

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

Scuola di Scienze
Corso di Laurea in Fisica

Aspetti topologici e geometrici del campo elettromagnetico: il monopolo di Dirac

Relatore:
Prof. Elisa Ercolessi

Presentata da:
Michele Lenzi

Sessione II
Anno Accademico 2013/2014

Sommario

Lo scopo della prima parte di questo elaborato è quello di mostrare come l'approccio geometrico, qui principalmente basato sull'algebra delle forme differenziali, possa semplificare la forma delle equazioni di Maxwell. Verificheremo che tutte le leggi dell'elettromagnetismo possono essere derivate da aspetti puramente geometrici e poi riconosciute come leggi fisiche imponendo le opportune restrizioni. Nella seconda parte trattiamo vari aspetti del monopolo magnetico. Prima lo introdurremo seguendo il percorso di Dirac, poi risolveremo analiticamente i problemi che esso presenta e alla fine inquadreremo i risultati che abbiamo ottenuto all'interno dell'algebra delle forme differenziali.

Indice

1	Geometria	9
1.1	Forme differenziali in R^n	9
1.2	Prodotto esterno	11
1.3	Derivata esterna	12
1.4	Operatore Hodge	12
1.5	Mappe	14
1.6	Lemma di Poincaré e suo inverso	16
1.7	Forme differenziali su varietà	16
1.8	Integrazione su varietà	17
1.8.1	Simplessi euclidei	17
1.8.2	Simplessi su varietà	19
1.8.3	Integrazione di forme	21
1.8.4	Teorema di Stokes	21
1.8.5	Teoremi di De Rham	22
2	Elettromagnetismo	25
2.1	Equazioni di Maxwell	25
2.2	Dall'algebra delle forme differenziali all'elettromagnetismo	26
2.2.1	Equazioni di Maxwell indipendenti dalla sorgente	27
2.2.2	Equazioni di Maxwell dipendenti dalle sorgenti	28
2.2.3	Teorema di Gauss	30
2.2.4	Altre leggi integrali classiche	32
3	Monopolo di Dirac	35
3.1	Monopolo di Dirac	35
3.1.1	Fasi non integrabili	36
3.1.2	Singularità nodali	39
3.2	Fase di Berry	41
3.3	Trattazione analitica	43
3.4	Trattazione geometrica	47

4 Conclusioni	51
A Fibrati	53

Introduzione

Da molti anni sappiamo che per poter descrivere un sistema fisico in modo generale, è necessario dotare lo spazio in cui questo esiste di una struttura geometrica e topologica. Infatti questa ci permette di trattare le grandezze che caratterizzano il sistema formalmente, identificandole come oggetti geometrici sui quali possiamo agire secondo regole ben precise, anche quando lo spazio non può essere considerato il normale spazio euclideo. Per questo c'è stato un grande lavoro che ha portato alla realizzazione di una struttura, che va sotto il nome di geometria differenziale. La possiamo pensare come un modello astratto, che prescinde da qualsiasi aspetto fisico, ma che imponendo le opportune condizioni può essere adattata a molti fenomeni reali. Non potremo chiaramente costruire tutto da zero, infatti ci focalizzeremo su una classe di oggetti fondamentali che sono chiamati forme differenziali, la cui nascita si deve alla necessità di generalizzare concetti come il lavoro di un campo vettoriale lungo un cammino o il flusso di questo campo attraverso una superficie. E' già evidente quindi il ruolo centrale delle forme differenziali nella teoria dell'integrazione che come sappiamo riguarda ogni ambito della fisica. L'idea è che se siamo in grado di maneggiare questi strumenti puramente matematici e geometrici, possiamo sfruttarli per descrivere vari fenomeni fisici.

L'esempio più evidente di come applicarli è dato dalla teoria dell'elettromagnetismo, che può essere riespressa in termini assolutamente generali per poi venire calata nuovamente nel mondo fisico applicandola a situazioni particolari. Questo ci viene già suggerito dal fatto che l'elettromagnetismo è interamente descritto dalle equazioni di Maxwell che nascondono proprio quei concetti di flusso e integrazione dei campi elettromagnetici su un cammino, la cui rappresentazione matematica è realizzata attraverso le forme differenziali. Infatti mostreremo che le equazioni di Maxwell possono essere interpretate come condizioni geometriche su forme differenziali e che imponendo opportune condizioni possiamo riprodurre le varie leggi dell'elettromagnetismo. Alla fine della prima parte avremo quindi inserito interamente la teoria elettromagnetica in un quadro geometrico che ne fornisce una descrizione compatta e completa.

Tutto questo sembra non portare nessun vantaggio oltre ad aver ottenuto una forma più semplice della teoria. Ma un contributo sostanziale di tutta questa struttura e in questo caso dell'algebra delle forme differenziali, lo abbiamo quando consideriamo sistemi che non possiamo più descrivere in uno spazio euclideo, ma che richiedono uno spazio più

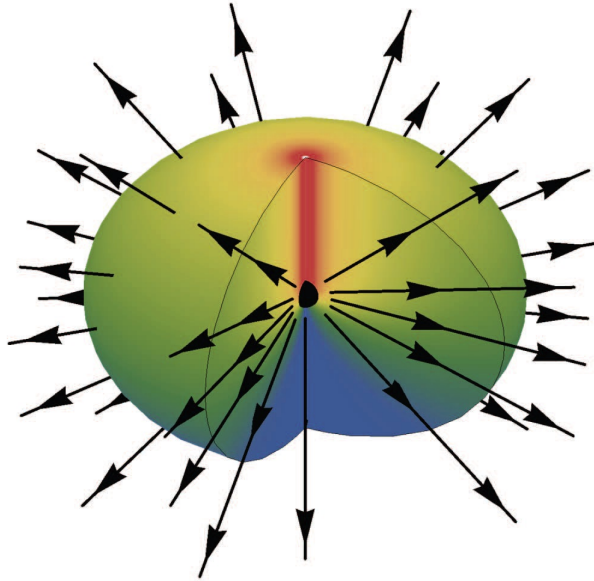


Figura 1: Immagine di un monopolo all'interno di un condensato di Bose-Einstein, [14]

generale detto varietà. Una varietà è uno spazio al quale possiamo localmente applicare le proprietà dello spazio euclideo, [3]. Il punto di forza della struttura geometrica che abbiamo costruito è che si adatta e generalizza anche a questi spazi. Per cui i concetti di forma differenziale e la teoria dell'integrazione, definiti su queste varietà, permettono una descrizione di fenomeni più complessi rispetto all'elettromagnetismo classico, il cui spazio di esistenza sappiamo essere lo spazio di Minkowski \mathbb{R}^4 .

