a^f q_b^d. \end{aligned} \quad (2.57)$$

Dove l'ultimo termine rappresenta la proiezione del tensore di Weyl sulla brana. Tramite l'equazione di Codazzi:

$$D_f K_e^f - D_e K = {}^{(5)}R_{gh} n^h q_e^g, \quad (2.58)$$

dove K_e^f è il tensore di curvatura estrinseca che soddisfa la relazione:

$$K_{ef} = q_e^a q_f^b \Delta_a n_b \quad (2.59)$$

e K la sua traccia ottenuta contraendo l'indice alto e basso: $K = K_e^e$.

Ora sostituendo equazione di Einstein cinquedimensionale in (2.26), si ottiene:

$$D_f K_e^f - D_e K = k_{(5)}^2 T_{gh} n^h q_e^g. \quad (2.60)$$

Finora non abbiamo assunto nessuna particolare simmetria, le equazioni (2.25) e (2.28) sono del tutto generali e possono essere applicate a qualunque situazione fisica.

Consideriamo il tensore energia impulso totale:

$$T_{ab} = T_{ab}^{bulk} + T_{ab}^{brana}. \quad (2.61)$$

Assumiamo un bulk vuoto ovvero che non presenti nessuno scambio di energia o materia tra il bulk e la brana. Quindi l'interazione è solamente gravitazionale. Dunque il tensore assume la forma:

$$T_{ab}^{bulk} = -\Lambda g_{ab}. \quad (2.62)$$

Per cui il tensore energia impulso totale(in coordinate gaussiane normali) diventa:

$$T_{ab} = -\Lambda g_{ab} + \delta(y) S_{ab} \quad (2.63)$$

dove

$$S_{ab} = -\sigma q_{ab} + \tau_{ab} \quad (2.64)$$

mentre σ rappresenta energia del vuoto e tensione della brana in cinque dimensioni. Invece τ_{ab} è tensore energia impulso sulla brana. Ora riscriviamo l'equazione di Einstein cinquedimensionale servendoci della (2.30):

$${}^{(5)}G_{ab} = -k_{(5)}^2 \Lambda g_{ab} \quad (2.65)$$

e la inseriamo nella (2.25). Quindi la valutiamo sulla brana cioè eseguendo il limite $y \rightarrow \pm 0$. Infine risulta:

$${}^{(4)}G_{ab} = -\frac{1}{2} \Lambda q_{ab} + K K_{ab} - K^c_b K_{ac} - \frac{1}{2} q_{ab} (K^2 - K^{cd} K_{cd}) - {}^{(5)}C_{defg} n^d n^e q_a^f q_b^g. \quad (2.66)$$

La brana divide il bulk in due regioni che possono avere una curvatura estrinseca differente, la connessione tra queste due varietà è determinata dalla condizione di giunzione d'Israel data da:

$$[K_{ab}] = -k_5^2 (S_{ab} - \frac{1}{3} q_{ab} S). \quad (2.67)$$

Applicando la trasformazione \mathbb{Z}_2 :

$$\begin{aligned} K_{ab}^+ - K_{ab}^- &= K_{ab}^+ - (-K_{ab}^+) = -k_5^2 (S_{ab} - \frac{1}{3} q_{ab} S), \\ K_{ab} &= -\frac{1}{2} k_5^2 (S_{ab} - \frac{1}{3} q_{ab} S). \end{aligned} \quad (2.68)$$

Nella seconda equazione viene posto $K_{ab}^+ = K_{ab}^-$.

Quindi la condizione di giunzione d'Israel, imponendo la simmetria \mathbb{Z}_2 , determina la curvatura estrinseca K_{ab} tramite il tensore energia impulso sulla brana. Ora la riscriviamo usando l'equazione (2.32):

$$K_{ab} = -\frac{1}{2}[T_{ab} + \frac{1}{3}(\sigma - T)q_{ab}]. \quad (2.69)$$

Infine per ottenere l'equazione di campo sulla brana basta sostituire la (2.36) nella (2.34), e pongo ${}^{(5)}C_{defg}n^d n^e q_a^f q_b^g = E_{ab}$. Quindi avremo:

$${}^{(4)}G_{ab} = -\Lambda_4 q_{ab} + 8\pi G_N \tau_{ab} + k_5^4 \pi_{ab} - E_{ab}, \quad (2.70)$$

dove:

$$\Lambda_4 = \frac{1}{2}k_5^2(\Lambda + \frac{1}{6}k_5^2\sigma^2), \quad (2.71)$$

$$G_N = \frac{k_5^2\sigma}{48\pi}, \quad (2.72)$$

$$\pi_{ab} = -\frac{1}{4}\tau_{ac}\tau_b^c + \frac{1}{12}\tau\tau_{ab} + \frac{1}{8}q_{ab}\tau_{cd}\tau^{cd} - \frac{1}{24}q_{ab}\tau^2. \quad (2.73)$$

Dall'equazione (2.70) si deduce che la costante gravitazionale di Newton sia strettamente connessa all'energia del vuoto σ che, nel caso fosse negativa, causerebbe il segno sbagliato. Quindi non è difficile convincersi del fatto che una teoria fisica consistente possa essere ottenuta solo quando la tensione sulla brana è positiva: in questo caso si recupera, a basse energie, l'equazione di Einstein classica. Il termine π_{ab} rappresenta la correzione ad alte energie e risulta quadratico in τ_{ab} . Infine il termine E_{ab} rappresenta la proiezione del tensore di Weyl sulla brana e quindi tiene conto degli effetti gravitazionali del bulk sulla brana.

