

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

SCUOLA DI SCIENZE
Corso di Laurea in Matematica

TEORIA DI MORSE

Relatore:
Chiar.mo Prof.
Stefano Francaviglia

Presentata da:
Simone Giuliotti

III Sessione
Anno Accademico 2013-2014

Indice

Introduzione	i
1 Teoria di Morse	1
1.1 Definizioni Preliminari	2
1.2 Lemma di Morse	2
1.3 Gruppi di diffeomorfismi a 1 parametro	4
2 Omotopia e punti critici	7
2.1 Passaggio di punti critici	8
2.2 Varietà come CW-complessi	12
2.3 Omologia e punti critici	13
2.4 Esempi	16
3 Teorema di Omologia di Morse	19
3.1 Premesse	20
3.2 Complesso di catene di Morse-Smale-Witten	21
3.3 Teorema di Omologia di Morse	23
3.4 Esempi	25

Introduzione

Lo scopo di questa tesi è presentare la Teoria di Morse, frutto del lavoro del matematico americano Marston Morse (1892-1977). Questa teoria permette di dedurre la topologia di varietà differenziabili (o lisce) attraverso lo studio di opportune funzioni a valori reali definite su di essa, che prenderanno il nome di funzioni di Morse. In particolare, chiameremo funzione di Morse una funzione $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ che sia C^∞ e non abbia punti critici degeneri. Lo studio di tali funzioni, e nello specifico dei loro punti critici, ci fornirà importanti informazioni sui gruppi di omologia delle varietà su cui sono definite.

Nel primo capitolo forniremo alcune definizioni preliminari indispensabili per lo sviluppo della teoria, come quelli di funzione di Morse, indice di un punto critico, attaccamento di λ -celle e gruppo 1-parametrico di diffeomorfismi. Inoltre enunceremo e dimostreremo due lemmi, che useremo nei capitoli successivi per dimostrare i risultati principali ottenuti da Morse: il primo, il lemma di Morse, ci assicura che localmente qualsiasi funzione di Morse f intorno ad un suo punto critico p di indice λ può essere scritta, attraverso un opportuno cambio di variabile, come:

$$f = f(p) - (y_1)^2 - \dots - (y_\lambda)^2 + (y_{\lambda+1})^2 + \dots + (y_n)^2$$

Mentre il secondo ci garantisce che, nelle notazioni in seguito introdotte, un campo vettoriale definito su una varietà che si annulli fuori da un compatto genera un solo gruppo 1-parametrico di diffeomorfismi.

Nel secondo capitolo andremo ad enunciare e dimostrare i teoremi principali della teoria di Morse, che descrivono l'omotopia di una varietà differenziabile in base ai punti critici di una funzione di Morse definita su di essa. Il primo teorema descrive il cambiamento dell'omotopia della varietà al passaggio di un punto critico p di indice γ : dimostreremo che, per ε abbastanza piccolo, l'omotopia dell'insieme di sottolivello $M^{f(p)+\varepsilon} := \{x \in M \mid f(x) < f(p) + \varepsilon\}$ è uguale all'omotopia dell'insieme $M^{f(p)-\varepsilon}$ a cui sia stata attaccata una λ -cella.

Un'immediata conseguenza di questo risultato sarà il teorema enunciato e dimostrato nella seconda sezione del capitolo 2, che dice che, presa una varietà differenziabile M e definita su di essa una funzione di Morse f , allora M risulta omologicamente equivalente ad un CW-complesso composto da tante λ -celle quanti sono i punti critici di f di indice λ .

Forniremo inoltre una proposizione che descrive nel dettaglio come cambiano i gruppi di omologia degli insiemi di sottolivello di una funzione di Morse al passaggio di un punto critico: vedremo che attraversare un punto critico di indice λ o aumenta di 1 il rango del λ -esimo gruppo di omologia dell'insieme di sottolivello, oppure ne abbassa di 1 il rango del $(\lambda - 1)$ -esimo gruppo di omologia. Concluderemo il capitolo con alcuni esempi di applicazione dei risultati ottenuti.

Nel terzo capitolo affronteremo lo stesso problema con un approccio diverso: studieremo infatti varietà differenziabili attraverso funzioni di Morse-Smale, ovvero funzioni di Morse che soddisfino la condizione di trasversalità di Morse-Smale. Inizieremo il capitolo definendo le nuove notazioni necessarie per questa variante

della teoria di Morse, tra cui il concetto di trasversalità e di varietà stabili e instabili.

Continueremo poi introducendo il complesso di catene di Morse-Smale-Witten, per la cui definizione giocheranno un ruolo determinante i punti critici della funzione di Morse-Smale considerata e l'orientazione definita sulla varietà M . Concluderemo il terzo capitolo, nonché la tesi, enunciando e fornendo una traccia della dimostrazione del teorema di omologia di Morse, che afferma che l'omologia associata al complesso di catene di Morse-Smale-Witten è equivalente all'omologia classica, e portando alcuni esempi di applicazione.

Capitolo 1

Introduzione alla teoria di Morse

In questo primo capitolo definiremo dei concetti fondamentali per lo sviluppo della Teoria di Morse, quali quelli di indice di un punto critico e di funzione di Morse. Arriveremo anche a provare due lemmi indispensabili per la dimostrazione dei due teoremi principali presentati nel capitolo 2.

1.1 Definizioni Preliminari

Iniziamo fornendo alcune definizioni che useremo in seguito:

Definizione 1.1 (Varietà differenziabile). Un insieme M si dice *varietà differenziabile* di dimensione n sse $\exists\{U_i\}$ ricoprimento aperto di M , W_i aperti di \mathbb{R}^n e $\varphi_i : U_i \rightarrow W_i$ omeomorfismi tali che $\varphi_i \circ \varphi_j^{-1} \in C^\infty(\varphi_j(U_i \cap U_j), \varphi_i(U_i \cap U_j))$.

Definizione 1.2 (Punti critici e valori critici). Sia $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ funzione C^∞ a valori reali sulla varietà M . Si dice che $x \in M$ è un *punto critico* di f sse la mappa indotta dal differenziale $df_x : T_x M \rightarrow T_{f(x)} \mathbb{R}$ è identicamente nulla.

Equivalentemente x è punto critico di f sse, scelto un sistema di coordinate locali (x_1, \dots, x_n) , le derivate direzionali $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ sono tutte nulle.

Il valore $f(x)$ è detto *valore critico*.

Un punto critico è detto *degenere* se la matrice Hessiana $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right)$ ha determinante nullo.

Definizione 1.3 (Funzione di Morse). Sia $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione C^∞ a valori reali sulla varietà M . f si dice *funzione di Morse* se non ha punti critici degeneri.

Definizione 1.4 (Indice di un punto critico). Sia $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ funzione di Morse su M e sia $x \in M$ un punto critico per f . Si dice *indice* di x l'indice della matrice Hessiana \mathcal{H} associata ad f in x , cioè la dimensione del massimo sottospazio in cui \mathcal{H} è definita negativa.

Definizione 1.5 (Attaccamento di k -celle). Sia X spazio topologico, e sia $e^k := \{x \in \mathbb{R} \mid \|x\| \leq 1\}$ una k -cella di bordo $S^{k-1} := \{x \in \mathbb{R} \mid \|x\| = 1\}$. Sia poi $f : S^{k-1} \rightarrow X$ continua. Definiamo $X \cup_f e^k$ (leggasi X con attaccato e^k mediante f) l'insieme quoziente $X \cup e^k / \sim$, con \sim relazione di equivalenza data da $x \sim f(x)$.

1.2 Lemma di Morse

Passiamo ora a dimostrare un risultato preliminare, che useremo in seguito per studiare l'omologia in corrispondenza dei punti critici di una data funzione di Morse. Premettiamo un Lemma:

Lemma 1.6. Sia $f \in C^\infty(V, \mathbb{R})$ con V intorno convesso di 0 in \mathbb{R}^n , $f(0) = 0$ Allora

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n x_i g_i(x_1, \dots, x_n)$$

con $g_i \in C^\infty(V, \mathbb{R})$, $g_i(0) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(0)$.