Anche in questo caso faremo un esempio esplicito e il nostro modello sarà quello del monopolo magnetico che apre però una serie di problemi che non riguardano solo aspetti geometrici. Perciò prima di poterlo inserire nel quadro geometrico bisogna introdurre il contesto in cui emerge.

Infatti la ricerca del monopolo magnetico ha inizio nel 1931 quando Dirac per primo propose delle argomentazioni puramente teoriche sulla sua esistenza, [7]. Egli avanzò l'ipotesi dell'esistenza dei monopoli magnetici nell'ambito dei suoi studi sulle fasi non integrabili. Nel tentativo di renderle compatibili con la teoria della meccanica quantistica, si accorse che le condizioni di consistenza delle fasi non integrabili con il resto della teoria suggerivano proprio la presenza di monopoli magnetici in situazioni particolari. Questo avrebbe conseguenze fisiche importanti perché porterebbe a una formula teorica per la quantizzazione della carica elettrica, direttamente legata a quella della carica magnetica. Negli anni successivi ci furono vari tentativi di comprendere il fenomeno sia da un punto di vista teorico che sperimentale. Il monopolo creava dei problemi nel trovare un potenziale

vettore globalmente definito associato al suo campo magnetico (che è radiale in perfetta simmetria con il campo elettrico di una carica elettrica puntiforme). La soluzione teorica fu trovata proprio interpretando geometricamente il problema [10, 12], cioè sfruttando la fibrazione di Hopf, che casualmente fu scoperta nello stesso anno di pubblicazione dell'articolo di Dirac. Questa è stata utilizzata negli anni '80 per trovare il potenziale vettore regolare associato al monopolo magnetico e di conseguenza le equazioni del moto di una particella sotto l'effetto del suo campo. Resta aperto il problema dell'osservazione sperimentale.

La possibile esistenza di monopoli magnetici è stata esplorata in vari campi e sistemi particolari, inclusi la fisica delle particelle oltre il modello standard e la cosmologia. In anni recenti, ci sono stati vari tentativi di realizzarli in sistemi di materia condensata [13, 14], come nel contesto dei cristalli liquidi, dell'effetto Hall quantistico anomalo e in sistemi di spin esotici, ma non si è ancora arrivati a una osservazione sperimentale diretta.

Capitolo 1

Geometria

In questo capitolo si vogliono dare gli strumenti matematici necessari per poter realizzare la costruzione di cui si è parlato precedentemente. L'elemento fondamentale sono le forme differenziali esterne [1, 2], la cui nascita si deve a una generalizzazione al caso multidimensionale di concetti come il lavoro di un campo su un cammino e il flusso di un fluido (o ancora un campo) attraverso una superficie.

1.1 Forme differenziali in \mathbb{R}^n

Chiamiamo *1-forma* una funzione lineare $\omega : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ definita sui vettori,

$$\omega(\lambda_1 \xi_1 + \lambda_2 \xi_2) = \lambda_1 \omega(\xi_1) + \lambda_2 \omega(\xi_2)$$

$$\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \quad \forall \xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}^n$$

La somma di tutte le 1-forme diventa spazio lineare se si definiscono la somma di forme e la moltiplicazione per un numero :

$$(\omega_1 + \omega_2)(\xi) = \omega_1(\xi) + \omega_2(\xi)$$

$$(\lambda\omega)(\xi) = \lambda\omega(\xi)$$

Lo spazio delle 1-forme su \mathbb{R}^n è anche esso n-dimensionale (vedremo tra poco perché) e si chiama anche spazio duale, $(\mathbb{R}^n)^*$. Le 1-forme in \mathbb{R}^n , dato un sistema prescelto di coordinate x_1, \dots, x_n , si scrivono univocamente come:

$$\omega = \sum_i^n a_i(\mathbf{x}) dx^i, \quad a_i(\mathbf{x}) \text{ funzioni regolari} \quad (1.1)$$

Allo stesso modo definiamo le *2-forme* come funzioni $\omega^2 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ definite sulle coppie di vettori, bilineari e antisimmetriche :

$$\begin{aligned}\omega^2(\lambda_1\xi_1 + \lambda_2\xi_2, \lambda_3) &= \lambda_1\omega^2(\xi_1, \xi_3) + \lambda_2\omega^2(\xi_2, \xi_3) \\ \omega^2(\xi_1, \xi_2) &= -\omega^2(\xi_2, \xi_1)\end{aligned}$$

$$\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, \xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}^n$$

Possiamo avere già ora un'interpretazione geometrica delle 2-forme considerando l'area orientata $S(\xi_1, \xi_2)$ del parallelogrammo di spigoli ξ_1, ξ_2 :

$$S(\xi_1, \xi_2) = \begin{vmatrix} \xi_{11} & \xi_{12} \\ \xi_{21} & \xi_{22} \end{vmatrix}$$

dove

$$\begin{aligned}\xi_1 &= \xi_{11}e_1 + \xi_{12}e_2 \\ \xi_2 &= \xi_{21}e_1 + \xi_{22}e_2\end{aligned}$$

con $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ è la base ortonormale orientata di \mathbb{R}^2 . Infatti è facile vedere che tale area è una 2-forma.