Capitolo 3

Stelle nel mondo-brana

Stelle compatte, nane bianche e stelle a neutroni, sono oggetti finali dell'evoluzione stellare. Si distinguono per un'elevata densità di materia e dimensioni ridotte rispetto alle loro compagne luminose. Le nane bianche sono caratterizzate da un raggio di circa 5000 km e una massa di 1.2-1.4 masse solari; inoltre il loro collasso gravitazionale viene impedito dal principio di esclusione di Pauli che non permette a più di due elettroni di occupare un singolo livello energetico, quindi viene esercitata una pressione che contrasta la gravità. Invece i valori tipici per le stelle a neutroni sono: massa di circa 1.4-1.5 masse solari e il raggio attorno ai 12 km. Anche in questo caso l'equilibrio viene garantito dal principio di esclusione che in questo caso agisce sui neutroni. In relatività generale le previsioni teoriche delle proprietà stellari sono effettuate tramite equazioni di Tolman-Oppenheimer-Volkof (TOV) e introducendo particolari equazioni di stato. Un approccio alternativo alle stelle può essere svolto tramite lo studio delle loro proprietà dal punto di vista dello scenario del mondo-brana. In questo modo si apportano delle modifiche alle classiche equazioni di TOV. Allora questa particolare geometria ci permette di introdurre nuovi gradi di libertà tramite i termini quadratici di pressione e densità e termini non locali derivanti dal tensore di Weyl. Inoltre si vedrà come questi gradi di libertà modificano la relazione, tra la massa e il raggio limite ($\frac{GM}{R} \leq \frac{4}{9}$), prevista dalla relatività generale.

3.1 Stelle in 4 dimensioni

Definiamo stella un oggetto statico a simmetria sferica. Assumiamo le seguenti condizioni al contorno: la parte interna della stella è composta dal fluido perfetto e cioè si ha una distribuzione uniforme di materia e senza interazioni interne. Quindi il tensore energia impulso è dato dalla (3.1). Invece all'esterno, per il teorema di Birkhoff, lo spaziotempo

è descritto dalla soluzione di Schwarzschild. Inoltre sul bordo la soluzione esterna deve coincidere con quella interna.

$$T_{\mu\nu} = \rho u_\mu u_\nu + p(g_{\mu\nu} + u_\mu u_\nu). \quad (3.1)$$

dove p la pressione, ρ la densità di energia e u^μ la quadrivelocità inoltre $u_\mu u^\mu = -1$. Consideriamo una metrica generale statica a simmetria sferica:

$$ds^2 = -e^{2\alpha(r)} dt^2 + e^{2\beta(r)} dr^2 + r^2 d\Omega^2. \quad (3.2)$$

Risolviamo l'equazione di Einstein per la parte interna. Partendo dai simboli di Christoffel:

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \frac{1}{2} g^{\lambda\sigma} (\partial_\mu g_{\nu\sigma} + \partial_\nu g_{\sigma\mu} - \partial_\sigma g_{\mu\nu}). \quad (3.3)$$

Quelli non nulli sono:

$$\begin{aligned} \Gamma_{tt}^t &= \partial_r \alpha & \Gamma_{tt}^r &= e^{2(\alpha-\beta)} \partial_r \alpha & \Gamma_{tr}^t &= \partial_r \alpha \\ \Gamma_{rr}^t &= e^{2(\beta-\alpha)} \partial_r \beta & \Gamma_{tr}^r &= \partial_r \beta & \Gamma_{rr}^r &= \partial_r \beta \\ \Gamma_{r\theta}^\theta &= \frac{1}{r} & \Gamma_{\theta\theta}^r &= -r e^{-2\beta} & \Gamma_{r\phi}^\phi &= \frac{1}{r} \\ \Gamma_{\phi\phi}^r &= -r e^{-2\beta} \sin^2 \theta & \Gamma_{\phi\phi}^\theta &= -\sin \theta \cos \theta & \Gamma_{\theta\phi}^\phi &= \frac{\cos \theta}{\sin \theta}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Ora calcoliamo i componenti del tensore di Ricci dato dalla contrazione del tensore di Riemann:

$$R^\rho_{\sigma\rho\nu} = R_{\sigma\nu} = \partial_\rho \Gamma_{\nu\sigma}^\rho - \partial_\nu \Gamma_{\rho\sigma}^\rho + \Gamma_{\rho\lambda}^\rho \Gamma_{\nu\sigma}^\lambda - \Gamma_{\nu\lambda}^\rho \Gamma_{\rho\sigma}^\lambda. \quad (3.5)$$

