

**FACOLTÀ DI INGEGNERIA**

**D.I.S.T.A.R.T.**

Dipartimento di Ingegneria delle Strutture, dei Trasporti, delle Acque,  
del Rilevamento e del Territorio

*Corso di Laurea Specialistica in Ingegneria Civile*  
**Costruzione di Strade, Ferrovie ed Aeroporti LS**

**IL CALCOLO DELLE  
SOVRASTRUTTURE STRADALI FLESSIBILI:  
L'APPROCCIO PARTICELLARE**

*Tesi di Laurea di:*

**MICHELE CAVALLARI**

*Relatore:*

*Chiar.mo Prof. Ing. GIULIO DONDI*

*Correlatori:*

*Dott. Ing. VALERIA VIGNALI*

*Dott. Ing. GIULIA MANGANELLI*

---

## ***PAROLE CHIAVE***

Conglomerato bituminoso

Modellazione numerica

Dem particellare

Particle Flow Code 3D

Prova triassiale

---

---

## **INDICE**

<b>INTRODUZIONE</b> .....	<b>1</b>
<b>1. I MODELLI MICROMECCANICI PER LO STUDIO</b>	
<b>DELLE PAVIMENTAZIONI STRADALI</b> .....	<b>5</b>
1.1. <i>Introduzione</i> .....	5
1.2. <i>I concetti di base del metodo FEM</i> .....	9
1.2.1. <i>Fasi dell'analisi FEM</i> .....	10
1.2.2. <i>La tecnica "Element joint"</i> .....	11
1.3. <i>I concetti di base del metodo BEM</i> .....	12
1.3.1. <i>Vantaggi e limiti del BEM</i> .....	15
1.4. <i>I modelli particellari ed il metodo ad elementi discreti</i> .....	16
1.4.1. <i>I modelli particellari</i> .....	16
1.4.2. <i>L'approccio agli elementi discreti</i> .....	18
1.4.3. <i>Struttura del metodo DEM</i> .....	19
1.4.4. <i>Procedura di calcolo DEM</i> .....	21
1.4.5. <i>La legge forza-spostamento</i> .....	24
1.4.6. <i>Le equazioni del moto</i> .....	28
1.4.7. <i>La legge di smorzamento</i> .....	29
1.4.8. <i>L'intervallo di tempo critico</i> .....	30
1.4.9. <i>Vantaggi e limiti del DEM</i> .....	32
1.5. <i>La forma delle particelle nei modelli ad elementi discreti</i> ...	32
1.5.1. <i>Clump e cluster</i> .....	35
<b>2. IL CODICE DI CALCOLO</b>	
<b>PARTICLE FLOW CODE (PFC)</b> .....	<b>40</b>

---

2.1.	<i>Il funzionamento qualitativo del software</i>	40
2.1.1.	La legge forza-spostamento	43
2.1.2.	La legge del moto	46
2.1.3.	Lo smorzamento	47
2.2.	<i>La creazione del modello</i>	48
2.2.1.	Modalità di generazione delle particelle	49
2.2.2.	I modelli di contatto	51
2.2.3.	Applicazione delle condizioni iniziali ed al contorno..	56
2.2.4.	L'interpretazione dei risultati	56
<b>3.</b>	<b>APPLICAZIONI DEL METODO DEM E MODELLAZIONE NUMERICA</b>	
	<b>DEL CONGLOMERATO BITUMINOSO</b>	<b>59</b>
3.1.	<i>Storia del metodo agli elementi distinti particellari</i>	59
3.2.	<i>Prove triassiali DEM e meccanismi boundary</i>	63
3.2.1.	Il meccanismo <i>Stress-controlled boundary</i>	65
3.2.2.	Il meccanismo <i>Hydrostatic boundary</i>	67
3.3.	<i>La validazione con sfere d'acciaio e Mixed boundary</i>	69
3.3.1.	Lo studio su campioni di sfere d'acciaio con disposizione regolare	69
3.3.2.	Meccanismo <i>Mixed boundary</i>	71
3.3.3.	Simulazione e validazione dell'approccio <i>Mixed boundary</i> utilizzando sfere d'acciaio	76
3.4.	<i>La modellazione numerica del conglomerato bituminoso</i>	79
3.4.1.	L'approccio particellare	83
3.4.2.	Conclusioni	93
<b>4.</b>	<b>PREPARAZIONE DEI CAMPIONI E PROVE</b>	
	<b>TRIASSIALI DI LABORATORIO</b>	<b>96</b>
4.1.	<i>Obiettivi</i>	96
4.2.	<i>Sfere d'acciaio e granulometria delle miscele dei test</i>	97
4.3.	<i>Realizzazione dei clump di sfere d'acciaio</i>	100
4.3.1.	Il prodotto utilizzato	101

---

---

4.3.2. L'incollaggio delle sfere .....	102
4.4. <i>La prova triassiale</i> .....	104
4.4.1. Il comportamento dei materiali a grana grossa .....	107
4.4.2. Caratteristiche di resistenza e circoli di Mohr .....	110
4.5. <i>Esperienze in laboratorio</i> .....	113
4.5.1. Modalità di prova .....	114
<b>5. SIMULAZIONE DELLA PROVA TRIASSIALE CON PFC3D</b> .....	<b>120</b>
5.1. <i>Premesse</i> .....	120
5.2. <i>Creazione del provino</i> .....	121
5.2.1. Generazione provino costituito da sole sfere .....	122
5.2.2. Generazione provino costituito da clump e sfere ....	125
5.3. <i>Simulazione della prova triassiale</i> .....	128
5.4. <i>Riepilogo percorso di lavoro</i> .....	132
5.4.1. La fase di calibrazione dei parametri microscopici .	132
5.4.2. L'influenza della forma dell'aggregato .....	134
<b>6. I RISULTATI DELLE PROVE</b> .....	<b>135</b>
6.1. <i>Le sfere</i> .....	135
6.1.1. Tensione deviatorica .....	135
6.1.2. Deformazione volumetrica .....	140
6.1.3. Forze di contatto .....	142
6.1.4. Circoli di Mohr .....	151
6.2. <i>I clump</i> .....	152
6.2.1. Tensione deviatorica .....	153
6.2.2. Deformazione volumetrica .....	156
6.2.3. Forze di contatto .....	158
6.2.4. Circoli di Mohr .....	161
6.3. <i>Conclusioni</i> .....	162
<b>CONCLUSIONE</b> .....	<b>167</b>

---

<b>RIFERIMENTI</b> .....	<b>i</b>
Bibliografia .....	<b>i</b>
Web-grafia .....	<b>viii</b>

## **INTRODUZIONE**

Il conglomerato bituminoso è un materiale multifase, composto da una certa quantità di vuoti e da una miscela di aggregati di varie forme e caratteristiche, legati da bitume.

Si tratta quindi di un materiale eterogeneo, il cui comportamento meccanico risulta difficilmente schematizzabile a causa della sua complessa natura, nonché dell'elevata influenza esercitata dalle condizioni ambientali come la temperatura; il conglomerato bituminoso è fortemente influenzato dalle proprietà delle fasi che lo costituiscono, in particolare dalle caratteristiche dell'aggregato, dalle proprietà del bitume, e dalle loro reciproche interazioni.

Per indagarne la risposta tenso-deformativa si utilizzano tradizionalmente metodi numerici al continuo che incorporano la natura particellare all'interno di leggi costitutive elasto-plastiche.

I metodi al continuo schematizzano il sistema come un dominio discretizzato in unità elementari, di forma geometricamente semplice le quali, pur deformandosi, rimangono costantemente in contatto reciproco attraverso le relative superfici di separazione.

A giustificare l'approccio continuo c'è da un lato il vantaggio di poter disporre di metodologie analitiche e numeriche ben consolidate, e dall'altro l'evidenza sperimentale che ne prova l'efficacia e la significatività, almeno da un punto di vista fenomenologico.

Spesso però, esso risulta riduttivo e carente: è ormai noto che i materiali granulari esplicano un comportamento meccanico nettamente diverso rispetto agli altri, questa differenza è imputabile proprio alla loro natura particellare.

Con metodi basati sulla teoria del mezzo continuo, non è possibile indagare la reale deformazione interparticellare, poiché ad ogni punto interno al corpo viene associato uno stato tensionale rappresentativo del valor medio delle forze di contatto agenti nell'area infinitesima, inferiore ai valori di picco necessari all'innesco dei fenomeni di deterioramento della pavimentazione.

Diventa, quindi, indispensabile ricorrere ad un approccio di tipo discontinuo, in grado di prendere in considerazione il carattere discreto del sistema ed analizzare i processi microscopici di base che ne determinano il comportamento tenso-deformativo macroscopico.

Il metodo agli elementi distinti (DEM), sviluppato originariamente da Cundall e Strack può costituire uno strumento molto utile. Esso discretizza un sistema utilizzando una serie di particelle circolari o sferiche che si possono spostare indipendentemente l'una dall'altra e che interagiscono solamente per mezzo dei punti di contatto. La procedura di analisi si suddivide in tre passaggi fondamentali:

- la valutazione delle forze interne;
- l'integrazione delle equazioni del moto per la valutazione degli spostamenti;
- l'identificazione dei nuovi punti di contatto.

Sebbene le analisi DEM siano state ormai comunemente utilizzate per riprodurre il comportamento dei materiali granulari, ci sono ancora un ridotto numero di studi che lo utilizzano come approccio innovativo alla simulazione delle miscele di conglomerato bituminoso.

Le modellazioni DEM permetteranno di studiare gli effetti dell'anisotropia sulla risposta deformativa dei materiali, dipendente dall'assortimento granulometrico degli aggregati e dalla forma dei singoli grani.

Sarà inoltre possibile indagare la reale perturbazione indotta all'interno della pavimentazione dalle sollecitazioni esterne, rappresentata da forze di contatto e spostamenti interparticellari.

L'introduzione di parametri quali la forma e le dimensioni dei grani dell'aggregato permette non solo di ottenere un modello più rispondente alla realtà fisica, ma anche di approfondire il comportamento a fatica del sistema individuando nuovi punti in corrispondenza dei quali possono innescarsi le fratture.

Il nostro lavoro si inserisce nell'ambito del programma di ricerca PRIN, che si occupa dell'approfondimento delle tecniche numeriche per la simulazione delle pavimentazioni perpetue, che interessa il dipartimento dal 2007.

L'attività di ricerca svolta dall'Unità Operativa di Bologna riguarda lo studio avanzato del comportamento a fatica delle pavimentazioni bituminose in esercizio, al fine di ottenere nuovi criteri di progettazione e di verifica di sovrastrutture nuove od esistenti e nuove tipologie di sovrastrutture a lunga durata. Allo scopo verranno utilizzate tecniche numeriche avanzate, basate sull'utilizzo di metodi di calcolo agli elementi distinti particellari.

Nella presente tesi, ci si propone di approfondire gli studi su questo moderno metodo; dopo una prima ricerca bibliografica per meglio comprendere le basi teoriche e lo stato dell'arte, il lavoro si occupa di ricerca attiva, che comprende esperienze di laboratorio e simulazione al software, in particolare, abbiamo lavorato con la prova triassiale.

Il materiale granulare impiegato nei test è una miscela "ideale" di sfere di acciaio: in questo modo è possibile ottenere, grazie ai risultati di laboratorio, un'accurata base per la calibrazione dei parametri microscopici e per la validazione dei risultati ottenuti al computer.

Dalle sfere si è poi passati ai *clump*, costituiti da gruppi di sfere saldate, per approfondire l'influenza della forma dell'aggregato.

Il software utilizzato è il Particle Flow Code in Three Dimensions<sup>®</sup>, dell'Itasca Consulting Group.

Il primo capitolo è un'introduzione alla modellazione numerica, con particolare approfondimento per i modelli micromeccanici, tra cui il metodo ad elementi distinti particellari, che verrà ampiamente trattato, anche per quanto riguarda la forma delle particelle.

Il capitolo seguente amplierà ulteriormente la teoria dell'approccio particellare, focalizzando l'attenzione sul funzionamento del Particle Flow Code, software utilizzato nelle nostre simulazioni.

Dopo la trattazione a livello teorico, nel capitolo tre si passa alle principali applicazioni, riportando sperimentazioni reperibili in bibliografia. Verranno descritti gli studi più interessanti riferiti al conglomerato bituminoso, ed i più recenti sviluppi riguardo la simulazione della prova triassiale.

Dal capitolo quattro si abbandona la parte teorica a favore della pratica; si riporta la descrizione delle esperienze di laboratorio, che riguardano la prova triassiale. Sono state descritte le procedure, in particolare la preparazione dei campioni, soprattutto quello che riguarda la tecnica di costruzione dei *clump*, che si può ritenere una novità.

Terminata la parte sperimentale di laboratorio, nel capitolo cinque si passa a quella di simulazione al computer, spiegando le principali regole ed il percorso di lavoro al software PFC 3D.

Infine, nel capitolo sei verranno presentati e discussi i risultati ottenuti in laboratorio ed al software, mettendoli a confronto in modo critico.

## **CAPITOLO 1**

# ***I MODELLI MICROMECCANICI PER LO STUDIO DELLE PAVIMENTAZIONI STRADALI***

### **1.1. Introduzione**

Le scoperte di Newton e Leibnitz nella seconda metà del XVII secolo fornirono diretti stimoli per lo sviluppo della meccanica del continuo e della teoria dell'elasticità, focalizzando l'attenzione sul tentativo di definire il comportamento macroscopico dei materiali attraverso l'integrazione delle interazioni a scala molecolare. Tuttavia, già all'epoca nascevano i primi dubbi sull'applicabilità delle ipotesi di materiale continuo, che richiede alla materia di non avere una struttura discreta a livello molecolare (Degiovanni, 2009).

L'approccio tradizionale alla modellazione numerica consiste, infatti, in uno studio macroscopico della risposta meccanica, attraverso modelli costitutivi basati sul continuo, come ad esempio i metodi FEM (*Finite Element Method*) e BEM (*Boundary Element Method*), che, per la loro concezione, non tengono conto della natura eterogenea del materiale. Nel metodo FEM il dominio di studio è discretizzato in tanti sottodomini di forma elementare (elementi). Gli elementi finiti possono avere diverse forme in modo da essere convenientemente adattati al dominio di studio; di solito sono triangoli o quadrilateri in due dimensioni e tetraedri o parallelepipedi in tre dimensioni (Reddy, 1997).

Tale procedura di discretizzazione agli elementi finiti permette di ridurre il problema da un numero infinito di incognite ad un problema con un numero finito di incognite, suddividendo, appunto, il dominio in elementi finiti ed esprimendo il campo incognito in termini di funzioni approssimanti (funzioni di forma).

Tali funzioni vengono individuate mediante i valori che la variabile dipendente assume in punti specifici detti nodi, posti di solito sul contorno degli elementi, in punti comuni a due o più di essi. In questo modo i valori della variabile di campo e i valori delle sue derivate parziali rappresentano le incognite nodali. Spesso si scelgono dei polinomi come funzioni di interpolazione, essendo semplici da derivare e integrare. Il grado del polinomio scelto dipende dal numero dei nodi assegnati all'elemento e dal numero di incognite. Grazie a queste si è in grado di scrivere un funzionale per ciascun elemento in forma matriciale e, combinandole opportunamente, un funzionale per l'intero dominio di definizione. Le procedure di assemblaggio si basano sul fatto che, in un nodo comune a più elementi, il valore della variabile di campo è il medesimo per ogni elemento che condivide quel nodo. Per risolvere il problema si deve allora minimizzare il funzionale rendendolo stazionario rispetto alle variazioni delle incognite nodali. Si riduce così il sistema risolvibile globale ad un sistema di equazioni algebriche a coefficienti costanti risolvibili con degli opportuni algoritmi iterativi (Caridi e Praticò, 2003).

Per quanto riguarda il BEM, l'approccio richiede invece la discretizzazione del dominio della soluzione solo ai bordi, riducendo così le dimensioni del problema e semplificando i dati richiesti in ingresso. Si basa sulla risoluzione di un'equazione integrale definita sul contorno invece che sulla risoluzione diretta delle PDEs come nel FEM. A parità di livello di discretizzazione tale metodo comporta una maggiore precisione rispetto a questi ultimi (Jing, 2003).

Il materiale granulare si presta più naturalmente ad essere descritto come un aggregato di particelle elementari piuttosto che come un mezzo continuo (Gabrieli, 2009).

In ambito geotecnico e stradale si osserva che il comportamento meccanico dei materiali utilizzati è spesso fortemente influenzato dalla mutua interazione tra le fasi eterogenee che lo costituiscono (Kim et al., 2006 - Collop et al., 2004).

Infatti diverse esperienze evidenziano la sostanziale influenza dell'orientamento e della distribuzione interna degli aggregati sulle proprietà volumetriche e meccaniche del materiale compattato.

Tuttavia l'approccio continuo è diffusamente e validamente usato nel campo dei problemi quasi-statici, con deformazioni contenute, e più in generale ogni qual volta gli sforzi di taglio non siano eccessivamente elevati e non provochino la "rottura localizzata" del materiale.

Oltre questo limite, pur considerando modelli costitutivi più elaborati, i metodi agli elementi finiti che implementano l'approccio continuo soffrono di alcuni problemi così riassumibili:

- la difficoltà di simulare la perdita di resistenza e rigidità del materiale dovuta a fratturazione e danneggiamento (in generale alla perdita di continuità del materiale);
- la dipendenza della risposta meccanica dalle dimensioni della mesh iniziale per alcuni tipi di problemi come nella formazione delle bande di taglio (shear band) (Ortiz et al. 1987);
- la difficoltà di raggiungere convergenza per alte tensioni e per problemi non confinati;
- la difficoltà a simulare grandi deformazioni.

Allo stato attuale esistono formulazioni continue dei materiali granulari che risolvono alcune di queste problematiche, comunque per superare queste difficoltà risulta più opportuno fare riferimento ad un codice di calcolo che consideri il carattere discreto dei materiali in esame, rappresentando il materiale stesso come una struttura particellare paragonabile a quella reale. È questo l'approccio dei codici DEM (Distinct Element Method), che analizzano il materiale, identificato come un insieme di elementi discontinui, partendo dalla sua struttura microscopica (Degiovanni, 2009).

Le principali differenze tra i codici al continuo (FEM, BEM) e quelli discreti (DEM) sono evidenti già da una semplice analisi dei dati di input e di output.

Nei metodi al continuo il materiale viene definito in termini di modulo elastico e coefficiente di Poisson, caratteristiche macroscopiche del materiale oggetto di studio. Nei metodi discreti, invece, l'utente definisce l'esatta curva granulometrica del materiale, o comunque un determinato assortimento granulometrico che tenga conto della natura eterogenea dello stesso, nonché i modelli di contatto microscopici che regolano il comportamento del sistema.

Analogamente, i risultati forniti da un codice FEM sono costituiti dai valori medi delle tensioni e delle deformazioni del materiale, mentre nei codici DEM si abbandona il concetto generale di tensione per ragionare su valori di picco di spostamenti e forze di contatto tra le particelle, che danno origine al comportamento macroscopico del materiale (Dondi et al., 2008).

La scelta tra gli due approcci è inoltre in gran parte influenzata dalla scala di osservazione del fenomeno simulato, come schematizzato in figura 1.1 (Kim et al., 2006). Il grafico mostra i range di applicazione delle diverse tecniche di analisi numerica, evidenziando che, in presenza di fenomeni localizzati, quali le fessure, non è opportuno trattare il materiale come continuo.

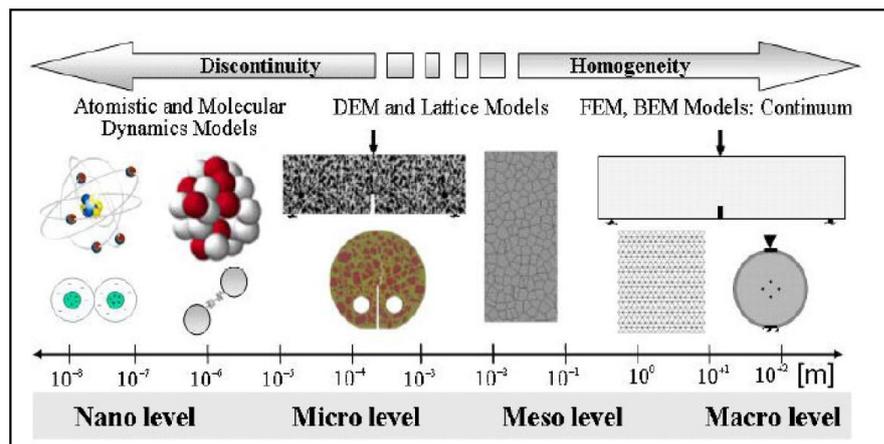


FIGURA 1.1: SCALA DI OSSERVAZIONE E TECNICHE DI MODELLAZIONE (KIM ET AL., 2006)

Nei modelli DEM, il solido è rappresentato come un insieme di particelle, in cui è consentito il distacco dei legami, se questi sono inizialmente presenti, e il ricongiungimento di due superfici separate; due sono, infatti, le ipotesi fondamentali che caratterizzano un metodo DEM (Cundall e Hart, 1992):

- il modello consente spostamenti e rotazioni finite di corpi discreti, incluso un completo distacco delle particelle;
- il modello riconosce i nuovi contatti automaticamente, via via che il calcolo procede.

Aspetto peculiare del codice DEM è dunque la capacità di rappresentare diversi aspetti della realtà basandosi su leggi costitutive elementari e un numero limitato di parametri intrinseci del materiale: il comportamento macroscopico del materiale viene infatti definito attraverso due semplici leggi iterate ripetutamente, ovvero la legge del moto di Newton applicata alle particelle e la legge forza/spostamento applicata ai contatti.

Concludendo, la realizzazione di modelli di conglomerato bituminoso e di altri materiali a matrice granulare secondo un approccio tradizionale di tipo macroscopico è insufficiente, soprattutto se si vuole investigare il comportamento microscopico della struttura del materiale durante una prova di tipo statico o dinamico.

Mediante una modellazione ad elementi distinti particellari è quindi possibile considerare il carattere discreto attraverso un approccio di tipo microscopico, così da comprendere i processi fisici di base che ne determinano la risposta tenso-deformativa macroscopica.

### **1.2. I concetti di base del metodo FEM**

Il Metodo degli Elementi Finiti è un metodo al continuo, proposto per la prima volta da Clough nel 1960, ed è uno dei procedimenti numerici più popolari nelle scienze ingegneristiche.

Il concetto di base su cui si fonda è la schematizzazione di una struttura continua come un insieme di regioni di volume finito e forma semplice, che non si compenetrano, connesse tra loro in un numero finito di punti detti nodi.

Si ipotizza inoltre che gli spostamenti di un punto interno ad un elemento siano funzioni degli spostamenti nodali tramite opportune funzioni del punto dette funzioni di spostamento (Brauer, 1988).

Il problema elastico del continuo considerato, la cui esatta formulazione conduce a sistemi di equazioni differenziali alle derivate parziali definiti da opportune condizioni al contorno, viene così discretizzato e ricondotto in via approssimata alla soluzione di un sistema di equazioni lineari (Cesari, 2002).

### 1.2.1. Fasi dell'analisi FEM

Per compiere un'analisi FEM sono necessari tre passaggi fondamentali. Il primo riguarda la *discretizzazione del dominio*: consiste nella suddivisione del dominio in un numero finito di elementi tra loro contigui, di forma regolare, definiti da un numero fissato di nodi. Si passa poi all'*approssimazione locale*: si ipotizza che la funzione incognita  $u_i^e$  (ad esempio lo spostamento) possa essere approssimata per ciascun elemento mediante una funzione nodale  $u_i^j$  che, dovendo soddisfare le PDEs, assume la forma (Cesari, 2002):

$$u_i^e = \sum_{j=1}^M N_{ij} \cdot u_i^j \quad (1.1)$$

dove i termini  $N_{ij}$  sono chiamate funzioni forma (o funzioni di interpolazione) ed  $M$  è il numero degli elementi. In questo modo è possibile legare gli spostamenti generici dentro all'elemento a quelli nodali.

Le funzioni di forma hanno un ruolo importante poiché rappresentano il polinomio che approssima il valore esatto degli spostamenti e quindi determinano la convergenza del metodo.

L'ultima delle tre fasi è *l'assemblaggio e la soluzione dell'equazione matriciale globale*: usando le funzioni forma, le PDEs "originali" del problema sono sostituite da un sistema di equazioni algebriche che assumono la seguente forma (Cesari, 2002):

$$\sum_{i=1}^N [K_{ij}^e] \cdot \{u_i^e\} = \sum_{i=1}^N (f_i^e) \quad (1.2)$$

dove  $[K_{ij}^e]$  è la matrice di rigidità;  $\{u_j^e\}$  è il vettore dei valori nodali della variabile incognita, ad esempio lo spostamento;  $\{f_i^e\}$  è il vettore che contiene le forze interne all'elemento, che tiene conto delle condizioni iniziali e di quelle al contorno.

### 1.2.2. La tecnica "Element joint"

Lo svantaggio principale di questa tecnica numerica rimane la scarsa capacità di rappresentare il comportamento tenso-deformativo di sistemi soggetti a rottura in quanto, essendo un metodo al continuo, non ammette la separazione reciproca tra gli elementi infinitesimi.

A tal proposito Goodman (1968), assumendo che le tensioni di contatto ed i relativi spostamenti lungo le fratture di spessore teorico nullo seguissero una relazione lineare con le rigidità normale e tangenziale, propose un *element joint* che potesse essere direttamente incorporato in un processo FEM con un'equazione di equilibrio globale data da (figura 1.2):

$$k^G \cdot u^G = f^G \quad (1.3)$$

dove  $k^G$  è una matrice simmetrica i cui elementi sono definiti rispettivamente dalla rigidità normale e tangenziale, dalla lunghezza dell'elemento e dal suo orientamento rispetto al sistema di riferimento globale. Il vettore  $u^G$  è il vettore degli spostamenti nodali dei quattro nodi (i, j, k, l) che lo definiscono.

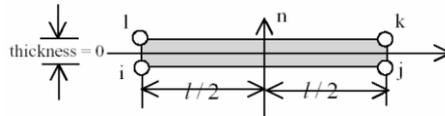


FIGURA 1.2: ELEMENT JOINT SECONDO GOODMAN

Per consentire il completo distacco dell'*element joint* da quelli adiacenti, caratteristica non ammessa nella formulazione di Goodman, Zienkiewicz (1970) propose una nuova tipologia di element joint a sei nodi, due dei quali aggiuntivi nella sezione di mezzeria (figura 1.3).

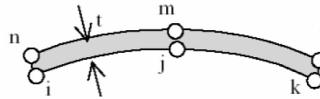


FIGURA 1.3: ELEMENT JOINT SECONDO ZIENKIEWICZ

Nel 1973 Ghaboussi presentò inoltre un nuovo *element joint*, di spessore finito ( $t$ ), basato sulla teoria della plasticità, ricorrendo agli spostamenti relativi tra le due facce opposte di una frattura come sistemi incogniti indipendenti (figura 1.4).

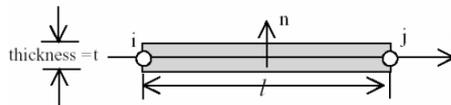


FIGURA 1.4: ELEMENT JOINT SECONDO GHABOUSSI

Nonostante questi miglioramenti, lo studio delle fratture e dei loro meccanismi di propagazione resta ancor oggi il fattore maggiormente limitativo nell'applicazione del FEM allo studio della meccanica dei domini analizzati.

### **1.3. I concetti di base del metodo BEM**

Al contrario del FEM, il Metodo degli Elementi di Contorno adotta una discretizzazione non su tutto il dominio ma solo sul contorno e ne determina una soluzione attraverso un'equazione integrale basata sui teoremi di Betti e di Somigliana.

Per un dominio  $\Omega$  con confine  $\Gamma$  avente versore normale uscente  $n_i$  e con forza applicata costante  $f_i$  l'equazione diventa:

$$c_{ij} \cdot u_j + \int_{\Gamma} t_{ij}^* \cdot u_j \cdot d\Gamma = \int_{\Gamma} u_{ij}^* \cdot t_j \cdot d\Gamma + \int_{\Gamma} \frac{\partial u_{ij}^*}{\partial n} \cdot f_j \cdot d\Gamma \quad (1.4)$$

dove  $u_j$  e  $t_j$  sono i vettori spostamento sul contorno  $\Gamma$ , i termini  $u_{ij}^*$  e  $t_{ij}^*$  sono chiamati nuclei spostamento e  $c_{ij}$  è detto termine libero, determinato dalla geometria locale della superficie di confine ( $c_{ij} = 1$  quando il punto è interno al dominio).

La risoluzione dell'equazione sopra descritta richiede i seguenti passi. Innanzitutto bisogna discretizzare il confine  $\Gamma$  con un numero finito di elementi di contorno: nei problemi 2D gli elementi sono segmenti di linea, che possono avere un nodo al centro dell'elemento (elemento costante), due nodi ai due estremi (elemento lineare) o tre nodi di cui due di estremità ed uno centrale (elemento quadratico). Definito con  $N$  il numero totale degli elementi di bordo si può scrivere:

$$c_{ij} \cdot u_j + \sum_{k=1}^N \int_{\Gamma} t_{ij}^* \cdot u_j \cdot d\Gamma = \sum_{k=1}^N \int_{\Gamma} u_{ij}^* \cdot t_j \cdot d\Gamma + \sum_{k=1}^N \int_{\Gamma} \frac{\partial u_{ij}^*}{\partial n} \cdot f_j \cdot d\Gamma \quad (1.5)$$

Si passa poi all'approssimazione delle funzioni in prossimità degli elementi di bordo mediante funzioni di forma  $(N_k)$ , in modo simile a ciò che accade nel FEM. Le funzioni spostamento per i vari elementi sono espresse come la somma dei valori nodali:

$$u_i = \sum_{k=1}^m N_k u_i^k \quad (1.6)$$

$$t_i = \sum_{k=1}^m N_k t_i^k \quad (1.7)$$

dove  $m$  è l'ordine dell'elemento (1, 2 o 3 per i problemi 2D) ed  $u_i^k$  e  $t_i^k$  sono i valori degli spostamenti nodali nel nodo  $k$ .

Ponendo:

$$T_{ij} = \int_{\Gamma} t_{ij}^* \cdot N_j \cdot d\Gamma \quad (1.8)$$

$$U_{ij} = \int_{\Gamma} u_{ij}^* \cdot N_j \cdot d\Gamma \quad (1.9)$$

$$B_i = \int_{\Gamma} \frac{\partial u_{ij}^*}{\partial n} \cdot f_j \cdot d\Gamma \quad (1.10)$$

L'equazione (1.4) può essere scritta in forma matriciale come:

$$[T_{ij}(l,k)] \{u_j(k)\} = [U_{ij}(l,k)] \{t_j(k)\} + \{B_i(k)\} \quad (1.11)$$

dove  $i, j = 1, 2$  per i problemi 2D e 1, 2, 3 per i problemi 3D;

$l, k = 1, 2, \dots, N$ ;

$$T_{ij}(l,k) = c_{ij} \cdot \delta_{l,k} + \int_{\Gamma} t_{ij}^* \cdot N_j \cdot d\Gamma \quad (1.12)$$

Si passa poi alla valutazione degli integrali  $T_{ij}$ ,  $U_{ij}$  e  $B_i$  ed all'imposizione delle condizioni al contorno ottenendo come forma finale della (1.11) l'equazione:

$$[A]\{x\} = \{b\} \quad (1.13)$$

Dove la matrice globale  $[A]$  deriva da  $T_{ij}$  ed  $U_{ij}$ , il vettore incognito  $\{x\}$  è costituito dagli spostamenti incogniti ed il vettore noto  $\{b\}$  è la somma del vettore delle forze agenti sul corpo  $\{B_i\}$  e dei prodotti di  $T_{ij}$  con gli spostamenti noti. L'equazione risultante, a differenza delle matrici sparse e simmetriche tipiche del FEM, è solitamente asimmetrica e fornisce i valori degli spostamenti incogniti nei nodi.

La fase finale consiste nella valutazione degli spostamenti e delle tensioni all'interno del dominio in funzione di quelli nodali noti.

### 1.3.1. Vantaggi e limiti del BEM

Il Metodo degli Elementi al Contorno comporta generalmente una riduzione della dimensione del modello computazionale rispetto al FEM, in quanto richiede una discretizzazione solo sul contorno del dominio. Grazie alla sua formulazione integrale diretta, a parità di livello di discretizzazione, il BEM fornisce una precisione dei risultati maggiore rispetto a quella ottenuta con tecniche FEM.

In generale, però, il BEM non è efficiente come il FEM nel tener conto dell'eterogeneità dei materiali, perché non è caratterizzato da tanti sottodomini quanti sono gli elementi infinitesimi del FEM. Inoltre non è funzionale quanto quest'ultimo nel simulare il comportamento non lineare dei materiali, motivo per cui è più adatto ad analizzare corpi elastici, lineari ed omogenei (Jing, 2003).

Anche il BEM manifesta qualche difficoltà nel simulare il comportamento tenso-deformativo di un sistema dotato di discontinuità. Per superare questa difficoltà, sono state proposte diverse tecniche. La prima, presentata da Blandford nel 1981, consiste nel dividere il dominio in sottodomini multipli con fratture lungo le interfacce ottenendo così diverse matrici di rigidezza nei vari sottodomini (figura 1.5.a).

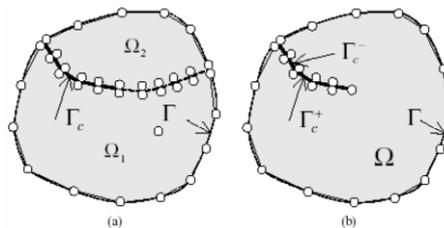


FIGURA 1.5: ANALISI DELLE DISCONTINUITÀ NEL BEM

Tale tecnica richiede però la conoscenza del percorso compiuto dalla frattura e del suo gradiente di crescita e si applica con difficoltà a quei problemi che non presentano condizioni di simmetria geometrica. È inoltre possibile utilizzare il *Dual Boundary Element Method* (DBEM), proposto da Portela nel 1993, il quale consiste nell'applicare separatamente l'equazione iniziale agli elementi che costituiscono le due facce opposte della frattura (figura 1.5.b).

## **1.4. I modelli particellari ed il metodo ad elementi discreti**

### **1.4.1. I modelli particellari**

Sempre più frequentemente si stanno diffondendo in diverse branche della scienza numerosi modelli di tipo particellare. È possibile classificare i metodi particellari a seconda della legge fisica di conservazione che implementano, dell'approccio numerico utilizzato per risolverla, della variabile "indipendente" che viene discretizzata (il tempo, lo spazio, l'evento di collisione), del tipo di algoritmo che ricerca le particelle vicine (Gabrieli, 2009).

La prima categoria di modelli utilizza i metodi agli elementi discreti (DEM) (Cundall e Strack, 1979). Essi nascono sulla scorta delle prime simulazioni atomistiche di dinamica molecolare (MD) elaborate dalla fine degli anni '50 e i primi anni '60 per applicazioni fisico-atomistiche.

Pur trovando applicazione in campi della scienza completamente differenti, queste due tecniche di simulazione particellare non sono molto diverse tra loro: le accomuna, infatti, un medesimo nucleo centrale costituito dall'algoritmo di integrazione delle equazioni del moto. I metodi agli elementi discreti sono tra i più conosciuti metodi particellari in campo geomeccanico. Essi riproducono gli spostamenti delle singole particelle (posizioni e velocità) a partire dal calcolo delle forze di contatto.

In maniera analoga i metodi di dinamica molecolare determinano le posizioni e le velocità delle particelle senza che vi sia un contatto tra queste ma a partire dalla conoscenza del potenziale interatomico tra le coppie (le triplette, ecc.) di atomi.

Una seconda categoria di modelli (*Event Driven*, *Contact Dynamic* e *Monte Carlo*) sfrutta invece le leggi di conservazione della quantità di moto simulando gli urti elastici ed anelastici tra le particelle. Questi possono essere riprodotti in maniera deterministica (si parla allora di modelli *Event Driven*), o in maniera stocastica (teorie cinetiche con i metodi di *Monte Carlo*).

Tra i metodi che implementano un approccio deterministico, molto usato nel campo dei materiali granulari è il metodo *Contact Dynamic* (CD) che, a differenza dei metodi ad elementi discreti, implementa una legge di contatto con particelle infinitamente rigide (*condizione di Signorini*), non sovrapponibili (*non-smooth method*) e con dei coefficienti di restituzione (fondamentali per caratterizzare i flussi di granulari e invece ininfluenti per problemi quasi-statici) che determinano la dissipazione di energia che avviene con gli urti. Il vantaggio dell'utilizzo di questi metodi, rispetto ai DEM, sta nella soluzione implicita di ogni singolo urto e quindi nella possibilità di utilizzare passi temporali molto grandi e di ridurre di conseguenza i tempi di calcolo.

Una terza categoria di modelli sfrutta i metodi stocastici tipo *Random Walk* e trova applicazione quasi esclusivamente nello studio dei gas e dei liquidi, cioè per materiali che hanno caratteristiche di isotropia a tutte le scale di indagine (dalla particella in su) e per i quali la densità ha distribuzione sufficientemente regolare.

Un quarta categoria è quella dei metodi reticolari come il *Lattice Boltzmann method* (Frisch et al., 1986). Questi metodi sono nati come evoluzione dei modelli *Gas Automata* (*Cellular Automata* o *Lattice Gas Automata*) utilizzati per lo studio dei gas. Il dominio spaziale viene discretizzato ed assieme ad esso anche il tempo e le velocità. Il dominio assume una struttura reticolare (*Lattice*) fissa e regolare sulla quale possono transitare alcune particelle virtuali che sono state preventivamente immesse. Sfruttando una opportuna legge di collisione tra le particelle che ad esempio conservi la quantità di moto e rispetti la condizione di continuità è possibile determinare il campo di velocità, la densità e risolvere problemi di Navier-Stokes per i fluidi anche su domini molto complessi (Rothman, 1988; Spaid e Phelan, 1997).

Nel seguito ci concentreremo sulla prima categoria di modelli ed in particolare sui metodi agli elementi discreti (DEM).

### **1.4.2. L'approccio agli elementi discreti**

Inizialmente i modelli agli elementi discreti (DEM) sono stati sviluppati per studiare problemi di meccanica delle rocce (Cundall e Strack, 1979) ma erano già conosciuti in fisica atomistica sotto il nome di Dinamica Molecolare (MD). Attualmente questa categoria di modelli è impiegata per lo studio delle particelle in una moltitudine di settori fisico scientifici: da quelli che analizzano fenomeni alla scala delle molecole a quelli alla scala dei granelli di sabbia, delle placche tettoniche e delle galassie.

Nel campo della geotecnica, della geofisica e dell'ingegneria mineraria le particelle sono rappresentate da singoli grani di terreno, blocchi di roccia o grandi placche tettoniche.

In letteratura troviamo, per questi modelli, applicazioni industriali che includono flussi da tramogge, o da silos (Langston et al., 1995, 2004 - Hirshfeld et al., 1997), miscelamento e vagliatura in rulli rotanti (Cleary e Hoyer, 2000 - Bertrand et al., 2005), dragaggio ed escavazione (Labra et al., 2008), letti fluidi (Kawaguchi et al., 1992 - Tsuji et al., 1993), convogliamento e trasporto pneumatico delle particelle (Lim et al., 2006).

Applicazioni all'ambiente e alla difesa del territorio, illustrate e discusse da Richards et al. (2004), includono le frane (Campbell et al., 1995), lo sviluppo dei ghiacci (Hopkins e Shen, 2001), l'evoluzione tettonica delle faglie e delle pieghe (Morgan e Boettcher, 1999) e i meccanismi di trasporto e di sedimentazione (Schmeeckle e Nelson, 2003 - Calantoni et al., 2004).

Questo fiorire di applicazioni DEM è stato possibile grazie a nuovi e più mirati algoritmi di calcolo oltre che allo sviluppo di risorse hardware sempre più veloci e capienti.

### 1.4.3. Struttura del metodo DEM

I modelli agli elementi discreti risolvono in maniera esplicita il moto di ciascuna particella del sistema a partire dalla determinazione delle forze agenti su di essa usando semplicemente la seconda legge della dinamica di Newton per il moto traslazionale e le leggi della dinamica del corpo rigido per il moto rotazionale (Gabrieli, 2009).

Le tre equazioni nelle tre direzioni dello spazio che descrivono la traslazione di una generica particella trattata come un corpo rigido tridimensionale sono:

$$\begin{aligned} F_1 &= m(\ddot{x}_1 - g_1) \\ F_2 &= m(\ddot{x}_2 - g_2) \\ F_3 &= m(\ddot{x}_3 - g_3) \end{aligned} \quad (1.14)$$

Dove  $F_i$  è la risultante delle forze esterne applicate nella direzione  $i$ ,  $m$  è la massa della singola particella, che viene moltiplicata per l'accelerazione lineare meno l'eventuale accelerazione esterna.

In linea generale per un corpo rigido generico le equazioni che descrivono la sua rotazione nel sistema di riferimento solidale al corpo sono le equazioni di Eulero ovvero:

$$\begin{aligned} M_1 &= I_1 \dot{\omega}_1 - \omega_2 \omega_3 (I_2 - I_3) \\ M_2 &= I_2 \dot{\omega}_2 - \omega_3 \omega_1 (I_3 - I_1) \\ M_3 &= I_3 \dot{\omega}_3 - \omega_1 \omega_2 (I_1 - I_2) \end{aligned} \quad (1.15)$$

dove  $M_1$ ,  $M_2$  ed  $M_3$  sono i momenti esterni applicati al corpo nelle tre direzioni principali;  $I_1$ ,  $I_2$  ed  $I_3$  sono i momenti principali d'inerzia del corpo ed infine  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  ed  $\omega_3$  sono le velocità angolari nelle stesse tre direzioni. Per particelle sferiche ( $I_1 = I_2 = I_3$ ) l'equazione del moto rotazionale viene notevolmente semplificata nella forma:

$$M_i = I \dot{\omega}_i = \frac{2}{5} m R^2 \dot{\omega}_i \quad (1.16)$$

La dinamica del moto di ogni particella viene determinata risolvendo le forze e i momenti risultanti agenti su di esse per ogni passo temporale e poi calcolando le posizioni, le velocità e le rotazioni per integrazione dell'accelerazione lineare ed angolare.

Modelli agli elementi discreti possono essere sia in due che in tre dimensioni, e le particelle usate tipicamente sono dischi o sfere, ma esistono anche applicazioni con altre forme geometriche.

Lo scopo principale dei DEM è di modellare in maniera esplicita il processo di un sistema di particelle partendo da ciò che avviene alla scala della singola particella. Questa strategia risulta particolarmente efficace nel caso dei terreni nei quali il comportamento meccanico fenomenologico risulta essere altamente non-lineare e non direttamente comprensibile alla scala del problema geotecnico da rappresentare. Scendendo alla scala della particella, la meccanica del contatto tra due grani solidi è molto meglio definita: esistono in letteratura soluzioni analitiche per il contatto di corpi semplici come sfera-piano o sfera-sfera.

Così, una volta implementato un modello di contatto adeguato tra coppie di particelle, la derivazione del comportamento complessivo (non-lineare) del materiale scaturisce spontaneamente dalla composizione di tanti processi lineari o non-lineari che avvengono al contatto.

L'approccio modellistico usato nei DEM è di tipo "riduzionista": fenomeni a larga scala sono compresi a partire dai processi nascosti a piccola scala.

Una delle ragioni del successo di questi modelli sta proprio nel fatto che le interazioni tra queste particelle sono relativamente semplici e ben conosciute e sono definite da leggi fisicamente basate e con un esiguo set di parametri.

Come si è detto la potenzialità e l'universalità dei modelli discreti sta nella completa separazione tra le leggi del moto e le leggi del contatto.

Per quanto riguarda le leggi del moto esse sono universalmente accettate e difficilmente vengono messe in discussione. Il modo in cui le particelle interagiscono, ovvero le leggi del contatto, possono essere invece di diverso tipo in relazione alla forma delle particelle, alla complessità del modello e al tipo di applicazione da indagare.

#### 1.4.4. Procedura di calcolo DEM

L'algoritmo di calcolo richiede ad ogni ciclo l'aggiornamento dei contatti in base alla posizione e al movimento relativo delle particelle (figura 1.6). Nei punti di interazione è definita la legge forza-spostamento per valutare l'entità delle forze di contatto, mentre la seconda legge di Newton è applicata alle particelle per determinarne le velocità e gli spostamenti in base alle forze e ai momenti applicati (Itasca, 2002).

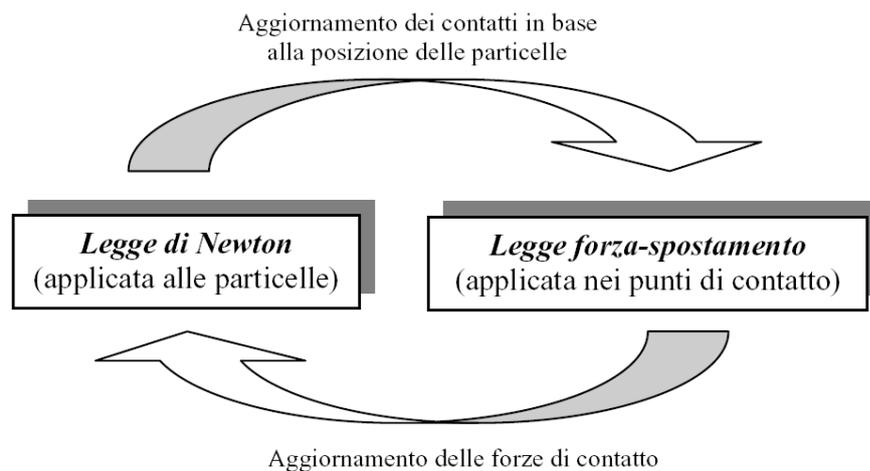


FIGURA 1.6: CICLO DI CALCOLO DEL DEM PARTICELLARE (ITASCA, 2002)

Per spiegare i principi di funzionamento dell'algoritmo di *time-stepping*, alla base del calcolo delle grandezze cinematiche e dinamiche relative al modello, si applica il sistema di equazioni non lineari a due dischi circolari, indicati con x e y, privi di peso e schiacciati da pareti rigide in movimento con velocità costante.

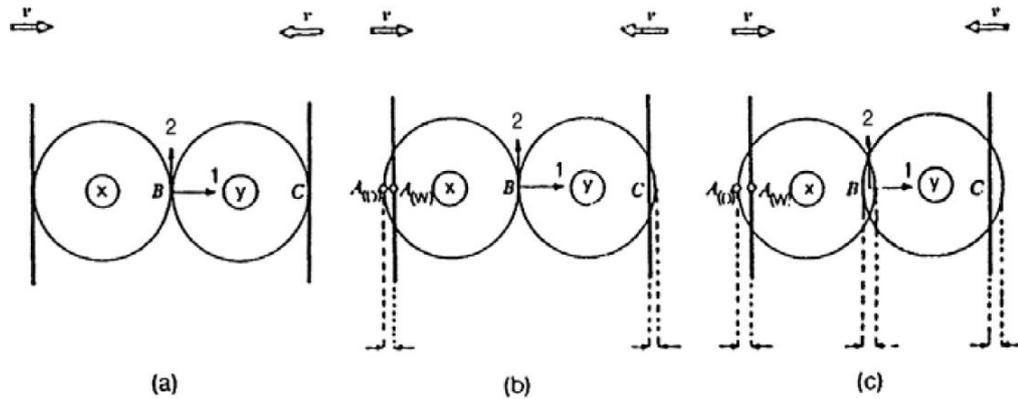


FIGURA 1.7: DISCHI COMPRESI TRA LE PARETI RIGIDE (CUNDALL E STRACK, 1979)

Nell'istante iniziale  $t = t_0$  si ha un primo contatto parete-disco che non genera alcuna forza (figura 1.7.a). Dopo un intervallo di tempo  $\Delta t$ , le pareti sono traslate verso l'interno di una quantità pari a  $v\Delta t$ . Durante ciascun intervallo temporale  $\Delta t$  si ipotizza che la perturbazione non possa propagarsi da un disco all'altro; gli elementi circolari conservano quindi tra  $t = t_0$  e  $t = t_0 + \Delta t$  la loro posizione iniziale e nell'istante  $t_1 = t_0 + \Delta t$  si verificherà nei punti di contatto A e C una sovrapposizione pari a  $\Delta n = v \cdot \Delta t$  (figura 1.7.b).

Il contatto A è il punto mediano del segmento  $\overline{A_{(D)}A_{(w)}}$ , delimitato dai punti del disco  $A_{(D)}$  e della parete  $A_{(w)}$  appartenenti alla retta passante per i centri degli elementi circolari; con  $(\Delta n_{(A)})_{t_1}$  si indica lo spostamento relativo di  $A_{(D)}$  rispetto al punto  $A_{(w)}$  nel singolo incremento di tempo.

Gli spostamenti relativi che si hanno nei punti di contatto A e C al tempo  $t_1 = t_0 + \Delta t$  vengono quindi inseriti nella legge forza-spostamento per il calcolo delle forze di contatto:

$$\Delta F_n = k_n \cdot (\Delta n)_{t_1} = k_n \cdot v \cdot \Delta t \quad (1.17)$$

dove  $k_n$  è la rigidezza normale e  $\Delta F_n$  rappresenta l'incremento della forza normale.

Con le equazioni (1.18) e (1.19), definita positiva la direzione 1 dal disco x al disco y, si calcolano quindi le risultanti delle forze  $F_{(x)1}$  e  $F_{(y)1}$  per i dischi x ed y al tempo  $t = t_0 + \Delta t$ .

$$F_{(x)1} = k_n \cdot (\Delta_n)_{t1} \quad (1.18)$$

$$F_{(y)1} = -k_n \cdot (\Delta_n)_{t1} \quad (1.19)$$

Queste forze sono utilizzate per determinare le nuove accelerazioni facendo ricorso alla seconda legge di Newton:

$$\ddot{x}_1 = \frac{F_{(x)1}}{m_{(x)}} \quad (1.20)$$

$$\ddot{y}_1 = \frac{F_{(y)1}}{m_{(y)}} \quad (1.21)$$

dove  $\ddot{x}_1$  ed  $\ddot{y}_1$  indicano le accelerazioni dei dischi x ed y nella direzione 1 ed  $m_{(x)}$  e  $m_{(y)}$  le rispettive masse.

Le accelerazioni così trovate sono assunte costanti nell'intervallo di tempo da  $t_1 = t_0 + \Delta t$  a  $t_2 = t_0 + 2\Delta t$  e possono essere integrate in modo tale da ricavare le velocità:

$$[\dot{x}_1] = \left[ \frac{F_{(x)1}}{m_{(x)}} \right] \cdot \Delta t \quad (1.22)$$

$$[\dot{y}_1] = \left[ \frac{F_{(y)1}}{m_{(y)}} \right] \cdot \Delta t \quad (1.23)$$

Gli incrementi di spostamento relativo nei contatti A, B e C all'istante  $t_2 = t_0 + 2\Delta t$  si determinano infine mediante le equazioni (1.24), (1.25) e (1.26):

$$(\Delta n_{(A)})_{t2} = \left\{ v - \left[ \frac{F_{(x)1}}{m_{(x)}} \right] \cdot \Delta t \right\} \cdot \Delta t \quad (1.24)$$

$$(\Delta n_{(B)})_{t_2} = \left\{ \left[ \frac{F_{(x)l}}{m_{(x)}} \right] \cdot \Delta t - \left[ \frac{F_{(y)l}}{m_{(y)}} \right] \cdot \Delta t \right\} \cdot \Delta t \quad (1.25)$$

$$(\Delta n_{(C)})_{t_2} = \left\{ \left[ \frac{F_{(y)l}}{m_{(y)}} \right] \cdot \Delta t - [-v] \right\} \cdot \Delta t \quad (1.26)$$

dove  $\Delta n_{(A)}$ ,  $\Delta n_{(B)}$  e  $\Delta n_{(C)}$  sono considerati positivi se di compressione. L'algoritmo di calcolo, per ogni ciclo, prevede innanzitutto l'applicazione della legge forza-spostamento ai punti di contatto, al fine di determinarne la forza risultante e successivamente l'uso della seconda legge di Newton per il calcolo delle grandezze cinematiche dei dischi.