Siamo ora in grado di definire anche le *p-forme* come funzioni definite su p vettori, p volte lineari e antisimmetriche.

$$\begin{aligned}\omega(\lambda_1\xi'_1 + \lambda_2\xi''_1, \xi_2, \dots, \xi_p) &= \lambda_1\omega(\xi'_1, \xi_2, \dots, \xi_p) + \lambda_2\omega(\xi''_1, \xi_2, \dots, \xi_p) \\ \omega(\xi_{i_1}, \dots, \xi_{i_p}) &= (-1)^\nu \omega(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_p)\end{aligned}$$

dove la prima proprietà vale per ognuno dei p argomenti e dove

$$\nu = \begin{cases} 0, & \text{se la permutazione } i_1, \dots, i_p \text{ è pari,} \\ 1, & \text{se la permutazione } i_1, \dots, i_p \text{ è dispari.} \end{cases}$$

Come prima è immediato vedere che il volume orientato di un parallelepipedo di spigoli ξ_1, \dots, ξ_p in \mathbb{R}^n è una p -forma :

$$V(\xi_1, \dots, \xi_n) = \begin{vmatrix} \xi_{11} & \dots & \xi_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \xi_{n1} & \dots & \xi_{nn} \end{vmatrix}$$

dove $\xi_i = \xi_{i1}\mathbf{e}_1 + \dots + \xi_{in}\mathbf{e}_n$ con $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ una base in \mathbb{R}^n .

L'insieme di tutte le p -forme in \mathbb{R}^n diventa uno spazio lineare se dotato delle operazioni di composizione e prodotto per un numero:

$$\begin{aligned}
(\omega_1 + \omega_2)(\boldsymbol{\xi}) &= \omega_1(\boldsymbol{\xi}) + \omega_2(\boldsymbol{\xi}), \\
\xi &= \{\xi_1, \dots, \xi_p\}, \quad \xi_i \in \mathbb{R}^n, \\
(\lambda\omega)(\boldsymbol{\xi}) &= \lambda\omega(\boldsymbol{\xi}).
\end{aligned}$$

Questo spazio ha dimensione finita e pari a:

$$C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

1.2 Prodotto esterno

Ora introduciamo l'operazione di prodotto esterno tra forme. Definiamo il prodotto esterno di qualunque p-forma ω^p , per una qualunque q-forma ω^q , l'operazione con le proprietà:

1. anticommutativa : $\omega^p \wedge \omega^q = (-1)^{pq} \omega^q \wedge \omega^p$
2. distributiva : $(\lambda_1 \omega_1^p + \lambda_2 \omega_2^p) \wedge \omega^q = \lambda_1 \omega_1^p \wedge \omega^q + \lambda_2 \omega_2^p \wedge \omega^q$
3. associativa : $(\omega^p \wedge \omega^q) \wedge \omega^r = \omega^p \wedge (\omega^q \wedge \omega^r)$

E il risultato $\omega^p \wedge \omega^q$ sarà una p+q forma. Perciò possiamo ora definire operativamente il prodotto esterno tramite la sua azione su p+q vettori $\xi_1, \dots, \xi_p, \xi_{p+1}, \dots, \xi_{p+q}$:

$$(\omega^p \wedge \omega^q)(\xi_1, \dots, \xi_{p+q}) = \sum (-1)^\nu \omega^p(\xi_{i_1}, \dots, \xi_{i_p}) \omega^q(\xi_{j_1}, \dots, \xi_{j_q})$$

dove $i_1 < \dots < i_p, j_1 < \dots < j_q$. $(i_1, \dots, i_p, j_1, \dots, j_q)$ è una permutazione dei numeri $(1, 2, \dots, p+q)$ e ν è 1 se questa permutazione è dispari, 0 se è pari. Questa operazione ci permette di costruire le p-forme come prodotto di p 1-forme. Perciò dalla (1.1) avremo:

$$\omega^p = \sum a_H(\mathbf{x}) dx^{h_1} \wedge \dots \wedge dx^{h_p} \quad (1.2)$$

Dove $H = h_1, \dots, h_p$, $1 \leq h_1 < h_2 < \dots < h_p \leq n$, $a_H(\mathbf{x})$ sono funzioni regolari.

1.3 Derivata esterna

E' necessario ora definire un'altra operazione sulle forme differenziali, quella di derivazione esterna. Se denotiamo $\mathbf{F}^p(\mathbf{U})$ l'insieme di tutte le p-forme su un dominio aperto \mathbf{U} di \mathbb{R}^n affermiamo che esiste un unico operatore che trasforma p-forme in (p+1)-forme:

$$d: \mathbf{F}^p(\mathbf{U}) \longrightarrow \mathbf{F}^{p+1}(\mathbf{U})$$

tale che:

1. $d(\omega + \eta) = d\omega + d\eta$
2. $d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta + (-1)^{(\text{deg}\omega)}\omega \wedge d\eta$
3. Per ogni ω , $d(d\omega) = 0$
4. Per ogni funzione f ,

$$df = \sum \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i$$

Ora se ω è una p -forma,

$$\begin{aligned} \omega &= \sum a_H(\mathbf{x}) dx^H \\ d\omega &= \sum d(a_H dx^H) \\ &= \sum da_H \wedge dx^H \\ &= \sum \frac{\partial a_H}{\partial x^j} dx^j \wedge dx^H \end{aligned}$$

E notiamo subito che $d\omega$ è una $(p+1)$ -forma.

1.4 Operatore Hodge

In questa sezione introduciamo un'ulteriore operazione, $*$, che ci sarà utile quando riformuleremo l'elettromagnetismo. Supponiamo di avere uno spazio vettoriale n -dimensionale \mathbf{L} dotato di prodotto interno, (α, β) , ovvero una funzione su $\mathbf{L} \times \mathbf{L}$ che è :

- (i) Lineare in ogni variabile,
- (ii) Simmetrico : $(\alpha, \beta) = (\beta, \alpha)$,
- (iii) Non degenere : se per α fissato, $(\alpha, \beta) = 0$ per ogni β . allora $\alpha = 0$.