Dimostrazione. Per il teorema fondamentale del calcolo, si ha

$$\begin{aligned} f(x_1, \dots, x_n) &= \int_0^1 \frac{\partial}{\partial t} f(tx_1, \dots, tx_n) dt = \int_0^1 \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} f(tx_1, \dots, tx_n) x_i dt = \\ &= \sum_{i=1}^n x_i \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i} (tx_1, \dots, tx_n) dt \end{aligned}$$

Definite dunque le g_i come $g_i(x) := \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i} (tx_1, \dots, tx_n) dt$ abbiamo le funzioni cercate, infatti le g_i sono chiaramente C^∞ e $g_i(0) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i} (0) dt = \frac{\partial f}{\partial x_i} (0)$. \square

Grazie al Lemma precedente, possiamo ora dimostrare il Lemma di Morse:

Lemma 1.7 (di Morse). Sia p punto critico non degenero di $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ di indice λ , con f funzione liscia. Allora $\exists (y_1, \dots, y_n)$ sistema di coordinate locali in U intorno di p tali che $y_i(p) = 0$ e in U valga

$$f = f(p) - (y_1)^2 - \dots - (y_\lambda)^2 + (y_{\lambda+1})^2 + \dots + (y_n)^2$$

Dimostrazione. Innanzitutto è chiaro che se possiamo scrivere f come sopra, λ coincide con l'indice del punto critico p : infatti nel sistema di coordinate dato risulta

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right) = \begin{cases} -2 & \text{per } i = j \leq \lambda \\ 2 & \text{per } i = j > \lambda \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

da cui segue che \mathcal{H} è una matrice diagonale con λ elementi della diagonale uguali a -2 e $(n - \lambda)$ elementi uguali a 2 , da cui $\exists U \subset X$ di dimensione λ su cui \mathcal{H} è definita negativa, ed $\exists V \subset X$ di dimensione $n - \lambda$ su cui \mathcal{H} è definita positiva con $U \cap V = \emptyset$ e $U \oplus V = X$. Inoltre se esistesse $U' \subset X$ di dimensione $> \lambda$ su cui \mathcal{H} fosse definita negativa, avremmo $U' \cap V \neq \emptyset$, e dunque su $U' \cap V$ la \mathcal{H} sarebbe definita sia positiva che negativa, il che è assurdo.

Proviamo dunque che un tale sistema di coordinate esiste. Supponiamo $p = 0$ e $f(p) = f(0) = 0$. Per il lemma precedente, si ha

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n x_i g_i(x_1, \dots, x_n)$$

con $g_i \in C^\infty(V, \mathbb{R})$, $g_i(0) = \frac{\partial f}{\partial x_i} (0)$ in un certo intorno V di 0 . Inoltre $g_i(0) = \frac{\partial f}{\partial x_i} (0) = 0$, dunque possiamo riapplicare il lemma ottenendo

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i,j=1}^n x_i x_j h_{ij}(x_1, \dots, x_n)$$

con $h_{ij} \in C^\infty(V, \mathbb{R})$, $h_i(0) = \frac{\partial g}{\partial x_j}(0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$. Possiamo inoltre supporre $h_{ji} = h_{ij}$, eventualmente ponendo $\tilde{h}_{ji} := \frac{1}{2}(h_{ij} + h_{ji})$. Ne viene che la matrice $(h_{ij}(0))$ è simmetrica e non singolare, essendo p punto critico non degenere, e pertanto diagonalizzabile. Applicando il cambio di coordinate che diagonalizza la matrice, otteniamo dunque un sistema di coordinate locali per cui la f è come richiesto. \square

Un'immediata conseguenza del lemma di Morse è il seguente corollario:

Corollario 1.8. Se p è un punto critico non degenere per f , allora p è un punto critico isolato.

Dimostrazione. Se prendiamo l'intorno U di p su cui valga $f(x) = f(p) - (x_1)^2 - \dots - (x_\lambda)^2 + \dots + (x_n)^2$, con (x_1, \dots, x_n) opportuno sistema di coordinate, risulta $\frac{\partial f}{\partial x_i} = \pm 2x_i \forall i$ e perciò $\nabla f(x) \neq 0 \forall x \in U \setminus \{p\}$. \square

1.3 Gruppi di diffeomorfismi a 1 parametro

Concludiamo il capitolo introducendo la nozione di gruppo di diffeomorfismi a 1 parametro, provando anche un lemma che ci servirà in seguito per dimostrare il teorema cardine della teoria di Morse.

Definizione 1.9. Un gruppo di diffeomorfismi a 1 parametro su una varietà M è una funzione $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R} \times M, M)$ tale che:

1. $\forall t \in \mathbb{R}, \varphi_t : M \rightarrow M$ definita da $\varphi_t(q) := \varphi(t, q)$ sia un diffeomorfismo
2. $\forall t, s \in \mathbb{R}, \varphi_{t+s} = \varphi_t \circ \varphi_s$

Inoltre, dato un gruppo di diffeomorfismi a 1 parametro φ su M , possiamo definire su M un campo vettoriale nel modo seguente: $\forall f \in C^\infty(M, \mathbb{R}), \forall q \in M$ fissato, poniamo

$$X_q(f) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\varphi_h(q)) - f(q)}{h}$$

Il campo vettoriale sopra definito si dice generatore del gruppo φ .

Lemma 1.10. Sia X campo vettoriale su M , $K \subset M$ compatto. Se $X \equiv 0$ su $M \setminus K$, allora X genera un unico gruppo di diffeomorfismi a 1 parametro su M .

Dimostrazione. Sia φ un gruppo di diffeomorfismi a 1 parametro su M generato da X . Allora $\forall q \in M$, la curva $t \rightarrow \varphi_t(q)$ è soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi_t(q)}{\partial t} = X_{\varphi_t(q)} \\ \varphi_0(q) = q \end{cases}$$

infatti $\forall f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ vale

$$\frac{\partial \varphi_t(q)}{\partial t} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\varphi_{t+h}(q)) - f(\varphi_t(q))}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\varphi_h(p)) - f(p)}{h} = X_p(f)$$

dove $p = \varphi_t(q)$. Pertanto, per l'unicità della soluzione dei problemi di Cauchy, si ha che $\forall p \in M \exists U$ intorno di p , $\exists \varepsilon > 0$ tali che $\frac{\partial \varphi_t(q)}{\partial t} = X_{\varphi_t}(q)$, $\varphi_0(q) = q$ abbia soluzione unica per $q \in U$, $|t| < \varepsilon$.

Ora, poichè K è compatto, certamente esiste un insieme finito di aperti U come sopra che ricopra K . Sia dunque $\varepsilon_0 > 0$ il minimo degli ε associati agli elementi del ricoprimento. Posto $\varphi_t(q) = q \forall q \notin K$, si ha che $\varphi_t(q)$ è l'unica soluzione del PC $\forall q \in M, \forall |t| < \frac{\varepsilon_0}{2}$, $\varphi_t(q) \in C^\infty([-\frac{\varepsilon_0}{2}, \frac{\varepsilon_0}{2}] \times M, M)$. Inoltre $\varphi_{t+s} = \varphi_t \circ \varphi_s$, dal momento che $t + s < \frac{\varepsilon_0}{2} + \frac{\varepsilon_0}{2} < \varepsilon_0$, e dunque siamo ancora nelle condizioni assicurateci dalla scelta del ricoprimento.

Ci resta dunque soltanto da estendere la definizione di φ a tutto $\mathbb{R} \times M$; ora, $\forall t \in \mathbb{R} \exists k \in \mathbb{Z}, r \in [0, \frac{\varepsilon_0}{2}]$ tali che $t = k\frac{\varepsilon_0}{2} + r$. Poniamo dunque

$$\begin{cases} \varphi_t := \varphi_{\frac{\varepsilon_0}{2}} \circ \dots \circ \varphi_{\frac{\varepsilon_0}{2}} \circ \varphi_r & \text{se } k > 0 \\ \varphi_t := \varphi_{-\frac{\varepsilon_0}{2}} \circ \dots \circ \varphi_{-\frac{\varepsilon_0}{2}} \circ \varphi_r & \text{se } k < 0 \end{cases}$$

dove in entrambi i casi $\varphi_{\pm \frac{\varepsilon_0}{2}}$ è reiterata $|k|$ volte. È evidente che questa funzione è ben definita su $\mathbb{R} \times M$ e soddisfa la condizione $\varphi_{t+s} = \varphi_t \circ \varphi_s$, il che conclude la dimostrazione. \square

Capitolo 2

Omotopia in relazione ai valori critici

Questo capitolo sarà incentrato sulla dimostrazione di uno dei risultati più importanti della teoria di Morse, che descrive il cambiamento di omologia di una varietà al passaggio di un punto critico. Arriveremo a dimostrare infatti che, se consideriamo l'intervallo $[a, b]$ contenente un unico valore critico di una funzione di Morse f allora l'insieme di sottolivello M^a è omotopicamente equivalente all'insieme di sottolivello M^b a cui sia stata attaccata un'opportuna λ -cella.

Una generalizzazione di questo teorema ci condurrà poi a dimostrare un altro importante risultato, che ci permetterà di costruire una rappresentazione omotopicamente equivalente di una qualsiasi varietà differenziabile e compatta studiando una funzione di Morse su di essa. Concluderemo quindi il capitolo descrivendo come cambiano i gruppi di omologia di una varietà quando attraversiamo un punto critico.

2.1 Passaggio di punti critici

Prima di enunciare e dimostrare i teoremi, premettiamo la seguente definizione:

Definizione 2.1. Sia $f : M \rightarrow \mathbb{R}$. Allora indichiamo con M^a l'insieme:

$$M^a := \{x \in M \mid f(x) < a\}$$

Lemma 2.2. Sia $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$, e siano $a < b \in \mathbb{R}$. Supponiamo che $f^{-1}([a, b]) = \{x \in M \mid a \leq f(x) \leq b\}$ sia compatto e non contenga punti critici di f . Allora M^a è diffeomorfo a M^b . Non solo, M^a è anche retratto forte per deformazione di M^b , e dunque la mappa di inclusione $i : M^a \rightarrow M^b$ è un'equivalenza omotopica.

