

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

Scuola di Scienze
Corso di Laurea in Matematica

Moto per curvatura per l'elaborazione
di immagini ecocardiografiche

Tesi di Laurea in Analisi Matematica

Relatrice:
Chiar.ma Prof.
Giovanna Citti

Presentata da:
Sofia Farina

Sessione I
Anno Accademico 2014-2015

*Ai miei nonni.
A mio nonno,
perchè mi ha sempre sostenuto.
A mia nonna,
perchè mi ha fatto amare
la matematica.*

Introduzione

In questa tesi presentiamo un modello di segmentazione di immagini ecocardiografiche introdotto in [1]. Il problema principale che si pone quando si vogliono segmentare le immagini è che possono essere rumorose, per tanto viene utilizzato un modello geometrico che regolarizza in direzione tangenziale e non in direzione ortogonale alle superfici che delimitano il contorno cardiaco.

Lo scopo della tesi è di esprimere il modello tramite un'equazione a derivate parziali e dimostrare alcune proprietà geometriche della soluzione.

Per formalizzare il modello introduciamo nel Capitolo 2 la nozione di superficie regolare, e verifichiamo che la variazione prima dell'area è la curvatura. Questo viene verificato sia per superfici definite come insiemi di livello, sia per grafici.

Nel capitolo seguente viene data la definizione di varietà riemanniana, di gradiente, divergenza e curvatura riemanniana e anche in questo caso si prova che la curvatura è la variazione prima dell'area. In particolare viene introdotto una metrica associata all'immagine I , che penalizza il bordo dell'immagine.

Viene poi introdotta la nozione di evoluzione di fronte, e in particolare di moto per curvatura nella metrica appena introdotta. Si tratta di equazione di evoluzione tangente che regolarizza in direzione tangenziale, eliminando il rumore, e mantenendo la metrica dello spazio dato.

Infine, nell'ultimo capitolo, diamo qualche proprietà qualitativa della soluzione dell'equazione trovata, che risulta essere un'equazione parabolica. In particolare viene dimostrato un principio del massimo che permette di introdurre la nozione le soluzioni viscosse.

Indice

1	Il problema dell'elaborazione delle immagini	1
2	Curvatura di superficie regolare	3
2.1	superficie regolare e area di superficie	5
3	Metrica Riemanniana	9
3.1	Definizione di Prodotto scalare	9
3.2	Gradiente e Divergenza in metrica Riemanniana	10
3.3	Metrica isotropa associata ad un'immagine	13
4	Moto per curvatura	15
5	Il Principio del Massimo	19
5.1	Heat equation	20
5.2	Soluzioni Viscose	24
	Bibliografia	27

Capitolo 1

Il problema dell'elaborazione delle immagini

In questo capitolo presentiamo un modello di segmentazione di immagini ecocardiografiche introdotto in [1].

L'elettrocardiogramma, o elettrocardiografia, è la tecnica di elaborazione di immagini più usata per diagnosticare le patologie del muscolo cardiaco perchè è non invasivo, a basso costo ed efficiente. La tecnica è basata sull'utilizzo di ultrasuoni, e la dispersione del segnale può dar luogo ad artefatti compromettendo l'accuratezza delle misurazioni.

L'ecocardiogramma 3D è ottenuto tramite una ricostruzione in 3D di immagini originariamente acquisite in 2D. Le misurazioni ottenute son molto accurate ma sono acquisite in tempi molto lunghi, per cui anche piccoli movimenti dell'operatore o del paziente causano un significativo degrado delle immagini.

L'ecocardiogramma RT3DE (Real time 3-D echocardiography) consente l'acquisizione diretta di un insieme di dati volumetrici. E' più pratica, fattibile, rapida e concettualmente corretta rispetto alla ricostruzione 3D. In effetti, l'acquisizione volumetrica RT consente attualmente di registrare l'intero ventricolo sinistro o utilizzando una serie di pochi battiti consecutivi (in genere 4), ciascuno dei quali contribuisce con una porzione del volume finale, o durante un singolo battito cardiaco.

Il problema affrontato in [1] è quello di studiare le immagini ecocardiografiche, e poter elaborare un modello per ricavare la superficie e il volume del ventricolo sinistro.

Un serio inconveniente è la povera qualità dell'ecocardiogramma poiché

l'immagine a ultrasuoni è spesso affetta dal rumore, intrinsecamente collegato al metodo di acquisizione dell'immagine. Il rumore, infatti, può dar luogo a contorni indistinti e sconnessi.

La difficoltà nel segmentare la forma della cavità cardiaca dall'ecocardiogramma è dovuto a due fattori; la prima, le immagini risultano estremamente rumorose nei bordi e secondo, a causa dell'apertura e chiusura delle valvole cardiache, il contorno del ventricolo sinistro rimane incerto in alcune immagini.

Il rumore e la bassa qualità al bordo è superata da un'equazione differenziale (PDE) che preserva i bordi e il problema della forma incerta è risolta sfruttando la condizione di continuità nel tempo.

L'equazione non lineare proposta in [1] è una generalizzazione del metodo di Terzolopoulos [9] dei modelli elastici deformabili. Il bordo della cavità cardiaca viene identificato come insieme di livello di una funzione regolare, si sceglie un dato iniziale polinomiale che fornisce una prima approssimazione del ventricolo e viene fatto evolvere con un'equazione geometrica che ha comportamenti diversi in direzioni diverse:

1. regolarizza in direzione tangente;
2. non regolarizza in direzione normale ai bordi.

Studieremo nei prossimi capitoli la struttura delle superfici e la loro geometria per arrivare ad esprimere un'equazione di diffusione direzionale.

Capitolo 2

Curvatura di superficie regolare

Riprendiamo alcune nozioni di geometria differenziale [2]:

Definizione 2.1. Siano dati: un aperto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$; un sottoinsieme non vuoto $S \subset \Omega$; una funzione differenziabile $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$.

Diremo che S è una *ipersuperficie* in Ω di *equazione* φ se:

1. $\forall x \in \Omega \quad x \in S \Leftrightarrow \varphi(x) = 0$;
2. $\forall x \in S \quad \nabla\varphi(x) \neq 0$.

si dice che S è espressa come *insiemi di livello* della funzione φ .

