

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI
BOLOGNA

SCUOLA DI SCIENZE
Corso di Laurea in Fisica

Collasso Gravitazionale
e
Strutture Causali

Relatore:
Prof. Roberto Casadio

Presentata da:
Giacomo Bartolucci

Sessione II
Anno Accademico 2014/2015

Prefazione

L'obiettivo di questa tesi è quello di studiare la contrazione di una stella che porta alla formazione di un buco nero, per poi fornire un quadro della struttura causale che ne emerge.

La trattazione comincia con un excursus sulle fasi finali della vita di una stella, con particolare enfasi sulle configurazioni che prevedono un ultimo stadio di collasso gravitazionale. Infatti se già Chandrasekhar aveva delineato una massa limite sopra la quale qualsiasi corpo celeste non avrebbe potuto prevenire la propria contrazione, il successivo lavoro di scienziati tra cui Hawking, Penrose ed Ellis ha definitivamente attestato l'importanza che queste situazioni di collasso rivestono nell'astronomia moderna. Nei cosiddetti "teoremi sulla singolarità" è stato dimostrato che, sottoposti a condizioni abbastanza generali, i corpi celesti vanno incontro ad uno stadio di singolarità o hanno attraversato un tale stadio nel passato.

La seconda parte della tesi si addentra in un aspetto un po' più formale: le condizioni generali che permettono di raccordare la metrica in presenza di un corpo celeste che collassa, con focus sul caso in cui all'interno della stella vige la metrica di Friedman-Roberson-Walker e all'esterno quella di Schwarzschild. Queste condizioni teoriche vengono poi implementate nella soluzione di Tolman (di cui si ripercorrono le linee guida) per il modello di Oppenheimer-Snyder. Le condizioni di giunzione vengono, inoltre, utilizzate per analizzare un modello per la radiazione e quello più esotico di de Sitter.

L'ultima parte si sofferma sulla definizione globale e locale dell'orizzonte di un buco nero. Si introducono i concetti di *espansione* e si utilizza l'equazione di Raychaudhuri per rintracciare le cosiddette *superfici intrappolanti* nel modello di Oppenheimer-Snyder. Infine si analizza la struttura causale che emerge da questo modello, utilizzando anche i diagrammi di Penrose.

Indice

PREFAZIONE	i
1 Evoluzione stellare e buchi neri	1
1.1 Oltre la sequenza principale	1
1.2 Stadi avanzati dell'evoluzione stellare	2
1.3 Il destino delle stelle più massive	5
1.4 Teoremi sulla singolarità di Hawking Penrose	6
2 Giunzione di due metriche	9
2.1 Condizioni generali di giunzione	9
2.1.1 FRW all'interno di Schwarzschild	12
2.2 Modello di Oppenheimer-Snyder	15
2.2.1 Soluzione di Tolman delle equazioni di campo	17
2.2.2 Soluzione interna semplificata	20
2.2.3 Giunzione della soluzione di Tolman	22
2.3 Modello per radiazione	24
2.4 Modello di de Sitter	25
3 Orizzonte di un buco nero e superfici intrappolate	27
3.1 Superfici intrappolate	28
3.2 Equazione di Raychaudhuri	30
3.3 Diagrammi di Penrose	34
Conclusioni	37
Bibliografia	39

Capitolo 1

Evoluzione stellare e buchi neri

In questo capitolo si ripercorrono schematicamente le fasi finali della vita di una stella, con focus sulle configurazioni che prevedono un ultimo stadio di collasso gravitazionale. Si esaminano i risultati di Chandrasekhar prima e di Hawking e Penrose poi, a proposito di queste situazioni di singolarità.

1.1 Oltre la sequenza principale

Una stella trascorre gran parte della sua vita in una situazione di equilibrio, in cui la pressione di radiazione generata dalla fusione dell'idrogeno bilancia l'attrazione gravitazionale. Stelle di questo tipo hanno una densità dell'ordine di $1g/cm^3$ e sono rappresentate nella sequenza principale di diagrammi H-R come quello mostrato in figura 1.1, con luminosità o magnitudine in funzione della temperatura o della classe stellare.

Nel caso di stelle con massa inferiore o dell'ordine di quella solare, una volta finito l'idrogeno nel nucleo, la fusione continua in uno strato sottile, sempre di idrogeno, che circonda la parte più interna di elio. Il processo causa un aumento della luminosità e del raggio ma una diminuzione della temperatura. Questa regione del grafico (rappresentata in figura 1.1 dal punto 3 nella curva contrassegnata da $1M_{\odot}$) è denominata **subgiant branch** (SGB). Il nucleo di elio continua ad crescere fino a raggiungere una frazione massima della massa totale, detta limite di Schönberg-Chandrasekhara, e poi comincia a contrarsi uscendo definitivamente dalla sequenza principale.

Poichè secondo il principio di esclusione del Pauli i fermioni non possono compattarsi oltre una certa distanza, per alcune di queste stelle poco massive la degenerazione della materia fornisce una pressione tale da consentire il passaggio alle successive fasi di fusione senza mai oltrepassare questo limite. In caso di degenerazione completa la pressione non è più dovuta al moto di agitazione termica degli elettroni, quindi diventa indipendente dalla temperatura.

Le stelle di massa più elevata, invece, presentano un nucleo convettivo che, con il progredire della fusione, decresce tanto più velocemente quanto più è massiva la stella. Quando l'idrogeno nel nucleo scende sotto una frazione minima comincia a contrarsi anche l'intero corpo stellare. Il rilascio di energia provoca un leggero aumento della luminosità e a seguito della contrazione aumenta anche la temperatura, in accordo con le leggi dei gas perfetti (tratto 2-3 in figura 1.1). La stella esce così dalla sequenza principale. A questo punto si forma, come per il caso precedente, uno strato di idrogeno fondente che circonda il nucleo di elio e quando viene raggiunto il limite di Schönberg-Chandrasekhar comincia una nuova contrazione.

1.2 Stadi avanzati dell'evoluzione stellare

Durante il collasso del nucleo la temperatura degli strati più interni subisce un brusco aumento mentre gli strati più esterni si espandono e si raffreddano, aumenta l'opacità (anche a causa dello ione H^-) e quindi cala la luminosità. Ad un certo punto, però, la composizione chimica della stella cambia (passaggio che costituisce una verifica sperimentale importante per l'intero modello), l'opacità decresce e la produzione di energia nel nucleo aumenta: questo stimola un picco di luminosità e un aumento del raggio. Questa parte del diagramma H-R quasi verticale viene denominata **red giant branch** (RGB). In questo stadio negli strati interni la temperatura arriva a toccare gli $1,3 \cdot 10^8 K$ e la densità raggiunge i $770g/cm^3$, valore così elevato da innescare il cosiddetto *triplo processo alpha*, con un enorme rilascio di energia che nelle stelle più piccole ($M < 2M_\odot$) causa delle spettacolari esplosioni dette *helium core flash*.

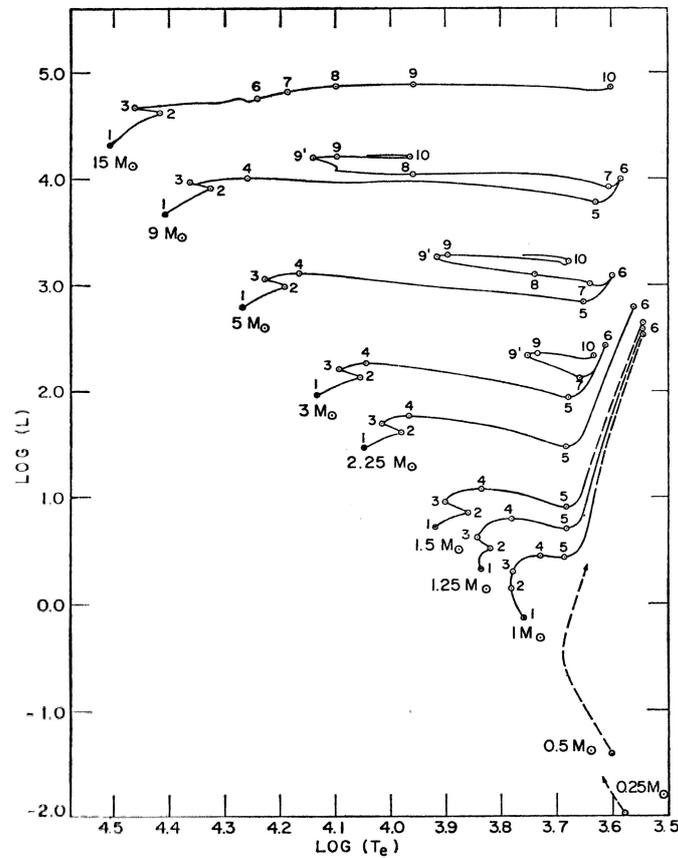


Figura 1.1: Esempio di diagramma H-R

La zona 6-9 è denominata **horizontal branch** in cui si innesca la fusione dell'elio nel nucleo e, successivamente, in un guscio esterno. Si ripete poi quanto avvenuto nel tratto 4-5: gli strati interni collassano e si scaldano, mentre quelli esterni si raffreddano e si espandono. Un nuovo cambio nella composizione chimica segna l'inizio di una zona chiamata **asymptotic giant branch** in cui la temperatura del nucleo è approssimativamente $2 \cdot 10^8 K$ e la sua densità $10^6 g/cm^3$. Questo stadio è caratterizzato da periodiche esplosioni (*helium shell flashes*) e dall'espulsione di ingenti quantità di massa. In alcune stelle abbastanza massive ($M > 2M_{\odot}$) le celle convettive portano in superficie il carbonio prodotto dalle reazioni di fusione interne, ultimo cambio della composizione chimica che dà origine alle *stelle al carbonio*.

L'evoluzione successiva delle AGB dipende fortemente dalla massa iniziale, e un importante valore critico è $1,44M_{\odot}$ detto *limite di Chandrashekhar*, dal nome del fisico indiano che lo postulò nel 1931, oltre il quale nemmeno la degenerazione completa del nucleo porta ad uno stato finale stabile.

Stelle con massa fino a $8M_{\odot}$ generalmente riescono ad espellere massa fino a portarsi sotto il limite di Chandrashekhar. Queste continuano ad espellere materia, la luminosità cala rapidamente e si rivela il nucleo caldo e degenere in carbonio-ossigeno della vecchia gigante: è lo stadio finale di **nana bianca** (figura 1.2), in cui la densità raggiunge valori prossimi a $10^7 g/cm^3$.

