

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

---

FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI  
Corso di Laurea in Matematica

**RIVESTIMENTI RAMIFICATI  
SEMPLICI  
IN DIMENSIONE 3**

Tesi di Laurea in Topologia Algebrica

Relatore:  
Chiar.mo Prof.  
MASSIMO FERRI  
Correlatore:  
Prof.  
ALESSIA CATTABRIGA

Presentata da:  
FILIPPO SARTI

I Sessione  
Anno Accademico 2014/2015

*Tutto ciò è troppo bello,  
semplice e perfetto,  
per essere solo  
una geniale intuizione umana.*



# Introduzione

Lo studio delle varietà, la loro classificazione e la loro rappresentazione è un problema che ha interessato i matematici specialmente negli ultimi due secoli. In una data categoria, il problema della classificazione consiste nel trovare un algoritmo capace di stabilire, in un numero finito di passi, se due oggetti sono o meno isomorfi. In questo caso gli oggetti di cui si vuole trovare una classificazione sono le varietà topologiche e gli isomorfismi sono omeomorfismi. Se da una parte sono già stati raggiunti importanti risultati in questo senso, dall'altra la teoria delle varietà lascia ancora alcuni importanti problemi aperti. Proprio il fatto che la teoria delle varietà presenta tuttora problemi irrisolti e che l'attività di ricerca in tale direzione risulta molto attiva, mi ha spinto a realizzare una tesi in questo campo.

Per quanto riguarda le varietà connesse, compatte e prive di bordo, in dimensione 1 la loro classificazione è banale, in quanto ogni 1-varietà con tali proprietà è omeomorfa alla circonferenza.

Il problema della classificazione delle superfici (2-varietà) compatte e prive di bordo, ha visto impegnati molti matematici nel corso dei due secoli scorsi, come ad esempio Riemann, Möbius, Klein, Poincaré, Seifert e Jordan. Si è giunti quindi ad una soluzione del problema; la formulazione del teorema di classificazione si deve a Von Dick (1888), mentre una possibile dimostrazione è stata data da Brauer (1921). La classificazione delle 2-varietà non compatte è stata invece formulata inizialmente da Kerékjártó (1922-1923) e poi sistemata da Richards (1963).

La classificazione delle 3-varietà è un problema ancora irrisolto. La ricerca

di un tale teorema risale agli inizi del 1900 (Poincaré). Sono stati fatti tentativi con tecniche molto diverse tra loro: rivestimenti (Hilden, Montesinos), spezzamenti di Heegaard, cristallizzazioni (Pezzana). Negli anni '70 Thurston introduce un approccio completamente diverso, che fa uso di strutture geometriche, e formula la sua famosa Congettura di Geometrizzazione. Nel 2001 Perelman annuncia una dimostrazione la cui revisione attualmente è terminata. Il Teorema di Geometrizzazione non dà luogo ad una classificazione delle 3-varietà, ma avvicina di molto ad una soluzione del problema. Infine nel 1958 Markov dimostra che non può esistere un algoritmo finito di classificazione per varietà di dimensione maggiore o uguale a 4.

In questa tesi affronteremo lo studio delle 3-varietà partendo dal concetto di rivestimento. In particolare studieremo i rivestimenti ramificati di 3-varietà e vedremo come sarà possibile classificare tali rivestimenti in base ad alcune loro proprietà. Ci occuperemo di rivestimenti ramificati in cui l'insieme di ramificazione è un link, cioè una sottovarietà 1-dimensionale. Il Teorema di Hilden-Montesinos (1974), curiosamente dimostrato dai due matematici nello stesso anno con tecniche diverse, sarà il fulcro della nostra trattazione.

Nel primo capitolo daremo alcune definizioni e risultati che saranno necessari per affrontare i capitoli successivi. Dopo aver definito i rivestimenti e alcune loro proprietà, descriveremo il concetto di monodromia associata ad un rivestimento, che sarà una delle proprietà che caratterizzano un rivestimento. Sempre nel primo capitolo introdurremo il concetto di 3-varietà, e in modo particolare, di rivestimento ramificato di 3-varietà.

Il teorema di Hilden-Montesinos tratta in particolar modo di rivestimenti ramificati in cui l'insieme di ramificazione è un link (o un nodo). Per questo, nel secondo capitolo, definiremo i link e descriveremo alcune loro proprietà. Studieremo il problema dell'equivalenza tra link, descrivendo i concetti di diagramma e le mosse di Reidemeister. Introdurremo anche un invariante

---

per omotopia dei link, ovvero il gruppo del link, descrivendo la presentazione di Wirtinger.

Nel terzo capitolo saremo così in grado di enunciare i teoremi centrali di questa tesi; vedremo in sintesi un possibile approccio allo studio delle 3-varietà mediante rivestimenti nella definizione di link universale e nell'esempio del link borromeo. Enunceremo quindi il teorema di Hilden-Montesinos e descriveremo il problema che pose Montesinos stesso circa la possibilità di collegare diagrammi di link che rappresentano la stessa varietà mediante alcune mosse. Spiegheremo poi il risultato raggiunto da Riccardo Piergallini che, nel 1991, trovò una soluzione al problema di Montesinos introducendo tre mosse per passare da un diagramma ad uno ad esso equivalente.



# Indice

<b>Introduzione</b>	<b>i</b>
<b>1 Nozioni preliminari</b>	<b>1</b>
1.1 Cammini e cappi . . . . .	1
1.2 Complessi e sottocomplessi . . . . .	2
1.3 Rivestimenti ordinari e monodromia . . . . .	4
1.4 Varietà tridimensionali . . . . .	9
<b>2 Link</b>	<b>13</b>
2.1 Link in $S^3$ e loro equivalenza . . . . .	13
2.2 Mosse di Reidemeister . . . . .	15
2.3 Gruppo del link . . . . .	17
<b>3 Rivestimenti ramificati di 3-varietà</b>	<b>21</b>
3.1 3-varietà come rivestimenti . . . . .	21
3.2 Rivestimenti ramificati semplici . . . . .	22
3.3 Mosse di equivalenza tra diagrammi colorati . . . . .	24
<b>Bibliografia</b>	<b>31</b>



# Capitolo 1

## Nozioni preliminari

In questo capitolo raccogliamo alcune definizioni e teoremi che ci serviranno nei capitoli successivi. Per i dettagli si veda [3].

### 1.1 Cammini e cappi

Definiamo in questa sezione il concetto di cammino, di cappio e di gruppo fondamentale, che utilizzeremo per definire la monodromia in seguito.

**Definizione 1.1.** Sia  $X$  uno spazio topologico. Un *cammino*  $\omega$  in  $X$  è una funzione continua  $\omega : [0, 1] \rightarrow X$ . Se  $\omega$  e  $\tilde{\omega}$  sono due cammini in un dato spazio topologico  $X$  tale che  $\omega(1) = \tilde{\omega}(0)$  allora il prodotto  $\omega \cdot \tilde{\omega}$  è un cammino definito come segue:

$$\omega \cdot \tilde{\omega}(t) = \begin{cases} \omega(2t) & 0 \leq t < \frac{1}{2} \\ \tilde{\omega}(2t - 1) & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

**Definizione 1.2.** Sia  $X$  uno spazio topologico e sia  $x_0 \in X$ . Un *cappio* basato su  $x_0$  è un cammino  $\omega$  tale che  $\omega(0) = \omega(1) = x_0$ .

**Definizione 1.3.** Siano  $X$  e  $Y$  due spazi topologici e siano  $f, g : X \rightarrow Y$  due funzioni continue. Un'*omotopia* da  $f$  a  $g$  è una funzione continua  $F : X \times I \rightarrow Y$  tale che  $F|_{X \times \{0\}} = f$  e  $F|_{X \times \{1\}} = g$ ; si scrive  $F : f \simeq g$ .

Se  $A \subset X$  tale che  $f|_A = g|_A$ , allora un omotopia da  $f$  a  $g$  relativa ad  $A$  è una funzione  $F : X \times I \rightarrow Y$  tale che  $F_{A \times \{t\}} = f|_A = g|_A$  e si scrive  $F : f \simeq g \text{ rel } A$ .

Se  $\omega$  è un cappio basato su  $x_0$ , definiamo con  $[\omega]$  la classe di omotopia di  $\omega$  in  $X$  relativa a  $\{0,1\}$ . È facile verificare che l'insieme delle classi di omotopia di cappi basati su un punto formano un gruppo con l'operazione di prodotto definita sopra.

**Definizione 1.4.** Il gruppo  $\pi_1(X, x_0) = \{ [\omega], \omega \text{ cappio in } X \text{ basato in } x_0 \}$  è detto *gruppo fondamentale* (o *primo gruppo di omotopia*) di  $X$  su  $x_0$ .