Definizione 2.2. Sia $D \subset \mathbb{R}^{n-1}$ un'aperto e sia $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ un'applicazione differenziabile, sia $\Omega = D \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^n$, indicato con $x = (x_1, \dots, x_n)$ il punto di \mathbb{R}^n , si dice *grafico* di f , l'insieme:

$$G_f = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_n = f(x_1, \dots, x_{n-1})\}$$

G_f è una *ipersuperficie cartesiana* in Ω di equazione $\varphi(x) = 0$, dove:

$$\varphi(x) = x_n - f(x_1, \dots, x_{n-1})$$

Definizione 2.3. Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un aperto e sia $S \subset \Omega$ una ipersuperficie. Siano $x \in S$ e sia $\xi \in \mathbb{R}^n$. Diremo che ξ è un *vettore tangente* ad S in x se:

$$\langle \nabla\varphi(x), \xi \rangle = 0$$

Indicheremo con $T_x S$ lo spazio di tutti i vettori di \mathbb{R}^n tangenti ad S in x .

Osservazione 2.4. Data una superficie $S \subset \Omega$ di \mathbb{R}^n , sia $x \in S$, un vettore $\xi \in \mathbb{R}^n$, si verifica che $\xi \in T_x S$ se e solo se:

$$\exists \gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\rightarrow S \text{ t.c. } \gamma(0) = x, \gamma'(0) = \xi$$

Definizione 2.5. Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto non vuoto, sia $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ un campo vettoriale di classe C^1 , $F = (f_1, \dots, f_n)$, allora la *divergenza* di F è la funzione $\operatorname{div} F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ definita da:

$$\operatorname{div} F = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial f_n}{\partial x_n}$$

Ricordiamo, in particolare, che la *curvatura media* di una ipersuperficie S si esprime come:

$$H = \operatorname{div}(\nu_S)$$

dove ν_S è la normale alla superficie.

Esplicitiamo ora l'espressione della curvatura:

$$\begin{aligned} H &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}}{|\nabla \varphi|} \right) = \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{|\nabla \varphi|} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i^2} + \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{1}{|\nabla \varphi|} \right) \right) = \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{|\nabla \varphi|} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i^2} - \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sqrt{\sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right)^2} \right)}{|\nabla \varphi|^2} \right) = \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{|\nabla \varphi|} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i^2} - \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}}{|\nabla \varphi|^2} \frac{1}{2|\nabla \varphi|} \sum_{j=1}^n 2 \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j} \right) = \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{|\nabla \varphi|} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i^2} - \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}}{|\nabla \varphi|^3} \sum_{j=1}^n \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j} \right) = \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{|\nabla \varphi|} \sum_{j=1}^n \delta_{ij} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{1}{|\nabla \varphi|^3} \sum_{j=1}^n \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j} \right) = \\ &= \frac{1}{|\nabla \varphi|} \sum_{i,j=1}^n \left(\delta_{ij} - \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}}{|\nabla \varphi|^2} \right) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j}. \end{aligned}$$

Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un aperto e sia $S \subset \Omega$ una ipersuperficie definita da $S = \{\varphi = 0\}$, abbiamo che la *curvatura media* diviene:

$$H = \frac{\Delta \varphi(x) \|\nabla \varphi(x)\|^2 - \operatorname{Hess}_\varphi(x, \nabla \varphi(x))}{\|\nabla \varphi(x)\|^3}$$

dove $\Delta \varphi(x)$ è il laplaciano di φ , e $\operatorname{Hess}_\varphi(x, \nabla \varphi(x)) = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 \varphi(x)}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}$ è l'Hessiana.

Osservazione 2.6. Notiamo che H esprime $\Delta\varphi - Hess_\varphi(x, \nabla\varphi(x))$ a meno di un coefficiente moltiplicativo, quindi si tratta di derivata tangenziale, infatti contiene tutte le derivate seconde (Laplaciano) meno la componente normale dell' $Hess_\varphi$.

Osservazione 2.7. Se S è espressa come grafico di una funzione f ne segue che:

$$H = \sum_{j=1}^{n-1} \partial_j \left(\frac{\partial_j f}{\sqrt{1 + |\nabla f|^2}} \right)$$

E quindi:

$$H = \frac{\Delta f(x)(1 + \|\nabla f(x)\|^2) - Hess_f(x, \nabla f(x))}{(1 + \|\nabla f(x)\|^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Dimostrazione. Infatti:

$$\begin{aligned} H &= - \frac{\sum_{ij} \partial_{ij}^2 f \partial_i f \partial_j f - \sum_i \partial_i^2 f (1 + \sum_i (\partial_i f)^2)}{(1 + \sum_i (\partial_i f)^2)^{\frac{3}{2}}} = \\ &= - \frac{\sum_{ij} \partial_{ij}^2 f \partial_i f \partial_j f - \sum_{ij} \partial_{ij}^2 f \delta_{ij} (1 + |\nabla f(x)|^2)}{(\sqrt{1 + |\nabla f(x)|^2})^3} = \\ &= - \frac{\sum_{ij} \partial_{ij}^2 f \partial_i f \partial_j f}{(\sqrt{1 + |\nabla f(x)|^2})^3} - \frac{\sum_{ij} \delta_{ij} \partial_{ij}^2 f}{\sqrt{1 + |\nabla f(x)|^2}} = \\ &= - \frac{1}{\sqrt{1 + |\nabla f(x)|^2}} \sum_{i,j=1}^n \left(\frac{\partial_i f \partial_j f}{(1 + |\nabla f(x)|^2)} - \delta_{ij} \right) \partial_{ij}^2 f \end{aligned}$$

□

2.1 superficie regolare e area di superficie

Definizione 2.8. Sia $\varphi : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione regolare con Ω dominio aperto; si definisce *misura dell'ipersuperficie* $S = \{\varphi = 0\}$, il numero reale:

$$A(S) = \int_{\Omega} |\nabla\varphi(x)| dx$$

In particolare se S è grafico di una funzione f , l'espressione diventa:

$$A(S) = \int_{\Omega} \sqrt{1 + |\nabla f(x_1, \dots, x_{n-1})|^2} dx$$

Definizione 2.9. Data $A(\varphi)$, sia $\psi \in C_0^\infty$, $A(\varphi)$ è *derivabile* in direzione $\psi \Leftrightarrow \exists \lim_{t \rightarrow 0} \frac{A(\varphi+t\psi)-A(\varphi)}{t}$. Pongo $F(t) = A(\varphi + t\psi)$
 $\exists \partial_\psi A(\varphi) \Leftrightarrow \exists F'(0)$

Osservazione 2.10. Verifichiamo che la curvatura è la variazione prima del funzionale dell'area.