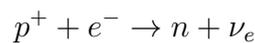


Figura 1.2: Van Maanen 2, nana bianca

1.3 Il destino delle stelle più massive

In alcuni casi la massa della stella è compresa tra $4M_{\odot}$ e $8M_{\odot}$ ma questa non evolve in una nana bianca. Il nucleo parzialmente degenere di carbonio-ossigeno non sarà più capace di mantenere l'equilibrio idrostatico e comincerà a collassare provocando dei picchi di temperatura che spingono la stella a rilasciare enormi quantità di energia in un brevissimo periodo di tempo, dando vita ad una spettacolare esplosione. E' il fenomeno noto come *carbon-oxygen core flash* che distrugge interamente la stella.

Se, invece, la massa della stella eccede $8M_{\odot}$ nel nucleo si raggiungono le condizioni per fondere il carbonio e gli elementi successivi, anche se l'energia ricavata per unità di combustibile è via via minore e quindi le successive fasi di fusione durano sempre meno. Il processo infine si arresta giunti al picco del ferro, poichè la fusione di atomi di ferro o più pesanti è un processo endoergonico. Le condizioni estreme del nucleo fanno sì che i fotoni comincino a scindere nuclei pesanti. Questo processo, altamente endoergonico, è detto *fotodisintegrazione* e in poco tempo disfa l'opera di una vita della stella. In più gli elettroni vengono catturati dai nuclei pesanti e dai protoni originati dalla fotodisintegrazione, nel processo



con un rilascio di neutrini che causa una ingente emissione di energia. Venuto meno l'apporto alla pressione della degenerazione comincia un collasso del nucleo talmente veloce che gli strati esterni non ne risentono immediatamente, restando sospesi.

Il collasso continua finchè non si raggiunge un valore della densità di circa $8 \cdot 10^{14} g/cm^3$, limite in cui la forza forte diventa repulsiva (a causa del principio di esclusione del Pauli per i neutroni). A questo punto il nucleo in qualche modo rincula provocando un'onda di pressione che si espande in un meccanismo di esplosione ritardata. Questo fenomeno è noto come **supernova di tipo II**.

Occorre menzionare che esistono anche **supernovae di tipo I**, caratterizzate da spettri che non contengono linee predominanti di idrogeno. Una loro

sottoclasse, le *supernovae di tipo Ia* sono originate da esplosioni di una nana bianca in carbonio-ossigeno in un sistema binario (figura 1.3)



Figura 1.3: SN 2014J, supernova di tipo Ia

Se la massa della stella inizialmente non superava $25M_{\odot}$ quello che rimane del nucleo interno si stabilizza, per effetto della pressione di degenazione dei neutroni, in una **stella di neutroni**. In caso la massa superi anche questo limite nessuna forza sarà più in grado di contrastare la gravità e il collasso sarà completo: una strabiliante produzione di neutrini accompagnerà la formazione di un **buco nero**.

1.4 Teoremi sulla singolarità di Hawking Penrose

Roger Penrose e Stephen Hawking hanno studiato a fondo la struttura dello spazio tempo, partendo dal concetto di singolarità. Ricordando che la teoria della relatività generale descrive lo spazio tempo in termini di varietà differenziabili, normalmente si pensa ad una singolarità come una regione di queste in cui la curvatura diverge. Il problema legato a questa

definizione è che si potrebbe semplicemente “tagliare via” questa regione e definire lo spazio tempo come la varietà rimanente. E’ quindi meglio adottare seguente

Definizione 1. *Uno spaziotempo si dice singolare quando non è completo rispetto a geodetiche di tipo luce¹ o di tipo tempo, ma non può essere immerso in uno spaziotempo più grande.*

In sostanza esistono geodetiche che non possono essere estese fino ad un valore indefinito del parametro affine: ci possono essere particelle la cui storia ha un inizio e una conclusione in tempi finiti. Tra il 1965 e il 1970 Roger Penrose e Stephen Hawking dimostrarono diversi teoremi, detti teoremi sulla singolarità, sulla base di argomentazioni ancora non quantistiche. Tutti questi teoremi partono da tre tipi di ipotesi

1. Condizione energetica
2. Condizione sulla struttura globale
3. La gravità è abbastanza intensa da intrappolare una regione

Allentando le condizioni di un tipo e assumendone più restrittive di un altro, questi teoremi esplorano tutte le differenti combinazioni di ipotesi che possono portare ad uno spaziotempo singolare.

In questa trattazione ci si concentra sul teorema che richiede l’ipotesi del primo tipo più stringente possibile, la cosiddetta *condizione energetica generica*. Di contro, la condizione globale è abbastanza debole: si richiede solamente che non esistano traiettorie chiuse di tipo tempo. La condizione sulla forza gravitazionale è la più generica: si richiede l’esistenza di superfici intrappolate² oppure di 3-superfici chiuse di tipo spazio.

Date queste premesse, il teorema predice l’esistenza di una singolarità. Questa può avere luogo nel futuro, a causa del collasso gravitazione di una stella o di un altro corpo celeste molto massivo, o nel passato, all’inizio dell’espansione dell’universo a cui assistiamo oggi.

¹chiamate anche “geodetiche nulle”

²Su questo argomento si tornerà nel dettaglio nell’ultima parte della trattazione

Capitolo 2

Giunzione di due metriche

Il lavoro di scienziati come Hawking, Ellis e Penrose sancisce definitivamente l'importanza che le situazioni di collasso rivestono nel campo dell'astrofisica. In questa sezione ci si occupa di dare una veste formale a queste configurazioni estreme, concentrandosi sul problema di raccordare due regioni di spazio (interno ed esterno del corpo celeste) in cui vigono metriche diverse.

2.1 Condizioni generali di giunzione

Si vuole formalizzare l'idea intuitiva che la metrica deve avere un comportamento abbastanza regolare nel passare dall'interno all'esterno della superficie di una stella, in assenza di accumuli anomali di materia.

Per fare questo è utile ricordare un risultato molto importante in elettromagnetismo: nel passaggio attraverso una superficie carica, come ad esempio il piatto di un condensatore, le componenti normali e perpendicolari di \vec{E} e \vec{B} variano in accordo con

$$\Delta \vec{E}_{\parallel} = 0 \quad \Delta \vec{B}_{\perp} = 0 \quad (2.1)$$

$$\Delta \vec{E}_{\perp} = 4\pi\sigma\hat{n} \quad \Delta \vec{B}_{\parallel} = 4\pi\vec{J} \times \hat{n} \quad (2.2)$$

Dove il “salto” nelle componenti discontinue è legato alla densità di carica σ e alla densità di corrente \vec{J} , mentre \hat{n} è il versore normale alla superficie. Il punto chiave è che per ottenere queste relazioni si è utilizzato un processo

di integrazione delle equazioni di Maxwell in un volumetto infinitesimo (“pill box”, in inglese) centrato sulla superficie carica.

Tornando al caso di un corpo celeste, la superficie di passaggio Σ è parametrizzata da $\eta = cost$ dove η è da interpretare come la coordinata radiale, sia nel sistema di riferimento interno che esterno. Questo tipo di superfici si definiscono di tipo tempo poichè il versore normale $\hat{\eta}$ è di tipo spazio ($\hat{\eta} \cdot \hat{\eta} = +1$). In analogia con l'elettromagnetismo si integra in un volumetto racchiuso da due gusci sottili attorno alla superficie della stella le equazioni di Einstein:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} G^a_b d\eta = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} kT^a_b d\eta \quad (2.3)$$

Intuitivamente, visto che il tensore di Einstein G^μ_ν contiene le derivate seconde della metrica, ci si aspetta che tramite l'integrazione $\int G^\mu_\nu d\eta$ si stabiliscono condizioni sulle derivate prime della metrica. Per vederlo nel dettaglio occorre semplificare il lato sinistro di quest'ultima relazione utilizzando la formula per le componenti del tensore di Einstein in un intorno della superficie di tipo tempo Σ

$$G^\eta_\eta = \frac{{}^{(3)}R}{2} + \frac{1}{2} [(TrK)^2 - Tr(K^2)] \quad (2.4)$$

$$G^\eta_i = - [K^m_i|_m - (TrK)_i] \quad (2.5)$$

$$G^i_j = {}^{(3)}G^i_j + (K^i_j - \delta^i_j TrK)_{,n} - K^i_j TrK + \frac{1}{2} \delta^i_j (TrK)^2 + \frac{1}{2} \delta^i_j Tr(K^2) \quad (2.6)$$

In cui si è fatto uso del formalismo proprio della curvatura intrinseca ed estrinseca. In merito alla prima si è utilizzato ${}^{(3)}R$, lo scalare di curvatura 3-dimensionale della superficie Σ , ${}^{(3)}G^i_j$ è il tensore di Einstein proiettato su Σ e infine $|_m$ indica la derivata covariante nella i -esima direzione coordinata, vincolata su Σ . K^i_j è invece il tensore di curvatura estrinseca.¹ In corrispon-

¹Ricordiamo che la curvatura estrinseca è un utile strumento per studiare il caso in cui una varietà è immersa in uno spazio a dimensione maggiore. In questa situazione uno stesso vettore potrà essere trasportato parallelamente sia con le regole dedotte dalla geometria sulla varietà sia con le regole della geometria “globale”. In generale queste due procedure danno luogo a vettori diversi la cui discrepanza è quantificata dalla curvatura estrinseca.

denza della superficie parametrizzata da η , questo è legato alle derivate della metrica dalla semplice relazione

$$K_{ij} = -\frac{1}{2} \frac{\partial g_{ij}}{\partial \eta} \quad (2.7)$$

Si assuma che la metrica 3-dimensionale g_{ij} non contenga discontinuità o peggio funzioni delta in Σ , altrimenti questa superficie non avrebbe una geometria ben definita (e ciò è fisicamente inammissibile). Essendo ${}^{(3)}R$, ${}^{(3)}G^i_j$ e K^i_j legati alle derivate della metrica, nemmeno loro conteranno funzioni delta. Quindi restringendo l'intervallo di integrazione ($\varepsilon \rightarrow 0$), quando valgono adeguate proprietà di sommabilità, il primo membro di (2.3) diventa

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} G^\rho_\rho d\rho = 0 \quad (2.8)$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} G^\rho_i d\rho = 0 \quad (2.9)$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} G^i_j d\rho = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (K^i_j - \delta^i_j Tr K) \Big|_{\rho=-\varepsilon}^{\rho=+\varepsilon} = \gamma^i_j - \delta^i_j Tr \gamma \quad (2.10)$$

Dove γ rappresenta il “salto” nelle componenti della curvatura estrinseca nel passaggio attraverso Σ

$$\gamma^i_j \equiv (K^+)^i_j - (K^-)^i_j \quad (2.11)$$

Per quanto riguarda il lato destro di (2.3) è necessario distinguere due casi. Nell'ipotesi che ci siano accumuli di materia in corrispondenza di Σ si ha che il tensore energia-impulso contiene funzioni delta, e l'integrale avrà un valore finito. In caso contrario restringendo il dominio di integrazione, nel limite $\varepsilon \rightarrow 0$ l'integrale si annulla.

