

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI
BOLOGNA

FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI
Corso di Laurea Triennale in Matematica

SUL
TEOREMA DI
MITTAG-LEFFLER

Tesi di Laurea in
ISTITUZIONI DI GEOMETRIA SUPERIORE I

Relatore:
Chiar.mo Prof.
Coen Salvatore

Presentata da:
Bersani Marco

Terza Sessione
Anno Accademico 2008/2009

Indice

1	INTRODUZIONE	5
	Introduzione	5
2	TEOREMA DI MITTAG-LEFFLER SU \mathbb{C}	9
3	APPLICAZIONI DEL METODO PRECEDENTE	17
3.1	Primo esempio	17
3.2	Secondo esempio	24
4	TEOREMA DI MITTAG-LEFFLER SU APERTI ARBITRARI	31
4.1	Formula integrale generalizzata di Cauchy	32
4.2	Teorema di approssimazione di Runge	34
4.3	Teorema di Mittag-Leffler	37
5	STORIA DEL TEOREMA	43
A	Grafici per le applicazioni	47
	Bibliografia	51

Capitolo 1

INTRODUZIONE

Il teorema di Mittag-Leffler, nella sua versione più generale per gli aperti del piano complesso \mathbb{C} , stabilisce quanto segue:

“Sia A un aperto di \mathbb{C} ; sia P un sottoinsieme di A tutto costituito da punti isolati in A ; infine, per ogni $a \in P$ sia data una funzione olomorfa g_a su $\mathbb{C} \setminus \{a\}$. Allora esiste una funzione olomorfa f su $A \setminus P$ tale che, per ogni $a \in P$, $f - g_a$ sia olomorfa intorno ad a .”

Il teorema risponde in modo positivo ad una questione ben correlata con le ricerche che svolgeva nell'ultimo quarto del diciannovesimo secolo la scuola di Weierstrass a Berlino. Mittag-Leffler giunse alla dimostrazione del teorema dopo molti anni di lavoro e molti lavori pubblicati. Tra questi principali si possono considerare i contributi all'analisi matematica, alla geometria analitica e alla teoria della probabilità.

Nella presente tesi mi propongo di dare due diverse dimostrazioni di casi particolari del teorema di Mittag-Leffler: il primo caso è quello in cui l'aperto A sia tutto il piano \mathbb{C} ; il secondo è quello in cui A sia un aperto arbitrario del piano complesso ma le funzioni siano tutte funzioni meromorfe.

La motivazione è data dal fatto che del primo risultato illustriamo una dimostrazione costruttiva. Effettivamente così è pure possibile fornire due esempi a cui applicare il metodo dimostrativo (un poco semplificato), otte-

nendo i classici sviluppi in serie di funzioni razionali delle due funzioni

$$\pi \cot \pi z, \quad \frac{2\pi}{e^{2\pi z} - 1}.$$

Da questo risultato segue facilmente che ogni funzione meromorfa f su \mathbb{C} con poli $\{z_m\}$ e corrispondenti parti singolari $\{s_m\}$ si può scrivere sotto la forma

$$f(z) = s(z) + g(z),$$

ove $g(z)$ è una funzione intera ed $s(z)$ è una funzione meromorfa su \mathbb{C} , somma di una serie della forma

$$s(z) = \sum_{m=0}^{+\infty} [s_m(z) - p_m(z)]$$

convergente uniformemente su ogni sottoinsieme limitato del piano non contenente alcun polo di f per opportuni polinomi $p_m(z)$. In questa dimostrazione non svolge alcun ruolo il teorema di Runge.

La dimostrazione del secondo caso non è affatto costruttiva e sfrutta il teorema di Runge, ma ha il pregio di impiegare metodi che si dimostrano utili anche nel caso pluridimensionale (dove il teorema di Mittag-Leffler assume un enunciato apparentemente diverso, il cosiddetto *primo problema di Cousin*, che in questa tesi però non è trattato). Tali metodi forniscono un'interpretazione concreta della teoria coomologica dei fasci alla teoria delle funzioni di più variabili complesse su aperti particolari di \mathbb{C}^n .

La tesi è suddivisa come segue. Il primo e il secondo capitolo sono dedicati alla dimostrazione del teorema nel caso prima considerato $A = \mathbb{C}$ e alle sue applicazioni. Il terzo capitolo è dedicato alla dimostrazione nel caso A sia un aperto arbitrario, ma con le g_a meromorfe. Si dà una dimostrazione completa del risultato e per fare ciò si dimostreranno la formula generalizzata di Cauchy ed una formulazione per noi utile del teorema di Runge. Si vedrà inoltre che per ogni funzione f di classe $C^{(\infty)}(A)$, con A aperto di \mathbb{C} , l'equazione

$$\frac{\partial u}{\partial \bar{z}} = f$$

ammette soluzione u in $C^{(\infty)}(A)$. Infine, mediante una opportuna riformulazione della notazione stessa di funzione meromorfa, si otterrà il risultato finale.

Il teorema di Mittag-Leffler è un teorema classico della teoria delle funzioni ed è quindi interessante anche cercare di delineare la storia del teorema. E' quanto fatto, seppur molto brevemente, nell'ultimo capitolo, avvalendomi di una recente tesi di dottorato dedicata proprio a questo argomento. I testi da cui ho più tratto per questa tesi sono quello dell'Henrici [Hen], quello dell'Hörmander [Hor] e la tesi sopra citata [Tur]. I principali testi da cui sono tratte le informazioni sull'evoluzione del teorema sono [Mit76] e [Mit84b].

Capitolo 2

TEOREMA DI MITTAG-LEFFLER SU \mathbb{C}

Il capitolo è dedicato ad una dimostrazione di carattere costruttivo del teorema di Mittag-Leffler su \mathbb{C} .

Lemma 2.1.

Siano $\{z_m\}_{m \geq 1}$ un insieme di numeri complessi senza punti di accumulazione e $\{\mu_m\}_{m \geq 1}$ una successione di numeri complessi. Allora è sempre possibile determinare degli interi $\{n_m\}_{m \geq 1}$ in maniera tale che la serie

$$t(z) := \sum_{m=1}^{+\infty} \mu_m \left(\frac{2z}{|z_m|} \right)^{n_m} \quad (2.1)$$

converga su tutto \mathbb{C} . Più precisamente è sempre valida la scelta

$$n_m > \log_2 \mu_m \quad \forall m \geq 1. \quad (2.2)$$

Dimostrazione. Per comodità riordino gli z_m in maniera tale che

$$|z_1| \leq |z_2| \leq |z_3| \leq \dots$$

Ora invece fisso un valore reale $\rho > 0$ e determino un intero j in modo che

$$\begin{cases} |z_m| < 4\rho & \text{per } m \leq j \\ |z_m| \geq 4\rho & \text{per } m > j \end{cases},$$

cioè fisso un disco di centro 0 e raggio 4ρ e determino j in modo da distinguere gli z_m all'interno di esso da quelli fuori (o sul bordo). E' possibile trovare questo j perché, per ipotesi, in $\{z_m\}_{m \geq 1}$ non esistono punti di accumulazione e quindi, fissato un disco, esso contiene una quantità finita di punti z_m .

In questa situazione posso riscrivere la (2.1) come

$$t(z) = \sum_{m=1}^j \mu_m \left(\frac{2z}{|z_m|} \right)^{n_m} + \sum_{m=j+1}^{+\infty} \mu_m \left(\frac{2z}{|z_m|} \right)^{n_m}.$$

Adesso prendo un valore z in modo che $|z| \leq \rho$ e mi chiedo se $t(z)$ converge, dunque studio la convergenza di $|t(z)|$:

$$|t(z)| = \left| \sum_{m=1}^{+\infty} \mu_m \left(\frac{2z}{|z_m|} \right)^{n_m} \right| \leq \sum_{m=1}^{+\infty} |\mu_m| \left| \frac{2z}{|z_m|} \right|^{n_m}.$$

Ricordo la situazione in cui mi trovo, ovvero

$$|z| \leq \rho, \quad |z_m| \geq 4\rho \quad \forall m > j \quad \implies \quad \left| \frac{2z}{|z_m|} \right| \leq \frac{1}{2} \quad \forall m > j,$$

dunque

$$\begin{aligned} |t(z)| &\leq \sum_{m=1}^{+\infty} |\mu_m| \left| \frac{2z}{|z_m|} \right|^{n_m+1} = \\ &\sum_{m=1}^j |\mu_m| \left| \frac{2z}{|z_m|} \right|^{n_m+1} + \sum_{m=j+1}^{+\infty} |\mu_m| \left| \frac{2z}{|z_m|} \right|^{n_m+1} \leq \\ &\sum_{m=1}^j |\mu_m| \left| \frac{2z}{|z_m|} \right|^{n_m+1} + \sum_{m=j+1}^{+\infty} |\mu_m| \left(\frac{1}{2} \right)^{n_m+1} \leq \\ &\sum_{m=1}^j |\mu_m| \left| \frac{2z}{|z_m|} \right|^{n_m+1} + \sum_{m=1}^{+\infty} |\mu_m| \left(\frac{1}{2} \right)^{n_m+1} = \\ &\sum_{m=1}^j |\mu_m| \left| \frac{2z}{|z_m|} \right|^{n_m+1} + \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{+\infty} \left(\frac{\sqrt[n_m]{|\mu_m|}}{2} \right)^{n_m}. \end{aligned}$$

Se ora richiedo che gli n_m siano tutti distinti tra loro e che siano strettamente crescenti il secondo addendo diventa una serie geometrica, dunque per avere convergenza è sufficiente che

$$\left| \frac{\sqrt[n_m]{|\mu_m|}}{2} \right| < 1 \quad \iff \quad |\mu_m| < 2^{n_m} \quad \iff \quad n_m > \log_2 |\mu_m|.$$

Ciò significa che, fissato ρ e scelti come sopra gli n_m , $t(z)$ converge per ogni $|z| < \rho$. Dunque, vista l'arbitrarietà di ρ , è possibile concludere che $t(z)$ converge per ogni $z \in \mathbb{C}$. \square

OSSERVAZIONE: ricordo che il lemma assicura l'esistenza di una scelta degli n_m in modo che la serie (2.1) converga. Per quanto riguarda la determinazione di tali interi è possibile che il procedimento per costruirli utilizzato nella dimostrazione sia poco efficiente. Si vedano come esempi le applicazioni esposte nel capitolo 3.

Teorema 2.1. (Mittag-Leffler - prima versione)

Sia $\{z_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ una successione di punti distinti di \mathbb{C} senza punti di accumulazione in \mathbb{C} ; sia $\{s_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ una successione di funzioni tali che ciascuna s_m sia analitica $\forall z \neq z_m$ e in z_m abbia una singolarità isolata (che può essere essenziale).

Allora esistono dei polinomi $\{p_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ tali che la serie

$$s(z) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{m=0}^{+\infty} [s_m(z) - p_m(z)] \quad (2.3)$$

converga uniformemente su ogni insieme limitato non contenente alcuno degli z_m . Inoltre la funzione $s(z)$ è analitica $\forall z \neq z_m$ e la sua parte singolare in z_m è quella di s_m .

Dimostrazione. Studio la dimostrazione in diversi passaggi.