#### 1.4.5. La legge forza-spostamento

La legge forza-spostamento, come anticipato, è definita nei punti di interazione tra gli elementi del sistema, per determinare le forze di contatto in funzione dei corrispondenti spostamenti relativi.

Si prendano in considerazione due dischi x ed y in contatto reciproco (figura 1.8). Le coordinate dei centri si indicano con  $x_i = (x_1, x_2)$  ed  $y_i = (y_1, y_2)$ , dove gli indici 1 e 2 si riferiscono agli assi del sistema di riferimento cartesiano rappresentato in figura. Le componenti dei vettori velocità dei due dischi sono rispettivamente  $\dot{x}_i = (\dot{x}_1, \dot{x}_2)$  ed  $\dot{y}_i = (\dot{y}_1, \dot{y}_2)$ , mentre le velocità angolari sono  $\dot{\theta}_{(x)}$  e  $\dot{\theta}_{(y)}$ , considerate positive se antiorarie. I punti  $P_{(x)}$  e  $P_{(y)}$  sono ottenuti per intersezione delle circonferenze con la retta passante per i centri dei dischi di raggio  $R_{(x)}$  e  $R_{(y)}$  e masse pari ad  $m_{(x)}$  e  $m_{(y)}$ .

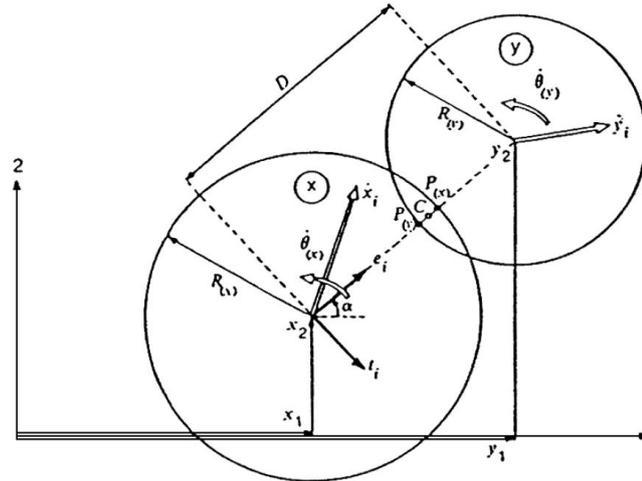


FIGURA 1.8: LEGGE FORZA-SPOSTAMENTO (CUNDALL E STRACK, 1979)

Due dischi si considerano in contatto solo se la distanza  $D$  tra i loro centri risulta essere minore della somma dei loro raggi:

$$D < R_{(x)} + R_{(y)} \quad (1.27)$$

Se si verifica questa condizione, lo spostamento relativo del punto di contatto  $C$  si determina integrando la velocità relativa, definita come la velocità del punto  $P_{(x)}$  rispetto al punto  $P_{(y)}$ .

Si introducono il versore normale  $e_i = (\cos \alpha, \sin \alpha)$  con direzione che va dal centro del disco  $x$  al centro del disco  $y$ , tale che:

$$e_i = \frac{y_i - x_i}{D} = (\cos \alpha, \sin \alpha) \quad (1.28)$$

ed il versore tangenziale  $t_i$  ottenuto attraverso una rotazione di  $90^\circ$  di  $e_i$ :

$$t_i = (e_2 - e_1) \quad (1.29)$$

La velocità relativa  $\dot{X}_i$  del punto  $P_{(x)}$  rispetto a  $P_{(y)}$  può essere espressa come:

$$\dot{X}_i = (\dot{x}_i - \dot{y}_i) - (\dot{\theta}_{(x)} R_{(x)} + \dot{\theta}_{(y)} R_{(y)}) \cdot t_i \quad (1.30)$$

Le componenti normali ( $\dot{n}$ ) e tangenziali ( $\dot{s}$ ) delle velocità relative si calcolano come le proiezioni di  $\dot{X}_i$  rispettivamente lungo  $e_i$  e  $t_i$ :

$$\begin{aligned}\dot{n} &= \dot{X}_i \cdot e_i = (\dot{x}_i - \dot{y}_i) \cdot e_i - (\dot{\theta}_{(x)} \cdot R_{(x)} + \dot{\theta}_{(y)} \cdot R_{(y)}) \cdot t_i \cdot e_i \\ &= (\dot{x}_i - \dot{y}_i) \cdot e_i\end{aligned}\quad (1.31)$$

$$\begin{aligned}\dot{s} &= \dot{X}_i \cdot t_i = (\dot{x}_i - \dot{y}_i) \cdot t_i - (\dot{\theta}_{(x)} \cdot R_{(x)} + \dot{\theta}_{(y)} \cdot R_{(y)}) \cdot t_i \cdot t_i \\ &= (\dot{x}_i - \dot{y}_i) \cdot t_i - (\dot{\theta}_{(x)} \cdot R_{(x)} + \dot{\theta}_{(y)} \cdot R_{(y)})\end{aligned}\quad (1.32)$$

L'integrazione rispetto al tempo della componente di velocità relativa fornisce le componenti  $\Delta n$  e  $\Delta s$  dell'incremento dello spostamento relativo:

$$\Delta n = (\dot{n}) \cdot \Delta t = \{(\dot{x}_i - \dot{y}_i) \cdot e_i\} \cdot \Delta t \quad (1.33)$$

$$\Delta s = (\dot{s}) \cdot \Delta t = (\dot{x}_i - \dot{y}_i) \cdot t_i - (\dot{\theta}_{(x)} \cdot R_{(x)} + \dot{\theta}_{(y)} \cdot R_{(y)}) \cdot \Delta t \quad (1.34)$$

Questi incrementi di spostamento relativo sono utilizzati nella legge forza-spostamento con lo scopo di calcolare gli incrementi delle forze normali e tangenziali  $\Delta F_n$  e  $\Delta F_s$ :

$$\Delta F_n = k_n \cdot (\Delta n) = (\dot{x}_i - \dot{y}_i) \cdot e_i \cdot k_n \cdot \Delta t \quad (1.35)$$

$$\Delta F_s = k_s \cdot \Delta s = k_s \cdot \{(\dot{x}_i - \dot{y}_i) \cdot t_i - (\dot{\theta}_{(x)} \cdot R_{(x)} + \dot{\theta}_{(y)} \cdot R_{(y)})\} \cdot \Delta t \quad (1.36)$$

dove  $k_n$  e  $k_s$  rappresentano rispettivamente le rigidezze normale e tangenziale.

$\Delta F_n$  e  $\Delta F_s$  sono aggiunti ad ogni intervallo di tempo alla somma di tutti gli incrementi delle forze determinati nei precedenti intervalli:

$$(F_n)_N = (F_n)_{N-1} + \Delta F_n \quad (1.37)$$

$$(F_s)_N = (F_s)_{N-1} + \Delta F_s \quad (1.38)$$

dove gli indici  $N$  e  $N-1$  si riferiscono ai tempi  $t_N$  e  $t_{N-1}$ , di modo che  $t_N - t_{N-1} = \Delta t$ .

$F_n$  e  $F_s$  sono considerate positive se dirette in verso opposto ai versori  $e_i$  e  $t_i$  (figura 1.9).

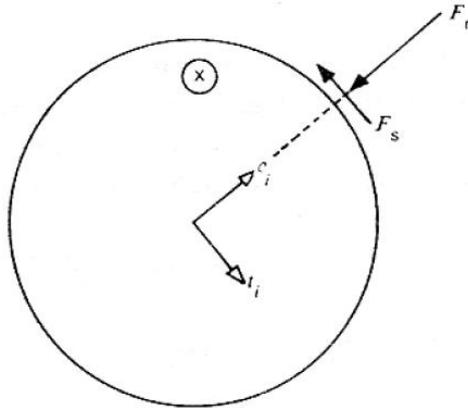


FIGURA 1.9: CONVENZIONI SUI SEGNI PER  $F_N$  E  $F_S$  (CUNDALL E STRACK, 1979)

Per quanto riguarda lo scorrimento tra i due dischi, l'entità della forza tangenziale  $F_s$  sopra calcolata è confrontata con il valore massimo ammissibile  $(F_s)_{\max}$  definito come:

$$(F_s)_{\max} = F_n \cdot \tan \phi_\mu + c \quad (1.39)$$

dove  $\phi_\mu$  è il più piccolo angolo di attrito dei due dischi a contatto e  $c$  la coesione.

Una volta determinate le forze normali e tangenziali per ciascun contatto di un disco, per esempio quello  $x$ , esse vengono scomposte nelle due componenti lungo le direzioni 1 e 2. La somma di tali componenti fornisce le forze risultanti  $\sum F_{(x)1}$  e  $\sum F_{(x)2}$ .

Il momento risultante agente sul disco  $x$ ,  $\sum M_{(x)}$ , è considerato positivo se agisce in senso antiorario ed è dato da:

$$\sum M_{(x)} = \sum F_s \cdot R_{(x)} \quad (1.40)$$

dove la sommatoria è estesa a tutti i contatti del disco.

Le forze ed i momenti risultanti agenti sul disco  $x$  sono successivamente inseriti nella seconda legge di Newton allo scopo di determinare le nuove accelerazioni  $\ddot{x}_i$  e  $\ddot{\theta}_{(x)}$ .

#### 1.4.6. Le equazioni del moto

Le velocità  $\dot{x}_i$  e  $\dot{\theta}_{(x)}$  riportate nelle equazioni (1.35) e (1.36) si valutano, come indicato da Cundall e Strack, assumendo che la risultante della forza e del momento al tempo  $t_N$  agisca sul disco  $x$  nell'intervallo  $\Delta t$  da  $t_{N-1/2}$  a  $t_{N+1/2}$ ; la seconda legge di Newton, applicata al disco  $x$ , si specializza quindi nelle seguenti equazioni:

$$m_{(x)} \cdot \ddot{x}_i = \sum F_{(x)i} \quad (1.41)$$

$$I_{(x)} \cdot \ddot{\theta}_{(x)} = \sum M_{(x)} \quad (1.42)$$

dove  $I_{(x)}$  rappresenta il momento di inerzia del disco  $x$ . Considerando  $\ddot{x}_i$  e  $\ddot{\theta}_{(x)}$  costanti nell'intervallo di tempo  $\Delta t$ , dalle (1.41) e (1.42) si ricavano le seguenti espressioni delle velocità:

$$(\dot{x}_i)_{N+1/2} = (\dot{x}_i)_{N-1/2} + \left[ \sum \frac{F_{(x)i}}{m_{(x)}} \right] \cdot \Delta t \quad (1.43)$$

$$(\dot{\theta}_{(x)})_{N+1/2} = (\dot{\theta}_{(x)})_{N-1/2} + \left[ \sum \frac{M_{(x)}}{I_{(x)}} \right] \cdot \Delta t \quad (1.44)$$

I valori delle velocità così ottenuti vengono inseriti nella legge forza-spostamento ed il ciclo può essere ripetuto per un nuovo incremento di tempo.

Le velocità calcolate con le (1.43) e (1.44) permettono inoltre di aggiornare le posizioni e le rotazioni dei dischi mediante un'ulteriore integrazione numerica:

$$(x_i)_{N+1} = (x_i)_N + (\dot{x}_i)_{N+1/2} \cdot \Delta t \quad (1.45)$$

$$(\theta_{(x)})_{N+1} = (\theta_{(x)})_N + (\dot{\theta}_{(x)})_{N+1/2} \cdot \Delta t \quad (1.46)$$

Nel modello possono infine essere incorporate anche forze di massa, come ad esempio quelle gravitazionali. In tal caso si aggiunge il termine  $m_{(x)} \cdot g_i$  alla sommatoria delle forze  $\sum F_{(x)i}$  che compare nell'equazione (1.41), dove  $g_i = (g_1, g_2)$  rappresenta le due componenti del vettore accelerazione dovute alla forza di massa.

#### 1.4.7. La legge di smorzamento

Lo smorzamento entra in gioco durante lo slittamento tra due dischi quando il valore della forza tangenziale in corrispondenza di ogni contatto risulta pari ad  $(F_s)_{\max}$ .

Tenendo conto dell'effetto dello smorzamento le equazioni (1.43) e (1.44) diventano:

$$(\dot{x}_i)_{N+1/2} = (\dot{x}_i)_{N-1/2} + \left\{ \sum \frac{[F_{(x)i} + D_{(x)i}]}{m_{(x)}} \right\}_N \cdot \Delta t \quad (1.47)$$

$$(\dot{\theta}_{(x)})_{N+1/2} = (\dot{\theta}_{(x)})_{N-1/2} + \left\{ \sum \frac{M_{(x)}}{I_{(x)}} \right\}_N \cdot \Delta t \quad (1.48)$$

dove  $\sum D_{(x)i}$  rappresenta la somma delle componenti delle forze di smorzamento. Per valutarla si considerano le componenti normale ( $D_n$ ) e tangenziale ( $D_s$ ) come segue:

$$(D_n)_N = c_n \cdot \dot{n} = c_n \cdot [\dot{x}_i - \dot{y}_i]_{N-1/2} \cdot e_i \quad (1.49)$$

$$(D_s)_N = c_s \cdot \dot{s} \\ = c_s \cdot \left[ (\dot{x}_i - \dot{y}_i)_{N-1/2} \cdot t_i - (\dot{\theta}_{(x)} \cdot R_{(x)} + \dot{\theta}_{(y)} \cdot R_{(y)})_{N-1/2} \right] \quad (1.50)$$

dove i coefficienti di smorzamento in direzione normale ( $c_n$ ) e tangenziale ( $c_s$ ) si assumono proporzionali alle rigidità  $k_n$  e  $k_s$  con  $\beta$  costante:

$$c_n = \beta \cdot k_n \quad (1.51)$$

$$c_s = \beta \cdot k_s \quad (1.52)$$

La valutazione dei coefficienti di smorzamento rappresenta una delle maggiori difficoltà del metodo.

#### 1.4.8. L'intervallo di tempo critico

I codici di calcolo basati sul metodo degli elementi distinti particellari integrano le equazioni del moto utilizzando uno schema alle differenze finite; la soluzione così calcolata risulta stabile solo se l'intervallo di tempo  $\Delta t$  non supera il valore critico. Per la sua determinazione si considera un sistema ad una dimensione composto da una massa ( $m$ ) e da una molla di rigidezza  $k$  (figura 1.10).

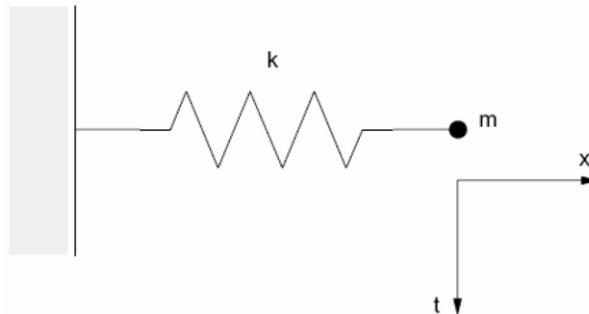


FIGURA 1.10: SISTEMA COMPOSTO DA MASSA E MOLLA (CUNDALL E STRACK, 1979)

Il moto del punto in cui si concentra la massa è governato dalla seguente equazione differenziale:

$$-kx = m\ddot{x} \quad (1.53)$$

Indicando con  $T$  il periodo del sistema, l'intervallo di tempo critico ( $t_{crit}$ ) diventa:

$$t_{crit} = \frac{T}{\pi} = \frac{2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{m}{k}}}{\pi} \quad (1.54)$$

Si consideri ora una serie infinita di masse e di molle (figura 1.11.a). Il più piccolo periodo di questo sistema si avrà quando le masse si muovono in sincronia opponendosi al moto, in modo da evitare il movimento nel centro di ogni molla.

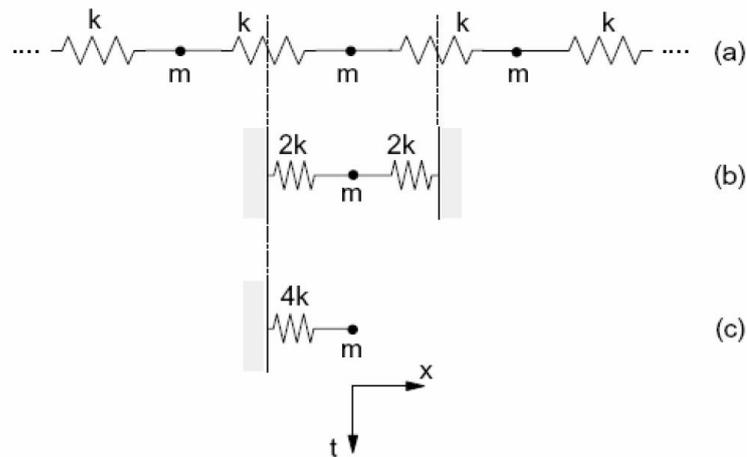


FIGURA 1.11: SISTEMA MULTIPLO DI MASSE E MOLLE (CUNDALL E STRACK, 1979)

Il moto di ogni singolo punto in cui si suppongono concentrate le masse può essere descritto attraverso i due sistemi equivalenti di figura 1.11.b che caratterizzano il moto di traslazione. L'intervallo di tempo critico per questo sistema sarà:

$$t_{crit} = 2\sqrt{\frac{m}{4k}} = \sqrt{\frac{m}{k}} \quad (1.55)$$

Il moto di rotazione è caratterizzato dagli stessi due sistemi di figura 1.11.b nei quali si inserisce al posto di  $m$  e di  $k$  rispettivamente il momento d'inerzia  $I$  di una particella di dimensioni finite e la sua rigidezza alla rotazione ( $k_{rotaz}$ ). Le equazioni generali dell'intervallo di tempo critico diventano:

$$t_{crit} = \sqrt{\frac{m}{k_{trasl}}} \quad (\text{moto di traslazione}) \quad (1.56)$$

$$t_{crit} = \sqrt{\frac{I}{k_{rotaz}}} \quad (\text{moto di rotazione}) \quad (1.57)$$

#### **1.4.9. Vantaggi e limiti del DEM**

La differenza fondamentale tra il Metodo degli Elementi Discreti e quelli precedentemente citati risiede nel fatto che, mentre in questi ultimi i contatti fra “unità elementari” rimangono invariati indipendentemente dalla risposta del modello, nel DEM sono aggiornati ad ogni iterazione in base alla posizione ed al movimento relativo dei singoli elementi. La definizione della mesh e dei modelli costitutivi dei materiali è sostituita dalla determinazione della distribuzione e delle dimensioni degli elementi che compongono il sistema e dalla descrizione del comportamento dei contatti (Calvetti, 2003). Nel DEM lo stato tensionale di partenza non può essere specificato in modo indipendente dalla distribuzione iniziale delle singole unità, dato che dalla loro posizione relativa dipendono le forze di contatto (Lin et al., 1997).

É inoltre possibile indagare l'evoluzione della risposta del sistema in condizioni di equilibrio stabile, limite ed a rottura, oltre la quale, a differenza dei metodi al continuo, ammette la separazione del dominio in blocchi che continuano a risentire delle sollecitazioni agenti. Per questo motivo il DEM è particolarmente indicato per modellare fenomeni di interazione fra oggetti discreti soggetti a grandi deformazioni o a processi di frattura.

#### **1.5. La forma delle particelle nei modelli ad elementi discreti**

In quasi tutti i modelli ad elementi discreti vengono impiegate particelle di forma circolare (2D) o sferica (3D). In questo modo le uniche informazioni memorizzate sono il raggio, la posizione e la velocità del centro di ogni singola particella. I vantaggi derivanti dall'utilizzo di queste semplici forme sono indiscutibili anche per quanto riguarda la facilità di implementazione dell'algoritmo di ricerca dei contatti (contact-detection) e la sua rapidità di esecuzione (Gabrieli, 2009).

Tuttavia nella maggior parte dei casi le particelle fisiche che devono essere modellate (es. sabbia, cereali, ciottoli,...) si discostano dalla semplice forma circolare o sferica e questo fatto costituisce in molte circostanze un grosso limite del modello. È riconosciuto infatti come la forma delle particelle abbia un ruolo determinante nel comportamento meccanico del materiale.

L'utilizzo di particelle sferiche invece della forma reale può produrre delle evidenti problematiche, tra cui l'impossibilità a raggiungere angoli di attrito ed angoli di natural declivio superiori a certi valori, difficoltà a simulare correttamente la rotazione e la mobilità delle particelle che nel caso di grani spigolosi risulta notevolmente ridotta, difficoltà a simulare la reale anisotropia del terreno.

Potyondy and Cundall (2004) hanno dimostrato che la modellazione con dischi circolari porta ad angoli d'attrito non realistici (troppo bassi). Per esempio, la misura dell'angolo di attrito per il granito Lac du Bonnet da test di laboratorio risulta  $50^\circ$ , Potyondy e Cundall con la simulazione al PFC hanno ricavato un angolo di circa  $30^\circ$ .

Ting e Corkum (1988) furono i primi ricercatori a dimostrare, attraverso simulazioni DEM di prove di taglio, l'esistenza di un'eccessiva rotazione delle particelle circolari all'interno delle simulazioni numeriche.

Benché la modellazione dei materiali granulari utilizzando forme circolari sia semplice, è stato dimostrato che le particelle tendono a ruotare e rotolare in maniera eccessiva; infatti le particelle circolari non possono ingranarsi in nessun modo, come invece può accadere per forme più articolate.

Le strategie numeriche più conosciute e più perseguite nel campo degli elementi discreti per risolvere questi problemi sono:

- approssimazione della forma reale attraverso l'uso di aggregati di particelle sferiche (o dischi in 2D) inscindibili (*clump*) sovrapposte o non sovrapposte (Matsushima, 2005);

- approssimazione della forma reale attraverso l'uso di aggregati di particelle sferiche (o dischi in 2D) disgregabili (*cluster*) (Robertson e Bolton, 2001);
- l'utilizzo di particelle non sferiche (o non circolari in 2D): ellissoidi, poliedri, armoniche sferiche, ecc.. (p.e. Lin e Ng, 1997).

La terza categoria richiede una formulazione ad hoc del modello di contatto ed una complessità maggiore nell'algoritmo del moto del corpo rigido: nei modelli 3D l'utilizzo di particelle non sferiche è molto meno frequente a causa della maggiore mole di informazioni da memorizzare, della complessità dell'algoritmo di *contact-detection* e delle incertezze sul tipo di modello di contatto più corretto da utilizzare.

Walton (1982) ed Issa e Nelson (1992) impiegarono elementi di forma poligonale che ricordano quelli utilizzati nella meccanica della frattura delle rocce e stabilirono che questo approccio fornisce degli aggregati qualitativamente migliori per le sperimentazioni.

Ting et al. (1989) confrontarono i valori dei tempi di esecuzione e riscontrarono un incremento di questo valore, per le simulazioni che utilizzano particelle di forma poligonale rispetto a quelle circolari.

Le particelle poligonali presentano degli svantaggi computazionali, come per lo schema di *contact-detection* che richiede grandi quantità di tempo, perché viene monitorato un vasto numero di superfici.

Per esempio, per forme poliedriche, occorre che a ciascuna particella sia associato un set di punti (i vertici), un set di vettori (gli spigoli), ed un set di poligoni (le facce).

Esistono per queste forme almeno 4 tipi di contatto classificati in base alle entità dell'oggetto solido che arrivano a toccarsi: faccia-vertice (FV da *Face-Vertex*), spigolo-spigolo (E-E da *Edge-Edge*), vertice-vertice (V-V da *Vertex-Vertex*). L'ultimo dei tre è degenere e viene incorporato negli altri due casi; ognuno di essi viene ricercato con un algoritmo di *contact-detection* differente.

Ting et al. (1993) svilupparono particelle di forma ellissoidica, si osservò che questa rappresentazione riproduceva in maniera fedele la resistenza delle particelle alla rotazione, come si può osservare nei materiali naturali.

Per quanto riguarda le particelle di forma ovale ed ellissoidica, la forma rappresenta più da vicino quella dei materiali granulari naturali, però la complessità computazionale cresce in modo molto significativo rispetto le particelle circolari (Thomas e Bray, 1999).

Lo svantaggio è che l'algoritmo di *contact-detection*, benché sostanzialmente più veloce rispetto alle particelle di forma poligonale, non è ancora efficiente quanto quelli relativi ai dischi circolari o alla sfere. La determinazione del contatto ellisse-ellisse richiede la soluzione di equazioni algebriche del quarto grado, rispetto le equazioni del primo ordine necessarie per un contatto disco-disco.

Per quanto riguarda altre forme particolari si ricorda Salot (2007), che attraverso un lavoro molto meticoloso, riporta una analisi meccanica approfondita del comportamento meccanico triassiale di speciali *clump* composti di due sfere ad una distanza prefissata  $d$ . All'aumentare della distanza l'autore osserva un incremento della resistenza di picco e della dilatanza del materiale ed una diminuzione della possibilità di rotazione delle singole particelle.

Munjiza et al. (2003) hanno portato l'esempio di packing di particelle a forma di capsule.

### **1.5.1. Clump e cluster**

Queste due tecniche, finalizzate ad approssimare meglio la forma geometrica delle particelle naturali, legate e non, sono le più diffuse perchè più semplici e più performanti: consentono di sfruttare il medesimo algoritmo di *contact-detection* con un contatto sempre di tipo sfera-sfera (o disco-disco in 2D).

Tutti i contatti si verificano lungo la linea di connessione dei centri dei singoli dischi.

Per la loro determinazione è necessaria la conoscenza della localizzazione dei centri dei dischi, il raggio e il numero dei *cluster*.

Teoricamente, l'unico incremento del tempo di calcolo per la simulazione è dovuto alla ricerca dei contatti. Questo incremento del tempo di calcolo non è significativo, la maggioranza del tempo di calcolo in un singolo timestep è dovuto alla soluzione del sistema di equazioni lineari (Thomas e Bray, 1999).

Tuttavia gli svantaggi stanno nel più elevato numero di sfere che devono essere utilizzate nelle simulazioni (Bertrand et al., 2005) e nella possibilità dell'insorgenza di indesiderati contatti multipli.

L'idea base del *clustering* può essere riassunta come segue: diverse semplici particelle DEM possono essere combinate a formare una particella dalla forma complessa.

Come si può vedere negli esempi di figura 1.12.a e 1.12.b, un singolo elemento DEM tipicamente non rappresenta la geometria delle particelle naturali. La figura 1.12.c dimostra che attraverso la combinazione di un certo numero di dischi, la geometria dell'elemento naturale può essere rappresentata in maniera più corretta.

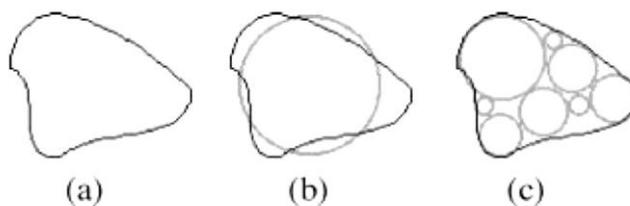


FIG. 1.12: A) ELEMENTO NATURALE IPOTETICO, B) ELEMENTO DEM SOVRAPPOSTO A QUELLO NATURALE, C) CONFORMAZIONE CLUSTER (JENSEN ET AL., 1999)

Data la forma non sferica, la stabilità di rotazione, e la semplicità computazionale, *cluster* e *clump* rappresentano un interessante approccio nella modellazione agli elementi discreti dei materiali granulari.

Si riporta l'esempio di *cluster* per simulare il granito (Cho et. al, 2007), tenendo conto delle naturali irregolarità dei grani (figura 1.13).

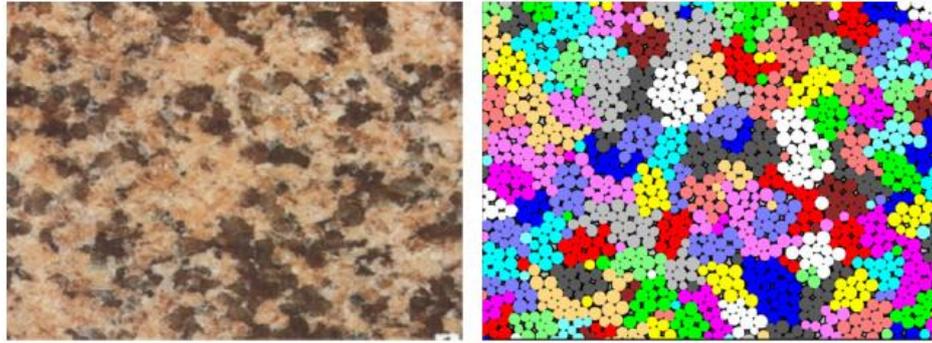


FIGURA 1.13: SIMULAZIONE DELLA STRUTTURA DEL GRANITO ATTRAVERSO CLUSTER (CHO ET AL., 2007)

La differenza principale tra il concetto di *clump* e *cluster*, che sono ambedue costituiti da un insieme di particelle circolari, è che il *clump* si comporta come un singolo corpo rigido (con un confine deformabile) che non si rompe mai, a prescindere dalle forze che agiscono su di esso. Il *cluster* è un insieme di particelle disgregabili unite da una forza limitata, le particelle *intra-cluster* hanno rotazioni relative. In caso di materiale legato, le forze di legame *intra-cluster* vanno impostate con valore differente (generalmente più elevato) rispetto alle forze di legame con altri *cluster* confinanti.

Una delle grandi differenze tra *clump* e *cluster* è quindi il meccanismo di rotazione delle particelle (figura 1.14); le particelle *intra-cluster* hanno una velocità di rotazione, mentre le particelle del *clump* sono fisse (tutto il corpo ruota in modo solidale).

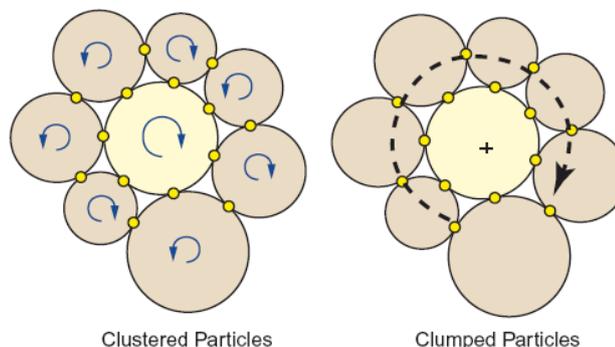


FIGURA 1.14: MECCANISMO DI ROTAZIONI NEI CLUMP E NEI CLUSTER (CHO ET AL., 2007)

Nello studio di Cho et al. (2007), condotto per la simulazione della roccia, benchè la forza di legame tra le particelle *intra-cluster* è stata fissata a valori più elevati che per i contatti tra i vari *cluster*, la rotazione *intra-cluster* non può venire completamente soppressa.

Per illustrare l'importanza dell'effetto della rotazione delle particelle, sono state condotte due simulazioni con identici parametri (Cho et al., 2007), l'unica differenza tra i due casi è che la velocità rotazionale delle particelle nel secondo caso è nulla; in altre parole, i momenti che avvengono nella *contact beam* sono tutti nulli.

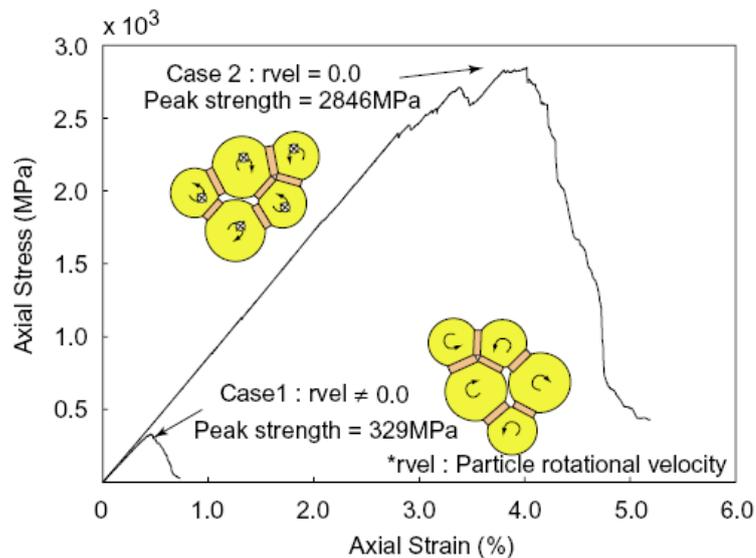


FIGURA 1.15: EFFETTO DELLA ROTAZIONE DELLE PARTICELLE (CHO ET AL., 2007)

Quando la rotazione di tutte le particelle è completamente soppressa, il picco di tensione cresce enormemente, come si può notare dall'immagine 1.15. Comunque non è realistica una simulazione nella quale si annullano tutte le rotazioni.

Un approccio alternativo, per ridurre gli effetti di disturbo delle rotazioni delle particelle *intra-cluster*, è usare i *clump*.

Cho et al. (2007), simulando il comportamento del granito Lac Du Bonnet utilizzando i *cluster*, hanno rilevato discordanze rispetto le prove di laboratorio, ad esempio l'angolo d'attrito è molto più basso. I ricercatori sono quindi passati all'uso dei *clump*.

La conclusione della ricerca indica che introducendo i *clump* al fine di eliminare il disturbo delle eccessive rotazioni, i risultati di laboratorio e delle simulazione al PFC sono in accordo (per il granito Lac Du Bonnet).

Concludendo, l'uso dei *clump* o dei *cluster*, caratterizzati da onerosità di calcolo simile, dipende dal tipo di problema da studiare: se è necessario simulare l'eventuale disgregazione dei grani, i *cluster* sono l'unica soluzione; se questo aspetto non è importante l'uso di *clump* può dare risultati migliori, come nell'esempio appena illustrato.

## **CAPITOLO 2**

### **IL CODICE DI CALCOLO PARTICLE FLOW CODE (PFC)**

#### **2.1. Il funzionamento qualitativo del software**

Il software usato nelle simulazioni di questa tesi è denominato *Particle Flow Code* (PFC3D) ed è l'evoluzione del codice originale di Cundall e Strack (1979).

Il comportamento meccanico del mezzo è descritto tracciando i movimenti dei singoli elementi che lo compongono e l'andamento delle forze che si sviluppano nei punti di contatto, applicando la seconda legge di Newton alle particelle e la legge forza-spostamento ai punti di contatto. La prima è utilizzata per determinare il moto delle singole unità, la seconda serve per aggiornare le forze di contatto conseguenti.

Al suo interno il PFC contiene un certo numero di semplificazioni relative alle proprietà delle particelle e dei contatti.

Alcune di queste sono comuni a qualsiasi altro modello discreto, altre invece sono proprie unicamente di questo codice. Esse possono essere così riepilogate (manuale PFC3D Itasca, 2003):

- 1) tutte le particelle rappresentate sono sferiche;
- 2) le particelle sono trattate come corpi rigidi, non deformabili;
- 3) il contatto tra le particelle avviene in un punto;
- 4) i contatti sono trattati come *soft-contacts*, cioè le particelle possono sovrapporsi l'una all'altra nel punto di contatto, ma solo per una distanza che è piccola rispetto alle dimensioni delle particelle. Questa sovrapposizione rappresenta la deformazione della particella;
- 5) il grado di sovrapposizione è legato alla forza di contatto tra le particelle, tramite il modello di contatto.

La prima grande semplificazione riguarda la forma sferica con cui viene rappresentata qualsiasi tipo di particella.

Tale assunzione appare ragionevole se le particelle reali che si intendono rappresentare sono molto arrotondate, come ad esempio le sabbie marine, ma produce notevoli limitazioni nel momento in cui si desidera passare a sabbie angolose o elongate.

Gli ultimi tre aspetti sono ragionevolmente corretti se la rigidità al contatto è sufficientemente elevata. Ciò significa che il metodo agli elementi discreti non è indicato per materiali particellari eccessivamente deformabili al contatto. Solitamente si considera accettabile una deformazione al contatto inferiore al 5% della dimensione della particella.

Il limite più importante dei modelli agli elementi discreti è l'elevato onere computazionale dell'algoritmo di calcolo che dipende sia dall'elevato numero di particelle da rappresentare che dalla complessità dell'algoritmo di ricerca dei contatti (*contact-detection* o *collision-detection*). Un grande passo in avanti per quanto riguarda le velocità di calcolo è stato compiuto in seguito alla diffusione delle tecniche di parallelizzazione che con questi algoritmi risultano essere molto efficaci (rispetto alle applicazioni di parallelizzazione con i metodi agli elementi finiti). Infatti gran parte dell'algoritmo DEM può essere potenzialmente parallelizzabile (grazie a interazioni tra le particelle di tipo *short-range*) mentre solo una piccola parte rimane in forma sequenziale.

Il dominio spaziale discreto, con una opportuna procedura di ordinamento, può essere facilmente suddiviso in celle indipendenti ognuna delle quali è gestita da un processore. L'integrazione del moto di ciascuna particella può essere eseguita contemporaneamente ("parallelamente") ed autonomamente su ciascuna cella (ciascun processore) e la comunicazione tra celle adiacenti (molto dispendiosa in termini di tempo macchina) è limitata ai bordi di queste celle, preventivamente definiti, e può avvenire con minor frequenza (Carillo et al., 1996).

Il metodo utilizzato, evoluzione del DEM teorizzato da Cundall e Strack, permette la rappresentazione numerica dello spostamento e della rotazione delle particelle, il completo distacco tra gli elementi ed il riconoscimento dei nuovi punti di contatto (Cundall e Hart, 1992).

Il software simula quindi il comportamento meccanico di un sistema formato da particelle che occupano una quantità finita di spazio, si spostano indipendentemente le une dalle altre ed interagiscono solo in caso di reciproco contatto.

Le particelle di forma sferica sono denominate “*balls*”, mentre con il termine “*walls*” si indicano gli elementi *boundary* di confinamento e compattazione del modello (figura 2.1). I *walls*, che si utilizzano per definire i confini del sistema e per agevolare la generazione e la compattazione del sistema, possono essere soggetti solo a velocità e non a forze; non sono ammessi contatti muro-muro ma soltanto particella-muro.

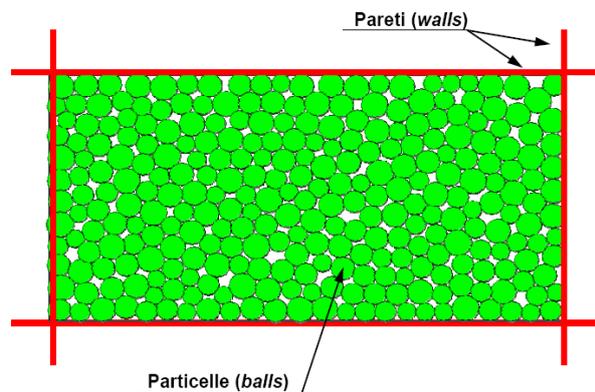


FIGURA 2.1: ELEMENTI FONDAMENTALI DI PFC

È possibile assegnare alle particelle sia le grandezze cinematiche sia quelle dinamiche, mentre per gli elementi *boundary* è possibile definire le sole velocità di traslazione e rotazione.

Con il PFC può infine essere simulato il fenomeno del rammollimento della miscela, mediante la definizione del legame *contact bond* nei punti di interazione tra le particelle, ed il successivo annullamento per forze di contatto che superano localmente la resistenza ultima.

Gli elementi di forma sferica sviluppano infatti sollecitazioni di trazione responsabili dell'innescio di micro-fratture, riproducendo così un comportamento macroscopico complesso governato dai fenomeni di rammollimento e rottura.

### 2.1.1. La legge forza-spostamento

La legge forza-spostamento mette in relazione lo spostamento relativo tra due particelle adiacenti e la forza di contatto che si genera nel loro punto di sovrapposizione (approccio *soft contact*).

Si applica in particolare nel punto  $x_i^{[c]}$  che giace sul piano di contatto individuato dal versore normale  $n_i$  (Potyondy et al., 2004) (figura 2.2).

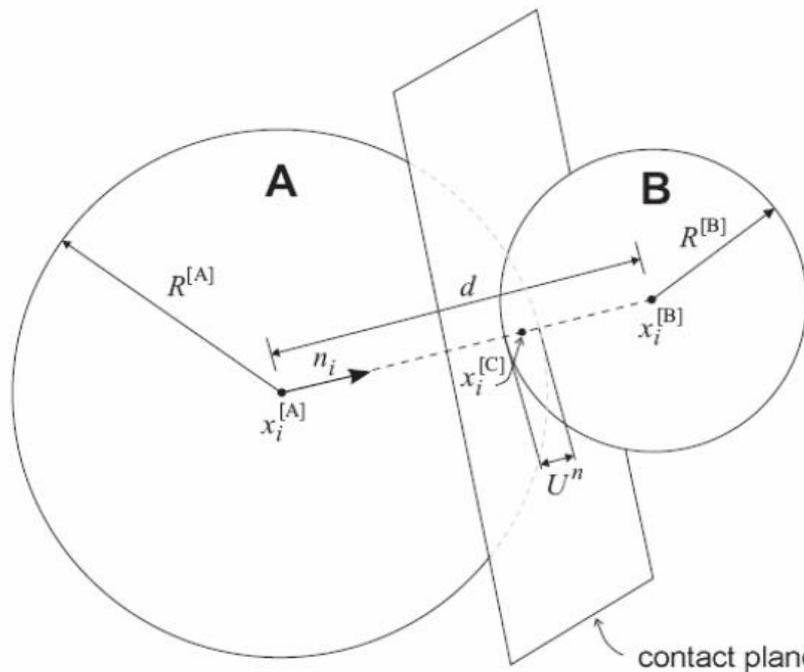


FIGURA 2.2: LEGGE FORZA-SPOSTAMENTO PER UN CONTATTO PARTICELLA-PARTICELLA (ITASCA, 2002)

La forza di contatto si può così suddividere nelle due componenti normale, che agisce nella direzione di  $n_i$ , e tangenziale, che si esplica sul piano di contatto.

Per le due sfere  $A$  e  $B$  di figura 2.2, indicando con  $U_n$  la loro sovrapposizione, il versore  $n_i$  diventa (Cheng et al., 2000):

$$n_i = \frac{x_i^{[B]} - x_i^{[A]}}{d} \quad (2.1)$$

dove  $x_i^{[A]}$  ed  $x_i^{[B]}$  sono i vettori posizione dei centri delle due particelle e  $d$  è la loro distanza reciproca così definita:

$$d = |x_i^{[B]} - x_i^{[A]}| = \sqrt{(x_i^{[B]} - x_i^{[A]})_v \cdot (x_i^{[B]} - x_i^{[A]})} \quad (2.2)$$

Per un contatto particella-parete come quello rappresentato in figura 2.3,  $d$  è pari alla minor distanza tra la ball  $b$  ed il muro  $w$  ed  $n_i$  è diretto lungo la stessa.

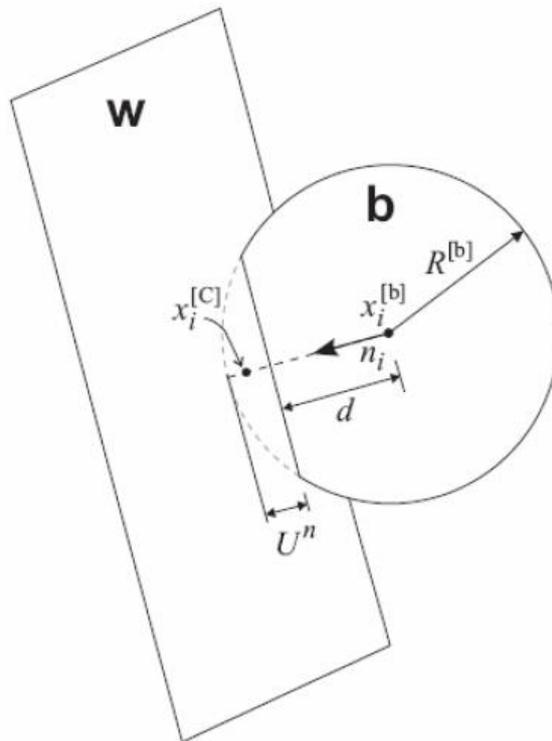


FIGURA 2.3: LEGGE FORZA-SPOSTAMENTO PER UN CONTATTO PARTICELLA-PARETE (ITASCA, 2002)

Noti i raggi delle particelle  $(R^{[A]}, R^{[B]}, R^{[b]})$ , la sovrapposizione  $U_n$ , definita come lo spostamento relativo del contatto nella direzione normale, è data da:

per contatto particella-particella:

$$U_n = R^{[A]} + R^{[B]} - d \quad (2.3)$$

per contatto particella-parete:

$$U_n = R^{[b]} - d \quad (2.4)$$

La posizione del punto di contatto  $(x_i^{[c]})$  è pari a:

per contatto particella-particella:

$$x_i^{[c]} = x_i^{[A]} + \left( R^{[A]} - \frac{1}{2} \cdot U_n \right) \cdot n_i \quad (2.5)$$

per contatto particella-parete:

$$x_i^{[c]} = x_i^{[b]} + \left( R^{[b]} - \frac{1}{2} \cdot U_n \right) \cdot n_i \quad (2.6)$$

La componente normale  $(F_i^n)$  della forza di contatto si valuta in funzione di  $U_n$  e della rigidità normale  $k_n$  secondo la formula (Elata et al., 1996):

$$F_i^n = k_n \cdot U_n \cdot n_i \quad (2.7)$$

La componente tangenziale  $(F_i^s)$  si valuta in modo incrementale: partendo dal valore nullo nell'istante di formazione del contatto, aumenta ad ogni incremento di spostamento. Per la sua determinazione si studia il moto del contatto attraverso la sua velocità  $(V_s)$ , che dipende dalle velocità di traslazione  $(\dot{x}_i)$  e di rotazione  $(\omega)$  delle due entità a contatto, secondo la formula:

per contatto particella-particella:

$$V_s = (\dot{x}_i^{[B]} - \dot{x}_i^{[A]}) \cdot t_i - \omega_3^{[B]} |x_k^{[C]} - x_k^{[B]}| - \omega_3^{[A]} |x_k^{[C]} - x_k^{[A]}| \quad (2.8)$$

per contatto particella-parete:

$$V_S = (\dot{x}_i^{[w]} - \dot{x}_i^{[b]}) \cdot t_i - \omega_3^{[w]} |x_k^{[c]} - x_k^{[w]}| - \omega_3^{[b]} |x_k^{[c]} - x_k^{[b]}| \quad (2.9)$$

dove  $t_i = \{-n_2, n_1\}$

La componente tangenziale dello spostamento del punto di contatto ( $\Delta U_S$ ) diventa quindi:

$$\Delta U_S = V_S \cdot \Delta t \quad (2.10)$$

da cui si ricava la componente tangenziale della forza di contatto ( $\Delta F_S$ ) in funzione della rigidità tangenziale ( $k_s$ ):

$$\Delta F_S = -k_s \cdot \Delta U_S \quad (2.11)$$

### 2.1.2. La legge del moto

Il movimento di una particella rigida è determinato dalla risultante delle forze e dei momenti che agiscono su di essa e può essere descritto in termini di moto di traslazione e di rotazione. Il primo è definito dall'accelerazione ( $\ddot{x}_i$ ) del centro della particella; il secondo da quella angolare ( $\ddot{\omega}_i$ ).

Indicando con  $F_i$  la risultante delle forze applicate all'elemento e con  $g_i$  il vettore accelerazione di gravità, l'equazione del moto di traslazione di una particella di massa  $m$  diventa (Fortin, 2005):

$$F_i = m \cdot (\ddot{x}_i - g_i) \quad (2.12)$$

Il moto di rotazione invece può essere descritto dall'equazione:

$$M_i = I \cdot \ddot{\omega}_i \quad (2.13)$$

dove  $M_i$  è la risultante dei momenti agenti sulla particella ed  $I$  il suo momento d'inerzia.

### 2.1.3. Lo smorzamento

L'energia cinetica che si genera nel sistema in seguito all'interazione tra le particelle è dissipata attraverso i relativi slittamenti. Nel caso in cui questi ultimi non siano sufficienti a far raggiungere al modello uno stato di equilibrio, entra in gioco il fattore di smorzamento (*local damping*) che applica ad ogni elemento una forza di smorzamento (*damping force*) proporzionale alla corrispondente forza non bilanciata (*unbalanced force*).

Quest'ultima è un parametro che permette di controllare se il modello ha raggiunto l'equilibrio statico; il sistema, infatti, si considera in equilibrio quando la massima forza non bilanciata è piccola rispetto a quelle applicate. Se l'*unbalanced force* si attesta ad un valore costante non nullo (seppur piccolo) significa che, probabilmente, si stanno verificando rotture o deformazioni plastiche all'interno del modello (Jensen et al., 1999 e 2001).

Il fattore di smorzamento si introduce nell'equazione del moto come segue (Hazzard, 2000):

$$F_i + F_{id} = m \cdot (\ddot{x}_i - g_i) \quad (2.14)$$

dove  $F_{id}$  rappresenta la forza di smorzamento valutabile in funzione della velocità della particella ( $\dot{x}_i$ ) mediante la seguente equazione:

$$F_{id} = -\alpha \cdot F_i \cdot \dot{x}_i \quad (2.15)$$

Il coefficiente di smorzamento  $\alpha$  varia tra 0 ed 1; di default è pari a 0,7.

## **2.2. La creazione del modello**

Per la definizione di un modello è necessario innanzitutto specificare la distribuzione e le dimensioni delle particelle che compongono il sistema, andranno poi definiti il comportamento dei contatti e le proprietà dei materiali, che dettano il tipo di risposta del mezzo quando è sottoposto ad una causa perturbatrice.

Bisogna definire anche le condizioni al contorno e quelle iniziali, che definiscono la situazione in situ, cioè prima dell'introduzione della perturbazione.

La procedura generale di soluzione prevede la valutazione dello stato di equilibrio iniziale del sistema, l'applicazione delle alterazioni ed il calcolo della risposta del modello (figura 2.4).

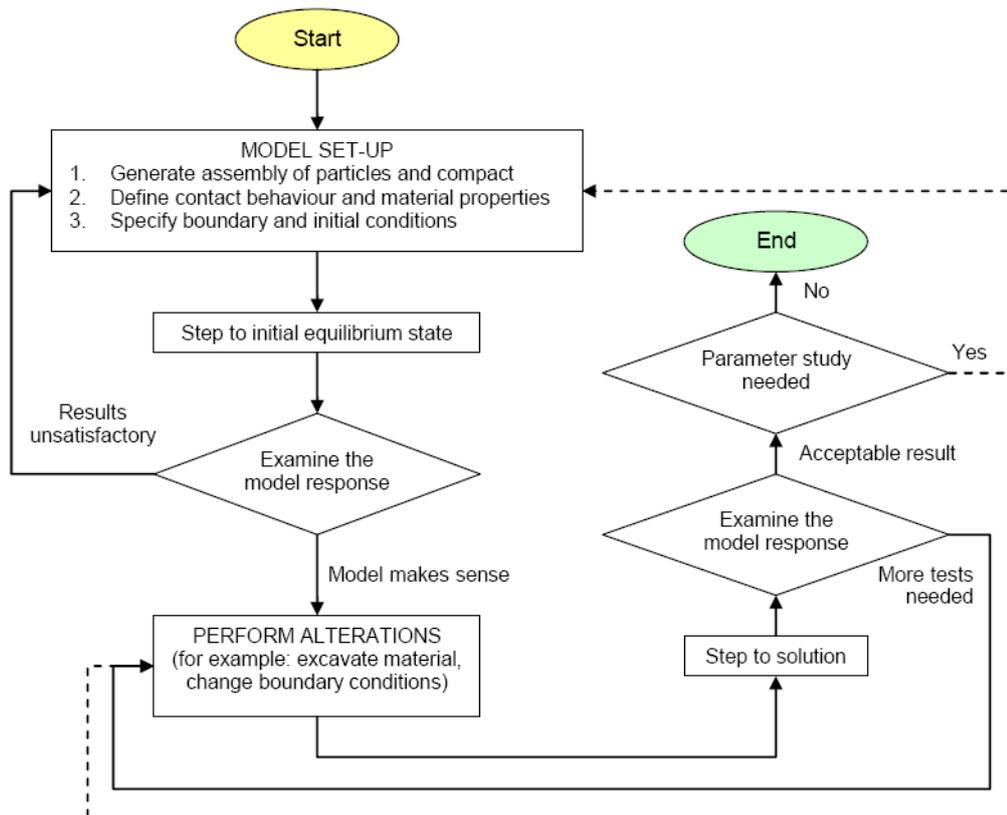


FIGURA 2.4: PROCEDURA DI SOLUZIONE GENERALE DI PFC (ITASCA, 2002)

### 2.2.1. Modalità di generazione delle particelle

Le particelle che compongono il sistema, in generale possono essere create attraverso due procedure (Jiang et al., 2003):

- quella semplice, che prevede la creazione di una particella per volta definendone il raggio, la posizione ed il numero identificativo (*ID number*). Sulla base delle informazioni ricevute il software inserisce l'elemento nella posizione fissata, sovrapponendolo ad eventuali altri già esistenti. La sovrapposizione al momento della generazione può creare tensioni e forze di repulsione iniziali molto elevate, ragione per cui questa procedura non si utilizza frequentemente;
- quella generale, che consiste nel creare un insieme iniziale di particelle specificandone le dimensioni dell'area occupata, l'intervallo di variazione del raggio (*rmin* ed *rmax*) e la relativa distribuzione granulometrica. Il software provvede a creare queste *balls* disponendole in modo casuale all'interno dello spazio fissato non permettendo però la sovrapposizione tra particelle o tra particelle ed elementi al contorno. Questa procedura è quella più utilizzata in quanto consente di generare sistemi formati da molti elementi in tempi di calcolo ragionevoli.