Quindi:

$$\begin{aligned} R_{tt} &= e^{2(\alpha-\beta)} [\partial_r^2 \alpha + (\partial_r \alpha)^2 - \partial_r \alpha \partial_r \beta + \frac{2}{r} \partial_r \beta], \\ R_{rr} &= -\partial_r^2 \alpha - (\partial_r \alpha)^2 + \partial_r \alpha \partial_r \beta + \frac{2}{r} \partial_r \beta, \\ R_{\theta\theta} &= e^{-2\beta} [r(\partial_r \beta - \partial_r \alpha) - 1] + 1, \\ R_{\phi\phi} &= \sin^2 \theta R_{\theta\theta} \end{aligned} \quad (3.6)$$

e lo scalare di curvatura:

$$R = R^\mu_{\mu} = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = -2e^{-2\beta} [\partial_r^2 \alpha + (\partial_r \alpha)^2 - \partial_r \alpha \partial_r \beta + \frac{2}{r} (\partial_r \alpha - \partial_r \beta) + \frac{1}{r^2} (1 - e^{2\beta})]. \quad (3.7)$$

Successivamente dalla definizione del tensore di Einstein

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{R}{2} g_{\mu\nu}. \quad (3.8)$$

si ricavano i suoi componenti non nulli:

$$\begin{aligned}
G_{tt} &= \frac{1}{r^2} e^{2(\alpha-\beta)} (2r\partial_r\beta - 1 + e^{2\beta}), \\
G_{rr} &= \frac{1}{r^2} (2r\partial_r\alpha + 1 - e^{2\beta}), \\
G_{\theta\theta} &= r^2 e^{-2\beta} [\partial_r^2\alpha + (\partial_r\alpha)^2 - \partial_r\alpha\partial_r\beta + \frac{1}{r}(\partial_r\alpha - \partial_r\beta)], \\
G_{\phi\phi} &= \sin^2\theta G_{\theta\theta}
\end{aligned} \tag{3.9}$$

Riscriviamo il tensore energia impulso in forma matriciale:

$$T_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} e^{2\alpha}\rho & & & \\ & e^{2\beta}p & & \\ & & r^2p & \\ & & & r^2\sin^2\theta p \end{bmatrix}. \tag{3.10}$$

Infine dall'equazione di campo di Einstein otteniamo tre equazioni (l'equazione per $\phi\phi$ è proporzionale all'equazione per $\theta\theta$):

$$\begin{aligned}
\frac{1}{r^2} e^{-2\beta} (2r\partial_r\beta - 1 + e^{2\beta}) &= 8\pi G\rho, \\
\frac{1}{r^2} e^{-2\beta} (2r\partial_r\alpha + 1 - e^{2\beta}) &= 8\pi Gp, \\
e^{-2\beta} [\partial_r^2\alpha + (\partial_r\alpha)^2 - \partial_r\alpha\partial_r\beta + \frac{1}{r}(\partial_r\alpha - \partial_r\beta)] &= 8\pi Gp.
\end{aligned} \tag{3.11}$$

Per tt è comodo sostituire $\beta(r)$ con $m(r) = \frac{1}{2G}(r - re^{-2\beta})$, ottenendo:

$$\frac{dm}{dr} = 4\pi r^2\rho. \tag{3.12}$$

Invece l'equazione per rr in termini di $m(r)$ può essere riscritta nel seguente modo:

$$\frac{d\alpha}{dr} = \frac{Gm(r) + 4\pi Gr^3p}{r[r - 2Gm(r)]}. \tag{3.13}$$

Dalla legge di conservazione di energia e impulso $\Delta_\mu T^{\mu\nu} = 0$, si ottiene:

$$(\rho + p) \frac{d\alpha}{dr} = -\frac{dp}{dr}. \tag{3.14}$$

Combinando le tre equazioni precedenti avremo:

$$\frac{dp}{dr} = \frac{(\rho + p)[Gm(r) + 4\pi Gr^3p]}{r[r - 2Gm(r)]}. \tag{3.15}$$

Questa è l'equazione di Tolman-Oppenheimer-Volkoff, oppure l'equazione di equilibrio idrostatico, che nel limite Newtoniano ($p \ll \rho$, $Gm(r) \ll r$) si riduce a:

$$\frac{dp}{dr} \approx -G \frac{\rho m(r)}{r^2}. \quad (3.16)$$

Le tre equazioni ((3.12), (3.14), e (3.13)) e quattro funzioni ($m(r)$, $p(r)$, $\rho(r)$, $\alpha(r)$) formano un insieme non completo. Per avere un insieme chiuso occorre introdurre una funzione di stato $p = p(\rho)$. Consideriamo una stella incompressibile di raggio R con distribuzione di densità costante. Per $r < R$ la distribuzione di massa è data da:

$$m(r) = \frac{4}{3} \pi r^3 \rho. \quad (3.17)$$

Introduciamo inoltre le seguenti condizioni al contorno: $m(0) = 0$, $p(0) = p_c$, $m(R) = M$ e $p(R) = 0$.