$$A(\varphi) = \int |\nabla\varphi| dx$$

Infatti:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} A(\varphi + t\psi)|_{t=0} &= \partial_\psi A(\varphi) \\ A(\varphi + t\psi) &= \int |\nabla(\varphi + t\psi)| dx \\ \frac{d}{dt} |\nabla(\varphi + t\psi)| |_{t=0} &= \frac{d}{dt} \sqrt{\sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial}{\partial x_j} (\varphi + t\psi) \right)^2} |_{t=0} = \\ &= \sum_{j=1}^n \frac{1}{2|\nabla\varphi|} 2 \frac{\partial\varphi}{\partial x_j} \frac{\partial\psi}{\partial x_j} = \\ &= \sum_{j=1}^n \frac{1}{|\nabla\varphi|} \frac{\partial\varphi}{\partial x_j} \frac{\partial\psi}{\partial x_j} \end{aligned}$$

Quindi

$$\begin{aligned} \partial_\psi A(\varphi) &= \int \left(\sum_{j=1}^n \frac{1}{|\nabla\varphi|} \frac{\partial\varphi}{\partial x_j} \frac{\partial\psi}{\partial x_j} \right) dx = \\ &= \sum_{j=1}^n \int \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}}{|\nabla\varphi|} \right) \psi dx = \int H \psi dx. \end{aligned}$$

Osservazione 2.11. la stessa proprietà vale anche se S è espressa con grafico. Verifichiamolo esplicitamente:

$$A(f) = \int \sqrt{|\nabla f|^2 + 1} dx$$

Allora:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} A(f + t\psi) \Big|_{t=0} &= \partial_\psi A(f) \\ \Rightarrow A(f + t\psi) &= \int \sqrt{|\nabla(f + t\psi)|^2 + 1} dx \end{aligned}$$

Allora:

$$\begin{aligned}
 & \frac{d}{dx} \sqrt{|\nabla(f + t\psi)|^2 + 1} \Big|_{t=0} = \\
 & = \frac{d}{dx} \sqrt{\left(\sqrt{\sum_{j=1}^n (\partial_j(f + t\psi))^2} \right)^2 + 1} \Big|_{t=0} = \\
 & = \frac{d}{dx} \sqrt{\sum_j (\partial_j(f + t\psi))^2 + 1} \Big|_{t=0} = \\
 & = \frac{1}{2\sqrt{|\nabla f|^2 + 1}} \left(\sum_{j=1}^n 2\partial_j f \partial_j \psi \right) = \\
 & = \frac{1}{\sqrt{|\nabla f|^2 + 1}} \sum_{j=1}^n \partial_j f \partial_j \psi
 \end{aligned}$$

Quindi:

$$\partial_\psi A(f) = \int \frac{\sum_j \partial_j f \partial_j \psi}{\sqrt{|\nabla f|^2 + 1}} dx = \int \sum_{j=1}^n \partial_j \left(\frac{\partial_j f}{\sqrt{|\nabla f|^2 + 1}} \right) \psi dx = \int H \psi dx$$

Capitolo 3

Metrica Riemanniana

3.1 Definizione di Prodotto scalare

Definizione 3.1. Una *metrica Riemanniana* su una varietà differenziabile M è data dal prodotto scalare tra i vettori dello spazio tangente T_pM che dipende in maniera C^∞ dal punto $p \in M$. Una *varietà Riemanniana* è una varietà differenziabile dotata di una metrica Riemanniana.

Ora, prendiamo $x = (x^1, \dots, x^n)$ su M in coordinate locali, una metrica è rappresentata da una matrice simmetrica definita positiva:

$$(g_{ij}(x))_{i,j=1,\dots,n}$$

Il prodotto tra due vettori dello spazio tangente $v, w \in T_pM$ rappresentati da coordinate (v^1, \dots, v^n) e (w^1, \dots, w^n) rispettivamente, sarà:

$$\langle v, w \rangle_g = g_{ij}(x(p))v^i w^j$$

in particolare, $\langle \frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \rangle = g_{ij}$, dove $\frac{\partial}{\partial x^i}$ è una base dello spazio tangente T_pM .

E la norma di v è data da $\|v\| = \langle v, v \rangle_g^{\frac{1}{2}}$

Definizione 3.2. Dato $[a, b] \subset \mathbb{R}$, sia $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ una curva differenziabile definisco *lunghezza* γ :

$$L(\gamma) = \int_a^b \left\| \frac{d\gamma}{dt}(t) \right\|_g dt$$

In coordinate locali $x = (x^1(\gamma(t)), \dots, x^n(\gamma(t)))$:

$$L(\gamma) = \int_a^b \sqrt{g_{ij}(x(\gamma(t))) \frac{dx^i}{dt}(\gamma(t)) \frac{dx^j}{dt}(\gamma(t))} dt$$

Definizione 3.3. Sia M una varietà Riemanniana connessa $p, q \in M$, sia $\langle \cdot, \cdot \rangle_g$ metrica Riemanniana su M . Definisco la *distanza* tra p e q come:

$$d_g(p, q) := \inf A$$

dove

$$A := \{L(\gamma) \mid \gamma : [a, b] \rightarrow M \text{ curva differenziabile a tratti con } \gamma(a) = p, \gamma(b) = q\}$$

Proposizione 3.4. Sia M una varietà differenziabile connessa e sia $(g_{ij}(x))$ metrica Riemanniana su M , valgono le proprietà:

1. $d_g(p, q) \geq 0 \quad \forall p, q \in M$;
 $d_g(p, q) = 0 \Leftrightarrow p = q$;
2. $d_g(p, q) = d_g(q, p)$;
3. $d_g(p, q) \leq d_g(p, r) + d_g(r, q) \quad \forall p, q, r \in M$.

Dimostrazione. Dimostrato in [5]. □

3.2 Gradiente e Divergenza in metrica Riemanniana

Ripetiamo in questa sezione le nozioni di curvatura e variazione prima dell'area.

Definizione 3.5. Sia M una varietà Riemanniana su cui è definita una metrica $(g_{ij}(x))_{i,j=1,\dots,n}$ e sia $\varphi : M \rightarrow \mathbb{R}$, definiamo il *gradiente Riemanniano*:

$$\nabla_g \varphi = (g^{ij} \partial_j \varphi)_{i=1,\dots,n}$$

dove $(g^{ij})_{i,j=1,\dots,n} = ((g_{ij})_{i,j=1,\dots,n})^{-1}$.