## 1.2 Complessi e sottocomplessi

Definiamo in questa sezione il concetto di complesso e di sottocomplesso. In topologia algebrica risulta spesso più semplice lavorare sui complessi piuttosto che sugli spazi topologici perché permettono un approccio più combinatorio.

Diamo innanzitutto la definizione di  $k$ -simpleso.

**Definizione 1.5.** Sia  $n \geq 1$  e  $k \geq 0$ . Siano  $v_0, \dots, v_k$  punti di  $\mathbb{R}^n$  affinemente indipendenti. Allora

$$s_k = \left\{ \sum_{i=0}^k \lambda_i v_i \mid \lambda_i \in \mathbb{R}, \lambda_i \geq 0, \sum_{i=0}^k \lambda_i = 1 \right\}$$

è detto *simpleso  $k$ -dimensionale* (o  *$k$ -simpleso*) generato da  $v_0, \dots, v_k$ . I punti  $v_0, \dots, v_k$  sono detti *vertici* di  $s_k$ .

**Definizione 1.6.** Dato un  $k$ -simpleso  $s_k$  e  $v_1, \dots, v_h$  un insieme di  $h$  suoi vertici, l' $h$ -simpleso generato da essi è detto *faccia* di  $s_k$ .

**Definizione 1.7.** Un *complesso*  $K \subset \mathbb{R}^n$  è un'unione finita di semplici tale che:

a) se  $s_q$  è un simpleso di  $K$  e  $s_r$  è una sua faccia, allora  $s_r \subset K$ ;

- b) se  $s_q$  e  $s_r$  sono due semplici di  $K$ , allora  $s_q \cap s_r$  è vuoto o è un semplice di  $K$ ;
- c) ogni semplice di  $K$  è faccia di un numero finito di semplici di  $K$ ;
- d) rispetto alla topologia indotta da  $\mathbb{R}^n$ ,  $A \subseteq K$  è chiuso se e solo se per ogni semplice  $s \subset K$ ,  $s \cap A$  lo è.

**Definizione 1.8.** Siano  $K$  e  $L$  due complessi. Un'applicazione  $f : K \rightarrow L$  si definisce *applicazione simpliciale* se:

- a) per ogni vertice  $v_k$  di  $K$ ,  $f(v_k)$  è un vertice di  $L$ ;
- b) se  $s_k$  è il  $k$ -simpleso generato da  $v_0, \dots, v_k$ , allora  $f(s_k)$  è il  $k$ -simpleso generato da  $f(v_0), \dots, f(v_k)$ .

Descriviamo adesso un funtore che va dalla categoria dei complessi e applicazioni simpliciali alla categoria **Top** degli spazi topologici e applicazioni continue.

Il corpo di un complesso  $K \subset \mathbb{R}^n$ , indicato con  $|K|$ , è lo spazio topologico costituito dai punti di  $K$  con la topologia indotta dalla topologia euclidea di  $\mathbb{R}^n$ .

**Definizione 1.9.** Data  $f : K \rightarrow L$  applicazione simpliciale, possiamo definire  $|f| : |K| \rightarrow |L|$  nel modo seguente: per ogni  $p \in |K|$  tale che

$$p = \sum_{i=0}^k v_i \lambda_i$$

con  $v_i$  vertici di  $K$ ,

$$|f|(p) = \sum_{i=0}^k f(v_i) \lambda_i$$

L'immagine di  $| \cdot |$  è una sottocategoria di **Top**, chiamata **PL**, i cui oggetti sono detti *poliedri* e i cui morfismi sono detti *applicazioni lineari a tratti*.

**Definizione 1.10.** Una *triangolazione* di uno spazio topologico  $X$  è una coppia  $(K, f)$  dove  $K$  è un complesso e  $f : |K| \rightarrow X$  è un omeomorfismo.

Due triangolazioni  $(K, f)$  e  $(L, g)$  di uno spazio topologico  $X$  sono equivalenti se esiste un omeomorfismo **PL**  $h : |K| \rightarrow |L|$  che rende commutativo il diagramma:

$$\begin{array}{ccc} |K| & \xrightarrow{h} & |L| \\ & \searrow f & \swarrow g \\ & & X \end{array}$$

### 1.3 Rivestimenti ordinari e monodromia

Introduciamo ora la definizione di rivestimento ordinario di uno spazio topologico.

**Definizione 1.11.** Sia  $X$  uno spazio topologico. Una coppia  $(\tilde{X}, p)$ , dove  $\tilde{X}$  è uno spazio topologico e  $p$  è una mappa continua  $p : \tilde{X} \rightarrow X$  è un emhrivestimento ordinario di  $X$  se per ogni punto  $x$  di  $X$  esiste un intorno  $U$  (detto trivializzante) tale che  $p^{-1}(U)$  è un unione disgiunta di aperti  $U_i$  di  $\tilde{X}$  tali che  $p|_{U_i} : U_i \cong U$ .

Lo spazio  $\tilde{X}$  è detto *spazio di rivestimento* mentre  $X$  è detto *spazio base*.

L'insieme dei punti di  $p^{-1}(x)$  è detto *fibra* di  $x$ . Se  $X$  è connesso la cardinalità di  $p^{-1}(x)$  è costante per ogni  $x \in X$ . In tal caso, se la cardinalità della fibra è  $n \in \mathbb{N}$ , il rivestimento si dice di ordine  $n$ , altrimenti si dice di ordine infinito.

*Osservazione 1.* È banale il fatto che un omeomorfismo tra due spazi  $X$  e  $Y$  costituisca un rivestimento di ordine 1. Considereremo quindi, d'ora in avanti, rivestimenti di ordine  $n > 1$ .mo quindi, d'ora in avanti, rivestimenti di ordine  $n > 1$ .

Diamo alcuni esempi di rivestimenti.

**Esempio 1.1.** Consideriamo la circonferenza  $S^1 = \{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}$ . Diamo due esempi di rivestimenti di  $S^1$ .

a)

$$\begin{aligned} p : \mathbb{R} &\longrightarrow S^1 \\ t &\longmapsto e^{2\pi it} \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} p_n : S^1 &\longrightarrow S^1 \\ z &\longmapsto z^n \end{aligned}$$

L'ordine del rivestimento  $p$  è chiaramente infinito, mentre  $p_n$  ha ordine  $n$ . In Figura 1.1 rappresentiamo l'esempio a) a sinistra e l'esempio b) nel caso in cui  $n = 3$  a destra.

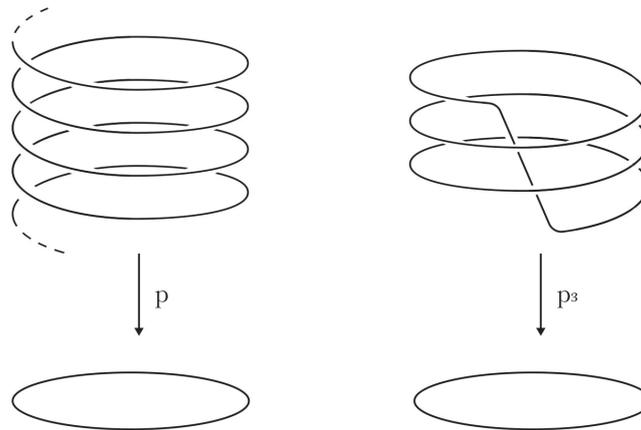


Figura 1.1: Due rivestimenti di  $S^1$ .

**Esempio 1.2.** Si consideri la 3-sfera  $S^3 = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 \mid |z|^2 + |w|^2 = 1\}$  e sia  $\Phi_{p,q} : S^3 \longrightarrow S^3$  l'omeomorfismo definito da  $\Phi_{p,q}(z, w) = (e^{2\pi i/p}z, e^{2\pi iq/p}w)$ , dove  $p$  e  $q$  sono degli interi positivi primi fra loro con  $p > q$ ; il gruppo  $G_{p,q}$  degli omeomorfismi di  $S^3$  generati da  $\Phi_{p,q}$  ha ordine  $p$ . Lo spazio quoziente

$L(p, q) = S^3/G_{p,q}$  è detto *spazio lenticolare*; preso  $x \in S^3$ , la proiezione a quoziente

$$\pi : (S^3) \longrightarrow L(p, q)$$

è un rivestimento ordinario in cui  $S^3$  è lo spazio di rivestimento e  $L(p, q)$  è lo spazio base.

Definiamo il concetto di sollevamento di una funzione rispetto ad un rivestimento.