Da questa impostazione segue la metrica:

$$ds^2 = - \left(\frac{3}{2} \sqrt{1 - \frac{2Gm}{R}} - \frac{1}{2} \sqrt{1 - \frac{2Gmr^2}{R^3}} \right)^2 dt^2 + \left(1 - \frac{2Gmr^2}{R^3} \right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2. \quad (3.18)$$

Si possono osservare interessanti proprietà:

$$\frac{GM}{R} < \frac{4}{9}, \quad (3.19)$$

$$R_{MAX} = (3\pi G\rho)^{-\frac{1}{2}}, \quad (3.20)$$

$$M_{MAX} = \frac{4}{9} (3\pi g^3 \rho)^{-\frac{1}{2}}. \quad (3.21)$$

La (3.19) rappresenta la condizione di stabilità di una stella cioè il valore estremo che può assumere affinché non collassi in un buco nero. Invece la (3.20) e (3.21) forniscono rispettivamente raggio e massa massimi.

3.2 Equazione di Tolman-Oppenheimer-Volkoff nel mondo brana

La correzione dovuta alla geometria cinquedimensionale può essere introdotta considerando un tensore energia impulso effettivo:

$$G_{ab} = k^2 T_{ab}^{eff}, \quad (3.22)$$

dove il tensore effettivo si ottiene considerando la (2.70). Quindi:

$$T_{ab}^{eff} = \tau_{ab} + \frac{6}{\sigma}\pi_{ab} - \frac{1}{k^2}E_{ab}, \quad (3.23)$$

dove:

- $\tau_{ab} = \rho u_a u_b + p h_{ab}$ è il tensore energia impulso classico per il fluido perfetto.
- π_{ab} è il termine che tiene conto degli effetti locali ad alte energie. Per il fluido perfetto dato dalla (3.1). Quindi si ottiene:

$$\pi_{ab} = \frac{1}{12}\rho^2 u_a u_b + \frac{1}{12}\rho(\rho + 2p)h_{ab}. \quad (3.24)$$

- E_{ab} è il termine che rappresenta la correzione dovuta agli effetti gravitazionali esercitati dal bulk sulla brana ed è dato dalla proiezione della curvatura di Weyl sulla brana. Scomponendolo nelle sue componenti non riducibili, si ottiene:

$$E_{ab} = -\frac{6}{k^2\sigma}[\mathcal{U}u_a u_b + \mathcal{P}r_a r_b + \frac{(\mathcal{U} - \mathcal{P})}{3}h_{ab} + 2Q_{(a}u_{b)}], \quad (3.25)$$

dove r_a è il vettore radiale, σ tensione della brana e \mathcal{U} e \mathcal{P} sono rispettivamente densità di energia e pressione non locali. Il termine Q_a può essere interpretato come flusso di energia sulla brana, ed è nullo se si assume la simmetria statica sferica.

Osserviamo che per $E_{ab} \rightarrow 0$ e $\sigma^{-1} \rightarrow 0$ si torna alla relatività generale quattrodimensionale.

Quindi le componenti di E_{ab} sono:

$$\frac{6}{\sigma}\pi_{ab} = \frac{1}{2\sigma} \begin{bmatrix} e^{2\alpha}\rho^2 & & & \\ & e^{2\beta}\rho(\rho + 2p) & & \\ & & r^2\rho(\rho + 2p) & \\ & & & r^2 \sin^2 \theta \rho(\rho + 2p) \end{bmatrix}, \quad (3.26)$$

$$-\frac{1}{k^2}E_{ab} = \frac{6}{k^4\sigma} \begin{bmatrix} e^{2\alpha}\mathcal{U} & & & \\ & e^{2\beta}\frac{1}{3}(\mathcal{U} + 2\mathcal{P}) & & \\ & & r^2\frac{1}{3}(\mathcal{U} - \mathcal{P}) & \\ & & & r^2 \sin^2 \theta \frac{1}{3}(\mathcal{U} - \mathcal{P}) \end{bmatrix}. \quad (3.27)$$

e il tensore τ_{ab} corrisponde a (3.10).