e includiamo nella definizione anche prodotti interni con autovalori negativi, ma non degeneri come nel caso del prodotto interno di Lorentz. L'operatore $*$ sarà una trasformazione lineare da $\mathbf{F}^p(\mathbf{L})$ a $\mathbf{F}^{n-p}(\mathbf{L})$, e dipenderà dal prodotto interno e dall'orientazione (cambia segno se si cambia orientazione). Notiamo che l'orientazione di \mathbf{L} determina una definita base ortonormale di $\mathbf{F}^n(\mathbf{L})$, $\sigma_1, \dots, \sigma_n$, rispetto alla quale l'elemento di volume è σ . Ora fissiamo λ in $\mathbf{F}^p(\mathbf{L})$, e sia μ un elemento di $\mathbf{F}^{n-p}(\mathbf{L})$. Allora la mappa:

$$\mu \longrightarrow \lambda \wedge \mu$$

è una trasformazione lineare da $\mathbf{F}^{n-p}(\mathbf{L})$ allo spazio unidimensionale $\mathbf{F}^n(\mathbf{L})$ e potremo scrivere

$$\lambda \wedge \mu = f_\lambda(\mu)\sigma$$

dove $f_\lambda(\mu)$ è un funzionale lineare su $\mathbf{F}^{n-p}(\mathbf{L})$. Ora sappiamo che esiste un'unica (n-p)-forma, che denotiamo con $*\lambda$ tale che

$$\lambda \wedge \mu = (*\lambda, \mu)\sigma$$

Questa equazione definisce una mappa $*$ che rappresenta la relazione di dualità tra p-forme e (n-p)-forme in uno spazio n-dimensionale. Per poter calcolare $*\lambda$ per i generatori di $\mathbf{F}^p(\mathbf{L})$, grazie alla linearità, è sufficiente farlo nel caso in cui $\lambda = \sigma^1 \wedge \dots \wedge \sigma^p$. Ora consideriamo un insieme K di n-p indici. Allora

$$\lambda \wedge \sigma^K = (*\lambda, \sigma^K)\sigma$$

Notiamo però che il lato sinistro dell'equazione si annulla a meno che $K = p + 1, p + 2, \dots, n$, quindi si avrà

$$*\lambda = c\sigma^{p+1} \wedge \dots \wedge \sigma^n$$

Resta da determinare la costante c, prendendo $K = p + 1, \dots, n$

$$\begin{aligned} \lambda \wedge \sigma^K &= \sigma^1 \wedge \dots \wedge \sigma^n = \sigma \\ &= c(\sigma^{p+1} \wedge \dots \wedge \sigma^n, \sigma^{p+1} \wedge \dots \wedge \sigma^n)\sigma \\ &= \pm c\sigma \end{aligned}$$

Da cui otteniamo

$$c = \pm 1$$

Perciò che definiti $H = 1, \dots, p$ e $K = p + 1, \dots, n$, abbiamo dimostrato che

$$*\sigma^H = (\sigma^K, \sigma^K)\sigma^K$$

Ora poiché sappiamo che $\sigma^K \wedge \sigma^H = (-1)^{p(n-p)}\sigma^H \wedge \sigma^K$, deduciamo che

$$*\sigma^K = (-1)^{p(n-p)}(\sigma^H, \sigma^H)\sigma^H$$

quindi

$$\begin{aligned} *(*\sigma^H) &= (-1)^{p(n-p)}(\sigma^H, \sigma^H)(\sigma^K, \sigma^K)\sigma^H \\ &= (-1)^{p(n-p)}(\sigma, \sigma)\sigma^H \\ &= (-1)^{p(n-p)+(n-t)/2}\sigma^H \end{aligned}$$

dove t è la segnatura. Ora consideriamo un esempio che ci sarà utile dopo. Prendiamo infatti lo spazio \mathbb{R}^4 con coordinate normalizzate in modo tale che $(dx^i, dx^i) = 1, (dt, dt) = -1$. In questo caso abbiamo $n = 4, t = 2$ e considerando le due forme ($p = 2$), avremo

$$* (dx^i dt) = dx^j dx^k \quad (1.3)$$

e

$$* (dx^j dx^k) = -dx^i dt \quad (1.4)$$

Ora che abbiamo introdotto questo operatore possiamo definire un'altro oggetto, che ci sarà utile in seguito, che si chiama *forma co-differenziale*. La forma co-differenziale di una p -forma σ è la $(p-1)$ -forma

$$\bar{d}\sigma = (-1)^{p-1} * d * \sigma$$

che gode delle seguenti proprietà

$$(i) \quad \bar{d} * \sigma = * d\sigma$$

$$(ii) \quad * \bar{d}\sigma = d * \sigma$$

1.5 Mappe

Studiamo ora il caso in cui abbiamo un dominio \mathbf{U} in \mathbf{R}^m , uno dominio \mathbf{V} in \mathbb{R}^n e ϕ è una mappa regolare da \mathbf{U} a \mathbf{V} :

$$\phi : \mathbf{U} \longrightarrow \mathbf{V}$$

Denotiamo con x^1, \dots, x^m le coordinate di \mathbb{R}^m e con y^1, \dots, y^n quelle di \mathbb{R}^n . Allora potremo scrivere:

$$y^i = y^i(x^1, \dots, x^m)$$

dove le funzioni $y^i(\mathbf{x})$ sono regolari. Consideriamo ora una funzione reale g su \mathbf{V}

$$g : \mathbf{V} \longrightarrow \mathbb{R}$$

Possiamo combinarla con ϕ per ottenere una funzione da \mathbf{U} a \mathbf{R} che scriviamo come

$$\phi^* g = g \circ \phi : \mathbf{U} \longrightarrow \mathbb{R}$$

Perciò

$$\phi^* : \mathbf{F}^0(\mathbf{V}) \longrightarrow \mathbf{F}^0(\mathbf{U})$$

Dalla mappa ϕ da \mathbf{U} a \mathbf{V} abbiamo costruito naturalmente una mappa indotta ϕ^* da $\mathbf{F}^0(\mathbf{V})$ a $\mathbf{F}^0(\mathbf{U})$. Vogliamo estenderla per definire una mappa che porti le p -forme su \mathbf{V} in p -forme su \mathbf{U} :

$$\phi^* : \mathbf{F}^p(\mathbf{V}) \longrightarrow \mathbf{F}^p(\mathbf{U})$$

In realtà ci basterà trovarla per le 1-forme perché per le proprietà del prodotto esterno sarà poi facile estenderla a tutte le p-forme. L'idea di base è la sostituzione delle funzioni coordinate :

$$dy^i = \sum \frac{\partial y^i}{\partial x^j} dx^j$$

Perciò se $\omega = \sum a_i(\mathbf{y}) dy^i$ è una 1-forma su \mathbf{V} , poniamo :

$$\phi^*\omega = \sum a_i(\mathbf{y}) \frac{\partial y^i}{\partial x^j} dx^j$$

Quindi ora abbiamo :

$$\phi^* : \mathbf{F}^1(\mathbf{V}) \longrightarrow \mathbf{F}^1(\mathbf{U})$$

E estendendo la definizione con il prodotto esterno otterremo la mappa che porta le p-forme su \mathbf{V} in p-forme su \mathbf{U} . Ora vediamo le proprietà di base di ϕ^* .