**Definizione 1.12.** Siano  $X$  e  $Y$  due spazi topologici,  $p : \tilde{X} \longrightarrow X$  un rivestimento di  $X$  e  $f : Y \longrightarrow X$  una mappa continua. Una funzione  $\tilde{f} : Y \longrightarrow \tilde{X}$  tale che  $p \circ \tilde{f} = f$  è detto *sollevamento* di  $f$  rispetto a  $p$ .

In questa tesi ci occuperemo in particolare del sollevamento di cammini e cappi. Enunciamo il seguente teorema che garantisce l'esistenza e l'unicità del sollevamento di un cammino.

**Teorema 1.3.1.** *Siano  $X$  e  $\tilde{X}$  spazi topologici e siano  $x_0 \in X$  e  $\tilde{x}_0 \in \tilde{X}$ ; sia poi  $p : (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \longrightarrow (X, x_0)$  un suo rivestimento tale che  $p(\tilde{x}_0) = x_0$ . Sia  $\gamma : I \longrightarrow X$  un cammino tale che  $\gamma(0) = x_0$ . Allora esiste un unico  $\tilde{\gamma} : I \longrightarrow \tilde{X}$  sollevamento di  $\gamma$  rispetto a  $p$  tale che  $\tilde{\gamma}(0) = \tilde{x}_0$ .*

Descriviamo ora come si costruisce la mappa di monodromia associata ad un rivestimento. I rivestimenti finiti di uno spazio connesso, localmente connesso per archi e semi-localmente 1-connesso, possono infatti essere classificati attraverso la monodromia.

Consideriamo un rivestimento  $p : \tilde{X} \longrightarrow X$  di ordine finito  $n$ . Sia  $x_0$  un punto dello spazio base  $X$  e  $\gamma$  un cappio basato su  $x_0$ . Allora, preso un punto  $\tilde{x}_0$  di  $p^{-1}(x_0)$ , per il Teorema 1.3.1, esiste un unico sollevamento di  $\gamma$  in  $\tilde{X}$ , che denotiamo con  $\tilde{\gamma}$ , tale che  $\tilde{\gamma}(0) = \tilde{x}_0$ .

Si ha quindi una corrispondenza biunivoca

$$\begin{aligned} L_\gamma : p^{-1}(x_0) &\longrightarrow p^{-1}(x_0) \\ \tilde{x}_0 &\longmapsto \tilde{\gamma}(1) \end{aligned}$$

della fibra in se stessa, che a un punto  $\tilde{x}_0$  di  $p^{-1}(x_0)$  associa il punto finale del sollevamento  $\tilde{\gamma}$  di  $\gamma$  tale che  $\tilde{\gamma}(0) = \tilde{x}_0$ . Non è difficile dimostrare che la mappa  $L_\gamma$  dipende solo dalla classe di omotopia di  $\gamma$ .

**Definizione 1.13.** Sia  $S_n$  il gruppo simmetrico su  $n$  lettere e

$$\begin{aligned} \omega_p : \pi_1(X, x_0) &\longrightarrow S_n \\ \gamma &\longmapsto L_\gamma \end{aligned}$$

la funzione che ad ogni classe di omotopia di cappi nello spazio base  $X$  associa la permutazione dei punti della fibra definita sopra. La mappa  $\omega_p$  è chiamata *mappa di monodromia* (o azione del gruppo  $\pi_1(X, x_0)$  sulla fibra  $p^{-1}(x_0)$ ).

Per chiarire il concetto, diamo un esempio di monodromia.

**Esempio 1.3.** Consideriamo i rivestimenti di ordine 3 di  $S^1$ ; essi sono in tutto tre e sono schematizzati in Figura 1.2:

i)  $p_1 : S_1^1 \sqcup S_2^1 \sqcup S_3^1 \longrightarrow S^1$  con  $p_{1|S_i^1} = id_{S^1}$  per  $i = 1, 2, 3$ ;

ii)  $p_2 : S_1^1 \sqcup S_2^1 \longrightarrow S^1$  con  $p_{2|S_1^1} = id_{S^1}$ ,  $p_{2|S_2^1}(z) = z^2$ ;

iii)  $p_3 : S_1^1 \longrightarrow S^1$ ,  $p_3(z) = z^3$ .

Sia ora  $x_0$  un punto base nella circonferenza  $S^1$  (spazio base). Il gruppo fondamentale  $\pi_1(S^1, x_0)$  è  $\mathbb{Z}$ . Consideriamo un generatore  $a$  del gruppo  $\pi_1(S^1, x_0)$ , che corrisponde al cappio che percorre una volta in senso antiorario la circonferenza. La tabella che segue riassume la monodromia associata ad ogni rivestimento i), ii) e iii).

	<b>a</b>
$p_1 : S_1^1 \cup S_2^1 \cup S_3^1 \longrightarrow S^1$	$id$
$p_2 : S_1^1 \cup S_2^1 \longrightarrow S^1$	(12)
$p_3 : S_1^1 \longrightarrow S^1$	(123)

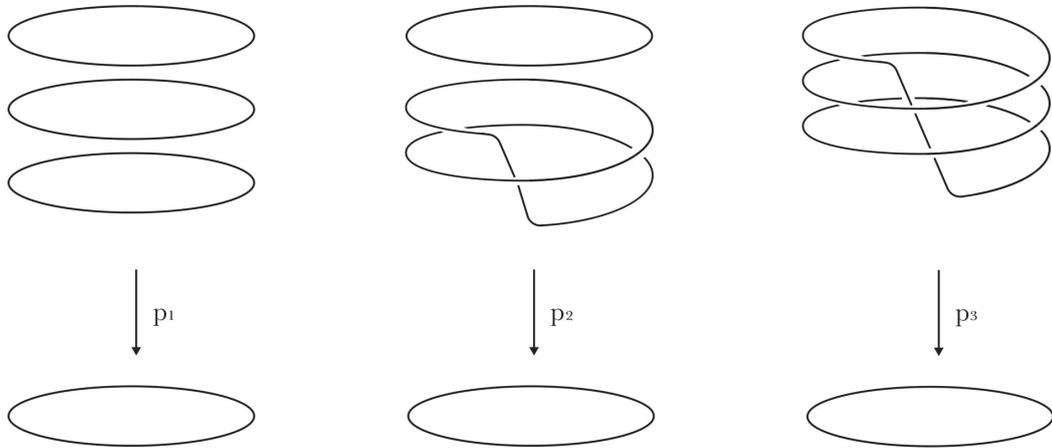


Figura 1.2: I rivestimenti di ordine 3 di  $S^1$ .

È possibile quindi studiare i rivestimenti di una varietà analizzando come agisce il gruppo fondamentale dello spazio base sulla fibra di un punto dello spazio base, ovvero assegnando ad ogni rivestimento la mappa di monodromia associata. Per giungere ad una vera e propria classificazione dei rivestimenti attraverso la monodromia, definiamo l'equivalenza tra rivestimenti:

**Definizione 1.14.** Due rivestimenti  $p_1 : \tilde{X}_1 \rightarrow X$  e  $p_2 : \tilde{X}_2 \rightarrow X$  di ordine  $n \in \mathbb{N}$  di uno spazio topologico  $X$  si dicono *equivalenti* se esiste un omeomorfismo  $\Phi : \tilde{X}_1 \rightarrow \tilde{X}_2$  tale che

$$p_2 \circ \Phi = p_1$$

Si può dimostrare che a rivestimenti equivalenti sono associate azioni di gruppo isomorfe, ovvero stessa mappa di monodromia.

Il seguente teorema classifica i rivestimenti di un dato spazio topologico  $X$ .

**Teorema 1.3.2** ([3]). *Sia  $X$  uno spazio topologico connesso, connesso per archi e semi-localmente 1-connesso. I rivestimenti di  $X$  di ordine  $n \in \mathbb{N}$  sono in corrispondenza biunivoca con le classi di omomorfismi  $\pi_1(X, x_0) \rightarrow S_n$  dove*

la relazione di equivalenza identifica un omomorfismo  $\rho$  con il suo coniugato  $\sigma^{-1}\rho\sigma$  per ogni  $\sigma \in S_n$ .

In questo modo lo studio della mappa monodromia permette di classificare i rivestimenti finiti di uno spazio topologico.

## 1.4 Varietà tridimensionali

In questa sezione definiremo il concetto di 3-varietà, di equivalenza tra esse e di rivestimento ramificato di 3-varietà. Daremo poi alcuni esempi di tali rivestimenti, che saranno ripresi nel capitolo 3.

**Definizione 1.15.** Una *3-varietà topologica* (o *varietà di dimensione 3*) è uno spazio orientabile di Hausdorff tale che ogni punto possiede un intorno omeomorfo ad un aperto di  $\mathbb{R}^3$ .