Definizione 3.6. Sia M una varietà Riemanniana su cui è definita una metrica $(g_{ij}(x))_{i,j=1,\dots,n}$, definiamo la *divergenza Riemanniana* su un vettore $v \in T_p M$ come:

$$\operatorname{div}_g(v) = \frac{1}{\sqrt{g}} \operatorname{div}(\sqrt{g}v)$$

dove $g := \det(g_{ij})_{i,j}$, e div è la divergenza euclidea.

Notiamo che lo spazio tangente non dipende dalla metrica. Ora sia $h \in \mathbb{R}^n$, h è ortogonale a $T_x M$, $h \perp T_x M \Leftrightarrow \langle h, v \rangle = 0 \quad \forall v \in T_x M$
 La normale dipende dalla metrica. Quindi sia ν_E la *normale euclidea*, nel prodotto scalare euclideo:

$$\langle \nu_E, v \rangle_E = 0 \quad \forall v \in T_x M$$

cioè, $\sum_i (\nu_E)_i v_i = 0 \quad \forall v \in T_x M$. Considero ora un'altra metrica: $g_{ij} g^{jk} = \delta_{ik}$. Abbiamo:

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_i v_i (\nu_E)_i = \\ &= \sum_{j,i} \delta_{ij} v_i (\nu_E)_j = \\ &= \sum_{k,j,i} g_{ik} g^{kj} v_i (\nu_E)_j = \\ &= \sum_j \langle g^{jj} (\nu_E)_j, v \rangle_g \end{aligned}$$

Ponendo $\nu_g = g^{jj} (\nu_E)_j$:

$$\langle \nu_g, v \rangle_g = 0 \quad \forall v \in T_x M$$

$$\Rightarrow \nu_g \perp_g T_x M$$

Abbiamo che ν_g è ortogonale allo spazio tangente nella nuova metrica.

Definizione 3.7. Definiamo, la curvatura in metrica riemanniana:

$$H_g = \operatorname{div}_g(\nu_g) = \operatorname{div}_g \left(\frac{\nabla_g \varphi}{|\nabla_g \varphi|_g} \right)$$

Osservazione 3.8. Calcoliamo esplicitamente la curvatura nella metrica Rie-

manniana, nel caso in cui S è rappresentata come luogo degli zeri di φ

$$\begin{aligned}
H_g &= \operatorname{div}_g \left(\frac{\nabla_g \varphi}{|\nabla_g \varphi|_g} \right) = \\
&= \frac{1}{\sqrt{g}} \operatorname{div}_E \left(\sqrt{g} \frac{g^{ij} \partial_j \varphi}{|\nabla_g \varphi|_g} \right) = \\
&= \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_i \left(\sqrt{g} \frac{g^{ij} \partial_j \varphi}{|\nabla_g \varphi|_g} \right) = \\
&= \frac{\partial_i (\sqrt{g} g^{ij}) \partial_j \varphi}{\sqrt{g} |\nabla_g \varphi|_g} + \frac{g^{ij} \partial_{ij}^2 \varphi}{|\nabla_g \varphi|_g} + g^{ij} \partial_j \varphi \partial_i \left(\frac{1}{|\nabla_g \varphi|_g} \right) = \\
&= \frac{\partial_i (\sqrt{g} g^{ij}) \partial_j \varphi}{\sqrt{g} |\nabla_g \varphi|_g} + \frac{g^{ij} \partial_{ij}^2 \varphi}{|\nabla_g \varphi|_g} - \frac{g^{ij} \partial_j \varphi \partial_i \left(\sqrt{\sum_{k,h=1}^n (g^{kh} \partial_k \varphi \partial_h \varphi)} \right)}{|\nabla_g \varphi|_g^2} = \\
&= \frac{\partial_i (\sqrt{g} g^{ij}) \partial_j \varphi}{\sqrt{g} |\nabla_g \varphi|_g} + \frac{g^{ij} \partial_{ij}^2 \varphi}{|\nabla_g \varphi|_g} - \\
&\quad - \frac{g^{ij} \partial_j \varphi \sum_{k,h=1}^n 2(g^{kh} \partial_k \varphi \partial_{ih}^2 \varphi) + \sum_{k,h=1}^n (\partial_i g^{kh} \partial_k \varphi \partial_h \varphi)}{2|\nabla_g \varphi|_g^2}
\end{aligned}$$

E' importante osservare che nel primo termine dell'equazione ottenuta abbiamo $\nabla g \nabla \varphi$

Definizione 3.9. Sia $\varphi : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione regolare con Ω aperto si definisce misura dell'ipersuperficie $S = \{\varphi = 0\}$ nella metrica g .

$$A(S) = \int_{\Omega} |\nabla_g \varphi|_g \sqrt{g(x)} dx$$

Osservazione 3.10. Verifichiamo che anche in questo caso la variazione prima dell'area è la curvatura:

$$A_g(\varphi) = \int |\nabla_g \varphi|_g \sqrt{g(x)} dx$$

Allora:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} A_g(\varphi + t\psi) \Big|_{t=0} &= \partial_\psi A_g(\varphi) \\
\Rightarrow A_g(\varphi + t\psi) &= \int |\nabla_g(\varphi + t\psi)|_g \sqrt{g(x)} dx
\end{aligned}$$

Ora:

$$\frac{d}{dt} |\nabla_g(\varphi + t\psi)|_g \Big|_{t=0} = \frac{d}{dt} \sqrt{\sum_{i,j=1}^n g^{ij} \partial_j(\varphi + t\psi) \partial_i(\varphi + t\psi)} \Big|_{t=0} =$$

$$= \sum_{j,i=1}^n \frac{1}{2|\nabla_g \varphi|_g} 2g^{ij} \partial_j \varphi \partial_i \psi$$

Allora:

$$\begin{aligned} \partial_\psi A_g(\varphi) &= \int \left(\sum_j \frac{1}{|\nabla_g \varphi|_g} g^{ij} \partial_j \varphi \partial_i \psi \right) \sqrt{g(x)} dx = \\ &= \int \frac{\langle \nabla_g \varphi, \nabla_g \psi \rangle_g}{|\nabla_g \varphi|_g} \sqrt{g(x)} dx = \\ &= \int \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_i \left(\sqrt{g} g^{ij} \frac{\partial_j \varphi}{|\nabla_g \varphi|_g} \right) \psi \sqrt{g(x)} dx = \\ &= \int \operatorname{div}_g \left(\frac{\nabla_g \varphi}{|\nabla_g \varphi|_g} \right) \psi \sqrt{g(x)} dx \\ &= \int H_g \psi \sqrt{g(x)} dx \end{aligned}$$