Dimostrazione. L'idea di base della dimostrazione è quella di "spingere" M^b su M^a lungo le traiettorie perpendicolari alle ipersuperfici $\{f = c\}$ con $c \in [a, b]$. Per formalizzare ciò, definiamo una funzione $g \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ tale che

$$g(x) := \begin{cases} \frac{1}{\|\nabla f(x)\|} & \text{per } x \in f^{-1}([a, b]) \\ 0 & \text{per } x \in M \setminus K \end{cases}$$

con K compatto contenente $f^{-1}([a, b])$.

Consideriamo ora il campo vettoriale $X_q = g(q) \cdot (\nabla f(q))$. Chiaramente X_q si annulla fuori dal compatto K : siamo dunque nelle ipotesi del lemma 1.10, e pertanto $\exists! \varphi : \mathbb{R} \times M \rightarrow M$ gruppo 1-parametrico di diffeomorfismi generato da X_q . Consideriamo $q \in M$. Se $\varphi_t(q) \in f^{-1}([a, b])$, allora

$$\begin{aligned} \frac{df(\varphi_t(q))}{dt} &= \left\langle \frac{d\varphi_t(q)}{dt}, \nabla f(\varphi_t(q)) \right\rangle = \left\langle X_{\varphi_t(q)}, \nabla f(\varphi_t(q)) \right\rangle = \\ &= \left\langle g(\varphi_t(q)) \nabla f(\varphi_t(q)), \nabla f(\varphi_t(q)) \right\rangle = 1 \end{aligned}$$

Abbiamo dunque che la funzione $f(\varphi_t(q))$ è lineare con derivata 1 quando $\varphi_t(q) \in [a, b]$, cioè è della forma $f(\varphi_t(q)) = f(q) + t$.

Se consideriamo il diffeomorfismo $\varphi_{b-a}(q)$, si avrà dunque che $f(\varphi_{b-a}(q)) = f(q) + b - a$. Ora, $\forall x \in M^b, f(x) \leq b \iff \forall x \in \varphi_{a-b}(M^b), f(\varphi_{b-a}(x)) = f(x) + b - a \leq b \iff f(\varphi_{b-a}(x)) \leq a \implies \varphi_{a-b}(M^b) = M^a$. Abbiamo dunque dimostrato che M^b e M^a sono diffeomorfi.

Per provare la seconda parte del teorema, definiamo una funzione $r : [0, 1] \times M^b \rightarrow M^b$ come

$$r_t(q) = \begin{cases} q & \text{per } q \in M^a \\ \varphi_{t(a-f(q))} & \text{per } f(q) \in (a, b] \end{cases}$$

si ha che r_0 è l'identità su M^b , mentre r_1 è una retrazione forte di M^b su M^a , il che conclude la dimostrazione. \square

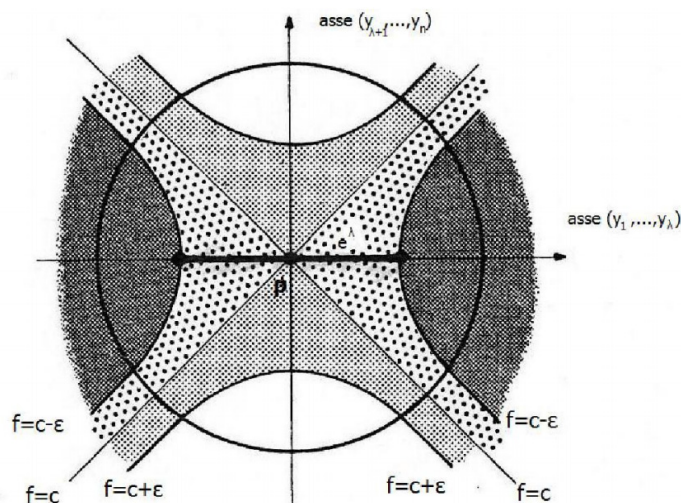
Teorema 2.3. Sia $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione C^∞ e sia $p \in M$ punto critico non degenere di f di indice λ . Posto $f(p) = c$, supponiamo che $\exists \varepsilon > 0$ tale che $f^{-1}([c - \varepsilon, c + \varepsilon])$ sia compatto e contenga un unico punto critico. Allora $M^{c+\varepsilon}$ è omologicamente equivalente a $M^{c-\varepsilon}$ a cui sia stata attaccata una $\lambda - \text{cella}$.

Dimostrazione. Per il Lemma 1.7, $\exists U$ intorno di $p, \exists (y_1, \dots, y_n)$ sistema di coordinate locali tali che $\forall q \in U, f(q) = c - (y_1)^2 - \dots - (y_\lambda)^2 + \dots + (y_n)^2$ e $y_1(p) = \dots = y_n(p) = 0$.

Definiamo la λ -cella $e^\lambda = \{x \in U \text{ tali che } \sum_{i=1}^\lambda (y_i)^2 \leq \varepsilon, y_{\lambda+1} = \dots = y_n = 0\}$. Nel nuovo sistema di coordinate, scegliamo $\varepsilon > 0$ tale che:

1. $f^{-1}([c - \varepsilon, c + \varepsilon])$ sia compatto e contenga un unico punto critico
2. $B(0, \sqrt{2\varepsilon}) \subset U$

Siamo dunque nella situazione rappresentata in figura:



dove i due assi rappresentano gli iperpiani $\{y_1 = \dots = y_\lambda = 0\}$ e $\{y_{\lambda+1} = \dots = y_n = 0\}$, la circonferenza rappresenta il bordo della palla di raggio $\sqrt{2\varepsilon}$ e le iperbolici rappresentano le ipersuperfici $f^{-1}(c - \varepsilon)$ e $f^{-1}(c + \varepsilon)$. Inoltre la regione più scura

è l'insieme $M^{c-\varepsilon}$, la regione finemente punteggiata è l'insieme $f^{-1}([c, c + \varepsilon])$ e la regione con punteggiatura più marcata è l'insieme $f^{-1}([c - \varepsilon, c])$. Dalla figura è evidente che $M^{c-\varepsilon} \cap e^\lambda = \partial e^\lambda$, e cioè la cella è attaccata ad M^a come richiesto.

Dimostriamo dunque che $M^{c-\varepsilon} \cup e^\lambda$ è retracts per deformazione di $M^{c+\varepsilon}$. Consideriamo una funzione $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ C^∞ tale che:

$$\begin{cases} \gamma(0) > \varepsilon \\ \gamma(t) = 0 & \text{per } t > 2\varepsilon \\ \gamma'(t) \in [-1, 0] \quad \forall t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Per comodità di notazione, definiamo su U due funzioni

$$\alpha, \beta : U \rightarrow [0, +\infty)$$

come

$$\begin{aligned} \alpha(q) &= (y_1(q))^2 + \dots + (y_\lambda(q))^2 \\ \beta(q) &= (y_{\lambda+1}(q))^2 + \dots + (y_n(q))^2 \end{aligned}$$

In questa notazione, $f(q) = c - \alpha(q) + \beta(q)$. Definiamo inoltre una funzione $F : M \rightarrow \mathbb{R}$:

$$F(q) = \begin{cases} f(q) & \text{per } q \in M \setminus U \\ c - \alpha(q) + \beta(q) - \gamma(\alpha(q) + 2\beta(q)) & \text{per } q \in U \end{cases}$$

chiaramente, $F \leq f$ poichè per definizione la funzione γ è non negativa. Ne segue immediatamente che $F^{-1}((-\infty, c + \varepsilon]) = M^{c+\varepsilon}$.

Inoltre F e f hanno gli stessi punti critici. Risulta infatti:

$$dF = \frac{\partial F}{\partial \alpha} d\alpha + \frac{\partial F}{\partial \beta} d\beta$$

e

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial \alpha} &= -1 - \gamma'(\alpha + 2\beta) < 0 \\ \frac{\partial F}{\partial \beta} &= 1 - 2\gamma'(\alpha + 2\beta) \geq 1 \end{aligned}$$

per le condizioni su γ' . Di conseguenza il differenziale di F si annulla solo se si annullano contemporaneamente $d\alpha$ e $d\beta$, e questo accade solo nell'origine del sistema di coordinate locali (che ricordiamo essere il punto p).

Consideriamo ora l'insieme $F^{-1}([c - \varepsilon, c + \varepsilon])$. Dalla disuguaglianza $F \leq f$ segue immediatamente $F^{-1}([c - \varepsilon, c + \varepsilon]) \subset f^{-1}([c - \varepsilon, c + \varepsilon])$. Pertanto $F^{-1}([c - \varepsilon, c + \varepsilon])$ è chiuso (poichè F è C^∞) contenuto in un compatto, e dunque compatto. Sappiamo inoltre per quanto detto sopra che $F^{-1}([c - \varepsilon, c + \varepsilon])$ non può contenere punti critici all'infuori di p , ma d'altra parte $p \notin F^{-1}([c - \varepsilon, c + \varepsilon])$, poichè $F(p) = c - \gamma(0) <$

$c - \varepsilon$, quindi F non ha punti critici in $F^{-1}([c - \varepsilon, c + \varepsilon])$.