Considereremo qui solo varietà compatte.

Una varietà  $M$  è una *sottovarietà* di una 3-varietà  $N$  se la mappa di inclusione  $i : M \rightarrow N$  è un omeomorfismo sull'immagine.

Definiamo anche l'equivalenza tra 3-varietà.

**Definizione 1.16.** Due 3-varietà  $M$  e  $N$  si dicono *equivalenti* se esiste un omeomorfismo

$$f : M \rightarrow N$$

D'ora in avanti utilizzeremo il simbolo  $\cong$  per indicare un omeomorfismo. Gli spazi lenticolari definiti nell'Esempio 1.2 sono un esempio di 3-varietà. È stato dimostrato che, in dimensione 3, ogni varietà è triangolabile in maniera unica a meno di equivalenza.

Di ciò che accade in altre dimensioni non tratteremo qui, ma rappresentiamo per completezza in una tabella quello che succede.

Dimensione	$\leq 3$	$\geq 4$
	<b>Top = PL</b>	<b>Top <math>\neq</math> PL</b>

Quindi, d'ora in avanti, a seconda del contesto e per comodità, confonderemo 3-varietà **Top** e **PL**.

In questa tesi tratteremo di 3-varietà e in modo particolare di rivestimenti ramificati di 3-varietà, di cui ora diamo la definizione.

La definizione di rivestimento ordinario afferma che ogni punto dello spazio base possiede un intorno trivializzante. Il concetto di rivestimento ramificato, in un certo senso, amplia quello di rivestimento ordinario, in quanto prevede che vi siano alcuni punti dello spazio base con proprietà diverse.

**Definizione 1.17.** Siano  $M$  e  $N$  due 3-varietà e  $(H, g)$ ,  $(K, f)$  rispettivamente due loro triangolazioni. La coppia  $(M, p)$  dove  $p$  è una mappa continua  $p : M \rightarrow N$  è un *rivestimento ramificato* di  $N$  se esiste un sottocomplesso  $L$  di dimensione 1 di  $K$  tale che  $p^{-1}(L)$  è un sottocomplesso di dimensione 1 di  $H$  e tale che:

$$p|_{\tilde{X}-p^{-1}(|L|)} : (\tilde{X} - p^{-1}(|L|)) \rightarrow (X - |L|)$$

è un rivestimento ordinario.

Il corpo del sottocomplesso  $L$  è chiamato *insieme di ramificazione* (o *ramificazione*) del rivestimento.

Diamo alcuni un esempio di rivestimento ordinario e uno di rivestimento ramificato di 3-varietà.

**Esempio 1.4.** Consideriamo la 3-sfera  $S^3$  e il rivestimento  $p : S^3 \rightarrow S^3$  definito come segue.

Rappresentiamo  $S^3$  come la compattificazione 1-punto di  $\mathbb{R}^3$ :  $S^3 \cong \mathbb{R}^3 \cup \{\infty\}$ . In  $\mathbb{R}^3$  scegliamo una semiretta  $l$  e identifichiamo i punti di  $\mathbb{R}^3$  ottenuti da una rotazione di angolo  $2\pi/n$  rispetto all'asse  $l$ .

Come risultato, otteniamo una mappa  $\tilde{p}_n : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3/\mathbb{Z}_n$  dove  $\mathbb{Z}_n$  denota il gruppo generato dalla rotazione sopra definita intorno all'asse  $l$ .

In Figura 1.3 diamo un'idea visiva per  $n = 5$ , rappresentando la restrizione della mappa  $\tilde{p}_5$  ad un piano perpendicolare alla semiretta  $l$ .

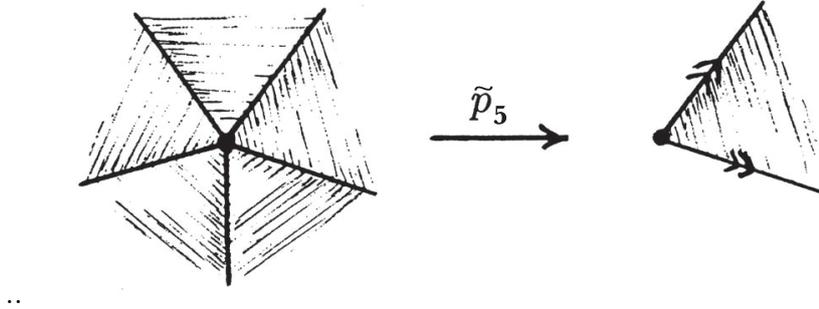


Figura 1.3: Rivestimento ramificato di ordine 5 di  $S^3$ .

Chiaramente,  $\mathbb{R}^3/\mathbb{Z}_n \cong \mathbb{R}^3$ , e la mappa  $\tilde{p}_n : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  è un rivestimento ramificato con ramificazione  $l$ .

Aggiungendo il punto all'infinito, otteniamo quindi un rivestimento ramificato  $p : S^3 \rightarrow S^3$  tale che  $p(\infty) = \infty$ . La ramificazione del rivestimento è la circonferenza  $l \cup \{\infty\}$  che è la compattificazione 1-punto di  $l$ .

Dato un rivestimento ramificato di ordine finito  $p : M \rightarrow N$  dove  $|L|$  è l'insieme di ramificazione, per ogni  $P \in |L|$  esiste  $U$  intorno di  $P$  tale che

$$p : p^{-1}(U) \rightarrow U$$

è la mappa descritta nell'Esempio 1.4.

Come nel caso dei rivestimenti ordinari, anche per i rivestimenti ramificati è possibile definire la mappa di monodromia associata al rivestimento.

**Definizione 1.18.** Dato un  $n$ -rivestimento di 3-varietà  $p : M \rightarrow N$  ramificato lungo  $|L| \subseteq N$ , la *mappa di monodromia* associata al rivestimento è la mappa di monodromia

$$\omega_p : \pi_1(N - |L|, x_0) \rightarrow S_n$$

del rivestimento ordinario associato.

Come abbiamo visto nella sezione precedente, la mappa di monodromia ci permette di classificare i rivestimenti ordinari di un dato spazio topologico. Per giungere ad una classificazione dei rivestimenti ramificati, dobbiamo

studiarne sia la mappa di monodromia del rivestimento ordinario associato, sia l'insieme di ramificazione.

In questa tesi ci occuperemo, in particolare, del caso in cui lo spazio di ramificazione è una sottovarietà 1-dimensionale dello spazio base. Nel prossimo capitolo, quindi, introdurremo il concetto di link, che è una sottovarietà 1-dimensionale di una 3-varietà.

# Capitolo 2

## Link

Siamo interessati a rivestimenti ramificati di 3-varietà in cui la ramificazione è una sottovarietà 1-dimensionale compatta, cioè un link. In questo capitolo definiremo i link e le loro proiezioni, ne studieremo alcune proprietà e un loro invariante per omotopia, ovvero il gruppo del link. Per un approfondimento si vedano [5] e [8].

### 2.1 Link in $S^3$ e loro equivalenza

**Definizione 2.1.** Un *link* è una sottovarietà 1-dimensionale compatta di  $S^3$ . É quindi omeomorfo all'unione disgiunta di circonferenze. In particolare un link connesso è chiamato *nodo*.

In figura 2.1 sono rappresentati alcuni esempi di nodi e di link. Si noti che  $\mathbb{R}^3$  si può identificare in modo standard, come nell'Esempio 1.4, con  $S^3 - \{\infty\}$  e che ogni automorfismo di  $\mathbb{R}^3$  si estende ad uno di  $S^3$ . D'ora in poi, quindi, considereremo i link sottovarietà di  $\mathbb{R}^3$  o di  $S^3$  indifferentemente a seconda della comodità.

Diamo la definizione di equivalenza tra link.

**Definizione 2.2.** Due link  $L$  e  $L'$  in  $S^3$  si dicono *equivalenti* se esiste un omeomorfismo di coppie  $\phi : (S^3, L) \longrightarrow (S^3, L')$ , cioè tale che  $\phi(L) = L'$ , che preserva l'orientazione di  $S^3$ .

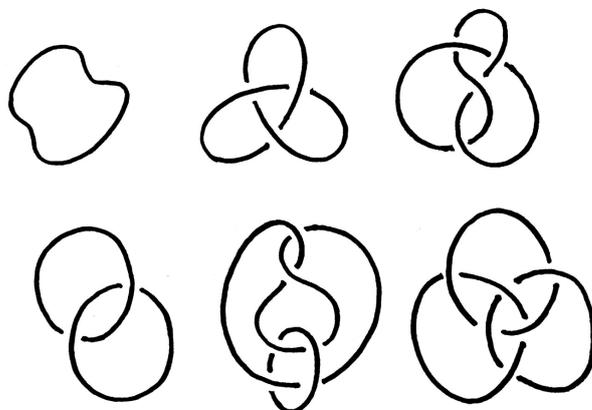


Figura 2.1: Esempi di nodi e link.