È possibile raggiungere la densità desiderata utilizzando diverse tecniche (Dolezalova, 2002):

- per spostamento delle pareti: consiste nell'avvicinare reciprocamente i confini del sistema fino al raggiungimento della densità desiderata. Questo tipo di approccio presenta notevoli problemi in quanto andando a spostare le pareti, si perde la geometria iniziale del modello; inoltre la convergenza all'equilibrio è molto lenta, in quanto il disturbo che si genera ai confini deve propagarsi all'interno e la distribuzione di particelle ottenuta non è uniforme;

- per espansione dei raggi (*generation by radius expansion*): consiste nel creare un insieme iniziale di particelle di piccolo raggio, successivamente dilatate fino al raggiungimento della densità prevista. È il metodo più semplice ed affidabile, in quanto mantiene le dimensioni iniziali del sistema e, espandendo le particelle dello stesso fattore in tutte le direzioni, gli conferisce proprietà uniformi ed isotrope;
- per repulsione esplosiva (*generation by explosive repulsion*): consiste nel creare un insieme iniziale di particelle di raggio tale da raggiungere la porosità desiderata. Queste ultime sono disposte casualmente all'interno del sistema con conseguenti sovrapposizioni ed elevate forze di repulsione che possono raggiungere valori tali da permettere ad alcune *balls* di sfuggire attraverso le pareti del sistema.

Sfruttando la logica *clump* e quella *cluster*, il software prevede inoltre la possibilità di modellare elementi di forma generica ottenuti assemblando particelle circolari che mantengono la stessa posizione reciproca durante l'intera simulazione (figura 2.5). L'unità così formata può essere dotata di comportamento rigido (*clump*) o deformabile (*cluster*). In questo modo è possibile quindi ottenere una rappresentazione molto fedele alla realtà fisica.

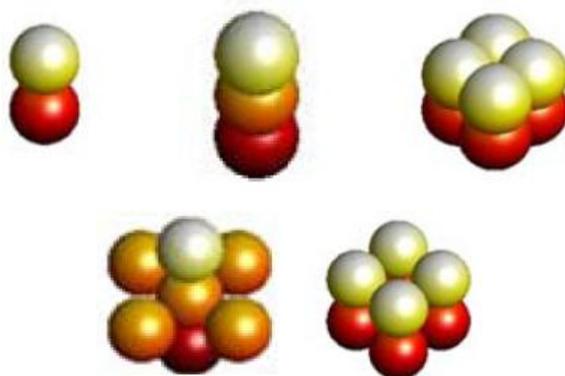


FIGURA 2.5: ELEMENTI CLUMP O CLUSTER (KONIETZKY, 2002)

### 2.2.2. I modelli di contatto

Il passo fondamentale per la schematizzazione di un sistema tramite PFC è la definizione di un modello di contatto, il quale si compone in generale di tre parti (Itasca, 2002):

- un modello di rigidità;
- un modello di slittamento;
- un modello di legame.

Il modello di rigidità fornisce una relazione tra le componenti normale ( $F_n$ ) e tangenziale ( $F_s$ ) della forza di contatto ed i relativi spostamenti ( $U_n, U_s$ ):

$$F_n = k_n \cdot U_n \quad (2.16)$$

$$F_s = -k_s \cdot U_s \quad (2.17)$$

dove  $k_n$  e  $k_s$  sono rispettivamente le rigidità normale e tangenziale.

Il software in particolare ne prevede due tipologie: il modello lineare e quello di Hertz-Mindlin.

Il modello lineare, molto diffuso per la sua semplicità, ipotizza una relazione lineare tra le forze e gli spostamenti.

Note due particelle  $A$  e  $B$  in reciproco contatto,  $k_n$  e  $k_s$  si valutano mediante le equazioni di seguito riportate (Cundall, 1988):

$$k_n = \frac{k_n^A \cdot k_n^B}{k_n^A + k_n^B} \quad (2.18)$$

$$k_s = \frac{k_s^A \cdot k_s^B}{k_s^A + k_s^B} \quad (2.19)$$

Il modello di Hertz-Mindlin è di tipo elastico non lineare e valuta le rigidzze  $k_n$  e  $k_s$  in funzione del modulo di taglio ( $G$ ) e del coefficiente di Poisson ( $\nu$ ) di due particelle  $A$  e  $B$  a contatto mediante le equazioni di seguito riportate (Mindlin, 1953):

$$k_n = \left( \frac{2 \cdot \langle G \rangle \cdot \sqrt{2} \cdot \tilde{R}}{3 \cdot (1 - \langle \nu \rangle)} \right) \cdot \sqrt{U_n} \quad (2.20)$$

$$k_s = \left( \frac{2 \cdot (3 \cdot \langle G \rangle^2 \cdot (1 - \langle \nu \rangle) \cdot R^{1/3})}{(2 - \langle \nu \rangle)} \right) \cdot |F_i^n|^{1/3} \quad (2.21)$$

dove:

$U_n$  è la sovrapposizione tra le due particelle a contatto;

$|F_i^n|$  è la forza di contatto in direzione normale.

Indicando con  $R^{[A]}$  ed  $R^{[B]}$  i raggi delle due sfere a contatto, i termini delle precedenti formule si valutano secondo quelle di seguito indicate (Di Renzo et al., 2004):

$$\text{contatto particella-particella: } \tilde{R} = \frac{2 \cdot R^{[A]} \cdot R^{[B]}}{R^{[A]} + R^{[B]}} \quad (2.22)$$

$$\langle G \rangle = 0,5 \cdot (G^{[A]} + G^{[B]}) \quad (2.23)$$

$$\langle \nu \rangle = 0,5 \cdot (\nu^{[A]} + \nu^{[B]}) \quad (2.24)$$

$$\text{contatto particella-parete: } \tilde{R} = R^{[ball]} \quad (2.25)$$

$$\langle G \rangle = G^{[ball]} \quad (2.26)$$

$$\langle \nu \rangle = \nu^{[ball]} \quad (2.27)$$

Il modello di slittamento è una proprietà intrinseca delle entità a contatto, particella-particella o particella-elemento al contorno.

La condizione di slittamento si ha quando la componente tangenziale della forza ( $F_t^i$ ) eguaglia il valore massimo ammissibile della forza di contatto tangenziale ( $F_t^{\max}$ ). Questo valore è dato dal coefficiente di attrito minimo tra le entità a contatto ( $\mu$ ) moltiplicato per il modulo della componente normale di compressione della forza ( $F_n^i$ ). La condizione affinché si abbia slittamento si può quindi esprimere come:

$$F_t^i \geq F_t^{\max} = \mu \cdot |F_n^i| \quad (2.28)$$

Per quanto riguarda il modello di legame, PFC prevede due diverse tipologie.

La prima è il legame di contatto (*contact bond*), che riproduce l'effetto d'adesione che si esplica nel punto di contatto e può essere visto come un insieme di due molle elastiche con rigidzze normale e tangenziale costanti agenti nel punto di sovrapposizione (figura 2.6). È definito dalle componenti normale (*n\_bond*) e tangenziale (*s\_bond*) della forza di contatto. Preclude lo scorrimento reciproco degli elementi adiacenti e non ne impedisce la rotazione, che può essere causata da un momento agente nel punto di sovrapposizione (figura 2.7).

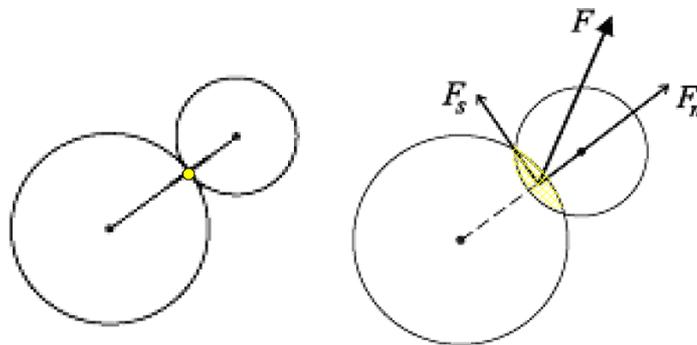


FIGURA 2.6: CONTACT BOND (ITASCA, 2002)

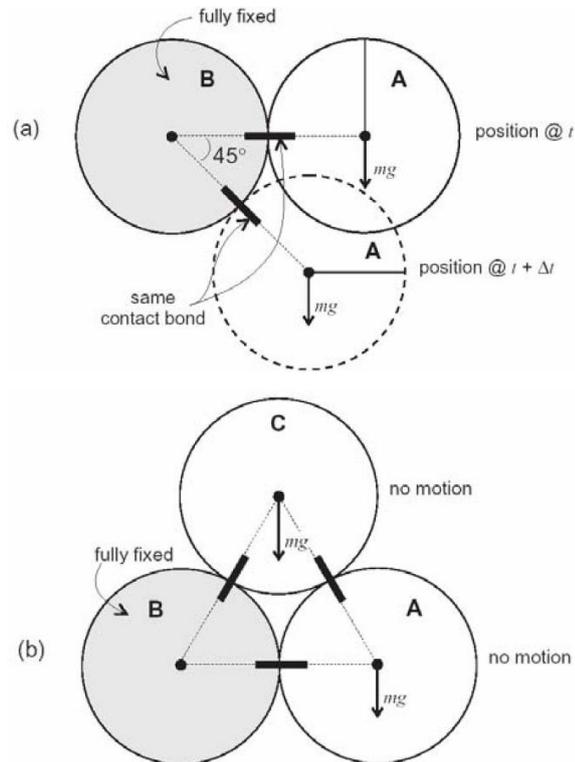


FIGURA 2.7: ROTAZIONE SENZA SCORRIMENTO PERMESSA DAL CONTACT BOND TRA DUE (A) E TRE (B) PARTICELLE (ITASCA, 2002)

La seconda tipologia di modello di legame è quello parallelo (*parallel bond*), che riproduce l'effetto d'adesione di un materiale aggiuntivo depositatosi dopo che le particelle sono giunte a contatto, la cui rigidità agisce in parallelo con quella di contatto (da qui il nome del modello) (figura 2.8). Può essere visto come un insieme di molle elastiche con rigidità normale e tangenziale costanti, uniformemente distribuite su una sezione trasversale circolare o rettangolare situata nel piano di contatto e centrata nel punto di contatto. Ogni carico aggiuntivo applicato alle due particelle, dopo che si è instaurato il legame parallelo, è suddiviso in modo proporzionale tra la molla del contatto e quella del legame stesso che può trasmettere sia forze che momenti tra le particelle. Questo legame si utilizza generalmente per modellare materiali coesivi ed è definito dalla componente normale della forza di contatto ( $pb\_nstrength$ ), da quella tangenziale ( $pb\_sstrength$ ) e dalle rigidità normale ( $pb\_kn$ ) e tangenziale ( $pb\_ks$ ).

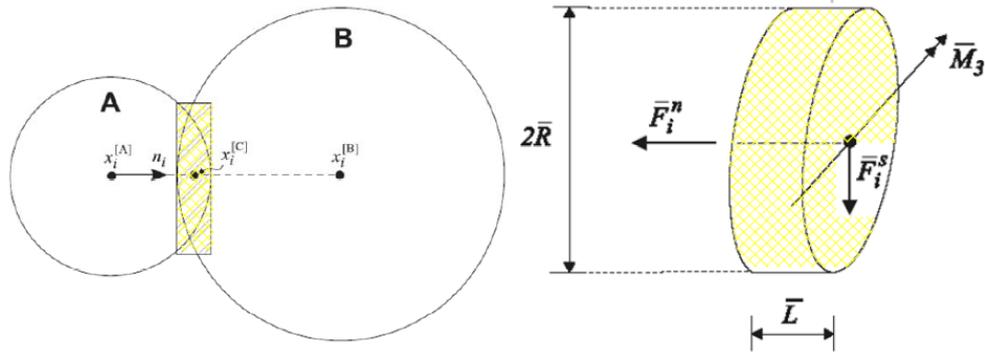


FIGURA 2.8: PARALLEL BOND (ITASCA, 2002)

Le risultanti delle forze e dei momenti che si generano nel punto di contatto si valutano componendoli nelle direzioni normale ( $n$ ) e tangenziale ( $s$ ) al piano di contatto. Per la prima si ottiene:

$$\bar{F}_i = \bar{F}_i^n + \bar{F}_i^s \quad (2.29)$$

Queste risultanti assumono valore nullo nell'istante in cui si forma il contatto ed aumentano ad ogni *time step* successivo in funzione degli spostamenti e delle rotazioni subite dalle due entità a contatto.

L'incremento subito nell'intervallo  $\Delta t$  si valuta secondo le seguenti espressioni:

$$\Delta \bar{F}_i^n = (k_n \cdot \Delta U_n \cdot \pi \cdot \bar{R}^2) \cdot n_i \quad (2.30)$$

$$\Delta \bar{F}_i^s = (k_s \cdot \Delta U_s \cdot \pi \cdot \bar{R}^2) \quad (2.31)$$

$$\Delta \bar{M}_3 = (k_n \cdot \Delta \theta_3 \cdot I) = k_n \cdot I \cdot (\omega_3^{[B]} - \omega_3^{[A]}) \cdot \Delta t \quad (2.32)$$

dove  $\bar{R}$  è il raggio dell'area di contatto,  $I$  è il momento d'inerzia.

Si ottiene pertanto:

$$\bar{F}_i^n \leftarrow \bar{F}_i^n + \Delta \bar{F}_i^n \quad (2.33)$$

$$\bar{F}_i^s \leftarrow \bar{F}_i^s + \Delta \bar{F}_i^s \quad (2.34)$$

$$\bar{M}_3 \leftarrow \bar{M}_3 + \Delta \bar{M}_3 \quad (2.35)$$

Il valore massimo degli sforzi di flessione ( $\sigma_{\max}$ ) e di taglio ( $\tau_{\max}$ ) nel contatto è pari a (Kruyt, 1993):

$$\sigma_{\max} = \frac{\overline{F}_i^n}{\pi \cdot R^2} + \frac{\overline{M}_3}{I} \quad (2.36)$$

$$\tau_{\max} = \frac{\overline{F}_i^s}{\pi \cdot R^2} \quad (2.37)$$

### 2.2.3. Applicazione delle condizioni iniziali ed al contorno

Dopo aver generato e compattato il sistema si applicano le condizioni iniziali e quelle al contorno alle particelle ed alle pareti. Alle prime è possibile applicare velocità di traslazione e di rotazione, forze e momenti; le seconde, invece, possono essere soggette solo a velocità e non a forze. Le sollecitazioni così applicate rimangono costanti durante tutta la simulazione.

### 2.2.4. L'interpretazione dei risultati

I parametri di controllo dei risultati ottenuti si valutano all'interno di un'area circolare detta cerchio di misura (*measurement circle*) specificata dall'utente.

Al suo interno è possibile valutare i seguenti indici:

- *numero di coordinazione* ( $C_n$ ): è definito come il numero medio di contatti per particella e si valuta con la seguente espressione (Itasca, 2002):

$$C_n = \frac{\sum_{N_b} n_c^{(b)}}{N_b} \quad (2.38)$$

dove  $N_b$  è il numero di particelle il cui centro è interno al cerchio di misura ed  $n_c^{(b)}$  è il numero di contatti della particella ( $b$ ). I sistemi caratterizzati da un elevato valore di  $C_n$  sono in grado di esplicare buone resistenze meccaniche (O'Sullivan et al., 2004).

- *frazione dei contatti in scorrimento*: valuta la frazione di contatti interni al cerchio che hanno subito scorrimento;
- *porosità* ( $n$ ): è definita come il rapporto tra l'area totale dei vuoti all'interno del cerchio di misura ( $A_v$ ) e l'area dello stesso ( $A_c$ ) secondo la formula (Itasca, 2002):

$$n = \frac{A_v}{A_c} = \frac{A_c - A_p}{A_c} = 1 - \frac{A_p}{A_c} \quad (2.39)$$

dove  $A_p$  è l'area del cerchio occupata dalle particelle così calcolata:

$$A_p = \sum_{N_p} A^{(p)} - A_s \quad (2.40)$$

con  $N_p$  è il numero di particelle che intersecano il cerchio di misura,  $A^{(p)}$  è l'area della particella ( $p$ ) contenuta nel cerchio,  $A_s$  è l'area delle sovrapposizioni tra le particelle interne al cerchio.

Se si utilizza la procedura di compattazione per espansione, è possibile valutare il coefficiente moltiplicatore dei raggi ( $m$ ) per variare la porosità del sistema dal valore iniziale  $n_0$  a quello finale  $n$ . Indicando con  $R_0$  il raggio iniziale di una particella del sistema e con  $R$  quello finale, si ottiene (Itasca, 2002):

$$R = m \cdot R_0 \quad (2.41)$$

Semplificando la (2.39):

$$n \cdot A_c = A_c - \sum \pi \cdot R^2 \quad (2.42)$$

$$\sum R^2 = \frac{A_c \cdot (1-n)}{\pi} \quad (2.43)$$

Si ottiene pertanto:

$$\frac{\sum R^2}{\sum R_0^2} = \frac{1-n}{1-n_0} \quad (2.44)$$

Sostituendo la (2.41) nella (2.44):

$$m = \sqrt{\frac{1-n}{1-n_0}} \quad (2.45)$$

## **CAPITOLO 3**

### **APPLICAZIONI DEL METODO DEM E MODELLAZIONE NUMERICA DEL CONGLOMERATO BITUMINOSO**

#### **3.1. Storia del metodo agli elementi distinti particellari**

All'inizio degli anni '70 Cundall ha sviluppato il metodo degli elementi distinti particellari con l'obiettivo di studiare il fenomeno della rottura progressiva degli ammassi rocciosi, schematizzati come un insieme di elementi discreti, interagenti fra loro mediante i parametri d'attrito e rigidità. La novità più importante è rappresentata dal fatto che i blocchi sono liberi di distaccarsi dall'ammasso, quindi sono capaci di traslare e ruotare, scambiarsi forze.

Con tale simulazione Cundall pone le basi teoriche del metodo: l'algoritmo è governato dalle leggi forza-spostamento e del moto, l'analisi avviene per cicli successivi.

Passati altri dieci anni Cundall e Strack sviluppano un nuovo codice di calcolo ad elementi distinti particellari denominato *Ball* per la rappresentazione numerica in due dimensioni del materiale granulare, includendo nei modelli anche gli effetti dello smorzamento e della velocità di applicazione del carico. Questo software è stato validato comparando le immagini della distribuzione delle forze di contatto nei modelli con le fotografie ottenute dall'analisi fotoelastica dei provini reali (De Josselin et al., 1969).

Cundall e Strack hanno poi utilizzato il programma *Ball* per la simulazione di provini con 100 e 1000 particelle, sottoposti a cicli di carico e scarico, indagando i meccanismi microscopici che correlano la massa dell'elemento alla forza di contatto (figura 3.1).

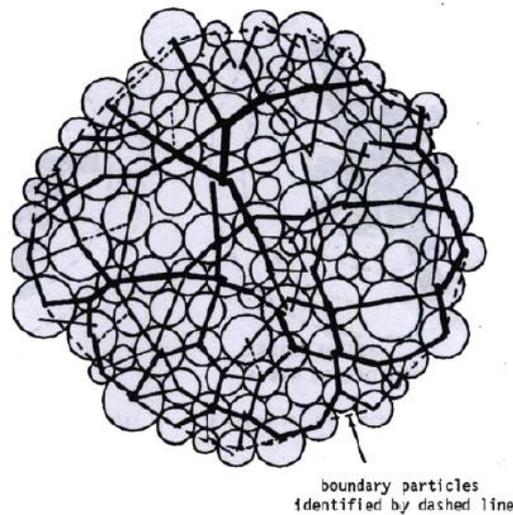


FIGURA 3.1: DISTRIBUZIONE FORZE CONTATTO DEL PROVINO CON 100 PARTICELLE  
(CUNDALL E STRACK, 1979)

Negli anni '80 il codice di calcolo continua il suo sviluppo per merito di Cundall, Drescher e Strack: sono state introdotte nuove metodologie per misurare nel modello il valore medio delle tensioni e delle deformazioni, sono stati inoltre implementate nuove condizioni al contorno e nuovi elementi *boundary*.

Successivamente Cundall ha sviluppato il codice di calcolo *Trubal* per la modellazione di insiemi tridimensionali costituiti da elementi di forma sferica, che vengono generati in modo casuale all'interno di un volume di confinamento, fino ad ottenere la densità desiderata. Un algoritmo di servo controllo permette di far convergere il modello, per un dato livello tensionale isotropo, verso la nuova condizione di equilibrio.

I risultati delle simulazioni hanno confermato quelli sperimentali ottenuti in laboratorio da Ishibashi e Chen (1988) con test biassiali; nella simulazione del test triassiale il software si dimostra ancora impreciso nel rappresentare correttamente la deformazione volumetrica.

Thornton modificando il codice *Trubal*, crea una nuova versione denominata *Granulate*, che permette di modellare il meccanismo della frattura in un insieme di particelle legate.

Nel codice di calcolo *Granulate* gli elementi possiedono quindi un'energia superficiale con funzione auto-adesiva, che consente l'attrazione reciproca delle particelle (Thornton et al., 1997).

La prima versione del *Particle Flow Code*, software commerciale utilizzato in questa tesi, è datata 1995 ed è stata utilizzata da Hazzard per lo studio dell'innesco e della propagazione della frattura nella roccia. Con il software è stato modellato il comportamento meccanico per diversi tipi di roccia, riproducendo così la geometria della struttura microscopica e definendo appropriati modelli di legame per i contatti (Hazzard et al., 2000). Mediante il confronto tra i risultati di laboratorio e le simulazioni è stata confermata l'affidabilità del modello di rottura DEM per l'analisi del meccanismo di frattura del granito.

McDowell e Harireche (2002) hanno usato il programma PFC per studiare la meccanica della frattura nel singolo grano di terreno, simulando la compressione di una particella modellata con un insieme di elementi sferici reciprocamente legati nei punti di contatto. Calibrati i parametri microscopici del sistema in base alle reali proprietà del grano di terreno, la simulazione ha fornito una resistenza alla compressione simile a quella ottenuta in laboratorio.

I due ricercatori hanno inoltre riprodotto con il software PFC una prova edometrica, modellando ciascun grano di sabbia con un insieme di particelle legate reciprocamente (figura 3.2).

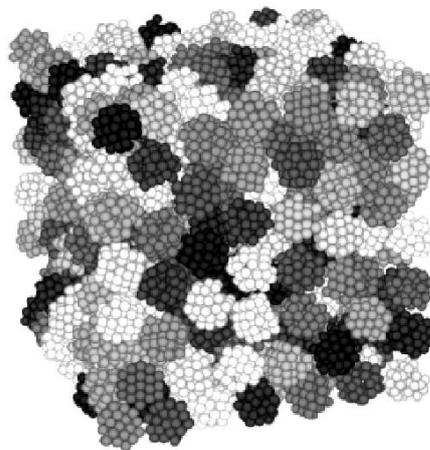


FIGURA 3.2: CLUSTER PER LA SIMULAZIONE DEI GRANI DI SABBIA (MCDOWELL E HARIRECHE, 2002)

Le simulazioni hanno sviluppato una tensione di rottura inversamente proporzionale alle dimensioni dei grani di sabbia, che risulta comunque essere inferiore a quella determinata in laboratorio; la causa probabilmente è da ricercare nella diversa forma tra le particelle modellate e reali.

Il metodo DEM si è comunque dimostrato uno strumento in grado di riprodurre correttamente il meccanismo di rottura dei grani di terreno, permettendo così lo studio di aspetti microscopici legati alla risposta macroscopica del materiale granulare (McDowell e Harireche, 2002).

Dolezalova ha modellato una prova di compressione su provini di sabbia Zbraslav di media resistenza, mediante un insieme di particelle con parametri microscopici opportunamente calibrati (Dolezalova et al., 2003). Nel modello DEM, durante la simulazione, l'influenza del cammino tensionale sulla risposta deformativa è risultata essere in accordo con quella determinata in laboratorio.

Powrie (2005) ha riprodotto una prova di compressione biassiale con un modello DEM formato da 10000 particelle rigide; la singola particella è stata schematizzata mediante una coppia di elementi di forma sferica cementati nel corrispondente punto di contatto. Sono stati investigati, durante la simulazione, gli effetti dell'attrito interparticellare, della porosità e dell'attrito tra la piastra di carico ed il modello, sulla risposta macroscopica. Nell'analisi dei risultati è stata inoltre considerata l'influenza della forma per le coppie di particelle legate. Il modello con angolo di attrito interparticellare pari a  $26^\circ$  ha fornito dei risultati concordi alla prova di laboratorio.

Le modellazioni DEM di prove su terreni o rocce disponibili in bibliografia sono ancora numerose; si ricordano per concludere le seguenti: simulazione della prova di compressione per una roccia dura con comportamento anisotropo (Wanne, 2003), modellazione di un test di trazione a cicli ripetuti (Konietzky et al., 2003) e la simulazione del test biassiale per valutare la resistenza a taglio di una sabbia sintetica (Zhou e Chi, 2003).

### **3.2. Prove triassiali DEM e meccanismi boundary**

Il test triassiale è probabilmente il test di laboratorio più importante per l'ingegneria geotecnica.

Si ricorda che tale prova viene eseguita su un provino cilindrico (racchiuso in una membrana di lattice) confinato lateralmente da un liquido in pressione. Superiormente ed inferiormente il provino è collegato a piastre rigide. Inizialmente il provino viene consolidato sotto l'azione di una pressione isotropa (portando in pressione il liquido), in seguito viene applicata la sollecitazione assiale tramite il movimento a velocità costante della piastra superiore. I dettagli della prova verranno descritti nel seguito della tesi.

Dato l'uso estensivo del test triassiale nella pratica e nella ricerca, è importante conoscere accuratamente ogni dettaglio della risposta dei materiali testati.

Riconoscendo questo, le strumentazioni di misura utilizzate dai ricercatori sono avanzate (Cui et al., 2007), ad esempio inclinometri montati all'interno del provino. Alcuni hanno utilizzato analisi d'immagine per studiare gli spostamenti delle particelle dall'esterno del campione; altri hanno tentato di studiare ciò che accade dentro il provino: sono state esaminate le sezioni con iniezioni di resina e sono state utilizzate tomografie ai raggi x.

Nonostante tutte queste strumentazioni, alcune misurazioni rimangono intrattabili nella pratica, come la misura delle forze interparticellari.

Utilizzando il metodo agli elementi discreti è possibile una migliore comprensione delle interazioni microscopiche subite dalle particelle durante un test triassiale.

Il metodo agli elementi discreti è un metodo di analisi numerica per i materiali granulari, incluse le terre, che studia le interazioni tra le particelle e dà informazioni sui loro spostamenti: le rotazioni e le interazioni sono monitorate durante la simulazione e successivamente analizzate.

Il modello *DEM*, che usa particelle di geometria semplice, rappresenta un utile approccio per capire meglio le interazioni microscopiche nel test triassiale.

Per modellizzare accuratamente la risposta del materiale granulare nell'apparato triassiale, e di conseguenza ottenere risultati paragonabili con la prova reale, è importante riprodurre le condizioni al bordo in modo corretto.

Simulare accuratamente la cella triassiale non è cosa semplice: bisogna ricreare al meglio la membrana di lattice deformabile che racchiude il campione, alla quale è applicata una pressione idrostatica.

Vari ricercatori hanno simulato test triassiali utilizzando il metodo DEM, tra cui Thornton (2000), O'Sullivan et al. (2003), Ng (2004), e Tsunekawa & Iwashita (2001). Le condizioni al bordo utilizzate in questi primi studi, sono rispettivamente confini periodici, confini rigidi, confini idrostatici e membrane flessibili. Uno degli approcci più moderni ed interessanti per la simulazione della cella triassiale è quello *mixed boundaries*, (Cui et al., 2007), descritto in seguito.

Il primo fra tutti i metodi teorizzati è quello delle *periodic boundaries*, tale metodo non richiede elementi di bordo addizionali od algoritmi di interazione tra le particelle bordo. Il volume rappresentativo si ripete da sé in tutte le direzioni: se il volume rappresentativo è un prisma rettangolare, la parte superiore è collegata a quella inferiore, il lato destro è collegato a quello sinistro ed il fronte è collegato con il retro. Per esempio, se le particelle escono da sopra, vengono reintrodotti da sotto. Lo sforzo è usualmente applicato ai bordi periodici e le forze sono ottenute statisticamente.

L'approccio *rigid boundaries* è stato utilizzato per simulare test di taglio e test di taglio diretti (Bashir and Goddard 1991; Ng and Wang 2001). Questo metodo considera un elemento addizionale di massa infinita al quale può essere imposto movimento. Comunque si riscontrano problemi in quanto non c'è movimento al bordo dovuto alle forze di contatto tra le particelle e i bordi rigidi.

L'angolo d'attrito ricavato da simulazioni con l'approccio *periodic boundaries* o col metodo *rigid boundaries* differisce dal risultato derivato da test triassiali su materiali granulari. Inoltre il modulo elastico simulato ha valori mediamente elevati (Ng, 2004).

Abbiamo poi le *flexible boundaries* (Cundall 1989). In questo meccanismo sono create particelle addizionali; ad esempio, nel test triassiale convenzionale, allo scopo di simulare una membrana di gomma. I centri delle particelle di confine sono i vertici di una maglia di triangoli su cui viene distribuita la pressione. Il maggior inconveniente di questo metodo è che l'aggiunta delle particelle-bordo incrementa in modo significativo l'onere computazionale. Un'altra strada per il metodo dei confini flessibili consiste nell'assegnare le forze direttamente alle particelle di confine senza crearne ulteriori, questo tipo di approccio, ad esempio, è presentato in seguito nel meccanismo *stress-controlled boundary* appositamente adattato al test triassiale (Tsunekawa H. e Iwashita K., 2001).

Infine, si ricorda riguarda l'approccio *Hydrostatic boundary*, appositamente teorizzato per la prova triassiale, nel quale è considerata solo la pressurizzazione dovuta al fluido senza considerare la membrana di lattice.

### **3.2.1. Il meccanismo *Stress-controlled boundary***

Nello studio bidimensionale le condizioni di bordo a sforzo controllato possono essere impostate utilizzando due diversi metodi: il primo consiste nell'utilizzare particelle addizionali usate come confini, nel secondo metodo le forze laterali sono applicate direttamente alle particelle esterne.

Dato che il numero delle particelle addizionali potrebbe essere considerevole e di conseguenza il costo computazionale troppo oneroso, per lo studio tridimensionale è consigliabile il secondo metodo (Tsunekawa e Iwashita, 2001).

La procedura di implementazione è la seguente:

- 1) Individuare le particelle di confine del provino e misurare le coordinate dei loro centri;
- 2) Proiettare le coordinate sul piano cilindrico;
- 3) Trasformare le coordinate cilindriche in piane “aprendo” il cilindro;
- 4) Generare punti virtuali sopra e sotto i bordi;
- 5) Ricavare una mesh tramite la triangolazione di Delaunay;
- 6) Calcolare la forza che agisce su queste aree triangolari;
- 7) Distribuire la forza sulle particelle che sono localizzate nei vertici dei triangoli.

L'immagine 3.3 illustra lo *stress-controlled boundary*, in (a) abbiamo un esempio di modello DEM, in (b) la relativa mesh di triangoli che costituisce il confine.

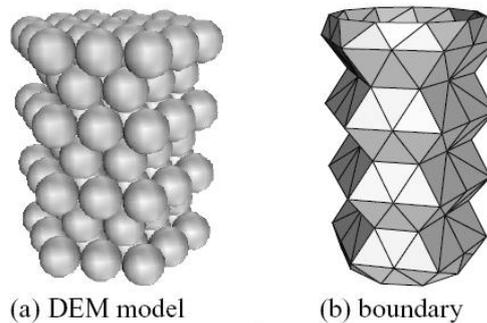


FIGURA 3.3: DEM MODEL E BOUNDARY (TSUNEKAWA E IWASHITA, 2001)

La distribuzione delle forze è ricavata con l'equazione:

$$P_i = \sigma_c \left( A_L \frac{A_i + A_L/N}{A} + A_i \right) \quad (3.1)$$

dove  $A$  è l'area della maglia di triangoli (*area of the triangle mesh*),  $A_i$  è l'area della parte di particella inclusa nel triangolo,  $A_L$  è l'area del triangolo escluse le particelle,  $N$  è il numero di vertici esclusi i nodi virtuali, e  $\sigma_c$  è la forza laterale. Per chiarezza, si veda l'immagine 3.4.

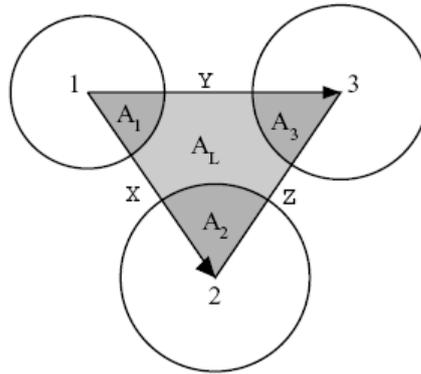


FIGURA 3.4: SIMBOLOGIA DI UN TRIANGOLO DELLA MESH (TSUNEKAWA E IWASHITA, 2001)

### 3.2.2. Il meccanismo *Hydrostatic boundary*

Questa nuova condizione è differente da quelle convenzionali periodiche, rigide o flessibili.

Il meccanismo è stato appositamente sviluppato per il test triassiale e consiste nel simulare la camera di fluido ma non la membrana di lattice (Ng, 2004).

Il concetto di questo nuovo meccanismo è semplice: nel modello è considerata solo la pressurizzazione dovuta al fluido senza considerare la membrana di lattice. In altre parole, rimuoviamo la membrana e lasciamo le particelle in diretto contatto con la pressione del fluido.

Le interazioni tra particelle e confini sono calcolate analiticamente su base geometriche.

Il concetto *hydrostatic boundaries* è stato implementato nel programma *Ellipse3D* (Lin e Ng, 1997) ottenendo il nuovo programma *Ellipse3H*, questo metodo agli elementi distinti utilizza particelle di forma ellissoidale. La prova triassiale viene eseguita sollecitando un provino di forma cubica.

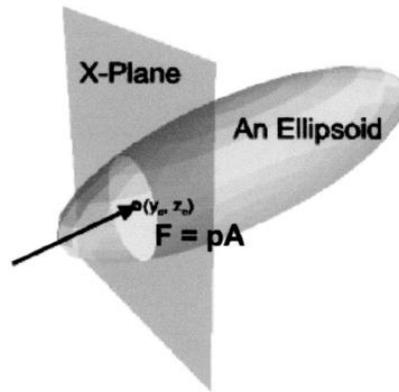


FIGURA 3.5: CONTATTO TRA ELLISSOIDE E PIANO (Ng, 2004)

La figura 3.5 illustra una particella ellissoidica che sporge dal piano x, costituente una parete della cella triassiale cubica.

La forza di contatto normale al piano è riportata nel punto  $(y_c, z_c)$ .

Tale forza è calcolata moltiplicando la pressione idrostatica  $p$  assegnata per l'area d'intersezione  $A$ .

L'area d'intersezione ed il punto di contatto sono determinati analiticamente.

La pressione media applicata nel piano x è calcolata come:

$$\sigma_w = p \frac{\sum_{i=1}^{N_w} A_i}{A_w} \quad (3.2)$$

dove  $A_i$ ,  $A_w$  ed  $N_w$  sono rispettivamente l'area d'intersezione di ogni particella, l'area del piano x ed il numero di contatti tra le particelle ed il piano x.

La forma dell'area d'intersezione è un'ellisse il cui centro, ossia il centro di contatto  $(y_c, z_c)$ , è determinato con l'equazione dell'ellisse. L'area si ottiene comparando i coefficienti delle equazioni dell'ellisse con i coefficienti che riguardano l'inclinazione.

Per la verifica del metodo sono stati generati tredici provini per studiare l'influenza delle principali variabili: forma delle particelle, dimensioni del campione, indice dei vuoti.

Sono stati eseguiti test di compressione triassiale drenata, sia con le condizioni di bordo periodiche che idrostatiche (Ng, 2004).

I risultati ricavati con il meccanismo delle condizioni di bordo periodiche mostrano un incremento dell'angolo di attrito, i risultati ottenuti con le condizioni di bordo idrostatiche riproducono meglio i risultati sperimentali di sabbie reali.

### **3.3. La validazione con sfere d'acciaio e Mixed boundary**

In questo paragrafo vengono illustrate le prime esperienze di validazione di modelli DEM con l'utilizzo di sfere d'acciaio: la validazione utilizzando test fisici di alta fedeltà è importante per stabilire la capacità del metodo agli elementi discreti di cogliere con accuratezza la risposta dei materiali.

Verrà poi approfondito il *mixed boundary approach*, teorizzato appositamente per simulare il test triassiale nel codice DEM tridimensionale. Tale interessante studio, condotto da Cui L., O'Sullivan C. ed O'Neill S. (2007), comprende appunto la verifica del software con l'utilizzo di sfere d'acciaio: per la validazione sono stati effettuati una serie di simulazioni DEM e test di laboratorio su campioni di sfere con disposizione casuale, con attenzione alla sensibilità della risposta macroscopica ai coefficienti d'attrito e alle condizioni di bordo, è stata inoltre compiuta l'analisi dei parametri in scala particellare, includendo l'esame delle forze e degli spostamenti.

Il *mixed boundary approach* può essere ritenuto attualmente uno dei metodi più affidabili per la riproduzione numerica del test triassiale.

#### **3.3.1. Lo studio su campioni di sfere d'acciaio con disposizione regolare**

Ancor prima di questo studio tridimensionale, furono simulati dei test di compressione su gruppi di barre con disposizione regolare esagonale: lo studio si dimostrò utile per studiare la risposta dal punto di vista bidimensionale (O'Sullivan e al., 2002).

La validazione con sfere d'acciaio, prima di essere utilizzata per la validazione del *mixed boundary approach*, è stata utilizzata per modelli DEM tridimensionali di prove di compressione su campioni di sfere con disposizione regolare romboidale e cubica a facce centrali da O'Sullivan C., Bray J. D., Riemer M. F..

La configurazione del campione è ideale e si differenzia considerevolmente dal reale campione di sabbia; comunque il comportamento delle sfere d'acciaio, che rappresentano un materiale granulare ideale, è in relazione alla risposta dei materiali reali.

Le prove consistevano in una serie di test di compressione triassiale e piana su sfere di acciaio e la simulazione degli stessi con la tecnica agli elementi discreti. Per la prova di laboratorio sono stati quindi utilizzati campioni di sfere con disposizione regolare; le sfere, con grado di precisione 25, hanno una variazione massima rispetto il diametro nominale di soli 0,0006 mm.

I test sono stati eseguiti con campioni di particelle di ugual diametro e con altri di particelle con piccole variazioni nelle dimensioni (figura 3.6).

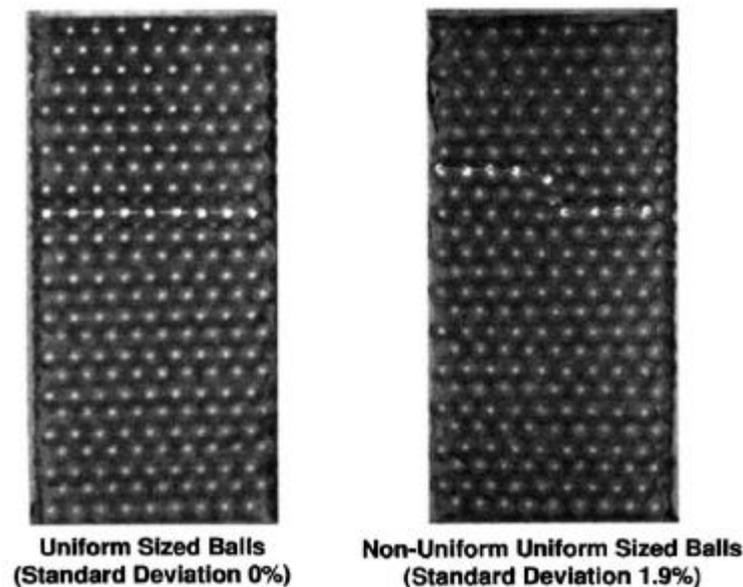


FIGURA 3.6: PROVINI USATI PER LA VALIDAZIONE (O'SULLIVAN E AL., 2002)

Il programma utilizzato per la simulazione è una modifica del codice sviluppato da Lie e Ng (1997) per particelle ellissoidali tridimensionali, che a sua volta è una modifica del codice *Trubal* di Cundall e Strack (1979). La dimensione delle particelle e la densità sono stati scalati per ridurre il tempo della simulazione.

La simulazione numerica ha dato risultati in accordo con quelli osservati in laboratorio, anche se dopo il picco la risposta è molto sensibile al coefficiente di attrito assunto lungo i confini (figura 3.7).

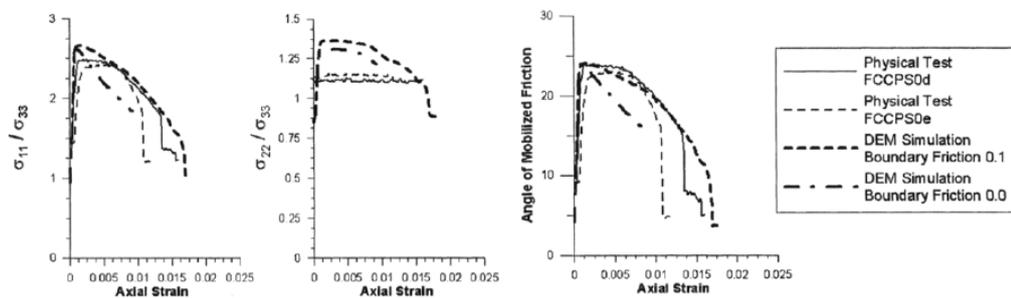


FIGURA 3.7: RISULTATI SIMULAZIONE E TEST FISICI (O'SULLIVAN E AL., 2002)

È stato quindi dimostrato che i risultati della simulazione numerica riproducono le osservazioni di laboratorio se le configurazioni delle particelle, la dimensione e le condizioni al bordo sono accuratamente rappresentate.

### 3.3.2. Meccanismo *Mixed boundary*

Il metodo consiste nell'utilizzare per la simulazione della prova triassiale varie condizioni *boundary*.

Sopra e sotto il provino cilindrico, le piastre della prova di laboratorio sono riprodotte utilizzando "muri" rigidi. I confini laterali verranno spiegati in seguito.

Dato che l'apparato triassiale è simmetrico rispetto l'asse centrale, può essere sufficiente modellare soltanto una "fetta" rappresentativa di campione al fine di guadagnare efficienza e soprattutto velocità computazionale.

Altri ricercatori (Morchen e Walz, 2003) hanno proposto di analizzare strutture simmetriche utilizzando fette confinate da pareti rigide.

A questo fine, una nuova condizione di bordo per l'analisi simmetrica tridimensionale, chiamata *circumferential periodic boundaries* (figura 3.8), è stata proposta da Cui L., O'Sullivan C. ed O'Neill S. (2007).

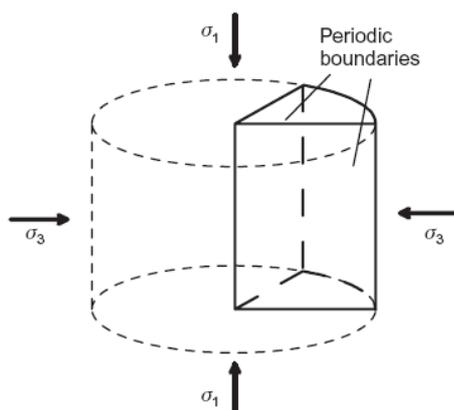


FIGURA 3.8: CIRCUMFERENTIAL PERIODIC BOUNDARIES (CUI ET AL., 2007)

Le particelle, il cui centro esce dal confine O-a, vengono reintrodotti dall'altro confine O-b; se i centroidi delle particelle sono localizzate esattamente lungo l'asse z, queste non possono muoversi sul piano xy. Le forze di contatto che si sviluppano tra le particelle chiuse entro il confine e quelle esterne lungo il confine sono calcolate utilizzando una rotazione del tensore (figura 3.9).

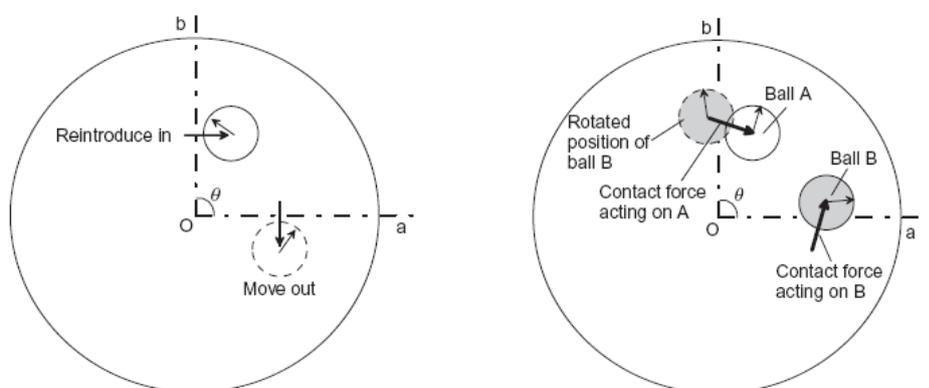


FIGURA 3.9: MOVIMENTO PARTICELLE E FORZE DI CONTATTO (CUI ET AL., 2007)

In teoria l'angolo tra i due confini che racchiudono la fetta può essere arbitrario, al fine di semplificare il calcolo delle forze di contatto è stato scelto un angolo retto. Il campione è quindi localizzato con asse centrale verticale coincidente con l'asse z, le pareti sono lungo gli assi x ed y.

Il movimento delle particelle lungo uno di questi confini è localizzato nell'altro confine utilizzando una rotazione ortogonale nel piano xy, il tensore T è calcolato come segue:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (3.3)$$

Le coordinate  $x'$  ed  $y'$  sono quelle dopo la rotazione,  $x$  ed  $y$  quelle prima della rotazione. L'angolo  $\theta$  è l'angolo compreso tra i confini (la rotazione antioraria è considerata positiva).

La difficoltà maggiore consiste nel simulare la membrana di lattice flessibile: varie membrane "numeriche" sono proposte in letteratura, sia in due che in tre dimensioni.

In questo approccio si considerano le *membrane spheres*, cioè sfere che dovrebbero essere a contatto con la membrana nel test fisico, sono rappresentate da quelle vicino al bordo del campione (figura 3.10).

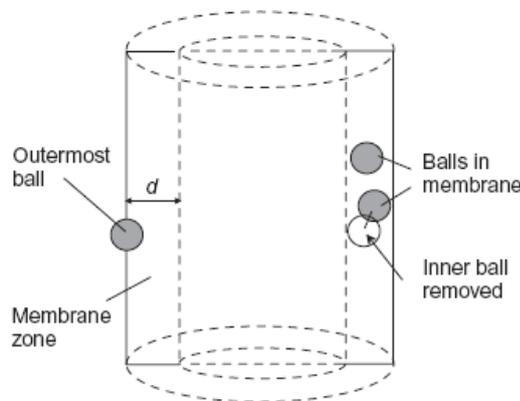


FIGURA 3.10: IDENTIFICAZIONE DELLE MEMBRANE SPHERES (CUI ET AL., 2007)

L'approccio consiste nell'applicare ad ognuna di queste sfere una forza in modo che la pressione media applicata lungo il confine eguagli la pressione applicata in laboratorio.

Per calcolare le forze necessarie, le coordinate polari delle particelle di confine sono proiettate su un piano  $S'$ , così da "stendere" la superficie del cilindro  $S$ .

Nella superficie rettangolare  $S'$  così ottenuta si costruisce il diagramma di Voronoi: dato un insieme finito di punti, il diagramma di Voronoi è la partizione del piano che associa una regione  $V(p)$  ad ogni punto  $p$ , (in questo caso il punto è costituito dal centroide della sfera), in modo tale che tutti i punti di  $V(p)$  siano più vicini a  $p$  che ad ogni altro punto del piano.

La forza applicata ad ognuna delle sfere è calcolata moltiplicando la pressione per l'area di competenza della sfera: tale area è rappresentata dal poligono del diagramma di Voronoi circostante il centroide.

Nella generazione del diagramma di Voronoi è necessario coprire l'intera area della proiezione rettangolare. Il diagramma intorno alle sfere lungo i bordi potrebbe uscire dai limiti nonché lasciare dei vuoti (figura 3.11).

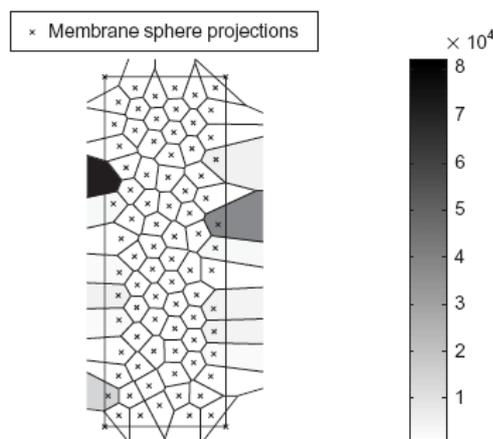


FIGURA 3.11: DIAGRAMMA DI VORONOI DA CORREGGERE (CUI ET AL., 2007)

Per evitare questi problemi si segue questa procedura:

- 1) Si introducono dei punti virtuali sopra e sotto i confini;
- 2) Si introducono i punti laterali: se una particella è vicino al confine ad una certa distanza  $d$ , si introduce sull'altro lato un punto addizionale sporgente  $d$ ;
- 3) Si genera il diagramma di tutti i punti compresi quelli addizionali;
- 4) Infine, se i poligoni escono dai confini superiore ed inferiore, si riportano i vertici su questi confini.

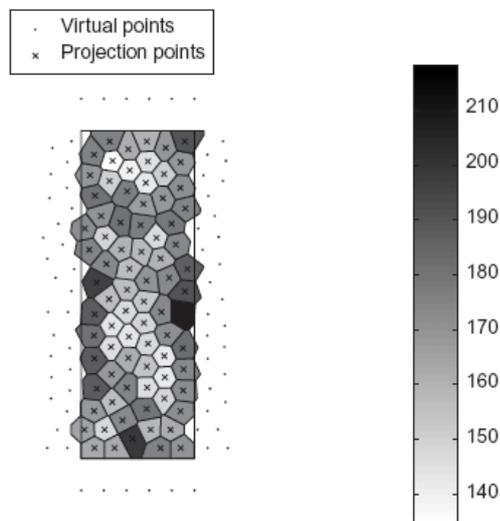


FIGURA 3.12: DIAGRAMMA DI VORONOI CORRETTO (CUI ET AL., 2007)

Nell'immagine 3.12 è rappresentata (in scala di grigi) l'intensità delle forze applicate ad ogni sfera.

È importante riconoscere che, durante la simulazione, le coordinate delle sfere e di conseguenza la geometria della membrana cambia. Pertanto le sfere che fanno parte della membrana e le forze ad esse applicate devono essere aggiornate; questo avviene se lo spostamento accumulato di ogni sfera eccede i limiti prefissati, o la relativa differenza tra lo sforzo radiale interno e lo sforzo sul confine è maggiore rispetto ad una specifica tolleranza.

### **3.3.3. Simulazione e validazione dell'approccio *Mixed boundary* utilizzando sfere d'acciaio**

La simulazione della prova triassiale basata *sull'approccio mixed boundary* utilizza un codice DEM chiamato *3DDEM*, basato su il codice *Ellipse3D* (Lin e Ng, 1997).