In conclusione nel passaggio attraverso una superficie la metrica deve essere continua mentre la relazione (2.3) implica che se il tensore energia-impulso presenta funzioni delta la curvatura estrinseca ha una discontinuità, la cui entità è quantificata da

$$\gamma^i_j - \delta^i_j Tr \gamma = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} k T^a_b d\eta \quad (2.12)$$

Se invece il tensore energia-impulso ha un andamento più regolare le componenti K^i_j devono essere continue, quindi sia la metrica deve essere non solo continua ma anche derivabile.

Nel caso della soluzione di Tolman, come vedremo, non ci sono accumuli di materia nella superficie della stella e μ è costante all'interno della stella e nulla al di fuori, andamento proporzionale alla funzione theta di Heaviside

$$\theta(\eta) = \begin{cases} 1 & \text{per } \eta < \eta_0 \\ 0 & \text{per } \eta > \eta_0 \end{cases} \quad (2.13)$$

2.1.1 FRW all'interno di Schwarzschild

Si vuole studiare il caso generico in cui una superficie Σ racchiude una zona in cui vige la metrica di Friedman-Roberson-Walker

$$dS_{FRW}^2 = -c^2 dt^{-2} + a^2(ct^-) \left[\frac{dr^{-2}}{1 - \varepsilon r^{-2}} + r^{-2} d\Omega^2 \right] \quad (2.14)$$

mentre all'esterno vige la metrica di Schwarzschild

$$dS_S^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r^+} \right) c^2 dt^{+2} + \left(1 - \frac{2M}{r^+} \right)^{-1} dr^{+2} + r^{+2} d\Omega^2 \quad (2.15)$$

Per imporre le condizioni di giunzione in corrispondenza della superficie, occorre effettuare due cambi di coordinate e portare le metriche in una forma che meglio si adatta a descrivere i dintorni di questa superficie, che sarà parametrizzata da $\eta = 0$

$$dS_{\pm}^2 = -g_{\tau\tau}^{\pm} c^2 d\tau^{\pm 2} + d\eta^2 + R^{\pm 2} d\Omega^2$$

dove

$$g_{\tau\tau}^{\pm} = 1 + \eta g_{\tau\tau(1)}^{\pm} + O(\eta^2)$$

Il coefficiente $g_{\eta\eta}^{\pm}$ deve essere unitario poichè vogliamo che η sia una coordinata gaussiana normale. Notiamo poi che la metrica di FRW ha già la coordinata temporale nella forma cercata, basta quindi porre $t^- \equiv \tau$ e $g_{\tau\tau(1)}^- = 0$. Inoltre conviene esplicitare la dipendenza delle vecchie coordinate da quelle nuove

$$t^+(\tau, \eta) = t_{(0)}^+(\tau) + t_{(1)}^+(\tau)\eta + O(\eta^2) \quad (2.16)$$

$$t^-(\tau, \eta) = \tau \quad (2.17)$$

$$r^{\pm}(\tau, \eta) = r_{(0)}^{\pm}(\tau) + r_{(1)}^{\pm}(\tau)\eta + O(\eta^2) \quad (2.18)$$

Fatte queste premesse, applicando la formula generale per il cambio di coordinate

$$g_{ij} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^i} \frac{\partial x^\beta}{\partial x^j} g_{\alpha\beta} \quad (2.19)$$

dove i, j sono le nuove coordinate e α, β le vecchie coordinate, otteniamo il seguente set di equazioni

$$-\left(\frac{\partial t^+}{\partial \tau}\right)^2 c^2 \left(1 - \frac{2M}{r^+}\right) + \left(\frac{\partial r^+}{\partial \tau}\right)^2 \left(1 - \frac{2M}{r^+}\right)^{-1} = -c^2(1 + g_{\tau\tau(1)}^+ \eta) \quad (2.20)$$

$$-\left(\frac{\partial t^+}{\partial \eta}\right)^2 c^2 \left(1 - \frac{2M}{r^+}\right) + \left(\frac{\partial r^+}{\partial \eta}\right)^2 \left(1 - \frac{2M}{r^+}\right)^{-1} = 1 \quad (2.21)$$

$$\left(\frac{\partial t^+}{\partial \eta}\right)^2 \frac{a^2}{1 - \varepsilon r^{-2}} = 1 \quad (2.22)$$

$$g_{\theta\theta}^+ = r^{+2} = R^{+2} \quad g_{\theta\theta}^- r^{-2} = R^{-2} \quad (2.23)$$

Calcolando poi i coefficienti della curvatura estrinseca, si ottengono le ulteriori

$$K_{\tau\tau}^\pm = -\frac{1}{2} \frac{\partial g_{\tau\tau}^\pm}{\partial \eta} \Big|_{\eta=0} = \frac{g_{\tau\tau(1)}^\pm c^2}{2} \quad (2.24)$$

$$K_{\theta\theta}^\pm = -\frac{1}{2} \frac{\partial g_{\theta\theta}^\pm}{\partial \eta} \Big|_{\eta=0} = -\frac{r_{(1)}^\pm}{2} \quad (2.25)$$

Per trovare esplicitamente le relazioni di raccordo si parte dalla continuità della metrica nella nuova forma (24) e della curvatura estrinseca (26) ottenendo

$$r_{(0)}^+ = ar_{(0)}^- \quad (2.26)$$

$$r_{(1)}^+ = ar_{(1)}^- \quad (2.27)$$

Sempre per la continuità del tensore K, dalla (25) segue

$$g_{\tau\tau(1)}^+ = g_{\tau\tau(1)}^- = 0 \quad (2.28)$$

Così la (21) diventa, indicando come al solito con $\dot{}$ la derivata rispetto a τ ,

$$\begin{aligned} & -c^2 \left(\dot{t}_{(0)}^+ + \dot{t}_{(1)}^+ \eta + O(\eta^2) \right)^2 \left(1 - \frac{2M}{r_{(0)}^+ + r_{(1)\eta}^+ + O(\eta^2)} \right) + \\ & + \left(\dot{r}_{(0)}^+ + \dot{r}_{(1)}^+ \eta + O(\eta^2) \right)^2 \left(1 - \frac{2M}{r_{(0)}^+ + r_{(1)\eta}^+ + O(\eta^2)} \right)^{-1} = -c^2 + O(\eta^2) \end{aligned} \quad (2.29)$$

In prima approssimazione si ottiene

$$-c^2 \dot{t}_{(0)}^{+2} \left(1 - \frac{2M}{r_{(0)}^+} \right) + \frac{\dot{r}_{(0)}^{+2}}{\left(1 - \frac{2M}{r_{(0)}^+} \right)} = -c^2 \quad (2.30)$$

Che riarrangiata con l'aiuto delle relazioni tra le coordinate iniziali appena ottenute può essere scritta, ricordando che $t^- \equiv \tau$,

$$\dot{t}_{(0)}^+(\tau) = \sqrt{\frac{1}{\left(1 - \frac{2M}{r_{(0)}^+ a} \right)} + \frac{r_{(0)}^{-2} \dot{a}^2}{c^2 \left(1 - \frac{2M}{r_{(0)}^- a} \right)^2}} \quad (2.31)$$

Dove $r_{(0)}^-$ gioca solo il ruolo di parametro costante, dato che nella metrica di FRW la dipendenza del raggio dal tempo è contenuta tutta in $a(\tau)$. Quindi una volta noto a , deducibile dalla composizione interna del corpo celeste, è possibile conoscere la relazione che lega il tempo τ in questa regione, al tempo t^+ misurato all'esterno della superficie, sempre in prossimità di Σ . Si può esprimere questo risultato in una forma più immediata integrando e omettendo il pedice '0' e l'indice '+', giungendo a

$$t(\tau_f) - t(\tau_i) = \int_{\tau_i}^{\tau_f} \sqrt{\frac{1}{\left(1 - \frac{2M}{r a} \right)} + \frac{r^2 \dot{a}^2}{c^2 \left(1 - \frac{2M}{r a} \right)^2}} d\tau \quad (2.32)$$

Notiamo che la presenza della radice rende la funzione integranda positiva, questo fa sì che $\tau_f > \tau_i$ implichi $t(\tau_f) > t(\tau_i)$, come ricercato.

In conclusione si osservi che è possibile apportare correzioni alla formula (2.30) considerando i termini al primo ordine in η nella (2.29), con l'aiuto di relazioni tra r^+, t^+, r^- e t^- provenienti da (2.21) e (2.22).

2.2 Modello di Oppenheimer-Snyder

Come osservato nel primo capitolo, ci sono casi in cui l'evoluzione di una stella termina con una contrazione incontrollata del suo raggio che oltrepassa il raggio di Schwarzschild $r = 2M/G$ fino a collassare verso $r = 0$, a causa dell'attrazione gravitazionale che il gradiente di pressione non riesce più a contrastare. Per studiare questo fenomeno è conveniente partire con il modello di una stella composta da polvere. Questo porta, senza insormontabili difficoltà matematiche, ad una soluzione esatta delle equazioni di campo di Einstein valida dentro e fuori il corpo celeste. Il modello in questione fu elaborato da Oppenheimer e Snyder nel 1939. Dato che nel caso della polvere la pressione è nulla, $p = 0$, intuitivamente ci si aspetta che, una volta iniziata la contrazione, la stella degenererà inesorabilmente in un punto. Inizialmente supponiamo che la polvere ricopra tutto lo spazio, e richiamiamo la metrica di Schwarzschild per un corpo a simmetria sferica

$$ds^2 = -e^{\nu(r,t)} d(ct)^2 + e^{\lambda(r,t)} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \quad (2.33)$$

E', però, conveniente effettuare un cambio di coordinate $r = r(\rho, c\tau)$ $t = t(\rho, c\tau)$ per adottare un sistema di riferimento comoviente con la polvere, che porta a

$$ds^2 = -cd\tau^2 + e^{\lambda(\rho, c\tau)} d\rho^2 + r^2(\rho, c\tau)(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \quad (2.34)$$

Dove τ è ovviamente il tempo proprio. In questo sistema di riferimento $u^\nu = (c, 0, 0, 0)$ e, visto che $p = 0$, il tensore energia-impulso ha una sola componente non nulla

$$T^0_0 = -c^2\mu(\rho, c\tau) \quad (2.35)$$

Utilizzando la relazione

$$\Gamma^a_{bc} = \frac{1}{2}g^{ad}(g_{bd,c} + g_{cd,b} - g_{bc,d}) = \frac{1}{2}g^{aa}(g_{ba,c} + g_{ca,b} - g_{bc,a}) \quad (2.36)$$

Si possono calcolare i coefficienti di Christoffel, quelli non nulli risultano

²L'ultima uguaglianza segue dal fatto che g è diagonale. Ricordiamo inoltre che, poiché g è simmetrica, una connessione metrica è necessariamente simmetrica (rispetto allo scambio di indici in basso).