3.3 Metrica isotropa associata ad un'immagine

Sia $I : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ dove $I \in L^1_{loc}$, definiamo G_σ un mollificatore, allora $G_\sigma * I \in C^\infty$. Distinguiamo due casi:

- se $I \in C^1_0$ abbiamo che $\nabla(G_\sigma * I) = G_\sigma * \nabla I$ cioè abbiamo che per $G \rightarrow 0 \exists \lim_{G \rightarrow 0} \nabla(G_\sigma * I) \rightarrow \nabla I$
- se $I \in L^1_{loc}$ allora $\exists \nabla(G_\sigma * I)$: se I ha un salto allora $G_\sigma * I \rightarrow I$ in L^1_{loc} quindi $|\nabla(G_\sigma * I)|^2$ è massimo quando ci sono i salti, cioè è un *edge indicator*

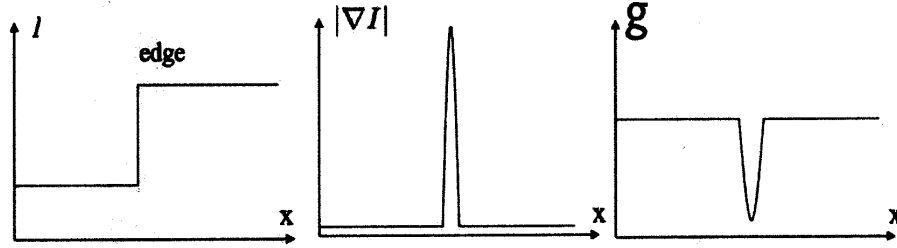
Abbiamo che

$$e = \frac{1}{1 + |\nabla(G_\sigma * I)|^2} = \begin{cases} 0 & \text{nei salti} \\ 1 & \text{fuori dai salti} \end{cases}$$

La e definisce la metrica, detta *metrica isotropa indotta* da I nella forma

$$g_{ij} = e^{\frac{1}{n}} \delta_{ij}$$

Si ha quindi $g = \det(g_{ij}) = e$.



Determiniamo ora la curvatura di una generica metrica isotropa

$$g_{ij} = g^{\frac{1}{n}} \delta_{ij}$$

In questo caso sostituendo nella 3.1, la curvatura diventa:

$$H_g = H + \frac{1}{2g} \nabla g \frac{\nabla \varphi}{|\nabla \varphi|} \quad (3.1)$$

Dimostrazione. Infatti dall'osservazione 3.1, nel caso in cui g è uno scalare, abbiamo che:

$$\nabla_g \varphi = g^{-\frac{1}{n}} \nabla \varphi$$

Quindi:

$$\nu_g = \frac{\nabla_g \varphi}{|\nabla_g \varphi|_g} = \frac{\nabla \varphi}{|\nabla \varphi|}$$

Ora calcolano la curvatura:

$$\begin{aligned} H_g &= \operatorname{div}_g(\nu_g) \\ &= \operatorname{div}_g\left(\frac{\nabla \varphi}{|\nabla \varphi|}\right) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{g}} \operatorname{div} \left(\sqrt{g} \frac{\nabla \varphi}{|\nabla \varphi|} \right) = \\ &= \sum_i \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_i \left(\sqrt{g} \frac{\partial_i \varphi}{|\nabla \varphi|} \right) = \\ &= \sum_i \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_i(\sqrt{g}) \frac{\partial_i \varphi}{|\nabla \varphi|} + \frac{\sqrt{g}}{\sqrt{g}} H = \\ &= \sum_i \frac{1}{2g} \partial_i(g) \frac{\partial_i \varphi}{|\nabla \varphi|} + H \end{aligned}$$

□

Capitolo 4

Moto per curvatura

Il *moto per curvatura media* è uno dei più studiati problemi di evoluzione geometrica, consiste nel considerare una superficie immersa nello spazio e nel farla evolvere richiedendo che ogni punto si muova con velocità normale pari all'opposto della curvatura media.

In questa sezione parliamo appunto del metodo level set per curvatura media. Precisamente:

Osservazione 4.1. Consideriamo $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ e sia $\varphi_0 : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ un'immersione di classe C^∞ . Il moto in cui ogni punto si muove in direzione normale con velocità F è descritto dal problema:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} \varphi(x, t) = -F |\nabla \varphi| \\ \varphi(x, 0) = \varphi_0(x) \end{cases}$$

Dimostrazione. L'insieme $S(t) = \{\varphi(x, t) = 0 \quad t \text{ fissato}\}$ indica l'ipersuperficie al tempo t .

Supponiamo che S sia espressa come zero-level set di φ

$$\varphi(x(t), t) = 0 \quad \forall x \in \Omega \quad \forall t \in \mathbb{R}^+$$

Derivando ora rispetto al tempo, troviamo:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \nabla \varphi(x(t), t) x'(t) = 0$$

Imponendo che ogni punto si muova in direzione normale a S con velocità F , l'evoluzione di ciascun punto $x(t) \in \Omega$ può esser espressa, ponendo $x'(t) = F \vec{\nu}$ dove $\vec{\nu} = \frac{\nabla \varphi}{|\nabla \varphi|}$ è il vettore normale alla superficie. Otteniamo:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + F \nabla \varphi \vec{\nu} = 0$$

Allora l'equazione di evoluzione con velocità F in direzione normale:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = -F |\nabla \varphi| \quad \text{for } x \in \Omega \quad t \in \mathbb{R}^+ \quad (4.1)$$

Poniamo le condizioni iniziali $\varphi(x, 0) = \varphi_0(x) \quad \forall x \in \Omega$. Si ottiene per tanto la tesi. \square

Osservazione 4.2. Consideriamo $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ e sia $\varphi_0 : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ un'immersione di classe C^∞ , il *moto per curvatura* di φ_0 è una famiglia di applicazioni $\varphi : \Omega \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ di classe C^∞ soluzioni del seguente sistema di PDE:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} \varphi(x, t) = H(x, t) |\nabla \varphi| \\ \varphi(x, 0) = \varphi_0(x) \end{cases}$$

dove $H(x, t)$ è la curvatura media.

Osservazione 4.3. Nel caso in cui abbiamo una metrica riemanniana, l'equazione precedente di evoluzione con velocità F in direzione ν_g diviene:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = -F |\nabla_g \varphi|_g \quad \text{for } x \in \Omega \quad t \in \mathbb{R}^+$$

con condizioni iniziali $\varphi(x, 0) = \varphi_0(x) \quad \forall x \in \Omega$.