Un nodo è detto banale se è equivalente a  $S^1$  immerso in maniera standard in  $S^3$  (si veda l'Esempio 1.1), cioè se borda un disco in  $S^3$ .

**Definizione 2.3.** Un link  $L$  si dice *poliedrale* se  $|L|$  è una sottovarietà PL di  $S^3$ .

D'ora in avanti ci occuperemo solo di link poliedrali. Per comodità di rappresentazione grafica, rappresenteremo i link poliedrali con link della categoria **Top** loro equivalenti.

Diamo ora alcuni esempi di link equivalenti:

**Esempio 2.1.** I link rappresentati in Figura 2.2 sono equivalenti.

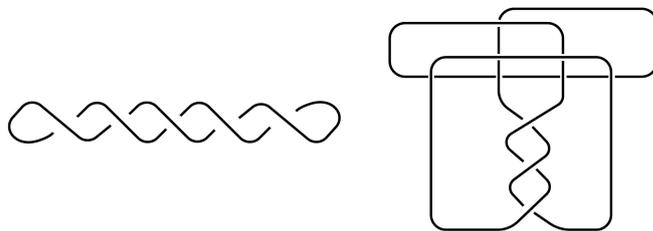


Figura 2.2: Link equivalenti.

*Osservazione 2.* Se due link  $L_1$  e  $L_2$  in  $S^3$  sono equivalenti, allora vale  $(S^3 - L_1) \cong (S^3 - L_2)$ . Non vale, in generale, il viceversa quando il link ha più di una componente.

**Esempio 2.2.** Per i due link in Figura 2.3 vale  $(S^3 - L_1) \cong (S^3 - L_2)$ , ma nessuno di tali omeomorfismi si estende a  $S^3$ .

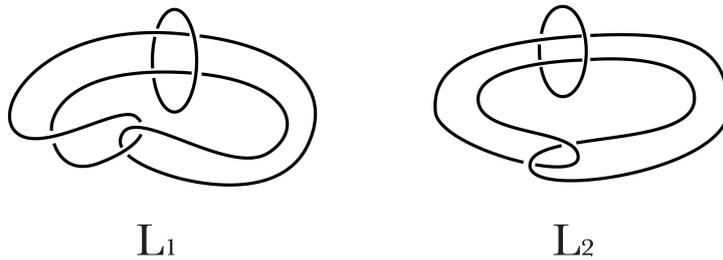


Figura 2.3: Esempio di link non equivalenti con complementari omeomorfi.

Il seguente teorema afferma che, nel caso di un nodo, vale il viceversa.

**Teorema 2.1.1** ([2]). *Siano  $K, K' \subseteq S^3$  due nodi tali che  $(S^3 - K) \cong (S^3 - K')$ . Allora  $K$  e  $K'$  sono equivalenti.*

## 2.2 Mosse di Reidemeister

Studieremo in questa sezione un modo per rappresentare i link e definiremo le mosse di Reidemeister, che ci permetteranno di passare da una rappresentazione ad una ad essa equivalente.

**Proposizione 2.2.1.** *Per ogni link poliedrale  $L \subseteq \mathbb{R}^3$  esiste una proiezione  $\pi$ , detta regolare, su un piano  $\alpha$  di  $\mathbb{R}^3$  tale che:*

- a) *l'insieme dei punti multipli è finito ed è costituito unicamente da punti doppi;*
- b) *nessun vertice di  $L$  è proiettato su un punto doppio.*

Non sono quindi ammesse configurazioni come quelle rappresentate in Figura 2.4.

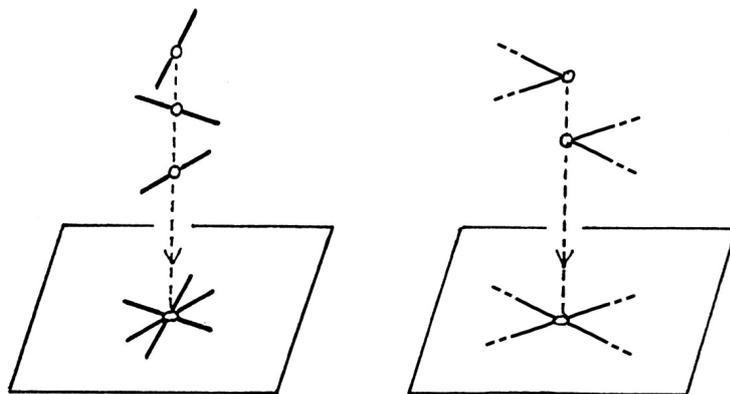


Figura 2.4: Esempio di configurazioni proibite.

Possiamo supporre che  $L$  stia in una delle due componenti connesse di  $\mathbb{R}^3 - \alpha$ . Una proiezione non determina in modo univoco il link. Per ogni punto doppio (o incrocio)  $Q_i$ , si ha  $\pi^{-1}(Q_i) = \{P_1, P_2\}$  dove  $P_1$  è il punto più lontano a  $\alpha$  e  $P_2$  è il più vicino; sia quindi  $U_i$  un intorno di  $P_2$ . Nella proiezione dello spigolo contenente  $P_2$  è infatti stata rimossa la proiezione  $\pi(U_i)$ . Siamo così in grado di ricostruire in modo univoco un link partendo da una sua proiezione.

**Definizione 2.4.** Un *diagramma* di un link è una sua proiezione con tale indicazione (detta *etichettatura*) ad ogni incrocio. Le componenti connesse di un diagramma di un link (cioè gli archi che lo compongono) sono dette *sovrappassi*.

**Definizione 2.5.** Due diagrammi  $D_1$  e  $D_2$  sono *equivalenti* se esiste un omeomorfismo del piano che conserva l'orientazione e che manda  $D_1$  in  $D_2$  rispettando l'etichettatura agli incroci.

Dal punto di vista operativo, il seguente teorema fornisce una serie di movimenti che collegano due diagrammi corrispondenti allo stesso link.

**Teorema 2.2.2.** *Due diagrammi rappresentano lo stesso link se e solo se uno può essere ottenuto dall'altro con una sequenza finita delle mosse  $R_1$ ,  $R_2$  e  $R_3$  rappresentate in Figura 2.5 dette mosse di Reidemeister.*

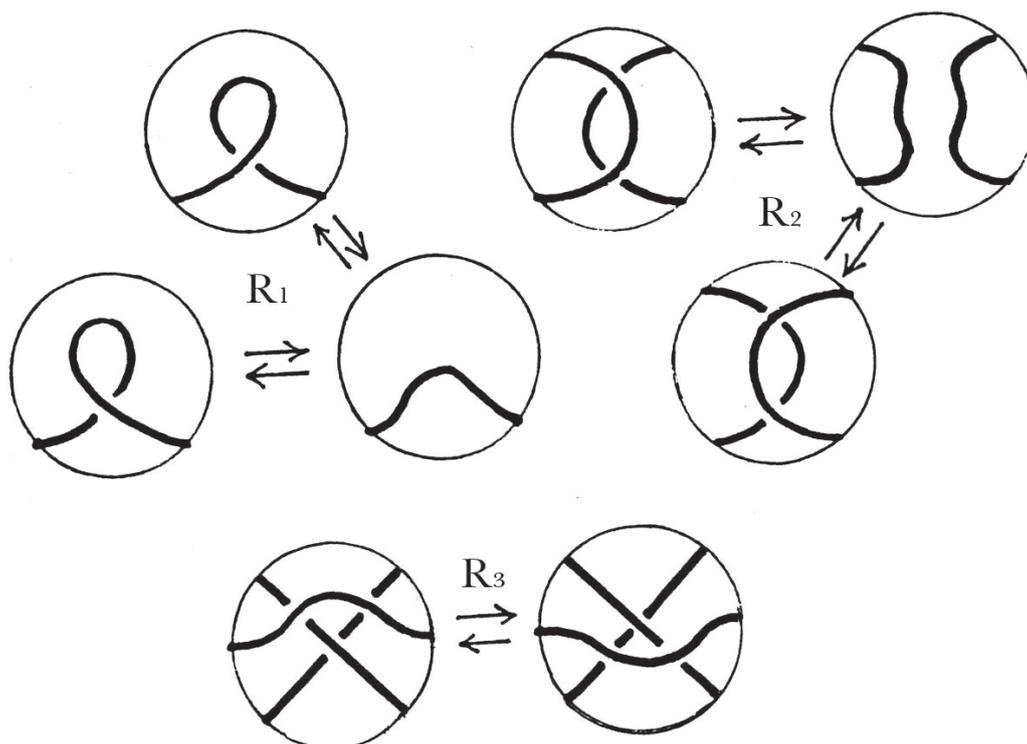


Figura 2.5: Le tre mosse di Reidemeister.