$$\begin{aligned}
\Gamma^0_{11} &= \dot{\lambda} \frac{e^\lambda}{2}, & \Gamma^0_{22} &= r\dot{r}, & \Gamma^0_{33} &= r\dot{r} \sin^2 \theta, \\
\Gamma^1_{10} &= \frac{\dot{\lambda}}{2}, & \Gamma^1_{11} &= \frac{\lambda'}{2}, & \Gamma^1_{22} &= -e^{-\lambda} r r', & \Gamma^1_{33} &= -e^{-\lambda} r r' \sin^2 \theta, \\
\Gamma^2_{12} &= \frac{r'}{r}, & \Gamma^2_{20} &= \frac{\dot{r}}{r}, & \Gamma^2_{33} &= -\sin \theta \cos \theta, \\
\Gamma^3_{13} &= \frac{r'}{r}, & \Gamma^3_{30} &= \frac{\dot{r}}{r}, & \Gamma^3_{23} &= \cot \theta.
\end{aligned}$$

Con $x^0 = c\tau$, $x^1 = \rho$, $x^2 = \theta$, $x^3 = \varphi$. Le derivate parziali $\partial_{c\tau}$ e ∂_ρ sono indicate con $\dot{}$ e \prime rispettivamente. Per impostare le equazioni di campo

$$R^a_b - \frac{1}{2} R \delta^a_b = k T^a_b \quad (2.37)$$

Si calcolano le componenti del tensore di Ricci con la formula

$$R_{ab} = R^c_{acb} = \Gamma^c_{ab,c} - \Gamma^c_{ac,b} + \Gamma^c_{dc} \Gamma^d_{ab} - \Gamma^c_{db} \Gamma^d_{ac} \quad (2.38)$$

Non è difficile verificare che gli unici termini non nulli sono

$$R_{00} = -\frac{\ddot{\lambda}}{2} - \frac{\dot{\lambda}^2}{4} - 2\frac{\ddot{r}}{r} \quad (2.39)$$

$$R_{11} = e^\lambda \left[\frac{\ddot{\lambda}}{2} + \frac{\dot{\lambda}^2}{4} + \frac{\dot{\lambda}\dot{r}}{4} \right] - 2\frac{r''}{r} + \frac{\lambda' r'}{r} \quad (2.40)$$

$$R_{22} = e^{-\lambda} \left[\frac{r r' \lambda'}{2} - r'^2 - r r'' \right] + \dot{r}^2 + r \ddot{r} + \frac{r \dot{r} \dot{\lambda}}{2} + 1 \quad (2.41)$$

$$R_{33} = \sin^2 \theta \left\{ e^{-\lambda} \left[\frac{r r' \lambda'}{2} - r'^2 - r r'' \right] + \dot{r}^2 + r \ddot{r} + \frac{r \dot{r} \dot{\lambda}}{2} + 1 \right\} \quad (2.42)$$

$$R_{10} = \frac{\dot{\lambda} r'}{r} - \frac{2 \dot{r}'}{r} \quad (2.43)$$

R è dato dalla relazione $R = R^a_a = g^{ab} R_{ba} = g^{aa} R_{aa}$, esplicitamente

$$\frac{R}{2} = e^{-\lambda} \left[\frac{r' \lambda'}{r} - \frac{r'^2}{r^2} - 2\frac{r''}{r} \right] + \frac{\dot{\lambda} \dot{r}}{r} + 2\frac{\ddot{r}}{r} + \frac{\dot{\lambda}^2}{4} + \frac{\ddot{\lambda}}{2} + \frac{\dot{r}}{r^2} + \frac{1}{r^2} \quad (2.44)$$

Le equazioni di campo, quindi, hanno la seguente forma

$$R^0_0 - \frac{R}{2} = \left(\frac{2r''}{r} - \frac{\lambda'r'}{r} + \frac{r'^2}{r^2} \right) e^{-\lambda} - \frac{\dot{r}\dot{\lambda}}{r} - \frac{\dot{r}^2}{r^2} - \frac{1}{r^2} = -k\mu c^2 \quad (2.45)$$

$$R^1_1 - \frac{R}{2} = \frac{r'^2}{r^2} e^{-\lambda} - \frac{2\ddot{r}}{r} - \frac{\dot{r}^2}{r^2} - \frac{1}{r^2} = 0 \quad (2.46)$$

$$R^2_2 - \frac{R}{2} = R^3_3 - \frac{R}{2} = \left(\frac{r''}{r} - \frac{\lambda'r'}{2r} \right) e^{-\lambda} - \frac{\dot{r}\dot{\lambda}}{2r} - \frac{\ddot{\lambda}}{2} - \frac{\dot{\lambda}^2}{4} - \frac{\ddot{r}}{r} = 0 \quad (2.47)$$

$$R_{10} = \frac{\dot{\lambda}r'}{r} - \frac{2\dot{r}'}{r} = 0 \quad (2.48)$$

2.2.1 Soluzione di Tolman delle equazioni di campo

Il primo passo è riscrivere (2.48) come

$$\dot{\lambda} = \frac{2\dot{r}'}{r'} = \frac{(r'^2)'}{r'^2} = (\ln r'^2)' \quad (2.49)$$

E' conveniente riarrangiare la soluzione $\lambda = \ln r'^2 + g(\rho)$ definendo $g(\rho) \equiv \ln \frac{1}{1-\varepsilon f^2(\rho)}$ con $\varepsilon = 0, \pm 1^3$

$$e^\lambda = \frac{r'^2}{1 - \varepsilon f^2(\rho)} \quad (2.50)$$

Quindi si sostituisce in (2.46)

$$\frac{r'^2}{r^2} \frac{1 - \varepsilon f^2(\rho)}{r'^2} - \frac{2\ddot{r}}{r} - \frac{\dot{r}^2}{r^2} - \frac{1}{r^2} = \frac{1}{r^2} - \frac{\varepsilon f^2(\rho)}{r^2} - \frac{2\ddot{r}}{r} - \frac{\dot{r}^2}{r^2} - \frac{1}{r^2} = 0$$

ottenendo

$$2r\ddot{r} + \dot{r}^2 = -\varepsilon f^2(\rho) \quad (2.51)$$

L'ultima uguaglianza è interpretabile come un'equazione nella variabile indipendente r

$$\frac{d(\dot{r}^2 r)}{dr} = -\varepsilon f^2(\rho) \quad (2.52)$$

Infatti

$$\frac{d(\dot{r}^2 r)}{dr} = \dot{r}^2 + 2r\dot{r} \frac{d\dot{r}}{dr} = \dot{r}^2 2r\dot{r} \frac{d\dot{r}}{d\tau} \frac{d\tau}{dr} = \dot{r}^2 2r\dot{r}\ddot{r} \frac{1}{\dot{r}} \quad (2.53)$$

La sua soluzione è $\dot{r}^2 r = -\varepsilon f^2(\rho)r + F(\rho)$ o equivalentemente

$$\dot{r}^2 = -\varepsilon f^2(\rho) + \frac{F(\rho)}{r} \quad (2.54)$$

³ $|f(\rho)| < 1$ quando $\varepsilon = 1$

Dove $F(\rho)$ è una funzione di integrazione ancora da determinare. Eliminando ora $f(\rho)^2$ da (2.50) con l'aiuto di (2.51) si ottiene

$$e^\lambda = \frac{r'^2}{1 + 2r\ddot{r} + \dot{r}^2} \quad (2.55)$$

e quindi

$$\lambda = 2 \ln r' - \ln(1 + 2r\ddot{r} + \dot{r}^2) \quad (2.56)$$

poi sostituendo queste in (2.47), richiamando anche la prima equivalenza in (2.49)

$$\begin{aligned} & \left\{ \frac{r''}{r} - \frac{r'}{2r} \left[\frac{2r''}{r'} - \frac{(\dot{r}^2)'}{1 + 2r\ddot{r} + \dot{r}^2} + 2r'\ddot{r} + 2r\ddot{r}' \right] \right\} \frac{1 + 2r\ddot{r} + \dot{r}^2}{r'^2} - \frac{\dot{r}}{2r} \frac{2\dot{r}'}{r'} \\ & \quad - \frac{1}{2} \frac{2(\ddot{r}'r' - \dot{r}'\ddot{r}')}{r'^2} - \frac{1}{4} \left(\frac{2\dot{r}'}{r'} \right)^2 - \frac{\ddot{r}}{r} \\ & = \left\{ \frac{r''}{r} - \frac{r''}{r} + \frac{r'}{2r} \frac{2\dot{r}\dot{r}' + 2r'\ddot{r} + 2r\ddot{r}'}{1 + 2r\ddot{r} + \dot{r}^2} \right\} \frac{1 + 2r\ddot{r} + \dot{r}^2}{r'^2} - \frac{r\dot{r}'}{r r'} - \frac{\ddot{r}'}{r'} + \frac{\dot{r}'^2}{r'^2} - \frac{\dot{r}'^2}{r'^2} - \frac{\ddot{r}}{r} \\ & = \frac{\dot{r}\dot{r}' + r'\ddot{r} + r\ddot{r}'}{r r'} - \frac{r\dot{r}'}{r r'} - \frac{\ddot{r}'}{r'} - \frac{\ddot{r}}{r} = 0 \end{aligned}$$

Si nota che l'equazione è soddisfatta identicamente.