(i) $\phi^*(\omega + \eta) = \phi^*\omega + \phi^*\eta$

(ii) $\phi^*(\omega \wedge \eta) = (\phi^*\omega) \wedge (\phi^*\eta)$

(iii) Se ω è una p-forma su \mathbf{V} ,

$$d(\phi^*\omega) = \phi^*(d\omega)$$

(iv) Se $\phi : \mathbf{U} \longrightarrow \mathbf{V}$ e $\psi : \mathbf{V} \longrightarrow \mathbf{W}$, allora

$$(\psi \circ \phi)^* = \phi^* \circ \psi^*$$

1.6 Lemma di Poincaré e suo inverso

Il lemma di Poincaré afferma che se applichiamo due volte la derivata esterna a una qualsiasi forma differenziale, il risultato sarà nullo, cioè $d(d\omega) = 0$. Questo nello spazio tridimensionale ha due diverse interpretazioni:

$$\text{curl}(\text{grad } f) = 0$$

$$\text{div}(\text{curl } \mathbf{v}) = 0$$

In realtà il risultato più importante è quello inverso, che come dimostrato in [1], che afferma che *se ω è una p-forma e $d\omega = 0$, allora esiste una (p-1)-forma α tale che $d\alpha = \omega$* . In modo più preciso si può dire che se abbiamo un dominio \mathbf{U} in \mathbb{R}^n che può essere deformato a un punto P, una (p+1)-forma ω su \mathbf{U} tale che $d\omega = 0$, allora esiste una p-forma α su \mathbf{U} tale che $\omega = d\alpha$. Questo dimostra che un campo vettoriale con rotore nullo deve essere un gradiente e che un campo vettoriale con divergenza nulla deve essere un rotore di qualche quantità. Questo risultato sarà molto utile nell'interpretare l'elettromagnetismo in termini di questi oggetti geometrici.

1.7 Forme differenziali su varietà

Abbiamo visto che le forme differenziali sono funzioni che agiscono sui vettori per dare numeri reali. Ma se lo spazio che consideriamo non è semplicemente \mathbb{R}^n , ma è una varietà n-dimensionale le cose si complicano un po'. Per varietà n-dimensionale intendiamo uno spazio che non è necessariamente euclideo o un suo aperto, ma che localmente sia assimilabile ad esso. In termini più formali questo vuol dire che la varietà n-dimensionale consiste di uno spazio \mathbf{M} e una collezione di intorno di coordinate locali $\mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2, \dots$ tali che ogni punto di \mathbf{M} sia in almeno uno di questi \mathbf{U} . Su ogni \mathbf{U} dato un sistema di coordinate x^1, \dots, x^n tale che il valore delle coordinate

$$(x^1(P), \dots, x^n(P)),$$

dove P varia in \mathbf{U} , forma un dominio aperto in \mathbb{R}^n .

Ora dobbiamo poter definire dei vettori su questa varietà, e perciò vogliamo costruire lo spazio tangente a un punto P , cioè lo spazio n-dimensionale formato da tutti i vettori tangenti al punto P . Ma su uno spazio non banale non è così immediato definire dei vettori come lo è in uno spazio euclideo (vedi [3]). Definiamo il vettore tangente \mathbf{v} in P come l'operatore

$$\mathbf{v} : \mathbf{F}^0(\mathbf{M}) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \mathbf{F}^0(\mathbf{M}) \text{ spazio di tutte le funzioni reali regolari su } \mathbf{M}$$

che soddisfa

$$(i) \quad \mathbf{v}(af + bg) = a\mathbf{v}f + b\mathbf{v}g, \quad a, b \text{ costanti}$$

$$(ii) \quad \mathbf{v}(f \cdot g) = g(P)\mathbf{v}f + f(P)\mathbf{v}g$$

A questo punto dato un sistema di coordinate locali x^1, \dots, x^n , valide in un intorno di P , ognuno degli operatori

$$\mathbf{e}_i = \left. \frac{\partial}{\partial x_i} \right|_P$$

è un vettore tangente come si può facilmente verificare. E si può anche dimostrare che questi vettori formano una base dello spazio tangente in P , [3]. Perciò, ora che abbiamo definito i vettori sulla varietà, le 1-forme differenziali in un punto P di una varietà n-dimensionale \mathbf{M} saranno definite come applicazioni lineari che agiscono sui vettori in P . Le 1-forme differenziali costituiranno lo spazio duale allo spazio dei vettori e data la base \mathbf{e}_i possiamo trovare una base naturale per lo spazio duale, attraverso la relazione di dualità

$$dx^j(\mathbf{e}_i) = \delta_i^j$$

Scrivendo le 1-forme in questa base otteniamo la loro espressione

$$\sum a_i dx^i, \quad a_i \text{ costanti}$$

una volta dato un sistema di coordinate (x^i) valido in un intorno \mathbf{U} che includa P . Tramite il prodotto esterno potremo quindi costruire anche le p -forme in P . Ora abbiamo gli strumenti per poter definire le *p-forme in \mathbf{M}* come un assegnamento di una p -forma ad ogni punto di P di \mathbf{M} . Le operazioni di prodotto esterno e derivata esterna sono ancora valide sulla varietà \mathbf{M} , poichè basta definirle punto per punto in ogni sistema di coordinate locali. Perciò possiamo recuperare tutte le regole viste nelle sezioni precedenti. L'unica eccezione è il lemma di Poincarè, infatti vedremo che non è sempre verificato. I risultati in merito a ciò si avranno dopo aver discusso la teoria dell'integrazione su varietà.

1.8 Integrazione su varietà

Nelle seguenti sezioni descriveremo l'insieme di oggetti geometrici necessari per discutere l'integrazione di forme su varietà e infine definiremo l'integrale, [1].