Una serie di simulazioni preliminari sono state eseguite per valutare le prestazioni del modello (Cui et al., 2007). I test preliminari consistono nella simulazione con provini costituiti da sfere uniformi con organizzazione cubica a facce centrali, le stime analitiche delle forze di rottura per tali provini è calcolabile (Thornton 1979); quindi sono stati paragonati i risultati delle simulazioni numeriche con i risultati analitici, ottenendo buoni esiti.

La validazione vera e propria è stata realizzata utilizzando una serie di test triassiali di laboratorio con provini in sfere d'acciaio. Ovviamente tra le sfere d'acciaio e le sabbie reali c'è differenza, comunque lo scopo principale è la replica fedele del modello simulato, in modo da ottenere una giusta validazione.

Tutti i test di laboratorio sono stati eseguiti utilizzando sfere di acciaio al cromo grado 25. Sono stati usati due differenti tipi di provini: il primo con sfere di raggio 2,5 mm, il secondo con una miscela di sfere di raggio 2mm, 2,5 mm e 3 mm nelle stesse quantità. I provini hanno diametro 101 mm ed altezza 203 mm. La pressione di confinamento è stata regolata ad 80 kPa.

Per la simulazione DEM le coordinate iniziali delle particelle sono state ottenute utilizzando un algoritmo di generazione casuale di sfere non in contatto. L'indice dei vuoti richiesto è stato ottenuto espandendo gradualmente il raggio e impostando la pressione di confine a 3000 kPa. Usando questo approccio si sono ottenuti i due quarti di cilindro contenenti rispettivamente 3852 e 3848 sfere; questi quarti di cilindro corrispondono a due cilindri interi che contengono 15408 e 15392 particelle con indice dei vuoti pari a 0,615 e 0,617.

I provini di laboratorio sono molto simili: contengono 15382 e 15420 sfere con indice dei vuoti pari a 0,615 e 0,612.

I parametri di input per la simulazione DEM sono equivalenti, tranne che per il valore della densità che è stato scalato per ridurre il costo computazionale.

Nel test triassiale l'area, corrispondente alla sezione trasversale, cresce quando aumenta la deformazione assiale, quindi si adotta la correzione di tale area. In questo test di laboratorio è impossibile misurare le variazioni di volume, in quanto è eseguito senza acqua nel campione, quindi nei risultati di laboratorio la tensione assiale è calcolata dividendo la forza per l'area originale. Per facilitare la comparazione dei risultati di laboratorio con quelli ottenuti nella simulazione, ci si riferisce quindi a quelli con aree non corrette.

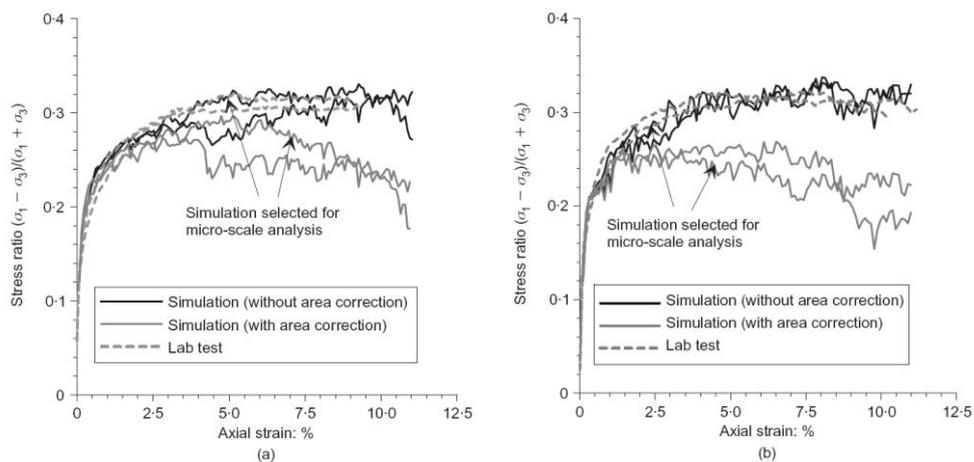


FIGURA 3.13 COMPARAZIONE DEI RISULTATI SIMULATI E DI LABORATORIO (CUI ET AL., 2007)

La variazione nel rapporto di tensione, a confronto con la deformazione assiale per i test di laboratorio e per le simulazioni DEM è illustrata in figura 3.13, da notare che i risultati DEM sono stati entrambi calcolati con e senza correzione dell'area.

La figura 3.13.a illustra la risposta macroscopica per il campione costituito da sfere omogenee e la figura 3.13.b mostra la risposta macroscopica per il campione costituito dalla miscela di sfere con tre diametri.

Come illustrato in figura 3.13 la risposta tensione-deformazione delle simulazioni DEM senza area corretta si accorda abbastanza con le risposte dei test di laboratorio, inclusa la rigidità iniziale e la risposta a grandi deformazioni.

Un'analisi dettagliata dei parametri microscopici, usando i risultati dei modelli DEM, illustra la non uniformità delle tensioni, delle forze di contatto interparticellari, della struttura, e delle deformazioni all'interno dei provini triassiali.

L'anisotropia del materiale tende ad essere migliore più ci si allontana dal confine del campione. Un'analisi delle tensioni locali ha indicato che le misurazioni degli spostamenti delle particelle all'esterno del campione non danno un quadro chiaro della distribuzione interna della tensione, per via del materiale relativamente libero.

Concludendo, l'interessante studio di Cui L., O'Sullivan C. ed O'Neill S. (2007) ha proposto un nuovo efficiente approccio per modellare problemi simmetrici usando il modello DEM. La validazione è stata raggiunta simulando una serie di test fisici triassiali su campioni di sfere d'acciaio.

Il materiale granulare semplice usato in questo studio si differenzia dal materiale reale, ed è stato scelto per rendere fattibili accurati paragoni delle simulazioni numeriche e dei test fisici: se fosse stato usato un materiale granulare più complesso, la qualità della convalida sarebbe stata compromessa.

Informazioni di maggiore qualità sulle proprietà micromeccaniche dei materiali reali potrà essere raggiunta in futuro lavorando su particelle geometricamente più realistiche, comunque prima di incorporare la complessità del terreno reale nelle simulazioni DEM, è importante dimostrare l'accuratezza dei modelli numerici e l'appropriatezza delle condizioni di confine usando materiali granulari semplici, come appunto le sfere d'acciaio.

### **3.4. La modellazione numerica del conglomerato bituminoso**

Il conglomerato bituminoso è un materiale multifase, composto da una miscela di aggregati di varie dimensioni legati da bitume, contenente una certa quantità di vuoti (figura 3.14).

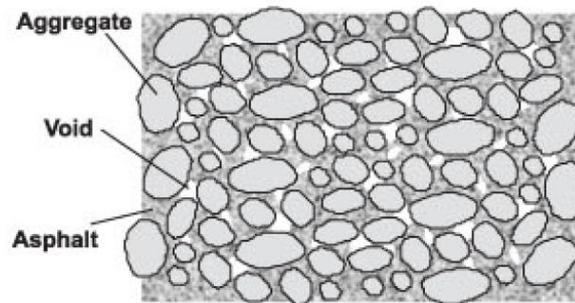


FIGURA 3.14: COMPOSIZIONE DEL CONGLOMERATO BITUMINOSO (YOU E DAI, 2007)

Il conglomerato bituminoso è un materiale eterogeneo, il cui comportamento meccanico è fortemente influenzato dalle proprietà delle fasi che lo costituiscono, in particolare dalle caratteristiche dell'aggregato, dalle proprietà del bitume, e dalle loro reciproche interazioni.

Le dimensioni dell'aggregato variano da meno di 0,075 mm a 37,5 mm in una pavimentazione tipica. Gli aggregati hanno diverse forme, superfici, caratteristiche d'attrito e possono inoltre disporsi con diverso orientamento.

Il bitume è un materiale con proprietà complesse, che dipendono dalla temperatura e dalla frequenza dei cicli di carico.

La struttura del conglomerato bituminoso è quindi complicata, il che rende la previsione delle prestazioni un problema altrettanto difficile. Impiegando qualche semplificazione, comunque, è possibile costruire modelli per arrivare ad una approssimazione delle proprietà fisiche del conglomerato.

Molti ricercatori hanno sviluppato modelli micromeccanici per prevedere le proprietà fondamentali delle miscele basandosi su quelle delle fasi costituenti.

La figura 3.15 illustra un approccio per la modellazione micromeccanica del conglomerato bituminoso e delle pavimentazioni stradali.

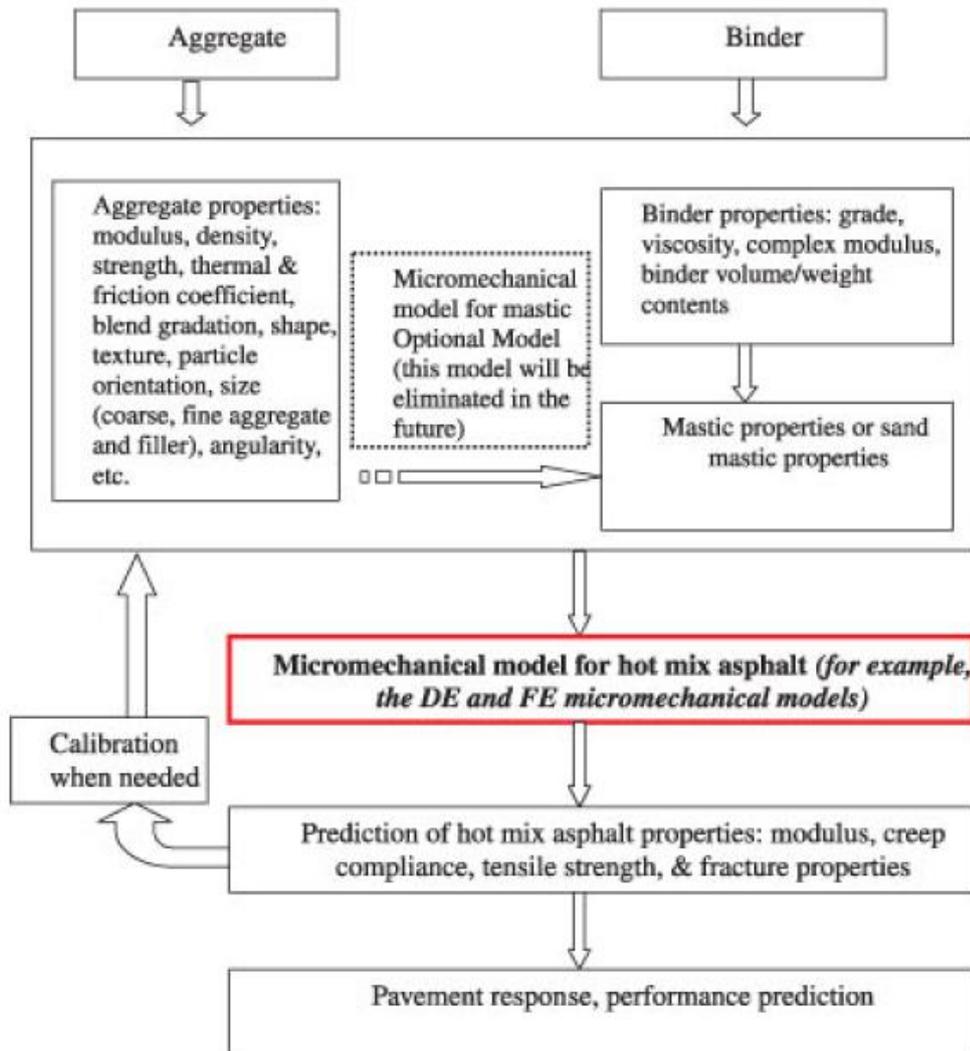


FIGURA 3.15: SCHEMATIZZAZIONE DELL'APPROCCIO MICROMECCANICO PER IL C.B.  
(YOU E DAI, 2007)

Dopo che le proprietà del conglomerato bituminoso sono state definite i modelli, tramite vari approcci, possono arrivare a prevedere le prestazioni della pavimentazione.

Ad oggi, non sono molte le esperienze riguardanti lo studio numerico del conglomerato bituminoso riportate in letteratura (Degiovanni, 2009).

L'utilizzo della micromeccanica per prevedere le proprietà del conglomerato bituminoso è stata oggetto di crescente attenzione solo recentemente, con lo studio di diverse soluzioni, di cui la figura 3.16 riporta un breve schema rappresentativo.

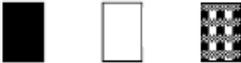
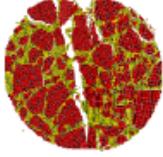
Model Category and Schematic(s)		Sample of Related Literature		
		Model Developers	Applications to Asphalt Mastics and Mixtures	
Non-interacting particles, geometry not specified			Einstein [1] Hashin [2]	Schapery and Lytton [3] Buttler and Roque [4,5]
Non-interacting particles, geometry specified			Hashin and Shtrikman [6] Christensen and Lo [7]	Buttler and Roque [4,5] Buttler et al. [8] Shashidhar and Shenoy [9]
Particle interaction allowed	Simplified geometry specification		<b>Discrete Element Method:</b> Cundall [10,11,12] <b>Finite Element Method:</b> Summary of Literature Provided by Cook, Malkus, and Plesha [13]	Chang and Meegoda [14,15] Rothenburg et al. [16]
	Complex geometry specification	FEM  MDEM		Kose et al. [17] MDEM: Described Herein

FIGURA 3.16: EVOLUZIONE DEI MODELLI MICROMECCANICI (BUTTLAR E YOU, 2001)

Le prime due categorie, in cui non è ammessa l'interazione tra le particelle, forniscono scarsi risultati nella modellazione del conglomerato, a causa dell'eccessiva semplificazione del modello nel simulare i contatti tra gli elementi e la trasmissione di sforzi attraverso lo scheletro litico (Buttler e Roque, 1996 - 1997). Tuttavia, questi modelli hanno comunque fornito risultati utili nello studio di miscele particolari e dei mastici (Buttler et al., 1999 - Shashidhar e Shenoy, 2000).

Sono state condotte applicazioni del metodo FEM per lo studio di mastici a livello microstrutturale (Kose et al., 2000), mediante la ricostruzione della microstruttura del materiale attraverso l'immagine ottenuta da una scansione ottica ad alta risoluzione.

I modelli che non prevedono l'interazione tra le particelle sono semplici ed efficienti, ma non hanno l'accuratezza necessaria per l'applicazione generalizzata ai conglomerati bituminosi, in cui è importante l'interazione tra gli aggregati. La modellazione FEM non è in grado di simulare le variazioni geometriche ai contatti, come lo scorrimento tra gli aggregati o l'apertura di fratture.

Un recente perfezionamento dell'approccio agli elementi finiti per lo studio del conglomerato bituminoso è rappresentato dal lavoro di Dai e Sadd (2004), che hanno proposto il *finite element network model* (FENM).

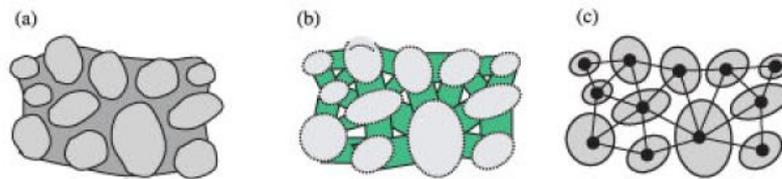


FIGURA 3.17: CONCETTO FENM PER CONGLOMERATO BITUMINOSO (DAI E SADD)

Il conglomerato bituminoso è un materiale multifase che contiene aggregati, bitume, particelle fini, e vuoti, come mostrato in figura 3.17.a.

Per simulare il comportamento del trasferimento di carico interparticellare, vengono assunte delle semplificazioni: si utilizzano aggregati idealizzati di forma ellittica, si assume inoltre che il trasferimento di carico micromeccanico che ha luogo tra ogni coppia di aggregati avvenga attraverso un'effettiva zona di legante rappresentata da una "striscia" rettangolare, come mostrato nel modello aggregato-mastice in figura 3.17.b.

La geometria delle strisce rettangolari si basa sulla dimensione delle particelle vicine, sull'orientamento e sulla lunghezza del vettore (*branch vector*) che collega i centri delle particelle confinanti.

Il trasferimento di carico interparticellare è quindi simulato da una rete di elementi finiti appositamente creati connessi ai centri delle particelle, come mostrato in figura 3.17.c.

Un esempio di implementazione di tale approccio è stato condotto su un provino standard da 102 mm di diametro per il test di trazione indiretta (figura 3.18).

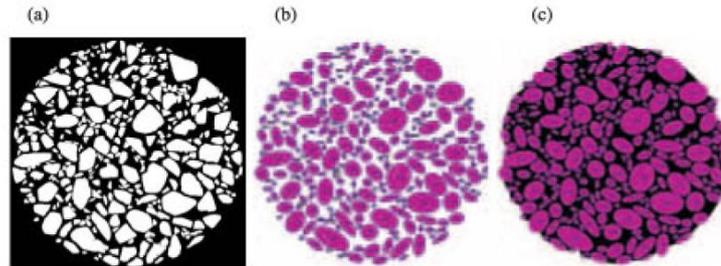


FIGURA 3.18: ESEMPIO APPLICAZIONE FEM (DAI E SADD)

La figura 3.18.a mostra l'immagine in bianco e nero che rappresenta la sezione del conglomerato. Gli aggregati sono stati digitalmente setacciati e riprodotti, i pixel di bordo sono stati approssimati con l'ellisse più adatta (figura 3.18.b), ricercata con un apposito algoritmo. Basandosi sui parametri delle ellissi ottenuti con l'analisi d'immagine, il provino per la simulazione è stato implementato in *Matlab* (figura 3.18.c). Lo spazio tra le ellissi è stato riempito di mastice. Una volta che il modello è stato creato, può iniziare la simulazione vera e propria.

L'approccio FEM riesce a cogliere il carattere microstrutturale e l'interazione aggregato bitume. L'utente ha libertà di scegliere differenti modelli costitutivi per il bitume e definire diversi criteri di rottura. Il FEM è un approccio flessibile e dotato di buona velocità computazionale.

### 3.4.1. L'approccio particellare

Il sistema è rappresentato come un insieme di corpi discreti e distinti che interagiscono tra loro nei punti di contatto, i quali sono responsabili della trasmissione delle forze nel mezzo.

Il metodo degli elementi distinti è in grado di simulare correttamente il comportamento meccanico della struttura microscopica di una miscela bituminosa.

Nel seguito del paragrafo verranno cronologicamente elencate alcune applicazioni di questo moderno approccio.

Rothenburg (1992) ha modellato la struttura interna del conglomerato bituminoso mediante un insieme di particelle con dimensioni variabili, legate reciprocamente con il bitume: per le particelle è stato definito un legame costitutivo di tipo elastico, mentre per il legante, trattato come un fluido *Newtoniano* incomprimibile, è stato ipotizzato un legame viscoelastico (figura 3.19).

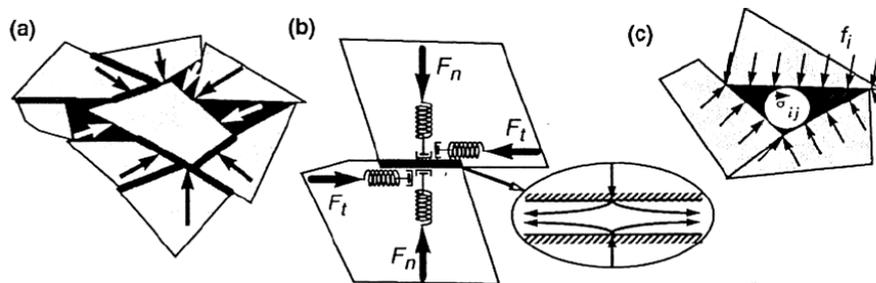


FIGURA 3.19: A) FORZE AGENTI SULLE PARTICELLE, B) INTERAZIONE TRA PARTICELLE, C) INTERAZIONE PARTICELLA-BITUME (ROTHENBURG, 1992)

Sono state eseguite delle simulazioni bidimensionali del *creep test*, che hanno evidenziato la correlazione esistente tra il fenomeno macroscopico del *creep* ed il numero di contatti nei quali le particelle sono coese per mezzo del legante.

È stato quindi dimostrato come la deformazione del materiale sotto carico costante si sviluppi in presenza di un numero di contatti inferiore ad un valore minimo, innescando progressivamente l'ormaiamento della pavimentazione. Tuttavia le simulazioni eseguite erano solo bidimensionali e non è stata effettuata nessuna calibrazione con dati di laboratorio.

Chang e Meegoda (1993) hanno definito il modello di contatto interparticellare *Asbal* per la rappresentazione microscopica del comportamento viscoelastico del bitume mediante la modifica del modello *Trubal* di Cundall.

Il modello costitutivo *Asbal* simula il comportamento viscoelastico del legante mediante l'inserimento, nei punti di contatto interparticellari, di una coppia di elementi in serie molla-ammortizzatore (modello di Voigt) disposta lungo le direzioni normale e tangenziale (figura 3.20).

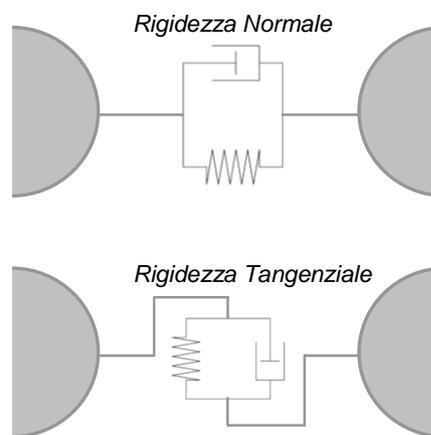


FIGURA 3.20: APPLICAZIONE DEL MODELLO VISCOELASTICO DI VOIGT

I ricercatori hanno quindi eseguito delle simulazioni numeriche con modelli *Asbal* formati da 152 particelle di forma sferica, sollecitati con forze monoassiali statiche o cicliche applicate a velocità costante. Tali simulazioni sono state effettuate al solo scopo di studiare l'influenza sui risultati di importanti parametri contenuti nel sistema di equazioni non-lineari. I due ricercatori, per una più verosimile rappresentazione microscopica del comportamento viscoelastico del bitume, hanno poi sostituito nei punti di contatto il modello costitutivo di Voigt con quello di Burger, ottenuto combinando due coppie di elementi molla-ammortizzatori rispettivamente in serie ed in parallelo.

È stato poi sviluppato un modello microscopico per l'*Hot Mix Asphalt (HMA)* sfruttando *Asbal*; sono state simulate diverse prove di tipo statico e dinamico studiando la risposta del modello al variare dei parametri microscopici. Le simulazioni di provini *HMA* caricati con forza statica hanno evidenziato un comportamento non-lineare tipico dei test di laboratorio, mentre quelle realizzate con modelli caricati ciclicamente hanno sviluppato, in analogia al caso reale, una deformazione permanente nel materiale.

Tra le esperienze positive nel campo della modellazione particellare del conglomerato bituminoso si ricorda quella riportata da Buttlar e You (2001), costituita da un'analisi MDEM (*Microfabric Discrete Element Modeling*), implementando un codice DEM in cui le diverse fasi del conglomerato bituminoso (mastice e aggregati) sono state modellate attraverso *clusters*, insiemi di piccoli elementi uniti tra loro. L'MDEM risulta avere tutti i pregi del DEM, ovvero simulare correttamente il provino di laboratorio, compreso la sua compattazione e la capacità di gestire complesse variazioni di geometria, inclusi i contatti, gli spostamenti e la propagazione della frattura.

Introducendo l'uso di *clusters* è inoltre possibile modellare accuratamente le forme complesse degli aggregati. Inizialmente la simulazione ha previsto l'elaborazione di un provino sintetico di forma circolare, costituito da 130 cilindri di diametro costante pari a 12,5 mm, distribuiti secondo un impacchettamento esagonale e caricati diametralmente per riprodurre un test IDT (figura 3.21).

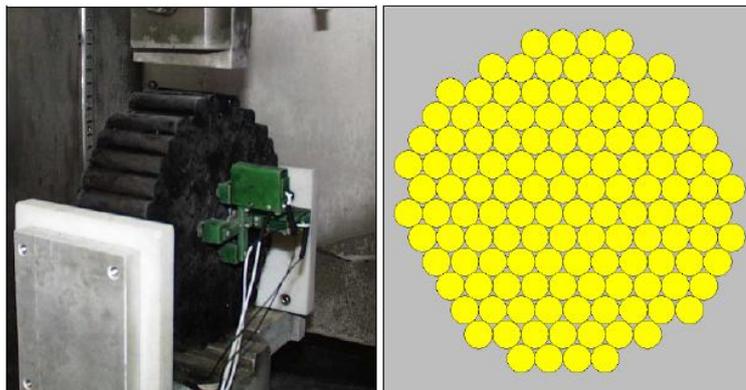


FIGURA 3.21: PROVINO PER IDT E MODELLO NUMERICO (BUTTLAR E YOU, 2001)

Gli elementi sono caratterizzati da un coefficiente di attrito statico di 1,0/1,2 e la rigidezza del legame *parallel-bond* è pari a  $8,84 \times 10^8$  Pa.

La validazione del modello numerico è avvenuta riproducendo lo in laboratorio un provino con aggregati prefabbricati di forma cilindrica, immersi in un mastice di bitume e filler disposti in modo da formare un campione analogo a quello numerico.

La miscela è stata testata alla temperatura di  $-15^{\circ}\text{C}$ , simulando pertanto un comportamento prettamente elastico e fragile.

In un secondo tempo è stata testata e modellata una miscela di Stone Mastic Asphalt (SMA), la cui distribuzione degli inerti è stata appositamente scansionata tramite uno scanner ottico ad alta risoluzione e riprodotta nel modello numerico. La scelta dello Stone Mastic è propedeutica alla modellazione numerica per l'elevato effetto di interlocking che si sviluppa tra gli aggregati, dovuto all'assenza della pezzatura intermedia. Il modello è realizzato secondo logica *cluster*, con la tecnica dell'*up-scaling* ed è caratterizzato da elevato coefficiente di attrito interparticellare, resistenza degli aggregati pari a 5,60 MPa, resistenza del mastice pari a 1,40 MPa e rigidezza del mastice pari a 3,44 GPa, dedotto tramite una relazione empirica.

La modalità di rottura evidenziata dal modello numerico mostra una frattura all'interfaccia mastice-inerti e attraverso almeno uno degli aggregati rappresentati (figura 3.22).

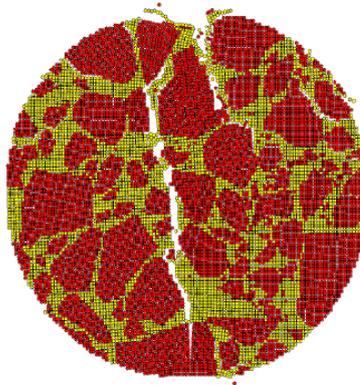


FIGURA 3.22: SIMULAZIONE DEL TEST DI TRAZIONE INDIRETTA (BUTTLAR E YOU, 2001)

Una procedura analoga è stata utilizzata anche nello studio condotto sempre da Buttlar e You nel 2004 per la modellazione del test di modulo complesso: il parametro  $E^*$  ricercato è stato misurato attraverso una prova di trazione/compressione su miscele di Sand Mastic e, successivamente, conglomerato bituminoso testate secondo un range frequenze definite (0,1, 1, 5 e 10 Hz) di temperature relativamente basse ( $-20$ ,  $-10$ ,  $0^{\circ}\text{C}$ ).

La microstruttura bidimensionale del modello è stata ottenuta anche in questo caso attraverso uno scanner ottico ad alta risoluzione, convertendo i bordi degli aggregati, elaborati attraverso il software *Image Pro Plus*, in poligoni inseriti nel software di calcolo per l'assegnazione delle caratteristiche meccaniche.

Il modello è oggetto di un'opportuna calibrazione che modifica il raggio dei poligoni secondo un coefficiente di concentrazione  $c = 0,52$  al fine di by-passare il problema relativo all'interazione tra gli aggregati.

Kim, Wagoner e Buttlar (2006) hanno simulato, il *disk-shaped compact tension test* con un modello bidimensionale ad elementi distinti particellari, al fine di investigare l'influenza dei parametri macroscopici sulla meccanica della frattura alle basse temperature.

Il provino cilindrico intagliato lungo il piano diametrale orizzontale, è stato schematizzato mediante un modello formato da 38'700 particelle con disposizione esagonale e diametro uniforme, interagenti reciprocamente attraverso 115'000 punti di contatto.

Le particelle sono state poi cementate reciprocamente con la tecnica *cluster*, al fine di definire nel modello gli elementi aggregato di forma non arrotondata e mastice.

Per le particelle costituenti il singolo grano di aggregato è stato definito nei corrispondenti punti di contatto un legame di tipo lineare, mentre per il mastice e l'interfaccia aggregato-mastice è stato invece adottato un modello di legame di tipo *softening*.

Tale modello si basa sulla teoria della zona coesiva, che descrive il meccanismo di rottura del materiale mediante il calcolo dell'energia potenziale di coesione  $\phi$  in base alla resistenza di coesione  $\sigma_{\max}$  ed alla lunghezza critica  $\delta_{sep}$  (figura 3.23).

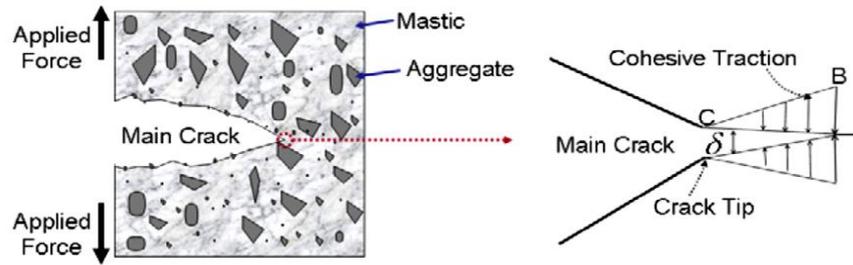


FIGURA 3.23: MECCANISMO DI ROTTURA E CONCETTO DI FRATTURA COESIVA (KIM ET AL. 2006)

L'energia di coesione ( $\phi$ ) è equivalente al lavoro di fessurazione locale del materiale ( $\Gamma$ ) compiuto dalla tensione di trazione  $\sigma(\delta)$  nel conferire a coppie di particelle in reciproco contatto uno spostamento relativo  $\delta$  (figura 3.24).

$$\phi = \int_0^{\delta_{sep}} \sigma(\delta) d\delta \quad (3.4)$$

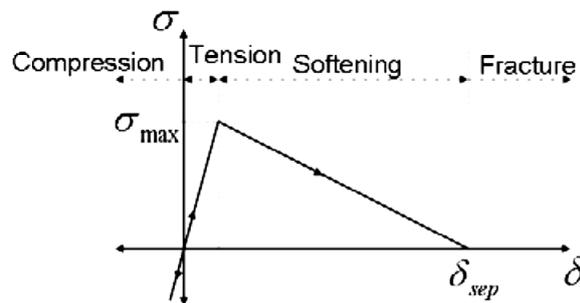


FIGURA 3.24: MODELLO BILINEARE DI FRATTURA COESIVA

La forma e la posizione degli elementi costituenti la matrice litoide sono state riprodotte nel modello mediante l'elaborazione digitale dell'immagine ottenuta per scansione della base superiore del provino (figura 3.25).

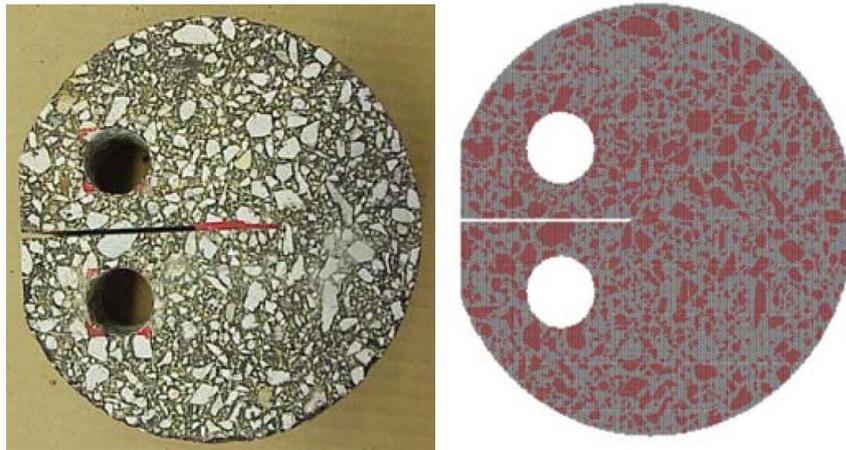


FIGURA 3.25: A) PROVINO PER IL DISK-SHAPED COMPACT TENSION TEST, B) MODELLO DEM FORMATO DA CLUSTER (KIM ET AL., 2006)

I parametri microscopici dei modelli costitutivi, per le diverse fasi della miscela, sono stati quindi calibrati in base a parametri macroscopici ottenuti in laboratorio con prove di compressione monoassiale, di trazione indiretta e di *disk-shaped compact tension*.

Tali prove hanno permesso di calcolare le seguenti grandezze del conglomerato bituminoso: modulo di *Young* ( $E$ ), resistenza a trazione ( $f_t$ ) ed energia di frattura ( $G_f$ ) (figura 3.26).

**Input Parameters ( $E$ ,  $f_t$ ,  $G_f$ )**

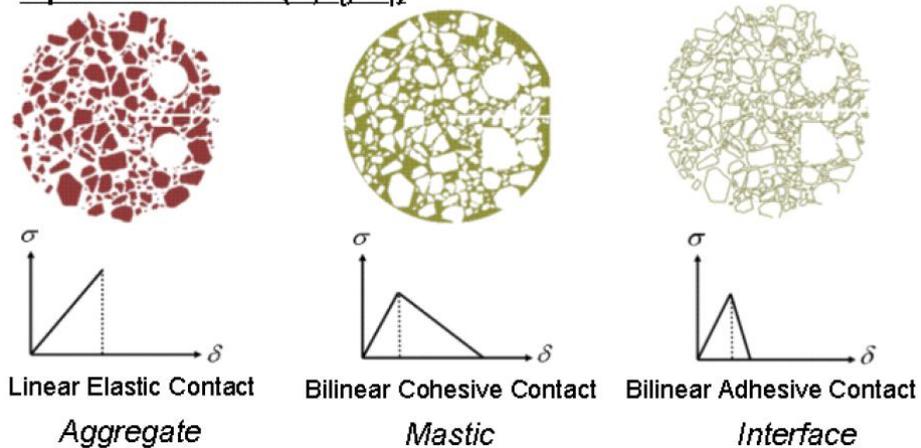


FIGURA 3.26: PARAMETRI MACROSCOPICI PER LA CALIBRAZIONE DEL MODELLO DEM (KIM ET AL., 2006)

La comparazione tra i risultati delle simulazioni DEM e quelli di laboratorio ottenuti impiegando miscele *Hot Mastix Asphalt* alle temperature 0 °C e -10 °C, hanno confermato il buon grado di approssimazione dei modelli al caso reale (figura 3.27).

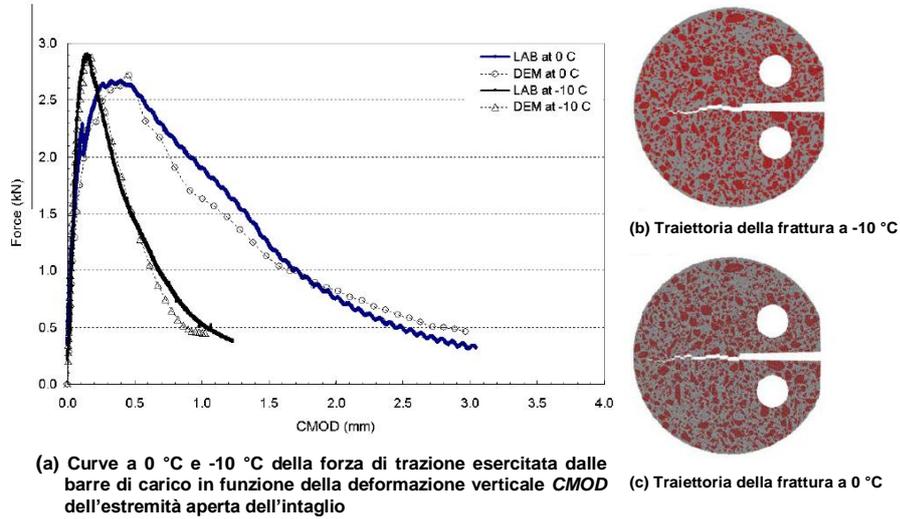


FIGURA 3.27: COMPARAZIONE PROVINO-MODELLO DEM (KIM ET AL., 2006)

Le simulazioni hanno quindi sviluppato un innesco della fessurazione lungo il piano diametrico orizzontale del provino, per stati deformativi superiori a quello relativo al picco di forza, individuando conseguentemente zone di frattura, di *softening*, di trazione e compressione (figura 3.28).

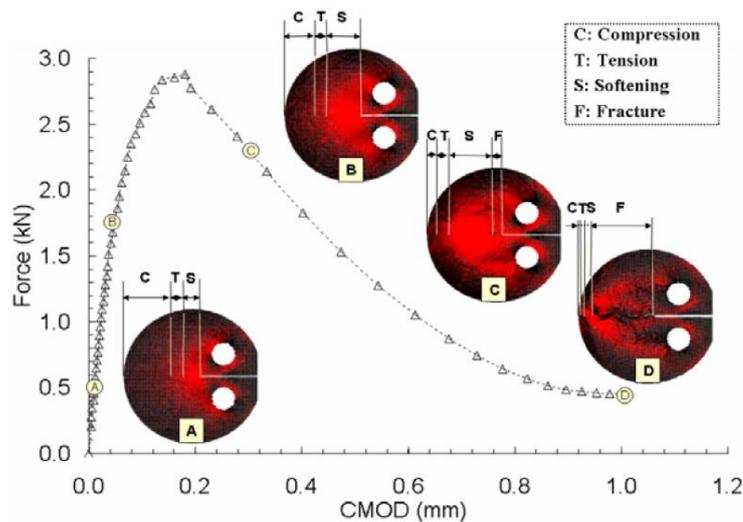


FIGURA 3.28: SVILUPPO DELLA MECCANICA DELLA FRATTURA NEL MODELLO DEM (KIM ET AL., 2006)

Nella zona di *softening*, con estensione decrescente in base alla lunghezza della frattura stessa, il materiale ha subito una diminuzione delle tensioni di trazione a causa della fessurazione.

È stato così evidenziato come, al diminuire della temperatura, la miscela sviluppi una maggiore energia di frattura, un minore picco di forza ed una differente traiettoria del meccanismo di fessurazione.

Kim ha infine investigato l'influenza dei singoli parametri sulla risposta macroscopica del modello, osservando una forte correlazione tra la meccanica della frattura e le resistenze dell'aggregato e dell'interfaccia aggregato-mastice.

La modellazione ad elementi distinti particellari ha infatti permesso di dimostrare come la zona di *softening*, la forza di trazione massima ed il meccanismo della frattura siano condizionati dalla resistenza dell'aggregato, diversamente dall'energia di fessurazione funzione del solo legame definito all'interfaccia.

In ambito tridimensionale, un esempio è quello fornito dalla modellazione ad elementi distinti particellari della prova ISTM di Dondi e Bragaglia (2006), in cui il provino di conglomerato bituminoso viene schematizzato attraverso un insieme di sfere il cui raggio è funzione della curva granulometrica dell'aggregato lapideo, secondo la teoria dell'*up-scaling*, ovvero shiftando verso destra la curva granulometrica reale, garantendo una granulometria corrispondente a quella originaria, ma con un minor numero di elementi e pertanto di più rapida analisi computazionale.

Il modello è stato realizzato con la tecnica *esplosive-repulsion*, ovvero generando un numero finito di elementi (2'500) appartenenti a un solido di confinamento realizzato con elementi *boundary*, e incrementandone progressivamente il raggio raggiungendo la porosità voluta.

In corrispondenza dei contatti, è stato modellato il comportamento visco-elastico secondo il modello di Burger, mentre le resistenze di contatto sono state assunte elevate in modo da garantire la conservazione dei legami di contatto e permettere al modello di sviluppare un comportamento visco-elastico semplificato nelle fasi di carico/scarico. Il coefficiente di attrito microscopico tra le particelle è fissato pari a 0,6, corrispondente a un angolo di attrito macroscopico di circa 32°. Il provino è caricato tramite due piastre di carico, modellate con elementi *boundary* dotati di coefficiente di attrito nullo e rigidità elevate, con valori tipici dell'acciaio. Nella memoria si osserva in particolare che nella simulazione della prova, a differenza dell'evidenza sperimentale in cui lo stato tensionale indotto dalla forza verticale si sviluppa istantaneamente in tutti i punti del sistema, lo spostamento relativo della piastra di carico genera forze che si propagano nel modello, attraverso i punti di contatto, con velocità finita, funzione del numero di particelle costituenti il modello.

Per determinare le tensioni normali che le forze di contatto generano sui piani diametrali orizzontale e verticale, nel modello sono stati inseriti degli elementi misuratori a forma di parallelepipedo, in cui la tensione compare come valore medio, lungo la superficie del parallelepipedo, della sommatoria delle componenti ortogonali al piano delle forze contenute nel generico solido misuratore.

Una procedura di questo tipo consente di ottenere risultati in termini di forze-deformazioni, che danno un'idea del modello in esame pensato come continuo.

### **3.4.2. Conclusioni**

You e Dai (2007) hanno messo a confronto i principali metodi di modellazione del conglomerato bituminoso (DEM, FEM, FENM), paragonando la capacità dei modelli di rappresentare la reale microstruttura della miscela di aggregati, la velocità computazionale, la capacità di simulare fratture, la possibilità di simulazioni tridimensionali.

Dall'esperienza degli autori, si conclude che l'approccio FENM può simulare la reale microstruttura, simulare abilmente le fratture, creare modelli tridimensionali, con velocità di calcolo soddisfacenti. Il metodo DEM eccelle per quanto riguarda la capacità di rappresentare la microstruttura e la simulazione di fratture, inoltre può creare con semplicità modelli tridimensionali, il difetto più importante è la lentezza di calcolo.

L'approccio FEM rappresenta la microstruttura, se il modello include la forma e la dimensione dell'aggregato.

Le caratteristiche sono riassunte in tabella 3.1.

	<b>Rappresentazione della microstruttura</b>	<b>Velocità computazionale</b>	<b>Simulazione di fratture</b>	<b>Possibilità modelli 3D</b>
<b>FENM</b>	Buona	Elevata	Semplice	Sì
<b>DEM</b>	Eccellente	Molto lenta	Molto semplice	Sì
<b>FEM</b>	Eccellente	Lenta	Non semplice	Sì

TABELLA 3.1: PARAGONE TRA I VARI APPROCCI (YOU E DAI, 2007)

Come possiamo notare, il DEM può essere considerato il metodo dotato di migliori potenzialità a parte il suo unico difetto, la velocità computazionale. Questa carenza in futuro potrà essere superata, grazie allo sviluppo dei calcolatori, che forniscono prestazioni sempre più elevate.

Nonostante il metodo degli elementi distinti particellari sia applicato da oltre trent'anni per lo studio della risposta macroscopica del materiale granulare non legato in base alla struttura microscopica ed alle proprietà dei componenti, non è ancora estesamente utilizzato per l'analisi del comportamento meccanico del conglomerato bituminoso (Bragaglia, 2007).

Mediante modelli di questo tipo appare possibile, per una determinata miscela di aggregati, studiare numericamente le proprietà fisiche al fine di individuare la percentuale ottima del legante, e ridurre così il numero di provini da sottoporre in laboratorio a test di ottimizzazione.

Un altro risvolto applicativo importante è rappresentato dalla possibilità di realizzare, previa taratura dei parametri caratteristici del conglomerato bituminoso con test di laboratorio, modelli tridimensionali finalizzati allo studio del comportamento in sito come ad esempio la verifica dei fenomeni di ormaiamento e rottura per fatica che possono instaurarsi nelle pavimentazioni stradali.

In definitiva, dunque, le analisi e gli studi condotti permettono di affermare che il metodo agli elementi distinti particellari può essere visto come un interessante approccio per la modellazione numerica in alternativa alla modellazione tradizionale al continuo, essendo in grado di cogliere il carattere discreto della miscela bituminosa attraverso un processo microscopico che consente di studiare i processi fisici e le variabili (proprietà aggregato e bitume) che determinano la risposta tenso-deformativa macroscopica.

## **CAPITOLO 4**

### **PREPARAZIONE DEI CAMPIONI E PROVE TRIASSIALI DI LABORATORIO**

#### **4.1. Obiettivi**

La prova triassiale è fondamentale per l'ingegneria geotecnica in quanto consente lo studio approfondito del comportamento dei materiali.

Il vantaggio principale di tale prova è la possibilità di imporre un qualsiasi percorso di carico, in altre parole il provino testato viene a trovarsi in una situazione molto simile a quella in sito. Infatti, il materiale reale si trova spesso in una condizione di tensione triassiale, nella quale la tensione verticale  $\sigma_a = \sigma_1$  è diversa da quella di confinamento  $\sigma_c = \sigma_2 = \sigma_3$ , proprio come accade durante il test.

L'attività di laboratorio descritta nel seguente capitolo è complementare alle simulazioni DEM effettuate con il software PFC3D, il fine è quello di confrontare e validare i risultati: i test triassiali di laboratorio e quelli simulati sono gli stessi.

Al fine di rendere fattibili accurati paragoni tra le simulazioni numeriche e le prove fisiche, il materiale testato in laboratorio deve essere il più possibile uguale a quello simulato, a questo fine sono stati analizzati campioni costituiti da sfere e *clump* di sfere d'acciaio.

Come emerso dalla ricerca bibliografica in letteratura non sono presenti numerosi studi che hanno come oggetto la validazione di simulazioni DEM con sfere d'acciaio (Cui et al., 2007 - O'Sullivan et al., 2004); per quanto riguarda la validazione di modelli numerici che utilizzano i *clump*, in letteratura non sono riportate esperienze: questo lavoro di sperimentazione può quindi ritenersi una novità.

#### **4.2. Sfere d'acciaio e granulometria delle miscele dei test**

Per quanto riguarda il materiale costituente le sfere, oltre all'acciaio in commercio sono disponibili altre soluzioni, tra cui materiali plastici (polyamide, hostaform, polipropilene, poliuretano, teflon) e ceramici (ossido di allumina, rubino e zaffiro, ossido di zirconio, nitruro di silicio).

È stato scelto l'acciaio per praticità, è un materiale caratterizzato da rigidità elevata, resistente alla ruggine, inoltre sono note le tolleranze di fabbricazione e la superficie delle sfere è uniforme.

Le sfere d'acciaio costituiscono quindi un "aggregato ideale", in grado di fornire un confronto significativo tra i risultati numerici e quelli sperimentali in virtù del fatto che è ben riproducibile con il metodo DEM particellare.

Le sfere costituenti i campioni, che a livello industriale vengono impiegate per la produzione di cuscinetti ed altre applicazioni, sono in acciaio inox AISI 420C DRY le cui specifiche compositive sono riassunte in tabella 4.1:

ACCIAIO/ STEEL	ANALISI/COMPOSITION							DUREZZA/ HARDNESS				
								SECONDO/ACCORDING TO DIN5401:2002-08			SECONDO/ ACCORDING TO ANSI/ABMA Std. 10A-2001	
	C%	Si%	Mn%	P%	S%	Co%	Cr%	oltre/ over	fino a / up to			
<b>INOX AL 13% 420 C</b> ***	0.43 0.50	1.00 max	1.00 max	0.040 max	0.015 max	- -	12.50 14.50	- 12.7	12.7 100	580/700 HV10 54/60 HRC	N.A.	

TABELLA 4.1: SPECIFICHE COMPOSITE ACCIAIO (MARTIN & C. S.R.L.)

Questo acciaio è caratterizzato da buona inossidabilità, elevata durezza e media resistenza.

A titolo d'esempio, si riportano due etichette di descrizione delle sfere (figura 4.1), come si può notare le tolleranze (tabella 4.2) sono note ed individuate dal relativo grado, nell'esempio pari a 40 e 28.



FIGURA 4.1: ESEMPI DI ETICHETTE DI DESCRIZIONE SFERE

**VALORI IN MICROMETRI**

GRADO	* VARIAZIONE DIAMETRO DELLA SFERA VD <sub>ws</sub> max	* ERRORE DI SFERICITÀ tD <sub>w</sub> max	* RUGOSITÀ SUPERFICIALE Ra max	VARIAZIONE DIAMETRO DEL LOTTO VD <sub>wL</sub> max
<b>G 3</b>	0.08	0.08	0.010	0.13
<b>G 5</b>	0.13	0.13	0.014	0.25
<b>G 10</b>	0.25	0.25	0.020	0.5
<b>G 16</b>	0.4	0.4	0.025	0.8
<b>G 20</b>	0.5	0.5	0.032	1
<b>G 24</b>	0.6	0.6	0.040	1.2
<b>G 28</b>	0.7	0.7	0.050	1.4
<b>G 40</b>	1	1	0.060	2

TABELLA 4.2: TOLLERANZE DELLE SFERE (MARTIN & C. S.R.L.)

I vari campioni cilindrici confezionati per i test triassiali hanno altezza pari a 200 mm e diametro pari a 100 mm.

In laboratorio le analisi sono state eseguite su due tipologie di miscele, la prima costituita da sole sfere di diametro 2,77 mm, 11 mm e 18 mm; la seconda costituita da sfere di diametro 2,77 mm e *clump* di due diverse dimensioni, derivati dall'assemblaggio di tre sfere da 5,5 mm e tre sfere di 9 mm di diametro.

Il *clump* costituito da sfere da 5,5 mm di diametro ha la dimensione massima uguale al diametro della sfera da 11 mm, allo stesso modo il *clump* costituito da sfere di 9 mm di diametro ha la dimensione massima uguale al diametro della sfera da 18 mm: l'obiettivo è quello di studiare l'influenza della forma, mantenendo la stessa granulometria.

La miscela di sole sfere è così assortita: 32'204 sfere da 2,77 mm di diametro (36% in peso sul totale), 605 sfere da 11 mm di diametro (41% in peso), 77 sfere da 18 mm di diametro (23% in peso).

La miscela di sfere e *clump* è così assortita: 32'204 sfere da 2,77 mm di diametro, 1'080 *clump* formati da gruppi di tre sfere da 5,5 mm di diametro, 330 *clump* formati da gruppi di tre sfere da 9 mm di diametro.

Il numero delle sfere della prima miscela è stato stimato rapportando il peso della singola sfera a quello della frazione di campione.