Sono dunque soddisfatte le ipotesi del Lemma 2.2, e possiamo concludere che $F^{-1}((-\infty, c - \varepsilon])$ è retratto per deformazione di $M^{c+\varepsilon}$.

Intuitivamente, $F^{-1}((-\infty, c - \varepsilon])$ non è altro che $M^{c-\varepsilon}$ con un “manico” H attaccato. Per questo motivo denoteremo $F^{-1}((-\infty, c - \varepsilon]) = M^{c-\varepsilon} \cup H$, dove H è la chiusura di $F^{-1}((-\infty, c - \varepsilon]) \setminus M^{c-\varepsilon}$.

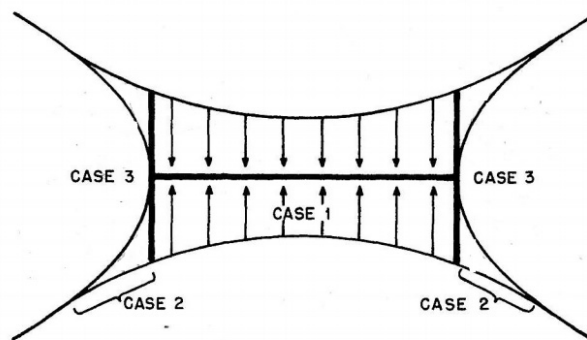
Si noti che nella notazione introdotta, la cella e^λ corrisponde all’insieme $\{q \in M \mid \alpha(q) < \varepsilon, \beta(q) = 0\}$ ed è contenuta nel manico H , infatti risulta

$$\begin{aligned} \forall q \in e^\lambda, F(q) \leq F(p) = c - \varepsilon &\implies q \in F^{-1}((-\infty, c - \varepsilon]) \\ \forall q \in e^\lambda, f(q) \geq c - \varepsilon &\implies q \notin M^{c-\varepsilon} \end{aligned}$$

Ci basterà dunque mostrare che $M^{c-\varepsilon} \cup e^\lambda$ è retratto per deformazione di $M^{c-\varepsilon} \cup H$. Costruiamo una retrazione r_t su U nel modo seguente:

- i) $r_t(y_1, \dots, y_n) = (y_1, \dots, y_\lambda, ty_{\lambda+1}, \dots, ty_n)$ in $\{\alpha(q) \leq \varepsilon\}$
- ii) $r_t(y_1, \dots, y_n) = (y_1, \dots, y_\lambda, \sigma_t y_{\lambda+1}, \dots, \sigma_t y_n)$ in $\{\varepsilon \leq \alpha(q) \leq \beta(q) + \varepsilon\}$
- iii) $r_t(y_1, \dots, y_n) = (y_1, \dots, y_n)$ in $\{\alpha(q) \geq \beta(q) + \varepsilon\}$
- iv) $r_t(y_1, \dots, y_n) = (y_1, \dots, y_n)$ in $M \setminus U$

dove $\sigma_t = t + (1 - t)\sqrt{\frac{\alpha(q) - \varepsilon}{\beta(q)}}$. Gli insiemi su cui è definita la funzione per i primi 3 casi sono illustrati nella figura seguente:



Si noti che $\sigma_t = 1$ su $\{\alpha(q) = \beta(q) + \varepsilon\}$, e dunque la funzione è ben definita. Inoltre si ha che r_1 è l’identità, mentre r_0 manda $M^{c-\varepsilon} \cup H$ in $M^{c-\varepsilon} \cup e^\lambda$. Ne viene che $M^{c-\varepsilon} \cup e^\lambda$ è retratto per deformazione di $M^{c-\varepsilon} \cup H$, e dunque per transitività di $M^{c+\varepsilon}$, il che prova il teorema. \square

Osservazione 2.4. Il Teorema appena dimostrato, assieme al Lemma precedente, ci assicurano che data una funzione di Morse f sulla varietà M , la topologia della varietà cambia in corrispondenza dei punti critici di f , e lì soltanto. È fondamentale l’ipotesi che il punto critico p sia non degenerare: se ad esempio consideriamo su $M = \mathbb{R}^2$ la funzione $f(x, y) = x^2 + y^3$, questa ha in $(0, 0)$ un punto critico degenerare, ma ovviamente l’omotopia di \mathbb{R}^2 non cambia nell’origine.

Osservazione 2.5. Ripercorrendo la dimostrazione del teorema 2.3 è possibile generalizzare al caso in cui l'insieme $f^{-1}(c)$ contenga più di un punto critico. In questo caso, siano $p_1 \dots p_k$ i punti critici di f in $f^{-1}(c)$ di indici rispettivamente $\lambda_1, \dots, \lambda_k$, si ha che:

$$M^{c+\varepsilon} \simeq M^{c-\varepsilon} \cup e_1^\lambda \cup \dots \cup e_k^\lambda$$

che significa che quando sorpassiamo un valore critico di f , l'omotopia dell'insieme di sottolivello cambia e il nuovo insieme ha l'omotopia dell'insieme precedente con attaccate una λ -cella per ogni punto critico di indice λ associato al valore critico attraversato.

A questo punto è intuitivamente facile capire che l'omotopia di una varietà è equivalente a quella di un CW-complesso la cui composizione è strettamente legata ai punti critici di una funzione di Morse f , basta infatti pensare che la varietà M non è altro che l'insieme di sottolivello $M_M^{\max f}$ ed applicare i risultati appena ottenuti a tutti i valori critici di f .

2.2 Varietà come CW-complessi

In questa sezione vedremo una prima conseguenza del teorema 2.3, che ci fornisce un modo omotopicamente equivalente di rappresentare una varietà differenziabile su cui sia stata definita una funzione di Morse f . Arriveremo infatti a dimostrare che presa una qualsiasi varietà compatta, e presa f funzione di Morse su di essa, possiamo studiare l'omologia della varietà studiando l'omologia di un CW-complesso la cui composizione è determinata univocamente dai punti critici di f . Alcune premesse prima di enunciare il teorema che concluderà il capitolo:

Definizione 2.6 (CW-complesso). Un *CW-complesso* finito di dimensione n è costituito da uno spazio topologico X e, $\forall k \in \mathbb{N}_n^0$ da insiemi finiti di mappe $\varphi_i^k : D^k \rightarrow X$ (con $i \in I_k$ insieme di indici) tali che:

- i) $X = \bigcup_{\substack{k \in \mathbb{N}_n^0 \\ i \in I_k}} \varphi_i^k(D^k)$
- ii) $\varphi_i^k(\text{int}(D)^k) \cap \varphi_j^h(\text{int}(D)^h) \Rightarrow i = j$ e $h = k$
- iii) $\forall k, i, \varphi_i^k$ è continua e biunivoca su $\text{int}(D)^k$
- iv) $\forall k \in \mathbb{N}, \forall i \in I_k, \varphi_i^k(S^{k-1}) \subset \bigcup_{\substack{0 \leq h \leq k-1 \\ i \in I_h}} \varphi_i^h(D^h)$

Lemma 2.7 (di Whitehead). Siano φ_0 e φ_1 due funzioni omotope da S^k a X . Allora l'identità su X si può estendere ad un'omotopia $k : X \cup_{\varphi_0} S^k \rightarrow X \cup_{\varphi_1} S^k$.

Lemma 2.8. Sia $\varphi : S^k \rightarrow X$ una mappa di incollamento. Allora una qualsiasi omotopia $f : X \rightarrow Y$ si può estendere ad un'omotopia $k : X \cup_{\varphi} S^k \rightarrow Y \cup_{f\varphi} S^k$.

Grazie ai due lemmi appena enunciati, possiamo dunque dimostrare il seguente teorema:

Teorema 2.9. Sia $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione C^∞ definita su una varietà differenziabile compatta M . Se f non ha punti critici degeneri su M , allora M è omotopicamente equivalente ad un CW-complesso avente tante $\lambda - \text{celle}$ quanti sono i punti critici di f di indice λ , per ogni $\lambda = 1, \dots, \dim(M)$.