Riportiamo le componenti dell'equazione di campo di Einstein (3.22):

$$\begin{aligned} \frac{1}{k_4^2}G_{00} &= \rho e^{2\alpha} + \frac{\rho^2}{2\sigma}e^{2\alpha} + \frac{6}{k_4^4\sigma}\mathcal{U}e^{2\alpha}, \\ \frac{1}{k_4^2}G_{11} &= p e^{2\beta} + \frac{1}{2\sigma}\rho(\rho + 2p)e^{2\beta} + \frac{2}{k_4^4\sigma}\mathcal{U}e^{2\beta} + \frac{4}{k_4^4\sigma}\mathcal{P}e^{2\beta}, \\ \frac{1}{k_4^2}G_{22} &= p r^2 + \frac{1}{2\sigma}\rho(\rho + 2p)r^2 + \frac{2}{k_4^4\sigma}\mathcal{U}r^2 - \frac{2}{k_4^4\sigma}\mathcal{P}r^2, \end{aligned} \quad (3.28)$$

dove le componenti del tensore di Einstein sono dati dalla(3.9).

Si nota che possiamo riscrivere la pressione e la densità come quantità effettive da inserire nelle equazioni di TOV classiche.

$$\begin{aligned}\rho^{eff} &= \rho + \frac{\rho^2}{2\sigma} + \frac{6\mathcal{U}}{k_4^4\sigma}, \\ p'^{eff} &= p + \frac{1}{2\sigma}\rho(\rho + 2p) + \frac{2}{k_4^2\sigma}(\mathcal{U} + 2\mathcal{P}), \\ p''^{eff} &= p + \frac{1}{2\sigma}\rho(\rho + 2p) + \frac{2}{k_4^2\sigma}(\mathcal{U} - \mathcal{P}).\end{aligned}\tag{3.29}$$

Infine, risolvendo le (3.28), si ottengono:

$$\frac{d\tilde{m}}{dr} = 4\pi r^2 \rho^{eff},\tag{3.30}$$

$$\frac{dp}{d\alpha} = -(\rho + p),\tag{3.31}$$

$$\frac{d\alpha}{dr} = \frac{G\tilde{m} + 4\pi Gr^3 p'^{eff}}{r(r - 2G\tilde{m})},\tag{3.32}$$

$$\frac{d\mathcal{U}}{dr} = -2\frac{d\mathcal{P}}{dr} - \frac{6\mathcal{P}}{r} - (4\mathcal{U} + 2\mathcal{P})\frac{d\alpha}{dr} - 3\frac{\rho + p}{\sigma}\frac{d\rho}{dr},\tag{3.33}$$

dove:

$$\tilde{m}(r) = 4\pi \int_a^r \rho'^{eff}(r') r'^2 dr'.\tag{3.34}$$

Si ha la soluzione interna per $a = 0$ e $r < R$ e soluzione esterna per $a = R$ e $r > R$.

Le quattro equazioni (3.30), (3.31), (3.32), (3.33), e le sei funzioni $\tilde{m}(r)$, $\rho(r)$, $p(r)$, $\alpha(r)$, \mathcal{U} e \mathcal{P} rappresentano un insieme non chiuso. Quindi occorre introdurre una funzione di stato $p = p(\rho)$ e una relazione tra \mathcal{P} e \mathcal{U} .

Possiamo schematizzare una stella nel modello BW(mondo-brana) nel seguente modo:

- Interno: si ha densità e pressione non nulle e in genere $\mathcal{U} = \mathcal{U}^-$ e $\mathcal{P} = \mathcal{P}^-$ diversi da zero.
- Esterno: in genere abbiamo densità e pressione nulle ma corrispondenti quantità effettive diverse da zero. Quindi l'esterno è caratterizzato da una metrica perturbata da $\mathcal{U} = \mathcal{U}^+$ e $\mathcal{P} = \mathcal{P}^+$. Settando a zero queste grandezze si riguadagna la soluzione classica di Schwarzschild.

- Frontiera: si impone la condizione di giunzione di Israel-Darmois sulla superficie stellare:

$$[G_{ab}r^b]_{\Sigma} = 0, \quad (3.35)$$

dove $[f]_{\Sigma} \equiv f(R^+) - f(R^-)$. Usando l'equazione di campo di Einstein si ottiene:

$$[T_{ab}{}^{eff}r^b]_{\Sigma} = [\rho^{eff}]_{\Sigma} = 0. \quad (3.36)$$

Da cui l'equazione più generale per la superficie della stella assume la seguente forma:

$$p + \frac{1}{2\sigma}\rho(\rho + 2p) + \frac{2}{k_4^4\sigma}(\mathcal{U}^- - \mathcal{U}^+ + 2\mathcal{P}^- - 2\mathcal{P}^+) = 0. \quad (3.37)$$