Invece eliminando $f(\rho)^2$ da (2.50) ma tramite (2.54)

$$e^\lambda = \frac{r'^2}{1 + \dot{r}^2 - \frac{F(\rho)}{r}} \quad (2.57)$$

e quindi

$$\lambda = 2 \ln r' - \ln \left(1 + \dot{r}^2 - \frac{F(\rho)}{r} \right) \quad (2.58)$$

poi sostituendo queste nel primo membro di (2.45), ancora sfruttando (2.49)

$$\begin{aligned}
& \left\{ \frac{2r''}{r} - \frac{r'}{r} \left[\frac{2r''}{r'} - \frac{(\dot{r}^2)' - \frac{F'(\rho)r - F(\rho)}{r^2}}{1 + \dot{r}^2 - \frac{F(\rho)}{r}} \right] + \frac{r'^2}{r^2} \right\} \frac{1 + \dot{r}^2 - \frac{F(\rho)}{r}}{r'^2} - \frac{\dot{r}}{r} \frac{2\dot{r}'}{r'} - \frac{\dot{r}^2}{r} - \frac{1}{r^2} \\
&= \left\{ \frac{r'}{r} \frac{2\dot{r}\dot{r}' - \frac{F'(\rho)r - F(\rho)}{r^2}}{1 + \dot{r}^2 - \frac{F(\rho)}{r}} + \frac{r'^2}{r^2} \right\} \frac{1 + \dot{r}^2 - \frac{F(\rho)}{r}}{r'^2} - \frac{2\dot{r}\dot{r}'}{rr'} - \frac{\dot{r}^2}{r} - \frac{1}{r^2} \\
&= \frac{r'(2r\dot{r}\dot{r}' - F'(\rho) + \frac{r'F(\rho)}{r}) + r'^2(1 + \dot{r}^2 - \frac{F(\rho)}{r})}{r^2(1 + \dot{r}^2 - \frac{F(\rho)}{r})} \frac{1 + \dot{r}^2 - \frac{F(\rho)}{r}}{r'^2} - \frac{2\dot{r}\dot{r}'}{rr'} - \frac{\dot{r}^2}{r} - \frac{1}{r^2} \\
&= \frac{1}{r^2 r'} \left[2r\dot{r}\dot{r}' - F'(\rho) + \frac{r'F(\rho)}{r} + r' + r'\dot{r}^2 - \frac{r'F(\rho)}{r} \right] - \frac{2\dot{r}\dot{r}'}{rr'} - \frac{\dot{r}^2}{r} - \frac{1}{r^2} \\
&= \frac{2\dot{r}\dot{r}'}{rr'} - \frac{F'(\rho)}{r^2 r'} + \frac{1}{r^2} + \frac{\dot{r}^2}{r^2} - \frac{2\dot{r}\dot{r}'}{rr'} - \frac{\dot{r}^2}{r^2} - \frac{1}{r^2}
\end{aligned}$$

Questa equazione di campo porta a

$$\frac{F'(\rho)}{r^2 r'} = -k\mu c^2 \quad (2.59)$$

Richiamando ora l'equazione (2.54)

$$\dot{r}^2 = -\varepsilon f^2(\rho) + \frac{F(\rho)}{r}$$

Si noti che per $\varepsilon \neq 0$ questa può essere risolta, poichè ρ gioca semplicemente il ruolo di parametro costante, introducendo $d\eta = \frac{f d\tau}{r}$

$$\left(\frac{d\eta}{d\tau} \frac{\partial}{\partial \eta} r \right)^2 = \frac{f^2}{r^2} \left(\frac{\partial r}{\partial \eta} \right)^2 = -\varepsilon f^2(\rho) + \frac{F(\rho)}{r}$$

e quindi

$$\left(\frac{\partial r}{\partial \eta} \right) = \sqrt{\frac{F}{f^2} r - \varepsilon r^2} \quad (2.60)$$

L'integrando per separazione di variabili questa relazione e successivamente $d\tau = \frac{r}{f} d\eta$ si giunge a

$$r = \frac{F(\rho)}{2f^2\rho} h'_\varepsilon \quad c\tau - c\tau_0(\rho) = \pm \frac{F(\rho)}{2f^3\rho} h_\varepsilon \quad (2.61)$$

Dove

$$h_\varepsilon = \begin{cases} \eta - \sin \eta & \text{per } \varepsilon = +1 \\ \sinh \eta - \eta & \text{per } \varepsilon = -1 \end{cases} \quad (2.62)$$

Nel caso $\varepsilon = 0$ immediatamente da (2.54) segue che

$$c\tau - c\tau_0(\rho) = \pm \frac{2}{3} F^{-\frac{1}{2}}(\rho) r^{\frac{2}{3}} \quad (2.63)$$

Tutto è pronto per enunciare la soluzione di Tolman:

$$ds^2 = -c^2 d\tau^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial \rho} \right)^2 \frac{d\rho^2}{1 - \varepsilon f^2(\rho)} + r^2(\rho, c\tau) d\Omega^2 \quad (2.64)$$

con

$$k\mu(c\tau, \rho)c^2 = \frac{F'(\rho)}{r'r^2} \quad (2.65)$$

La funzione $r(\rho, c\tau)$ è da ricercare in (2.61) o in (2.63). Delle tre funzioni $F(\rho)$, $f(\rho)$ e $\tau_0(\rho)$ al massimo due hanno significato fisico rilevante, dato che ρ è definita a meno di una trasformazione di scala. Sfortunatamente non è possibile ricavarle dalla distribuzione di massa $\mu(\rho, c\tau)$, ma da un'adeguata specificazione di $F(\rho)$, $f(\rho)$ e $\tau_0(\rho)$ si può ricavare una distribuzione di massa verosimile. Si possono verificare singolarità in queste coordinate, poichè è possibile che i diversi strati di materia che si muovono radialmente si sovrappongano e passino uno attraverso l'altro.

Essendo la stella di dimensioni finite esisterà anche una soluzione esterna, che sarà una soluzione nel vuoto a simmetria sferica e, per il teorema di Birkhoff, può solo essere quella di Schwarzschild. Si può recuperare questo risultato dalla trattazione precedente, immaginando il vuoto come particelle di polvere di massa nulla. La soluzione di Tolman, infatti, vale per densità di massa arbitrarie e dunque deve contenere quella di Schwarzschild esterna come caso particolare, con $\mu = 0$. Per la (2.65) questo implica $F = cost$.

2.2.2 Soluzione interna semplificata

La più semplice soluzione interna si trova per μ che non dipende dalla posizione (da ρ) e r ha la forma $r = a(c\tau)\rho$. Imponendo queste condizioni nella soluzione di Tolman otteniamo

$$F'(\rho) = kc^2 \mu r' r^2 = kc^2 \mu a r^2 = kc^2 \mu a^3 \rho^2$$

che integrata porta ad

$$F = \frac{1}{3}kc^2\mu a^3\rho^3 = \frac{1}{3}\hat{M}\rho^3 \quad (2.66)$$

Infatti poichè F dipende solo da ρ si ha che $kc^2\mu(c\tau)a^3(c\tau) = \hat{M} = cost.$

Se scegliamo $\tau_0 = 0$ il lato sinistro della seconda uguaglianza in (2.62) non dipende più da ρ , e così deve essere per il lato destro. Nel più semplice dei casi, quindi

$$f(\rho) = \rho \quad (2.67)$$

Le relazioni in (2.61) diventano

$$a(\eta) = \frac{1}{6}k\hat{M}h'_\varepsilon(\eta) \quad c\tau = -\frac{1}{6}k\hat{M}h_\varepsilon(\eta) \quad (2.68)$$

Con $h(\eta)_\varepsilon$ definita come sopra. Abbiamo scelto il segno meno poichè siamo interessati ad un raggio che si contrae allo scorrere del tempo. Adottate queste semplificazioni è possibile unificare caso $\varepsilon = 0$ con i restanti $\varepsilon = \pm 1$. Per fare questo è sufficiente impostare il sistema di equazioni differenziali con la (13) rimaneggiata e le condizioni del passaggio attraverso la funzione $h(\eta)_\varepsilon$ e $h'(\eta)_\varepsilon$.

$$\begin{cases} a = (c\tau)^{\frac{2}{3}}\hat{M}^{\frac{1}{3}}\left(k\frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{3}} \\ a = \frac{1}{6}k\hat{M}h' \\ c\tau = -\frac{1}{6}k\hat{M}h \end{cases} \quad (2.69)$$

Eliminando dalle prime due a e sostituendo $c\tau$ dalla terza equazione, si giunge a $h' = h^{\frac{2}{3}}\left(\frac{9}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$, che integrata porta a

$$h(\eta)_\varepsilon = \frac{1}{6}\eta^3 \quad (2.70)$$

In conclusione la metrica all'interno del corpo celeste assume la forma

$$ds^2 = -c^2d\tau^2 + a^2(c\tau) \left[\frac{d\rho^2}{1 - \varepsilon\rho^2} + \rho^2d\Omega^2 \right] \quad (2.71)$$

Con

$$a(\eta) = \frac{1}{6}k\hat{M}h'_\varepsilon(\eta), \quad c\tau = -\frac{1}{6}k\hat{M}h_\varepsilon(\eta) \quad (2.72)$$

dove

$$h_\varepsilon = \begin{cases} \eta - \sin \eta & \text{per } \varepsilon = +1 \\ \frac{1}{6}\eta^3 & \text{per } \varepsilon = 0 \\ \sinh \eta - \eta & \text{per } \varepsilon = -1 \end{cases}$$

L'interno della stella è dunque uno spazio tridimensionale con curvatura costante, comparabile con la metrica di Friedman-Roberson-Walker. Quindi $r = a(c\tau)\rho$ è interpretabile come il raggio areale, dipendente dal tempo. Il suo andamento è mostrato in figura 2.2.2: nei casi $\varepsilon = 0, -1$ il raggio decresce in modo continuo fino a che non avviene il collasso mentre per $\varepsilon = +1$ prima si espande e poi si contrae.

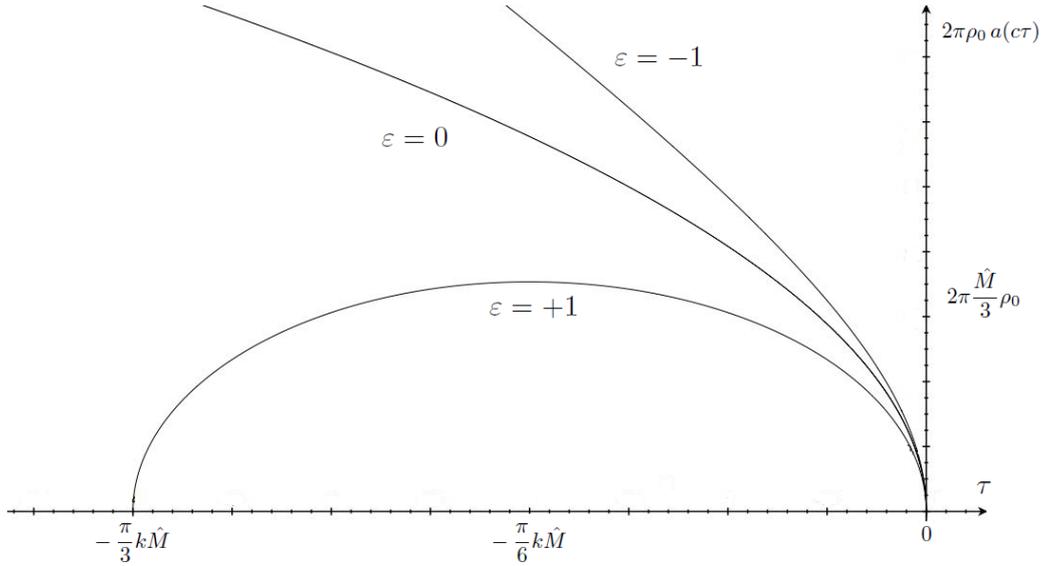


Figura 2.1: andamento del raggio della stella in funzione di τ

2.2.3 Giunzione della soluzione di Toleman

Attraverso le condizioni di giunzione cerchiamo ora di dare un significato fisico al parametro F . Operando un cambio di coordinate $r^- = a\rho$ all'interno del corpo celeste, non è difficile convincersi che il coefficiente $g_{r^-r^-}$ della

metrica di FRW si può sempre scrivere nella forma ⁴

$$g^{r^-r^-} = 1 - \frac{2m(r^-)}{r^-} \quad (2.73)$$

Dove

$$m(r^-) = \frac{1}{2}kc^2 \int_0^{r^-} \mu(x)x^2 dx \quad (2.74)$$

è la funzione di massa di Misner-Sharp, legata alla massa (e all'energia) contenuta in una sfera di raggio r^- . Questa è proporzionale a F , infatti dalla (2.65) segue che

$$F = \int_0^\rho kc^2\mu(\rho)r^{-2} \frac{\partial r^-}{\partial \rho} d\rho = \int_0^{r^-} kc^2\mu(r)r^{-2} dr^- = 2m(r^-) \quad (2.75)$$

Imponendo ora il raccordo lungo la superficie Σ , parametrizzata da $r^- = r_0$ (o, alternativamente $\rho = \rho_0$), con la metrica di Schwarzschild esterna si ha

$$\left(1 - \frac{F(r^-)}{r^-}\right) \Big|_{r_0} = \left(1 - \frac{2M}{r^+}\right) \Big|_{r_0} \quad (2.76)$$

E quindi

$$F(r_0) = 2M \quad (2.77)$$

Così il parametro F , essendo legato ad M , si riconduce alla massa della stella nel limite di campo debole.