## 2.3 Gruppo del link

Nello studio dell'equivalenza tra link, è spontaneo l'utilizzo di invarianti. Nella nostra trattazione faremo riferimento a uno di questi invarianti, ovvero il gruppo dei link.

Per definire il gruppo di un link, per ogni componente connessa di un link scegliamo un'orientazione. Dato un diagramma di un link, tale orientazione induce un'orientazione sul diagramma.

**Definizione 2.6.** Il gruppo di un link  $L$  è il gruppo fondamentale del complementare di  $L$  in  $S^3$ , ovvero  $\pi_1(S^3 - L, x_0)$ , dove  $x_0$  è un punto base.

**Teorema 2.3.1** ([1]). Sia  $L \subset S^3$  un link e  $D$  un diagramma di  $L$  con  $k$  incroci. Allora

$$\pi_1(S^3 - L) \cong \langle a_1, \dots, a_k \mid r_1, \dots, r_k \rangle$$

dove  $a_1, \dots, a_k$  corrispondono ai sovrappassi di  $D$  e  $r_i = a_i a_k^{-\mu_i} a_j^{-1} a_k^{\mu_i}$  se l' $i$ -esimo incrocio di tipo  $\mu_i$  (Figura 2.6) è tra i sovrappassi  $a_i, a_j$  e  $a_k$ . Una presentazione di un gruppo in cui le relazioni godono di tale proprietà è detta presentazione di Wirtinger.

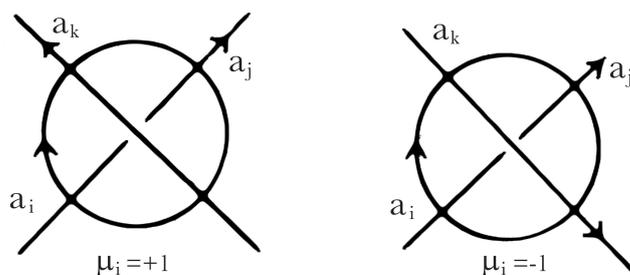


Figura 2.6: L'orientazione di un link può dare luogo a due possibili incroci.

Diamo un esempio di calcolo del gruppo di un link.

**Esempio 2.3.** Consideriamo il nodo trifoglio  $K$  in  $S^3$  in Figura 2.7.

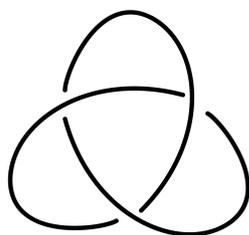


Figura 2.7: Nodo trifoglio.

Siano  $a$ ,  $b$  e  $c$  i sovrappassi del diagramma. Il gruppo del link risulta quindi:

$$\pi_1(S^3 - K) = \langle a, b, c \mid r_1, r_2, r_3 \rangle$$

con  $r_1 = ac^{-1}a^{-1}b$ ,  $r_2 = ba^{-1}b^{-1}c$  e  $r_3 = cb^{-1}c^{-1}a$

che si può anche scrivere

$$\pi_1(S^3 - K) = \langle a, b \mid abab^{-1}a^{-1}b^{-1} \rangle$$

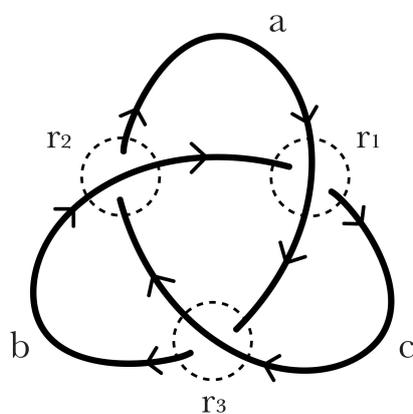


Figura 2.8: I generatori del gruppo del nodo trifoglio  $a$ ,  $b$  e  $c$  e le relazioni  $r_1$ ,  $r_2$  e  $r_3$ .



# Capitolo 3

## Rivestimenti ramificati di 3-varietà

In questo capitolo descriveremo una tecnica di rappresentazione delle 3-varietà mediante rivestimenti ramificati, mostrando il risultato anticipato nell'introduzione.

### 3.1 3-varietà come rivestimenti

Enunciamo il teorema di Alexander, che collega lo studio delle 3-varietà a quello dei rivestimenti ramificati.

**Teorema 3.1.1** ([8]). *Sia  $M$  una 3-varietà compatta e orientabile. Allora esiste un rivestimento ramificato  $p : M \rightarrow S^3$ .*

Un approccio allo studio delle 3-varietà attraverso i rivestimenti ramificati può essere il seguente: fissato un link, studiare le varietà che rivestono  $S^3$  e che hanno come insieme di ramificazione il link fissato. Da questa idea deriva la seguente definizione.

**Definizione 3.1.** Un link  $L$  in  $S^3$  è detto *universale* se per ogni varietà compatta e orientabile  $M$  esiste un rivestimento  $p : M \rightarrow S^3$  ramificato lungo  $L$ .

Consideriamo quindi il link in Figura 3.1, detto link borromeo.

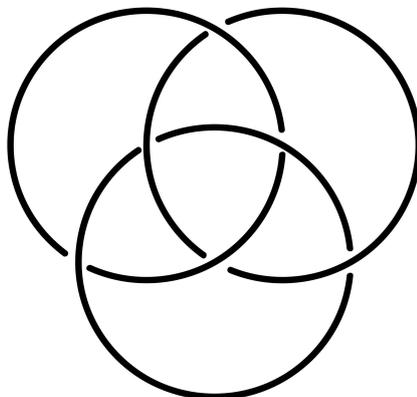


Figura 3.1: Link borromeo

Allora vale il seguente teorema, di cui omettiamo la dimostrazione.

**Teorema 3.1.2** ([8]). *Il link borromeo è universale.*

## 3.2 Rivestimenti ramificati semplici

In questa sezione descriveremo il teorema di Hilden-Montesinos: a differenza del Teorema 3.1.2 che fissa l'insieme di ramificazione, questo teorema fissa l'ordine del rivestimento e caratterizza la monodromia.

Premettiamo la definizione di rivestimento ramificato semplice di  $S^3$ .

**Definizione 3.2.** Un rivestimento ramificato di ordine 3 di  $S^3$  con ramificazione un link  $L$  è detto *semplice* se la mappa di monodromia (vedi Definizione 1.18) associa a ciascun generatore del gruppo del link descritto nel Teorema 2.3.1 le trasposizioni di  $S_3$ .

Consideriamo quindi una 3-varietà  $M$  e un rivestimento ramificato semplice  $p : M \rightarrow S^3$  di ordine 3 con un link  $L$  come ramificazione. Sia

$$\omega_p : \pi_1(S^3 - L, x_0) \rightarrow S_3$$

la mappa di monodromia associata al rivestimento. Essendo il rivestimento semplice, possiamo colorare i sovrappassi di un diagramma che rappresenta  $L$  con i colori  $R$ =Rosso,  $V$ =Verde e  $B$ =Blu che stanno ad indicare rispettivamente le tre trasposizioni (12), (23) e (31) di  $S^3$ .

A causa delle relazioni di Wirtinger, la colorazione di un diagramma non è completamente arbitraria. Ad ogni incrocio abbiamo una relazione del tipo  $r_i = a_i a_k^{-\mu_i} a_j^{-1} a_k^{\mu_i}$  con  $\mu_i = \pm 1$ . Quindi se  $\omega_p(a_i) = x$ ,  $\omega_p(a_j) = y$  e  $\omega_p(a_k) = z$  abbiamo che  $x = zy z^{-1}$  oppure  $x = z^{-1} y z$ . Per questo una colorazione è ammissibile se e solo se, per ogni incrocio, i colori degli archi che si incontrano sono tutti uguali o tutti diversi.

Un esempio di colorazione del nodo trifoglio è quella riportata in Figura 3.2).