- Innanzitutto posso assumere che $z_0 = 0$ perché:
 - se $0 \in \{z_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ posso riordinare i punti in modo che $z_0 = 0$;
 - se $0 \notin \{z_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ posso aggiungerlo e riordinare i punti in modo che $z_0 = 0$ e aggiungere la funzione $s_0(z) = 0$ (cioè aggiungo 0 come singolarità eliminabile).
- Prima di procedere mi servirà un richiamo alla disuguaglianza di Cauchy, che mi permette di dire:

$$|a_{m,k}| \leq \frac{\max_{|z|=r} |s_m(z)|}{r^k} \quad \forall 0 < r < |z_m|$$

dove $a_{m,k}$ è il k -esimo coefficiente dello sviluppo di Taylor di $s_m(z)$ in 0. Nel mio caso posso porre $r = \frac{1}{2}|z_m|$ e scrivere

$$|a_{m,k}| \leq \mu_m \cdot \left| \frac{2}{z_m} \right|^k \quad (2.4)$$

in cui μ_m è definito come

$$\mu_m \stackrel{\text{def}}{=} \max_{|z|=\frac{1}{2}|z_m|} |s_m(z)| \quad \forall m = 1, 2, \dots \quad (2.5)$$

- Sviluppo analiticamente tutte le funzioni s_m attorno a 0 (eventualmente escludendo s_0), così

$$s_m(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_{m,k} \cdot z^k. \quad (2.6)$$

- Ora, grazie al lemma (2.1), posso scegliere una successione $\{n_m\}$ in maniera tale che la serie

$$t(z) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{m=1}^{+\infty} \mu_m \left(\frac{2z}{|z_m|} \right)^{n_m+1} \quad (2.7)$$

converga su tutto \mathbb{C} (ove μ_m è dato da (2.5) poco più sopra). Definisco poi i polinomi p_m come somma parziale di grado n_m dello sviluppo di Taylor di s_m in 0, ovvero

$$p_m(z) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=0}^{n_m} a_{m,k} \cdot z^k \quad \forall m \geq 1. \quad (2.8)$$

Sicuramente ogni s_m con $m \neq 0$ è analitica intorno a 0, quindi la definizione dei polinomi è ben posta. Per quanto riguarda il caso $m = 0$ definisco $p_0(z) = 0$ per comodità.

Verifico ora che con tale scelta degli n_m effettivamente i polinomi p_m possiedono le proprietà richieste.

- Ricordo le espressioni (2.6), (2.8) e, fissato m , considero $|z| \leq \frac{1}{4}|z_m|$; dunque faccio la seguente stima:

$$|s_m(z) - p_m(z)| = \left| \sum_{k=n_m+1}^{+\infty} a_{m,k} \cdot z^k \right| \leq \sum_{k=n_m+1}^{+\infty} |a_{m,k}| |z|^k.$$

Ricordo la stima (2.4) perciò

$$|s_m(z) - p_m(z)| \leq \sum_{k=n_m+1}^{+\infty} \mu_m \left| \frac{2z}{z_m} \right|^k.$$

Pongo $h = k - n_m$ come nuovo indice della sommatoria, dunque:

$$\begin{aligned} |s_m(z) - p_m(z)| &\leq \mu_m \left| \frac{2z}{z_m} \right|^{n_m} \sum_{h=1}^{+\infty} \left| \frac{2z}{z_m} \right|^h \leq \\ &\leq \mu_m \left| \frac{2z}{z_m} \right|^{n_m} \cdot \sum_{h=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2} \right)^h = \mu_m \left| \frac{2z}{z_m} \right|^{n_m} \\ \implies |s_m(z) - p_m(z)| &\leq \mu_m \left| \frac{2z}{z_m} \right|^{n_m} \quad \text{per } |z| \leq \frac{|z_m|}{4}. \end{aligned} \quad (2.9)$$

- Arrivati a questo punto fisso un valore reale $\rho > 0$ e determino un intero j in modo che

$$\begin{cases} |z_m| < 4\rho & m \leq j \\ |z_m| \geq 4\rho & m > j \end{cases}$$

ed è possibile fare ciò perché l'insieme $\{z_m\}_{m \geq 1}$ non possiede punti di accumulazione. In questo modo ρ determina un disco chiuso $\overline{B_{4\rho}(0)}$ che contiene al più una quantità finita di poli z_m (ovvero z_0, z_1, \dots, z_j).

Dunque considero $|z| < \rho$ e verifico la convergenza di $s(z)$:

$$\begin{aligned} |s(z)| &= \left| \sum_{m=0}^{+\infty} [s_m(z) - p_m(z)] \right| \leq \\ &\sum_{m=0}^{+\infty} |s_m(z) - p_m(z)| = \\ &\sum_{m=0}^j |s_m(z) - p_m(z)| + \sum_{m=j+1}^{+\infty} |s_m(z) - p_m(z)| \end{aligned}$$

Per quanto riguarda la prima somma certamente è una quantità finita e non mi crea problemi nello studio della convergenza. Infatti ciascuna s_m , per $m \leq j$, è analitica su $\mathbb{C} \setminus \{z_m\}$.

Invece per quanto riguarda la seconda somma ricordo che $|z| < \rho$ e quindi

$$|z| < \frac{|z_m|}{4} \quad \forall m > j,$$

il che mi permette di utilizzare la stima (2.9):

$$\sum_{m=j+1}^{+\infty} |s_m(z) - p_m(z)| \leq \sum_{m=j+1}^{+\infty} \mu_m \left| \frac{2z}{z_m} \right|^{n_m} \leq \sum_{m=1}^{+\infty} \mu_m \left| \frac{2z}{z_m} \right|^{n_m} = t(z).$$

Dunque sono arrivato alla serie (2.7) che, per come ho definito, so essere convergente con gli n_m scelti.

Ma allora, fissato ρ , i polinomi p_m sono proprio i polinomi richiesti dal teorema, ovvero fanno sì che $s(z)$ sia analitica per $|z| < \rho$.

Grazie alla convergenza uniforme sui compatti posso concludere che, per ogni reale $\rho > 0$, $s(z)$ è una funzione analitica per $|z| < \rho$, a meno di singolarità isolate nei punti z_m che soddisfano la condizione $|z_m| < \rho$, dove la sua parte principale coincide con quella delle s_m .

Dato che tutto ciò è valido per ogni $\rho > 0$, il teorema risulta dimostrato. \square

Di seguito viene esposto un caso particolare del teorema di Mittag-Leffler in cui è nota la funzione $f(z)$ e quella che si troverà sarà una serie di funzioni razionali $s(z)$ che servirà a esprimere $f(z)$ in termine delle sue singolarità.

Corollario 2.1.

Sia f una funzione meromorfa sul piano complesso con poli $\{z_m\}_{m \geq 1}$ e corrispondenti parti singolari $\{s_m\}_{m \geq 1}$. Allora esistono dei polinomi $\{p_m\}_{m \geq 1}$ tali che la somma

$$s(z) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{m=1}^{+\infty} [s_m(z) - p_m(z)] \tag{2.10}$$

converga uniformemente su ogni insieme limitato non contenente alcuno degli z_m e la funzione $f(z) - s(z)$ sia intera.

Dimostrazione. L'unica differenza dalla precedente situazione è che ora le $s_m(z)$ non sono funzioni date ad arbitrio ma sono le parti singolari di $f(z)$ di volta in volta sviluppata attorno ai poli z_m . Rimane allora solo l'ultimo punto da dimostrare, cioè bisogna chiedersi se è vero che $f(z) - s(z)$ è una funzione intera. Ma ciò è vero perchè, per costruzione, $f(z)$ ed $s(z)$ hanno stessi poli e stessa parte singolare per ciascuno di essi, quindi la loro differenza dà una funzione analitica su tutto \mathbb{C} . \square

Corollario 2.2.

Nelle stesse condizioni del corollario (2.1) si consideri una successione crescente di naturali n_m tutti distinti, con $m \geq 1$, e tali che

$$n_m > \log_2 \mu_m \quad \forall m \geq 1,$$

ove

$$\mu_m \stackrel{\text{def}}{=} \max_{|z|=\frac{1}{2}|z_m|} |s_m(z)| \quad \forall m \geq 1.$$

Si considerino inoltre gli sviluppi

$$s_m(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_{k,m} \cdot z^k \quad \forall m \geq 1$$

delle funzioni $s_m(z)$ attorno a 0. Allora i polinomi $p_m(z)$ definiti come

$$p_0(z) \stackrel{\text{def}}{=} 0, \quad p_m(z) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^{n_m} a_{m,k} \cdot z^k \quad \forall m \geq 1 \quad (2.11)$$

soddisfano il corollario (2.1), ovvero permettono una buona definizione dell'espressione (2.10).

Dimostrazione. La dimostrazione ricalca esattamente quanto fatto per dimostrare il teorema di Mittag-Leffler nella forma data da (2.1). \square

Capitolo 3

APPLICAZIONI DEL METODO PRECEDENTE

Di seguito sono esposte alcune applicazioni dell'algoritmo fornito precedentemente per la dimostrazione del teorema di Mittag-Leffler.

3.1 Primo esempio

Considero la funzione

$$f(z) = \frac{2\pi}{e^{2\pi z} - 1} \quad (3.1)$$

e cerco di esprimerla come serie di funzioni razionali tramite l'algoritmo presentato dall'Henrici, in modo tale da evidenziare poli e loro molteplicità. Prima di tutto, dunque, quella che cerco è una serie di funzioni razionali $s(z)$ che possieda le stesse parti singolari di $f(z)$.

- La funzione è periodica di periodo i (grazie alle proprietà dell'esponenziale) e dunque i suoi poli sono la successione seguente:

$$\{z_m\}_{m \in \mathbb{N}} \longrightarrow \begin{cases} z_0 = 0 \\ z_{2m} = -mi & m \geq 1 \\ z_{2m-1} = mi & m \geq 1 \end{cases} \longleftrightarrow z_m = \begin{cases} -\frac{m}{2}i & m \text{ pari} \\ \frac{m+1}{2}i & m \text{ dispari} \end{cases}$$

La molteplicità del polo in $z_0 = 0$ è 1 e lo provo verificando l'esistenza del seguente limite:

$$\lim_{z \rightarrow 0} z \cdot f(z) =$$

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{2\pi z}{e^{2\pi z} - 1} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{2\pi z}{\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} (2\pi z)^k - 1} =$$

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{2\pi z}{2\pi z + \frac{1}{2}(2\pi z)^2 + \dots} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{1 + \pi z + \frac{2}{3}(\pi z)^2 + \dots} = 1$$

Sfruttando la periodicità della funzione posso concludere che ciascun polo ha molteplicità 1.

- Voglio ora trovare la parte singolare $s_m(z)$ di $f(z)$ in z_m , quindi:

$$f(z) = \sum_{k=-1}^{+\infty} a_{m,k}(z - z_m)^k \implies s_m(z) \stackrel{\text{def}}{=} a_{m,-1} \cdot \frac{1}{z - z_m}$$

A questo punto cerco il residuo e lo trovo calcolando il precedente limite, dunque:

$$s_m(z) = \frac{1}{z - z_m} \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (3.2)$$

Ciascuna di queste funzioni è analitica su tutto \mathbb{C} escluso il proprio polo z_m , allora attorno a 0 (più precisamente per $|z| \lesssim |z_m|$) posso svilupparle in questa maniera:

$$\frac{1}{z - z_m} = -\frac{1}{z_m} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z}{z_m}} = -\frac{1}{z_m} \cdot \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{z}{z_m}\right)^k$$

$$\implies s_m(z) = -\frac{1}{z_m} \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{z}{z_m}\right)^k \quad m = 1, 2, \dots$$

Devo escludere $s_0(z)$ perchè non è detto che sia possibile svilupparla analiticamente attorno a 0.