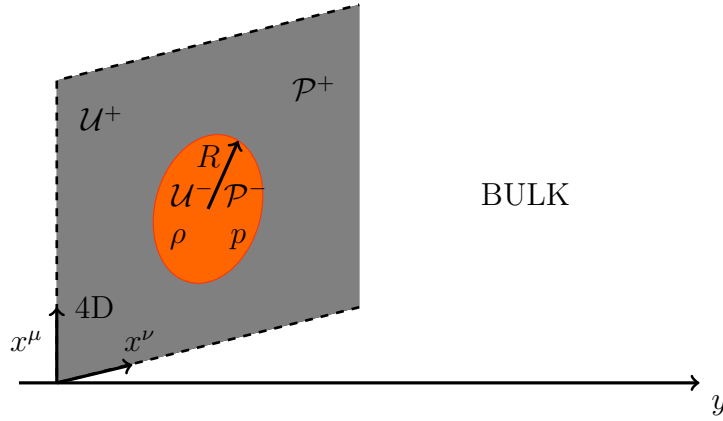


Figura 3.1: Rappresentazione di una stella sulla brana all'interno del bulk

Analizziamo l'equazione (3.37). Nel caso classico è fisicamente ragionevole porre $p(R) = 0$, cioè che la pressione si annulli sulla superficie della stella. Nel mondo-brana non esiste più questo vincolo e nell'equazione compaiono dei termini di pressione. In seguito assumiamo $p(R) = 0$, allora:

$$(4\pi G)^2 \rho^2 + \mathcal{U}^- + 2\mathcal{P}^- = \mathcal{U}^+ + 2\mathcal{P}^+. \quad (3.38)$$

Analizzando questa equazione di equilibrio si possono fare diverse scelte per costruire la metrica. In particolare:

- Assumendo $\mathcal{U}^- = \mathcal{P}^- = 0$ e $\rho(R) \neq 0$ si deve necessariamente avere $\mathcal{U}^+ \neq 0$ oppure $\mathcal{P}^+ \neq 0$.
- D'altra parte si può scegliere di porre: $\mathcal{U}^+ = \mathcal{P}^+ = 0$ (che all'esterno corrisponde alla soluzione di Schwarzschild) allora $\mathcal{U}^- \neq 0$ oppure $\mathcal{P}^- \neq 0$.

Inoltre l'assunzione $\mathcal{P}^- = 0$ è consistente con isotropia della pressione nella stella.

Soluzione per la parte interna

Analizziamo il caso in cui si ha $\mathcal{U}^- = \mathcal{P}^- = 0$ e densità uniforme. Allora la soluzione interna non è altro che la correzione ad alta energia della soluzione della relatività generale. La funzione di massa è:

$$\widehat{m}(r) = \frac{4}{3}\pi r^3\left(\rho + \frac{\rho^2}{2\sigma}\right). \quad (3.39)$$

Allora il limite superiore per la massa si ottiene dalla:

$$\frac{GM}{R} \leq \frac{4}{9}\left[1 - \frac{3\rho}{4\sigma} + O\left(\frac{\rho^2}{\sigma^2}\right)\right], \quad (3.40)$$

dove:

$$M = \frac{4\pi R^3 \rho}{3}. \quad (3.41)$$

Per quanto riguarda la soluzione esterna essa non può coincidere con la soluzione di Schwarzschild. Il sistema di equazioni non è completo, in particolare abbiamo due funzioni (\mathcal{U}^+ e \mathcal{P}^+) non determinate. Imponendo le condizioni ($\rho = p = 0$) nella (3.33) e la soluzione di Schwarzschild nel limite asintotico si ottiene comunque una pluralità di soluzioni.

Soluzioni per la parte esterna

Una delle soluzioni per $\mathcal{U}^- = \mathcal{P}^- = 0$ è equivalente al risultato ottenuto da Reissner e Nördstrom, in cui la carica di marea di Weyl gioca un ruolo simile alla carica elettrica della soluzione classica. Quindi si ha la seguente impostazione per la metrica:

$$e^{2\alpha} = e^{-2\beta} = 1 - \frac{2GM}{r} + \frac{q}{r^2}, \quad (3.42)$$

$$\mathcal{U}^+ = -\frac{\mathcal{P}^+}{2} = \frac{4}{3}\pi Gq\sigma \frac{1}{r^4}, \quad (3.43)$$

$$q = -3GMR\frac{\rho}{\sigma}, \quad (3.44)$$

$$\mathcal{M} = m\left(1 - \frac{\rho}{\sigma}\right). \quad (3.45)$$

Si nota che a differenza della carica elettrica della soluzione Reissner-Nördstrom, la carica di marea di Weyl fornisce un contributo positivo al potenziale gravitazionale. Inoltre possiamo osservare che per la richiesta di ritorno alla soluzione di Schwarzschild nel limite asintotico ($\mathcal{M} > 0$), +si ha:

$$\sigma > \rho. \quad (3.46)$$

L'orizzonte degli eventi è dato dalla seguente equivalenza:

$$r_h = G\mathcal{M}\left[1 + \left\{1 + \left(\frac{3R}{2GM} - 2\right)\frac{\rho}{\sigma} + \frac{\rho^2}{\sigma^2}\right\}^{\frac{1}{2}}\right], \quad (3.47)$$

e la curvatura esterna è data da:

$$\mathcal{R} = 8\pi G \left(\frac{\rho}{\sigma}\right)^2 \left(\frac{R}{r}\right)^4. \quad (3.48)$$