L'assortimento granulometrico della miscela è stato definito andando ad approssimare il fuso di un tipico pietrisco da fondazione per un pacchetto stradale (figure 4.2 e 4.3, tabella 4.3):

<b>Crivelli, setacci [mm]</b>	<b>% passante</b>
25	100
15	77
10	36
2	0

TABELLA 4.3: PERCENTUALI PASSANTI

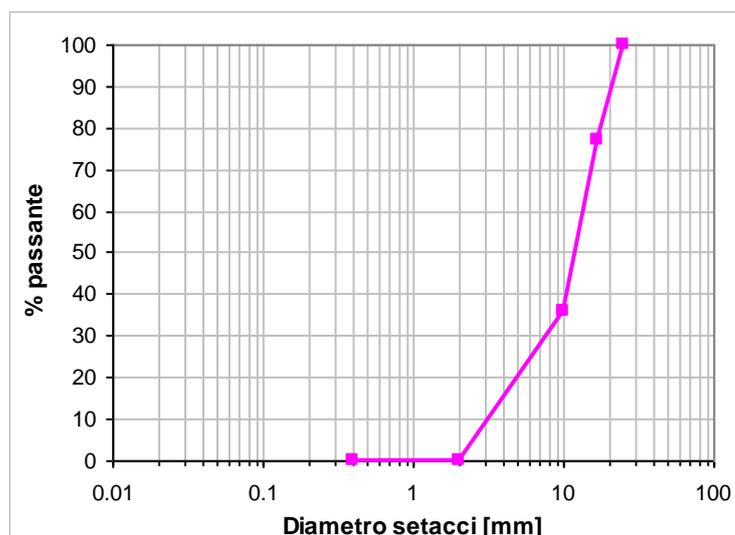


FIGURA 4.2: CURVA GRANULOMETRICA MISCELA TESTATA

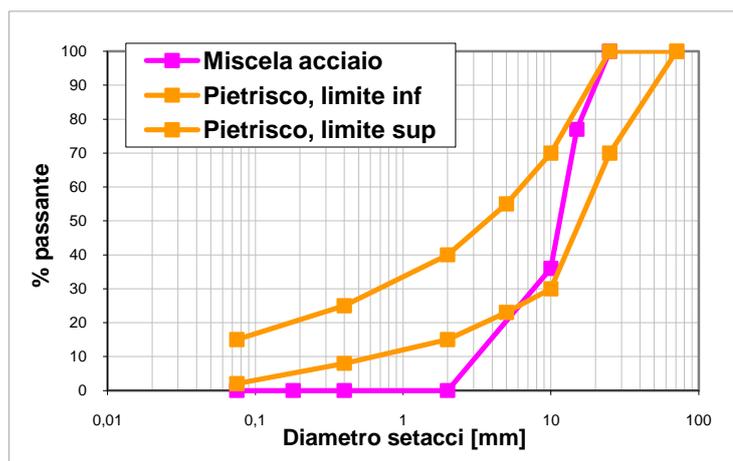


FIGURA 4.3: CURVA GRANULOMETRICA MISCELA A PARAGONE CON CURVE PIETRISCO

La presenza di materiale fine è comunque anche una necessità fisica per la prova: la membrana di lattice in aderenza al provino è soggetta alla pressione di confinamento dell'acqua, se la membrana non ha una superficie d'appoggio per quanto possibile piana, è spinta ad includersi nel provino rischiando di lacerarsi, non assolvendo più al suo compito di isolamento e compromettendo l'esito della prova.

#### **4.3. Realizzazione dei clump di sfere d'acciaio**

La realizzazione dei *clump* consiste nell'unire tra loro gruppi di sfere, nel nostro caso tre. In studi e sperimentazioni future le analisi continueranno anche su altre forme.

Il *clump* così ottenuto deve essere sufficientemente resistente, in modo da sopportare le sollecitazioni nella cella triassiale senza disgregarsi.

Dato che il numero di *clump* necessari per le prove è piuttosto elevato, la tecnica di realizzazione deve essere pratica e per quanto possibile veloce.

La saldatura ad arco è una tecnica inadeguata: le sfere hanno un diametro troppo piccolo ed il processo è poco pratico.

Tenendo conto della qualità dei risultati, ma anche della praticità ed economicità, l'unica modalità di realizzare i *clump* è rappresentata dall'uso di un adeguato collante.

#### 4.3.1. Il prodotto utilizzato

La tecnica più pratica consiste nell'incollaggio: esistono vari prodotti in commercio, uno dei più adatti allo scopo è l'"acciaio liquido" (figura 4.4); il vantaggio maggiore di tale pasta adesiva è rappresentato dalla buona lavorabilità dovuta ad un tempo d'essiccazione non immediato; inoltre, data la pastosità del prodotto, è possibile andare a "stuccare" il foro che fisicamente si crea tra le tre sfere, creando un corpo unico ed estendendo la resistenza dell'assemblaggio oltre i soli punti di contatto tra le sfere.



FIGURA 4.4: ACCIAIO LIQUIDO

Il collante commerciale utilizzato, prodotto dal gruppo Henkel Loctite Adesivi S.R.L., è una pasta adesiva epossidico metallica a due componenti che mescolati hanno una colorazione acciaio naturale.

Il campo d'impiego di questo prodotto comprende la saldatura di parti metalliche nonché la ricostruzione di piccole parti. L'"acciaio liquido" ha buona resistenza meccanica e chimica.

Il prodotto rilascia un odore debole e non è tossico per inalazione, se i tempi d'esposizione sono contenuti.

Il "componente A" è costituito da resina epossidica, cariche e pigmenti; il "componente B" da polimercaptano e cariche. I due componenti vanno mescolati in rapporto 1:1. Una volta creata la miscela il tempo di presa è di circa cinque minuti a temperatura ambiente (20°C). Il tempo d'indurimento finale è 24 ore.

### 4.3.2. L'incollaggio delle sfere

La prima fase consiste nel tenere insieme le tre sfere, da prima dell'applicazione della colla sino a quando non ha fatto presa, a questo scopo sono state utilizzate delle lamiere sul retro delle quali sono stati disposti dei magneti.

Le sfere, attirate nei centri dei magneti, stanno solidamente a contatto tra loro (figura 4.5).

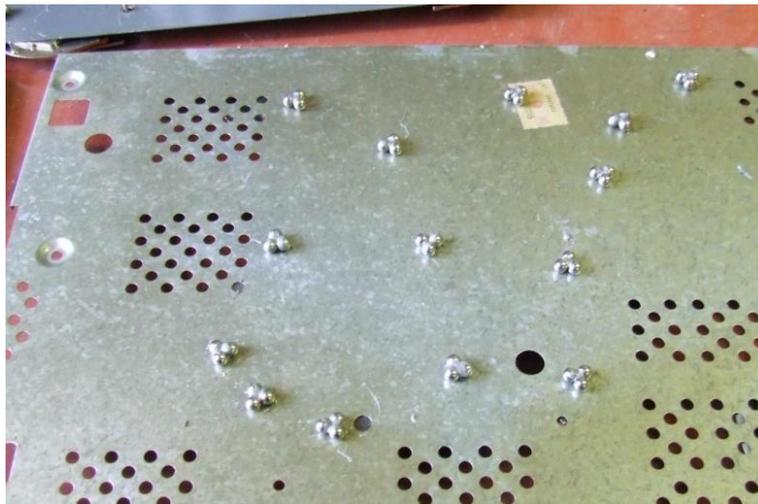


FIGURA 4.5: LAMIERA CON CALAMITE

Una volta disposte le sfere, viene preparata la miscela bicomponente che, entro il tempo di presa, consente l'incollaggio di 6-8 *clump*, lavorando il prodotto con l'aiuto di uno stuzzicadenti.

Si procede poi allo stesso modo incollando altri due gruppi di 6-8 *clump*, nel frattempo il primo gruppo ha fatto presa ed i *clump* possono essere rimossi dalla lamiera calamitata, con l'aiuto di una spatola metallica.

Una volta rimossi, i *clump* sono stati disposti per file (figura 4.6), nell'attesa del completo indurimento e per facilitarne il conteggio.

Con questa tecnica sono stati realizzati i *clump* necessari per un primo provino costituito da oltre 1'000 composti da tre sfere da 5,5 mm di diametro e da circa 300 composti da sfere di 9 mm di diametro (figura 4.6).



FIGURA 4.6: CLUMP INCOLLATI

In laboratorio la resistenza di tali *clump* si è dimostrata insufficiente: durante il test triassiale se ne sono rotti circa il 25%.

Il provino è stato quindi parzialmente ripristinato e ne è stato creato un secondo: i due nuovi provini sono costituiti da 1'080 *clump* composti da tre sfere da 5,5 mm di diametro e 330 *clump* composti da sfere di 9 mm di diametro.

Al fine di aumentare la resistenza, una volta completata la fase di incollaggio alle lamiera sopra descritta, è stato aggiunto ulteriore “acciaio liquido” sul retro dei *clump* (cioè sul lato opposto a quello dell’incollaggio sulle lamiera)(figura 4.7), ottenendo così un prodotto di adeguata resistenza.



FIGURA 4.7: CLUMP RINFORZATI

Nonostante la praticità della tecnica utilizzata, in totale i tempi necessari sono molti lunghi, a causa dell’alto numero di *clump* necessario per riempire un provino.

Possiamo considerare in media, contando anche la disposizione delle sfere sulle lamiere e la preparazione della miscela bicomponente, la produzione di circa un *clump* al minuto, incollato su un solo lato.

In questi termini, per la creazione di un solo provino sono necessarie circa 50 ore di lavoro.

#### **4.4. La prova triassiale**

L'attrezzatura di prova (figura 4.8) fondamentale per lo studio del comportamento delle terre è quella per prove di compressione triassiale o cilindrica (Colombo e Colleselli, 1994).



FIGURA 4.8: ATTREZZATURA DI PROVA, MACCHINA A TRE VANI (TECNOTEST S.R.L.)

Questa apparecchiatura è usata principalmente per determinare la resistenza al taglio poiché dà la possibilità di studiare il problema in un grande campo di combinazione di tensioni e di controllare e misurare sia la pressione dei pori che le variazioni di volume del campione.

Di solito il provino è cilindrico con altezza pari a 2÷2,5 volte il diametro; abbastanza usuali sono dimensioni di circa 38 mm di diametro e di 75÷85 mm di altezza; più raramente si lavora con dimensioni di 70÷100 mm di diametro e 180÷220 mm di altezza.

Per i materiali a grana grossa il diametro del provino deve essere almeno pari a 5 volte la dimensione del grano più grosso.

Nella prova triassiale (figura 4.9) il provino cilindrico è racchiuso lateralmente da una sottile membrana di gomma fermata alle estremità da anelli pure di gomma, è separato dalla base e dal cappello di carico mediante piastre porose ed è posto in una cella cilindrica riempita d'acqua.

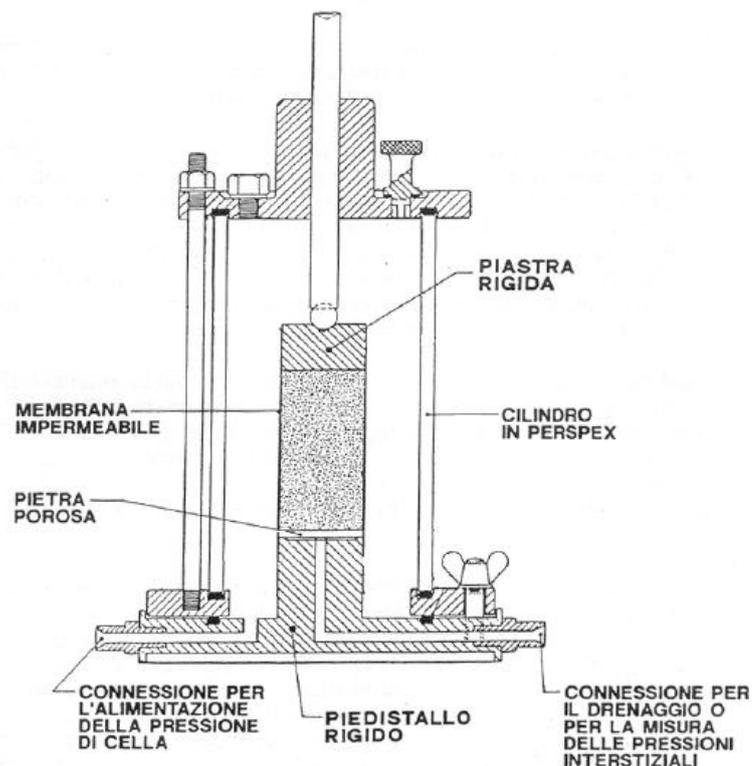


FIGURA 4.9: CELLA TRIASSIALE (AGI, 1994)

Alcuni collegamenti all'estremità del campione permettono il drenaggio dell'acqua o dell'aria dai pori del provino, la misura della pressione neutra ed inoltre, consentono di procedere alla saturazione del provino con l'applicazione di una pressione (*back pressure*) al fluido interstiziale.

Nella prima fase della prova triassiale standard il provino cilindrico viene sottoposto ad una pressione isotropica (fase di consolidazione), applicata mettendo in pressione l'acqua di cella (pressione di contenimento).

Nella seconda fase viene applicata una pressione in direzione assiale, mediante una pressa a velocità di deformazione costante, fino ad arrivare alla rottura (fase di rottura).

Poiché non vi sono tensioni di taglio sulle superfici del provino, la tensione assiale  $\sigma_a$  e quella di contenimento  $\sigma_r$  sono le tensioni principali maggiore e minore  $\sigma_1$  e  $\sigma_3$ , e l'incremento della tensione assiale  $\sigma_a - \sigma_r = \sigma_1 - \sigma_3$  è indicato come tensione o sforzo deviatorico.

Le prove triassiali si distinguono principalmente in relazione alle condizioni di drenaggio che si hanno durante ogni stadio:

- 1) nelle prove senza drenaggio o prove TxUU non viene permesso alcun drenaggio e quindi nessuna dissipazione di pressione dei pori né durante l'applicazione della pressione di contenimento né durante l'applicazione della pressione verticale;
- 2) nelle prove con consolidazione senza drenaggio TxCU viene permesso il drenaggio durante l'applicazione della pressione di contenimento finché il campione è completamente consolidato sotto questa pressione, mentre durante l'applicazione della pressione verticale non è permesso alcun drenaggio e si misura la pressione neutra;
- 3) Nelle prove con drenaggio TxCD, il drenaggio è possibile durante tutta la prova, cosicché si ha consolidazione completa sotto la pressione di contenimento; durante l'applicazione della pressione verticale non si ha formazione di pressione neutra in eccesso e si misurano le variazioni di volume del provino.

Oltre alla prova triassiale standard (consolidazione isotropa e rottura per compressione) l'attrezzatura permette, a seconda dei valori di  $\sigma_a$  e  $\sigma_r$ , di ottenere altre condizioni di prova. Nella prima fase si distinguono la consolidazione isotropa  $\sigma'_1 = \sigma'_2 = \sigma'_3 = \sigma'_a = \sigma'_r$ , quella anisotropa  $\sigma'_a \neq \sigma'_r$  ed infine la consolidazione monodimensionale  $\sigma'_r = k_0 \cdot \sigma'_a, \varepsilon_r = 0$ .

Nella seconda fase di prova (rottura) possiamo applicare diverse condizioni di prova che corrispondono ad alcune situazioni reali:

- compressione per carico, aumentando  $\sigma_a = \sigma_1$  e tenendo costante  $\sigma_r = \sigma_2 = \sigma_3$ ;
- compressione per scarico, tenendo costante  $\sigma_a = \sigma_1$  diminuendo  $\sigma_r = \sigma_2 = \sigma_3$ ;
- estensione per carico, aumentando  $\sigma_r = \sigma_1 = \sigma_2$  e tenendo costante  $\sigma_a = \sigma_3$ ;
- estensione per scarico, diminuendo  $\sigma_a = \sigma_3$  e tenendo costante  $\sigma_r = \sigma_1 = \sigma_2$ .

Le principali limitazioni delle prove triassiali sono date dal fatto che non si può studiare l'influenza della pressione principale  $\sigma_2$  sulle caratteristiche meccaniche del terreno perché  $\sigma_2 = \sigma_3 = \sigma_r$ ; inoltre tra le facce estreme del provino e le piastre porose a contatto si sviluppa dell'attrito che influenza la distribuzione delle deformazioni nel provino stesso, rendendole poco uniformi.

#### **4.4.1. Il comportamento dei materiali a grana grossa**

In questi materiali, che rappresentano il nostro caso, la permeabilità è elevata e qualunque variazione di pressione dell'acqua, rispetto alla pressione iniziale, si dissipa in tempi molto brevi, qualunque sia la causa che la provochi; pertanto per queste miscele lo studio del comportamento del materiale può essere analizzato in condizioni drenate.

Consideriamo il comportamento di due provini, uno caratterizzato da densità elevata (denso) e l'altro da bassa densità (sciolto), a parità di tensione di confinamento.

Si riportano a titolo d'esempio gli andamenti dello sforzo deviatorico e dell'indice dei vuoti, all'aumentare della deformazione assiale, per una sabbia densa ed una sciolta, a parità di tensione di confinamento (figura 4.10).

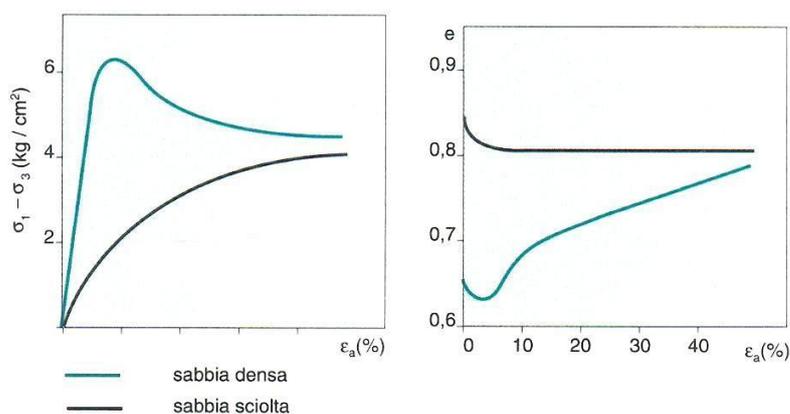


FIGURA 4.10: COMPORTAMENTO DILATANTE ED INCRUDENTE  
(COLOMBO E COLLESELLI, 1994)

Il materiale sciolto sottoposto a sforzo deviatorico tende ad aumentare di densità prima di arrivare a rottura; i grani si spostano per raggiungere una configurazione più stabile e l'indice di vuoti iniziale si riduce fino a raggiungere un valore critico, ed un corrispondente stato ultimo oltre il quale il materiale continua a deformarsi senza variazione di volume e di resistenza. Si dice allora che la curva sforzi deformazioni è corrispondente ad un materiale *incrudente*.

Il materiale denso invece, sotto l'applicazione dello sforzo deviatorico all'inizio aumenta leggermente di densità, poi diminuisce di densità con un corrispondente aumento di volume. Di conseguenza per arrivare a rottura occorre energia sia per il lavoro dovuto all'attrito legato agli spostamenti relativi delle particelle (traslazioni e rotazioni) sia per il lavoro svolto per permettere l'aumento di volume contrastato dalle componenti normali (tensione di confinamento).

La resistenza per arrivare alla rottura per un materiale denso è maggiore di quella per un materiale sciolto; la curva sforzi-deformazioni è corrispondente ad un materiale *rammollente* o *dilatante* e nella curva è chiaramente individuato un valore massimo detto di rottura.

Inoltre si vede che, superata la rottura, si ha una diminuzione di resistenza attribuibile alla diminuzione del grado di incastro e l'indice dei vuoti aumenta tendendo per grandi deformazioni verso il valore critico, cioè a quel valore che non varia con il procedere delle deformazioni (quindi senza variazioni di volume e di resistenza).

Quanto finora esposto sottolinea la primaria importanza della densità (o dell'indice dei vuoti o della porosità) sui valori dell'angolo di attrito di picco.

Con riferimento alle prove triassiali si può rappresentare (figura 4.11) la compressibilità attraverso il *modulo tangente*, che indica la pendenza di una linea retta tangente ad un particolare punto della curva sforzi-deformazioni, o mediante il *modulo secante* che indica la pendenza della retta che collega due punti della curva sforzi-deformazioni. Così si considera il modulo tangente iniziale riferito come tangente alla curva nell'origine o il modulo secante corrispondente alla retta passante per l'origine e per il punto corrispondente allo sforzo deviatorico, pari al 50% di quello a rottura. Studi recenti hanno cercato di evidenziare l'influenza sui moduli di vari fattori quali la tensione di confinamento, l'entità della tensione di consolidazione, il tipo isotropo o anisotropo di consolidazione.

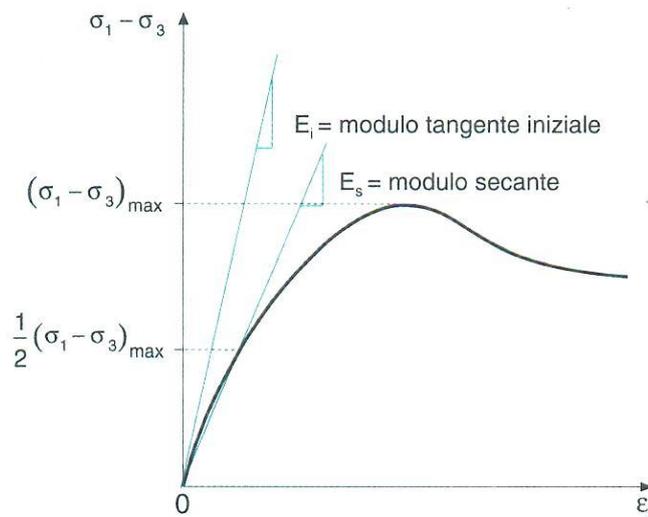


FIGURA 4.11 I MODULI TANGENTE E SECANTE (COLOMBO E COLLESELLI, 1994)

#### 4.4.2. Caratteristiche di resistenza e circoli di Mohr

La resistenza al taglio sulle aree di contatto tra i grani è proporzionale alla forza che li spinge l'uno contro l'altro e la si può pertanto considerare una forza di attrito.

Coulomb nel 1773 propose, per i mezzi granulari, la relazione tra la tensione di taglio e la tensione normale:

$$\tau = \sigma \tan \Phi \quad (4.1)$$

nella quale  $\tan \Phi$  esprime il coefficiente di attrito. Per i mezzi coerenti Coulomb propose che ad equilibrare il taglio oltre all'attrito figurasse anche una resistenza detta coesione, che si manifesta anche a tensione normale nulla. La relazione precedente si riscrive nella forma:

$$\tau = c + \sigma \tan \Phi \quad (4.2)$$

La svolta decisiva, nello studio della resistenza al taglio, ebbe inizio con la scoperta da parte di Terzaghi del principio della pressione effettiva e con la modifica della relazione di Coulomb nella forma:

$$\tau = c' + (\sigma - u) \tan \Phi' = c' + \sigma' \tan \Phi' \quad (4.3)$$

nella quale  $c'$  e  $\Phi'$  sono espressioni in termini di pressioni effettive. In questa nuova forma la relazione di Coulomb-Terzaghi ha assunto validità per una grande varietà di materiali e di condizioni di carico.

Questa situazione di rottura è rappresentata nel piano  $\tau, \sigma'$  da una retta i cui punti indicano stati tensionali di rottura; i punti al di sotto della retta rappresentano situazioni di parziale sicurezza rispetto alla rottura e quelli al di sopra situazioni irrealizzabili.

Il problema venne ulteriormente chiarito associando alla relazione di Coulomb il criterio di rottura di Mohr  $\tau = f(\sigma)$  secondo cui si verifica la rottura quando la tensione di taglio sul piano di rottura diventa una funzione della tensione normale a quel piano.

Questo criterio è espresso dalla relazione:

$$\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = f\left(\frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}\right) \quad (4.4)$$

che indica che la rottura ha luogo quando il raggio del cerchio di Mohr delle tensioni  $(\sigma_1 - \sigma_3)/2$  è funzione della semisomma delle tensioni principali maggiore e minori  $(\sigma_1 + \sigma_3)/2$ , cioè della distanza del centro di questo cerchio dall'origine.

La condizione di rottura perciò può essere definita in termini di curva involuppo di Mohr, cioè di curva tangente ai cerchi di rottura (figura 4.12).

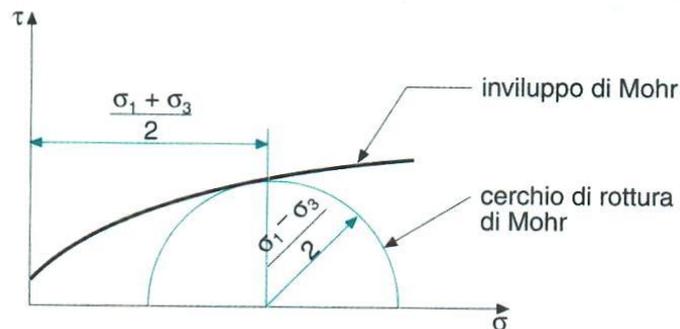


FIGURA 4.12: L'INVILUPPO DI MOHR (COLOMBO E COLLESELLI, 1994)

In pratica l'involuppo di Mohr è valido all'interno di un certo campo di pressioni normali e quindi può assumere la forma dell'equazione di Coulomb, dando luogo alla legge di rottura di Mohr-Coulomb. Considerando ancora la relazione della retta di rottura  $\tau = c' + \sigma' \tan \Phi'$  essa può anche essere scritta in termini di tensioni principali effettive (figura 4.13):

$$\frac{1}{2}(\sigma'_1 - \sigma'_3) = \left( \frac{\sigma'_1 + \sigma'_3}{2} + c' \cot \Phi' \right) \sin \Phi' \quad (4.5)$$

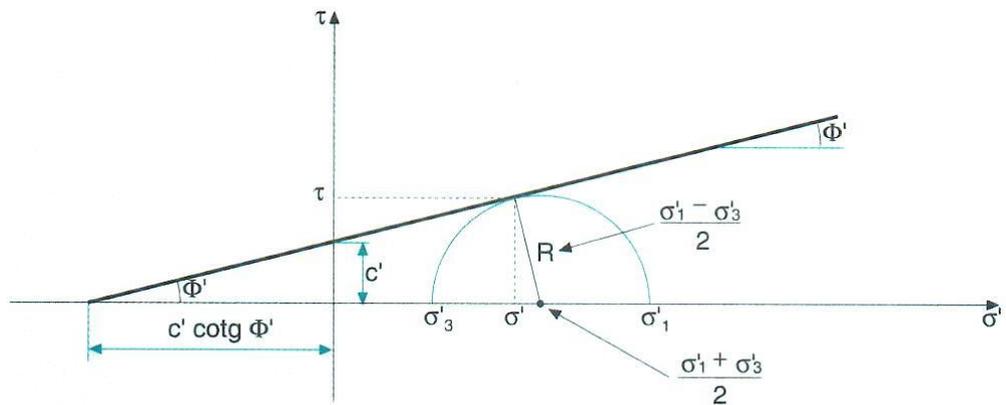


FIGURA 4.13: L'INVILUPPO DI MOHR IN TERMINI DI TENSIONI PRINCIPALI EFFETTIVE (COLOMBO E COLLESELLI, 1994)

Grazie ai test triassiali è possibile ricavare varie combinazioni di tensioni  $\sigma_1$  e  $\sigma_3$ , ed è quindi possibile disegnare i cerchi di Mohr e ottenere l'involuppo sui cerchi in modo da ricavare l'angolo di resistenza al taglio (figura 4.14).

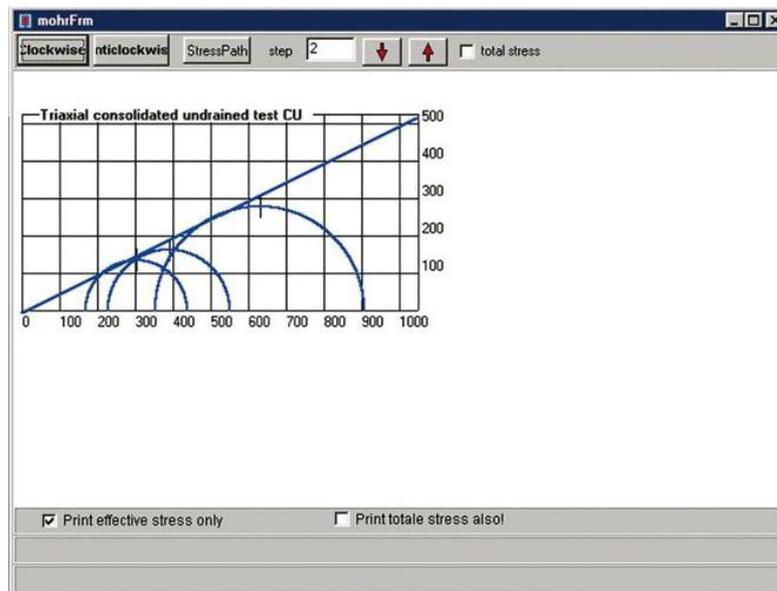


FIGURA 4.14: RAPPRESENTAZIONE CIRCOLI DI MOHR (TECNOTEST S.R.L.)

#### **4.5. Esperienze in laboratorio**

Nel laboratorio della Tecnotest S.R.L. di Modena, i test sono stati eseguiti usando una macchina del tipo “a tre vani”.

La pressa ha una forza di 50 kN.

La velocità costante di discesa del pistone può variare tra 0,00001 e 12 mm/minuto; quella utilizzata è 1mm/minuto.

Per ogni test è stato analizzato con sistema a controllo numerico:

1. l'andamento della tensione deviatorica ( $\sigma_d = \sigma_1 - \sigma_3$ ) in funzione della deformazione assiale ( $\varepsilon_a$ );
2. l'andamento della variazione volumetrica del campione ( $\Delta V/V$ ) in funzione della deformazione assiale ( $\varepsilon_a$ );
3. l'andamento dell'indice dei vuoti in funzione della deformazione assiale ( $\varepsilon_a$ ).

Le prove triassiali realizzate sono del tipo TxCD (consolidate drenate), con velocità di deformazione pari a 1mm/minuto.

La prima campagna di prove (18/9/2009) riguarda la miscela di sole sfere, con la quale sono stati fatti tre test (tabella 4.4):

<b>N. test</b>	<b>Tensione di confinamento [kPa]</b>	<b>Back pressure [kPa]</b>
1	300	100
2	400	100
3	500	100

TABELLA 4.4: SPECIFICHE TEST TRIASSIALI MISCELA DI SFERE

Si è poi passati a testare la miscela contenente i *clump*: il primo tentativo (6/11/2009) non è andato a buon fine, come spiegato nel paragrafo 4.3 a causa della rottura di molti *clump*; in altra data (12/2/2010) sono state eseguite le seguenti prove (tabella 4.5):

<b>N. test</b>	<b>Tensione di confinamento [kPa]</b>	<b>Back pressure [kPa]</b>
1	400	100
2	500	100

TABELLA 4.5: SPECIFICHE TEST TRIASSIALI MISCELA DI CLUMP

#### 4.5.1. Modalità di prova

Le modalità generali di prova possono ritenersi le medesime sia per la miscela di sfere che per quella di *clump*.

Nella prima campagna di prove, la prima difficoltà è stata riscontrata nel confezionamento del provino. Al fine di ottenere la giusta geometria, si utilizza un'apposita struttura di sostegno provvisoria in alluminio.

È stata tentata la creazione di un primo campione costituito da un nucleo centrale di particelle grossolane e da una corona esterna di particelle fini a diretto contatto con la membrana, aiutandosi con un tubo di rame per dividere in due settori il cilindro (figura 4.15), che verrà poi delicatamente sfilato una volta pieno.

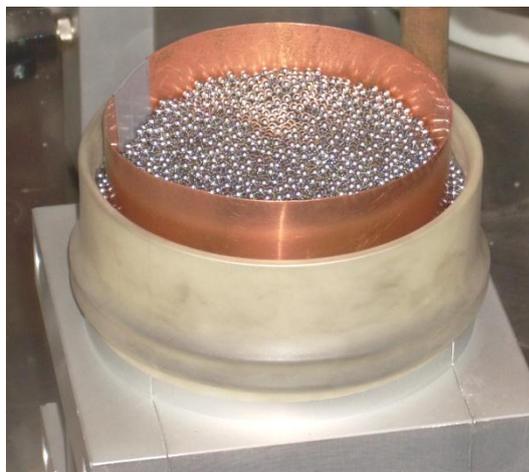


FIGURA 4.15: CONFEZIONAMENTO PROVINO, PRIMO TENTATIVO

Nonostante questo accorgimento la membrana di gomma (“tendimembrana a suzione”) collassa a causa del peso delle sfere non appena viene tolto il contenimento in alluminio.

Per questo motivo in un secondo tentativo è stato interposto tra la membrana e le sfere un foglio di carta, al fine di conferire la rigidità opportuna per mantenere il provino verticale durante la sua preparazione.

Durante la saturazione del provino, la carta si impregnerà rammollendo, in questo modo verrà annullato ogni possibile contributo di resistenza.

Anche questo tentativo si è dimostrato insufficiente: una volta rimossa la struttura di alluminio il foglio di carta sollecitato dal peso delle sfere tende ad aprirsi ed il provino collassa nuovamente (figura 4.16).



FIGURA 4.16: CONFEZIONAMENTO DEL PROVINO, SECONDO TENTATIVO

Onde evitare l'apertura del cilindro di carta di rinforzo, in un terzo tentativo è stato bloccato utilizzando una colla debole solubile in acqua, ma anche questa soluzione non ha dimostrato resistenza sufficiente.

In un quarto tentativo, il cilindro di carta è stato bloccato con l'uso di Loctite®. Finalmente questa tecnica si è dimostrata valida e verrà mantenuta per tutte le successive prove.

All'atto pratico, le fasi di preparazione del provino sono le seguenti: si procede a confezionare il cilindro di carta che viene messo in sede sulla piastra di base, in seguito lo si riveste con la membrana di lattice.

Il tutto viene racchiuso nell'apposita struttura d'alluminio, che serve per ottenere la giusta geometria.

A questo punto è possibile inserire le sfere (figura 4.17).



FIGURA 4.17: PREPARAZIONE DEL CAMPIONE

Le sfere vengono inserite a piccoli strati e costipate con l'aiuto di un piccolo pestello (figura 4.18).



FIGURA 4.18: PREPARAZIONE DEL CAMPIONE

Quando il cilindro è pieno, viene rimossa la struttura di alluminio e vengono posizionate sulla sommità la piastra porosa e quella metallica; una volta messi in sede gli o-ring che bloccano la membrana (figura 4.19), finalmente il provino può essere posizionato dentro la cella, che viene riempita d'acqua (figura 4.20).



FIGURA 4.19: POSIZIONAMENTO PIASTRE ED O-RING



FIGURA 4.20: RIEMPIMENTO DELLA CELLA

Le fasi successive consistono nell'imporre prima la *back pressure* per saturare il provino (possiamo leggere dal manometro il valore 100 kPa) (figura 4.21), poi la pressione di confinamento, in modo da effettuare la fase di consolidazione.



FIGURA 4.21: SATURAZIONE DEL PROVINO E MANOMETRO CHE INDICA LA BACK PRESSURE

A consolidazione avvenuta la cella viene posizionata nell'apposito vano sulla pressa (figura 4.22).

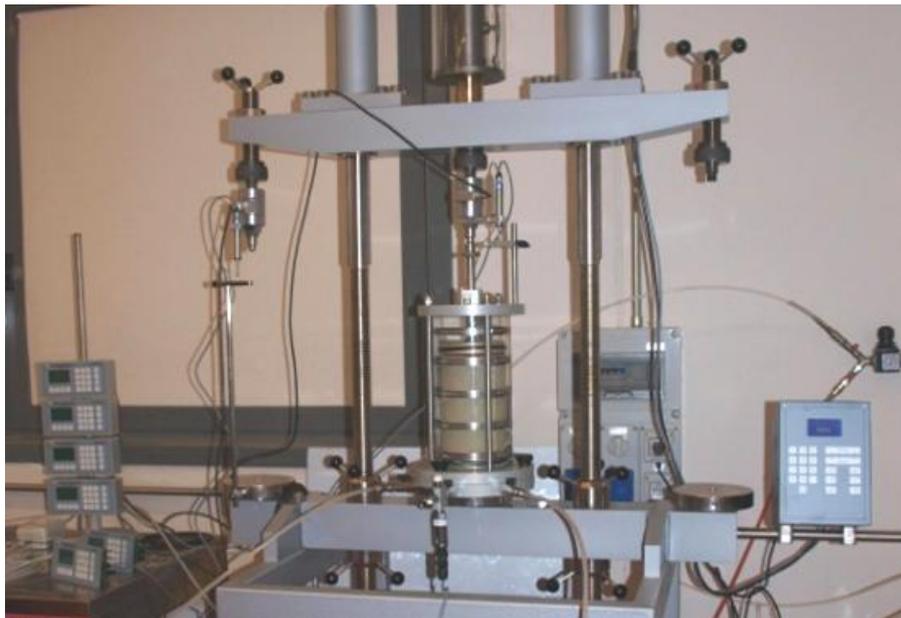


FIGURA 4.22: PRESSA CON PROVINO IN SEDE

A questo punto, una volta resettati i vari sensori e strumenti di misura, può iniziare la deformazione assiale del campione, che viene fatta proseguire oltre la rottura (figura 4.23).



FIGURA 4.23: PROVINO "ROTTO"

Durante il test possono essere monitorate la tensione deviatorica, la variazione volumetrica, l'andamento dell'indice dei vuoti e le varie pressioni. Il tutto è sotto controllo grazie a un sistema di sensori collegati a terminali elettronici, tutti i dati vengono memorizzati da un computer, dotato di apposito software "*tecnotest data acquisition*" (figura 4.24).

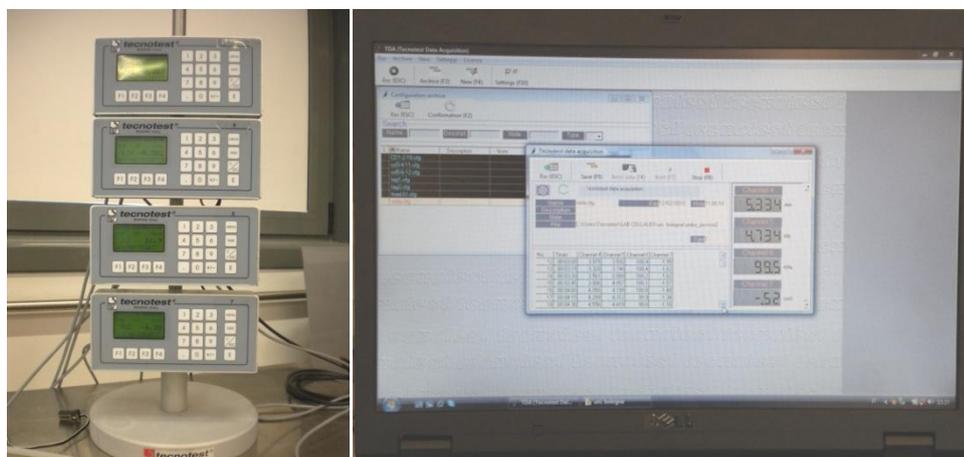


FIGURA 4.24: APPARECCHIATURA PER CONTROLLO NUMERICO

## CAPITOLO 5

### SIMULAZIONE DELLA PROVA TRIASSIALE CON PFC3D

#### 5.1. Premesse

La simulazione delle prove triassiali di laboratorio con il software PFC3D, costituisce parte integrante della presente tesi: la creazione dei listati ed il settaggio delle unità hanno richiesto particolare impegno.

Le stime dei tempi di calcolo necessari per le varie fasi, che sono nell'ordine di decine di ore, si riferiscono ad un computer con processore Intel® Core™ 2 da 1,66 GHz, dotato di 1 GB di memoria.

In relazione alla prova da simulare al software, l'utente deve scegliere un sistema di unità coerente alle grandezze in gioco e mantenerlo, il PFC3D non calcola equivalenze. In tabella 5.1 si presentano i sistemi di unità ammessi dal programma per il Sistema Internazionale, la colonna in evidenza segnala le unità di misura che sono state utilizzate.

Length	m	m	m	cm
Density	kg/m <sup>3</sup>	10 <sup>3</sup> kg/m <sup>3</sup>	10 <sup>6</sup> kg/m <sup>3</sup>	10 <sup>6</sup> g/cm <sup>3</sup>
Force	N	kN	MN	Mdynes
Stress	Pa	kPa	MPa	bar
Gravity	m/sec <sup>2</sup>	m/sec <sup>2</sup>	m/sec <sup>2</sup>	cm/s <sup>2</sup>
Ball stiffness	N/m	kN/m	MN/m	Mdynes/cm
Parallel bond stiffness	Pa/m	kPa/m	MPa/m	bar/cm

TABELLA 5.1: SISTEMI DI UNITÀ (ITASCA, 2003)

Nel capitolo verranno spiegati i procedimenti adottati per la creazione dei due provini, il primo costituito da sole sfere, ed il secondo costituito da sfere e *clump*. Infine verranno spiegati i criteri adottati per la simulazione dei test triassiali, lasciando i risultati al prossimo capitolo.

## **5.2. Creazione del provino**

La prima fase, comune ai due provini, consiste nel creare i muri (*walls*) che riproducono la cella triassiale (figura 5.1).

Il muro cilindrico, contrassegnato dall'ID 1, è l'equivalente delle membrana in lattice, mentre le piastre contrassegnate dagli ID 5 e 6 confinano il provino sopra e sotto ed andranno a simulare la sollecitazione assiale, una volta messe in movimento. È importante ricordare che nel PFC i muri non interagiscono tra loro, ma interagiscono solo con le sfere.

Il sistema di coordinate cartesiane ha gli assi x ed y posizionati sulla piastra di base, l'asse z è verticale e corrisponde all'asse del cilindro.

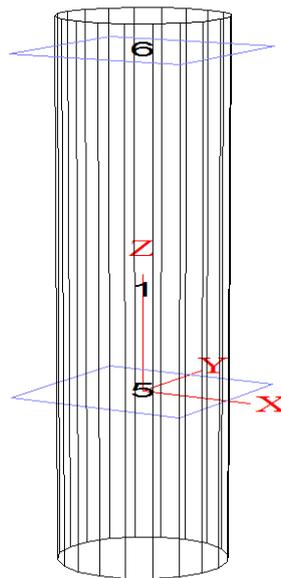


FIGURA 5.1: WALLS

Per i muri, è stato impostato un valore elevato per la rigidità, pari a  $10^8$  N/m, al fine di simulare un comportamento rigido: tale valore verrà abbassato per il muro cilindrico appena prima della simulazione del test triassiale, per simulare un contenimento “soft”.

La geometria generata è la stessa del provino (altezza 20 cm e diametro 10 cm).

Come si può notare dall'immagine 5.1, i muri sono stati creati tenendo conto di estensioni (*extend*) addizionali, allo scopo di evitare l'uscita delle sfere nella successiva prova triassiale: quando i muri superiori ed inferiori iniziano a muoversi per caricare il provino, il muro cilindrico tenderà a dilatarsi.

### **5.2.1. Generazione provino costituito da sole sfere**

Le sfere, ciascuna contrassegnata da un proprio ID, in generale possono essere create con due metodologie:

1. generazione di gruppi di particelle definendo l'ID, le dimensioni, le proprietà fisiche e la posizione;
2. generazione di un insieme di particelle di piccolo raggio e successiva espansione al fine di occupare un volume definito dai walls e raggiungere una determinata densità, assegnando un intervallo di variazione per il raggio (*rmin*, *rmax*).

La seconda tecnica è il metodo più comodo, in quanto comporta tempi di calcolo abbastanza ridotti; inoltre, espandendo le particelle dello stesso fattore in tutte le direzioni, conferisce proprietà uniformi ed isotrope al provino. Nel nostro caso, abbiamo utilizzato la prima tecnica, avendo il raggio ed il numero delle particelle assegnato.

La miscela di sole sfere è così assortita: 32'204 sfere da 2,77 mm di diametro, 605 sfere da 11 mm di diametro, 77 sfere da 18 mm di diametro.

Nel dettaglio, il listato è stato suddiviso in cinquanta fasi, in ciascuna delle quali sono stati generati tre gruppi di sfere, corrispondenti ciascuno ad un raggio (*rad*) fissato. Il numero di sfere costituenti il gruppo è individuato dall'intervallo dell'ID.

Il numero delle sfere generate ad ogni fase è circa costante, questo fa sì che la granulometria sia ben distribuita.

Inizialmente le sfere sono distribuite in modo casuale in un volume assegnato, definito dai relativi intervalli di coordinate.

Si riporta a titolo d'esempio uno stralcio di listato:

```

gen id=1,650 rad 0.001385 0.001385 x=-0.03,0.03 y=-0.03,0.03 z=0,0.2
gen id=32205,32217 rad 0.0055 0.0055 x=-0.03,0.03 y=-0.03,0.03 z=0,0.2
gen id=32810,32811 rad 0.009 0.009 x=-0.03,0.03 y=-0.03,0.03 z=0,0.2

prop dens = 7750 kn = 1e8 ks = 1e8 fric = 0.42
set grav 0 0 -9.81

cyc 500000
    
```

Come si può notare sono state assegnate le proprietà fisiche: le rigidzze sono pari a  $10^8$  N/m e la densità è  $7750 \text{ kg/m}^3$ .

Il coefficiente d'attrito (*fric*) è ricavato dalla tangente dell'angolo definito dall'involuppo sui circoli di Mohr derivati dalle triassiali effettuate in laboratorio.

L'accelerazione gravitazionale assegnata lungo l'asse z comporta la decantazione al fondo del provino delle sfere generate, come si può vedere nell'immagine 5.2.

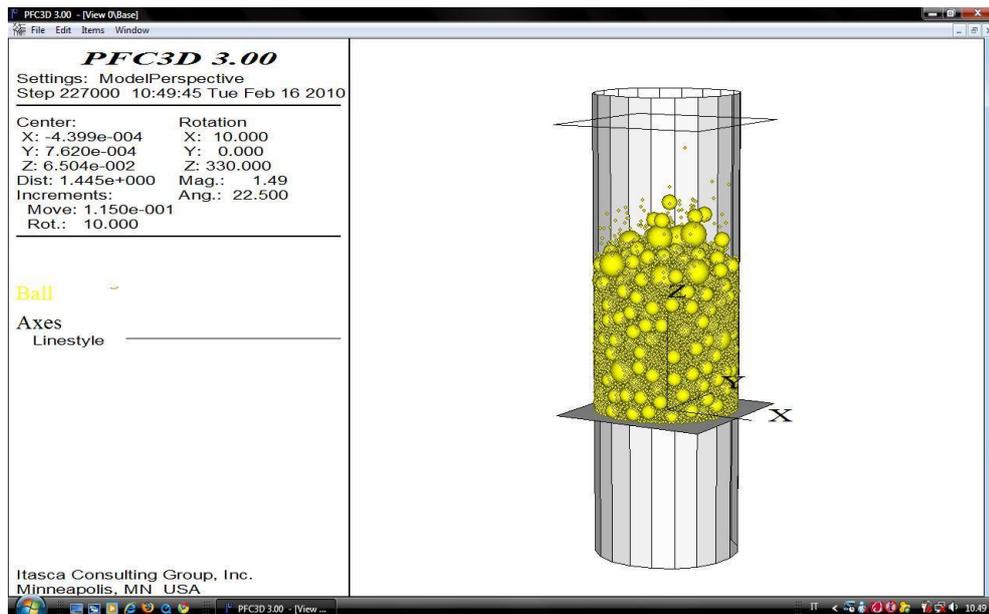


FIGURA 5.2: FASE INTERMEDIA NELLA GENERAZIONE DEL PROVINO

Il numero dei cicli (*cyc*) per ciascuna fase è regolato appunto in base al tempo di decantazione, l'obbiettivo è liberare il volume di generazione delle sfere per la fase successiva. A questo scopo un numero di cicli molto elevato è una garanzia, ma chiaramente i tempi di calcolo si allungano.

Se il volume non è libero, il numero delle sfere generate in quello spazio potrebbe essere troppo elevato ed il programma si blocca segnalando l'errore: "Fewer balls generated than specified".

È per questo stesso motivo che il listato è stato suddiviso in cinquanta fasi, in modo da generare le sfere in un numero massimo consentito dal programma per quel volume. Paradossalmente, creare le sfere in un'unica fase avrebbe richiesto un volume di generazione molto ampio, maggiore delle dimensioni della cella stessa.

Il software permette di monitorare l'andamento delle velocità delle sfere nonché le catene di forze che si creano, come possiamo vedere nelle immagini 5.3, 5.4.

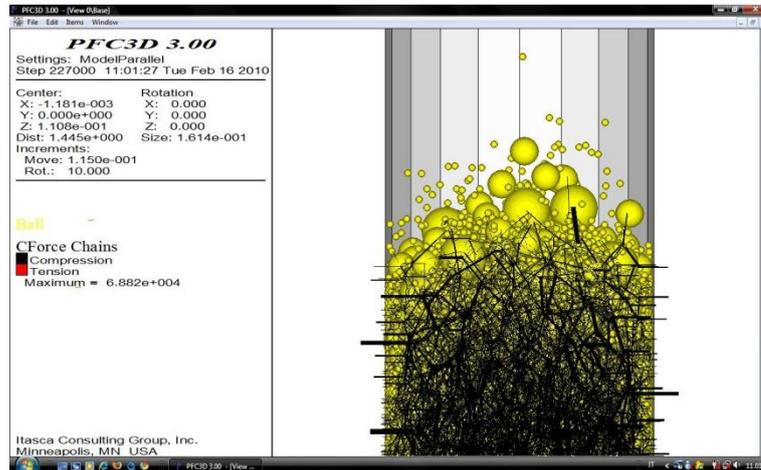


FIGURA 5.3: SFERE E FORZE DI CONTATTO

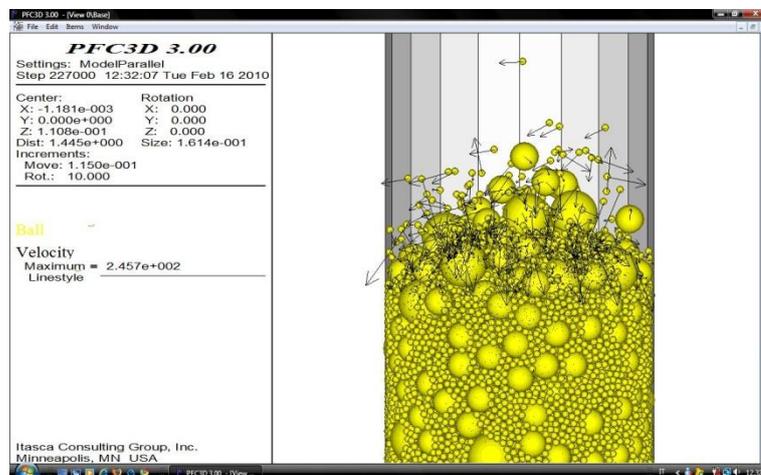


FIGURA 5.4: SFERE E VETTORI VELOCITÀ

Il provino è stato creato in modo da riprodurre fedelmente quello utilizzato nella prova triassiale di laboratorio: il numero delle sfere e le proprietà fisiche sono le stesse (figura 5.5).

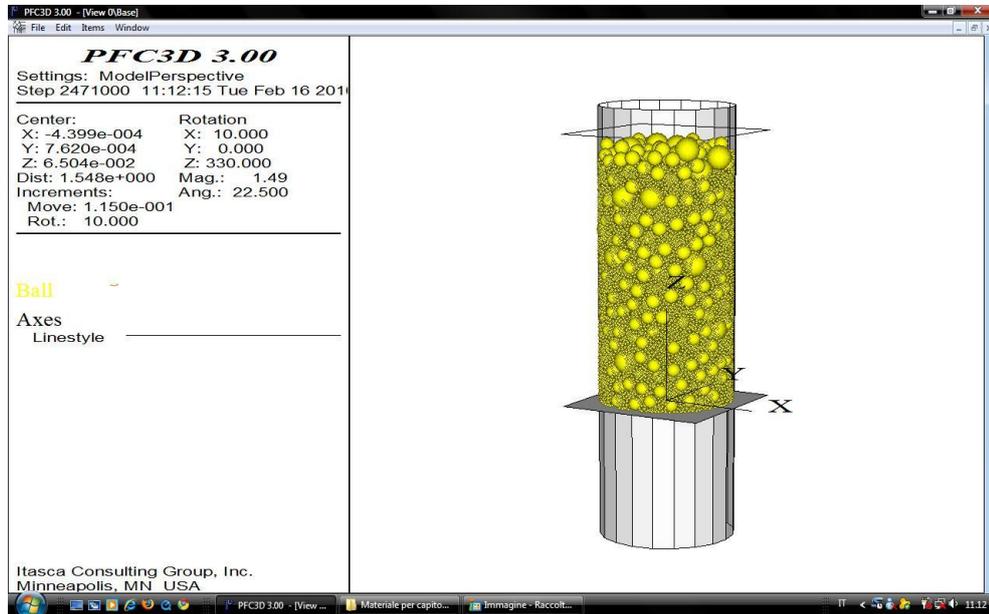


FIGURA 5.5: PROVINO COSTITUITO DA SFERE

A causa dell'elevato numero di particelle, i tempi di realizzazione del provino sono molto lunghi, sono necessarie più di 60 ore.

Per accelerare i tempi di calcolo la forza di gravità è stata aumentata, ma gran parte del tempo così guadagnato va speso in cicli addizionali per l'assestamento del provino: una volta riportata la gravità a valori reali le sfere entrano in movimento in quanto restituiscono le deformazioni dovute alla forza peso precedentemente incrementata.

### 5.2.2. Generazione provino costituito da clump e sfere

Le regole generali sono le stesse illustrate al paragrafo 5.2.1., la novità consiste nella generazione dei *clump*.

Si ricorda che un *clump* è un gruppo di particelle sferiche legate tra loro che si comporta come un corpo rigido (con un confine deformabile). Il legame non si rompe mai, a prescindere dalle forze che su di esso agiscono.