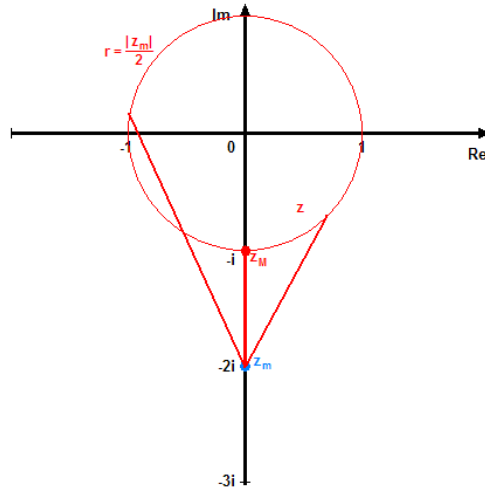
- Per ogni m definisco

$$\mu_m \stackrel{\text{def}}{=} \max_{|z|=\frac{1}{2}|z_m|} |s_m(z)| \quad m = 1, 2, \dots,$$

e la definizione ha senso perché le s_m sono analitiche su tutto \mathbb{C} escluso il proprio polo z_m , quindi a maggior ragione lo sono per $|z| = \frac{1}{2}|z_m|$.

Allora, data la notazione $z = x + iy$ con $x, y \in \mathbb{R}$, voglio determinare:

$$\max_{|z|=\frac{1}{2}|z_m|} \left(\frac{1}{|z - z_m|} \right).$$

Figura 3.1: *Determinazione di μ_m* 

La figura (3.1) offre un'interpretazione geometrica del problema che si vuole risolvere nel caso che m sia pari (se m è dispari il problema è analogo). Si osserva subito che

$$|z - z_m| \geq |z_M - z_m|$$

in cui $z_M = \frac{1}{2}z_m$. Ma allora

$$|z - z_m| \geq \frac{1}{2}|z_m| \Rightarrow \frac{1}{|z - z_m|} \leq \frac{2}{|z_m|}.$$

Dunque:

$$\begin{aligned} \max_{|z|=\frac{1}{2}|z_m|} \left(\frac{1}{|z - z_m|} \right) &= \frac{2}{|z_m|} \\ \Rightarrow \mu_m &= \begin{cases} \frac{4}{m} & m \text{ pari} \\ \frac{4}{m+1} & m \text{ dispari} \end{cases} \end{aligned} \quad (3.3)$$

- Definisco ora dei polinomi

$$p_m(z) \stackrel{\text{def}}{=} -\frac{1}{z_m} \sum_{k=0}^0 \left(\frac{z}{z_m} \right)^k = -\frac{1}{z_m} \quad m = 1, 2, \dots \quad (3.4)$$

cioè sono somme parziali di grado 0-esimo del precedente sviluppo delle funzioni $s_m(z)$ e per comodità pongo $p_0(z) = 0$. Quel che significa è che, utilizzando la notazione della dimostrazione del teorema, ho preso una successione di naturali n_m tutti nulli.

- Per verificare che effettivamente gli n_m siano adeguati devo controllare che

$$t(z) \stackrel{def}{=} \sum_{m=1}^{+\infty} \mu_m \left(\frac{2z}{|z_m|} \right)^{n_m+1} \quad (3.5)$$

converga con raggio di convergenza $+\infty$. Vale:

$$\begin{aligned} t(z) &= \sum_{m \text{ pari}} \frac{4}{m} \left(\frac{4z}{m} \right) + \sum_{m \text{ dispari}} \frac{4}{m+1} \left(\frac{4z}{m+1} \right) = \\ &= 2 \sum_{m \text{ pari}} \frac{4}{m} \left(\frac{4z}{m} \right) = 32z \sum_{m \text{ pari}} \frac{1}{m^2} \implies t(z) \text{ è ben definita} \end{aligned}$$

- Definisco ora la funzione che rappresenterà $f(z)$ (e grazie al teorema di Mittag-Leffler sono già sicuro che non avrò problemi di convergenza):

$$s(z) \stackrel{def}{=} \sum_{m=0}^{+\infty} [s_m(z) - p_m(z)] = \frac{1}{z} + \sum_{m=1}^{+\infty} \left[\frac{1}{z - z_m} + \frac{1}{z_m} \right], \quad (3.6)$$

distinguo gli indici pari da quelli dispari

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\frac{1}{z - z_{2n}} + \frac{1}{z_{2n}} \right] + \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\frac{1}{z - z_{2n-1}} + \frac{1}{z_{2n-1}} \right] \\ &= \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\frac{1}{z + ni} - \frac{1}{ni} \right] + \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\frac{1}{z - ni} + \frac{1}{ni} \right] \end{aligned}$$

Riunendo il tutto in un'unica serie ottengo questo:

$$s(z) = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2z}{z^2 + n^2} \quad (3.7)$$

e posso concludere che

$$\frac{2\pi}{e^{2\pi z} - 1} = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2z}{z^2 + n^2} + g(z) \quad (3.8)$$

dove g è una funzione intera per il corollario (2.1).

Ora che ho espresso $f(z)$ come serie di funzioni razionali mi interessa determinare anche la funzione intera $g(z)$.

- Prima di tutto osservo che se $f(z)$ ed $s(z)$ sono periodiche di periodo i allora lo è anche $g(z) = f(z) - s(z)$; per quanto riguarda la periodicità di $f(z)$ l'avevo già verificata in precedenza, quindi considero solo $s(z)$:

$$\sum_{k=-n}^n \frac{1}{(z+i) - ki} - \sum_{k=-n}^n \frac{1}{z - ki}$$

Nella prima somma prendo un nuovo indice $h = k - 1$ mentre nella seconda posso rinominare k con h senza problemi; dunque:

$$\sum_{h=-n-1}^{n-1} \frac{1}{z - hi} - \sum_{h=-n}^n \frac{1}{z - hi} = \frac{1}{z + (n+1)i} - \frac{1}{z - ni}$$

Adesso mando n a $+\infty$ in entrambi i membri dell'uguaglianza e, ricordando la forma (3.6) di $s(z)$, ottengo:

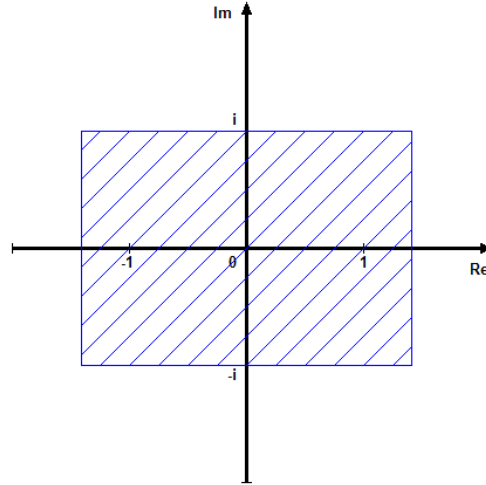
$$s(z+i) - s(z) = 0$$

il che significa che $s(z)$, e di conseguenza $g(z)$, è periodica di periodo i su tutto \mathbb{C} .

- Adesso vedo se $g(z)$ è limitata, perchè in tal caso, grazie al teorema di Liouville, potrei concludere che essa è costante.

Dato che $g(z)$ è periodica di periodo i posso studiarla per i valori $\Im m(z) \in [0, 1]$, quindi inizio ad analizzare il comportamento di $f(z)$ ed $s(z)$ sotto questa condizione (sempre con la notazione $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$).

Prima però osservo che su $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}] \times [0, i]$ una funzione analitica, come nel caso di $g(z)$, è limitata; allora posso limitarmi a studiare z con $|x| = |\Re e(z)| \geq \sqrt{2}$ e $y = \Im m(z) \in [0, 1]$.



– Stimo $f(z)$:

$$|f(z)| = \left| \frac{2\pi}{e^{2\pi z} - 1} \right| = \frac{2\pi}{|e^{2\pi x} e^{2\pi iy} - 1|} \leq$$

$$\frac{2\pi}{||e^{2\pi x} e^{2\pi iy}| - |1||} = \left| \frac{2\pi}{|e^{2\pi x}| - 1} \right| = \left| \frac{2\pi}{e^{2\pi x} - 1} \right| = |f(x)|$$

– Stimo $s(z)$, ma prima osservo questa relazione:

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} \leq |x| + |y| \leq |x| + 1 \leq 2|x|$$

e anche quest'altra (con $n = 1, 2, \dots$):

$$|z^2 + n^2| = |(x^2 - y^2 + n^2) + i(2xy)| =$$

$$\sqrt{(x^2 - y^2 + n^2)^2 + (2xy)^2} \geq |x^2 - y^2 + n^2| \geq$$

$$x^2 - y^2 + n^2 \geq x^2 - 1 + n^2 \geq \frac{x^2}{2} + \frac{n^2}{2} = \frac{1}{2}(x^2 + n^2)$$

infatti se $|x| \geq \sqrt{2}$ allora $x^2 - 1 \geq \frac{x^2}{2}$.

Ora posso stimare $s(z)$, ricordando la sua forma data da (3.7):

$$|s(z)| = \left| \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2z}{z^2 + n^2} \right| \leq \frac{1}{|z|} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2|z|}{|z^2 + n^2|} \leq$$

$$\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4|x|}{x^2 + n^2} \leq \frac{1}{|x|} + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2|x|}{|x|^2 + n^2} <$$

$$\frac{2}{|x|} + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2|x|}{|x|^2 + n^2} = 2s(|x|)$$

– Stimo $g(z)$:

$$|g(z)| = |f(z) - s(z)| \leq |f(z)| + |s(z)| < |f(x)| + 2s(|x|)$$

Dunque studio il seguente limite (ricordando che $x \in \mathbb{R}$):

$$\begin{aligned} \lim_{|z| \rightarrow +\infty} g(z) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} |f(x)| + 2s(|x|) = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left| \frac{2\pi}{e^{2\pi x} - 1} \right| + \lim_{x \rightarrow +\infty} 2s(|x|) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2s(|x|) \end{aligned}$$

allora (ricordando la forma (3.7) di s)

$$\begin{aligned} \lim_{|z| \rightarrow +\infty} g(z) &= 2 \lim_{x \rightarrow +\infty} s(|x|) = \\ &= 2 \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{|x|} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2|x|}{|x|^2 + n^2} \right] = 4 \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1 + \left(\frac{n}{|x|}\right)^2} \cdot \frac{1}{|x|} \right] \end{aligned}$$

Questa serie esprime un integrale di Riemann con passo $\Delta\tau = \frac{1}{|x|}$ e funzione integranda $h(\tau) = \frac{1}{1+\tau^2}$; l'intervallo di integrazione è $[0, +\infty)$ con la suddivisione $\{\frac{1}{|x|}, \frac{2}{|x|}, \frac{3}{|x|}, \dots\}$ e quindi la serie è una somma inferiore delle aree rettangolari di base $\frac{1}{|x|}$ e altezza progressivamente $h\left(\frac{n}{|x|}\right)$. Ma allora:

$$\begin{aligned} 4 \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1 + \left(\frac{n}{|x|}\right)^2} \cdot \frac{1}{|x|} \right] &= 4 \int_0^{+\infty} \frac{1}{1 + \tau^2} d\tau = \\ &= 4[\arctan \tau]_0^{+\infty} = 2\pi \end{aligned}$$

(Nella prima appendice sono presenti grafici che mostrano il passaggio da serie a integrale.)

Allo stesso modo potrei mandare x a $-\infty$ e concludere che $g(z)$ è limitata.

- Ora che so che $g(z)$ è una funzione analitica e limitata posso concludere, grazie al teorema di Liouville, che è pure costante; mi propongo allora di determinare il valore di $g(z)$. Per farlo basta calcolare g in un punto e io ne scelgo uno con $\text{Im}z = 0$, quindi studio il limite

$$\lim_{|z| \rightarrow +\infty} g(z) = \lim_{\text{Re}z \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - s(x)$$

Ricordo le espressioni (3.1) e (3.6) in cui al posto di z metto una x reale, quindi

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - s(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2\pi}{e^{2\pi x} - 1} - \lim_{x \rightarrow +\infty} s(x) = \\ 0 - \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2x}{x^2 + n^2} \right] &= -2 \int_0^{+\infty} \frac{1}{1 + \tau^2} d\tau = -\pi \end{aligned}$$

Ciò significa che

$$g(z) = -\pi$$

Posso concludere l'esercizio dando la forma finale di $f(z)$ in termini di serie di funzioni razionali:

$$f(z) = \frac{2\pi}{e^{2\pi z} - 1} = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2z}{z^2 + n^2} - \pi.$$

3.2 Secondo esempio

Considero la funzione

$$f(z) = \pi \cot(\pi z) \quad (3.9)$$

e, come nel precedente esempio, voglio esprimerla come serie di funzioni razionali.