Un'altra soluzione che soddisfa le equazioni di campo del mondo-brana con le stesse condizioni della precedente per la parte interna della stella assume i seguenti valori per la metrica:

$$e^{2\alpha} = 1 - \frac{2GN}{r}, \quad (3.49)$$

$$e^{-2\beta} = e^{2\alpha}\left[1 + \frac{C}{\sigma\left(r - \frac{3}{2}GN\right)}\right]. \quad (3.50)$$

Le condizioni al contorno implicano:

$$\mathcal{U}^+ = \frac{2\pi G^2 \mathcal{N} C}{(1 - 3GN/2r)^2 r^4}, \quad (3.51)$$

$$\mathcal{P}^+ = \left(\frac{2}{3} - \frac{r}{GN}\right)\mathcal{U}^+, \quad (3.52)$$

$$\mathcal{N} = M\left[\frac{1 + 2\rho/\sigma}{1 + 3GM\rho/R\sigma}\right], \quad (3.53)$$

$$C = 3GM\rho\left[\frac{1 - 3GM/2R}{1 + 3GM\rho/R\sigma}\right] \quad (3.54)$$

e l'orizzonte degli eventi è dato da:

$$r_h = 2GN. \quad (3.55)$$

Invece lo scalare di curvatura soddisfa la relazione:

$$\mathcal{R} = \sqrt{\frac{3}{2}}RC\left(\frac{4\pi R}{3M}\right)^2 \frac{(1 - 8GN/3r + 2G^2\mathcal{N}^2/r^2)^{1/2}}{1 - 3GN/2r} \left(\frac{\rho}{\sigma}\right)^2 \left(\frac{R}{r}\right)^3. \quad (3.56)$$

Correzione della massa nel mondo-brana

Riscriviamo la massa usando la densità effettiva, allora:

$$m^-(r) = 4\pi \int_0^r \rho'^{eff} r'^2 dr'. \quad (3.57)$$

Definisco:

$$F = \frac{24\pi}{k^4} \int_0^r \mathcal{U}^- r'^2 dr', \quad (3.58)$$

e

$$M = \frac{4\pi R^3 \rho}{3} \quad (3.59)$$

e la mettiamo nella forma:

$$m^-(r) = M \left(1 + \frac{\rho}{2\sigma}\right) \left(\frac{r}{R}\right)^3 + \frac{F}{\sigma}. \quad (3.60)$$

Quindi la funzione di massa nel mondo-brana presenta una deviazione da quella prevista dalla relatività generale. In particolare, per un osservatore distante, la massa è data da:

$$m(R)^- = M \left(1 + \frac{\rho}{2\sigma}\right) + \frac{F}{\sigma} \quad (3.61)$$

La funzione F non è determinata e dipende dall'equazione di stato e termini di Weyl sui quali non si ha alcun controllo. In genere ulteriori studi vengono fatti con i metodi numerici.

Conclusioni

In questa tesi di laurea sono stati brevemente presentati alcuni modelli gravitazionali basati sul concetto delle dimensioni aggiuntive. In particolare sono state investigate equazioni di campo di Einstein nel mondo-brana, nelle quali tutte le interazioni e la materia sono confinate sulla brana tridimensionale all'interno di un bulk cinquedimensionale. L'analisi covariante delle equazioni di Einstein con le assunzioni presenti nelle teorie di Randall e Sundrum ha prodotto le relazioni riassunte nella seguente tabella.

Equazioni di campo	
Nel bulk	${}^{(5)}G_{ab} = k_5^2 {}^{(5)}T_{ab}$
Sulla brana	${}^{(4)}G_{\mu\nu} = -\Lambda_4 q_{\mu\nu} + 8\pi G_N \tau_{\mu\nu} + k_5^4 \pi_{\mu\nu} - E_{\mu\nu}$
Sulla brana nel limite a basse energie	${}^{(4)}G_{\mu\nu} \simeq -\Lambda_4 q_{\mu\nu} + 8\pi G_N \tau_{\mu\nu}$

Si osserva che l'equazione di campo sulla brana contiene due termini in più rispetto all'equazione usuale: il termine $\pi_{\mu\nu}$, che rappresenta la correzione al secondo ordine del tensore energia impulso, e il termine $E_{\mu\nu}$, che incorpora parte del tensore di Weyl e fornisce informazioni sul campo gravitazionale nel bulk. Purtroppo il tensore $E_{\mu\nu}$ in genere non è completamente determinato, quindi lo si studia facendo considerazioni sulle simmetrie del sistema.