1.8.1 Simplessi euclidei

In questa sezione costruiremo i blocchi che comporranno lo spazio di integrazione delle forme. Questi li chiameremo *simplessi* e sono definiti nel modo seguente:

- *0-simpleso* : un singolo punto P_0 .
- *1-simpleso* : un segmento chiuso direzionato su una retta; è completamente determinato dalla coppia ordinata di vertici (P_0, P_1) .
- *2-simpleso* : un triangolo chiuso con vertici presi in un ordine definito; è completamente determinato dalla tripla ordinata di vertici (P_0, P_1, P_2) .
- *3-simpleso* : determinato dal quartetto ordinato di vertici (P_0, P_1, P_2, P_3) , dove i vertici sono quattro punti dei quali tre non possono essere allineati. \vdots
- *n-simpleso* : un involucro convesso chiuso di $n+1$ punti presi in ordine definito (P_0, \dots, P_n)

L'insieme geometrico così generato consiste di tutti i punti :

$$P = t_0 P_0 + \dots + t_n P_n, \quad t_i \geq 0, \quad \sum t_i = 1$$

che può essere interpretato come l'insieme dei centri dei sistemi di masse non negative t_0, \dots, t_n , posizionate in P_0, \dots, P_n . Definiamo il *bordo* ∂S di un n -simpleso S come una somma formale di $(n-1)$ -simplessi con coefficienti interi:

$$\partial(P_0, P_1, \dots, P_n) = \sum_{i=0}^n (P_0, P_1, \dots, P_{i-1}, P_{i+1}, \dots, P_n).$$

E' più facile interpretare questa formula nei casi a dimensioni più basse:

$$\begin{aligned}\partial(P_0, P_1) &= P_1 - P_0 \\ \partial(P_0, P_1, P_2) &= (P_1, P_2) - (P_0, P_2) + (P_0, P_1) \\ \partial(P_0, P_1, P_2, P_3) &= (P_1, P_2, P_3) - (P_0, P_2, P_3) + (P_0, P_1, P_3) - (P_0, P_1, P_2)\end{aligned}$$

Una n -catena invece è una somma formale, con coefficienti reali:

$$\mathbf{c} = \sum a^i \mathbf{s}_i$$

Dove a^i sono costanti e \mathbf{s}_i sono n -simplessi. Il suo bordo è definito da:

$$\partial \mathbf{c} = \sum a_i (\partial \mathbf{s}_i).$$

Un risultato generale è che il bordo di ogni catena ha bordo sempre nullo. E' facile verificarlo dimostrandolo per i simplessi e osservando che cercando il bordo del bordo di ogni faccia ricorre due volte con segno opposto. Sappiamo anche che tra due n -simplessi esiste un'unica corrispondenza lineare che ne conserva l'ordine dei vertici:

$$\sum_{i=0}^n t_i P_i \longleftrightarrow \sum_{i=0}^n t_i Q_i \quad (t_i \geq 0, \sum_{i=0}^n t_i = 1)$$

Per poter definire gli integrali è comodo avere un modello standard dei simplessi di ogni dimensione, per questo si definisce l' n -simpleso standard

$$\bar{\mathbf{s}}^n = (R_0, \dots, R_n) \tag{1.5}$$

come il simpleso in \mathbb{R}^n i cui vertici sono:

$$\begin{aligned}R_0 &= 0 \\ R_1 &= (1, 0, \dots, 0) \\ R_2 &= (0, 1, 0, \dots, 0) \\ &\vdots \\ R_n &= (0, 0, \dots, 0, 1)\end{aligned}$$

Ora siamo in grado di definire l'integrale di una n -forma ω definita su un dominio \mathbf{U} di \mathbb{R}^n , che includa $\bar{\mathbf{s}}^n$, ovvero vogliamo definire l'integrale:

$$\int_{\bar{\mathbf{s}}^n} \omega$$

E lo facciamo sapendo che ω si scrive in modo unico

$$\omega = A(x^1, \dots, x^n) dx^1 \dots dx^n$$

con le variabili nel loro ordine naturale. Ora poniamo:

$$\int_{\bar{s}^n} \omega = \int_{\bar{s}^n} A(x^1, \dots, x^n) dx^1 \dots dx^n$$

L'integrale al membro destro è ora un integrale n-dimensionale ordinario.

1.8.2 Semplessi su varietà

Ora vogliamo definire un semplice in una varietà \mathbf{M} . Prendiamo come definizione preliminare l'oggetto $(\mathbf{s}^n, \mathbf{U}, \phi)$, dove \mathbf{s}^n è un n-simplesso euclideo, \mathbf{U} è un intorno aperto in \mathbb{R}^n , e ϕ è una mappa regolare di \mathbf{U} in \mathbf{M} . Se abbiamo un secondo semplice $(\mathbf{t}^n, \mathbf{V}, \psi)$, diremo che i due sono equivalenti se :

$$\phi\left(\sum_{i=0}^n t_i P_i\right) = \psi\left(\sum_{i=0}^n t_i Q_i\right) \quad (t_i \geq 0, \sum_{i=0}^n t_i = 1).$$

Ovvero basta impostare la corrispondenza lineare che preserva l'ordine dei vertici tra \mathbf{s}^n e \mathbf{t}^n . In questo modo avremo che se P e Q sono due punti corrispondenti allora $\phi(P) = \psi(Q)$. Ora diremo che la totalità di questi semplici preliminari, che in questo modo sono in realtà tutti identificati con uno solo, costituisce un singolo oggetto che chiamiamo *n-simplesso in M*, σ^n . Ora vogliamo definirne il bordo, e sapendo che il bordo di ognuno dei semplici preliminari si può scrivere come:

$$\partial \mathbf{s}^n = \sum \pm \mathbf{t}_i$$

Se ora facciamo una restrizione di ϕ alle varie facce \mathbf{t}_i , estendendo ognuna un po' in \mathbf{U} in modo da formare intorni aperti \mathbf{V}_i , possiamo definire le facce di σ^n come:

$$\tau_i = (t_i, \mathbf{V}_i, \phi)$$

e di conseguenza il bordo:

$$\partial \sigma^n = \sum \pm \tau_i$$

Questa è una (n-1)-catena in \mathbf{M} , infatti definiamo le n-catene in \mathbf{M} come la somma di n-simplessi moltiplicati per delle costanti

$$\mathbf{c} = \sum_i a_i \sigma_i^n \tag{1.6}$$

Ora chiamiamo $\mathbf{C}_n(\mathbf{M})$ l'insieme di tutte le n-catene in \mathbf{M} e poniamo

$$\partial \mathbf{c} = \sum a_i \partial \sigma_i^n$$

Perciò

$$\partial : \mathbf{C}_n(\mathbf{M}) \longrightarrow \mathbf{C}_{n-1}(\mathbf{M}) \quad (1.7)$$

Segue direttamente dal corrispondente caso euclideo una proprietà base di questo operatore di bordo che è:

$$\partial(\partial \mathbf{c}) = 0$$

Ora definiamo:

- *ciclo* : una catena \mathbf{z} il cui bordo è nullo $\partial \mathbf{z} = 0$
- *bordo* : una catena \mathbf{b} che è il bordo di una catena con una dimensione in più $\mathbf{b} = \partial \mathbf{c}$

E' chiaro che ogni bordo è un ciclo.