- La funzione è periodica di periodo 1 e dunque i suoi poli sono la successione seguente:

$$\{z_m\}_{m \in \mathbb{N}} \longrightarrow \begin{cases} z_0 = 0 \\ z_{2m} = -m & m \geq 1 \\ z_{2m-1} = m & m \geq 1 \end{cases} \longleftrightarrow z_m = \begin{cases} -\frac{m}{2} & m \text{ pari} \\ \frac{m+1}{2} & m \text{ dispari} \end{cases}$$

La molteplicità del polo in $z_0 = 0$ è 1 e lo provo verificando l'esistenza del seguente limite:

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow 0} z \cdot f(z) &= \\ \lim_{z \rightarrow 0} \pi z \cdot \frac{\cos(\pi z)}{\sin(\pi z)} &= \lim_{z \rightarrow 0} \pi z \cdot \frac{\cos(\pi z)}{\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} (\pi z)^{2k+1}} = \\ \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\pi z \cos(\pi z)}{\pi z - \frac{1}{6}(\pi z)^3 + \dots} &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\cos(\pi z)}{1 - \frac{1}{6}(\pi z)^2 + \dots} = 1 \end{aligned}$$

Sfruttando la periodicità della funzione posso concludere che ciascun polo ha molteplicità 1.

- Ora individuo la parte singolare $s_m(z)$ di $f(z)$ in z_m , quindi faccio così:

$$f(z) = \sum_{k=-1}^{+\infty} a_{m,k}(z - z_m)^k \implies s_m(z) \stackrel{def}{=} a_{m,-1} \cdot \frac{1}{z - z_m}$$

Calcolando il precedente limite ricavo il residuo, dunque:

$$s_m(z) = \frac{1}{z - z_m} \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (3.10)$$

Ciascuna di queste funzioni è analitica in ogni punto di \mathbb{C} escluso il proprio polo z_m , allora attorno a 0 (più precisamente per $|z| \leq |z_m|$) posso svilupparle in questa maniera:

$$\begin{aligned} \frac{1}{z - z_m} &= -\frac{1}{z_m} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z}{z_m}} = -\frac{1}{z_m} \cdot \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{z}{z_m}\right)^k \\ \implies s_m(z) &= -\frac{1}{z_m} \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{z}{z_m}\right)^k \quad m = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Devo escludere $s_0(z)$ perchè non è detto che sia possibile svilupparla analiticamente attorno a 0.

- Ora per ogni m definisco

$$\mu_m \stackrel{def}{=} \max_{|z|=\frac{1}{2}|z_m|} |s_m(z)| \quad m = 1, 2, \dots$$

e la definizione ha senso perché le s_m sono analitiche su tutto \mathbb{C} escluso il proprio polo z_m , quindi a maggior ragione lo sono per $|z| = \frac{1}{2}|z_m|$.

Allora, data la notazione $z = x + iy$ con x e y reali, voglio determinare:

$$\max_{|z|=\frac{1}{2}|z_m|} \left(\frac{1}{|z - z_m|} \right).$$

Con riferimento alla prima applicazione e alla figura (3.1), posso dire

$$\begin{aligned} \max_{|z|=\frac{1}{2}|z_m|} \left(\frac{1}{|z - z_m|} \right) &= \frac{2}{|z_m|} \\ \implies \mu_m &= \begin{cases} \frac{4}{m} & m \text{ pari} \\ \frac{4}{m+1} & m \text{ dispari} \end{cases} \end{aligned} \quad (3.11)$$

- Definisco ora dei polinomi

$$p_m(z) \stackrel{def}{=} -\frac{1}{z_m} \sum_{k=0}^0 \left(\frac{z}{z_m} \right)^k = -\frac{1}{z_m} \quad m = 1, 2, \dots \quad (3.12)$$

cioè sono somme parziali di grado 0-esimo del precedente sviluppo delle funzioni $s_m(z)$ e per comodità pongo $p_0(z) = 0$. Quel che significa è che, utilizzando la notazione della dimostrazione del teorema, ho preso una successione di naturali n_m tutti nulli.

- Per verificare che effettivamente gli n_m siano adeguati devo controllare che

$$t(z) \stackrel{def}{=} \sum_{m=1}^{+\infty} \mu_m \left(\frac{2z}{|z_m|} \right)^{n_m+1} \quad (3.13)$$

converga con raggio di convergenza $+\infty$. Vale:

$$\begin{aligned} t(z) &= \sum_{m \text{ pari}} \frac{4}{m} \left(\frac{4z}{m} \right) + \sum_{m \text{ dispari}} \frac{4}{m+1} \left(\frac{4z}{m+1} \right) = \\ &2 \sum_{m \text{ pari}} \frac{4}{m} \left(\frac{4z}{m} \right) = 32z \sum_{m \text{ pari}} \frac{1}{m^2} \implies t(z) \text{ è ben definita} \end{aligned}$$

- In conclusione ho trovato la forma dei polinomi, ossia

$$p_m(z) = -\frac{1}{z_m} \quad m = 1, 2, \dots \quad (3.14)$$

e per comodità pongo $p_0(z) = 0$, perché fino ad ora ho escluso il caso $m = 0$.

- Definisco ora la funzione che rappresenterà $f(z)$:

$$s(z) \stackrel{def}{=} \sum_{m=0}^{+\infty} [s_m(z) - p_m(z)] = \frac{1}{z} + \sum_{m=1}^{+\infty} \left[\frac{1}{z - z_m} + \frac{1}{z_m} \right] \quad (3.15)$$

distinguo gli indici pari da quelli dispari

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\frac{1}{z - z_{2n}} + \frac{1}{z_{2n}} \right] + \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\frac{1}{z - z_{2n-1}} + \frac{1}{z_{2n-1}} \right] \\ &= \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\frac{1}{z + n} - \frac{1}{n} \right] + \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\frac{1}{z - n} + \frac{1}{n} \right] \end{aligned}$$

Riunendo il tutto in un'unica serie ottengo questo:

$$s(z) = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2} \quad (3.16)$$

e posso concludere che

$$\pi \cot(\pi z) = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2} + g(z) \quad (3.17)$$

dove g è una funzione intera per il corollario (2.1).

Ora che ho espresso $f(z)$ come serie di funzioni razionali mi interessa determinare anche la funzione intera $g(z)$.

- Comincio con l'osservare che $g(z) = f(z) - s(z)$ è periodica di periodo 1 perché lo sono sia $f(z)$ (come ho visto in precedenza) che $s(z)$; ricordo infatti l'espressione (3.16):

$$s(z) = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{z + n}$$

Dunque

$$s(z) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \sum_{n=-k}^{+k} \frac{1}{z + n}, \quad s(z+1) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \sum_{n=-k}^{+k} \frac{1}{(z+1) + n},$$

che riscrivo come

$$s(z) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \sum_{n=-k}^{+k} \frac{1}{z + n}, \quad s(z+1) = \lim_{h \rightarrow +\infty} \sum_{n=-k+1}^{+k+1} \frac{1}{z + n}.$$

Allora risulta evidente che

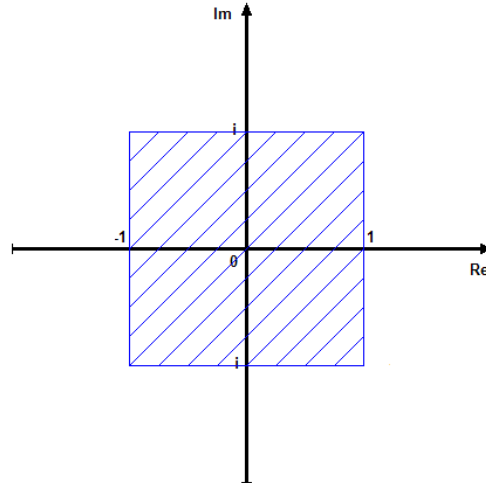
$$s(z+1) - s(z) = 0$$

per ogni z di \mathbb{C} ; quindi anche $g(z)$ è periodica di periodo 1.

- Adesso vedo se $g(z)$ è limitata, perchè in tal caso, grazie al teorema di Liouville, potrei concludere che essa è costante.

Dato che $g(z)$ è periodica di periodo 1 posso studiarla per i valori $\Re(z) \in [0, 1]$, quindi inizio ad analizzare il comportamento di $f(z)$ ed $s(z)$ sotto questa condizione (sempre con la notazione $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$).

Prima però osservo che su $[0, 1] \times [-i, i]$ una funzione analitica, come nel caso di $g(z)$, è limitata; allora posso limitarmi a studiare z con $x = \Re(z) \in [0, 1]$ e $|y| = |\Im(z)| \geq 1$.



– Stimo $f(z)$:

$$|f(z)| = \pi |\cot(\pi z)| = \pi \left| i \frac{e^{i\pi z} + e^{-i\pi z}}{e^{i\pi z} - e^{-i\pi z}} \right| \leq$$

$$\pi \frac{|e^{\pi(ix-y)}| + |e^{\pi(-ix+y)}|}{\left| |e^{\pi(ix-y)}| - |e^{\pi(-ix+y)}| \right|} = \pi \frac{e^{-\pi y} + e^{\pi y}}{|e^{-\pi y} - e^{\pi y}|} = \pi \left| \frac{e^{\pi y} + e^{-\pi y}}{e^{\pi y} - e^{-\pi y}} \right| =$$

$$\pi \left| \frac{e^{i(i\pi y)} + e^{-i(i\pi y)}}{e^{i(i\pi y)} - e^{-i(i\pi y)}} \right| = \pi |\cot(i\pi y)| = |f(iy)|.$$

– Stimo $s(z)$, ma prima osservo questa relazione:

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} \leq |x| + |y| \leq 1 + |y| \leq 2|y|$$

e anche quest'altra (con $n = 1, 2, \dots$):

$$|z^2 - n^2| = |(x^2 - y^2 - n^2) + i(2xy)| =$$

$$\sqrt{(x^2 - y^2 - n^2)^2 + (2xy)^2} \geq |x^2 - y^2 - n^2| \geq$$

$$y^2 - x^2 + n^2 \geq y^2 + (-1 + n^2) > y^2 - n^2$$

infatti se $n \geq 1$ allora $n^2 - 1 > -n^2$.