Dimostrazione. Siano c_1, c_2, \dots i valori critici (ordinati) di f . Poichè M è compatta e f non ha punti critici degeneri, la successione non ha punti di accumulazione. Supponiamo $a \neq c_i \forall i$ e supponiamo che M^a sia omotopo ad un CW-complesso. Sia poi $c = \min\{c_i | c_i > a\}$. Allora per il teorema 2.3 si ha $M^{c+\varepsilon} \simeq M^{c-\varepsilon} \cup_{\varphi_1} e^{\lambda_1} \cup \dots \cup_{\varphi_j} e^{\lambda_j}$ con j opportuno (dipendente dal numero di punti critici associati al valore critico c), φ_k mappe di incollamento. Ma sappiamo anche che $M^{c-\varepsilon} \simeq M^a$, e poichè per ipotesi $M^a \simeq K$ con K CW-complesso, si ha che $M^{c+\varepsilon} \simeq K \cup_{\varphi_1} e^{\lambda_1} \cup \dots \cup_{\varphi_j} e^{\lambda_j}$. Procedendo per induzione, si ha che $M^a \simeq K$ con K opportuno CW-complesso $\forall a \in \mathbb{R}$. Dal momento che M è compatta questo prova il teorema, poichè $f(M)$ compatto $\implies \exists a_0 = \max_M f \implies M^a = M$. \square

2.3 Variazione dell'omologia al passaggio di un punto critico

Vediamo ora come variano i gruppi di omologia di una varietà differenziabile M al passaggio dei punti critici di una funzione di Morse f definita sulla varietà. Ricordiamo anzitutto che:

Proposizione 2.10. Sia G un gruppo abeliano finitamente generato. Allora:

$$G = \mathbb{Z}^r \oplus \mathbb{Z}_{a_1} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}_{a_k}$$

con $r, a_i \in \mathbb{Z}$. In queste notazioni, r si dice rango di G (che indicheremo con $rg(G)$), e gli \mathbb{Z}_{a_i} sono detti elementi di torsione di G .

Allora grazie ai risultati precedenti possiamo affermare che:

Proposizione 2.11. Sia $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione di Morse sulla varietà differenziabile M , e supponiamo che p sia punto critico di f di indice λ . Supponiamo inoltre per comodità che $f(p) = 0$; allora si verifica una delle seguenti possibilità:

$$\begin{aligned} i) & \begin{cases} rg(H_\lambda(M^\varepsilon)) = rg(H_\lambda(M^{-\varepsilon})) + 1 \\ rg(H_i(M^\varepsilon)) = rg(H_i(M^{-\varepsilon})) \quad \forall i \neq \lambda \end{cases} \\ ii) & \begin{cases} rg(H_{\lambda-1}(M^\varepsilon)) = rg(H_{\lambda-1}(M^{-\varepsilon})) - 1 \\ H_i(M^\varepsilon) \cong H_i(M^{-\varepsilon}) \quad \forall i \neq \lambda - 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Dimostrazione. Per quanto dimostrato precedentemente, sappiamo che per ε opportunamente piccolo vale $M^\varepsilon \simeq M^{-\varepsilon} \cup e^\lambda$. Per la definizione di attaccamento di celle sappiamo inoltre che $M^{-\varepsilon} \cap e^\lambda = S^{\lambda-1}$.

Poichè e^λ è contraibile, si ha che:

$$\begin{cases} H_0(e^\lambda) = 0 \\ H_i(e^\lambda) = \mathbb{Z} \quad \forall i \neq 0 \end{cases}$$

Ed ovviamente:

$$\begin{cases} H_{\lambda-1}(S^{\lambda-1}) = \mathbb{Z} \\ H_i(S^{\lambda-1}) = 0 \quad \forall i \neq \lambda - 1 \end{cases}$$

Pertanto applicando il teorema di Mayer-Vietoris otteniamo la successione esatta:

$$\begin{aligned} \dots & \xrightarrow{\partial_{\lambda*}} H_\lambda(S^{\lambda-1}) \xrightarrow{i_{\lambda*}} H_\lambda(M^{-\varepsilon}) \oplus H_\lambda(e^\lambda) \xrightarrow{j_{\lambda*}} H_\lambda(M^\varepsilon) \xrightarrow{\partial_{\lambda-1*}} \dots \\ \dots & \xrightarrow{\partial_{\lambda-1*}} H_{\lambda-1}(S^{\lambda-1}) \xrightarrow{i_{\lambda-1*}} H_{\lambda-1}(M^{-\varepsilon}) \oplus H_{\lambda-1}(e^\lambda) \xrightarrow{j_{\lambda-1*}} H_{\lambda-1}(M^\varepsilon) \xrightarrow{\partial_{\lambda-2*}} \dots \\ \dots & \xrightarrow{\partial_{\lambda-2*}} H_{\lambda-2}(S^{\lambda-1}) \dots \end{aligned}$$

che diventa:

$$0 \xrightarrow{i_{\lambda*}} H_\lambda(M^{-\varepsilon}) \xrightarrow{j_{\lambda*}} H_\lambda(M^\varepsilon) \xrightarrow{\partial_{\lambda-1*}} \mathbb{Z} \xrightarrow{i_{\lambda-1*}} H_{\lambda-1}(M^{-\varepsilon}) \xrightarrow{j_{\lambda-1*}} H_{\lambda-1}(M^\varepsilon) \xrightarrow{\partial_{\lambda-2*}} 0$$

per l'esattezza, si ha dunque che $j_{\lambda-1*}$ è suriettivo, e $j_{\lambda*}$ è iniettivo. Studiamo ora il morfismo $i_{\lambda-1*}$; distinguiamo due casi:

1. $i_{\lambda-1*}$ non iniettivo:

in questo caso, consideriamo la successione esatta

$$0 \xrightarrow{i_{\lambda*}} H_\lambda(M^{-\varepsilon}) \xrightarrow{j_{\lambda*}} H_\lambda(M^\varepsilon) \xrightarrow{\partial_{\lambda-1*}} \text{Ker}(i_{\lambda-1*}) \rightarrow 0$$

Per il teorema fondamentale di omomorfismo per i gruppi, si ha che

$$H_\lambda(M^\varepsilon)/\text{Ker}(\partial_{\lambda-1*}) \cong \text{Ker}(i_{\lambda-1*})$$

d'altra parte, per l'esattezza abbiamo che $\text{Ker}(\partial_{\lambda-1*}) \cong \text{Im}(j_{\lambda*})$, che per l'injectività di $j_{\lambda*}$ è isomorfo a $H_\lambda(M^\varepsilon)$. Abbiamo dunque

$$H_\lambda(M^\varepsilon)/H_\lambda(M^{-\varepsilon}) \cong \text{Ker}(i_{\lambda-1*})$$

Ma poichè $i_{\lambda-1*}$ è un omomorfismo di gruppi, $\text{Ker}(i_{\lambda-1*})$ sarà certamente un sottogruppo di \mathbb{Z} , e pertanto risulterà isomorfo a \mathbb{Z} . Ne viene:

$$H_\lambda(M^\varepsilon)/H_\lambda(M^{-\varepsilon}) \cong \mathbb{Z} \Rightarrow \text{rg}(H_\lambda(M^\varepsilon)) = \text{rg}(H_\lambda(M^{-\varepsilon})) + 1$$

Inoltre, se consideriamo la successione esatta

$$0 \rightarrow \mathbb{Z}/\text{Ker}(i_{\lambda-1*}) \xrightarrow{i_{\lambda-1*}} H_{\lambda-1}(M^{-\varepsilon}) \xrightarrow{j_{\lambda-1*}} H_{\lambda-1}(M^\varepsilon) \xrightarrow{\partial_{\lambda-2*}} 0$$

otteniamo che l'unica parte che cambia nella rappresentazione dei gruppi di omologia di grado $\neq \lambda$ è la componente di torsione, in quanto si ha $\mathbb{Z}/\text{Ker}(i_{\lambda-1*}) \cong \mathbb{Z}_a$ con a intero opportuno (infatti $\text{Ker}(i_{\lambda-1*}) \neq 0$ dato che $i_{\lambda-1*}$ non è iniettivo). Ne viene dunque:

$$\text{rg}(H_i(M^\varepsilon)) = \text{rg}(H_i(M^{-\varepsilon})) \forall i \neq \lambda$$

2. $i_{\lambda-1*}$ iniettivo:

consideriamo stavolta la successione esatta:

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{i_{\lambda-1*}} H_{\lambda-1}(M^{-\varepsilon}) \xrightarrow{j_{\lambda-1*}} H_{\lambda-1}(M^\varepsilon) \xrightarrow{\partial_{\lambda-2*}} 0$$

in questo caso avremo che $\text{Im}(i_{\lambda-1*}) \cong \mathbb{Z}$. Ragionando come nel caso 1 e applicando il teorema fondamentale di omomorfismo per i gruppi e l'esattezza della successione, otteniamo

$$H_{\lambda-1}(M^{-\varepsilon})/\mathbb{Z} \cong H_{\lambda-1}(M^\varepsilon)$$

da cui

$$\text{rg}(H_{\lambda-1}(M^\varepsilon)) = \text{rg}(H_{\lambda-1}(M^{-\varepsilon})) - 1$$

Inoltre, dal momento che $\text{Ker}(i_{\lambda-1*}) = 0$, la prima parte della successione esatta di Mayer-Vietoris diventa:

$$0 \xrightarrow{i_{\lambda*}} H_\lambda(M^{-\varepsilon}) \xrightarrow{j_{\lambda*}} H_\lambda(M^\varepsilon) \xrightarrow{\partial_{\lambda-1*}} 0$$

Ne viene $H_\lambda(M^{-\varepsilon}) \cong H_\lambda(M^\varepsilon)$.