La miscela di sfere e *clump* è così assortita 32'204 sfere da 2,77 mm di diametro, 1'016 *clump* formati da gruppi di tre sfere da 5,5 mm di diametro, 282 *clump* formati da gruppi di tre sfere da 9 mm di diametro.

La procedura per generare i *clump*, ognuno identificato dal proprio ID, è più lunga e complessa: bisogna descriverne uno alla volta, indicando la configurazione tramite le coordinate dei centri delle sfere che lo compongono. Si riporta a titolo d'esempio lo stralcio di listato per la generazione di un *clump*.

```
ball id=1 x -0.01175 y 0.028763 z 0.12 rad 0.00275
ball id=2 x -0.009 y 0.024 z 0.12 rad 0.00275
ball id=3 x -0.0145 y 0.024 z 0.12 rad 0.00275
clump id=4 range id=1,3
```

Questo tipo di procedura assegna una posizione d'origine fissa al *clump*; è importante non sovrapporre il *clump* ad altri o ad altre sfere, perché verrebbero a crearsi delle forze di repulsione altissime.

A questo fine, nelle varie fasi, sono stati simultaneamente generati gruppi di *clump* e sfere disposti a livelli z distinti.

Per semplificare la generazione dei *clump* e la scrittura del listato, sono stati creati per gruppi disposti in modo regolare sul piano x y, ad un livello z comune. Al fine di ricavare le coordinate x ed y delle sfere, è stato disegnato un modello vettoriale con origine degli assi coerentemente disposta al centro (figura 5.6).

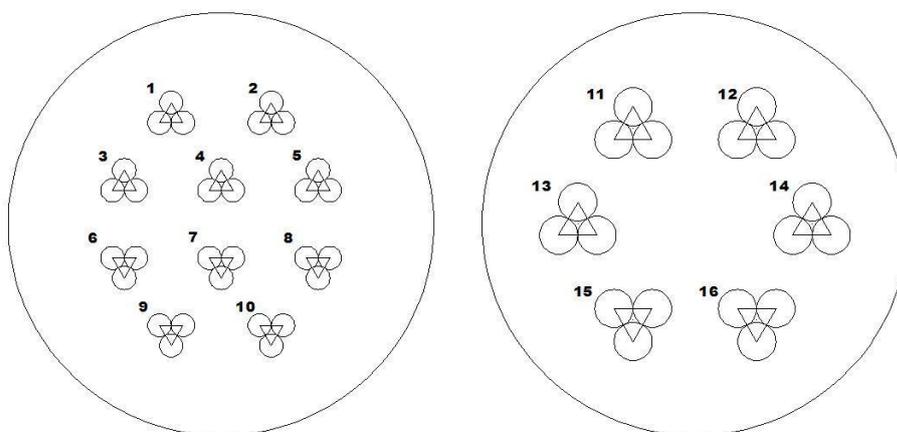


FIGURA 5.6: MODELLO DISPOSIZIONE CLUMP

Una volta rilevate le coordinate dei centri delle sfere, è stato predisposto il listato, in modo da riprodurre al PFC la stessa configurazione (figura 5.7).

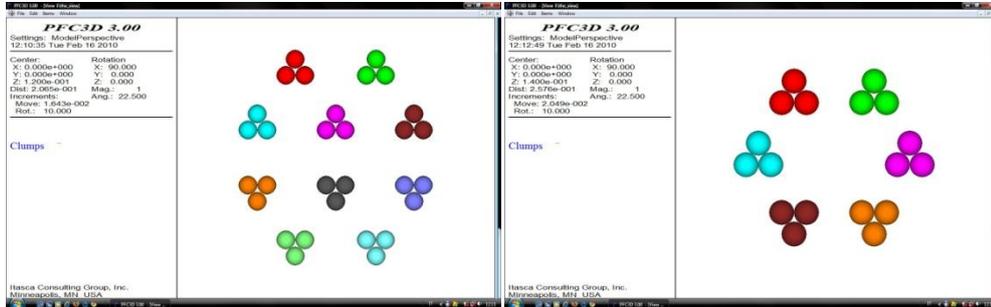


FIGURA 5.7: DISPOSIZIONE CLUMP

Questa configurazione regolare non comporta problemi in quanto, una volta “fatta cadere” da un certo livello z nel modello, grazie all’interazione con le altre particelle provvede a distribuirsi automaticamente, andando a creare un modello con una disposizione di sfere e *clump* abbastanza mescolata (figura 5.8).

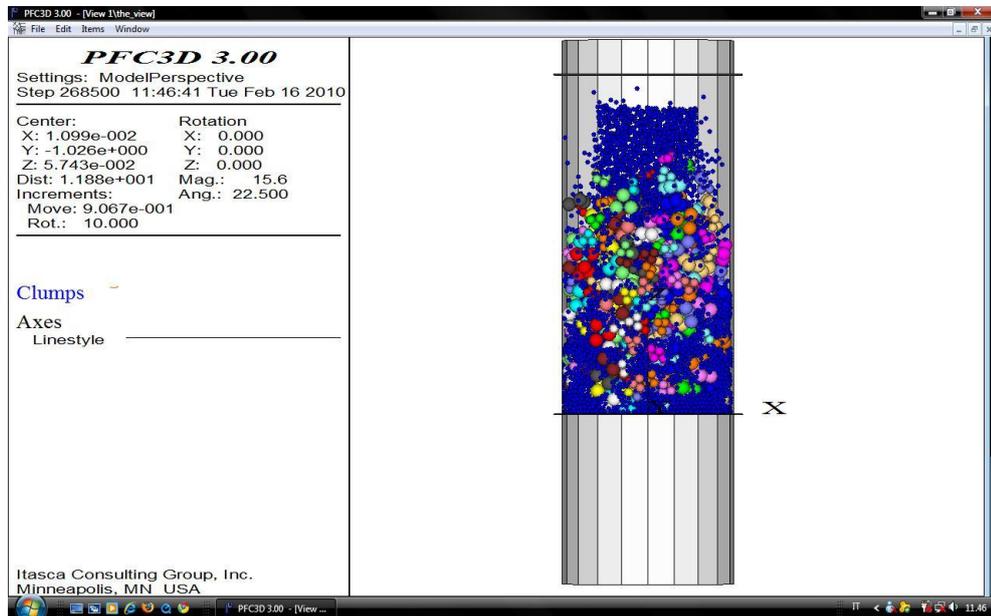


FIGURA 5.8: FASE INTERMEDIA CREZIONE DEL PROVINO COSTITUITO DA CLUMP

Le particelle, avendo una forma che aiuta l’ingranamento, durante la generazione del provino tendono ad accumularsi le une sulle altre non consentendo un buon riempimento.

A questo fine, soprattutto nelle fasi conclusive, la disposizione delle particelle è stata controllata e quando necessario sono state assegnate ad alcune particelle, identificate dal loro ID, piccole forze orizzontali per un numero sufficiente di cicli a distenderle.

La creazione di questo provino ha richiesto tempi simili a quello precedente, nell'ordine di 60 ore. Il nuovo svantaggio è rappresentato dalla stesura del listato che, contenendo la descrizione di ogni singolo *clump*, è molto più articolato e ha richiesto molte ore di lavoro.

Si riporta l'immagine del provino a creazione ultimata (figura 5.9).

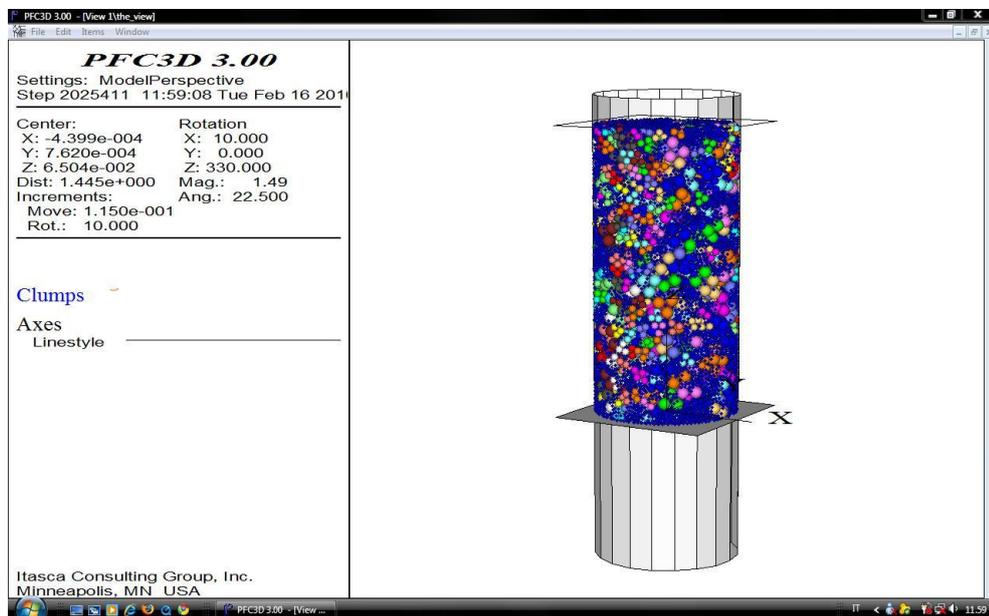


FIGURA 5.9: PROVINO COSTITUITO DA SFERE E CLUMP

### **5.3. Simulazione della prova triassiale**

In questo paragrafo si illustrano i principi adottati nella simulazione della prova triassiale, che sono validi per tutti i quattro test effettuati: per ognuno dei due provini, la cui costituzione è appena stata spiegata nei paragrafi precedenti, sono stati impostati come valori della pressione di confinamento 400 e 500 kPa.

Come per il test di laboratorio in generale possiamo distinguere la fase di consolidazione, seguita da quella di rottura, dovuta al movimento dei *walls* superiore ed inferiore.

Inizialmente, oltre ad annullare eventuali velocità e rotazioni residue dalle fasi precedenti, per simulare un confinamento “morbido” come accade nella realtà, è stata ridotta la rigidità del muro laterale utilizzando la funzione *cws*, ad un valore pari ad un decimo della rigidità delle sfere (Itasca, 2003).

Nel seguito viene definito il meccanismo che durante il test provvederà a calcolare e controllare lo stato tensionale. Gli stati tenso deformativi del campione sono determinati attraverso la funzione *FISH* denominata *get\_ss*.

Le deformazioni assiali si determinano in funzione dell'altezza iniziale ( $L_0$ ) e finale ( $L$ ) del provino utilizzando la seguente relazione:

$$\varepsilon = \frac{L - L_0}{\frac{1}{2} \cdot (L_0 + L)} \quad (5.1)$$

Quelle volumetriche si valutano in funzione del raggio iniziale ( $R_0$ ) e finale ( $R$ ) del cilindro sfruttando la seguente equazione:

$$\varepsilon = \frac{R - R_0}{\frac{1}{2} \cdot (R_0 + R)} \quad (5.2)$$

Durante tutto il processo di carico, la tensione di confinamento è mantenuta costante regolando la velocità radiale della parete utilizzando un servo-meccanismo numerico che viene attivato con le funzioni *FISH servo* e *get\_gain*.

La funzione *servo* viene richiamata ad ogni ciclo, a sua volta richiama la funzione *get\_ss* per determinare le sollecitazioni e utilizzare il servo-controllo numerico per regolare la velocità della parete, in modo da ridurre la differenza tra la tensione misurata e quella richiesta.

Il servo-meccanismo attiva l'algoritmo seguente, l'equazione per la velocità della parete è:

$$\dot{u}^{(w)} = G \cdot (\sigma^{measured} - \sigma^{required}) = G \cdot \Delta\sigma \quad (5.3)$$

G è il “parametro di guadagno”, che è stimato dalla funzione *get\_gain* utilizzando il seguente ragionamento.

Il massimo incremento di tensione derivante dallo spostamento di un muro in un singolo timestep è:

$$\Delta F^{(w)} = k_n^{(w)} \cdot N_c \cdot \dot{u}^{(w)} \cdot \Delta t \quad (5.4)$$

dove  $N_c$  è il numero di contatti particella-muro, e  $k_n^{(w)}$  è la rigidità media normale di questi contatti. Pertanto, la variazione di tensione applicata alla parete è:

$$\Delta \sigma^{(w)} = \frac{k_n^{(w)} \cdot N_c \cdot \dot{u}^{(w)} \cdot \Delta t}{A} \quad (5.5)$$

dove A è l'area della parete.

Per la stabilità, il valore assoluto della variazione di tensione della parete deve essere inferiore rispetto al valore assoluto della differenza tra le tensioni misurate e richieste. In pratica, è utilizzato un fattore di rilassamento,  $\alpha$ , in modo tale che il requisito della stabilità diventi:

$$|\Delta \sigma^{(w)}| < \alpha |\Delta \sigma| \quad (5.6)$$

Sostituendo le eq. (5.3) e (5.5) nell'eq. (5.6) si ottiene:

$$\frac{k_n^{(w)} \cdot N_c \cdot G \cdot |\Delta \sigma| \cdot \Delta t}{A} < \alpha |\Delta \sigma| \quad (5.7)$$

e il guadagno è determinato attraverso:

$$G = \frac{A}{k_n^{(w)} \cdot N_c \cdot \Delta t} \quad (5.8)$$

Per ogni ciclo di calcolo sono state monitorate:

- le forze di contatto interne al provino, che aumentano all'avanzare del test;
- la tensione assiale  $\sigma_a$ ;

- la tensione media di confinamento (*conf*),  $\sigma_c$ ;
- la tensione deviatorica (*dev*),  $\sigma_d$ , definita come  $\sigma_a - \sigma_c$ ;
- la deformazione assiale (*deax*),  $\varepsilon_a$ ;
- la deformazione volumetrica (*devo*),  $\varepsilon_v = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$ .

Come nella realtà, prima della fase di rottura avviene il processo di consolidazione del campione, che viene simulato attraverso una serie di cicli (funzione *iterate*), sino al raggiungimento, entro una certa tolleranza, dello stato tensionale richiesto.

La fase di consolidazione isotropica viene simulata applicando una pressione costante attraverso i tre *walls*.

Il tempo necessario a portare a termine questa fase dipende dalla pressione di confinamento assegnata, comunque possono essere necessarie molte decine di ore: per il provino costituito da sfere, per la tensione di confinamento pari a 500 kPa sono state necessarie circa 20 ore, per la prova con tensione di confinamento pari a 400 kPa circa 30. È stata tentata anche la simulazione della prova con tensione di confinamento pari a 300 kPa, poi abbandonata dopo qualche giorno. Per quanto riguarda il provino con i *clump*, i tempi sono stati leggermente più contenuti.

Il carico assiale che porta alla rottura del campione avviene assegnando una velocità ai *walls* superiore ed inferiore.

La funzione *accel\_platens* incrementa la velocità delle piastre di carico superiore ed inferiore in modo controllato, raggiungendo la velocità finale *\_vfinal* in un numero di passi *\_nsteps*.

Dopo vari tentativi, il valore della velocità è stato fissato pari a 0,035 m/s, molto superiore a quello reale per accelerare i tempi di calcolo sino a valori accettabili: per portare a termine questa fase, al fine di ottenere una deformazione assiale simile a quella di laboratorio sono comunque necessarie quasi 50 ore.

Concludendo, la simulazione di un test triassiale di tale complessità richiede circa 70÷100 ore, in base alla pressione di confinamento assegnata ed alla deformazione assiale che si vuole ottenere, da considerare oltre alle 50÷60 ore spese per la creazione del provino.

Nell'immagine 5.10 si riporta a titolo d'esempio il provino costituito da sfere a due diversi stati di deformazione durante l'applicazione del carico assiale nel test, possiamo notare che i muri inferiore e superiore hanno compresso il provino mentre quello laterale si è dilatato.

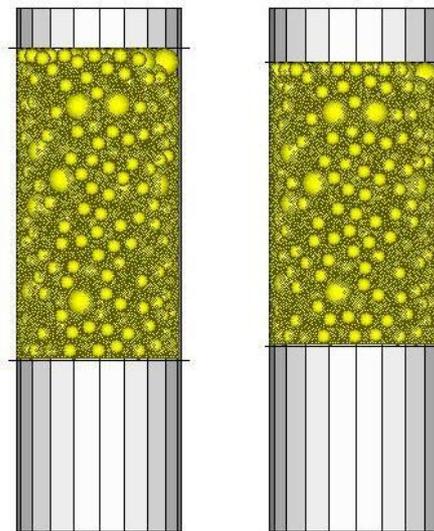


FIGURA 5.10: PROVINO ALL'INIZIO ED ALLA FINE DELLA DEFORMAZIONE ASSIALE

#### **5.4. Riepilogo percorso di lavoro**

##### **5.4.1. La fase di calibrazione dei parametri microscopici**

Il primo periodo di lavoro è stato dedicato alla creazione del provino di sfere, fedele riproduzione di quello utilizzato in laboratorio per le prove triassiali.

Il primo provino creato è stato scartato, perché il coefficiente d'attrito non era corrispondente a quello ricavato dall'involuppo sui cerchi di Mohr; il secondo provino è stato quindi generato con coefficiente d'attrito *fric* corretto pari a 0,42.

Purtroppo anche questo provino ha evidenziato delle criticità: avviando la prova triassiale i *walls* superiore ed inferiore traslavano in modo inverso. La causa di questa anomalia è stata identificata in problemi di compatibilità nelle unità di misura.

È stato quindi creato un ulteriore provino, la difficoltà riscontrata in questo terzo tentativo è la lentezza nella decantazione delle sfere a seguito della generazione.

Per ridurre i tempi di calcolo a livelli accettabili la gravità è stata aumentata. Una volta ultimato il provino l'accelerazione di gravità è stata riportata al valore reale, ma a causa di ciò la restituzione di deformazione nelle sfere ha provocato movimenti nel provino, rendendo necessari ulteriori cicli di assestamento.

Questa prima fase di settaggio dei parametri al fine di creare un provino rispondente alle esigenze, ha richiesto quindi tre tentativi, per ciascuno dei quali sono state necessarie oltre 50 ore di calcolo.

Terminata questa fase, si è passati alla simulazione della prova triassiale, nella quale si sono riscontrati due problemi.

Il primo riguarda la tensione di confinamento: più è bassa, più il provino ha bisogno di cicli per raggiungere lo stato di consolidazione iniziale. La prova con tensione di confinamento pari a 500 kPa ha impiegato circa un giorno, quella da 400 kPa circa 30 ore, quella da 300 kPa dopo molti giorni è stata sospesa.

Passando alla fase di rottura, la difficoltà riscontrata riguarda la taratura della velocità delle piastre: inserire il valore utilizzato in laboratorio avrebbe richiesto tempi di calcolo esagerati. La velocità è stata quindi tarata a valori più elevati per ottenere risultati in tempi accettabili.

L'individuazione della velocità adeguata ha richiesto ben sei lunghi tentativi: si è partiti da un valore abbastanza elevato, che però influiva negativamente sulla risposta del materiale, che mostrava nel grafico della tensione deviatorica in funzione della deformazioni assiale picchi di resistenza troppo elevati, rispetto a quelli ottenuti in laboratorio.

Progressivamente la velocità è stata ridotta al valore di 0,035 m/s per piastra. A tale velocità il grafico della tensione deviatorica in funzione della deformazione assiale si dimostra congruente con le prove di laboratorio.

Nella simulazione della fase di rottura, la deformazione assiale è proporzionale al numero di cicli quindi al tempo di calcolo: per una deformazione del 10% sono necessarie circa 40 ore.

Una volta tarate le unità sono quindi state completate con successo le simulazioni di due prove triassiali, con tensioni di confinamento pari a 400 e 500 kPa.

#### **5.4.2. L'influenza della forma dell'aggregato**

Impiegando i settaggi utilizzati nelle impostazioni della precedente prova, si è passati allo studio sui *clump*, con l'obiettivo di indagare l'influenza nella risposta, al variare della forma dell'aggregato.

La creazione del provino, oltre alle decine di ore di calcolo, ha richiesto molto tempo per la stesura del listato. Come spiegato per generare un *clump* è necessaria la descrizione delle dimensioni e della posizione dei centri delle sfere da cui è composto. Il listato è quindi molto articolato: basti pensare che con caratteri di dimensioni normali viene ad occupare circa 250 pagine A4.

Il provino è poi stato sottoposto alle stesse tipologie di test triassiali utilizzati per le sfere, la prova con tensione di confinamento 500 kPa ha dato risultati accettabili, quella da 400 kPa ha fornito una risposta diversa rispetto la prova di laboratorio.

I risultati verranno comunque discussi in modo approfondito nel capitolo seguente.

Concludendo, bisogna ammettere che in generale i tempi di calcolo sono stati un grosso impedimento, e hanno concesso la realizzazione di poche prove; per studi futuri è consigliabile l'uso di una potente *work station*.

## **CAPITOLO 6**

### **I RISULTATI DELLE PROVE**

#### **6.1. Le sfere**

Il provino utilizzato nelle simulazioni delle prove triassiali è la fedele riproduzione di quello utilizzato in laboratorio, ed è costituito da 32'204 sfere di diametro 2,77 mm, 605 sfere da 11 mm e 77 sfere da 18 mm.

In laboratorio sono state effettuate tre prove, con tensioni di confinamento pari a 300, 400 e 500 kPa. Sono state simulate solamente due prove, una con tensione di confinamento pari a 400 kPa e l'altra con tensione di 500 kPa; in quanto quella da 300 kPa è stata sospesa per tempi di calcolo eccessivi, dovuti alla pressione di confinamento più debole rispetto agli altri due casi, e quindi a tempi di assestamento delle particelle più lunghi.

##### **6.1.1. Tensione deviatorica**

Per iniziare si presentano le curve tensione-deformazione: sulle ascisse è rappresentata la deformazione assiale, espressa in valore percentuale, mentre sulle ordinate si rappresenta la tensione deviatorica, calcolata come  $\sigma_a - \sigma_r = \sigma_1 - \sigma_3$ .

Nei grafici, al solo scopo di verifica, è anche rappresentata la tensione di confinamento, si può osservare che il suo andamento è una linea pressoché orizzontale: questo conferma che il servo-controllo numerico, che è una funzione attivata nel listato della prova, sta mantenendo la tensione di confinamento costante.

Il comportamento dei campioni è in accordo con quello osservato nelle generiche prove di laboratorio e può essere suddiviso in tre fasi:

- fase iniziale nella quale le deformazioni sono molto piccole e la tensione deviatorica cresce velocemente in modo monotono;
- fase intermedia che si presenta quando il campione incomincia a rompersi;
- fase finale nella quale la resistenza si mantiene costante.

Si riportano i grafici della tensione deviatorica in funzione della deformazione assiale (*devi-deax*), rappresentanti inoltre il valore della tensione di confinamento (*conf*) per le due prove effettuate, con confinamento pari a 400 kPa (figura 6.1) e pari a 500 kPa (figura 6.2).

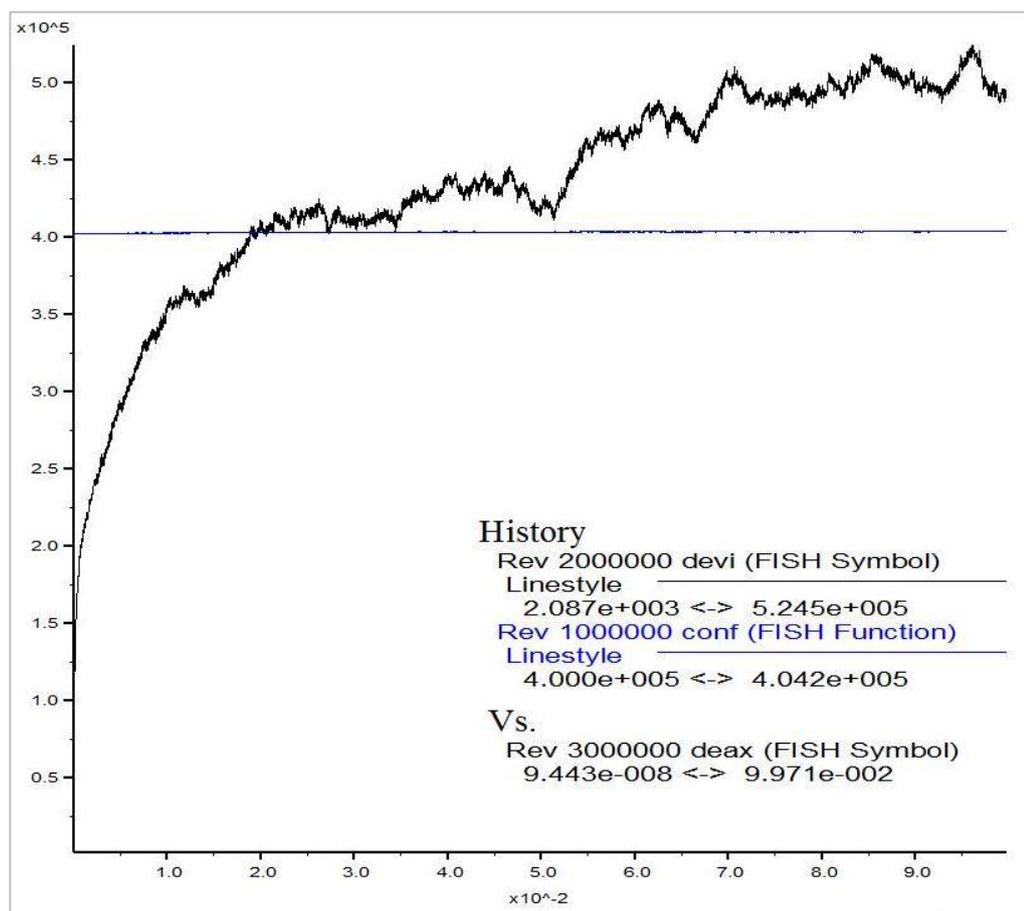


FIGURA 6.1: SFERE, TENSIONE - DEFORMAZIONE ASSIALE, CONFINAMENTO 400 KPA

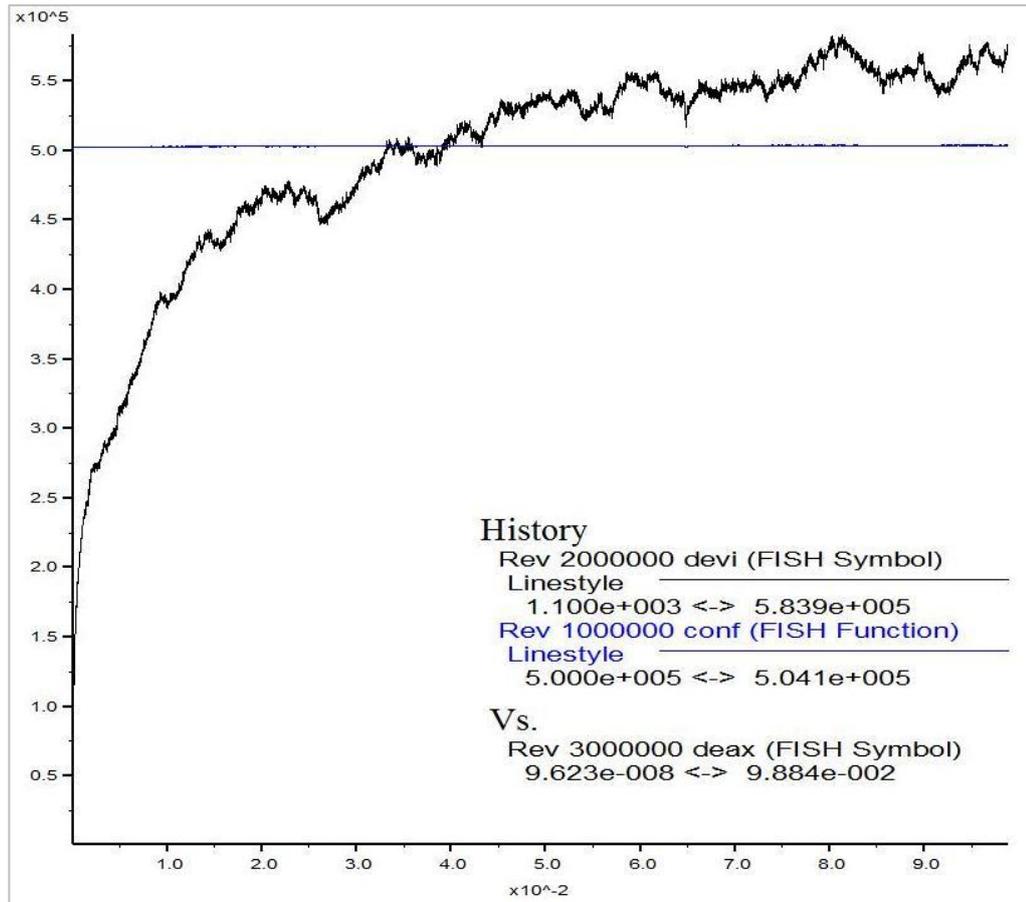


FIGURA 6.2: SFERE, TENSIONE - DEFORMAZIONE ASSIALE, CONFINAMENTO 500 KPA

Mettendo a paragone i grafici ottenuti in laboratorio, con quelli derivati dalle simulazioni possiamo confermare che gli andamenti tensione-deformazione si trovano in accordo.

L'unica differenza riguarda il tratto iniziale che rappresenta l'incremento della tensione deviatorica, caratterizzato da stessa pendenza e quindi modulo, ma più ritardato nella prova di laboratorio: questo è dovuto al fatto che la fase di consolidazione simulata al PFC è perfettamente isotropa e all'inizio del test triassiale comincia subito la deformazione. Per quanto riguarda la prova di laboratorio, la consolidazione avviene grazie alla pressione di cella che agisce solo sui lati del provino, all'inizio della fase di carico assiale vengono quindi persi pochi millimetri prima che le piastre inizino a lavorare effettivamente alla deformazione, creando questo "difetto grafico".

Rappresentiamo quindi il confronto tra i risultati di laboratorio e quelli simulati per la prova con pressione di confinamento pari a 400 kPa (figura 6.3) e per la pressione di confinamento pari a 500 kPa (figura 6.4).

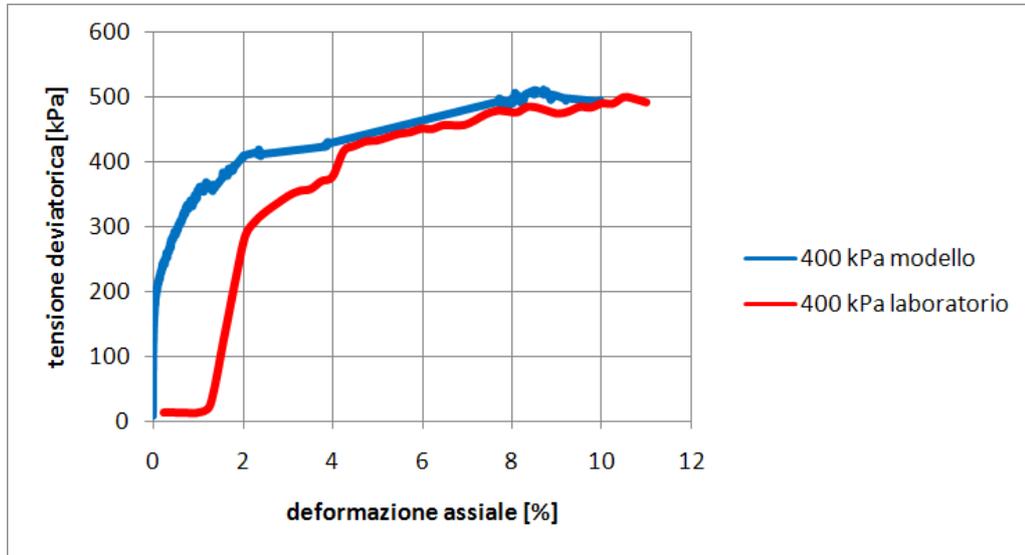


FIGURA 6.3: SFERE, TENSIONE - DEFORMAZIONE, MODELLO E LABORATORIO, CONFINAMENTO 400 kPa

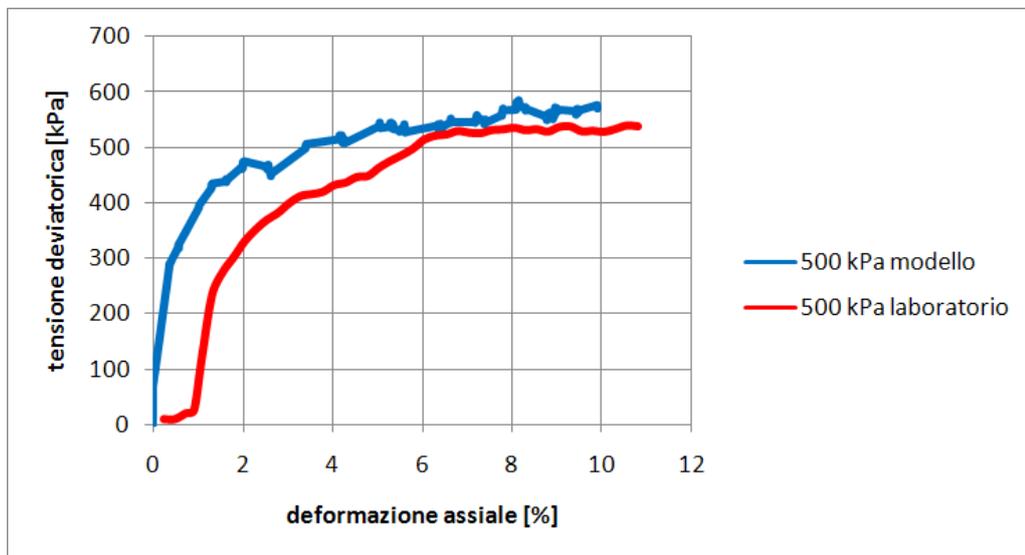


FIGURA 6.4: SFERE, TENSIONE - DEFORMAZIONE, MODELLO E LABORATORIO, CONFINAMENTO 500 kPa

Traslando a sinistra gli andamenti tensione-deformazione di laboratorio, in modo da eliminare i millimetri di corsa del pistone non significativi, è evidente l'accordo dei risultati per ambedue le prove con tensioni di confinamento pari a 400 e 500 kPa (figure 6.5, 6.6).

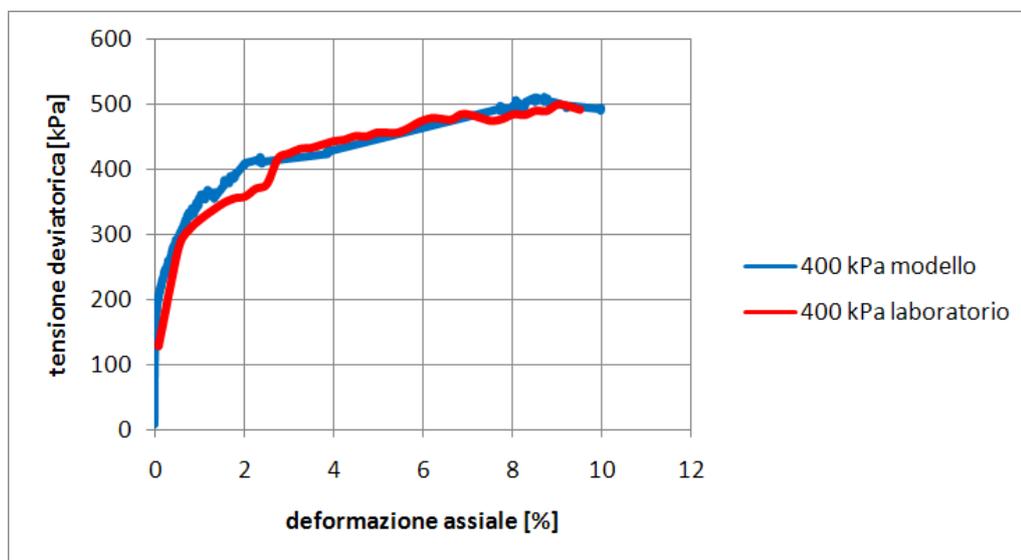


FIGURA 6.5: SFERE, TENSIONE - DEFORMAZIONE, MODELLO E LABORATORIO CORRETTO, CONFINAMENTO 400 kPa

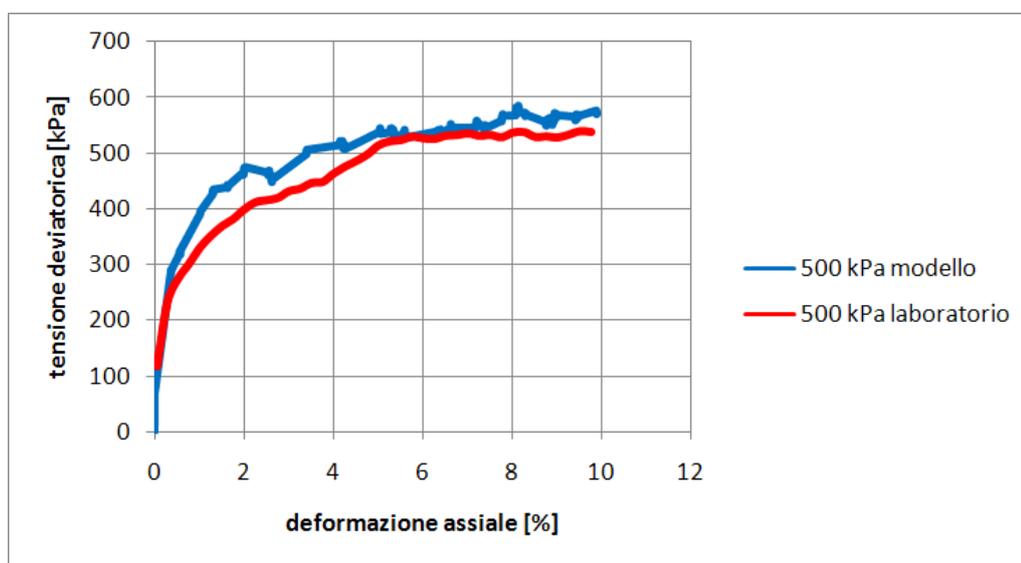


FIGURA 6.6: SFERE, TENSIONE - DEFORMAZIONE, MODELLO E LABORATORIO CORRETTO, CONFINAMENTO 500 kPa

Per completezza si riporta in tabella 6.1 il paragone dei picchi raggiunti in laboratorio ed al modello, possiamo notare che la differenza tra i valori è abbastanza contenuta.

<b>Tensione confinamento</b>	<b>Tensione deviatorica di picco</b>		
	<b>Laboratorio</b>	<b>Modello</b>	<b>Errore</b>
400 kPa	500 kPa	520 kPa	4%
500 kPa	540 kPa	580 kPa	7,4%

TABELLA 6.1: SFERE, PARAGONE PICCHI LABORATORIO E MODELLO

### 6.1.2. Deformazione volumetrica

In immagine 6.7 per la tensione di confinamento pari a 400 kPa e in immagine 6.8 per quella da 500 kPa, si riporta la variazione di volume, rappresentata in funzione della deformazione assiale.

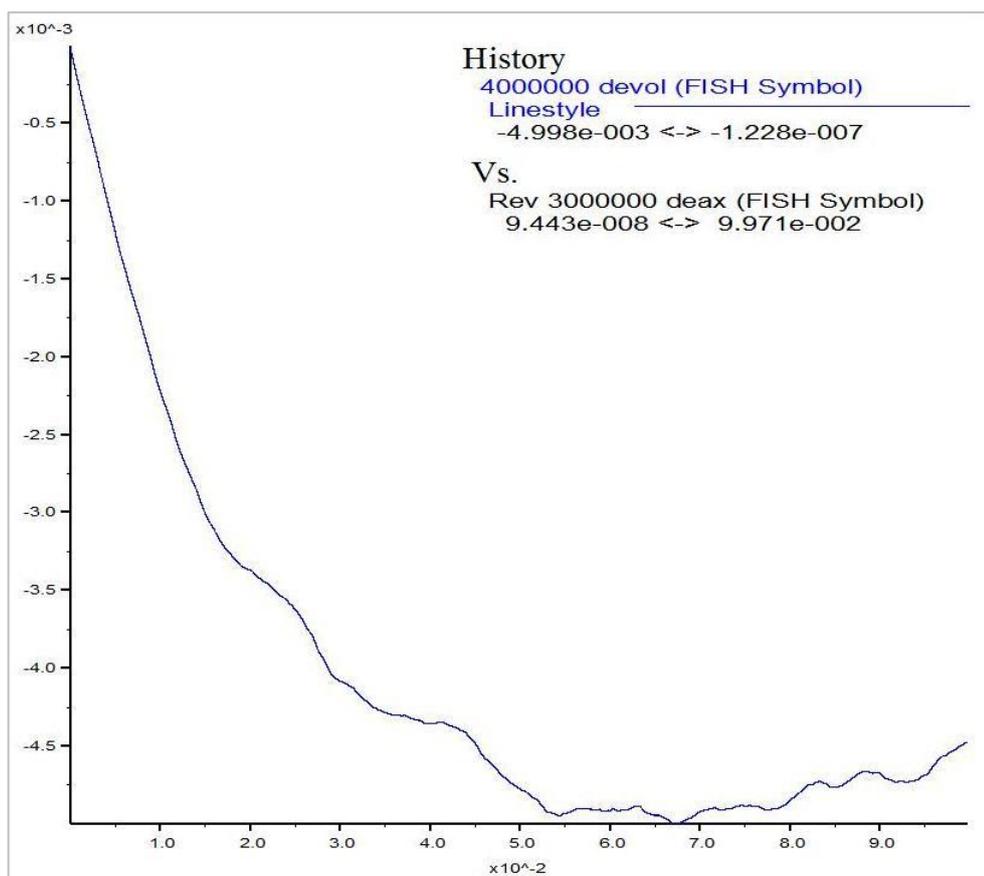


FIGURA 6.7: SFERE, VARIAZIONE VOLUMETRICA - DEFORMAZIONE ASSIALE, CONFINAMENTO 400 kPa

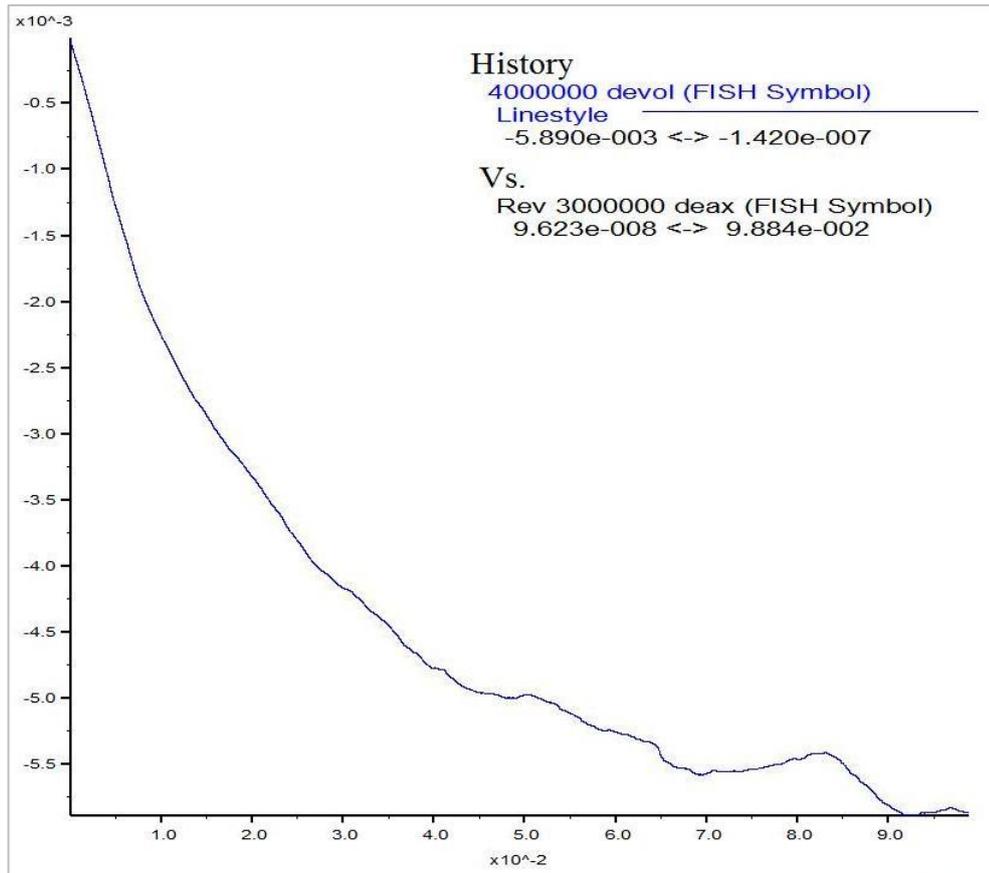


FIGURA 6.8: SFERE, VARIAZIONE VOLUMETRICA - DEFORMAZIONE ASSIALE, CONFINAMENTO 500 kPA

La variazione di volume, rappresentata in funzione della deformazione assiale (*devol-deax*), corrisponde direttamente all'andamento della porosità del campione. In generale si può notare una prima fase di contrazione, cioè il volume del provino caricato diminuisce. In seguito il provino si rompe e la porosità non può più diminuire: da questo punto in poi il provino comincia a dilatarsi. Essendo il sistema estremamente denso, l'unica possibilità che ha per deformarsi è infatti aumentare di volume. Nelle immagini si nota bene la fase di contrazione e appena l'inizio di quella di dilatazione, che sarebbe stata più evidente se i tempi di calcolo avessero concesso uno sviluppo più esteso. Il fenomeno della dilatanza, nel caso del provino delle sfere, è comunque abbastanza ritardato anche a causa di un campione caratterizzato da una "miscela sciolta".

### 6.1.3. Forze di contatto

Le forze di contatto normali vengono calcolate dal programma moltiplicando l'entità della sovrapposizione tra le due particelle adiacenti per la rigidezza.

La rappresentazione grafica viene generata disegnando strisce che si dipartono dai centri delle sfere e passano per il punto di contatto. La larghezza dei segmenti è proporzionale all'intensità della forza. Grazie a questa costruzione i segmenti si collegano tra loro, andando a creare una maglia continua.

Si riporta la rappresentazione delle forze di contatto normali all'inizio (figura 6.9) ed alla fine (figura 6.10) della prova triassiale con confinamento da 400 kPa. L'intensità di tali forze tende ad incrementare con il proseguire del test.

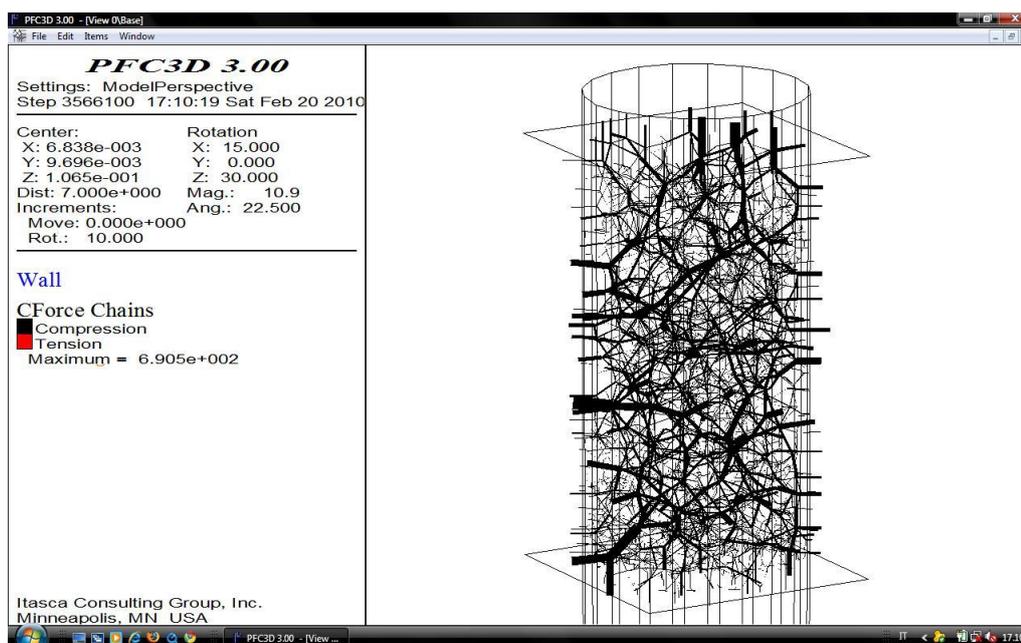


FIGURA 6.9: SFERE, ANDAMENTO CATENE DI FORZE ALLA FINE DELLA CONSOLIDAZIONE, CONFINAMENTO 400 kPa

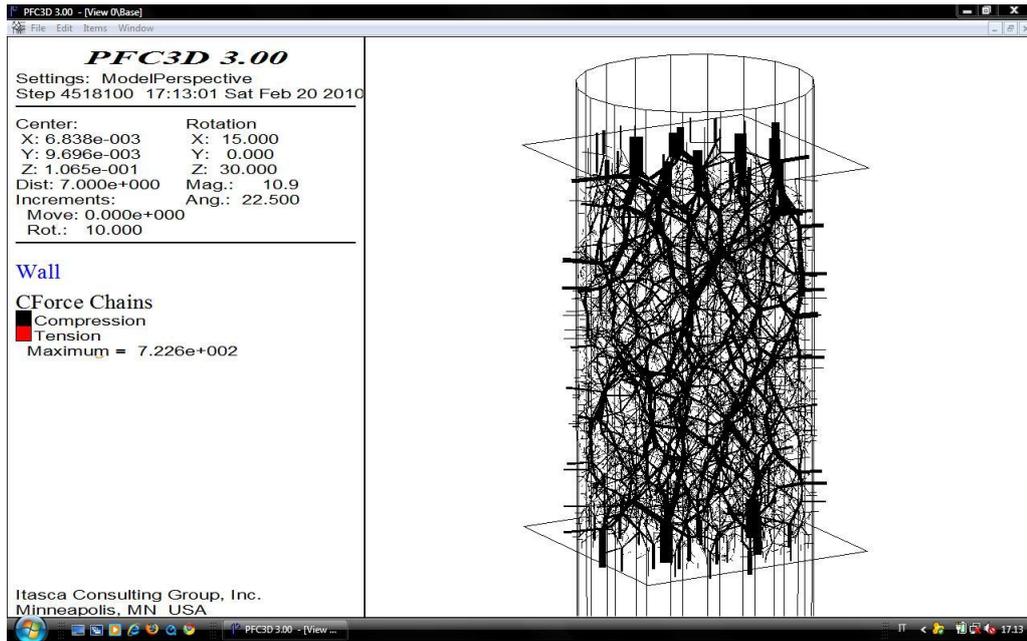


FIGURA 6.10: SFERE, ANDAMENTO CATENE DI FORZE ALLA FINE DELLA PROVA TRIASSIALE, CONFINAMENTO 400 kPA

Si riportano anche le rappresentazioni delle forze di contatto tangenziali all'inizio (figura 6.11) ed alla fine (figura 6.12) della prova triassiale con confinamento pari a 400 kPa. L'intensità di tali forze, subisce un lieve incremento durante il test.