Ora posso stimare $s(z)$, ricordando la sua forma data da (3.16):

$$|s(z)| = \left| \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2} \right| \leq \frac{1}{|z|} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2|z|}{|z^2 - n^2|} \leq$$

$$\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2|y|}{y^2 - n^2} \leq \frac{1}{|y|} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2|y|}{|y|^2 - n^2} = s(|y|)$$

– Stimo $g(z)$:

$$|g(z)| = |f(z) - s(z)| \leq |f(z)| + |s(z)|$$

Dunque studio il seguente limite (ricordando che $y \in \mathbb{R}$):

$$\lim_{|z| \rightarrow +\infty} |g(z)| = \lim_{y \rightarrow +\infty} |f(iy)| + s(|y|) =$$

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} \pi |\cot(i\pi y)| + \lim_{y \rightarrow +\infty} s(|y|) = \pi + \lim_{y \rightarrow +\infty} s(|y|)$$

allora (ricordando la forma (3.7) di s)

$$\lim_{|z| \rightarrow +\infty} |g(z)| = \pi + \lim_{y \rightarrow +\infty} s(|y|) =$$

$$\pi + \lim_{y \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{|y|} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2|y|}{|y|^2 - n^2} \right] = 2 \lim_{y \rightarrow +\infty} \left[\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1 - \left(\frac{n}{|y|}\right)^2} \cdot \frac{1}{|y|} \right]$$

Questa serie esprime un integrale di Riemann con passo $\Delta\tau = \frac{1}{|y|}$ e funzione integranda $h(\tau) = \frac{1}{1-\tau^2}$; l'intervallo di integrazione è $[0, +\infty)$ con la suddivisione $\{\frac{1}{|y|}, \frac{2}{|y|}, \frac{3}{|y|}, \dots\}$ e quindi la serie è una somma inferiore delle aree rettangolari di base $\frac{1}{|y|}$ e altezza progressivamente $h\left(\frac{n}{|y|}\right)$. Ma allora:

$$2 \lim_{y \rightarrow +\infty} \left[\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1 - \left(\frac{n}{|y|}\right)^2} \cdot \frac{1}{|y|} \right] = 2 \int_0^{+\infty} \frac{1}{1 - \tau^2} d\tau =$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1 + \tau} + \frac{1}{1 - \tau} d\tau = \left[\log \left| \frac{1 + \tau}{1 - \tau} \right| \right]_0^{+\infty} = 0.$$

(Nella prima appendice sono presenti grafici che mostrano il passaggio da serie a integrale.)

Allo stesso modo potrei mandare y a $-\infty$ e concludere che $g(z)$ è limitata.

- Ora che so che $g(z)$ è una funzione analitica e limitata posso concludere, grazie al teorema di Liouville, che è pure costante; mi propongo allora di determinare il valore di $g(z)$. Per farlo mi basta ricordare il risultato precedente, ovvero che $|g(z)| = 0$ per $|z|$ che tende a $+\infty$, il che porta a dire che

$$g(z) = 0.$$

Posso concludere l'esercizio dando la forma finale della funzione $f(z)$ in termini di funzioni razionali:

$$f(z) = \pi \cot(\pi z) = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2}.$$

Capitolo 4

TEOREMA DI MITTAG-LEFFLER SU APERTI ARBITRARI

In questo capitolo si dimostra il teorema di Mittag-Leffler su aperti arbitrari di \mathbb{C} e con dati meromorfi con un metodo essenzialmente diverso dal precedente. Si procede prima estendendo il teorema di rappresentazione di Cauchy ad un teorema generalizzato (risultato dovuto a Pompeiu), poi si passa alla dimostrazione di alcuni teoremi di approssimazione per funzioni analitiche che sono da considerarsi nell'ambito della teoria di Runge. Infine si applica quanto trovato alla dimostrazione del teorema di Mittag-Leffler.

Si noti che è opportuno in questo caso caratterizzare le funzioni meromorfe su aperti del piano complesso con una definizione diversa da quella classica e che permette di dare ancora senso ad una sorta di problema di Mittag-Leffler (*primo problema di Cousin*) per aperti di \mathbb{C}^n . Anzi, questa stessa dimostrazione, nel caso 1-dimensionale, storicamente è ricavata da una dimostrazione del teorema di Cousin per particolari domini di \mathbb{C}^n .

4.1 Formula integrale generalizzata di Cauchy

Sia ω un insieme aperto e limitato in \mathbb{C} , tale che la frontiera $\delta\omega$ sia costituita da un numero finito di $C^{(1)}$ -curve di Jordan. Se inoltre $u \in C^{(1)}(\bar{\omega})$ allora tramite la formula di Stokes vale

$$\int_{\delta\omega} u \, dz = \iint_{\omega} du \wedge dz \quad (4.1)$$

oppure possiamo osservare che $du \wedge dz = \frac{\partial u}{\partial \bar{z}} d\bar{z} \wedge dz = 2i \frac{\partial u}{\partial \bar{z}} dx \wedge dy$ e quindi scrivere in quest'altro modo:

$$\int_{\delta\omega} u \, dz = 2i \iint_{\omega} \frac{\partial u}{\partial \bar{z}} \, dx \wedge dy = \iint_{\omega} \frac{\partial u}{\partial \bar{z}} \, d\bar{z} \wedge dz \quad (4.2)$$

(La frontiera $\delta\omega$ è orientata in modo che ω giaccia alla sua sinistra.)

Una conseguenza immediata delle formule trovate sopra è che se u è analitica in ω e $u \in C^{(1)}(\bar{\omega})$ allora

$$\int_{\delta\omega} u \, dz = 0.$$

Inoltre otteniamo quella che è chiamata *formula integrale generalizzata di Cauchy*.

Teorema 4.1.

Siano $u \in C^{(1)}(\bar{\omega})$ e $\xi \in \omega$, allora vale che:

$$u(\xi) = \frac{1}{2\pi i} \left[\int_{\delta\omega} \frac{u(z)}{z - \xi} \, dz + \iint_{\omega} \frac{\partial u}{\partial \bar{z}} \cdot \frac{1}{z - \xi} \, dz \wedge d\bar{z} \right] \quad (4.3)$$

(nota anche come *formula di Pompeiu*).

Dimostrazione. (Cenno.)

Sia $\omega_\epsilon = \{z \in \omega : |z - \xi| < \epsilon\}$, in cui $0 < \epsilon < \text{la distanza da } \xi \text{ a } \omega' = \mathbb{C} \setminus \omega$. Ora ricordo la precedente formula (4.2) e la applico alla funzione $\frac{u(z)}{z - \xi}$, poi osservo che $(z - \xi)^{-1}$ è analitica in ω_ϵ . Dunque:

$$\iint_{\omega_\epsilon} \frac{\partial u}{\partial \bar{z}} (z - \xi)^{-1} \, d\bar{z} \wedge dz = \int_{\delta\omega} u(z)(z - \xi)^{-1} \, d\bar{z} \wedge dz - \int_0^{2\pi} u(\xi + \epsilon e^{i\theta}) i \, d\theta$$

Dato che $(z - \xi)^{-1}$ è integrabile su ω e u è continua in ξ si ottiene la formula (4.3) mandando ϵ a 0. □

Teorema 4.2.

Sia μ una misura con supporto compatto in \mathbb{C} , allora l'integrale

$$u(\xi) = \int (z - \xi)^{-1} d\mu(z)$$

definisce una funzione analitica e $C^{(\infty)}$ fuori dal supporto di μ .

In ogni insieme aperto ω dove $d\mu = (2\pi i)^{-1} \varphi dz \wedge \bar{z}$ per una qualche $\varphi \in C^{(k)}(\omega)$, vale che $u \in C^{(k)}(\omega)$ e $\partial u / \partial \bar{z} = \varphi$ per $k \geq 1$.

Dimostrazione. Che u stia in $C^{(\infty)}$ fuori dal supporto K di μ è evidente per il fatto che $(z - \xi)^{-1}$ è una funzione di (z, ξ) in $C^{(\infty)}$, con $z \in K$ e $\xi \in K' = \mathbb{C} \setminus K$, e per il fatto che $\partial(z - \xi)^{-1} / \partial \bar{\xi} = 0$ per $\xi \neq z$; l'analiticità segue direttamente derivando sotto il segno di integrale.

Per provare la seconda affermazione per prima cosa assumo che $\omega = \mathbb{R}^2$ e, dopo un cambiamento di variabili, posso scrivere:

$$u(\xi) = -\frac{1}{2\pi i} \iint \frac{\varphi(\xi - z)}{z} dz \wedge d\bar{z}.$$

Visto che z^{-1} è integrabile su ogni insieme compatto, è legittimo derivare sotto il segno di integrale fino a k volte e gli integrali ottenuti sono continui. Quindi $u \in C^{(k)}$ e

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial \bar{\xi}} &= -\frac{1}{2\pi i} \iint \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{\xi}} (\xi - z) z^{-1} dz \wedge d\bar{z} = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \iint \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{\xi}} (z) (z - \xi)^{-1} dz \wedge d\bar{z}. \end{aligned}$$

Un'applicazione del teorema (4.1) con u al posto di φ e ω uguale a un disco contenente il supporto di φ permette di ottenere $\partial u / \partial \bar{\xi} = \varphi$. Infine, se ω è arbitrario, si può scegliere, per un qualsiasi $z_0 \in \omega$, una funzione $\psi \in C_0^{(k)}(\omega)$ che vale 1 in un intorno V di z_0 .

Se ora definisco $\mu_1 = \psi \mu$ e $\mu_2 = (1 - \psi) \mu$ posso scrivere $u = u_1 + u_2$ con

$$u_j(\xi) = \int (z - \xi)^{-1} d\mu_j(\xi).$$

Dato che $\mu_1 = (2\pi i)^{-1} \psi \varphi dz \wedge d\bar{z}$ e $\psi \varphi \in C_0^{(k)}(\mathbb{R}^2)$ vale che $u_1 \in C^{(k)}$ e $\partial u_1 / \partial \bar{\xi} = \psi \varphi$. Dato che μ_2 si annulla in V segue che $u \in C^{(k)}(V)$ e che $\partial u / \partial \bar{\xi} = \varphi$ in V . La dimostrazione è ora completa. \square

Teorema 4.3.

Se u è analitica su $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : |z| < r\}$, con $r > 0$, allora

$$u(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} u^{(n)}(0) \cdot \frac{z^n}{n!}$$

con convergenza uniforme su ogni sottoinsieme compatto di Ω .

Dimostrazione. Siano $r_1 < r_2 < r$, allora si ha

$$u(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi|=r_2} \frac{u(\xi)}{\xi - z} d\xi \quad |z| \leq r_1. \quad (4.4)$$

Visto che

$$(\xi - z)^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n \xi^{-n-1} \quad |z| \leq r_1, \quad |\xi| = r_2$$

e che la serie è uniformemente e assolutamente convergente, il teorema segue integrando termine a termine, notando che dall'espressione (4.4) si ottiene

$$u^{(n)}(0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{|\xi|=r_2} u(\xi) \xi^{-n-1} d\xi.$$

□

4.2 Teorema di approssimazione di Runge

Dal teorema (4.3) segue, in particolare, che una funzione analitica in un disco può essere approssimata uniformemente da polinomi in z su un qualsiasi disco più piccolo. In particolare, ogni funzione intera può essere approssimata da polinomi uniformemente su ogni insieme compatto. Di seguito è dato un teorema generale di approssimazione.

Teorema 4.4. (Runge.) *Siano Ω un insieme aperto di \mathbb{C} e K un sottoinsieme compatto di Ω . Le condizioni seguenti su Ω e K sono equivalenti:*

- (a) *Ogni funzione analitica in un intorno di K può essere approssimata uniformemente su K da funzioni in $A(\Omega)$.*
- (b) *L'insieme aperto $\Omega \setminus K$ non ha alcuna componente relativamente compatta in Ω .*

(c) Per ogni $z \in \Omega \setminus K$ esiste una funzione $f \in A(\Omega)$ tale che

$$|f(z)| > \sup_K |f|. \quad (4.5)$$

OSSERVAZIONE: Il risultato è molto interessante perchè mette in relazione l'approssimazione di funzioni analitiche con una caratteristica topologica di K espressa nel punto (b) (il quale, intuitivamente, equivale a dire che K non ha “buchi”).

Dimostrazione. Per prima cosa dimostrerò che (a) \Rightarrow (b) e che (c) \Rightarrow (b).

- **se non vale (b)**

Per ipotesi, dunque, $\Omega \setminus K$ ha una componente O tale che \bar{O} è compatto e sta in Ω . Allora la frontiera di O è un sottoinsieme di K e per il principio del massimo vale

$$\sup_O |f| \leq \sup_{\delta O} |f| \leq \sup_K |f| \quad f \in A(\Omega) \quad (4.6)$$

il che contraddice (c).