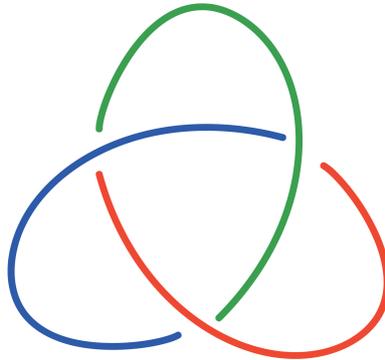


Figura 3.2: Colorazione del nodo trifoglio

Siamo ora in grado di enunciare il teorema di Hilden-Montesinos:

**Teorema 3.2.1** ([4, 6]). *Sia  $M$  una 3-varietà compatta ed orientabile. Allora esiste un rivestimento ramificato semplice  $p : M \rightarrow S^3$  di ordine 3 la cui ramificazione è un link di  $S^3$ .*

La dimostrazione, che qui omettiamo, è costruttiva. Essa parte infatti da un rivestimento ramificato  $\bar{p} : S^3 \rightarrow S^3$  in cui la ramificazione, rappresentata in Figura , è il link banale a due componenti.

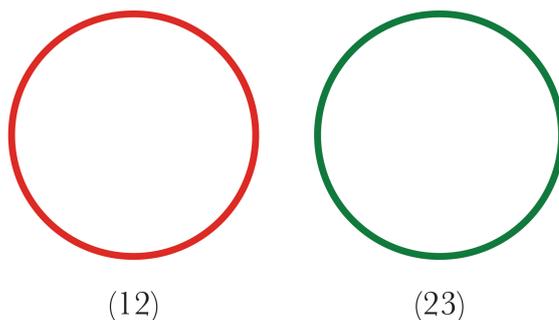


Figura 3.3: Il link di ramificazione del rivestimento  $\bar{p}$ .

Per passare da tale rivestimento a quello cercato, Montesinos fa uso di una tecnica di rappresentazione delle 3-varietà detta chirurgia; per un approfondimento si veda [8]. Tale procedimento permette di trasformare lo spazio di rivestimento modificando opportunamente l'insieme di ramificazione.

Questo teorema ci permette quindi di rappresentare le 3-varietà compatte e orientate come rivestimenti ramificati di  $S^3$ .

Dato che un rivestimento ramificato è determinato dall'insieme di ramificazione e dalla monodromia, possiamo rappresentare una 3-varietà compatta e orientabile con un diagramma colorato.

### 3.3 Mosse di equivalenza tra diagrammi colorati

In questa sezione enunceremo il risultato finale di tutta la trattazione. Siamo infatti in grado di analizzare e comprendere il problema che pose Montesinos e che può essere riassunto nel seguente modo:

*trovare un insieme di mosse sui diagrammi colorati tali per cui due diagrammi rappresentano la stessa varietà se e solo se sono collegati, a meno di mosse colorate di Reidemeister, da una sequenza finita di queste mosse.*

Le mosse colorate di Reidemeister sono una ricolorazione di una parte di un diagramma modificata da mosse di Reidemeister come in Figura 2.5 nell'unico modo compatibile con la regola “tutti diversi o tutti uguali” illustrata a pagina 23 sulla colorazione degli archi ad ogni incrocio del diagramma.

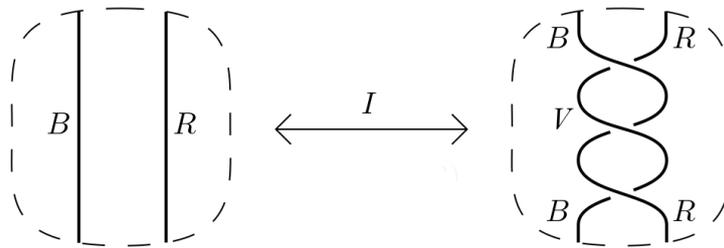


Figura 3.4: La mossa  $I$  introdotta da Montesinos.

Per molto tempo, la mossa  $I$  rappresentata in Figura 3.4 è stata considerata una soluzione al problema, fino a quando Montesinos stesso trovò un contro-esempio.

Illustriamo qui il risultato di Riccardo Piergallini che, nel 1991, trovò una soluzione al problema, descrivendo tre mosse rappresentate in Figura 3.5 le quali, unite alla  $I$ , collegano due diagrammi rappresentanti la stessa varietà. Come si evince dalla Figura 3.5, le tre mosse introdotte da Piergallini non sono locali, a differenza della  $I$  di Montesinos; esse infatti coinvolgono la struttura globale del diagramma.

Piergallini ipotizza che le tre nuove mosse, unite a quella di Montesinos, non siano completamente indipendenti. Non vi sono tuttavia ancora risultati in questa direzione.

**Teorema 3.3.1** ([7]). *Due diagrammi colorati rappresentano la stessa varietà se e solo se sono collegati (a meno di mosse colorate di Reidemeister) da una successione finita delle mosse del tipo I, II, III e IV, descritte in Figura 3.4 e in Figura 3.5.*

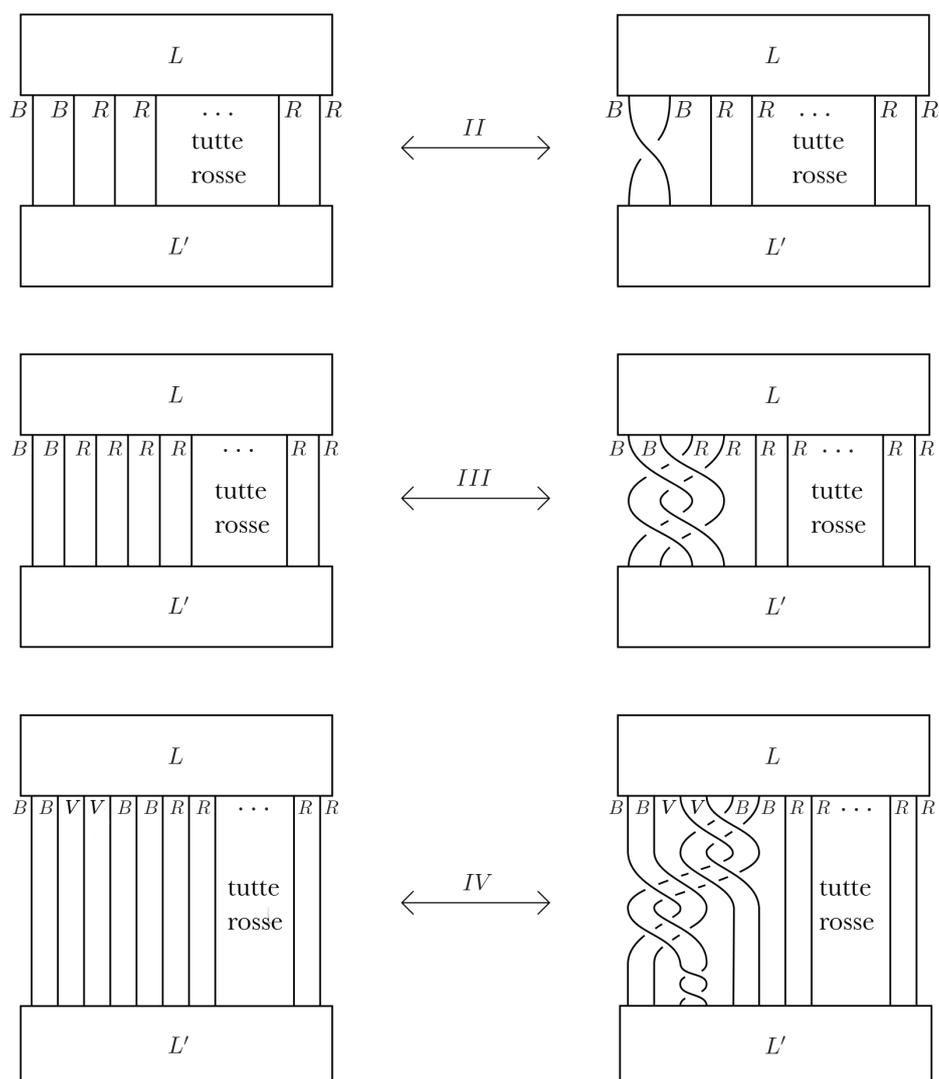


Figura 3.5: Le tre mosse di equivalenza tra diagrammi colorati introdotte da Piergallini;  $L$  e  $L'$  sono link arbitrari.

La dimostrazione, che non riportiamo per intero, si articola in tre parti; vedremo più in dettaglio la prima di queste, mentre gli altri due passaggi, che qui non trattiamo, si riconducono ad una tecnica di rappresentazione delle 3-varietà detta spezzamenti di Heegaard. Per un approfondimento si veda [8]. Descriviamo invece il primo passaggio, il cui scopo è quello di normalizzare un diagramma che rappresenta il link di ramificazione. Per farlo diamo innanzitutto la definizione di treccia.