Un altro modo per ricavare questa relazione è sfruttare il fatto che la polvere si muove lungo geodetiche, data l'assenza di pressione. Quindi la superficie Σ della stella deve soddisfare l'equazione delle geodetiche sia nel sistema di riferimento interno che esterno, anche se nelle coordinate adottate per Schwarzschild la essa è in movimento mentre per quelle relative a Toleman abbiamo scelto un sistema commovente, quindi è a riposo. Nella metrica di Schwarzschild questo si traduce nella condizione

$$\left(\frac{dr^+}{d\tau}\right)^2 = A^2 - c^2 + 2\frac{Mc^2}{r^+} \quad (2.78)$$

⁴questa proprietà verrà mostrata esplicitamente nell'ultimo capitolo

Imponendo che questa coincida con la (2.54), che richiamiamo

$$\dot{r}^2 = -\varepsilon f^2(\rho) + \frac{F(\rho)}{r}$$

sulla superficie Σ per ogni valore del tempo proprio τ , si ritrova (2.77)

Si noti che in questo modello semplificato il moto lungo le geodetiche rende sufficiente imporre la continuità della metrica senza bisogno di richiederne la derivabilità .

Nel caso il corpo celeste sia composto principalmente da polvere l'andamento l'andamento $a = a(\tau)$ è stato trovato esplicitamente, per ($\varepsilon = 0$), nella prima equazione del sistema (2.69)

$$a(\tau) = b\tau^{\frac{2}{3}} \quad (2.79)$$

con $b = (\frac{3}{4}c^2\hat{M}k)^{\frac{1}{3}} = \text{cost}$. E ridefinendo

$$x = \sqrt{rb}\tau^{\frac{1}{3}} \quad (2.80)$$

L'equazione integrale (2.32), si riduce a

$$t(\tau_f) - t(\tau_i) = b_1 \int_{x_i}^{x_f} \frac{\sqrt{b_2x^5 + x^4 - b_3x^2}}{|x^2 - b_3|} x^2 dx \quad (2.81)$$

con

$$\text{con } b_1 = \frac{3}{(rb)^{\frac{2}{3}}}, \quad b_2 = \frac{4(rb)^{\frac{2}{3}}}{3c^2}, \quad b_3 = 2M$$

2.3 Modello per radiazione

Sempre assumendo che lo spazio abbia curvatura nulla ($\varepsilon = 0$), è possibile studiare anche il caso in cui l'interno della stella sia composto prevalentemente da radiazione. Questo modello è anche una buona approssimazione della situazione in cui la stella sia composta da materia che viaggia ad una velocità molto elevata (approssimazione ultrarelativistica). In questo caso la dipendenza funzionale $a = a(\tau)$ è della forma

$$a(\tau) = b\tau^{\frac{1}{2}} \quad (2.82)$$

Ridefinendo

$$x = br\tau^{\frac{1}{2}} \quad (2.83)$$

con $b = \text{cost.}$ la (2.32) si riduce a

$$t(\tau_f) - t(\tau_i) = b_1 \int_{x_i}^{x_f} \frac{\sqrt{b_2 x^2 - b_3 x}}{|x - b_3|} x \, dx \quad (2.84)$$

con

$$\text{con } b_1 = \frac{2}{(rb)^2}, \quad b_2 = 1 + \frac{(rb)^2}{c^2}, \quad b_3 = 2M \quad (2.85)$$

2.4 Modello di de Sitter

C'è un ultimo caso di dipendenza $a = a(\tau)$ nota, anche se con significato fisico meno immediato. In cosmologia questo modello è utilizzato per descrivere un universo piatto (ancora $\varepsilon = 0$) e vuoto, in presenza della sola energia positiva del vuoto. In questa configurazione, detta universo di de Sitter, si ha

$$a(\tau) = b e^{H_0 \tau} \quad (2.86)$$

Con $b = \text{cost.}$ Ridefinendo

$$x = br e^{H_0 \tau} \quad (2.87)$$

la (2.32) si riduce a

$$t(\tau_f) - t(\tau_i) = \frac{1}{H_0} \int_{x_i}^{x_f} \frac{\sqrt{b_1 x^4 + x^2 - b_2 x}}{|x - b_2|} \frac{1}{x} \, dx \quad (2.88)$$

con

$$\text{con } b_1 = 2 \frac{H_0}{c^2}, \quad b_2 = 2M$$

Capitolo 3

Orizzonte di un buco nero e superfici intrappolate

L'orizzonte di un buco nero è una delle sue caratteristiche fondamentali, pertanto è necessario definirlo con precisione. Quello che viene chiamato comunemente *orizzonte degli eventi* è una proprietà di tutto lo spazio-tempo: per definirlo bisogna conoscere l'intera evoluzione temporale del buco nero, tracciando il confine tra i raggi nulli che alla fine riusciranno a fuggire e quelli che, invece, vi rimarranno intrappolati. E' anche possibile definire a posteriori una sorta di *prolungamento dell'orizzonte*, considerando un fotone che si trova sulla sua superficie e facendo propagare indietro nel tempo. Questo delimita il confine tra la materia (e radiazione) che effettivamente precipiterà e quella che può scappare, anche negli istanti di tempo precedenti l'apparizione dell'orizzonte. Si può, infine, definire un concetto locale di orizzonte tramite l'uso di *superfici marginalmente intrappolate*, luogo geometrico dei punti da cui, in un preciso punto dello spazio tempo, nemmeno la radiazione riesce a uscire. In alcune situazioni dinamiche queste giacciono all'interno del prolungamento dell'orizzonte e sono così vicine a quest'ultimo da fornirne una buona approssimazione. In relatività numerica, in questi casi, le superfici marginalmente intrappolate sono utili strumenti per delineare una sorta di "bordo" del buco nero a partire da un set di dati iniziali specifico, senza conoscere l'intera soluzione del problema.

3.1 Superfici intrappolate

Prima di definire in maniera rigorosa le superfici intrappolate occorre fare qualche premessa. Si ricordi che è possibile mappare un aperto dello spazio 3-dimensionale tramite le congruenze fornite dalle geodetiche nulle che partono da una superficie $r = cost.$ (con r raggio areale). Occorrono due coordinate per identificare il punto sulla superficie da dove parte la geodetica, e un'ulteriore coordinata fornita dal parametro di tipo tempo della geodetica (non il tempo proprio, visto che si tratta di segnali luminosi). Questa mappa è mostrata nel dettaglio in figura 3.1 a), in 3-dimensioni e in sezione. Data una famiglia di geodetiche si può definire l'area trasversa semplicemente come l'area contenuta al loro interno (vedi figura 3.1 b))

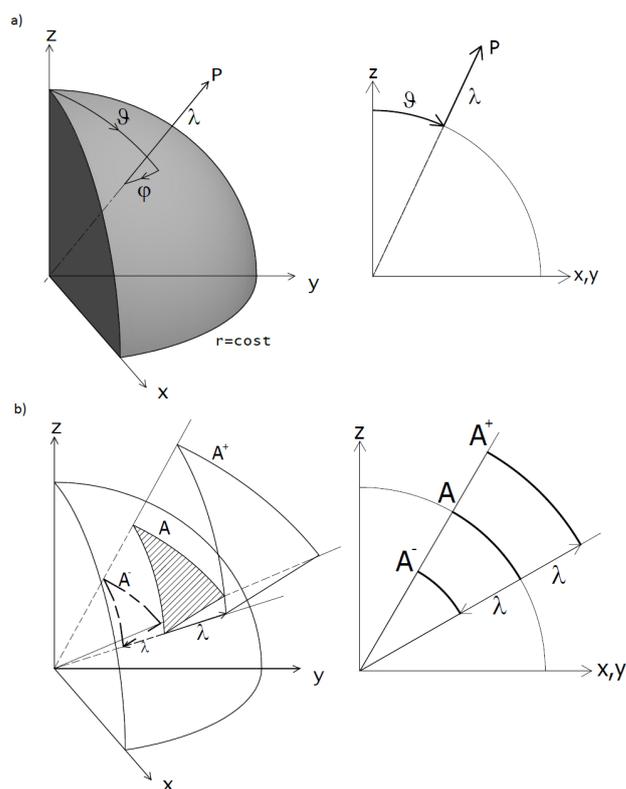


Figura 3.1: a: mappa che utilizza le congruenze generate dalle geodetiche e b: area trasversa

Definizione 2. *L'espansione è la variazione dell'area trasversa allo scorrere del parametro della geodetica (λ nel nostro esempio).*

In generale si hanno due versioni dell'espansione, dato che i segnali luminosi possono essere entranti o uscenti dalla superficie.

$$\theta^\pm = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{A^\pm - A}{\lambda} = \frac{dA^\pm}{d\lambda} \quad (3.1)$$

Nello spazio di Minkowsky, ad esempio, l'espansione per la radiazione uscente è positiva, mentre per quella entrante è negativa.