Nel terzo capitolo è stata applicata la teoria covariante al caso particolare delle stelle partendo dal presupposto che l'interno della stella contenga un fluido perfetto, presenti una simmetria sferica e sia statica. Nella tabella che segue sono riportate a sinistra le equazioni standard e a destra le equazioni sulla brana.

Equazioni classiche	Equazioni sulla brana
$\frac{dm}{dr} = 4\pi r^2 \rho$	$\frac{d\widehat{m}}{dr} = 4\pi r^2 \rho'^{eff}$
$\frac{d\alpha}{dr} = \frac{Gm(r)+4\pi Gr^3 p}{r[r-2Gm(r)]}$	$\frac{d\alpha}{dr} = \frac{Gm(r)+4\pi Gr^3 p'^{eff}}{r[r-2Gm(r)]}$
$(\rho + p) \frac{d\alpha}{dr} = -\frac{dp}{dr}$	$(\rho + p) \frac{d\alpha}{dr} = -\frac{dp}{dr}$
	$\frac{d\mathcal{U}}{dr} = -2\frac{d\mathcal{P}}{dr} - \frac{6\mathcal{P}}{r} - (4\mathcal{U} + 2\mathcal{P}) \frac{d\alpha}{dr} - 3\frac{\rho+p}{\sigma} \frac{d\rho}{dr}$

La densità e pressione effettive sono dovute alle correzioni al secondo ordine del tensore energia impulso. Invece le quantità \mathcal{U} e \mathcal{P} sono rispettivamente densità di energia non locale e scalare di tensione non locale, queste grandezze provengono dalla proiezione del tensore di Weyl sulla brana e non sono determinate. Inoltre è stata ricavata l'equazione di equilibrio sulla superficie della stella imponendo le condizioni di giunzione tra la metrica esterna e quella interna.

$p + \frac{1}{2\sigma}\rho(\rho + 2p) + \frac{2}{k_4^4\sigma}(\mathcal{U}^- - \mathcal{U}^+ + 2\mathcal{P}^- - 2\mathcal{P}^+) = 0$	Equazione di equilibrio
---	-------------------------

Le soluzioni sulla brana formano un sistema non chiuso di equazioni. Per risolverlo è necessario fare delle considerazioni di simmetria e rispettare l'equazione di equilibrio.

Dall'analisi delle stelle nel mondo-brana si è visto come per le stelle a neutroni il limite di compattezza $GM/R < \frac{4}{9}$, previsto dalla relatività generale, venga modificato dai gradi di libertà dovuti alla presenza di più dimensioni.

Il risultato più interessante è dato dallo studio della soluzione per la parte interna della stella con la soluzione di Schwarzschild all'esterno. Da cui emerge, considerando la (3.58), la seguente equazione:

$$\frac{Gm^-(r)}{R} = \frac{GM}{R} \left(1 + \frac{\rho}{2\sigma}\right) + \frac{F}{\sigma}, \quad (3.62)$$

Questo risultato è valido se si interpreta $m^-(R)$ come la massa misurata da un osservatore distante. Riscrivendola nel seguente modo:

$$\frac{GM}{R} \left(1 + \frac{\rho}{2\sigma}\right) + \frac{F}{\sigma} = \frac{4}{9} \left(1 + \frac{\rho}{2\sigma}\right) + \frac{F}{\sigma} > \frac{4}{9}, \quad (3.63)$$

si ha quindi una deviazione dal risultato della relatività generale che, se assunto F/σ trascurabile, è in linea con i risultati osservativi che suggeriscono l'esistenza di stelle più compatte.

Bibliografia

- [1] Založnik Anže, KALUZA-KLEIN THEORY, Ljubljana, 2012
- [2] L. Randall and R. Sundrum, A large mass hierarchy from a small extra dimension, Phys. Rev. Lett. 83, 3370 (1999) [hep-ph/9905221].
- [3] L. Randall and R. Sundrum, An alternative to compactification, Phys. Rev. Lett. 83, 4690 (1999) [hep-th/9906064].
- [4] N. Arkani-Hamed, S. Dimopoulos and G. R. Dvali, The hierarchy problem and new dimensions at a millimeter, Phys. Lett. B 429, 263 (1998) [hep-ph/9803315].
- [5] T. Shiromizu, K. Maeda, and M. Sasaki, Phys. Rev. D 62, 024012 (2000).
- [6] Carroll S M 2004 Spacetime and Geometry: An Introduction to General Relativity
- [7] Francisco X. Linares, Miguel A. Garcia-Aspeitia, L. Arturo Urena-Lopez, Stellar models in Brane Worlds arXiv:1501.04869 [gr-qc]
- [8] C. Germani and R. Maartens, Stars in the braneworld, Phys. Rev. D 64 (2001) 124010 [arXiv:hep-th/0107011].
- [9] R. Maartens, Brane-world gravity, Living Rev. Rel. 7, 1 (2004) [gr-qc/0312059].
- [10] R. Whisker, Braneworld Black Holes