1.8.3 Integrazione di forme

Ora siamo in grado di definire l'integrazione avendo definito lo spazio su cui si integra. Perciò immaginiamo di avere una varietà di qualsiasi dimensione \mathbf{M} , una p-forma su \mathbf{M} e una p-catena su \mathbf{M} . Vogliamo definire:

$$\int_{\mathbf{c}} \omega$$

Per prima cosa esplicitiamo la catena come in (1.6) e scriviamo :

$$\int_{\mathbf{c}} \omega = \sum a_i \int_{\sigma_i} \omega$$

così rimane da definire l'integrale su un p-simplesso σ che possiamo rappresentare come abbiamo già visto :

$$(\bar{\mathbf{s}}^p, \mathbf{U}, \phi)$$

dove $\bar{\mathbf{s}}^p$ è il p-simplesso standard in \mathbb{R}^n e ϕ è una mappa regolare dell'intorno \mathbf{U} in \mathbf{M} . Ora sapendo che

$$\phi : \mathbf{U} \longrightarrow \mathbf{M} \Rightarrow \phi^* : \mathbf{F}^p(\mathbf{M}) \longrightarrow \mathbf{F}^p(\mathbf{U})$$

scriveremo :

$$\int_{\sigma} \omega = \int_{\bar{\mathbf{s}}^p} \phi^* \omega \quad (1.8)$$

Questo è un oggetto che sappiamo integrare perché è un ordinario integrale su uno spazio a dimensione p contenuto in \mathbb{R}^n . Quindi sappiamo integrare una p-forma su un p-simplesso e di conseguenza su una p-catena

1.8.4 Teorema di Stokes

Ora mostriamo un risultato molto importante della teoria dell'integrazione che ci permette di trasformare un integrale in uno su uno spazio a una dimensione in più. Sia ω una p -forma su una varietà \mathbf{M} e \mathbf{c} una $(p+1)$ -catena. Allora

$$\int_{\partial\mathbf{c}} \omega = \int_{\mathbf{c}} d\omega \quad (1.9)$$

Ma non proveremo qui questo risultato, dimostrato da Flanders [1].

1.8.5 Teoremi di De Rham

Ora ci poniamo il problema che era già stato introdotto con il Lemma di Poincarè, ovvero se abbiamo una forma ω su \mathbf{M} tale che $d\omega = 0$, allora essa è esatta? Ovvero esiste una forma η tale che $\omega = d\eta$? Nel caso del lemma di Poincarè questa valeva se consideravamo un dominio U che era contraibile fino ad un punto. Ma se qui prendiamo la varietà:

$$\mathbf{M} = \mathbb{R}^3 - 0$$

che non è contraibile ad un punto cosa possiamo dire? per le 1-forme potremo ancora affermare che esista una 0-forma f tale che $\omega = df$ dove :

$$f(\mathbf{x}) = \int_{(1,0,0)}^{\mathbf{x}} \omega$$

che per il teorema di Stokes è indipendente dal cammino seguito. Ma se invece abbiamo una 2-forma α possiamo affermare che una 1-forma λ tale che $\alpha = d\lambda$ esiste solo localmente ma non globalmente. Infatti se esistesse globalmente nel nostro caso avremmo

$$\int_{\mathbf{S}^2} \alpha = \int_{\mathbf{S}^2} d\lambda = \int_{\partial\mathbf{S}^2} \lambda = 0$$

poiché la sfera \mathbf{S}^2 non ha bordo. Ma non c'è nessuna ragione per cui si dovrebbe annullare a priori l'integrale di α su \mathbf{S}^2 . Infatti il risultato corretto è che se α è una 2-forma su $\mathbf{M} = \mathbb{R}^3 - 0$ con $d\alpha = 0$ e :

$$\int_{\mathbf{S}} \alpha = 0$$

Questo risultato, generalizzato, è contenuto nei teoremi di De Rham. Definiamo:

- *forma chiusa* : una forma differenziale ω su \mathbf{M} tale che $d\omega = 0$.
- *forma esatta* : una forma differenziale ω su \mathbf{M} tale che $\omega = d\eta$ per qualche η in \mathbf{M} .

Chiaramente ogni forma esatta è chiusa. Ora sia ω una p -forma chiusa. A ogni p -ciclo \mathbf{z} in \mathbf{M} corrisponde un *periodo* di ω

$$\int_{\mathbf{z}} \omega$$

e se \mathbf{z} è un bordo, $\mathbf{b} = \partial\mathbf{c}$ allora il periodo è nullo:

$$\int_{\mathbf{b}} \omega = \int_{\partial\mathbf{c}} \omega = \int_{\mathbf{c}} d\omega = \int_{\mathbf{c}} 0 = 0$$

PRIMO TEOREMA DI DE RHAM. *Una forma chiusa è esatta se e solo se tutti i suoi periodi si annullano*

SECONDO TEOREMA DI DE RHAM. *Supponiamo che a ogni p -ciclo \mathbf{z} sia assegnato un numero, $per(\mathbf{z})$, tale che ogni volta che $\sum a_i \mathbf{z}_i = \text{bordo}$, allora $\sum a_i per(\mathbf{z}_i) = 0$. Allora esiste una forma chiusa ω su \mathbf{M} che ha periodi assegnati:*

$$\int_{\mathbf{z}} \omega = per(\mathbf{z}), \quad \text{per ogni } p\text{-ciclo } \mathbf{z}$$

Capitolo 2

Elettromagnetismo

In questa sezione sfrutteremo gli oggetti di cui abbiamo parlato finora per inserire la teoria dell'elettromagnetismo in questo contesto geometrico, verificando la sua perfetta compatibilità con esso. Mostriamo questa connessione in due direzioni, prima assumendo le equazioni di Maxwell e riscrivendole in termini geometrici [1], poi ricaveremo le leggi dell'elettromagnetismo partendo da aspetti puramente geometrici [6].