L'espressione della funzione velocità F in 4.1 dipende da molti fattori, come la curvatura e la direzione normale al fronte, e proprietà globali come forme e posizione, e altre proprietà indipendenti del fronte. La funzione F usata per controllare il processo di recupero delle forme è:

$$F = -g^{1+\frac{1}{n}} H_g$$

In presenza di un'immagine I e di una metrica indotta:

$$g = e$$

L'equazione risultante di moto per curvatura riemanniana di $\varphi(\vec{x}, t)$ sarà quindi:

$$\partial_t \varphi = g^{1+\frac{1}{n}} |\nabla_g \varphi| H_g(\varphi) = g H |\nabla \varphi| + \frac{1}{2} \nabla g \cdot \nabla \varphi \quad (4.2)$$

poiché H_g , calcolata in 3.1, indica la diffusione in direzione tangente ai bordi nella metrica indotta da g .

Il termine di curvatura riemanniana definisce la propagazione del fronte guidato dalla caratteristica dell'immagine e regolarizzata dalla curvatura. Rappresenta una diffusione geometrica rallentata dalla funzione g , dove l'immagine ha un elevato gradiente, e questo regolarizza il grafico di φ lontano dal

bordo con una minima regolarizzazione dei bordi stessi. In particolare il termine $\nabla\varphi\nabla g$ affila i margini del fronte dell'immagine iniziale verso i bordi seguendo il vettore campo ∇g che punta sempre verso i contorni dell'immagine.

In [1] viene proposta una modifica di quest'equazione:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} - g\epsilon H|\nabla\varphi| - \beta\nabla g \cdot \nabla\varphi = 0 \quad (4.3)$$

con condizione iniziale $\varphi(\vec{x}, 0) = \varphi_0$. Il parametro β è usato per limitare la regolarizzazione dell'immersione controllata dal parametro ϵ .

Capitolo 5

Il Principio del Massimo

L'equazione 4.2 e 4.3 sono equazioni differenziali a derivate parziali (PDE). In questo capitolo presentiamo alcune proprietà della soluzione, definiremo le soluzioni viscosi, che sono strettamente collegate al principio del massimo. In generale una PDE, ovvero un'equazione differenziale le cui soluzioni sono funzioni in più di una variabile indipendente e pertanto conterranno al loro interno le derivate parziali di queste soluzioni, si definisce:

Definizione 5.1. Si dice *equazione differenziale parabolica del secondo ordine*:

$$\partial_t \varphi = \sum_{i,j} a_{ij} \partial_{ij}^2 \varphi + b_i \partial_i \varphi \quad (5.1)$$

dove a_{ij} è semidefinita positiva.

Osservazione 5.2. L'equazione 4.2 è di questo tipo con

$$a_{ij} = g \sum_{ij} \left(\delta_{ij} - \frac{\partial_i \varphi \partial_j \varphi}{|\nabla \varphi|^2} \right)$$

$$b_i = \frac{1}{2} \partial_i g$$

Osservazione 5.3. l'equazione parabolica più semplice, si ottiene per:

$$a_{ij} = \delta_{ij}$$

$$b_i = 0$$

quindi 5.1 diviene $\partial_t \varphi = \Delta \varphi$ questa equazione si dice *equazione del calore* o *heat equation*.

5.1 Heat equation

Studiamo l'equazione del calore:

$$\partial_t \varphi - \Delta \varphi = 0$$

e l'equazione del calore non omogenea è:

$$\partial_t \varphi - \Delta \varphi = f$$

Abbiamo che $t > 0$ e $x \in \Omega$ dove $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aperto, l'incognita è $\varphi : \bar{\Omega} \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ con $\varphi = \varphi(x, t)$ e il laplaciano Δ è dato rispetto alle variabili spaziali $x = (x_1, \dots, x_n)$, $\Delta \varphi = \Delta_x \varphi = \sum_{i=1}^n \partial_{ii}^2 \varphi$. Nella non omogenea la funzione $f : \Omega \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ è data.

Vogliamo arrivare a dimostrare il principio del massimo in \mathbb{R}^n , per arrivarci ci poniamo in un caso più semplice: consideriamo $\varphi(x, t)$ con $x \in [a, b]$ e $t > 0$. L'equazione del calore $\partial_t \varphi = k \Delta \varphi = k \partial_{xx}^2 \varphi$ con $x \in [a, b], t > 0$. Innanzitutto dobbiamo porre dei dati ai limiti:

$$\varphi(x, 0) = \varphi_0(x) \quad \forall x \in [a, b]$$

poi imponiamo le condizioni agli estremi:

$$\varphi(a, t) = \alpha(t) \quad \forall t > 0$$

$$\varphi(b, t) = \beta(t)$$

Definizione 5.4. Si definisce problema ai valori iniziali per l'equazione del calore il problema:

$$\begin{cases} \partial_t \varphi = k \partial_{xx}^2 \varphi & x \in]a, b[, 0 < t < T \\ \varphi(x, 0) = \varphi_0(x) & x \in [a, b] \\ \varphi(a, t) = \alpha(t), \varphi(b, t) = \beta(t) & 0 < t < T \end{cases}$$

Il problema è descritto sul rettangolo $Q =]a, b[\times]0, T[$ e i dati sono assegnati su tre lati di questo rettangolo, che costituiscono l'insieme proprio della frontiera.

Indichiamo la frontiera con ∂Q , e la chiusura di Q : $\bar{Q} = Q \cup \partial Q$. Chiamiamo *frontiera parabolica* di Q il sottoinsieme della frontiera su cui abbiamo assegnato i dati e la indichiamo con $\partial_P Q$, definita:

$$\partial_P Q = [a, b] \times \{0\} \cup \{a\} \times [0, T] \cup \{b\} \times [0, T]$$

Definizione 5.5. Il problema ai valori iniziali si indica allora anche nella forma più compatta:

$$\begin{cases} \partial_t \varphi = k \partial_{xx}^2 \varphi & \text{in } Q \\ \varphi = \psi(x) & \text{in } \partial_P Q \end{cases}$$

si dice soluzione di questo problema una funzione

$$\varphi \in C_x^2(Q) \cap C_t^1(Q) \cap C(\bar{Q})$$

che verifica l'equazione e assume il dato assegnato sulla frontiera parabolica.