In caso di simmetria sferica la mappa si semplifica notevolmente, perchè ora l'unica coordinata che davvero conta è il parametro di tipo tempo λ e la variazione di area è quantificata dal raggio areale r . L'espansione, così, si riconduce a

$$\theta^\pm = \frac{\partial r^\pm}{\partial \lambda} \equiv \dot{r} \quad (3.2)$$

Si dispone, ora, di tutti gli strumenti necessari per definire e distinguere le varie classi di superfici:

Definizione 3. *Si dice intrappolante o debolmente intrappolata una superficie lungo la quale $\theta^+ \leq 0$, $\theta^- \leq 0$*

Questa si divide in due sottoclassi

- Superficie marginalmente intrappolata
lungo la quale $\theta^+ = 0$, $\theta^- \leq 0$ oppure $\theta^+ \leq 0$, $\theta^- = 0$
- Superficie intrappolata minimale
lungo la quale $\theta^+ = 0$, $\theta^- = 0$

Definizione 4. *Si dice intrappolata o intrappolata chiusa una superficie lungo la quale $\theta^+ < 0$, $\theta^- < 0$*

Tipicamente il concetto locale di orizzonte viene associato a superfici marginalmente intrappolate, in cui la radiazione uscente ha espansione nulla, che racchiudono al loro interno superfici intrappolate chiuse.

3.2 Equazione di Raychaudhuri

Il concetto di espansione è legato ai coefficienti della metrica dall'equazione di Raychaudhuri, in questo studio ridotta a

$$\theta^+\theta^- = -g^{ij} \nabla_i r \nabla_j r \quad (3.3)$$

Dove r , è il raggio areale. Adottando proprio r come coordinata l'equazione si semplifica notevolmente in

$$\theta^+\theta^- = -g^{rr} \quad (3.4)$$

A titolo di esempio consideriamo un buco nero stazionario, descritto dalla metrica di Schwarzschild nella forma

$$dS_S^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) c^2 dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2 \quad (3.5)$$

Dove r , il raggio areale, svolge il ruolo di coordinata. Questo rende possibile l'applicazione della formula semplificata (3.4) per rintracciare le superfici marginalmente intrappolate, che porta a

$$\theta^+\theta^- = \left(\frac{2M}{r} - 1\right) \quad (3.6)$$

In accordo con il risultato intuitivo che fuori dal raggio di Schwarzschild ($r > 2M$) le espansioni hanno segno discorde (positivo per i raggi uscenti e negativo per quelli entranti), mentre al suo interno hanno segno concorde (negativo per entrambe: rimangono intrappolati sia i raggi uscenti che quelli entranti). La superficie intrappolata è individuata dal punto in cui il prodotto delle espansioni si annulla e quindi anche una delle due (quella relativa ai raggi uscenti), e dalla relazione (3.6) si recupera proprio il valore

$$r_{SI} = 2M \quad (3.7)$$

Come era logico aspettarsi, in questo caso questa superficie individua un orizzonte locale che non cambia nel tempo e coincide in ogni punto con l'orizzonte degli eventi globale (coincidente con il raggio di Schwarzschild)

Non è altrettanto semplice rintracciare superfici marginalmente intrappolate all'interno di un corpo celeste che collassa. Per farlo riesprimiamo la soluzione di Toelman (2.64) introducendo $2\xi = -\varepsilon f^2(\rho)$

$$ds^2 = -c^2 d\tau^2 + \frac{r'^2}{1+2\xi} d\rho^2 + r^2(\rho, c\tau) d\Omega^2 \quad (3.8)$$

Con questa sostituzione e in virtù della relazione trovata per F in funzione della massa di Misner-Sharp (2.75), la (2.54) diventa

$$\dot{r}^2 = 2\xi + \frac{2m}{r} \quad (3.9)$$

Le cui soluzioni sono

$$\begin{aligned} r &= \frac{m}{2\xi} (\cos \eta - 1) \quad \text{con} \quad \eta - \sin \eta = \frac{(-2\xi)^{\frac{3}{2}}}{m} (c\tau_0 - c\tau) \quad \text{per } \xi < 0 \\ r &= \frac{m}{2\xi} (\cosh \eta - 1) \quad \text{con} \quad \sinh \eta - \eta = \frac{(-2\xi)^{\frac{3}{2}}}{m} (c\tau_0 - c\tau) \quad \text{per } \xi > 0 \\ r &= \left(\frac{9}{2}m\right)^{\frac{1}{3}} (c\tau_0 - c\tau)^{\frac{2}{3}} \quad \text{per } \xi = 0 \end{aligned} \quad (3.10)$$

La coordinata ρ commovente con la polvere, non consente di applicare la formula semplificata dell'equazione di Raychaudhuri. Occorre quindi operare un cambio di coordinate per passare ad una coordinata areale r , ovvero invertire la matrice di trasformazione

$$\begin{pmatrix} dc\tau \\ dr \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \dot{r} & r' \end{bmatrix} \begin{pmatrix} dc\tau \\ d\rho \end{pmatrix} \quad (3.11)$$

Ottenendo

$$\begin{pmatrix} dc\tau \\ d\rho \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{\dot{r}}{r'} & \frac{1}{r'} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} dc\tau \\ dr \end{pmatrix} \quad (3.12)$$

A questo punto la metrica ha assunto la forma

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{\dot{r}^2}{1+2\xi}\right) c^2 d\tau^2 + \frac{dr^2}{1+2\xi} + r^2(\rho, c\tau) d\Omega^2 - 2 \frac{\dot{r}}{1+2\xi} cd\tau dr \quad (3.13)$$

Da questa, omettendo la parte radiale, si estrae il tensore g_{mn} e poi se ne alzano gli indici

$$g^{mn} = \begin{bmatrix} -1 & -\dot{r} \\ -\dot{r} & -\dot{r}^2 + (1 + 2\xi) \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

Si noti che la componente g^{rr} si può esprimere, sfruttando la (3.9), nella forma

$$g^{rr} = 1 - \frac{2m}{r}$$

come anticipato nella seconda sezione.

L'equazione per la superficie marginalmente intrappolata può essere ora dedotta tramite la forma semplificata dell'equazione di Raychaudhuri

$$\theta^+ \theta^- = -g^{rr} = 0$$

da cui

$$-\dot{r}^2 = 1 + 2\xi \quad (3.15)$$

Congiunta con (3.9) fornisce la condizione

$$r(c\tau, \rho_{SI}(c\tau)) = 2m(\rho_{SI}(c\tau)) \quad (3.16)$$

che ricorda la (3.7), trovata nel caso della metrica di Schwarzschild.

Sostituendo quest'ultima relazione nelle soluzioni (3.10), si ottiene

Caso $\xi < 0$

$$m(\rho_{SI}(c\tau)) = \frac{(-2\xi)^{\frac{3}{2}}}{\eta_{SI} - \sin \eta_{SI}} (c\tau_0 - c\tau) \quad \text{con} \quad \eta_{SI} = \arccos(1 - 4\xi) \quad (3.17)$$

Caso $\xi > 0$

$$m(\rho_{SI}(c\tau)) = \frac{(-2\xi)^{\frac{3}{2}}}{\eta_{SI} - \sinh \eta_{SI}} (c\tau_0 - c\tau) \quad \text{con} \quad \eta_{SI} = \operatorname{arccosh}(1 + 4\xi) \quad (3.18)$$

Caso $\xi = 0$

$$m(\rho_{SI}(c\tau)) = \frac{3}{4} (c\tau_0 - c\tau) \quad (3.19)$$

Si noti che, per tutti i valori di ξ , il lato destro delle equazioni decresce nel tempo. Dato che $m(\rho)$ è monotona crescente con ρ , ciò significa che dopo la sua formazione, che avviene quando viene soddisfatta (3.16), la superficie

marginalmente intrappolata inizia a contrarsi. La figura 3.5 mostra l'andamento della superficie SI : quando il raggio areale assume il valore $r = 2M$ ricopre tutto il corpo celeste e poi decresce fino a zero. Questo è indice che

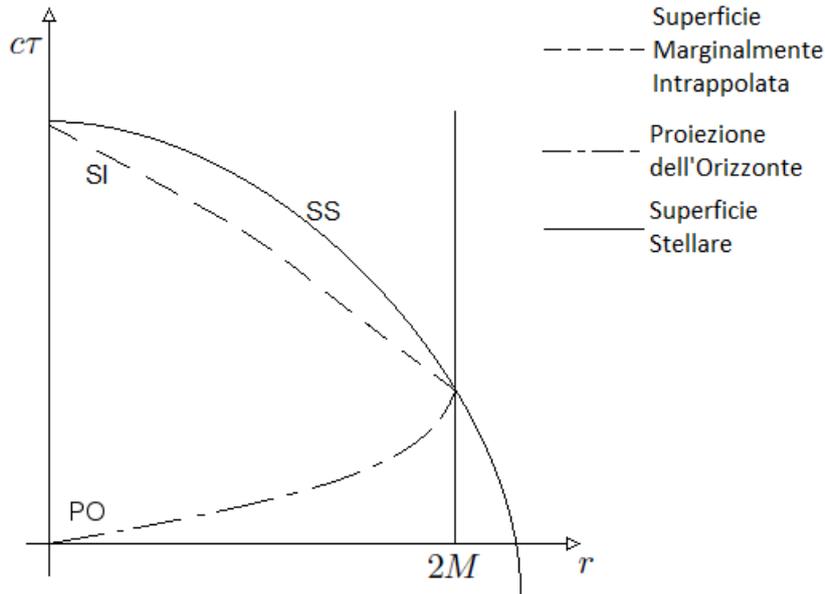


Figura 3.2: Superficie intrappolata nella soluzione di Tolman

lo spazio collassa più rapidamente lontano dal centro della stella, e oltre un certo valore $r = r_{SI}$ le sfere di luce emesse non riescono ad uscire dal corpo celeste. Ci si aspetta, però, che il prolungamento dell'orizzonte (curva PO in figura 3.5) cresca da un valore $r = 0$ per poi congiungersi con l'orizzonte globale in $r = 2M$. La soluzione di Tolman, quindi, prevede l'esistenza di una superficie marginalmente intrappolata che non è una buona approssimazione del prolungamento dell'orizzonte degli eventi. In sostanza non c'è nessun segnale fisico tangibile che lasci presagire la presenza della proiezione dell'orizzonte (e quindi l'imminente formazione dell'orizzonte vero e proprio): sia sopra che sotto PO la radiazione uscente localmente si espande. Questo modello risulta, comunque, eccessivamente semplicistico per questi scopi in quanto non prevede l'effetto della pressione, che tende proprio a far collassare più rapidamente la parte centrale della stella.