Ragionano in modo analogo, si ottiene anche:

$$H_i(M^\varepsilon) \cong H_i(M^{-\varepsilon}) \forall i \neq \lambda - 1$$

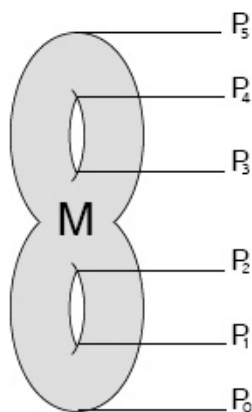
□

Osservazione 2.12. La proposizione appena dimostrata intuitivamente ci dice che al passaggio di un punto critico di indice λ , l'attaccamento della λ -cella può avere due effetti sui gruppi di omologia dell'insieme di sottolivello: o crea una classe di grado λ , oppure ne fa perdere una di grado $\lambda - 1$.

2.4 Esempi

Vediamo ora due esempi di applicazione dei risultati appena dimostrati, entrambi riguardanti lo studio della stessa varietà di dimensione 2 e di genere 2, ma su cui sono state definite due funzioni di Morse diverse:

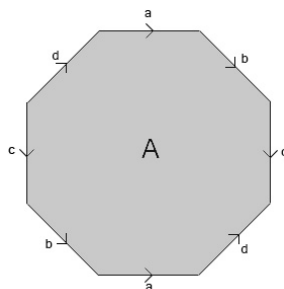
Esempio 2.13. Consideriamo la varietà M di dimensione 2, orientabile e di genere 2, che possiamo vedere come l'attaccamento di due tori:



Se su questa definiamo una funzione di Morse come la funzione altezza sul piano orizzontale passante per P_0 , è evidente che avremo:

- 1 punto critico di ordine 0 in P_0
- 4 punti critici di ordine 1 in P_1, P_2, P_3, P_4
- 1 punto critico di ordine 2 in P_5

pertanto, per il teorema 2.9, avremo che la varietà M è omologicamente equivalente ad un CW-complesso avente quattro 1-celle e una 2-cella, ovvero sarà omologicamente equivalente a:

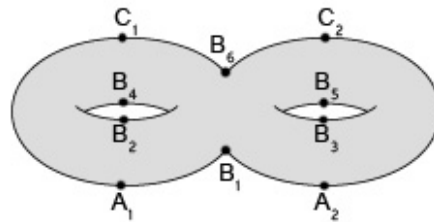


dove i lati opposti dell'ottagono sono identificati come suggerito dalle frecce, e tutti e 8 i vertici sono identificati. Qui i lati a , b , c e d sono le 1-celle e A è la 2-cella del CW-complesso che rappresenta la varietà M . L'orientazione dei lati deriva dal fatto che la varietà M è orientabile, e dunque non ci possono essere coppie di lati twistate. Inoltre per la proposizione 2.11 riusciamo anche a trovare i gruppi di omologia della varietà. Si ha infatti:

$$\begin{cases} H_0 \cong H_2 \cong \mathbb{Z} \\ H_1 \cong \mathbb{Z}^4 \\ H_i \cong 0 \quad \forall i \neq 0, 1, 2 \end{cases}$$

questo perchè per arrivare al punto di massimo assoluto di f , cioè al punto in cui l'insieme di sottolivello coincide con la varietà, dobbiamo attraversare un punto critico di indice 0, 4 di indice 1 e uno di indice 2, ed ognuno di questi aumenta di 1 il rango del gruppo di omologia di grado uguale all'indice del punto critico che attraversiamo.

Esempio 2.14. Consideriamo ora la stessa varietà M dell'esercizio precedente, ma rotata di 90° :



e consideriamo su di essa la funzione di Morse f definita come la funzione altezza sul piano orizzontale passante per i punti A_1 e A_2 .

In questo caso, la funzione f avrà 6 valori critici e 10 punti critici:

- 2 di indice 0, in A_1 e A_2
- 6 di indice 1, in B_1 , B_2 , B_3 , B_4 , B_5 , e B_6
- 2 di indice 2, in C_1 e C_2

Tagliando la varietà tra A_1 e B_1 , l'insieme di sottolivello ottenuto sarà del tipo:



che è chiaramente omotopo a due punti distinti. Pertanto i suoi gruppi di omologia saranno:

$$\begin{cases} H_0 \cong \mathbb{Z}^2 \\ H_i \cong 0 \quad \forall i \neq 0 \end{cases}$$

Si noti come questo è coerente con la proposizione 2.10, in quanto questo insieme è ottenuto attraversando due punti critici di indice 1.

Superato il punto B_1 otteniamo invece la seguente sottovarietà:



Questa è evidentemente contraibile, e dunque i suoi gruppi di omologia sono:

$$\begin{cases} H_0 \cong \mathbb{Z} \\ H_i \cong 0 \quad \forall i \neq 0 \end{cases}$$

Questo caso rientra nella parte 2 della proposizione 2.10: abbiamo infatti attraversato un punto critico di indice 1 perdendo una classe di omologia di grado 0.

Ragionando analogamente su tutti gli altri valori critici di f , otteniamo ancora una volta i gruppi di omologia di M come nell'esercizio precedente:

$$\begin{cases} H_0 \cong H_2 \cong \mathbb{Z} \\ H_1 \cong \mathbb{Z}^4 \\ H_i \cong 0 \quad \forall i \neq 0, 1, 2 \end{cases}$$

Infatti dei 10 punti critici di f , si ha che:

- I 2 punti critici di indice 0 aumentano di 2 il rango del gruppo di omologia di grado 0
- 1 punto critico di indice 1 abbassa di 1 il rango del gruppo di omologia di grado 0
- 5 punti critici di indice 1 aumentano di 5 il rango del gruppo di omologia di grado 1
- 1 punto critico di indice 2 abbassa di 1 il rango del gruppo di omologia di grado 1
- 1 punto critico di indice 2 aumenta di 1 il rango del gruppo di omologia di grado 2

Capitolo 3

Omologia di Morse-Smale-Witten e Teorema di omologia di Morse

In quest'ultimo capitolo definiremo il complesso di catene di Morse-Smale-Witten, che è costruito a partire da funzioni di Morse-Smale, ovvero funzioni che soddisfano la condizione di trasversalità. Per farlo, dovremo prima definire i concetti di varietà stabili ed instabili associate ad un punto critico, e quello di orientazione di queste varietà. Inoltre enunceremo e daremo una traccia di dimostrazione del teorema di omologia di Morse, che ci assicura che l'omologia definita da questo complesso di catene è equivalente all'omologia singolare.

3.1 Premesse

Forniamo innanzitutto le definizioni di varietà stabili e instabili, di condizione di trasversalità e di funzione di Morse-Smale.

Definizione 3.1. Sia $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione a valori reali sulla varietà differenziabile M di dimensione $n < +\infty$, e sia $p \in M$ punto critico non degenere di f . Sia poi φ_t il gruppo 1-parametrico di diffeomorfismi su M generato da $-(\nabla f)$. Allora gli insiemi:

$$\begin{aligned} i) \quad W^s(p) &:= \{x \in M : \lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi_t(x) = p\} \\ ii) \quad W^u(p) &:= \{x \in M : \lim_{t \rightarrow -\infty} \varphi_t(x) = p\} \end{aligned}$$

si dicono rispettivamente varietà *stabile* ed *instabile* di p .

In particolare, se la funzione f è una funzione di Morse, abbiamo il seguente teorema che ci fornisce un'importante proprietà delle varietà stabili e instabili dei punti critici di f :

Teorema 3.2. Sia $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione di Morse sulla varietà differenziabile M compatta e di dimensione $n < +\infty$, e sia $p \in M$ punto critico di f di indice λ . Allora lo spazio tangente a M in p si spezza come

$$T_p M = T_p^s M \oplus T_p^u M$$

con $T_p^s M$ spazio su cui \mathcal{H}_f è definito positivo, e $T_p^u M$ spazio su cui \mathcal{H}_f è definito negativo.

Si ha inoltre che esistono due funzioni C^∞ e suriettive

$$E^s : T_p^s M \rightarrow W^s(p) \subseteq M$$

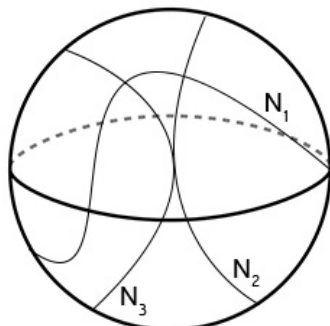
$$E^u : T_p^u M \rightarrow W^u(p) \subseteq M$$

Pertanto $W^s(p)$ è diffeomorfa a un disco aperto di dimensione $n - \lambda$, e $W^u(p)$ è diffeomorfa a un disco aperto di dimensione λ .

Definizione 3.3. Sia M una varietà differenziabile, e siano N_1 e N_2 due sue sottovarietà. Si dice che N_1 interseca trasversalmente N_2 (e si indica $N_1 \pitchfork N_2$) se:

$$\forall x \in N_1 \cap N_2, T_x M = T_x N_1 \oplus T_x N_2$$

Esempio 3.4. Per visualizzare la nozione di trasversalità, consideriamo la varietà S^2 e le 3 sue sottovarietà illustrate nella figura seguente:



Di queste, N_1 interseca le altre trasversalmente, mentre N_2 ed N_3 non si intersecano trasversalmente.