Lemma 5.6. sia $\varphi \in C_x^2(Q) \cap C_t^1(Q) \cap C(\bar{Q})$ soluzione di

$$-\partial_t \varphi + \partial_{xx}^2 \varphi > 0 \quad \text{in } Q$$

Allora

$$\max_{\bar{Q}} \varphi = \max_{\partial_P Q} \varphi$$

Dimostrazione. La funzione è continua su \bar{Q} , quindi ha massimo assunto in un punto (x_0, t_0) . Vogliamo dimostrare che $(x_0, t_0) \in \partial_P Q$.

Per assurdo, supponiamo che stia nel complementare. Allora si ha che:

$\partial_{xx}^2 \varphi(x_0, t_0) \leq 0$, (perchè la derivata seconda è negativa in un punto di massimo) e $\partial_t \varphi(x_0, t_0) \geq 0$, perchè le derivate sono nulla in un punto di massimo interno, oppure, se si ha $t_0 = T$ e la funzione raggiunge il suo massimo crescendo, allora la derivata potrebbe esser strettamente positiva. Ne viene: $-\partial_t \varphi(x_0, t_0) + \partial_{xx}^2 \varphi(x_0, t_0) \leq 0$ che va contro le ipotesi. Allora il punto di massimo sta sul bordo parabolico. \square

Lemma 5.7. sia $\varphi \in C_x^2(Q) \cap C_t^1(Q) \cap C(\bar{Q})$ soluzione dell'equazione

$$-\partial_t \varphi + \partial_{xx}^2 \varphi < 0 \quad \text{in } Q$$

Allora

$$\min_{\bar{Q}} \varphi = \min_{\partial_P Q} \varphi$$

Dimostrazione. Analoga al lemma sopra 5.6. \square

Lemma 5.8. sia $\varphi \in C_x^2(Q) \cap C_t^1(Q) \cap C(\bar{Q})$ soluzione dell'equazione

$$-\partial_t \varphi + \partial_{xx}^2 \varphi = 0 \quad \text{in } Q$$

Allora

$$\begin{aligned} \max_{\bar{Q}} \varphi &= \max_{\partial_P Q} \varphi \\ \min_{\bar{Q}} \varphi &= \min_{\partial_P Q} \varphi \end{aligned}$$

Dimostrazione. Costruiamo una perturbazione della funzione φ che verifichi le ipotesi dei lemmi precedenti. Chiamiamo $v = M - e^{-x}$ dove M è sufficientemente grande, in modo che $v > 0$ in Q . si verifica che $\partial_{xx}^2 v = -e^{-x} < 0$. Quindi $\forall \epsilon > 0$ si ha

$$(-\partial_t + \partial_{xx}^2)(\varphi + \epsilon v) = -e^{-x} < 0$$

ma allora vale il principio del minimo, e quindi:

$$\min_{\bar{Q}}(\varphi + \epsilon v) = \min_{\partial_P Q}(\varphi + \epsilon v) \geq \min_{\partial_P Q} \varphi$$

Quindi $\forall x, t, \epsilon$

$$(\varphi + \epsilon v)(x, t) \geq \min_{\partial_P Q} \varphi$$

Facendo tendere $\epsilon \rightarrow 0$:

$$\varphi(x, t) \geq \min_{\partial_P Q} \varphi$$

Quindi:

$$\min_{\bar{Q}} \varphi(x, t) \leq \min_{\partial_P Q} \varphi$$

Allora:

$$\min_{\bar{Q}} \varphi(x, t) = \min_{\partial_P Q} \varphi$$

□

Passiamo ora in \mathbb{R}^n , dunque definiamo in generale *dominio parabolico* e *frontiera parabolica*

Definizione 5.9. Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aperto diverso dal vuoto, $T > 0$ si definisce *dominio parabolico* associato a Ω e T come:

$$\Omega_T := (0, T) \times \Omega$$

e la *frontiera parabolica*:

$$\partial_P \Omega := (\{0\} \times \bar{\Omega}) \cup ((0, T] \times \partial\Omega)$$

Teorema 5.10 (Principio del massimo). *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un aperto diverso dal vuoto, con $\bar{\Omega}$ compatto e $T > 0$, si consideri $\varphi \in C_x^2(\Omega) \cap C_t^1(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ che soddisfa:*

$$-\partial_t \varphi + \sum_{ij} a_{ij} \partial_{ij}^2 \varphi + \sum_i b_i \partial_i \varphi = 0 \quad \text{se } (t, x) \in \Omega_T$$

per $a : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, $b : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $a_{ij} = a_{ij}(x, \nabla\varphi)$, $b_i = b_i(x, \nabla\varphi)$ funzioni definite sul dominio parabolico Ω_T con a_{ij} semidefinita positiva su tale dominio. Allora il massimo e il minimo di φ su $\overline{\Omega_T}$ sono raggiunti sulla frontiera parabolica $\partial_P\Omega_T$:

$$\max_{\overline{\Omega_T}} \varphi = \max_{\partial_P\Omega_T} \varphi$$

$$\min_{\overline{\Omega_T}} \varphi = \min_{\partial_P\Omega_T} \varphi$$

Premettiamo alla dimostrazione del teorema un lemma:

Lemma 5.11. *Nelle ipotesi del teorema 5.10*

$$-\partial_t\varphi + \sum_{ij} a_{ij}(x, \nabla\varphi)\partial_{ij}^2\varphi + \sum_i b_i(x, \nabla\varphi)\partial_i\varphi > 0$$

allora

$$\max_{\overline{\Omega}} \varphi = \max_{\partial_P\Omega} \varphi$$

Dimostrazione. Per ipotesi φ è continua su tutto $\overline{\Omega_T}$ quindi ammette un massimo, mostriamo che il punto sta sulla frontiera parabolica.

Per assurdo supponiamo stia nel complementare, quindi abbiamo che: l'Hessiana $Hess_\varphi$ è semidefinita negativa e a_{ij} è semidefinita positiva per ipotesi.

Allora $\sum_j a_{ij} Hess_{\varphi_{jk}}$ è semidefinita negativa. Quindi la traccia è:

$tr(AHess_\varphi) = \sum_{ij} a_{ij}(Hess_\varphi)_{ij} \leq 0$, inoltre $\nabla\varphi = 0$ nel punto di massimo.