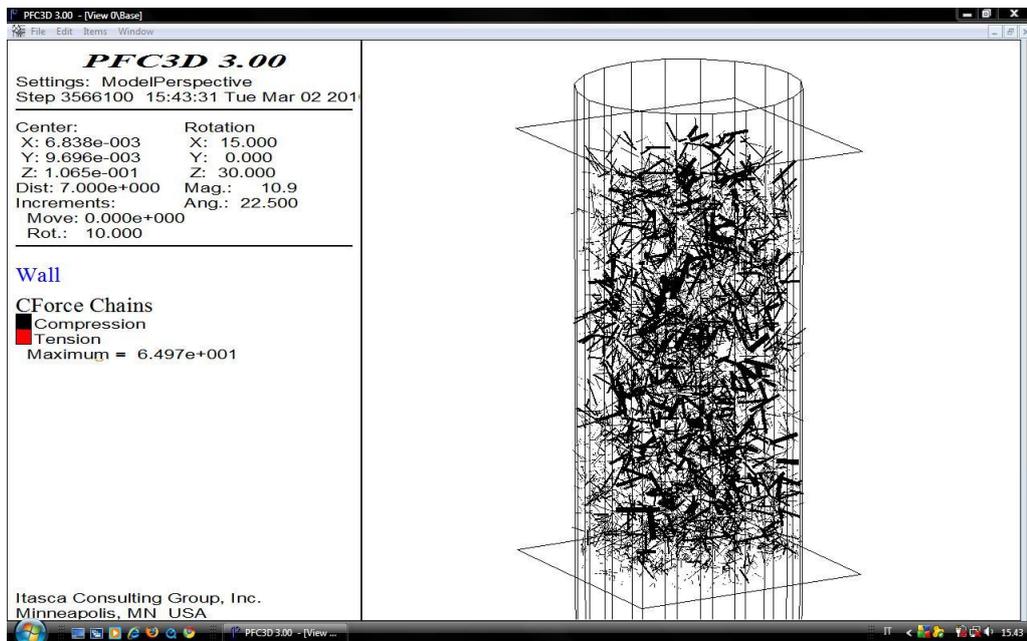


FIGURA 6.11: SFERE, ANDAMENTO FORZE DI CONTATTO TANGENZIALI ALLA FINE DELLA CONSOLIDAZIONE, CONFINAMENTO 400 kPA

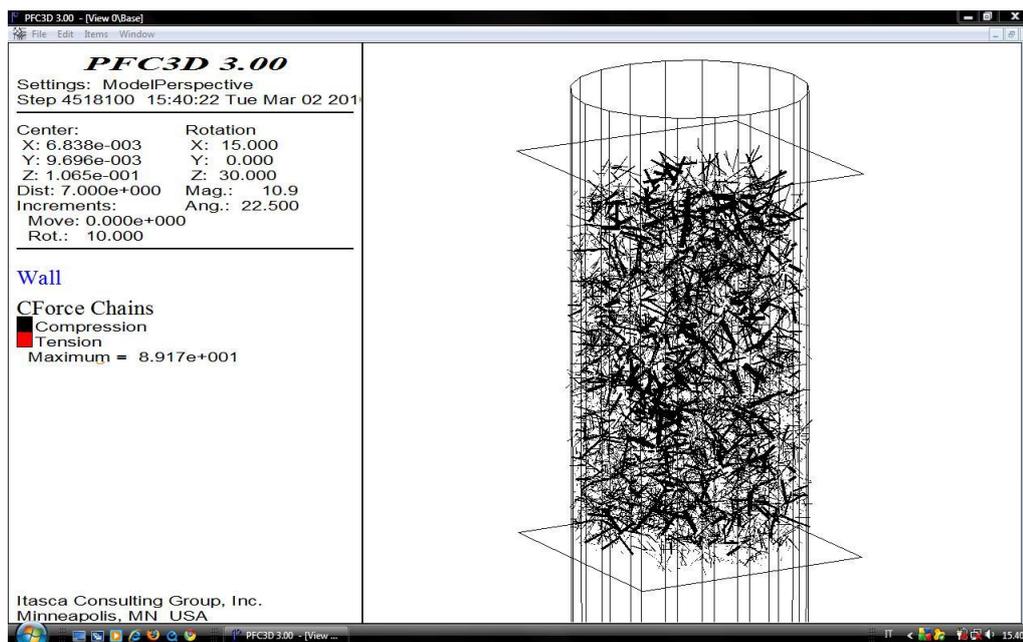


FIGURA 6.12: SFERE, ANDAMENTO FORZE DI CONTATTO TANGENZIALI ALLA FINE DELLA PROVA TRIASSIALE, CONFINAMENTO 400 KPA

Per completezza, in tabella 6.2 si riporta il riepilogo dei picchi delle forze di contatto normali e tangenziali ottenibili dal modello, per il caso della prova con confinamento pari a 400 kPa.

	<b>Forze di contatto normali</b>	<b>Forze di contatto tangenziali</b>
Fine consolidazione	690 N	65 N
Fine triassiale	720 N	90 N

TABELLA 6.2: SFERE, RIEPILOGO PICCHI FORZE DI CONTATTO, CONFINAMENTO 400 KPA

Andando a monitorare le forze di contatto in prossimità della piastra di carico (figura 6.13) ed alla mezzeria del provino (figura 6.14), possiamo notare che le forze della seconda sezione sono meglio distribuite ed hanno un valore di picco molto inferiore.

Vicino alla piastra si registra un valore pari a quasi 700 N, alla mezzeria non si arriva a 300 N.

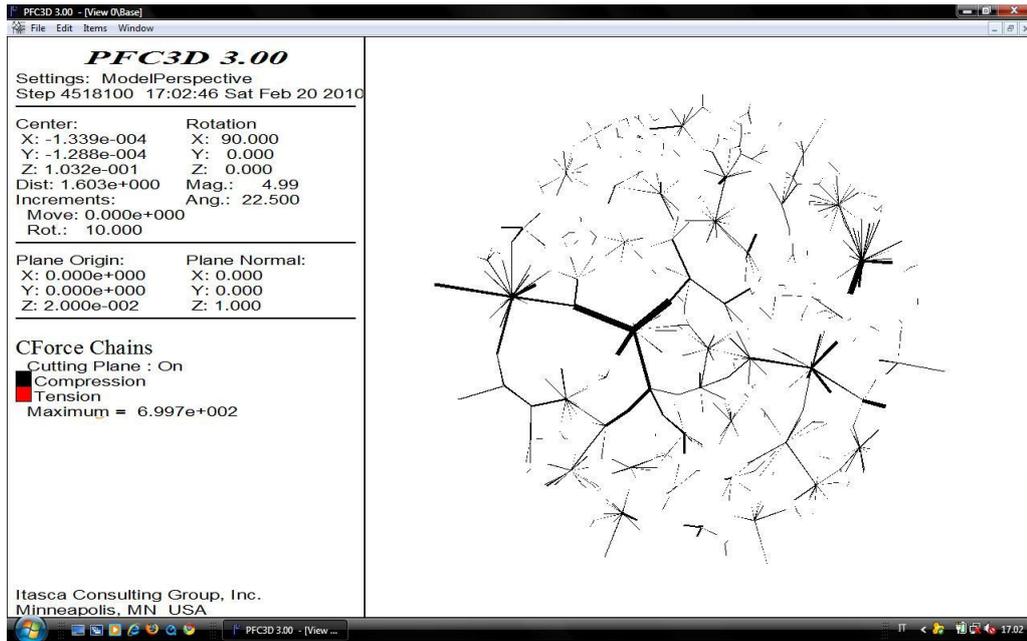


FIGURA 6.13: SFERE, ANDAMENTO CATENE DI FORZE ALLA FINE DELLA PROVA TRIASSIALE, SEZIONE ORIZZONTALE VICINO ALLA BASE DEL PROVINO, CONFINAMENTO 400 kPA

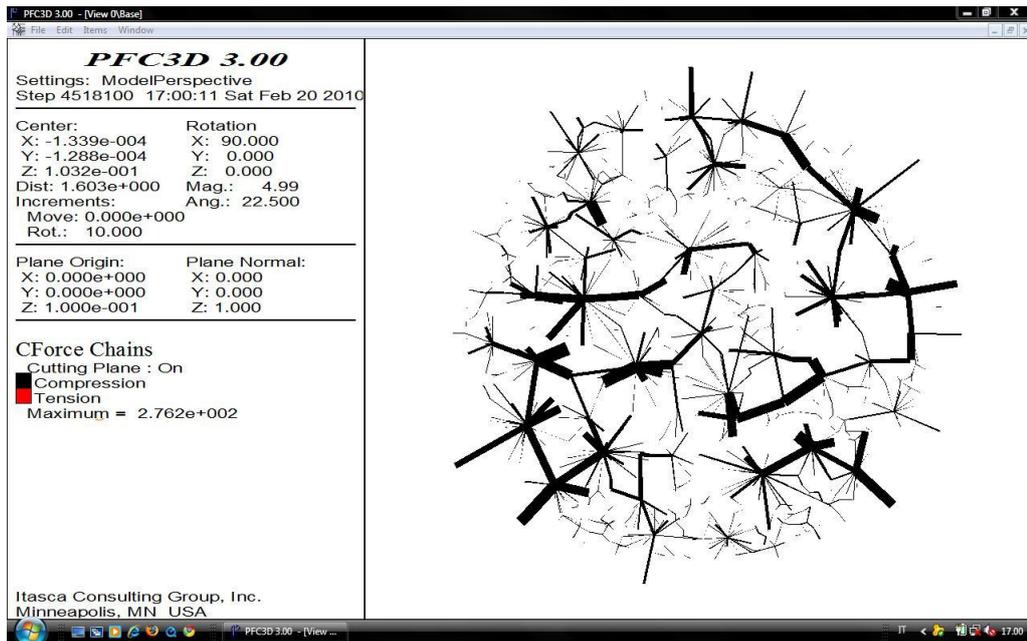


FIGURA 6.14: SFERE, ANDAMENTO CATENE DI FORZE ALLA FINE DELLA PROVA TRIASSIALE, SEZIONE ORIZZONTALE MEZZERIA PROVINO, CONFINAMENTO 400 kPA

Illustriamo anche per il caso con tensione di confinamento pari a 500 kPa la rappresentazione delle forze di contatto tra le sfere alla fine della consolidazione isotropa (figura 6.15) e alla fine del test triassiale (figura 6.16).

È possibile notare che all'inizio le catene di forze vanno a formare una rete abbastanza regolare, con forze orizzontali e verticali di entità paragonabile.

Nello svolgimento del test triassiale le forze tendono ad aumentare, soprattutto quelle verticali lungo il provino, maggiormente interessate dalla sollecitazione delle piastre.

La struttura a rete diventa meno chiara in quanto le forze tendono a disporsi in modo verticale. Dalle immagini si può osservare, infatti, che le forze al termine della prova triassiale hanno entità maggiore in senso longitudinale (figura 6.16).

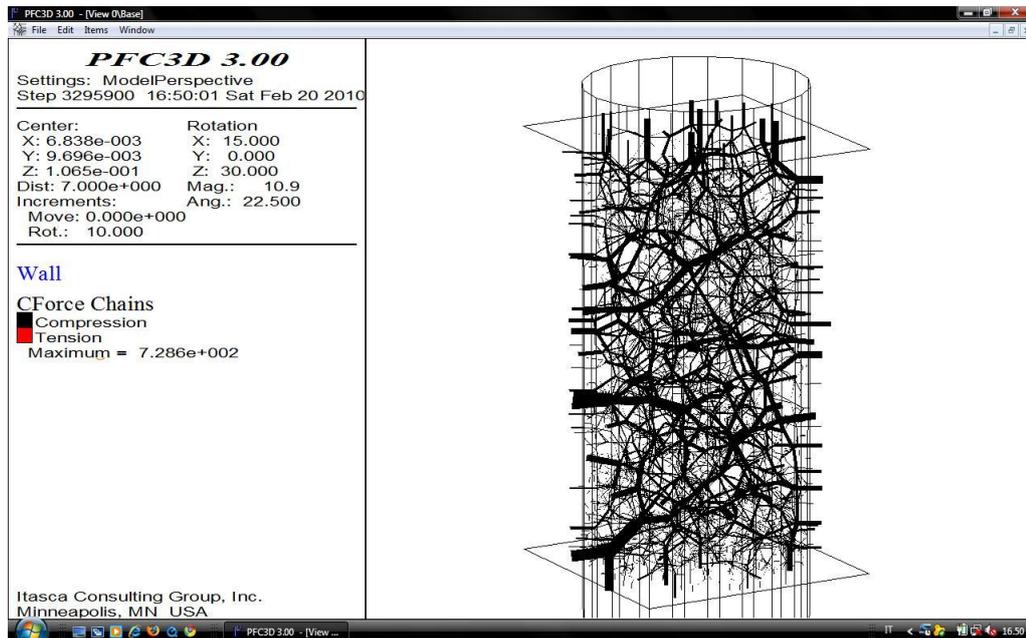


FIGURA 6.15: SFERE, ANDAMENTO CATENE DI FORZE ALLA FINE DELLA CONSOLIDAZIONE, CONFINAMENTO 500 kPA

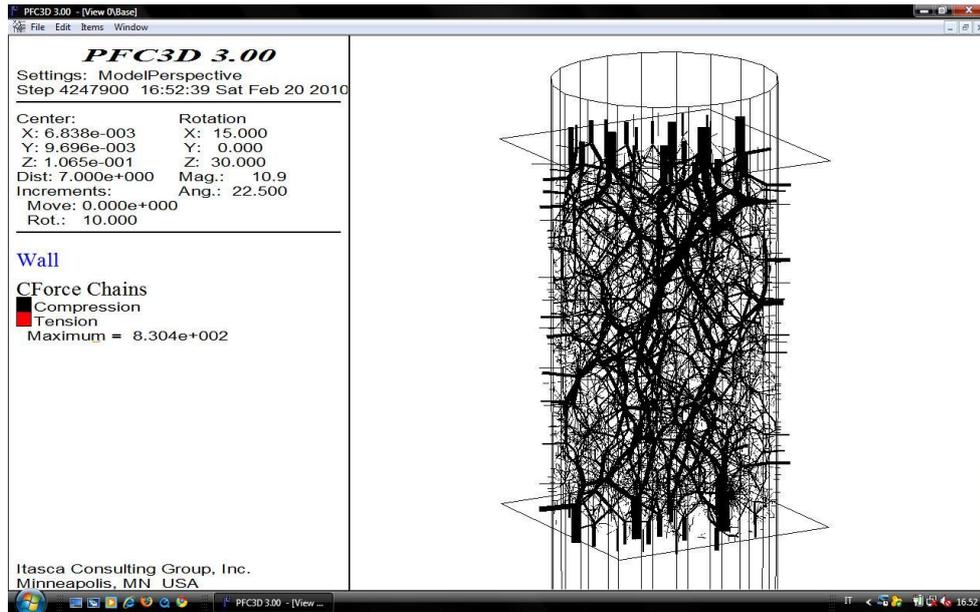


FIGURA 6.16: SFERE, ANDAMENTO CATENE DI FORZE ALLA FINE DELLA PROVA TRIASSIALE, CONFINAMENTO 500 kPA

Si riportano anche le rappresentazioni delle forze di contatto tangenziali all'inizio (figura 6.17) ed alla fine (figura 6.18) della prova triassiale con confinamento pari a 500 kPa. L'intensità di tali forze, alla fine del test è lievemente minore rispetto all'inizio.

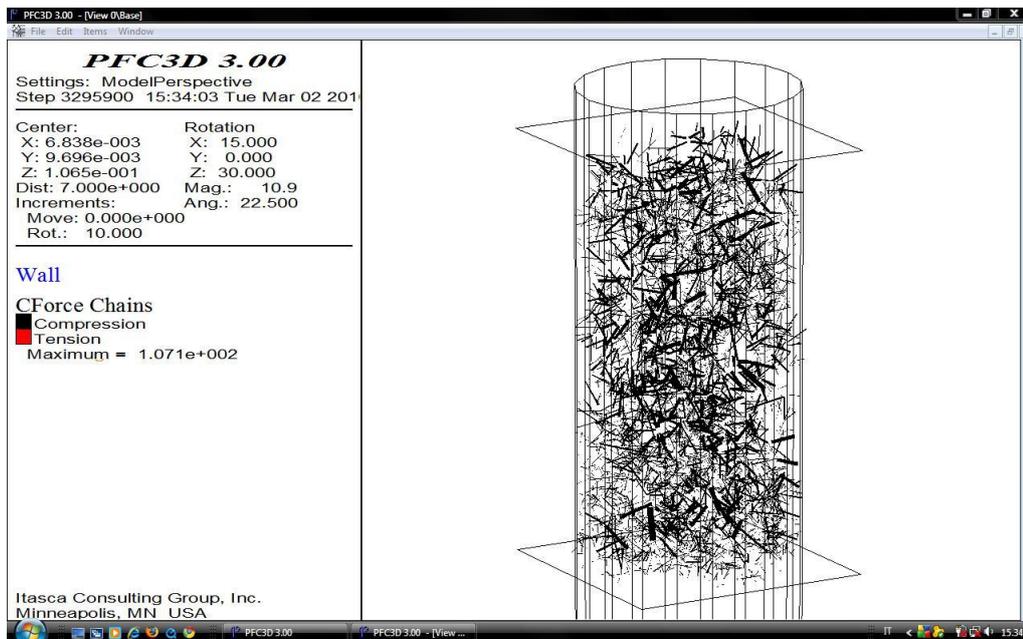


FIGURA 6.17: SFERE, ANDAMENTO FORZE DI CONTATTO TANGENZIALI ALLA FINE DELLA CONSOLIDAZIONE, CONFINAMENTO 500 kPA

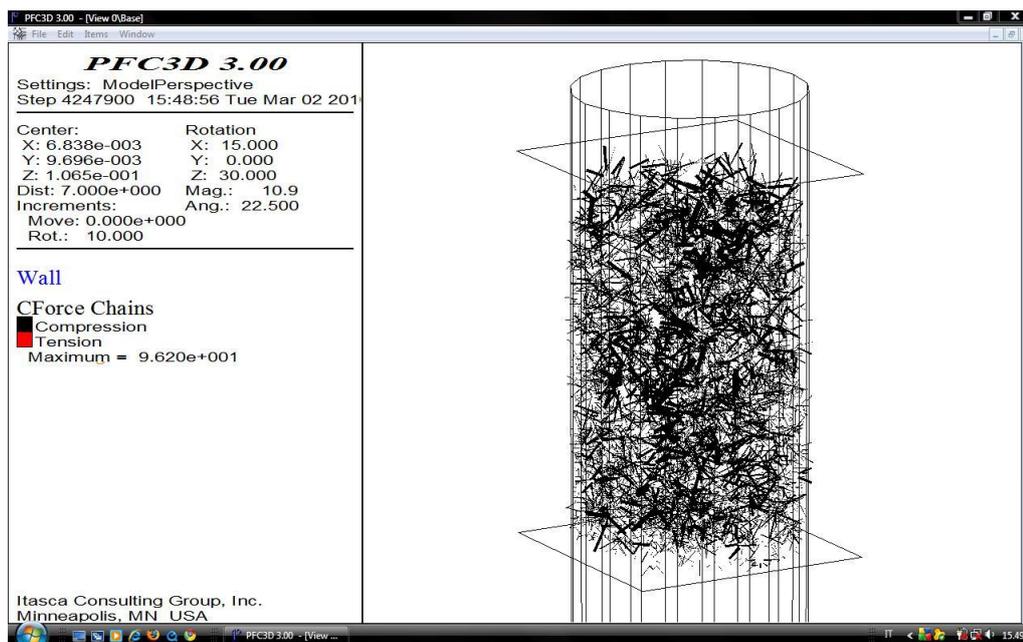


FIGURA 6.18: SFERE, ANDAMENTO FORZE DI CONTATTO TANGENZIALI ALLA FINE DELLA PROVA TRIASSIALE, CONFINAMENTO 500 KPA

Per completezza, in tabella 6.3 si riporta il riepilogo dei picchi delle forze di contatto ottenibili dal modello, per il caso della prova con confinamento pari a 500 kPa.

	<b>Forze di contatto normali</b>	<b>Forze di contatto tangenziali</b>
Fine consolidazione	730 N	105 N
Fine triassiale	830 N	95 N

TABELLA 6.3: SFERE, RIEPILOGO PICCHI FORZE DI CONTATTO, CONFINAMENTO 500 KPA

Possiamo notare che, al contrario del caso a 400 kPa, le forze di contatto tangenziali hanno valore di picco inferiore alla fine della triassiale.

Dal confronto tra le tabelle 6.2 e 6.3, inoltre, si evidenzia che le forze di contatto sia normali sia tangenziali aumentano all'aumentare della tensione di confinamento.

Sezionando il provino a due livelli differenti è possibile notare anche in questo secondo caso che, in prossimità della piastra (figura 6.19), le forze sono più concentrate rispetto alla mezzeria (figura 6.20).

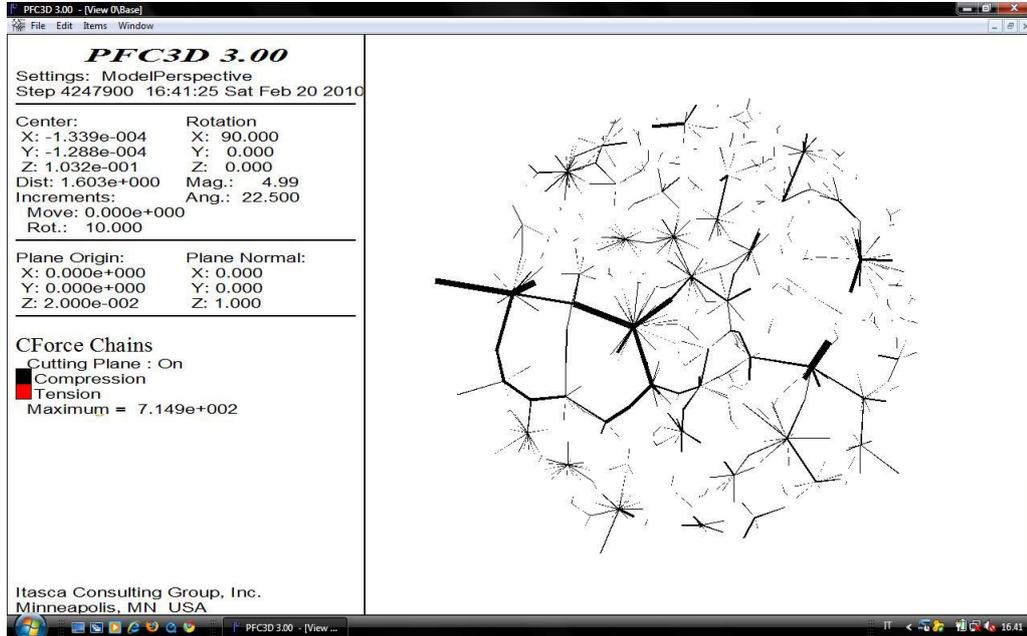


FIGURA 6.19: SFERE, ANDAMENTO CATENE DI FORZE ALLA FINE DELLA PROVA TRIASSIALE, SEZIONE ORIZZONTALE VICINO ALLA BASE DEL PROVINO, CONFINAMENTO 500 KPA

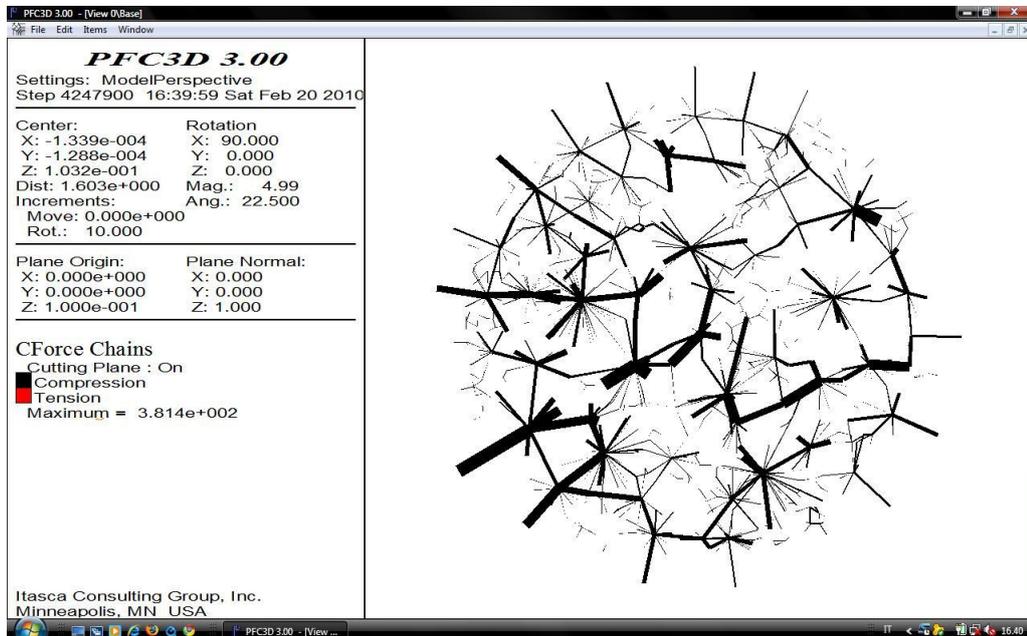


FIGURA 6.20: SFERE, ANDAMENTO CATENE DI FORZE ALLA FINE DELLA PROVA TRIASSIALE, SEZIONE ORIZZONTALE MEZZERIA PROVINO, CONFINAMENTO 500 KPA

Si può infatti leggere che vicino alla piastra abbiamo valore massimo più elevato, pari a circa 710 N, contro i 380 N alla mezzeria.

Studiando una sezione verticale ed una orizzontale del provino che raffigura le forze di contatto normali sovrapposte alle sfere, si deduce infine che la rete di forze tende a disporsi lungo uno scheletro composto dalle sfere di maggior diametro, che si caricano quasi esclusivamente di tutte le forze. L'immagine 6.21 si riferisce alla sezione verticale, la 6.22 a quella orizzontale di mezzeria, ambedue riferite alla fine della prova triassiale da 500 kPa.

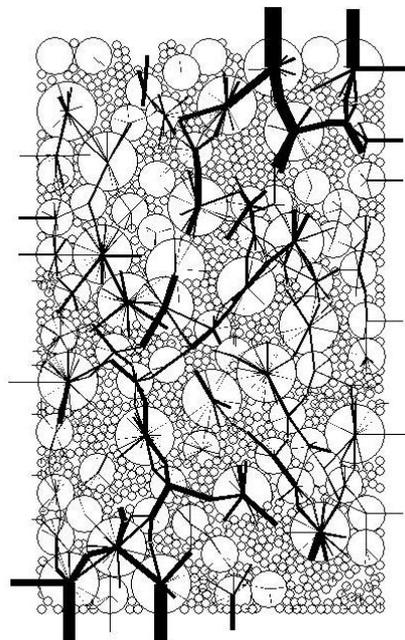


FIGURA 6.21: SFERE, SFERE ED ANDAMENTO CATENE DI FORZE ALLA FINE DELLA PROVA TRIASSIALE, SEZIONE VERTICALE MEZZERIA PROVINO, CONFINAMENTO 500 KPA

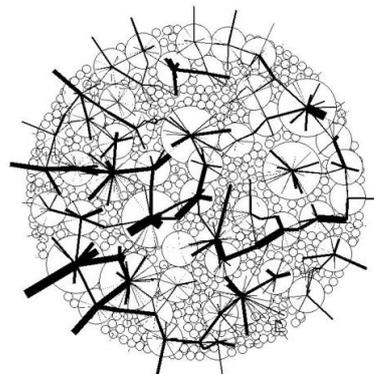


FIGURA 6.22: SFERE, SFERE ED ANDAMENTO CATENE DI FORZE ALLA FINE DELLA PROVA TRIASSIALE, SEZIONE ORIZZONTALE MEZZERIA PROVINO, CONFINAMENTO 500 KPA

#### 6.1.4. Circoli di Mohr

La resistenza di un materiale granulare o di una terra è usualmente definita in termini delle tensioni di picco che si sviluppano nella curva tensioni-deformazioni.

Un metodo per rappresentare la resistenza è quello di utilizzare i cerchi di Mohr per varie combinazioni di tensioni. Tali cerchi possono essere disegnati in modo da rappresentare gli stati tensionali in corrispondenza dei picchi, relativi alle condizioni di rottura.

Viene poi costruita una linea tangente ai cerchi: tale curva viene detta involucro a rottura di Mohr.

Una volta costruito l'involucro a rottura sui cerchi di Mohr, è quindi possibile valutare in che condizione viene a trovarsi il sistema, per altri stati tensionali.

Se il cerchio di Mohr, che rappresenta un generico stato tensionale del sistema, si trova al di sotto dell'involucro a rottura, allora il materiale risulterà stabile.

Se il cerchio è tangente alla curva, il materiale verrà a trovarsi in situazione limite di resistenza.

La condizione in cui il cerchio risulta secante alla curva di involucro non può verificarsi in nessun caso poiché ciò corrisponderebbe ad uno stato tensionale oltre la rottura che non può avere luogo.

Mediante i risultati delle prove triassiali simulate è possibile costruire i cerchi di Mohr, ottenendo le linee di involucro che definiscono gli angoli di attrito.

Nella rappresentazione seguente (figura 6.23), si riportano i cerchi di Mohr relativi ai picchi raggiunti nelle due prove triassiali ed il relativo involucro.

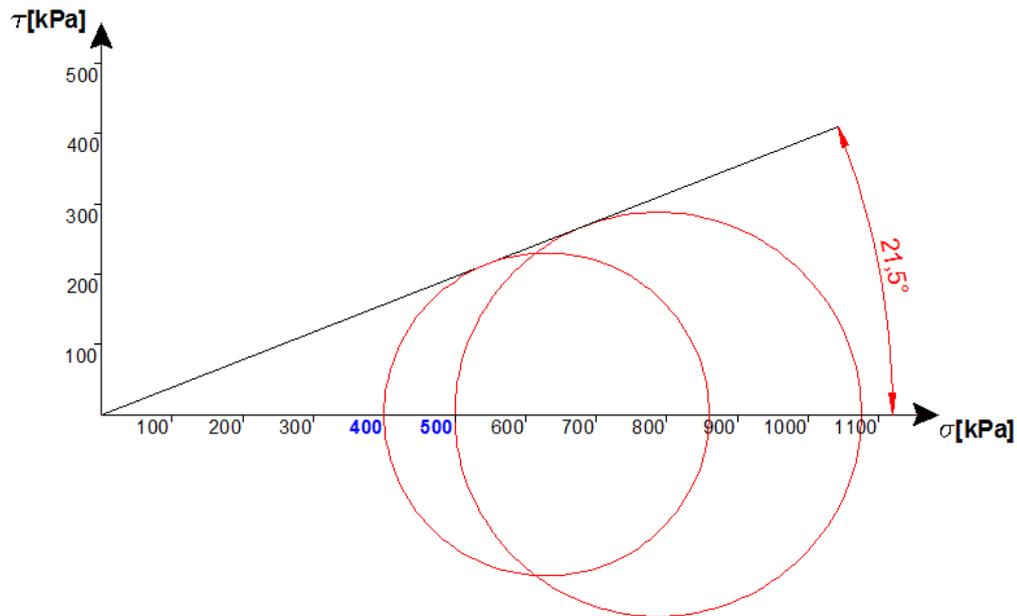


FIGURA 6.23: SFERE, CIRCOLI DI MOHR ED INVILUPPO A ROTTURA

Dai risultati ottenuti, quindi, è possibile evidenziare che il materiale è caratterizzato da coesione nulla ed angolo di resistenza al taglio pari a  $21,5^\circ$  ( $\text{tg } \phi_1 = 0,40$ ). Quest'ultimo, in particolare, rappresenta l'angolo di attrito macroscopico ed è pressoché coincidente con quello mobilitato a livello microscopico ( $\mu = 0,42$ ).

La modellazione ad elementi distinti quindi, tarando opportunamente i parametri microscopici, riproduce efficacemente le modalità di prova e l'effettivo comportamento del materiale reale.

### **6.2. I clump**

Analogamente al caso degli elementi sferici, passiamo ora ad analizzare i risultati delle due simulazioni triassiali per la miscela di *clump*, eseguite utilizzando gli stessi valori per la tensione di confinamento (400 e 500 kPa).

Il provino è costituito da 32'204 sfere di diametro 2,77 mm, 1'016 *clump* formati da gruppi di tre sfere da 5,5 mm di diametro e 282 *clump* formati da gruppi di tre sfere da 9 mm di diametro.

I *clump* utilizzati nella simulazione sono quindi costituiti da tre sfere: tale configurazione geometrica consente un buon livello di ingranamento, se paragonato alle sfere o ad altre configurazioni; basti pensare che tale forma consente anche l'impilamento fisico delle particelle. In generale, data la loro forma irregolare, i *clump* consentono quindi un ingranamento reciproco maggiore che per le sfere, ciò contribuisce ad aumentare la resistenza, quindi ad avere un valore di picco maggiore nella curva tensione-deformazione.

### 6.2.1. Tensione deviatorica

Si riportano i grafici della tensione deviatorica in funzione della deformazione assiale (*devi-deax*), rappresentanti inoltre il valore della tensione di confinamento (*conf*) per le due prove effettuate, con confinamento pari a 400 kPa (figura 6.24) e pari a 500 kPa (figura 6.25).

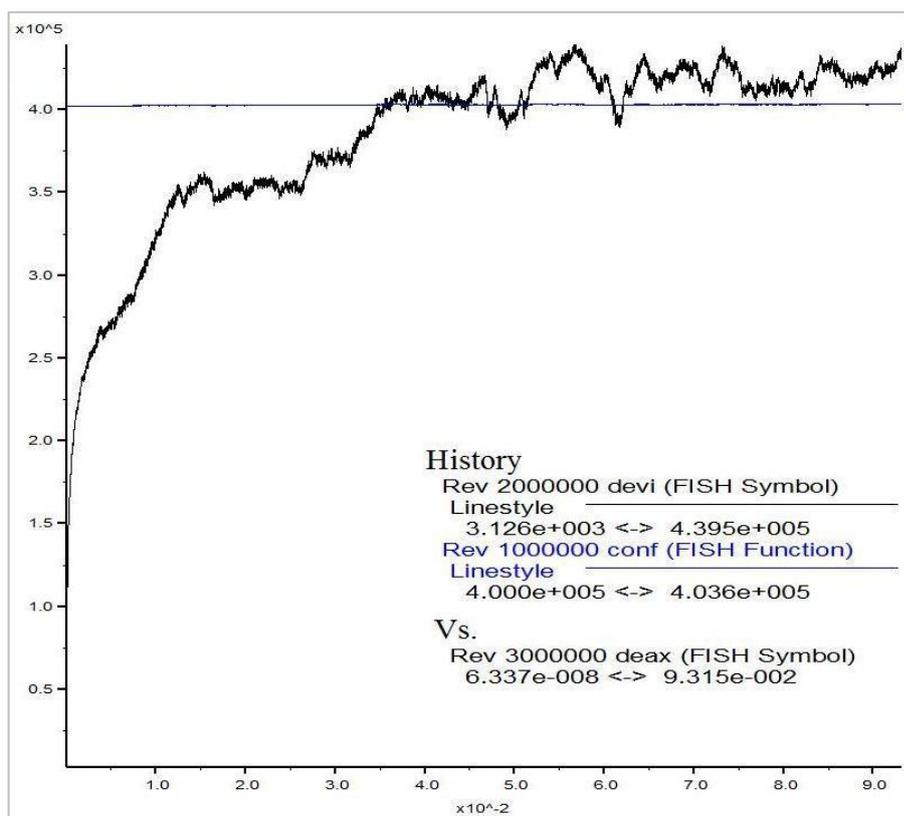


FIGURA 6.24: CLUMP, TENSIONE - DEFORMAZIONE ASSIALE, CONFINAMENTO 400 kPa

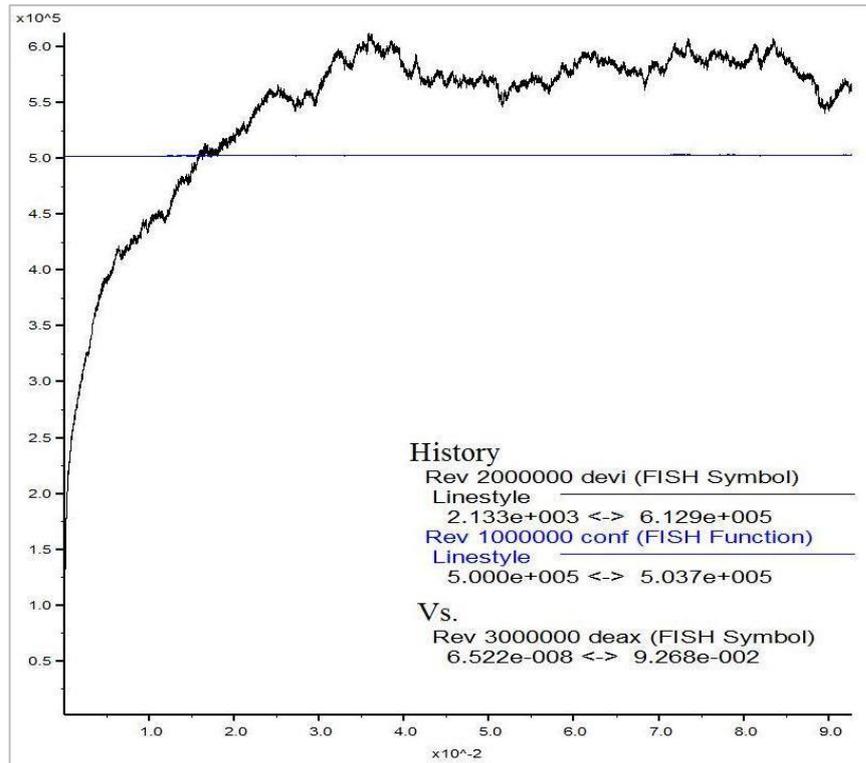


FIGURA 6.25: CLUMP, TENSIONE - DEFORMAZIONE ASSIALE, CONFINAMENTO 500 kPA

I provini simulati manifestano un andamento della curva tensione deviatorica-deformazione assiale che, dopo una fase iniziale nella quale la tensione deviatorica cresce in modo monotono, giunge a rottura in corrispondenza del punto di picco, in seguito la resistenza mantiene valori circa costanti.

Nei grafici, al solo scopo di verifica, è anche rappresentata la tensione di confinamento, si può osservare che il suo andamento è una linea pressoché orizzontale: questo conferma che il servo-controllo numerico, che è una funzione attivata nel listato della prova, sta mantenendo la tensione di confinamento costante.

Analizzando i risultati delle simulazioni dei test triassiali per i *clump*, si può notare che le curve tensione-deformazione hanno mostrato andamenti tipici dei risultati sperimentali, ma mettendo a confronto i risultati simulati e dedotti dalle prove di laboratorio è emersa qualche discordanza.

In laboratorio le prove sono state simulate usando gli stessi parametri che hanno dato buoni esiti nella modellazione delle sfere.

A parte il tratto iniziale, che presenta la medesima pendenza, quindi il medesimo modulo, il picco e la resistenza residua non sono in accordo. Per quanto riguarda la prova da 400 kPa (figura 6.26) l'andamento della tensione deviatorica in funzione della deformazione assiale è troppo basso, se paragonato con quello fornito dalla prova di laboratorio. Inoltre, date le migliori caratteristiche di ingranamento dei *clump*, il picco avrebbe dovuto essere maggiore a quello delle sfere, invece accade il contrario.

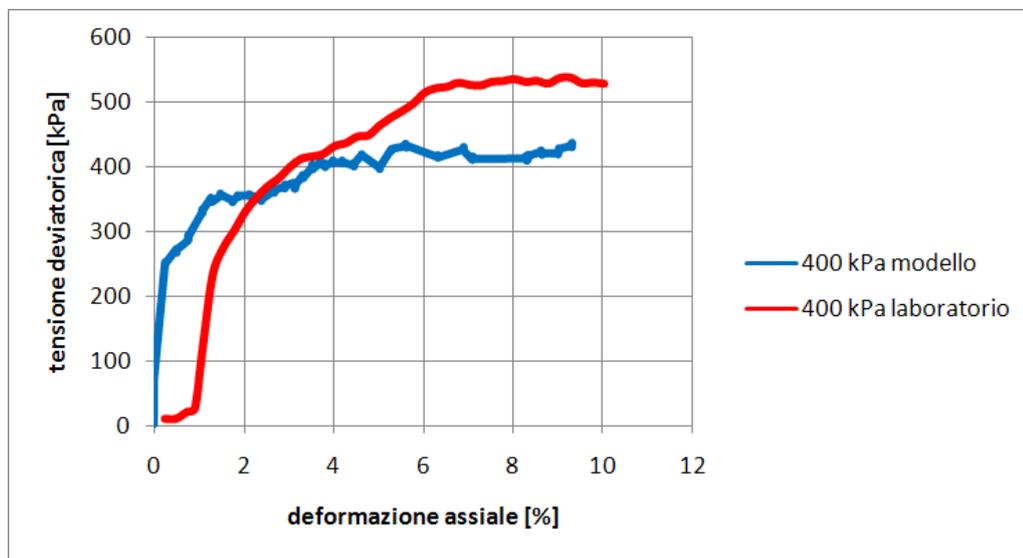


FIGURA 6.26: CLUMP, TENSIONE - DEFORMAZIONE, MODELLO E LABORATORIO, CONFINAMENTO 400 kPa

Per quanto riguarda la prova da 500 kPa (figura 6.27), ricordando che i *clump* ingranano meglio, il risultato è coerente, in quanto il picco è maggiore di quello fornito dalle sfere nella medesima prova, come verrà meglio illustrato nel paragrafo conclusivo.

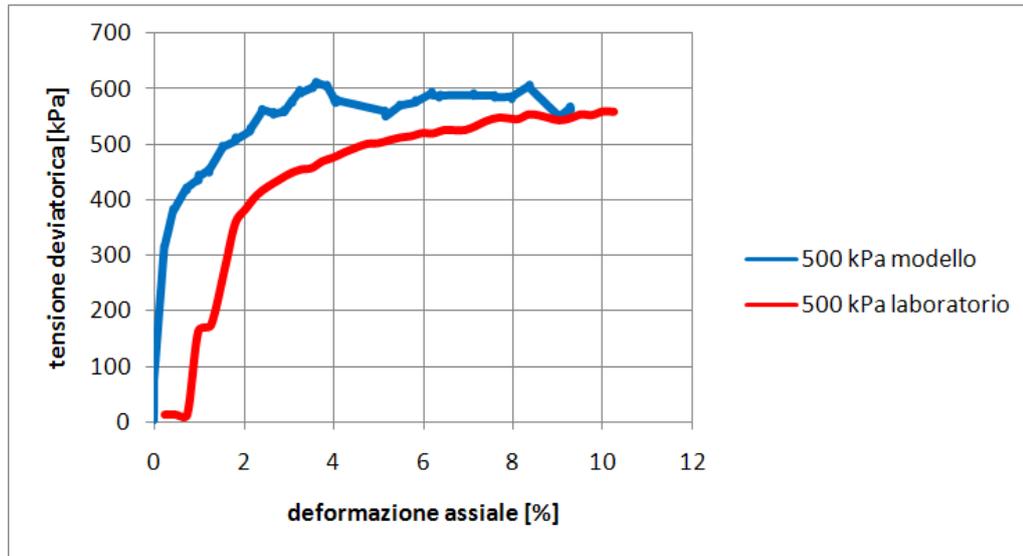


FIGURA 6.27: CLUMP, TENSIONE - DEFORMAZIONE, MODELLO E LABORATORIO, CONFINAMENTO 500 KPA

Per completezza si riporta in tabella 6.4 il paragone dei picchi raggiunti in laboratorio ed al modello, possiamo notare che le prove non sono in completo accordo, soprattutto nel caso di tensione di confinamento pari a 400 kPa.

<b>Tensione confinamento</b>	<b>Tensione deviatorica di picco</b>		
	<b>Laboratorio</b>	<b>Modello</b>	<b>Errore</b>
400 kPa	540 kPa	430 kPa	20,3%
500 kPa	560 kPa	610 kPa	8,9%

TABELLA 6.4: CLUMP, PARAGONE PICCHI LABORATORIO E MODELLO

### 6.2.2. Deformazione volumetrica

Risulta interessante analizzare anche la variazione di volume, rappresentata in funzione della deformazione assiale, che corrisponde direttamente all'andamento della porosità del campione.

Proponiamo in immagine 6.28 il grafico per la tensione di confinamento pari a 400 kPa e in immagine 6.29 il grafico per la tensione di confinamento pari a 500 kPa.

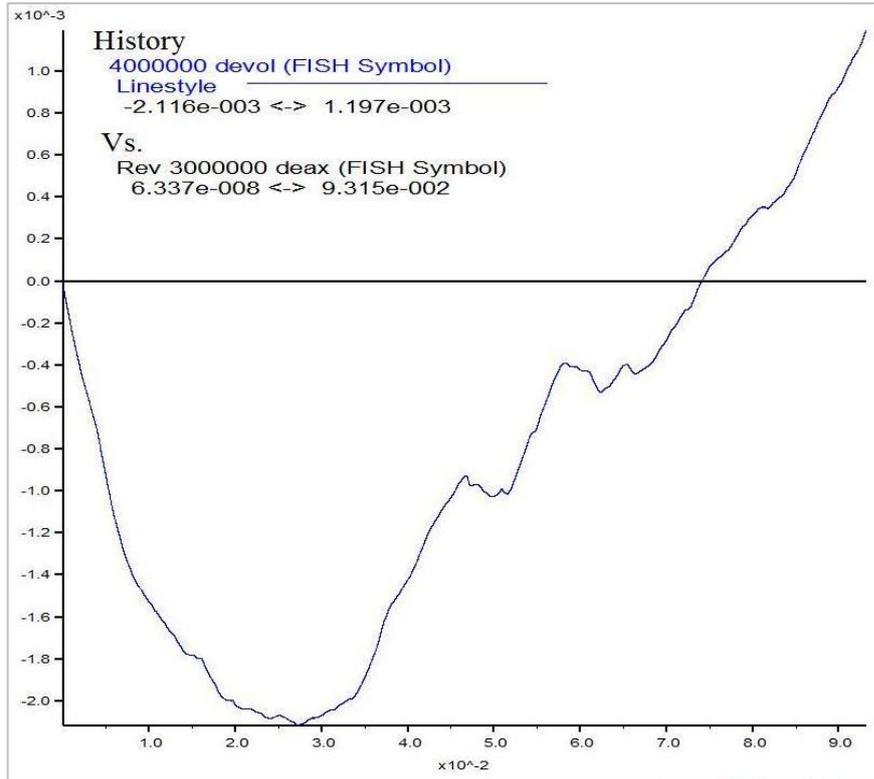


FIGURA 6.28: CLUMP, VARIAZIONE VOLUMETRICA - DEFORMAZIONE ASSIALE, CONFINAMENTO 400 kPA

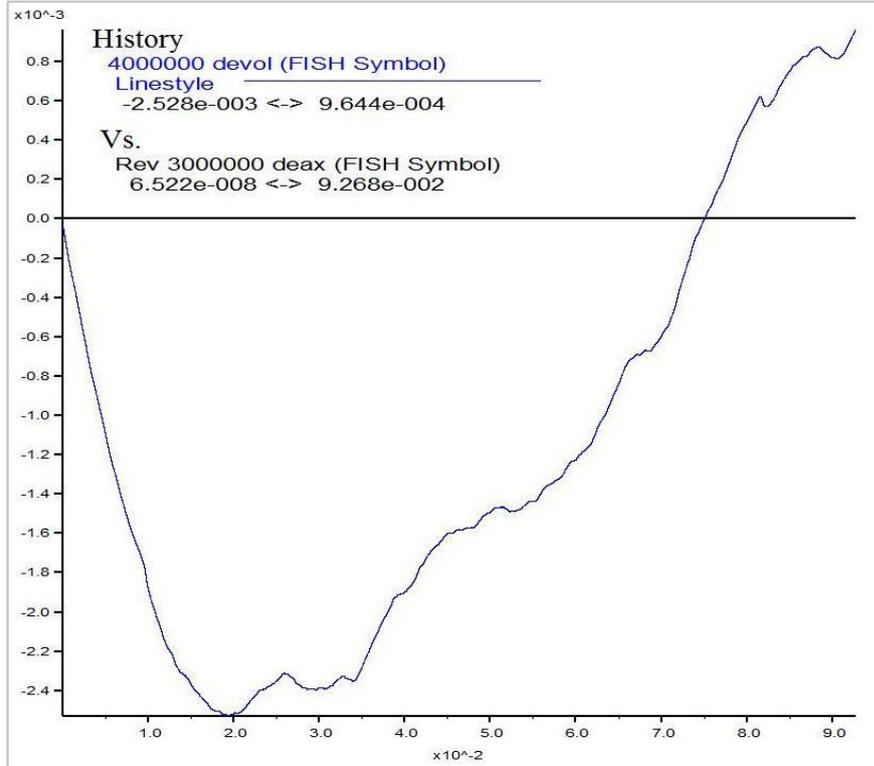


FIGURA 6.29: CLUMP, VARIAZIONE VOLUMETRICA - DEFORMAZIONE ASSIALE, CONFINAMENTO 500 kPA

In generale si può osservare una prima fase di contrazione, cioè il volume del provino caricato diminuisce. In seguito il provino si rompe e la porosità non può più diminuire: da questo punto in poi il provino comincia a dilatarsi. Essendo il sistema estremamente denso, l'unica possibilità che ha per deformarsi è infatti aumentare di volume.

Nei grafici, si nota la fase di contrazione e quella di dilatazione, si può quindi concludere che i provini hanno chiaramente mostrato un comportamento dilatante.

### 6.2.3. Forze di contatto

Vengono riportati i risultati di un'unica prova, quella con confinamento pari a 500 kPa, in quanto sono molto simili a quelli della prova da 400 kPa.

Per quanto riguarda le forze di contatto normali, che si sviluppano all'interno del provino composto da *clump*, sono evidenti dei forti picchi in prossimità del centro del provino sia alla fine della consolidazione (figura 6.30) che alla fine (figura 6.31) del test triassiale.

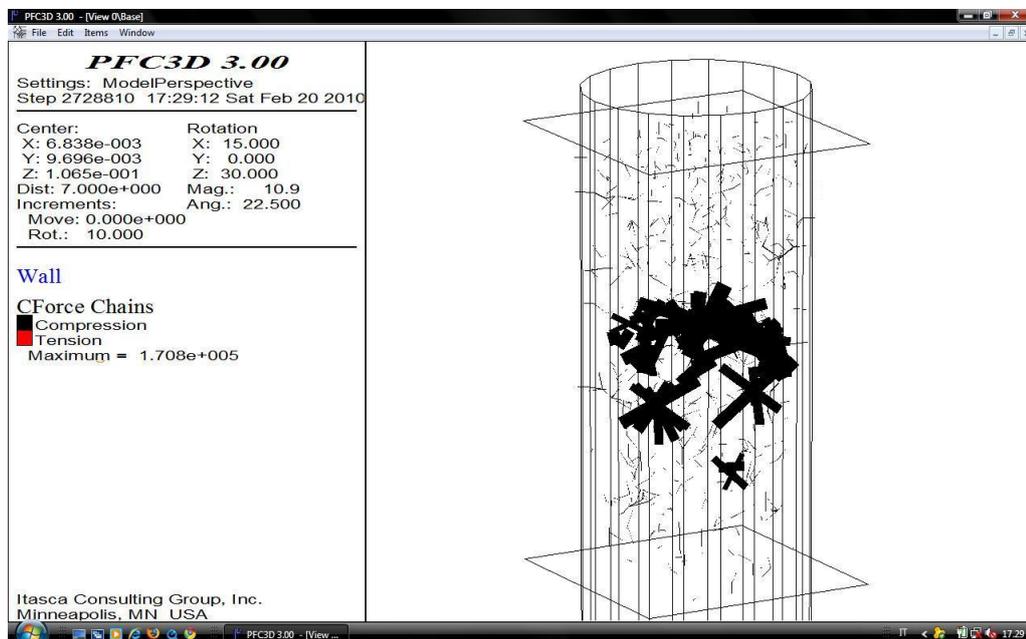


FIGURA 6.30: CLUMP, ANDAMENTO CATENE DI FORZE ALLA FINE DELLA CONSOLIDAZIONE, CONFINAMENTO 500 kPa

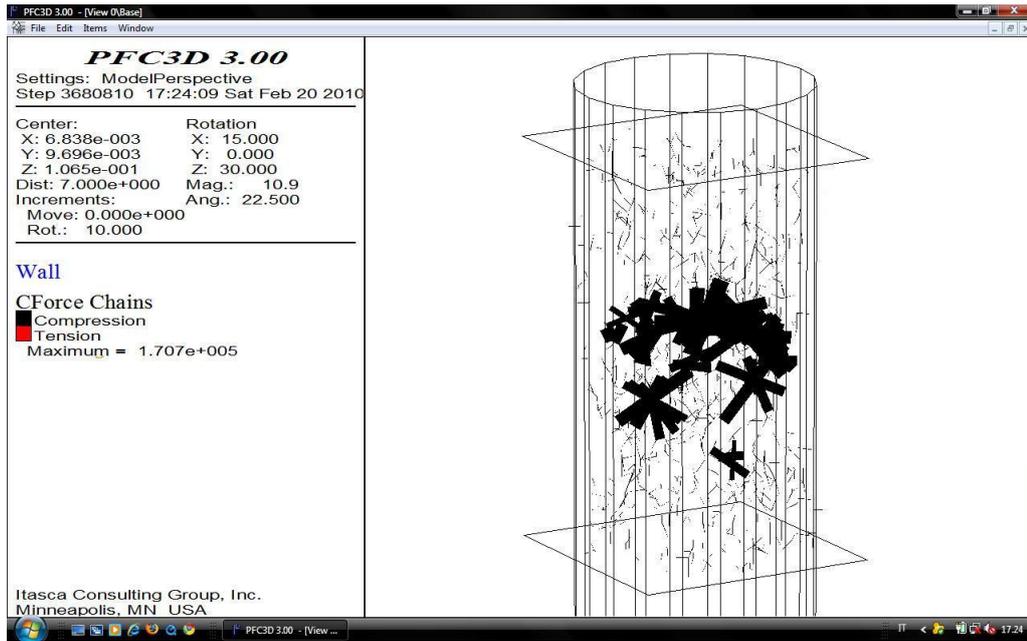


FIGURA 6.31: CLUMP, ANDAMENTO CATENE DI FORZE ALLA FINE DELLA PROVA TRIASSIALE, CONFINAMENTO 500 KPA

Riportiamo a titolo d'esempio anche l'andamento delle forze di contatto tangenziali, che manifestano a loro volta forti picchi in prossimità della mezzeria del provino, sia alla fine della consolidazione (figura 6.32) che alla fine del test triassiale (figura 6.33).