Definizione 3.5. Sia $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione di Morse sulla varietà differenziabile M di dimensione $n < +\infty$. Si dice che f soddisfa la condizione di trasversalità di Morse-Smale se:

$$\forall q, p \text{ punti critici di } f, W^u(q) \pitchfork W^s(p)$$

Una funzione che soddisfa la condizione di trasversalità di Morse-Smale si dice **funzione di Morse-Smale**.

3.2 Complesso di catene di Morse-Smale-Witten

Definiamo in questa sezione il complesso di catene di Morse-Smale-Witten, grazie al quale arriveremo a definire un altro tipo di omologia sulle varietà differenziabili e compatte che risulterà essere equivalente all'omologia classica.

Definizione 3.6. Sia M una varietà differenziabile e compatta di dimensione $n < +\infty$, e sia $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione di Morse-Smale. Siano poi p e q punti critici di f di indice rispettivamente λ_p e λ_q . Indichiamo con $W(q, p)$ l'intersezione $W^u(q) \cap W^s(p)$. Questa risulterà essere vuota oppure una sottovarietà di M di dimensione $\lambda_q - \lambda_p$. Nel secondo caso, scriveremo $q \succeq p$.

Indichiamo inoltre con $Cr(f)$ l'insieme dei punti critici di f , e con $Cr_k(f)$ l'insieme dei punti critici di f di indice k .

Osservazione 3.7. Possiamo fornire un'orientazione per le varietà stabili ed instabili di un punto critico p definendo una base sullo spazio tangente alla varietà instabile di p .

Infatti, scelta \mathcal{B}_p^u base di $T_p^u M = T_p W^u(p)$, questa ci fornisce un'orientazione di $T_p W^u(p)$, e di conseguenza anche di $T_p^s M = T_p W^s(p)$ dal momento che per il

teorema 3.2 $T_p M = T_p^s M \oplus T_p^u M$, e dunque le sottovarietà $W^u(p)$ e $W^s(p)$ devono avere orientazioni compatibili con l'orientazione di M in p .

Queste determinano anche orientazioni per $T_v T_p^s M \approx T_p^s M \forall v \in T_p^s M$: abbiamo dunque un'orientazione su $T_x W^u(p) \forall x \in W^u(p)$ determinata dalla proiezione $E^u : T_p^u M \rightarrow W^u(p)$ definita nel teorema 3.2.

Analogamente, abbiamo un'orientazione su $T_x W^s(p) \forall x \in W^s(p)$ determinata dalla proiezione $E^s : T_p^s M \rightarrow W^s(p)$.

Vogliamo adesso arrivare alla definizione dell'operatore di bordo di Morse-Smale-Witten, per la quale dovremo trovare una relazione tra due punti critici con indici consecutivi. Consideriamo dunque due punti critici $p \in Cr_{k-1}(f)$ e $q \in Cr_k(f)$, e supponiamo $q \succeq p$. Sia $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow M$ un flusso di gradiente da q a p , ovvero una curva in M tale che:

$$\frac{d}{dt}\gamma(t) = -(\nabla f)(\gamma(t)), \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} \gamma(t) = q, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \gamma(t) = p$$

Si noti che questa per definizione interseca perpendicolarmente gli insiemi di livello $f^{-1}(c)$.

Ora, $\forall x \in \gamma(\mathbb{R}) \subset W(q, p)$, scelta un'orientazione per $W^u(q)$ possiamo completare $-(\nabla f)(x)$ ad una base di $T_x W^u(q)$ orientata positivamente (sia $(-(\nabla f)(x), \mathcal{B}_x^u)$). Presa dunque una qualsiasi base \mathcal{B}_x^s di $T_x W^s(p)$ orientata positivamente, si avrà che $(\mathcal{B}_x^s, \mathcal{B}_x^u)$ è una base di $T_x M$. Se questa base è orientata positivamente, assegnamo a γ il valore $+1$, altrimenti gli assegnamo il valore -1 .

Per come abbiamo definito le orientazioni di $W^u(q)$ e $W^s(p)$, le proiezioni E^s e E^u rispettano le orientazioni, e dunque è chiaro che la definizione del valore assegnato a γ non dipende dalla scelta del punto $x \in \gamma(\mathbb{R})$.

Dal momento che $\lambda_q - \lambda_p = 1$, sappiamo che $W(q, p) \cup \{q, p\}$ è una varietà compatta di dimensione 1 (si veda la definizione 3.1), su cui agisce \mathbb{R} tramite il flusso. Pertanto l'insieme $\mathcal{M}(q, p) := W(q, p)/\mathbb{R}$ è una varietà compatta di dimensione 0, vale a dire un insieme finito di punti, e il numero dei punti che compongono $\mathcal{M}(q, p)$ è uguale al numero di flussi da q a p , ai quali abbiamo assegnato i valori $+1$ o -1 . Indichiamo con $n(q, p)$ la somma di questi valori (che risulterà ovviamente essere un numero intero).

Osservazione 3.8. Il valore assegnato al flusso γ dipende da molti fattori, ad esempio possiamo completare $-(\nabla f)(x)$ ad una base per $T_x W^u(q)$ come $(\mathcal{B}_x^u, -(\nabla f)(x))$, oppure possiamo considerare $(\mathcal{B}_x^u, \mathcal{B}_x^s)$ come base di $T_x M$. Tuttavia queste scelte cambiano soltanto il segno di $n(q, p)$.

Grazie a queste ultime considerazioni, possiamo fornire la seguente definizione:

Definizione 3.9. (Complesso di catene di Morse-Smale-Witten) Sia $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione di Morse-Smale sulla varietà differenziabile compatta M di dimensione $n < \infty$. Supponiamo di aver scelto delle orientazioni per le varietà instabili di f . Sia $C_k(f)$ il gruppo abeliano libero generato dai punti critici di indice k di f , e poniamo

$$C_*(f) := \bigoplus_{k=0}^n C_k(f)$$

Definiamo inoltre $\partial_k : C_k(f) \rightarrow C_{k-1}(f)$ come

$$\partial_k(q) = \sum_{p \in Cr_{k-1}(f)} n(q, p)p$$

Questo è detto *operatore di bordo di Morse-Smale-Witten*, e la coppia $(C_*(f), \partial_*)$ è detta *complesso di catene di Morse-Smale-Witten* associato ad f .

Proposizione 3.10. $(C_*(f), \partial_*)$ è un complesso di catene

Dimostrazione. Dobbiamo dimostrare che $\partial^2 = 0$. Risulta:

$$\partial^2(p) = \sum_{q \in Cr_{k-1}(f)} n(p, q)\partial(q) = \sum_{q \in Cr_{k-1}(f)} \sum_{r \in Cr_{k-2}(f)} n(p, q)n(q, r)r$$

Qui il coefficiente di $r \sum_q n(p, q)n(q, r)$ rappresenta i flussi di gradiente da p a r che abbiano una discontinuità in q , e si annulla perchè questi compaiono in coppie di segno opposto. \square

3.3 Teorema di Omologia di Morse

In quest'ultima sezione, enunceremo e daremo una traccia della dimostrazione del teorema di omologia di Morse, che ci dice che l'omologia definita dal complesso di catene di Morse-Smale-Witten è isomorfa all'omologia classica.

Teorema 3.11 (di omologia di Morse). La coppia $(C_*(f), \partial_*)$ è un complesso di catene, e la sua omologia è isomorfa all'omologia singolare $H_*(M, \mathbb{Z})$.

Dimostrazione. (traccia)

Abbiamo dimostrato nel capitolo 2 che se M è una varietà differenziabile compatta e $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione di Morse definita su di essa, allora M è omotopicamente equivalente ad un CW-complesso X , i cui k -scheletri $X^{(k)}$ sono ottenuti dai $(k-1)$ -scheletri tramite l'attaccamento di tante k -celle quanti sono i punti critici di f di indice λ .

L'omologia simpliciale di X a coefficienti interi è data dal complesso di catene $(C'_*(X), \partial'_*)$ dove $\forall k \in \mathbb{Z}^+$ $C'_k(X)$ è il gruppo abeliano libero generato dalle k -celle di X e l'operatore di bordo $\partial'_k : C'_k(X) \rightarrow C'_{k-1}(X)$ è dato dalla composizione di:

$$C'_k(X) \xrightarrow{\psi_k} H_k(X^{(k)}, X^{(k-1)}, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\delta_k} H_{k-1}(X^{(k-1)}, X^{(k-2)}, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\varphi_{k-1}} C'_{k-1}(X)$$

Qui δ_k è l'omomorfismo di connessione, e ψ_k e φ_{k-1} sono isomorfismi la cui esistenza è assicurata da risultati generali di topologia algebrica.

Supponiamo poi che $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ sia una funzione di Morse che soddisfa la condizione di trasversalità di Morse-Smale rispetto alla metrica Riemanniana. Per ogni $k \in \mathbb{Z}^+$ possiamo identificare $C'_k(X)$ e $C_k(f)$, in quanto sono entrambi gruppi abeliani liberi i cui generatori sono dati dai punti critici di f di indice k .