Procedendo come nella dimostrazione del 5.6, ne viene che nel punto di massimo:

$$-\partial_t\varphi + \sum_{ij} a_{ij}(Hess_\varphi)_{ij} + \sum_i b_i(x, \nabla\varphi)\partial_i\varphi \leq 0$$

ma questo va contro le ipotesi. Per cui il massimo è assunto sulla frontiera parabolica $\partial_P\Omega$. \square

Lemma 5.12. *Nelle ipotesi del teorema 5.10*

$$-\partial_t\varphi + \sum_{ij} a_{ij}(x, \nabla\varphi)\partial_{ij}^2\varphi + \sum_i b_i(x, \nabla\varphi)\partial_i\varphi < 0$$

allora

$$\min_{\overline{\Omega}} \varphi = \min_{\partial_P\Omega} \varphi$$

Dimostrazione. Analoga al lemma precedente. \square

Dimostriamo ora il Teorema 5.10

Dimostrazione. come in 5.8 costruiamo una funzione ausiliaria: $v = t$, in modo che v sia positiva su Ω , si verifica che $-\partial_t v < 0$, quindi $\forall \epsilon > 0$ si ha:

$$\begin{aligned} & (-\partial_t + \sum_{ij} a_{ij} \partial_{ij}^2 + \sum_i b_i \partial_i)(\varphi + \epsilon v) = -\epsilon < 0 \\ \Rightarrow & (-\partial_t + \sum_{ij} a_{ij} \partial_{ij}^2 + \sum_i b_i \partial_i)(\varphi + \epsilon v) < 0 \end{aligned}$$

dunque vale il principio del minimo enunciato in 5.12 per cui:

$$\begin{aligned} \min_{\bar{\Omega}}(\varphi + \epsilon v) &= \min_{\partial_P \Omega}(\varphi + \epsilon v) \geq \min_{\partial_P \Omega} \varphi \\ \Rightarrow & (\varphi + \epsilon v)(x, t) \geq \min_{\partial_P \Omega} \varphi \end{aligned}$$

ma poichè $\partial_P \Omega \subset \bar{\Omega}$: $\min_{\bar{\Omega}} \varphi \leq \min_{\partial_P \Omega} \varphi$.

Da cui:

$$\min_{\bar{\Omega}} \varphi = \min_{\partial_P \Omega} \varphi$$

analogamente si dimostra l'asserto per il massimo. \square

Osservazione 5.13. In particolare il principio del massimo si applica all'equazione 4.2.

5.2 Soluzioni Viscose

Osservazione 5.14. Sia φ soluzione di 5.1, sia $h \in C^\infty(\Omega)$, se $\exists x_0$ tale che $(\varphi - h)(x_0) = 0$ è un punto di massimo, allora abbiamo che: $\nabla \varphi = \nabla h$, $\partial_t \varphi = \partial_t h$ e $Hess_\varphi - Hess_h \leq 0$.

$$\Rightarrow AHess_\varphi \leq AHess_h$$

Quindi:

$$0 = -\partial_t \varphi + tr(AHess_\varphi) + \sum_i b_i \partial_i \varphi \leq -\partial_t h + tr(AHess_h) + \sum_i b_i \partial_i h$$

ovvero:

$$0 = -\partial_t \varphi + \sum_{ij} a_{ij} \partial_{ij}^2 \varphi + \sum_i b_i \partial_i \varphi \leq -\partial_t h + \sum_{ij} a_{ij} \partial_{ij}^2 h + \sum_i b_i \partial_i h$$

Questa proprietà viene utilizzata per dare la definizione di soprasoluzione.

Definizione 5.15. φ si dice *soprasoluzione* se $\forall h \in C^\infty(\Omega)$, tale che $\varphi - h$ ha un massimo in $x_0 \in \Omega$ si verifica:

$$-\partial_t h + \sum_{ij} a_{ij} \partial_{ij}^2 h + \sum_i b_i \partial_i h \geq 0$$

Definizione 5.16. φ si dice *sottosoluzione* se $\forall h \in C^\infty(\Omega)$ tale che $\varphi - h$ ha un minimo in $x_0 \in \Omega$ si verifica:

$$-\partial_t h + \sum_{ij} a_{ij} \partial_{ij}^2 h + \sum_i b_i \partial_i h \leq 0$$

Definizione 5.17. φ si dice *soluzione viscosa* se è sopra e sotto soluzione.

In [3] è dimostrata l'esistenza di soluzioni viscosse per 5.1, con dato iniziale φ_0 Lipschitziano.

La figura mostra un dato iniziale poligonale (sinistra) e la sua evoluzione (destra):

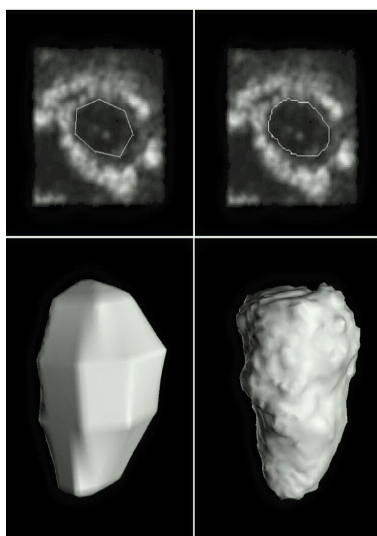


Figura 5.1: Insieme di livello zero iniziale (poligonale) e finale (regolarizzata). Immagine tratta da [1].

Bibliografia

- [1] C. Corsi, G. Saracino, A. Sarti, C. Lamberti, *Left ventricular volume estimation for real-time three-dimensional echocardiography* IEEE transactions on medical imaging, vol.21, n 9, settembre 2002.
- [2] M. Do Carmo, *Differential Geometry of Curves and Surfaces*,prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey 1976.
- [3] L. C. Evans, *Convergence of an Algorithm for Mean Curvature Motion* Indiana University Mathematics Journal, Vol. 42, N. 2, 1993.
- [4] L. C. Evans, *Partial differential equations*, Graduate Studies in Mathematics, vol.19 2010.
- [5] J. Jost, *Riemannian Geometry and Geometric analysis*, Springer, 2008, fifth edition.
- [6] T. McInerney, D. Terzopoulos, *Deformable models in medical image analysis: A survey* Department of Computer Science, Universitu of Toronto, Toronto, ON, Canada, Published in Medical Image Analysis,1996.
- [7] A. Sarti, C. Lamberti, and R. Malladi, *Geometric Method in Bio-Medical Image Processing*, R. Malladi, Ed. Berlin, Germany: Springer, 2002, pp 43-61.
- [8] A. Sarti e R. Malladi, *A geometric level set model for ultrasound analysis*, Computing sciences directorate mathematics dept., tech., 1999.
- [9] D. Terzopoulos, A. Witkin, and M. Kass, *Constraints on deformable models: Recovering 3D shape and nonrigid motion*, Artif. Intell., vol. 36, no.1, 1988.