**Definizione 3.3.** Sia  $D^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$  e siano  $p_1, \dots, p_n$  suoi punti. Una *treccia* è un insieme di  $n$  cammini  $f_i : I \rightarrow D^2 \times I$ , con  $1 \leq i \leq n$ , detti *fili*, tali che:

- $f_i(0) = p_i$ ;
- $f_i(1) = p_{\xi(i)}$ , dove  $\xi \in S_n$ ;
- $f_i(t) \in D^2 \times \{t\}$ ,  $\forall t \in I$ .

Il gruppo delle trecce su  $n$  fili, denotato con  $B_n$ , è il gruppo delle classi di isotopia di trecce dove è richiesto che le isotopie lascino invariato lo spazio  $\{p_i\} \times \{0, 1\}$  e l'operazione è il prodotto di cammini (vedi Definizione 1.2).

Siamo ora in grado di dare la definizione di diagramma normalizzato. Con il termine *diagramma normalizzato* intendiamo infatti un diagramma colorato del tipo rappresentato in Figura 3.6: al centro abbiamo una treccia con  $2n$  fili chiusa sopra e sotto mediante  $n$  archi. Una rappresentazione di questo tipo è detta *rappresentazione a piatti*. Se dimentichiamo i colori, ogni link ammette una rappresentazione a piatti (si veda [1]). Gli archi sopra e sotto sono colorati tutti in Rosso ad eccezione del primo a sinistra che è Blu; la colorazione delle trecce, invece, rispetta la regola “tutti diversi o tutti uguali” (si veda pagina 23).

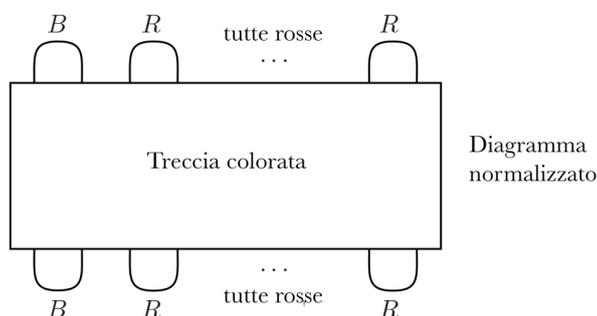


Figura 3.6: Diagramma normalizzato.

Il nostro scopo è quindi avere gli archi in alto e in basso del diagramma colorati correttamente come in Figura 3.6. Tale obiettivo può essere raggiunto separatamente, prima sopra e poi sotto, utilizzando le mosse mostrate in Figura 3.7, che si ottengono come composizioni di mosse di Reidemeister colorate.

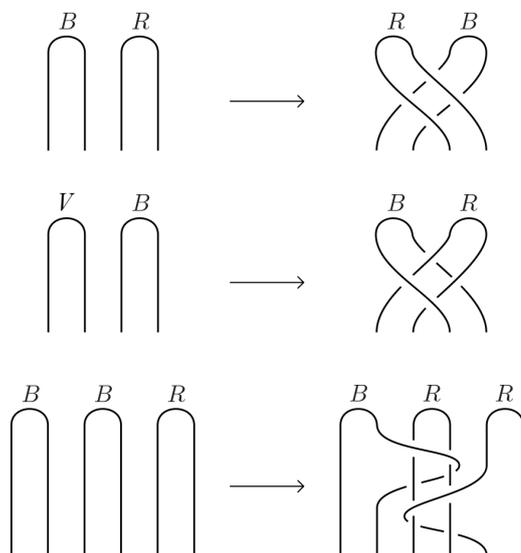


Figura 3.7: Le tre mosse per normalizzare un diagramma colorato.

La prima ci permette di riordinare i colori, la seconda serve ad eliminare gli archi verdi mentre la terza ci permette di eliminare gli archi blu ad eccezione del primo a sinistra. Abbiamo così normalizzato il diagramma colorato.

Chiudiamo la tesi mostrando come gli spazi lenticolari descritti nell'Esempio 1.2 possano essere rappresentati mediante diagrammi colorati.

**Esempio 3.1** ([9]). Siano  $p, q \geq 0$  primi fra loro e sia  $L(p, q)$  lo spazio lenticolare descritto nell'Esempio 1.2. Siano  $a_i, \dots, a_r$  tale che

$$\frac{p}{q} = a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{a_r}}}}$$

Allora  $L(p, q)$  è rappresentato dal diagramma colorato riportato in Figura 3.8.

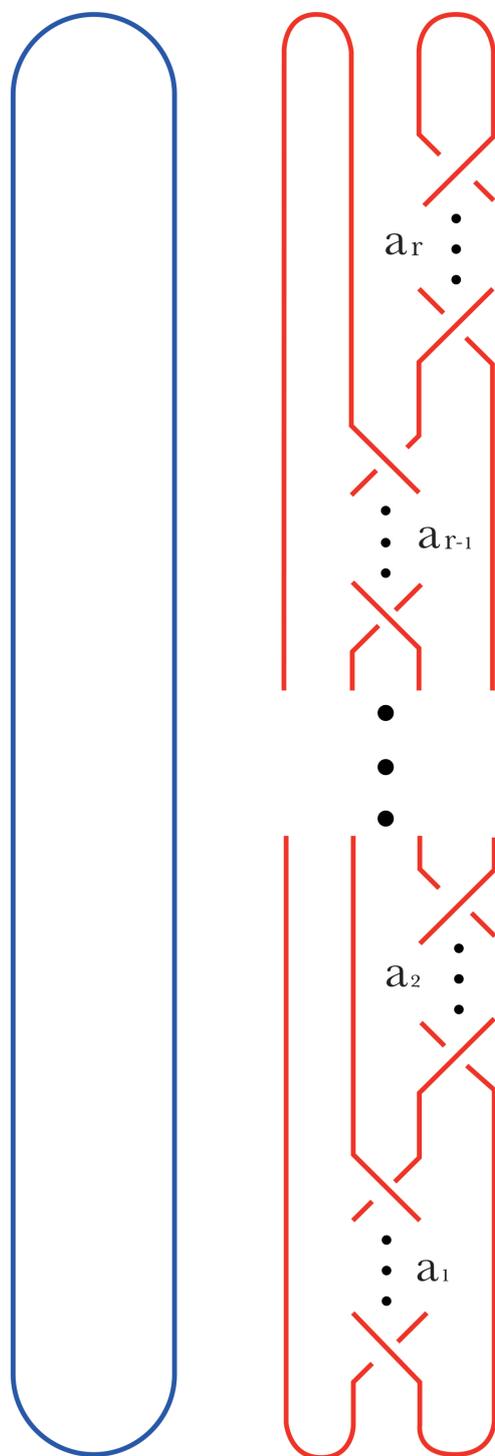


Figura 3.8: Diagramma colorato che rappresenta lo spazio lenticolare  $L(p, q)$ .

# Bibliografia

- [1] G. Burde and H. Zieschang, *Knots*, Walter de Gruyter (2000).
- [2] C. Gordon and J. Luecke, Knots are determined by their complements. *J. Amer. Math. Soc.* 2 (1989), 371-415.
- [3] A. Hatcher, *Algebraic Topology*, Cambridge University Press (2001).
- [4] H. M. Hilden, Every closed orientable 3-manifold is a 3-fold branched covering space of  $S^3$ , *Bull. Amer. Math. Soc.* 80 (1974), 1243-1244.
- [5] A. Kawauchi, *A Survey of Knot Theory*, Birkhäuser (1996).
- [6] J. M. Montesinos, A representation of closed, orientable 3-manifolds as 3-fold branched coverings of  $S^3$ , *Bull. Amer. Math. Soc.* 80 (1974), 845-846.
- [7] R. Piergallini, Covering moves, *Trans. Amer. Math. Soc.* 325 (1991), 903-920.
- [8] V.V. Prasolov and A.B. Sossinsky, *Knots, links, braids and 3-manifolds: an introduction to the new invariants in low-dimensional topology*, American Mathematical Society (1996).
- [9] D. Rolfsen, *Knots and Links*, American Mathematical Society (1976).



# Ringraziamenti

Un primo grazie va ad Alessia Cattabriga, per la professionalità, la pazienza, la costanza e il sorriso con cui mi ha accompagnato in questo bel percorso.

Grazie a lei e a Massimo Ferri, per avermi trasmesso la passione per la topologia algebrica.

Grazie a Pilli, per l'eccellente supporto grafico.

Un bel viaggio non può essere definito tale se mancano dei degni compagni: grazie a Rend, Buds, Pase, Chiara, Bolo, Plaz, la Lu e a tutti gli altri.

Grazie a babbo, per le infinite discussioni, i ragionamenti e per aver smontato con pazienza e passione le mie 'intuizioni geniali'. Grazie a mamma, perché è Mamma.

E infine grazie a Chiara, con cui ho condiviso, sudato e gioito in questa esperienza.