Se fosse valido (a), per ogni funzione analitica in un intorno di K sarebbe possibile scegliere una successione $f_n \in A(\Omega)$ tale che $f_n \rightarrow f$ uniformemente su K . Applicando la formula (4.6) a $f_n - f_m$ si può provare che f_n converge uniformemente in \bar{O} a un limite F . Dunque $F = f$ sul bordo di O ed F è analitica in O e continua in \bar{O} . In particolare, si può scegliere $f(z) = 1/(z - \xi)$ con $\xi \in O$ e quindi avere $(z - \xi)F(z) = 1$ sul bordo di O ; perciò $(z - \xi)F(z) = 1$ in O . Ma questo è contraddittorio quando $z = \xi$, cioè nega (a).

- **(b) \Rightarrow (a)**

Basta mostrare che ogni misura μ su K che sia ortogonale ad $A(\Omega)$ è anche ortogonale ad ogni funzione f che sia analitica in un intorno di K (e questo sarà una conseguenza del teorema di Hahn-Banach). Sia

$$\varphi(\xi) = \int \frac{1}{z - \xi} d\mu(z) \quad \xi \in K' = \mathbb{C} \setminus K$$

Per il teorema (4.2) φ è analitica in K' e quando $\xi \in \Omega'$ vale

$$\varphi^{(k)}(\xi) = k! \int (z - \xi)^{-k-1} d\mu(z) \quad \forall k$$

perché la funzione $z \mapsto (z - \xi)^{-k-1}$ è analitica in Ω se $\xi \in \Omega'$. Quindi $\varphi = 0$ in ogni componente di K' che interseca Ω' .

Dato che $\int z^n d\mu(z) = 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e $(z - \xi)^{-1}$ può essere sviluppata come serie di potenze in z che converge uniformemente in K se $|\xi| > \sup_K |z|$, vale pure che $\varphi = 0$ nella componente senza bordo di K' . Adesso l'ipotesi che valga (b) garantisce che $\Omega \setminus K$ non abbia componenti relativamente compatte in Ω , quindi si può concludere che $\varphi = 0$ in K' .

Scelgo ora una funzione $\psi \in C_0^{(\infty)}(\omega)$, dove ω è un intorno di K nel quale f è analitica, tale che $\psi = 1$ in K . Allora vale

$$f(z) = \psi(z)f(z) = \frac{1}{2\pi i} \iint \frac{f(\xi)}{\xi - z} \cdot \frac{\partial \psi(\xi)}{\partial \bar{\xi}} d\xi \wedge d\bar{\xi} \quad z \in K.$$

Visto che $\partial \psi / \partial \bar{\xi} = 0$ in un intorno di K , invertendo l'ordine di integrazione si ottiene

$$\int f(z) d\mu(z) = -\frac{1}{2\pi i} \iint f(\xi) \varphi(\xi) \frac{\partial \psi(\xi)}{\partial \bar{\xi}} d\xi \wedge d\bar{\xi} = 0.$$

Quindi f può essere approssimata in K da funzioni di $A(\Omega)$, il che prova l'equivalenza tra (a) e (b).

• (b) \Rightarrow (c)

Ipotizzo valga (b) e prendo $z \in \Omega \setminus K$; considero poi un disco chiuso L con centro in z in modo che $L \subset \Omega \setminus K$. Allora le componenti di $\Omega \setminus (K \cup L)$ sono le stesse di quelle di $\Omega \setminus K$, tranne per il fatto che L è stato rimosso da una delle componenti. Quindi anche $K \cup L$ soddisfa (b). Data l'equivalenza tra (a) e (b) vale che la funzione, che è 0 in un intorno di K e 1 in un intorno di L , può essere approssimata uniformemente da funzioni in $A(\Omega)$. Dunque è possibile trovare una $f \in A(\Omega)$ tale che:

$$|f| < \frac{1}{2} \quad \text{in } K \quad |f - 1| < \frac{1}{2} \quad \text{in } L.$$

Ciò prova (c). □

Se K è un arbitrario sottoinsieme compatto di Ω , aperto di \mathbb{C} , definisco l'*inviluppo* \hat{K} (o **A(Ω)-inviluppo**) di K con

$$\hat{K} = \hat{K}_\Omega = \{z \in \Omega : |f(z)| \leq \sup_K |f| \quad \forall f \in A(\Omega)\}.$$

Scegliendo la funzione $f(z) = (z - \xi)^{-1}$, con $\xi \in \Omega'$, si ottiene

$$d(K, \Omega') = d(\hat{K}, \Omega')$$

dove d denota la distanza. Per ogni insieme compatto $K \subset \Omega$ l'involuppo \hat{K} è a sua volta un sottoinsieme compatto di Ω contenente K per il quale le ipotesi del teorema di approssimazione di Runge sono completamente soddisfatte.

E' anche possibile scegliere una successione crescente K_j di sottoinsiemi compatti di Ω tali che $K_j = \hat{K}_j$ e che ogni sottoinsieme compatto di Ω appartenga a un qualche K_j . Questa si esprime come **paracompattezza** di Ω .

Si può inoltre dare una descrizione di \hat{K} analoga alla condizione (b) del teorema (4.4).

4.3 Teorema di Mittag-Leffler

Per prima cosa bisogna dare una definizione di funzione meromorfa che è in qualche modo complicata, ma ha il vantaggio di poter essere usata anche nel caso di più variabili.

Per ogni $z \in \mathbb{C}$ sia A_z l'insieme delle classi di equivalenza delle funzioni f che sono analitiche in un qualche intorno di z , con la relazione di equivalenza $f \equiv g \Leftrightarrow f = g$ **in un intorno di z** .

Se f è analitica in un intorno di z indico con f_z la classe di equivalenza a cui appartiene f in A_z (chiamata **germe**).

Se f e g hanno stesso germe allora hanno anche lo stesso sviluppo di Taylor, il che porta a un isomorfismo tra A_z e $\mathbb{C}\{X\}$. Non è allora difficile verificare che A_z è un anello senza divisori dello 0 e quindi è possibile ottenere il campo quoziente M_z di A_z .

Definizione 4.1.

Una **funzione meromorfa** φ nell'insieme aperto $\Omega \subset \mathbb{C}$ è una mappa

$$\varphi : \Omega \longrightarrow \bigcup_z M_z$$

tale che $\varphi(z) \in M_z$ per ogni z e che per ogni punto di Ω esistono un intorno ω e delle funzioni f, g di $A(\omega)$ tali che $\varphi(z) = f_z/g_z$ quando $z \in \omega$.

L'insieme di tutte le funzioni meromorfe su Ω è indicato con $M(\Omega)$.

In particolare, se $F \in A(\Omega)$, la mappa $z \rightarrow F_z$ è una funzione meromorfa e, dato che differenti funzioni analitiche definiscono differenti funzioni meromorfe, si può identificare $A(\Omega)$ con un sottoinsieme di $M(\Omega)$. E' conveniente utilizzare la notazione φ_z invece che $\varphi(z)$ anche per un'arbitraria funzione meromorfa.

Le funzioni meromorfe formano un anello in cui ciascun elemento che non è identicamente nullo in alcuna componente di Ω possiede un inverso.

Ad ogni elemento $q \in M_\xi$ è possibile assegnare un valore $q(\xi)$ in ξ . Per fare ciò scelgo f e g analitiche in un intorno di ξ tale che $q = f_\xi/g_\xi$; dunque $g_\xi \neq 0$. Se $q = 0$ pongo $q(\xi) = 0$; quando invece $q(\xi) \neq 0$ è possibile scrivere $f(z) = (z - \xi)^n f_1(z)$ e $g(z) = (z - \xi)^m g_1(z)$, con $f_1(\xi)g_1(\xi) \neq 0$ ed f_1 e g_1 sono analitiche in un intorno di ξ . Ovviamente $n - m$ e $f_1(\xi)/g_1(\xi)$ dipendono solamente da q e non dalla scelta di f e g . Allora possiamo definire

$$q(\xi) = \begin{cases} \infty & n < m \\ f_1(\xi)/g_1(\xi) & n = m \\ 0 & n > m \end{cases} .$$

Se $\varphi \in M(\Omega)$ si ottiene una mappa

$$z \rightarrow \varphi_z(z) = F(z) \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$$

tale che F sia analitica nel complementare di un sottoinsieme discreto D di Ω e $1/F$ sia analitica in un intorno di D (in cui definisco $1/\infty = 0$).

Viceversa, se ho una funzione F con queste proprietà, una funzione meromorfa φ è definita da

$$\varphi_z = \begin{cases} F_z & z \notin D \\ 1/(1/F)_z & z \in D \end{cases}$$

e $\varphi(z) = F(z)$ per ogni z .

Dunque la definizione (4.1) è equivalente alla definizione classica di una funzione meromorfa, perchè la corrispondenza tra F e φ che è stata data è uno-a-uno. I punti in cui $F(z) = \infty$ sono i **poli** di F . D'ora in poi non si distinguerà più tra φ ed F .

Teorema 4.5.

Se F è meromorfa in un intorno di ξ allora esiste un intorno di ξ in cui vale

$$F(z) = \sum_{k=1}^n A_k (z - \xi)^{-k} + G(z)$$

con A_k costanti e G funzione analitica; tale rappresentazione è unica.

Se $F_\xi \neq 0$ esiste anche un'unica rappresentazione della forma

$$F(z) = (z - \xi)^n G(z)$$

con $G(\xi) \neq 0$ ed n è un intero. Se $n > 0$ si ha in ξ uno zero di ordine n ; se $n < 0$ si ha in ξ un polo di ordine $-n$.

Di seguito è discussa meglio la prima rappresentazione fornita dal teorema, mentre si trascurano la seconda perchè non richiesta per quanto seguirà.

Teorema 4.6. (Mittag-Leffler.) Sia $z_j, j = 1, 2, \dots$ una successione discreta di punti distinti nell'insieme aperto Ω di \mathbb{C} e sia f_j meromorfa in un intorno di z_j per ogni j . Allora esiste una funzione f meromorfa in Ω tale da essere analitica al di fuori dei punti z_j e tale che $f - f_j$ sia analitica in un intorno di z_j per ogni j .

Dimostrazione. Grazie al teorema (4.5) si può assumere che

$$f_j(z) = \sum_{k=1}^{n_j} A_{jk}(z - z_j)^{-k}.$$

Ora mi propongo di trovare delle funzioni $u_j \in A(\Omega)$ tali che la serie

$$f(z) = \sum_{k=1}^{+\infty} [f_j(z) - u_j(z)]$$

definisca una funzione f con le proprietà richieste. Per fare ciò scelgo una successione crescente di insiemi compatti $K_j \subset \Omega$ con $\hat{K}_j = K_j$ e $K_j \subset \overset{\circ}{K}_{j+1}$ in modo che ogni sottoinsieme compatto di Ω sia contenuto in un qualche K_j . Si può assumere che $z_k \notin K_j$ per $k \geq j$, dato che i punti z_k non hanno alcun punto di accumulazione in Ω . Questo intuitivamente significa che a K sono stati tappati i "buchi" prendendo al suo posto \hat{K} . Grazie al teorema di Runge, allora, è possibile scegliere delle funzioni $u_j \in A(\Omega)$ tali che

$$|f_j(z) - u_j(z)| < 2^{-j}$$

in K_j . Ma allora la serie

$$\sum_{j=k}^{+\infty} [f_j(z) - u_j(z)]$$

converge uniformemente su K_k a una funzione che è analitica nell'interno di K_k . Quindi la definizione di f data sopra è ben posta perché f così possiede le proprietà richieste. \square

Di seguito è data un'altra formulazione del teorema di Mittag-Leffler, che sostituisce la precedente nel caso di più variabili.

Teorema 4.7.