3.3 Diagrammi di Penrose

Un altro modo per visualizzare la situazione è utilizzare i diagrammi di Penrose. Questi si ottengono con una serie di cambi di coordinate e sfruttano la proprietà della funzione arco tangente per mappare gli infiniti in valori finiti delle coordinate. In sostanza, cioè, consentono di disegnare in un foglietto di carta diagrammi che racchiudono le proprietà globali dello spazio tempo e l'intera struttura causale. Altra formidabile proprietà di queste rappresentazioni è che i cambi di coordinate sono conformi, mantengono cioè intatta la pendenza dei coni luce. In fig 3.3 è mostrato l'esempio della metrica di FRW in coordinate T (temporale) e R (spaziale)

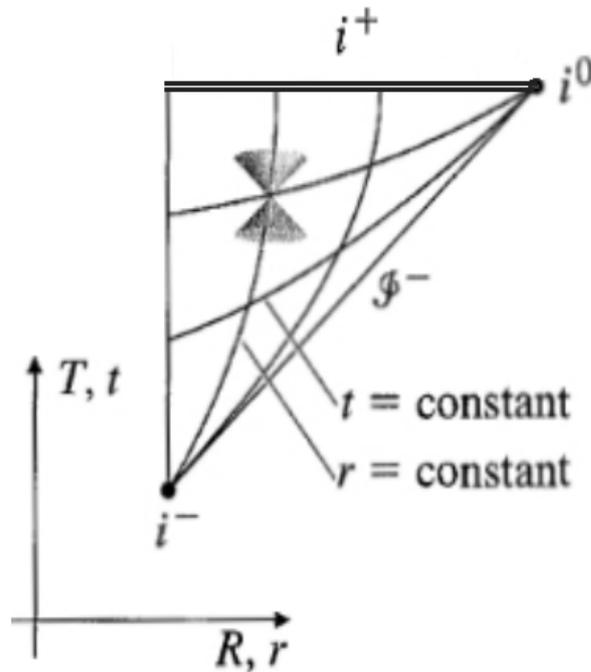


Figura 3.3: Diagramma di penrose per la metrica di FRW

In questa si possono distinguere

- i^- : infinito passato di tipo tempo
- i^0 : infinito spaziale

- i^+ : singolarità $T = 0$
- I^- : l'infinito passato di tipo luce

Il diagramma di Penrose della soluzione di Tolman è mostrato in figura 3.4. La zona ombreggiata ($\rho < \rho_0$) rappresenta l'interno della sfera, al di fuori della quale vige la metrica di Schwarzschild. L'orizzonte degli eventi è OE , che parte quando si scopre il raggio di Schwarzschild $r = 2M$. Sono riportati anche il prolungamento dell'orizzonte PO e la superficie intrappolata SI , tutti rappresentati da linee inclinate di 45° , coerentemente con la proprietà dei diagrammi conformi di preservare la pendenza delle superfici di tipo luce. Si noti che i raggi al di sotto della superficie intrappolante sono solo virtualmente liberi di uscire, poichè stando al di sotto del prolungamento di OE inevitabilmente precipiteranno nella singolarità.

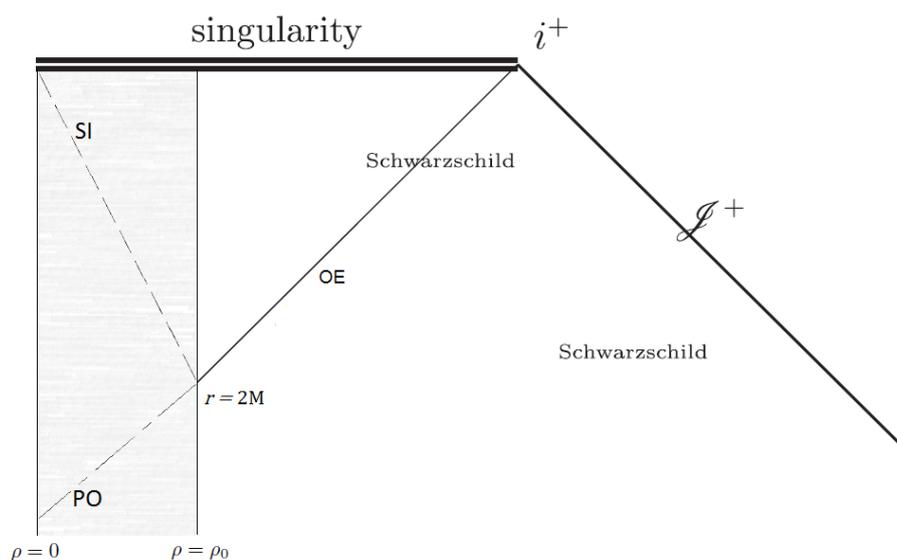


Figura 3.4: Diagramma di penrose per la soluzione di Toleman

Conclusioni

Sono state ripercorse brevemente le fasi finali della vita di una stella, sottolineando l'eventualità che un corpo celeste incredibilmente massivo incorresse in uno stadio di collasso gravitazionale. Si è richiamato, a questo scopo, l'importante risultato di Chandrasekhar che afferma l'esistenza di una massa limite sopra la quale qualsiasi corpo celeste non può prevenire la propria contrazione. Sono stati fatti cenni al fondamentale lavoro di Hawking, Penrose ed Ellis, con particolare riferimento ai teoremi sulla singolarità. Tra gli altri risultati, questi affermano che i corpi celesti, sottoposti a condizioni abbastanza generali, vanno incontro ad uno stadio di singolarità (collasso gravitazionale) o hanno attraversato una tale stadio nel passato (quando ha avuto inizio l'espansione dell'universo).

Appresa l'importanza che queste situazioni di contrazione incontrollata rivestono, si sono esaminati alcuni loro aspetti più formali: le condizioni generali di regolarità della metrica che permettono di raccordare due regioni di spazio, lungo una superficie. Questo consente di studiare una stella che collassa circondata dallo spazio vuoto. Particolarmente interessante è il caso in cui all'interno della stella vige la metrica di Friedman-Roberson-Walker e all'esterno quella di Schwarzschild. Si è analizzato il più semplice modello di collasso gravitazionale, quello di Oppenheimer-Snyder, per una stella formata da polvere. Data la semplicità delle assunzioni, si è potuto ricavare una soluzione esatta delle equazioni di Einstein dentro e fuori il corpo celeste, la soluzione di Tolman. Questa prevede proprio FRW all'interno di Schwarzschild, abbiamo così applicato a questo caso specifico le condizioni generiche ricavate in precedenza. Le condizioni di giunzione sono state, inoltre, utilizzate per analizzare due ulteriori modelli: quello per la radiazione (utile per descrivere materia ultrarelativistica) e quello di de Sitter.

Nell'ultimo capitolo si è affrontato il problema di definire un concetto locale di orizzonte in un buco nero. Dopo una premessa sul concetto di espansione e sulle varie classi di superfici intrappolate, è stata utilizzata l'equazione di Raychaudhuri per rintracciare le superfici marginalmente intrappolate nel modello di Oppenheimer-Snyder. L'analisi ha evidenziato come in questo modello semplicistico non ci siano segnali che lascino presagire la formazione dell'orizzonte globale, poiché non ci sono anomalie lungo il suo prolungamento. La struttura causale è stata poi esaminata dal punto di vista dei diagrammi di Penrose.

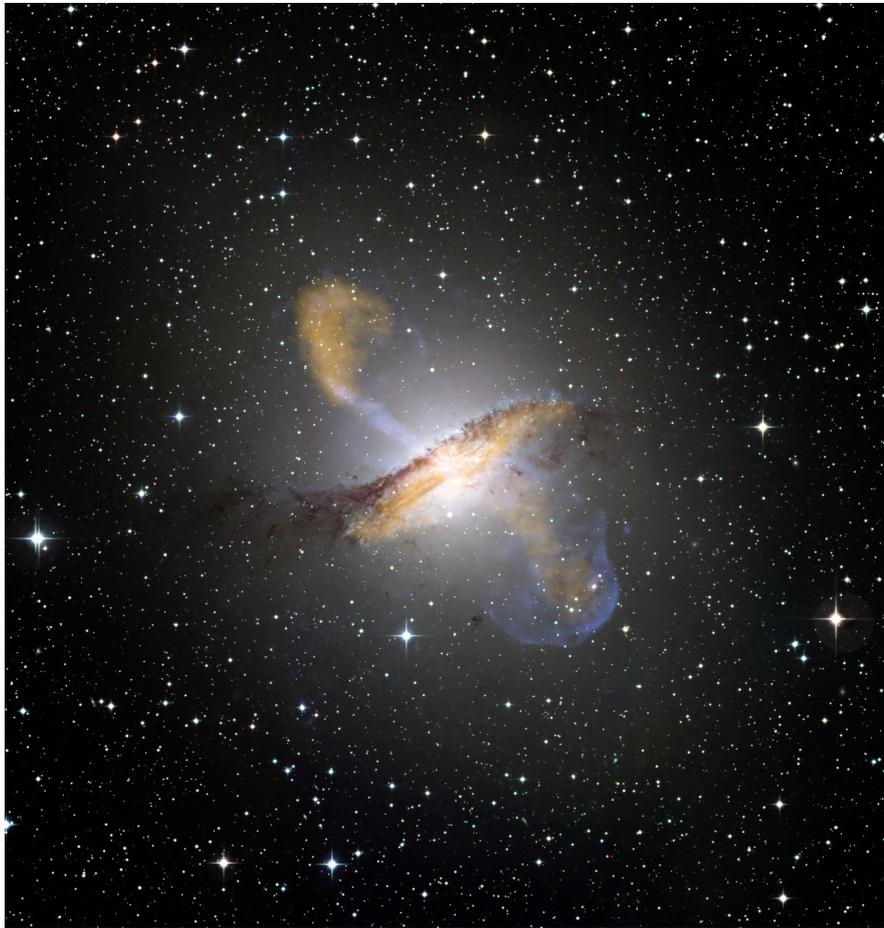


Figura 3.5: Buco nero al centro della galassia Centaurus A

Bibliografia

- [1] B. W. Carroll, D. A. Ostlie. *Modern Astrophysics*. Benjamin Cummings
- [2] S. Hawking, R. Penrose. *The Nature of Space and Time*. Princeton University Press, 2010.
- [3] C. W. Misner, K. S. Thorne, J. A. Wheeler. *Gravitation*. W.H. Freeman and company, 1940.
- [4] H. Stephani. *Relativity. An Introduction to Special and General Relativity*. Cambridge University Press, 2004.
- [5] J. R. Oppenheimer, H. Snyder. *On Continued Gravitational Contraction*. Physical Review, vol. 56, pagg. 455-459, 1939.
- [6] J. R. Oppenheimer, G. M. Volkoff. *On Massive Neutron Cores* Physical Review, vol. 55, pagg. 374-381, 1939.
- [7] I. Bengtsson, J. M. M. Senovilla. *Trapped surfaces in Oppenheimer-Snyder black holes*. Physical Review, vol. 83, 2011.
- [8] I. Bengtsson, E. Jakobsson J. M. M. Senovilla. *Trapped surfaces in Oppenheimer-Snyder black holes*. Physical Review, vol. 88, 2013.
- [9] [http:// www.astropixels.com](http://www.astropixels.com)