Allora se con questa identificazione riuscissimo a provare che il seguente diagramma commuta:

$$\begin{array}{cccccccc}
 \dots & \xrightarrow{\partial'_{k+2}} & C'_{k+1}(X) & \xrightarrow{\partial'_{k+1}} & C'_k(X) & \xrightarrow{\partial'_k} & C'_{k-1}(X) & \xrightarrow{\partial'_{k-1}} & \dots \\
 & & \updownarrow \cong & & \updownarrow \cong & & \updownarrow \cong & & \\
 \dots & \xrightarrow{\partial_{k+2}} & C_{k+1}(f) & \xrightarrow{\partial_{k+1}} & C_k(f) & \xrightarrow{\partial_k} & C_{k-1}(f) & \xrightarrow{\partial_{k-1}} & \dots
 \end{array}$$

avremmo dimostrato il teorema, in quanto risulterebbe:

$$H_*(C_*(f), \partial_*) \cong H_*(C'_*(f), \partial'_*) \cong H_*(X; \mathbb{Z}) \cong H_*(M, \mathbb{Z})$$

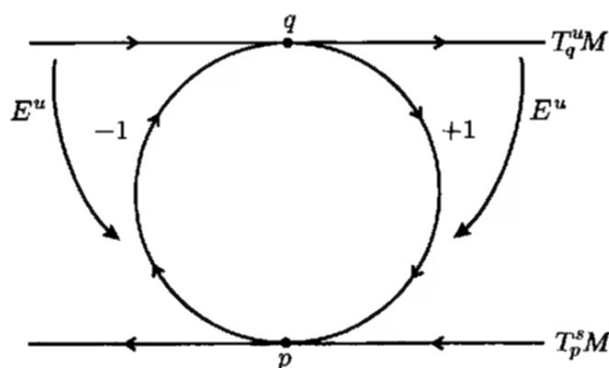
dove il primo isomorfismo viene dalla commutatività del diagramma, il secondo viene dall'equivalenza dell'omologia simpliciale e l'omologia singolare, e il terzo viene dal fatto che X e M sono omotopicamente equivalenti. Per una dimostrazione dettagliata della commutatività del diagramma, si rimanda a [4]. \square

Osservazione 3.12. L'operatore di bordo di Morse-Smale-Witten è descritto attraverso concetti geometrici: se riuscissimo a disegnare la varietà da studiare e i flussi di gradiente tra punti critici di indici successivi su di essa, è generalmente facile calcolare il valore assegnato ad un particolare flusso osservando l'orientazione scelta per la varietà, e di conseguenza calcolare l'operatore di bordo di Morse-Smale-Witten.

Una volta calcolato l'operatore di bordo, non è difficile ricavarne i gruppi di omologia di Morse-Smale-Witten, e dunque per il teorema appena dimostrato i gruppi di omologia singolare. Nella prossima sezione ne vedremo alcune applicazioni.

3.4 Esempi

Esempio 3.13. Cominciamo con un semplice esempio in dimensione 1 per capire come è fatto il complesso di catene di Morse-Smale-Witten. Consideriamo $M = S^1$ orientata in senso orario, e consideriamo su di essa la funzione altezza sul piano orizzontale passante per il punto p . Questa funzione avrà ovviamente due soli punti critici, uno di indice 0 in p e uno di indice 1 in q . Scegliamo ora per $T_q^u M$ l'orientazione da sinistra a destra. Siamo nella situazione indicata in figura:



il gradiente scorre verso il basso, dunque $-(\nabla f)(x)$ è concorde con l'orientazione di $T_x W^u(q)$ quando x è a destra di q , ed è discorde quando x è a sinistra: ne viene che $\mathcal{B}_x^u = +1$ quando x è a destra di q , e $\mathcal{B}_x^u = -1$ quando x è a sinistra.

Ora, chiaramente risulta $T_p^u M = \{0\}$. Se a questa assegniamo l'orientazione $+1$, otteniamo che l'orientazione indotta su $W^s(p)$ è compatibile con l'orientazione di M , e $(\mathcal{B}_x^s, \mathcal{B}_x^u)$ è una base orientata positivamente di $T_x M$ quando x è a destra di q , negativamente quando è a sinistra. Pertanto al flusso che va da p a q passando a destra sarà assegnato il valore $+1$, mentre a quello che passa a sinistra sarà assegnato il valore -1 . Ne viene che $n(q, p) = 0$, e di conseguenza l'operatore di bordo di Morse-Smale-Witten è identicamente nullo. In questo caso il complesso di catene di Morse-Smale-Witten sarà:

$$\begin{array}{ccccc} C_1(f) & \xrightarrow{\partial_1=0} & C_0(f) & \rightarrow & 0 \\ \downarrow \cong & & \downarrow \cong & & \\ \langle q \rangle & \xrightarrow{\partial_1=0} & \langle p \rangle & \rightarrow & 0 \end{array}$$

Ne viene:

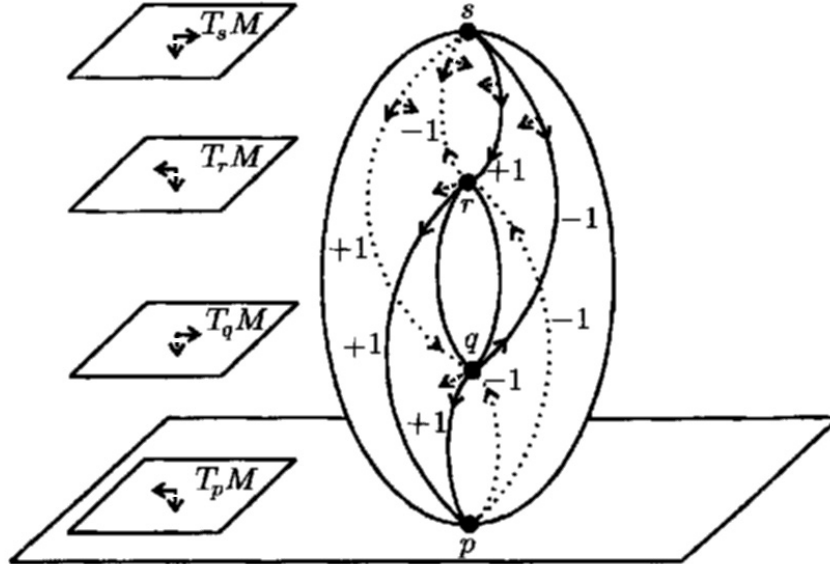
$$\begin{cases} H_1(C_*(f), \partial_*) = H_0(C_*(f), \partial_*) = \mathbb{Z} \\ H_k(C_*(f), \partial_*) = 0 \quad \forall k \neq 0, 1 \end{cases}$$

come ci si aspettava.

Esempio 3.14. Consideriamo ora $M = S^1 \times S^1$ e definamo su di essa la solita funzione di Morse-Smale come la funzione altezza sul piano orizzontale passanto

per il punto di minimo p .

Nella figura seguente, l'orientazione della varietà è data considerando la base data dalla coppia (vettore continuo, vettore tratteggiato):



La funzione f ha 4 punti critici:

$$\begin{cases} p \text{ di indice } 0 \\ q \text{ ed } r \text{ di indice } 1 \\ s \text{ di indice } 2 \end{cases}$$

Nell'immagine, i vettori tratteggiati uscenti da q ed r indicano le orientazioni scelte per $T_q^u M$ e $T_r^s M$, mentre a lato sono indicate le basi degli spazi tangenti ai punti critici perchè l'orientazione sia compatibile con quella della varietà.

Con questa scelta di orientazioni, è facile verificare che ai flussi di gradiente sono associati i valori riportati in figura. Ne segue che:

$$n(p, q) = n(p, r) = n(r, s) = n(q, s) = 0$$

Pertanto il complesso di catene di Morse-Smale-Witten è il seguente:

$$\begin{array}{ccccccc} C_2(f) & \xrightarrow{\partial_2=0} & C_1(f) & \xrightarrow{\partial_1=0} & C_0(f) & \rightarrow & 0 \\ \downarrow \cong & & \downarrow \cong & & \downarrow \cong & & \\ \langle s \rangle & \xrightarrow{\partial_2=0} & \langle q, r \rangle & \xrightarrow{\partial_1=0} & \langle p \rangle & \rightarrow & 0 \end{array}$$

e di conseguenza:

$$H_k(C_*(f), \partial_*) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{per } k = 0, 2 \\ \mathbb{Z}^2 & \text{per } k = 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

che come auspicabile coincidono con i gruppi di omologia noti del Toro.

Bibliografia

- [1] John W. Milnor: *Topology from the differential viewpoint*, The University press of Virginia, 1965.
- [2] John W. Milnor: *Morse Theory*, Princeton University press, 1963.
- [3] Dusa McDuff: *Floer Theory and low dimensional Topology*, Bulletin of the American Mathematical Society volume 43, 2005.
- [4] A. Banyaga, D. Hurtubise: *Lectures on Morse Omology*, Kluwer Academic Publisher, 2004.