Sia $\Omega = \bigcup_j \Omega_j$, dove gli Ω_j sono insiemi aperti di \mathbb{C} . Se $f_j \in M(\Omega_j)$ e $(f_j - f_k) \in A(\Omega_j \cap \Omega_k)$ per ogni j e k , è possibile trovare una $f \in M(\Omega)$ tale che $f - f_j \in A(\Omega_j)$ per ogni j .

Il risultato appena esposto e quello che lo precede sono equivalenti al teorema seguente.

Teorema 4.8.

Per ogni $f \in C^{(\infty)}(\Omega)$ l'equazione $\partial u / \partial \bar{z} = f$ possiede una soluzione $u \in C^{(\infty)}(\Omega)$.

Dimostrazione. Scelgo una successione crescente di insiemi compatti $K_j \subset \Omega$ con $\hat{K}_j = K_j$ tali che ogni sottoinsieme compatto di Ω sia contenuto in un qualche K_j . Sia $\psi_j \in C_0^{(\infty)}(\Omega)$ in modo che valga 1 in un intorno di K_j e siano $\varphi_1 = \psi_1$, $\varphi_j = \psi_j - \psi_{j-1}$ per $j > 1$. Dunque $\varphi_j = 0$ in un intorno di K_{j-1} e $\sum_{j=1}^{+\infty} \varphi_j = 1$ in Ω . Grazie al teorema (4.2) è possibile trovare $u_j \in C^{(\infty)}(\mathbb{R}^2)$ tale che $\partial u_j / \partial \bar{z} = \varphi_j f$. Questo in particolare significa che u_j è analitica in un intorno di K_{j-1} . Grazie al teorema di Runge è inoltre possibile scegliere $v_j \in A(\Omega)$ tali che $|u_j - v_j| < 2^{-j}$ in K_{j-1} . Allora la serie

$$u = \sum_{j=1}^{+\infty} (u_j - v_j)$$

è uniformemente convergente su ogni insieme compatto di Ω . La somma da $l + 1$ a $+\infty$ è composta da termini che sono analitici vicini a K_l ed essa converge uniformemente su K_l a una funzione analitica nell'interno di K_l . Dunque $u \in C^{(\infty)}(\Omega)$ e, dato che $\partial u / \partial \bar{z}$ può essere ottenuto derivando termine a termine, vale

$$\frac{\partial u}{\partial \bar{z}} = \sum_{j=1}^{+\infty} \varphi_j f = f.$$

Ciò conclude la dimostrazione. \square

Di seguito è dato un teorema più forte del teorema (4.7).

Teorema 4.9.

Sia $\Omega = \bigcup_{j=1}^{+\infty} \Omega_j$ e siano $g_{jk} \in A(\Omega_j \cap \Omega_k)$ per $j, k = 1, 2, \dots$ tali da soddisfare la condizione

$$\begin{cases} g_{jk} = -g_{kj} \\ g_{jk} + g_{kl} + g_{lj} = 0 \end{cases} \quad \text{in } \Omega_j \cap \Omega_k \cap \Omega_l \quad \forall j, k, l. \quad (4.7)$$

Allora è possibile trovare $g_j \in A(\Omega_j)$ tale che

$$g_{jk} = g_k - g_j \quad \text{in } \Omega_j \cap \Omega_k \quad \forall j, k. \quad (4.8)$$

Dimostrazione. E' possibile scegliere una partizione dell'unità subordinata al ricoprimento $\{\Omega_j\}$, cioè è possibile scegliere delle funzioni φ_v e degli interi positivi i_v con $v = 1, 2, \dots$ tali che

1. $\varphi_v \in C_0^{(\infty)}(\Omega_{i_v})$.
2. Ogni funzione φ_v , ad esclusione di una quantità finita di esse, è identicamente nulla su ogni sottoinsieme compatto di Ω .
3. $\sum_{v=1}^{+\infty} \varphi_v = 1$ su Ω .

A questo punto posso definire le funzioni

$$g_k = h_k + u \quad \text{con} \quad \begin{cases} h_k = \sum_{v=1}^{+\infty} \varphi_v g_{i_v k} \\ u = \sum_{v=1}^{+\infty} \varphi_v g_{i_v} \end{cases}$$

Le funzioni h_k dipendenti dalle g_{jk} sono ben definite (si è posto $\varphi_v g_{i_v k} = 0$ fuori da Ω_{i_v}) e stanno in $C^{(\infty)}$. Inoltre vale quanto segue:

$$\begin{aligned} g_k - g_j &= h_k - h_j = \sum_{v=1}^{\infty} \varphi(g_{i_v k} - g_{i_v j}) = \sum_{v=1}^{\infty} \varphi(g_{j i_v} + g_{i_v k}) = \\ &= \sum_{v=1}^{\infty} \varphi(g_{j i_v} + g_{i_v k} + g_{k j}) + \sum_{v=1}^{\infty} \varphi g_{j k} = g_{jk} \sum_{v=1}^{\infty} \varphi = g_{jk}. \end{aligned}$$

Ciò implica che

$$\frac{\partial h_k}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial h_j}{\partial \bar{z}} \quad \text{in } \Omega_j \cap \Omega_k.$$

Dunque esiste una funzione $\psi \in C^{(\infty)}(\Omega)$ tale che

$$\psi = \frac{\partial h_k}{\partial \bar{z}} \quad \text{in } \Omega_k \quad \forall k.$$

Se ora scelgo u come soluzione dell'equazione

$$\frac{\partial u}{\partial \bar{z}} = -\psi$$

il che è possibile grazie al teorema (4.8), le funzioni $g_k = h_k + u$ possiedono tutte le proprietà richieste. \square

Ora dimostrerò che il teorema appena esposto implica il precedente teorema (4.7), così dimostrerò in un'altra maniera il teorema di Mittag-Leffler.

Dimostrazione. Con le notazioni del teorema (4.7) definisco $g_{jk} = f_j - f_k$; le ipotesi (4.7) del teorema (4.9) sono allora soddisfatte, quindi è possibile trovare $g_j \in A(\Omega_j)$ che soddisfi le equazioni

$$f_j - f_k = g_{jk} = g_k - g_j \quad \text{in } \Omega_j \cap \Omega_k \quad \forall j, k$$

Questo significa che $f_j + g_j = f_k + g_k$ in $\Omega_j \cap \Omega_k$. Dunque esiste una funzione meromorfa f su Ω tale che

$$f = f_j + g_j \quad \text{in } \Omega_j \quad \forall j$$

Visto che $f - f_j = g_j \in A(\Omega_j)$, ho dimostrato il teorema (4.7). \square

Capitolo 5

STORIA DEL TEOREMA

Il matematico svedese **Magnus Gösta Mittag-Leffler** (1846-1927) è ben noto per aver fondato gli *Acta Mathematica* (1882). Egli proseguì lo studio della teoria delle funzioni analitiche di Karl Weierstrass, di cui fu uno dei più insigni discepoli, ottenendo vari risultati, tra cui il teorema che prende il suo nome.

Tale risultato nasce nel 1876 nella sua prima forma come estensione del teorema di fattorizzazione di Weierstrass e viene affrontato da Mittag-Leffler con gli strumenti appresi da Weierstrass. In quell'anno infatti, come possiamo trovare nella tesi della Turner ([Tur] pag.14), Mittag-Leffler presentò il suo lavoro all'Accademia Reale Svedese delle Scienze (*Kungliga Vetenskapsakademien*) in cui pose il seguente problema: una funzione di carattere razionale (ossia *meromorfa*) è completamente definita dalle sue singolarità e dalle rispettive costanti, o è possibile trovare più di una funzione?

Il matematico svedese risolve la questione provando che una funzione meromorfa è caratterizzata dalle sue singolarità e dai rispettivi coefficienti di Laurent a meno di una funzione analitica, ovvero due funzioni che rispondono contemporaneamente al quesito differiscono tra loro di una funzione intera.

Da notare che già dalla prima formulazione è forte l'influenza di Weierstrass, in quanto Mittag-Leffler usò le sue definizioni di olomorfia, meromorfia e polo. (In realtà i termini effettivamente utilizzati all'epoca erano differenti, ma la sostanza non cambia.)

Bisogna specificare che questa prima forma del teorema contemplava un insieme infinito di singolarità *non essenziali* con una sola singolarità essenziale all'infinito.

Negli anni a seguire Mittag-Leffler lavorò per riuscire a generalizzare il risultato per insiemi in cui le singolarità essenziali fossero più di una e non necessariamente all'infinito.

Il suo lavoro suscitò fin da subito molto interesse tra i matematici francesi, in particolar modo nel suo vecchio compagno di studi Hermite, col quale aveva una fitta corrispondenza. Per quanto riguarda lo sviluppo del teorema, però, furono molto importanti i contatti con Cantor e il suo lavoro sugli insiemi infiniti. Nonostante le idee di Cantor risultassero estranee, se non addirittura sgradite, alla maggior parte dei matematici, Mittag-Leffler si mostrò invece interessato. Esse infatti gli fornirono gli strumenti necessari alla generalizzazione del teorema per insiemi di singolarità più generici, tanto da portare Mittag-Leffler a utilizzare alcune notazioni introdotte dal matematico tedesco come quella di insieme derivato.

Dopo otto anni di lavoro e corrispondenza con Hermite e Cantor, nel 1884 Mittag-Leffler pubblicò sugli *Acta Mathematica* la versione finale del teorema. Durante quegli anni Mittag-Leffler aveva pubblicato altri risultati che aggiungevano generalità al suo teorema iniziale, ma con quest'ultimo li raccoglie tutti in un unico enunciato di seguito esposto.

“Sia $Q = \{a_1, a_2, \dots, a_\nu, \dots\}$ un insieme isolato appartenente al dominio di una variabile x e siano

$$G_1\left(\frac{1}{x-a_1}\right), \quad G_2\left(\frac{1}{x-a_2}\right), \quad \dots, \quad G_\nu\left(\frac{1}{x-a_\nu}\right), \quad \dots$$

una serie di funzioni uniformi, monogene, intere e razionali o trascendenti in $\frac{1}{x-a_\nu}$, che si annullino per $\frac{1}{x-a_\nu} = 0$.

Allora è sempre possibile trovare un'espressione analitica che si comporti regolarmente intorno ai punti di $Q + Q'$ (cioè l'unione di Q col suo derivato, secondo la notazione Cantoriana) e che, per ogni valore di ν , possa essere sviluppata nella forma

$$G_\nu\left(\frac{1}{x-a_\nu}\right) + P(x-a_\nu),$$

dove P è una serie di potenze in $(x-a_\nu)$.”

In questa forma l'insieme derivato Q' rappresenta l'insieme delle singolarità essenziali e, come fa notare Mittag-Leffler stesso (si veda ancora [Tur], pag.59), se Q' possiede un solo elemento, nello specifico il punto all'infinito, si ritrova la prima espressione del teorema data nel 1876.

Appendice A

Grafici per le applicazioni

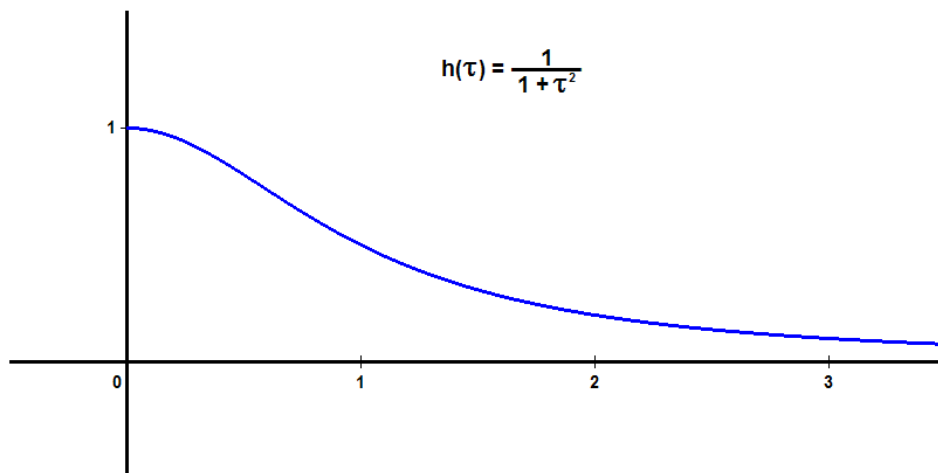
Di seguito sono esposti dei grafici che cercano di spiegare come si passa, nella prima applicazione del metodo dell'Henrici, da una serie a un integrale; più nello specifico, si era arrivati a dover studiare il seguente limite:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1 + \left(\frac{n}{|x|}\right)^2} \cdot \frac{1}{|x|} \right]$$

Si consideri allora la funzione

$$h(\tau) = \frac{1}{1 + \tau^2}$$

il cui grafico per le τ positive è dato di seguito.