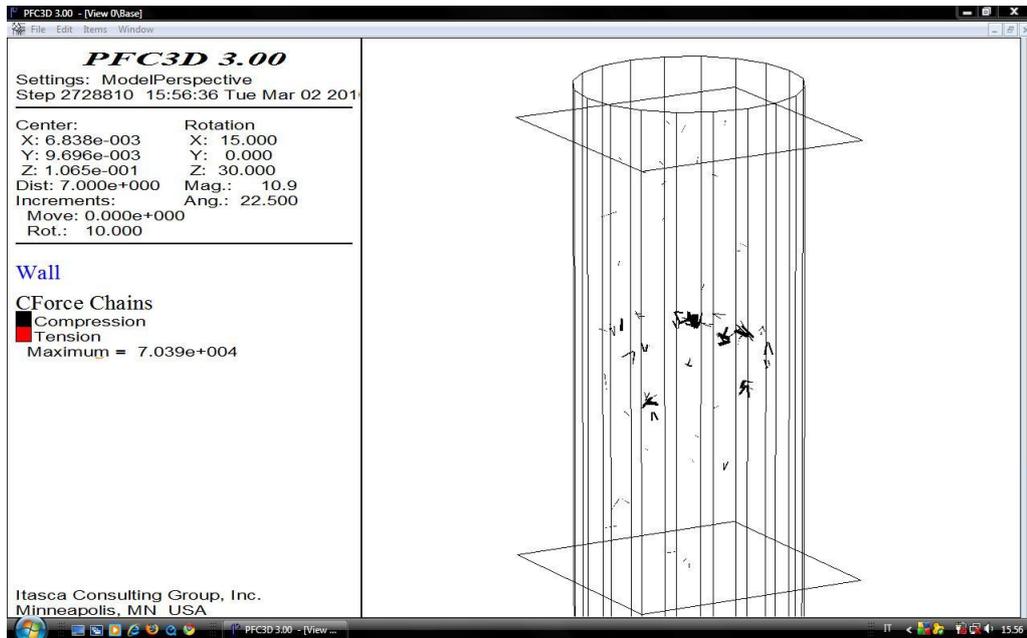


FIGURA 6.32: CLUMP, ANDAMENTO FORZE DI CONTATTO TANGENZIALI ALLA FINE DELLA CONSOLIDAZIONE, CONFINAMENTO 500 KPA

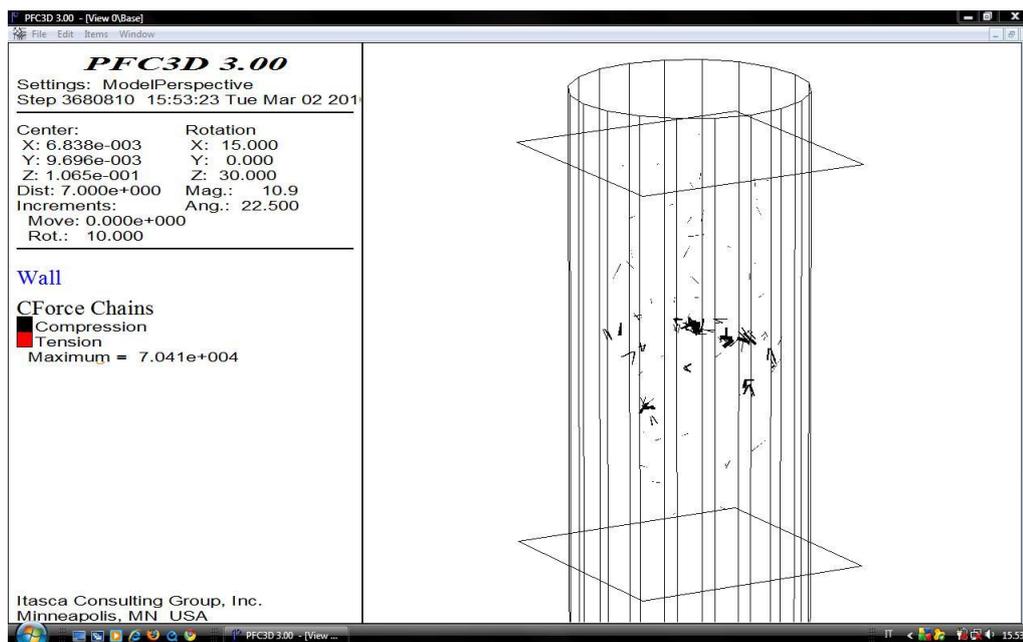


FIGURA 6.33: CLUMP, ANDAMENTO FORZE DI CONTATTO TANGENZIALI ALLA FINE DELLA PROVA TRIASSIALE, CONFINAMENTO 500 KPA

Questi forti picchi probabilmente sono dovuti alla convergenza delle forze, che sono invece distribuite in prossimità delle piastre, in alcuni *clump* fortemente sollecitati.

Nella tabella 6.5 si riportano i valori di picco sia per le forze di contatto normali che per quelle tangenziali.

	<b>Forze di contatto normali</b>	<b>Forze di contatto tangenziali</b>
Fine consolidazione	171 kN	70,390 kN
Fine triassiale	171 kN	70,410 kN

TABELLA 6.5: CLUMP, RIEPILOGO PICCHI FORZE DI CONTATTO, CONFINAMENTO 500 KPA

I risultati ottenuti, confrontando le tabelle 6.2, 6.3 e 6.5, evidenziano che per ogni tipologia di particella elementare le forze di contatto sia normali, sia tangenziali aumentano al crescere della tensione di confinamento. Le prime, in particolare, sono sempre più elevate delle seconde.

Per ogni valore di sollecitazione di confinamento, inoltre, i valori delle forze di contatto aumentano al crescere della complessità della forma delle particelle che compongono il provino, poiché, aumentando l'ingranamento reciproco tra queste ultime, la resistenza complessiva del sistema diventa più elevata.

#### **6.2.4. Circoli di Mohr**

La resistenza di un materiale granulare o di una terra è usualmente definita in termini delle tensioni di picco che si sviluppano nella curva tensioni-deformazioni.

Un metodo per rappresentare la resistenza è quello di utilizzare i circoli di Mohr per varie combinazioni di tensioni. Tali circoli possono essere disegnati in modo da rappresentare gli stati tensionali in corrispondenza dei picchi, relativi alle condizioni di rottura.

Viene poi costruita una linea tangente ai cerchi: tale curva viene detta involuppo a rottura di Mohr.

Una volta costruito l'involuppo a rottura sui circoli di Mohr, è quindi possibile valutare in che condizione viene a trovarsi il sistema, per altri stati tensionali.

Se il cerchio di Mohr, che rappresenta un generico stato tensionale del sistema, si trova al di sotto dell'involuppo a rottura, allora il materiale risulterà stabile.

Se il cerchio è tangente alla curva, il materiale verrà a trovarsi in situazione limite di resistenza.

La condizione in cui il cerchio risulta secante alla curva di involuppo non può verificarsi in nessun caso poiché ciò corrisponderebbe ad uno stato tensionale oltre la rottura che non può avere luogo.

Mediante i risultati delle prove triassiali simulate è possibile costruire i cerchi di Mohr (figura 6.34), ottenendo le linee di involuppo che definiscono gli angoli di attrito.

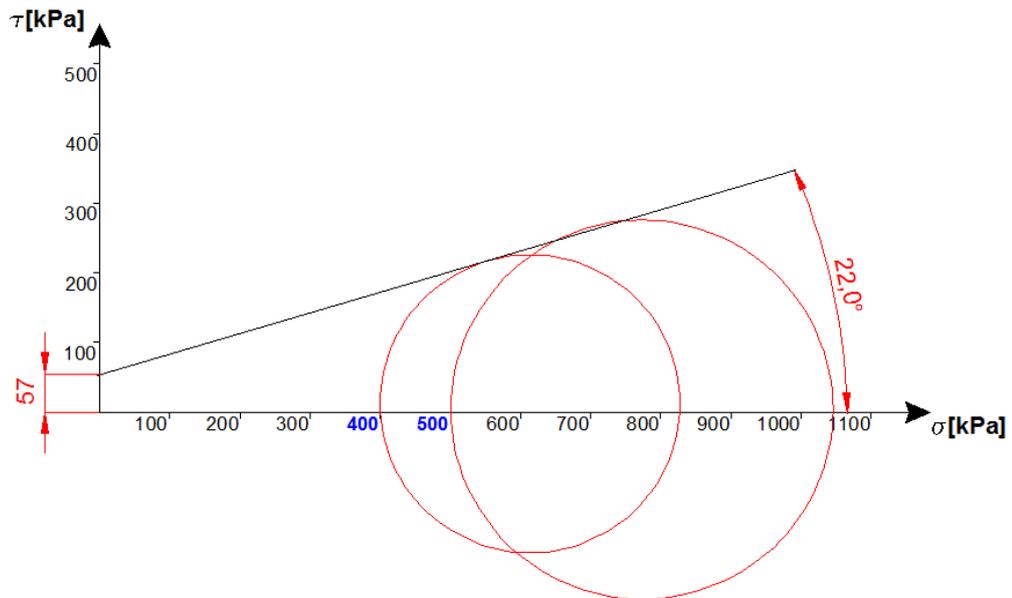


FIGURA 6.34: CLUMP, CIRCOLI DI MOHR ED INVILUPPO A ROTTURA

Dai risultati ottenuti, quindi, è possibile evidenziare che il materiale è caratterizzato da angolo di resistenza al taglio pari a  $22^\circ$ . Rispetto al provino formato da sfere, quindi, aumenta il valore dell'angolo di attrito macroscopico a testimonianza di un maggiore ingranamento sviluppato dai *clump*.

Quest'ultimo fenomeno, in particolare, è responsabile anche dell'insorgere di una "pseudo-coesione apparente" che testimonia il fatto che l'inserimento di particelle di forma non sferica provoca un aumento della resistenza a taglio del sistema.

### **6.3. Conclusioni**

I risultati sul campione costituito da sole sfere, hanno dato una buona congruenza tra prove di laboratorio e simulate.

Bisogna però ammettere che nella simulazione qualche parametro fisico è stato variato al fine di permettere una riduzione dei tempi di calcolo, che altrimenti sarebbero stati inaccettabili.

Purtroppo, per i *clump*, seppur siano state adottate le stesse regole applicate con successo alle sfere, i risultati sono meno in accordo con quelli di laboratorio.

All'aumentare della tensione di confinamento si può generalmente affermare che la resistenza ultima del campione cresce.

Questo fenomeno si osserva sia per i *clump* che per le sfere, in modo più evidente per quest'ultime, sia in laboratorio (6.35) che di conseguenza nella simulazione (6.36).

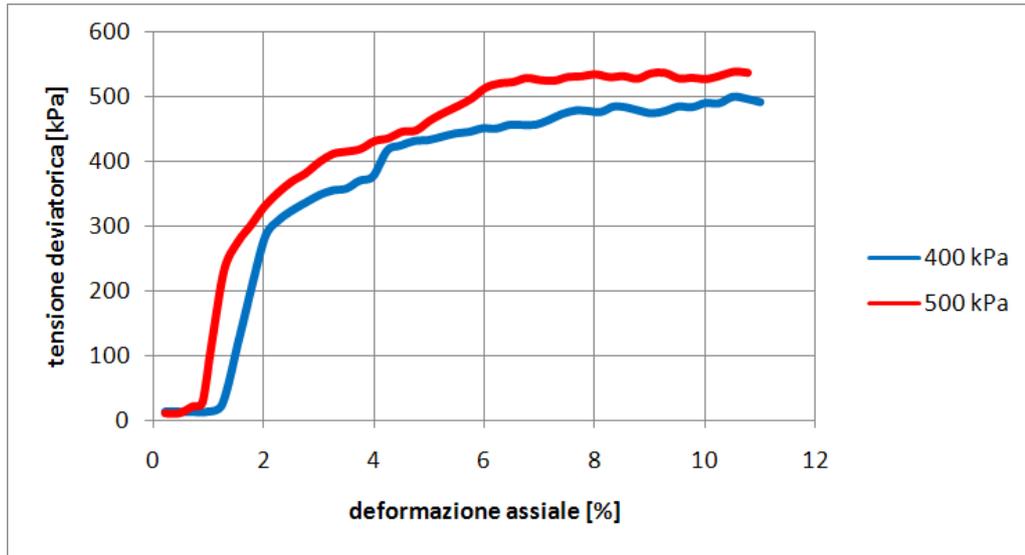


FIGURA 6.35: SFERE, TENSIONE - DEFORMAZIONE, LABORATORIO

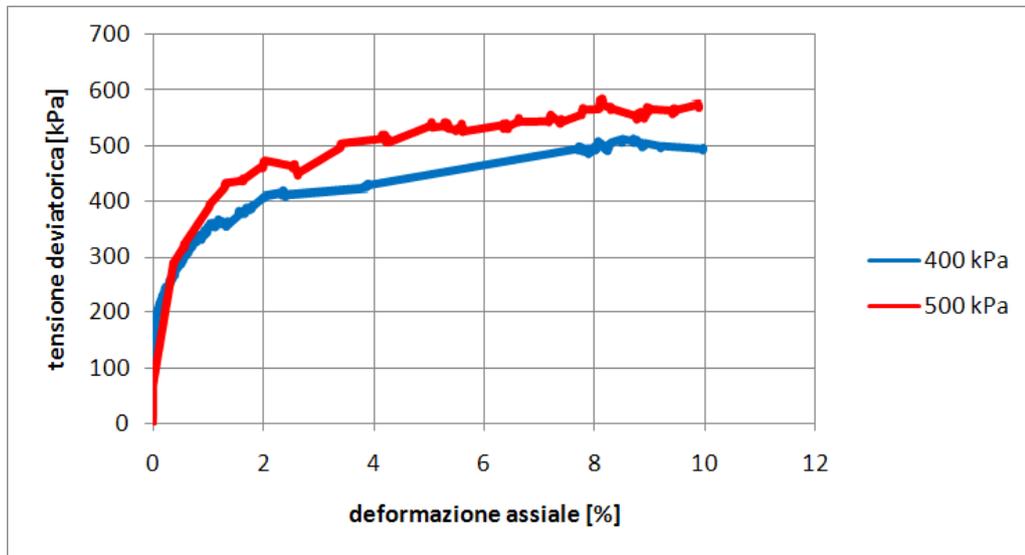


FIGURA 6.36: SFERE, TENSIONE - DEFORMAZIONE, MODELLO

Paragonando invece le prove di *clump* e sfere, per una stessa pressione di confinamento, e ricordando che i *clump*, data la loro geometria, manifestano un migliore ingranamento, il risultato è coerente per le simulazioni da 500 kPa, in quanto il picco fornito dai *clump* è maggiore di quello delle sfere nella medesima situazione (figura 6.37).

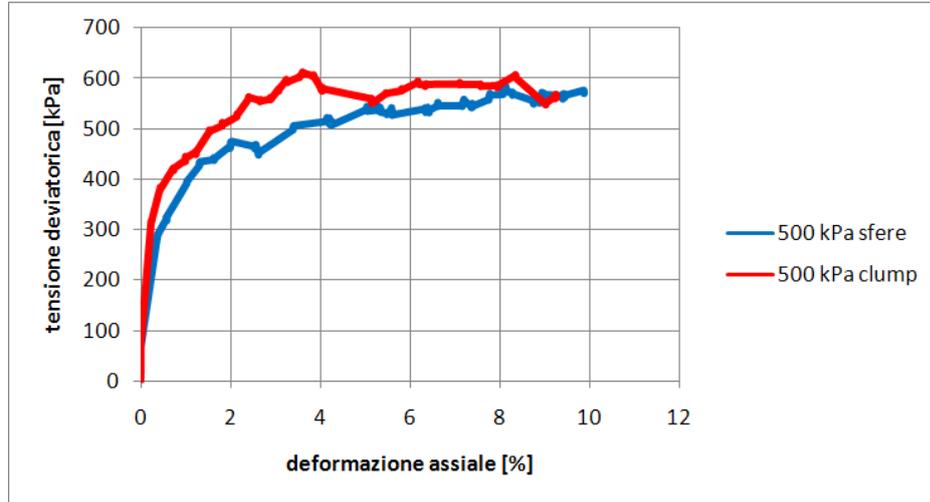


FIGURA 6.37: SFERE E CLUMP, TENSIONE - DEFORMAZIONE, MODELLO, CONFINAMENTO 500 kPa

In laboratorio il fenomeno di maggiore resistenza per i *clump* è soprattutto evidente per le prove da 400 kPa di confinamento (figura 6.38).

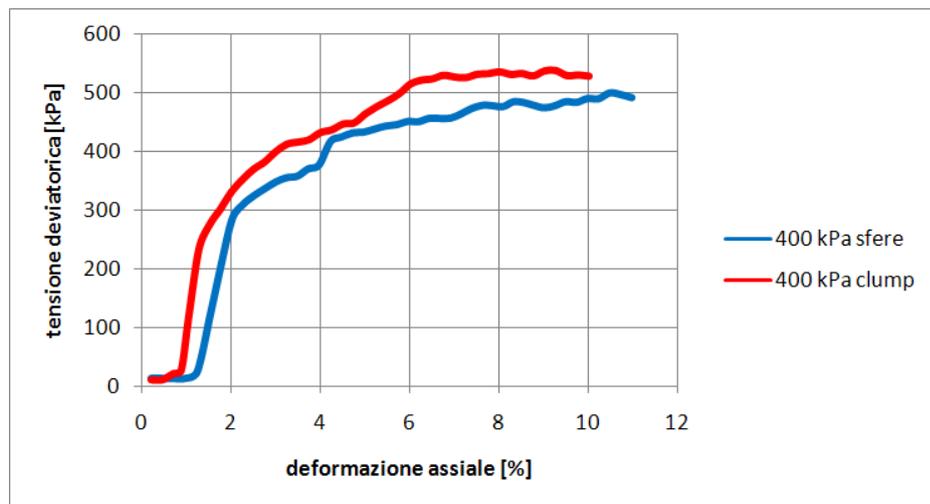


FIGURA 6.38: SFERE E CLUMP, TENSIONE - DEFORMAZIONE, LABORATORIO, CONFINAMENTO 400 kPa

Non è invece così chiaramente evidente per le prove da 500 kPa (figura 6.39).

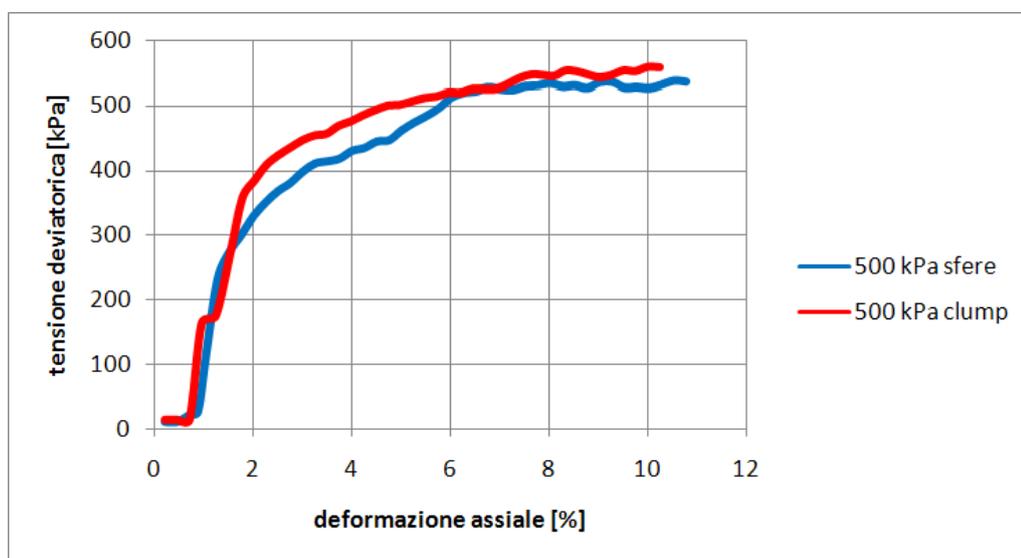


FIGURA 6.39: SFERE E CLUMP, TENSIONE - DEFORMAZIONE, LABORATORIO, CONFINAMENTO 500 KPA

Questo probabilmente è dovuto al fatto che nella seconda prova, essendo in gioco tensioni più elevate, qualche *clump* sottoposto ad un carico particolarmente gravoso può essersi disgregato a seguito di un cedimento dell'incollaggio, fenomeno che chiaramente non può accadere nel modello, dove i *clump* per definizione si comportano come un unico corpo rigido inscindibile.

Per completezza, nelle tabelle 6.6 (tensione di confinamento pari a 400 kPa) e 6.7 (tensione di confinamento pari a 500 kPa) si riportano a diretto paragone i picchi ottenuti per le sfere e per i *clump*, nelle due situazioni di confinamento. Possiamo concludere che nelle nostre prove i *clump* raggiungono sempre picco maggiore, tranne nel caso del modello con confinamento a 400 kPa.

	<b>Picco laboratorio</b>	<b>Picco modello</b>
sfere	500 kPa	520 kPa
clump	540 kPa	430 kPa

TABELLA 6.6: PARAGONE PICCHI SFERE E CLUMP, CONFINAMENTO 400 KPA

---

	<b>Picco laboratorio</b>	<b>Picco modello</b>
sfere	540 kPa	580 kPa
clump	560 kPa	610 kPa

TABELLA 6.7: PARAGONE PICCHI SFERE E CLUMP, CONFINAMENTO 500 KPA

Concludendo, l'attendibilità dei dati di laboratorio su provini di sfere è indiscussa, mentre quella su provini di *clump* potrebbe risentire di qualche cedimento nell'incollaggio di alcuni degli stessi.

Probabilmente i problemi riscontrati nelle simulazioni del provino costituito da *clump* (resistenza troppo debole nella simulazione da 400 kPa di confinamento) sono dovuti, oltre che alle semplificazioni obbligate rispetto la realtà, all'elevata dipendenza della risposta all'ingranamento dei *clump*.

## **CONCLUSIONE**

La tesi ha avuto come scopo quello di approfondire l'analisi dell'influenza della forma dell'aggregato sul comportamento tenso-deformativo di una pavimentazione stradale flessibile.

Gli studi condotti in questo ambito sono ancora limitati per cui, prima di affrontare la parte sperimentale, è stata svolta una ricerca bibliografica per analizzare lo stato dell'arte.

Per indagare il comportamento in sito di un conglomerato bituminoso si utilizzano generalmente metodi numerici al continuo che incorporano la sua natura particellare all'interno di leggi costitutive elasto-plastiche, per cui lo studio può essere condotto a livello fenomenologico anziché a livello "atomico".

L'approccio al continuo risulta riduttivo e carente: è ormai noto che i mezzi granulari esplicano un comportamento meccanico nettamente diverso da quello degli altri materiali e questa differenza è imputabile proprio alla loro natura particellare. Di conseguenza diventa indispensabile ricorrere ad un approccio di tipo discontinuo, in grado di prendere in considerazione il carattere discreto del sistema ed analizzare i processi microscopici di base che ne determinano il comportamento tenso-deformativo macroscopico.

Tra i metodi discontinui disponibili in letteratura, in particolare, si utilizza quello degli elementi distinti particellari, poiché, schematizzando il sistema come un insieme di particelle di forma circolare, si presta particolarmente allo studio del comportamento meccanico di un materiale granulare.

I risultati ottenuti in precedenti studi hanno confermato le potenzialità del metodo nel riprodurre l'effettivo comportamento visco-elastico del conglomerato bituminoso sia durante test di laboratorio condotti su provini di piccole dimensioni, sia all'interno di una pavimentazione stradale flessibile. Nell'ambito dello studio del comportamento a fatica di quest'ultima, in particolare, hanno evidenziato che con questa metodologia è possibile ottenere indicazioni sia sul numero di cicli di carico che la portano a rottura, operazione questa già possibile con le tecniche classiche, sia, soprattutto, sulla localizzazione del punto d'innescio della frattura. Si riesce, così, a studiare la propagazione di fenomeni fessurativi di tipo *bottom-up* e *top-down*, tenendo in considerazione anche la sovrapposizione degli effetti conseguente alla loro interazione all'interno dello strato.

Lo studio eseguito ha previsto diverse fasi:

- scelta della metodologia di modellazione più opportuna al fine di simulare l'aggregato reale in modo significativo;
- calibrazione dei parametri microscopici con cui schematizzare le sfere;
- indagine dell'influenza della forma dell'aggregato sul comportamento tenso-deformativo del sistema.

In particolare sono state considerate due tipologie di provini:

- quelli costituiti da sfere, utilizzati nella fase iniziale di calibrazione dei parametri microscopici;
- quelli costituiti da *clump* a tre sfere, aventi un diametro totale pari a quello delle sfere singole.

Al fine di definire la metodologia più opportuna per simulare l'aggregato reale in modo significativo è stato necessario scegliere il materiale costituente le sfere e definire il test di laboratorio da modellare.

Partendo dai risultati disponibili in letteratura è stato scelto l'acciaio poiché costituisce un "aggregato ideale", ma soprattutto permette validi confronti tra prove reali e simulate, in quanto il programma lavora proprio con particelle di forma sferica o assembramenti di queste. In altre parole, i campioni simulati hanno le stesse caratteristiche fisiche e geometriche di quelli testati in laboratorio. Inoltre l'acciaio inossidabile possiede ottime caratteristiche di durabilità e di resistenza.

Per quanto riguarda il test di laboratorio da simulare, partendo dai risultati disponibili in letteratura, è stato scelto quello triassiale innanzitutto perché fornisce risultati significativi sul fenomeno fisico studiato, in laboratorio è semplice e veloce da svolgere, al computer è facile da modellare con il metodo DEM particellare.

I risultati ottenuti hanno permesso per prima cosa di valutare le potenzialità ed i limiti del metodo degli elementi distinti particellari: consentendo una rappresentazione del modello molto fedele alla realtà fisica, si propone come una valida evoluzione delle teorie tradizionali.

A tal fine sono però necessari lunghi tempi di calcolo che, utilizzando gli attuali processori, costringono ad adottare sistemi di dimensioni ridotte o formati da un numero limitato di particelle. Esistono inoltre alcune difficoltà nel correlare i parametri microscopici da inserire nella modellazione con quelli macroscopici derivanti dalla letteratura o da test di laboratorio. Mentre il primo aspetto sarà risolto in breve tempo adottando processori più efficienti, il secondo richiede un'intensa attività di ricerca sperimentale. Quest'ultima, in particolare, deve prevedere l'utilizzo di modelli in vera grandezza e di campi prova in sito, i quali siano in grado di fornire chiare correlazioni tra parametri microscopici e macroscopici. I modelli numerici, infatti, si rivelano strumenti particolarmente efficaci e vantaggiosi ma necessitano di essere affiancati da sperimentazioni in scala reale che, pur essendo molto onerose, permettano di stimare accuratamente i parametri di input.

Il superamento del concetto continuo di tensione che si opera utilizzando questo metodo, fa emergere la carenza di misure attendibili di alcune variabili come, ad esempio, quelle legate alle forze di contatto, la cui valutazione risulta faticosa. Risolte queste difficoltà “iniziali”, il metodo degli elementi distinti particellari costituisce una valida alternativa a quelli tradizionali al continuo al fine di ottenere una rappresentazione dei fenomeni maggiormente fedele alla realtà fisica.

Per quanto riguarda i risultati ottenuti, la modellazione ha evidenziato che:

- i provini modellati, manifestano un andamento della curva sforzo deviatore-deformazione assiale che, dopo una fase iniziale nella quale la tensione deviatorica cresce in modo monotono, arriva a rottura in corrispondenza del punto di picco della curva, oltre il quale la resistenza diminuisce. All'aumentare della tensione di confinamento crescono sia la resistenza ultima sia quella residua;
- per ogni valore di sollecitazione di confinamento, i valori di picco delle curve aumentano al crescere della complessità della forma delle particelle che compongono il provino, poiché, aumentando l'ingranamento reciproco tra queste ultime, la resistenza complessiva del sistema diventa più elevata;
- per quanto riguarda la variazione volumetrica in funzione della deformazione assiale, si assiste inizialmente ad una diminuzione di volume, poi, superato un certo livello di deformazione assiale, ad un'inversione di tendenza con aumento del volume del provino. Il materiale, quindi, sotto l'azione dello sforzo deviatorico all'inizio subisce una contrazione di volume dovuta al fatto che le particelle sono spinte ad assumere un arrangiamento più stretto, poi, dopo la rottura del terreno, siccome le particelle non possono più serrarsi ulteriormente, si assiste ad una dilatazione. Si nota, quindi, che il materiale esplica un comportamento dilatante, tipico dei materiali addensati, che aumenta al crescere della tensione di confinamento;

- per ogni tipologia di particella elementare le forze di contatto sia normali, sia tangenziali aumentano al crescere della tensione di confinamento. Le prime, in particolare, sono sempre più elevate delle seconde. Per ogni valore di sollecitazione di confinamento, inoltre, i valori delle forze di contatto aumentano al crescere della complessità della forma delle particelle che compongono il provino, poiché, aumentando l'ingranamento reciproco tra queste ultime, la resistenza complessiva del sistema diventa più elevata.

Le prove effettuate in questo elaborato offrono spunti per eventuali futuri studi. Dato che è stata testata e simulata la miscela costituita da *clump* a tre sfere, lo studio potrà essere esteso ad altre configurazioni, in modo da indagare altri fattori che influenzano la deformazione del materiale, tra cui ad esempio l'influenza dell'appiattimento delle particelle mediante *clump* formati da sfere di ugual diametro, non compenstrate od ancora l'influenza dell'assortimento granulometrico delle particelle mediante *clump* formati da sfere di diametro differente, non compenstrate.

Inoltre, bisogna ricordare che le simulazioni in questo studio, a causa di tempi di calcolo nell'ordine di centinaia di ore, ci hanno costretto a qualche semplificazione: la possibilità di utilizzare una potente work station di caratteristiche superiori ai computer a nostra disposizione potrà permettere la realizzazione di modelli ancor più rispondente alla realtà e quindi fornire risultati più affidabili.

---

## **RIFERIMENTI**

### **Bibliografia**

1. AGI (Associazione Geotecnica Italiana) (1994); *Raccomandazioni sulle prove geotecniche di laboratorio*, Atti del XX Convegno Nazionale di Geotecnica, Parma;
2. Bashir Y. M., and Goddard J. D. (1991); *Simulation of the quasi-static deformation of 2D assemblage of rigid discs*, Mechanics computing in 1990's and beyond, Vol. 2, pg. 1264-1268;
3. Bertrand F., Leclaire L.A., Levecque G. (2005); *DEM-based models for the mixing of granular materials*, Chemical Engineering Science, 60 (8-9), pg. 2517-2531;
4. Blandford G. E., Ingraffea A. R. & Liggett J. A. (1981); *Two-dimensional stress intensity factor computations using the boundary element method*, International Journal of Numerical Method in Engineering, vol. 17, pg. 387-406;
5. Bragaglia M. (2007); *Studio del comportamento visco-elastico del conglomerato bituminoso con il metodo degli elementi distinti particellari*, Università degli Studi di Bologna, Facoltà di Ingegneria, Dottorato di Ricerca in Ingegneria Civile;
6. Brauer J. (1988); *Finite element analysis*, Marcel Dekker, New York, 1988;
7. Buttlar W.G., Bozkurt D., Al-Khateeb G.G., Waldhoff A.S. (1999); *Understanding asphalt mastic behavior through micromechanics*, Journal of The Transportation Research Board, No. 1681, pg.157-169;
8. Buttlar W.G., Roque R. (1996); *Evaluation of Empirical and Theoretical Models to Determine Asphalt Mixture Stiffnesses at Low Temperatures*, Journal of the Association of Asphalt Paving Technologists, pg. 99-141;
9. Buttlar W.G., Roque R. (1997); *Micromechanical Modeling to Predict the Stiffness of Asphalt Concrete*, Fifth Pan American Congress on Applied Mechanics, Applied Mechanics in the Americas, San Juan, Puerto Rico, L.A. Godoy, M. Rysz, L.E. Suarez, eds., Vol. 4, pg. 175-178;

10. Buttlar W.G., You Z. (2001); *Discrete Element Modelling of Asphalt Concrete: A Microfabric Approach*, Transportation Research Record, n. 1757, pg. 111- 118;
11. Calantoni J., Todd Holland K., Drake T.G., (2004); *Modelling sheet-flow sediment transport in wave-bottom boundary layers using discrete-element modelling*, Phil. Trans. R. Soc. Lond, A362, pg. 1987-2001;
12. Calvetti F. (2003); *Limitations and perspectives of the micromechanical modelling of granular materials*, Mathematical and Computer Modelling, vol. 37, pg. 485-495;
13. Campbell C.S., Cleary P.W., Hopkins M.A. (1995); *Large-scale landslide simulations: global deformation, velocities and basal friction*, J. Geophys. Res. Solid Earth, 100 (5), pg. 8267-8283;
14. Caridi G., Praticò F. (2003); *Sul problema della modellizzazione delle sovrastrutture stradali nell'ottica della previsione dello stato tenso-deformativo*, Convegno nazionale SIV, Padova;
15. Carrillo A.R., Horner D.A., Peters J.F., West J.E. (1996); *Design of a Large Scale Discrete Element Soil Model for High Performance Computing Systems*. Proc. of the 1996 ACM/IEEE Conference on Supercomputing (SC 96);
16. Cesari F. (2002); *Introduzione al Metodo degli Elementi Finiti*, Pitagora Editrice, Bologna;
17. Chang G.K., Meegoda N.J. (1993); *Simulation of the Behaviour of Asphalt Concrete Using Discrete Element Method*, 2nd International Conference On Discrete Element Methods, M.I.T.;
18. Cheng Y. F., Guo S. J., Lai H. Y. (2000); *Dynamic simulation of random packing of spherical particles*, Powder Technology, vol. 107, pg. 123-130;
19. Cho N., Martin C.D., Segol D.C. (2007); *A clumped particle model for rock*, International Journal of Rock Mechanics & Mining Sciences, vol. 44, pg. 997-1010;
20. Cleary P.W., Hoyer D., (2000); *Centrifugal mill charge motion and power draw: comparison of DEM predictions with experiment*, International Journal of Mineral Processing;
21. Collop A.C., McDowell G.R., Lee Y. (2004); *Modelling the behaviour of an idealised asphalt mixture using the distinct element method*, TRB 83rd Annual Meeting, Washington DC;
22. Colombo P., Colleselli F. (1994); *Elementi di geotecnica*, ed. Zanichelli;
23. Cui L., O'Sullivan C., O'Neill S. (2007); *An analysis of the triaxial apparatus using a mixed boundary three-dimensional discrete element model*, Géotechnique, vol. 57, n. 10 pg. 831-844;

24. Cundall P. A. (1988); *Formulation of a three-dimensional distinct element model part I. A scheme to detect and represent contacts in a system composed of many polyhedral blocks*, International Journal of Rock & Mining Sciences, vol. 25, pg. 107-116;
25. Cundall P. A. (1989); *Numerical experiments on localization of frictional materials*, Ingenieur-Archiv, 59, pg. 148-159;
26. Cundall P.A., Hart R. (1992); *Numerical Modelling of Discontinua*, Journal of Engineering Computations, n. 9, pg. 101-113;
27. Cundall P. A., Strack O. D. L. (1979); *A discrete numerical model for granular assemblies*, Géotechnique, 29 (1), pg. 47-65;
28. Dai Q., Sadd M.H. (2004); *Parametric model study of microstructure effects on damage behavior of asphalt samples*. International Journal of Pavement Engineering, pg. 19-30;
29. Degiovanni E. (2009); *Analisi sperimentale dei materiali della sovrastruttura stradale attraverso la modellazione agli elementi distinti particellari*, Università degli Studi di Parma, Facoltà di Ingegneria, Dottorato di Ricerca in Ingegneria Civile;
30. De Josselin, de Jong G., Verruijt A. (1969); *Etude photo-elastique d'un empilement de disques*, Cahiers du Groupe Francais de Rheologie, n. 2(1), pg. 73-86;
31. Di Renzo A., Di Maio F. P. (2004); *Comparison of contact-force models for the simulation of collisions in DEM-based granular flow codes*, Chemical Engineering Science, vol. 59, pg. 525-541;
32. Dolezalova M., Czene P., Havel F. (2003); *Micromechanical Modeling of Stress Path Effects Using PFC2D Code*, Numerical Modeling in Micromechanics via Particle Methods, ed. H. Konietzky., A.A. Balkema, pg. 173-181;
33. Dolezalova M., Koran P. (2002); *Micromechanical modelling of a dump material*, International Journal of Geomechanics, vol. 2, pg. 47-74;
34. Dondi G., Bragaglia M. (2006); *Modellazione ad elementi distinti particellari della prova ITSM*, XVI Convegno Nazionale SIIV, Arcavacata di Rende (CS);
35. Dondi G., Bragaglia M., Vignali V. (2008); *Evoluzione dei criteri di calcolo delle pavimentazioni flessibili: i modelli particellari*, XVII Convegno Nazionale SIIV;
36. Elata D., Berryman J. D. (1996); *Contact force-displacement laws and the mechanical behaviour of random packs of identical spheres*, Mechanics of Materials, vol. 24, pg. 229-240;

37. Fortin J., Millet O., Saxcé G. (2005); *Numerical simulation of granular materials by an improved discrete element method*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 62, pg. 639-663;
38. Frisch U., Hasslacher B., Pomeau Y. (1986); *Lattice gas automata for the Navier-Stokes equations*, Phys. Rev. Lett., 56, 1505;
39. Gabrieli F. (2009); *L'approccio particellare per la modellazione numerica dell'insacco di instabilità di versante in terreni granulari*, Università degli Studi di Padova, Facoltà di Ingegneria, Dottorato di Ricerca in scienze dell'Ingegneria Civile ed Ambientale;
40. Goodman R. E., Taylor R. L., Brekke T. L. (1968); *A model for the mechanics of jointed rock*, Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division, vol. 94, pg. 637-659;
41. Hazzard J.F., Young R.P., Maxwell S.C. (2000); *Micromechanical Modelling in Cracking and Failure of Brittle Rocks*, Journal Geophysical Research, n. 105(B7), pg. 16683-16697;
42. Hirshfeld D., Radzyner Y., Rapaport D.C. (1997); *Molecular dynamics studies of granular flow through an aperture*, Physical Review E, 56 (4), pg. 4404-4415;
43. Hopkins M.A., Shen H.H. (2001); *Simulation of pancake-ice dynamics in a wave field*, Ann. Glaciol., 33, pg. 355-360;
44. Ishibashi I., Chen Y.C. (1988); *Dynamic Shear Moduli and Their Relationship To Fabric of Granular Materials*, Micromechanics of granular materials, ed. M. Satake and J.T. Jenkins, Elsevier Science Publishers B.V.: Amsterdam, References 177, pg. 95-102;
45. Issa J. A., Nelson R. B. (1992); *Numerical analysis of micromechanical behaviour of granular materials*, Eng. Comput., 9, pg. 211-223;
46. Itasca (2002); *PFC: Particle flow code in two dimensions, Version 3.0*, Itasca Consulting Group Inc.;
47. Itasca Consulting Group (2003); *PFC3D - Particle Flow Code in three dimensions, Version 3.0, User's guide*, Fish in PFC, Theory and background, Minneapolis;
48. Jensen R., Bosscher P., Plesha M., Edil T. (1999); *Dem simulation of granular media-structure interface: effects of surface roughness and particle shape*, International journal for numerical and analytical methods in geomechanics, vol. 23, pg. 531-547;
49. Jensen R. P., Edil T. B., Bosscher P. J., Plesha M. E., Kahla N. B. (2001); *Effect of particle shape on interface behavior of DEM-simulated granular materials*, The International Journal of Geomechanics, vol. 1;

- 
50. Jiang M. J., Konrad J. M., Leroueil S. (2003); *An efficient technique for generating homogeneous specimens for DEM studies*, Computers and Geotechnics, vol. 30, pg. 579-597;
  51. Jing L. (2003); *A review of techniques, advances and outstanding issues in numerical modelling for rock mechanics and rock engineering*, International Journal of Rock & Mining Sciences, vol. 40, pg. 283-353;
  52. Kawaguchi T., Tanata T., Tsuji Y. (1992); *Numerical Simulation of Fluidized Bed Using the Discrete Element Method (the Case of Spouting Bed)*. JSME (B), 58 (551), pg. 79-85;
  53. Kim H., Wagoner M.P., Buttlar W.G. (2006); *Toward Realistic Heterogeneous Fracture Modeling of Asphalt Mixture Using Disk-Shaped Compact Tension Test Based on Discontinuum Approach*, 85th Annual Meeting of the Transportation Research Board, Washington, D.C.;
  54. Kim. H., Wagoner M., Buttlar W.G. (2006); *Fracture behaviour of asphalt mixtures using the disk-shaped compact tension test and discrete element method*, 10th International conference on asphalt pavements, Québec City, Canada;
  55. Konietzky H., Kamp L., Bertrand G. (2003); *Modeling of Cyclic Fatigue Under Tension with P.F.C.*, Numerical Modeling in Micromechanics via Particle Methods, ed. H. Konietzky, A.A. Balkema: The Netherlands, pg. 101-105;
  56. Kose S., Guler M., Bahia H.U., Masad E. (2000); *Distribution of Strains within Asphalt Binders in HMA Using Imaging and Finite Element Techniques*, Transportation Research Board, 79th Annual Meeting, Washington, D.C.;
  57. Kruyt N. P. (1993); *Toward micro mechanical constitutive relations for granular materials based on two dimensional discrete element simulation*, Modern approaches to plasticity, Ed. D. Kolymbas, Elsevier;
  58. Labra C., Rojek J., Onate E., Zarate F. (2008); *Advances in discrete element modelling of underground excavations*, Journal Acta Geotechnica, 3(4), pg. 1861-1125;
  59. Langston P.A., Al-Awamleh M.A., Fraige F.Y., Asmar B.N. (2004); *Distinct element modelling of non-spherical frictionless particle flow*, Chemical Engineering Science, 59, pg. 425-435;
  60. Langston P.A., Tuzun U., Heyes D.M. (1995); *Discrete element simulation of granular flow in 2D and 3D hoppers: dependence of discharge rate and wall stress on particle interactions*, Chemical Engineering Science;
  61. Lim E.W.C, Wang C.H., Yu A.B. (2006); *Discrete element simulation for pneumatic conveying of granular material*, Particle Technology and Fluidization, 52 (2), pg. 496-509;

- 
62. Lin X., and Ng T.T. (1997); *A three dimensional discrete element model using arrays of ellipsoids*, Géotechnique, 47(2), pg. 319-329;
  63. Matsushima T. (2005); *Effect of irregular grain shape on quasi-static shear behaviour of granular assembly*, Powders and Grains 2005 ed. R Garcia Rojo, H J Herrmann and S McNamara, London, Taylor and Francis, pg. 1319- 1323;
  64. McDowell G.R., Harireche O. (2002); *Discrete Element Modelling of Soil Particle Fracture*, Géotechnique, n. 52(2), pg. 131-135;
  65. McDowell G.R., Harireche O. (2002); *Discrete Element Modelling of Yielding and Normal Compression of Sand*, Géotechnique, n. 52(4), pg. 299-304;
  66. Morchen N., Walz B. (2003); *Model generation and calibration for a pile loading in the particle flow model*, In Numerical modelling in micromechanics via particle methods, ed. H. Konietzky, Rotterdam: A. A. Balkema, pg. 189-195;
  67. Morgan J.K., Boettcher M.S. (1999); *Numerical simulations of granular shear zones using the distinct element method*, J. Geophys. Res. Solid Earth, 104, pg. 2703-2719;
  68. Munjiza A., Latham J.P., John N.W.M. (2003); *3D dynamics of discrete element systems comprising irregular discrete elements-integration solution for finite rotations in 3D*, Int. J. Num. Methods in Engineering, 56, pg. 35-55;
  69. Ng T. (2004); *Triaxial test simulations with discrete element method and hydrostatic boundaries*, Journal of Engineering Mechanics, vol. 130, n. 10, pg.1188-1194;
  70. Ng T.T., Wang C. (2001); *Comparison of a 3-D DEM simulation with MRI data*, Int. J. Numer. Analyt. Meth. Geomech., 25(5), pg. 495-507;
  71. Ortiz M., Leroy Y., Needleman A. (1987); *A finite element method for localized failure analysis*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering archive, 61 (2), pg. 189-214;
  72. O'Sullivan C., Bray J. D., Riemer M. F., *3-D DEM validation using steel balls whit regular packing arrangements*;
  73. O'Sullivan C., Bray J. D., Riemer M. F. (2002); *The Influence of Particle Shape and Surface Friction Variability on the Response of Rod-Shaped Particulate Media*, ASCE Journal of Engineering Mechanics;
  74. O'Sullivan C., Bray J. D., Riemer M. F. (2004); *Examination of the response of regularly packed specimens of spherical particles using physical tests and discrete element simulations*, Journal of Engineering Mechanics, vol. 130, pg. 1140-1150;

- 
75. Portela A., Aliabadi M. H. & Rooke D. P. (1993); *Dual boundary element incremental analysis of crack propagation*, International Journal of Numerical Method in Engineering, vol. 46, pg. 237-284;
  76. Potyondy D. O., Cundall P. A. (2004); *A bonded-particle model for rock*, International Journal of Rock & Mining Sciences, vol. 41, pg. 1329-1364;
  77. Powrie W. et al. (2005); *Numerical Modelling of Plane Strain Tests on Sands Using a Particulate Approach*, Géotechnique, n. 55(4), pg. 297-306;
  78. Reddy JN. (1997); *An Introduction to the finite element method*, McG.-H;
  79. Richards K.S., Bithell M., Dove M.T., Hodge R. (2004); *Discrete element modelling: methods and applications in the environmental sciences*, Philosophical Transactions of the Royal Society, Series A 362, pg. 1-20;
  80. Robertson D., Bolton M.D. (2001); *DEM simulations of crushable grains and soils*, 4th International Conference on Micromechanics of Granular Media (Powders & Grains 2001), Sendai, May, pg. 623-626;
  81. Rothenburg L., et al. (1992); *Micromechanical Modelling of Asphalt Concrete in Connection with Pavement Rutting Problems*, 7th International Conference on Asphalt Pavements;
  82. Salot C. (2007); *Modélisation du comportement mécanique d'un matériau granulaire composite par la méthode des éléments discrets*, Université Grenoble 1 Joseph Fourier, Laboratoire Sols, Solides, Structures, Risques (3S-R), PhD Thesis;
  83. Schmeeckle M.W., Nelson J.M. (2003); *Direct numerical simulation of bedload transport using a local, dynamic boundary condition*. Sedimentology, 50, pg. 279-301;
  84. Shashidhar N., Shenoy A. (2000); *On Using Micromechanical Models to Describe Dynamic Mechanical Behavior of Asphalt Mastics* Transportation Research Board, 79th Annual Meeting, Washington, D.C.;
  85. Thomas P.A., Bray J. (1999); *Capturing nonspherical shape of granular media with disk cluster*, Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering, vol. 125, n. 3, pg. 169-178;
  86. Thornton C. (1979); *The conditions for failure of a face-centred cubic array of uniform rigid spheres*, Géotechnique 29, No. 4, pg. 441-459;
  87. Thornton C. (2000); *Numerical simulations of deviatoric shear deformation of granular media*, Géotechnique 50, No. 1, pg. 43-53;
  88. Thornton C., Ciomocos M.T., Yin K.K. (1997); *Fracture of Particulate Solids*, Powders and Grains, ed. R.P. Behringer and J.T. Jenkins, Balkema: Rotterdam, pg. 131-134;

89. Ting J. M., Corkum B. T. (1988); *Strength behavior of granular materials using discrete numerical modeling*, Numerical methods in geomechanics, Innsbruck, pg. 305-310;
90. Ting J. M., Corkum B. T., Kaulman C. R., Greco C. (1989); *Discrete numerical model for soil mechanics*, J. Geotech. Eng. Div., ASCE, 115, pg. 379-398;
91. Ting J. M., Khwaja M., Meachum L. R., Rowell J. D. (1993); *An ellipse-based discrete element model for granular materials*, Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech., 17, pg. 603-623;
92. Tsuji Y., Kawaguchi T., Tanaka T. (1993); *Discrete particle simulation of two-dimensional fluidized bed*, Powder Technology, 77, pg. 79-87;
93. Tsunekawa H., Iwashita K. (2001); *Numerical simulation of triaxial test using two and three dimensional DEM*, Powders and grains, Ed. Balkema;
94. Wanne T. (2003); *PFC3D Simulation Procedure for Compressive Strength Testing of Anisotropic Hard Rock*, Numerical Modeling in Micromechanics via Particle Methods, ed. H. Konietzky, A.A. Balkema: The Netherlands, References 183, pg. 241-249;
95. Walton O. R. (1982); *Particle-dynamics calculations of shear*, Mechanics of Granular Material: New Models and Constitutive Relations, Elsevier, Amsterdam, pg. 327-338;
96. You Z., Dai Q. (2007); Review of advances in micromechanical modeling of aggregate-aggregate interactions in asphalt mixtures, Can. Journal Engineering Vol. 34, pg. 239-252;
97. Zhou J., Chi Y. (2003); *Shear-band of Sand Simulated by Particle Flow Code*, Numerical Modeling in Micromechanics via Particle Methods, ed. H. Konietzky, A.A. Balkema: The Netherlands, pg. 205-210;
98. Zienkiewicz O., Best B., Dullage C., Stagg K. (1970); *Analysis of nonlinear problems in rock mechanics with particular reference to jointed rock system*, Proceeding of the 2<sup>nd</sup> International Congress on Rock Mechanics.

### **Web-grafia**

99. [www.ascelibrary.org](http://www.ascelibrary.org)
100. [www.itascacg.com/pfc3d/](http://www.itascacg.com/pfc3d/)
101. [www.martinballs.it](http://www.martinballs.it)
102. [www.pattex.it](http://www.pattex.it)
103. [www.sciencedirect.com](http://www.sciencedirect.com)
104. [www.tecnotest.it](http://www.tecnotest.it)

## ***RINGRAZIAMENTI***

*Devo la mia riconoscenza:*

- ✓ al **corpo docente** per la qualità dell'insegnamento, in particolare ai professori del D.I.S.T.A.R.T. sezione strade:
  - Chiar.mo Prof. Ing. Alberto Bucchi**
  - Chiar.mo Prof. Ing. Giulio Dondi**, relatore
  - Chiar.mo Prof. Ing. Ettore Volta**
  - Chiar.mo Prof. Ing. Andrea Simone**
  - Dott. Ing. Cesare Sangiorgi**
  
- ✓ alle correlatrici:
  - Dott. Ing. Valeria Vignali**
  - Dott. Ing. Giulia Manganelli**per la disponibilità e la competenza dimostratemi
  
- ✓ al collega ed amico Matteo Lanciotti  
con il quale ho condiviso tutta l'esperienza universitaria
  
- ✓ a Linda Gallerani  
per la pazienza e la collaborazione
  
- ✓ a mia sorella Anna Cavallari  
per il sostegno
  
- ✓ ai miei genitori: Diego Cavallari, Marina Golfieri
  
- ✓ a tutti i compagni di lavoro ed amici

.....***Grazie a tutti***