Se ora mi proponessi di trovare l'area del sottografico della funzione nell'intervallo $[0, +\infty)$ tramite un integrale di Riemann dovrei, per prima cosa, considerare una partizione di tale intervallo. Allora considero la suddivisione

$$\{[x_n, x_{n+1}]\}_{n \in \mathbb{N}} = \left\{ \left[\frac{n}{x}, \frac{n+1}{x} \right] \right\}_{n \in \mathbb{N}}$$

dove x è un generico numero reale positivo.

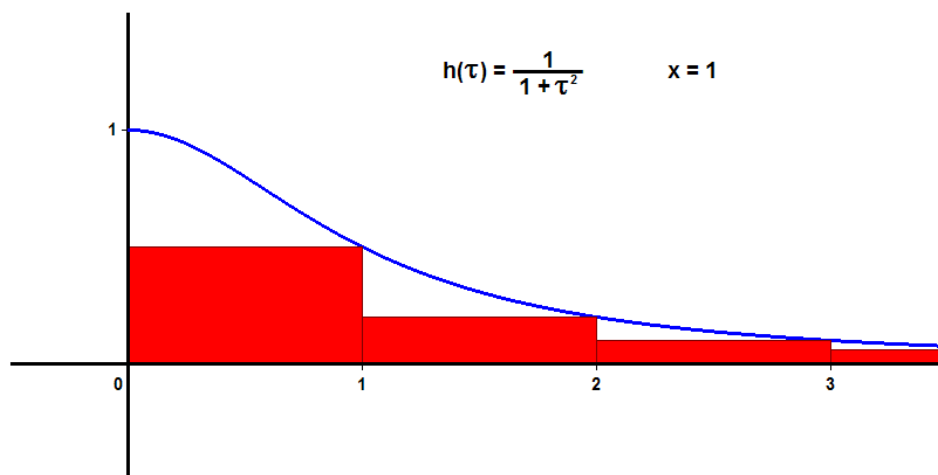
A questo punto definisco la serie $s_{inf}(x)$ come la *somma delle aree inferiori*, ovvero:

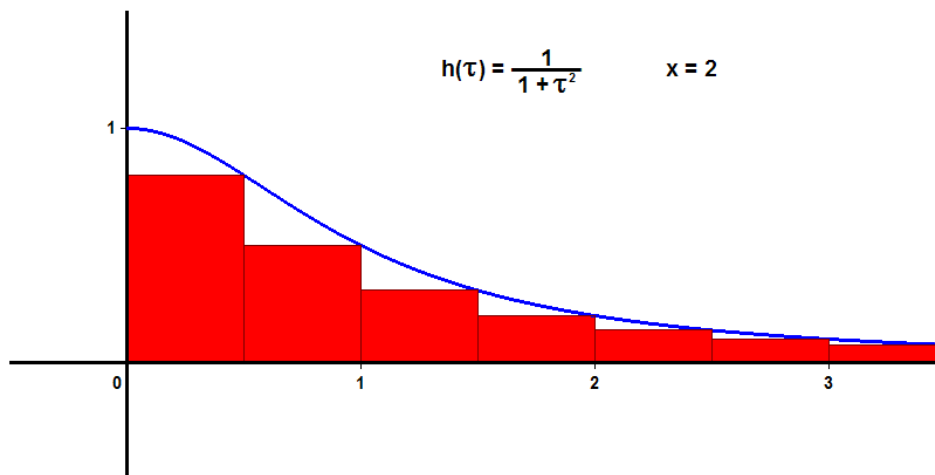
$$s_{inf}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (x_n - x_{n-1}) \cdot \min(h(x_n), h(x_{n-1}))$$

che posso riscrivere così:

$$s_{inf}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{1 + \left(\frac{n}{x}\right)^2}$$

Di seguito ci sono due grafici in cui sono rappresentate la funzione $h(x)$ e la serie $s_{inf}(x)$, ponendo $x = 1$ nel primo e $x = 2$ nel secondo.

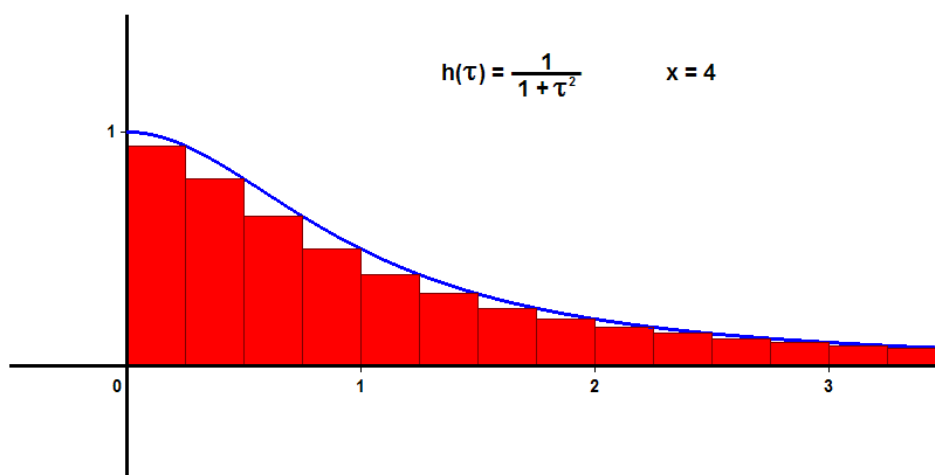


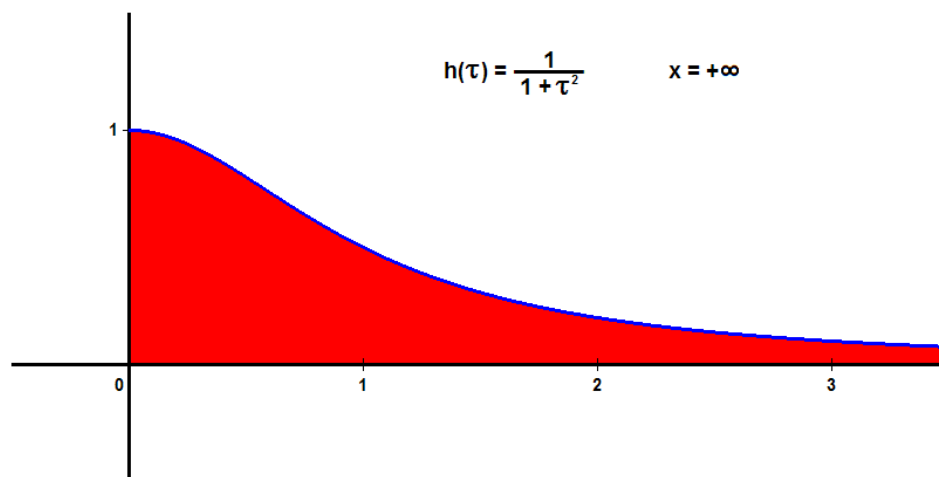
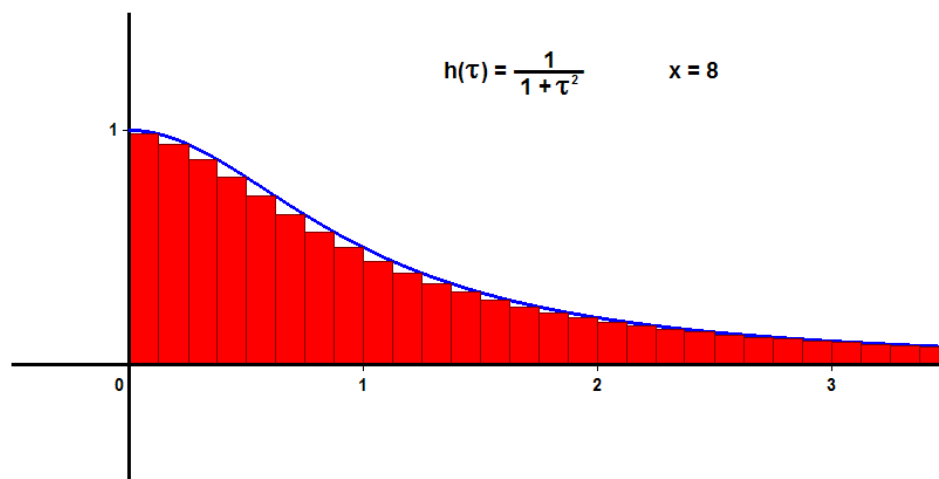


A questo punto posso dire che la continuità della funzione $h(x)$ garantisce anche la sua integrabilità secondo Riemann; ciò significa che la serie delle aree inferiori tende, man mano che si raffina la scomposizione dell'intervallo, a un valore definito appunto integrale della funzione. A questo punto allora

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} s(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+\tau^2} d\tau$$

Infine sono mostrati gli ultimi grafici per dare una spiegazione intuitiva di ciò che accade quando x tende a $+\infty$.





Bibliografia

- [Hen] Henrici Peter (1974), *Applied and Computational Complex Analysis*, vol. 1, New York, John Wiley & Sons, pag. 655-661.
- [Hor] Hörmander Lars (1990), *An Introduction to Complex Analysis in Several Variables*, New York, North-Holland, pag. 1-14.
- [Mit76] Mittag-Leffler Gösta (1876), *En metod att analytiskt framställa en funktion af rational karakter, hvilken blir oändlig alltid och endast uti vissa föreskrifna oändlighetspunkter, hvilkas konstanter äro påförhand angifna*, Stoccolma, pag. 3-16.
- [Mit77a] Mittag-Leffler Gösta (1877), *Om den analytiska framställningen af en funktion af rationel karakter med en godtyckligt vald gränspunkt*, Stoccolma, pag. 33-43.
- [Mit77b] Mittag-Leffler Gösta (1877), *Om den analytiska framställningen af en funktion af rationel karakter med ett ändligt antal godtyckligt föreskrifna gränspunkter*, Stoccolma, pag. 31-41.
- [Mit82] Mittag-Leffler Gösta (1882), Lettera a Charles Hermite del 13 Febbraio 1882, mai pubblicata, Istituto Mittag-Leffler.
- [Mit83] Mittag-Leffler Gösta (1883), Lettera a Georg Cantor del 27 Febbraio 1883, mai pubblicata, Istituto Mittag-Leffler.
- [Mit84a] Mittag-Leffler Gösta (1884), Lettera a Georg Cantor del 15 Maggio 1884, mai pubblicata, Istituto Mittag-Leffler.

- [Mit84b] Mittag-Leffler Gösta (1884), *Sur la représentation analytique des fonctions monogènes uniformes d'une variable indépendante*, Acta Mathematica, pag. 1-79.
- [Tur] Turner Laura E. (2007), *The Mittag-Leffler Theorem: The Origin, Evolution, and Reception of a Mathematical Result, 1876-1884*, <www.math.sfu.ca/~tarchi/turnermisc2007.pdf>.