2.1 Equazioni di Maxwell

Le equazioni di Maxwell scritte nel formalismo vettoriale [4, 5] sono:

$$(i) \quad \text{curl } \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (\text{Legge di Faraday dell'induzione})$$

$$(ii) \quad \text{curl } \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (\text{Legge di Ampère})$$

$$(iii) \quad \text{div } \mathbf{E} = 4\pi\rho \quad (\text{Conservazione della carica elettrica})$$

$$(iv) \quad \text{div } \mathbf{B} = 0 \quad (\text{Non esistenza del vero magnetismo})$$

dove c è la velocità della luce. ora possiamo riscrivere queste equazioni nel linguaggio delle forme differenziali, ponendo

$$\alpha = (E_1 dx^1 + E_2 dx^2 + E_3 dx^3)(c dt) + (B_1 dx^2 dx^3 + B_2 dx^3 dx^1 + B_3 dx^1 dx^2)$$

$$\beta = -(B_1 dx^1 + B_2 dx^2 + B_3 dx^3)(c dt) + (E_1 dx^2 dx^3 + E_2 dx^3 dx^1 + E_3 dx^1 dx^2)$$

$$\gamma = (J_1 dx^2 dx^3 + J_2 dx^3 dx^1 + J_3 dx^1 dx^2) dt - \rho dx^1 dx^2 dx^3.$$

Ricordando le (1.3), (1.4), è facile osservare che $\beta = *\alpha$. Quindi le (i) e (iv) diventano

$$d\alpha = 0 \tag{2.1}$$

e le (ii) e (iii)

$$d\beta + 4\pi\gamma = 0 \tag{2.2}$$

Se applichiamo l'operatore d a quest'ultima equazione otteniamo l'equazione di conservazione della carica, che scritta in forma vettoriale è

$$\operatorname{div} \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

Possiamo poi dedurre l'esistenza del potenziale vettore dalle conoscenze che ora abbiamo sulla teoria delle forme. Infatti grazie al Lemma di Poincarè sappiamo che $d\alpha = 0$ implica che in una regione dello spazio-tempo che possa essere deformata a un punto, esiste una 1-forma λ tale che

$$d\lambda = \alpha$$

Introduciamo quindi il potenziale vettore \mathbf{A} e uno scalare A_0 scrivendo

$$\lambda = A_1 dx^1 + A_2 dx^2 + A_3 dx^3 + A_0 c dt$$

Riscrivendo in forma vettoriale l'equazione $d\lambda = \alpha$ ci dà le relazioni tra potenziale vettore e scalare e i vettori campo magnetico ed elettrico

$$\operatorname{curl} \mathbf{A} = \mathbf{B}$$

$$\operatorname{grad} A_0 - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = \mathbf{E}$$

2.2 Dall'algebra delle forme differenziali all'elettromagnetismo

In questa sezione verificheremo che le equazioni di Maxwell possono essere ricavate come condizioni geometriche su forme differenziali generiche nello spazio \mathbb{R}^4 (vedi [6]). Enunceremo perciò due teoremi che realizzano esattamente questa relazione tra forme differenziali e equazioni di Maxwell. Da qui fino a quando avremo recuperato tutte le leggi dell'elettromagnetismo lavoreremo sempre sullo spazio \mathbb{R}^4 , le cui coordinate sono (x^1, x^2, x^3, x^4) , ovvero lo spazio di Minkowski, con segnatura della metrica $t = 1$. Inoltre i vettori \mathbf{E} e \mathbf{B} indicheranno triple di funzioni appartenenti a $C^\infty(\mathbb{R}^4)$.

2.2.1 Equazioni di Maxwell indipendenti dalla sorgente

Teorema 2.2.1.0.1. Una 2-forma differenziale $\omega_{(\mathbf{E},\mathbf{B})}$ in \mathbb{R}^4 , è chiusa ($d\omega_{(\mathbf{E},\mathbf{B})} = 0$), se e solo se sono verificate le due seguenti equazioni di Maxwell:

- $\text{curl } \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial x^4} = 0$
- $\text{div } \mathbf{B} = 0$

Dimostrazione. La due forma $\omega_{(\mathbf{E},\mathbf{B})}$ in \mathbb{R}^4 sappiamo che si scrive

$$\omega_{(\mathbf{E},\mathbf{B})} = (E_1 dx^1 + E_2 dx^2 + E_3 dx^3) \wedge dx^4 + B_1 dx^2 \wedge dx^3 + B_2 dx^3 \wedge dx^1 + B_3 dx^1 \wedge dx^2$$

Per dimostrare il teorema calcoliamo esplicitamente $d\omega_{(\mathbf{E},\mathbf{B})} = 0$ e verifichiamo che questo si avvera solo quando valgono le due equazioni di Maxwell.

$$\begin{aligned} d\omega &= \frac{\partial E_1}{\partial x^2} dx^2 \wedge dx^1 \wedge dx^4 + \frac{\partial E_1}{\partial x^3} dx^3 \wedge dx^1 \wedge dx^4 + \\ &+ \frac{\partial E_2}{\partial x^1} dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^4 + \frac{\partial E_2}{\partial x^3} dx^3 \wedge dx^2 \wedge dx^4 + \\ &+ \frac{\partial E_3}{\partial x^1} dx^1 \wedge dx^3 \wedge dx^4 + \frac{\partial E_3}{\partial x^2} dx^2 \wedge dx^3 \wedge dx^4 + \\ &+ \frac{\partial B_1}{\partial x^1} dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 + \frac{\partial B_1}{\partial x^4} dx^4 \wedge dx^2 \wedge dx^3 + \\ &+ \frac{\partial B_2}{\partial x^2} dx^2 \wedge dx^3 \wedge dx^1 + \frac{\partial B_2}{\partial x^4} dx^4 \wedge dx^3 \wedge dx^1 + \\ &+ \frac{\partial B_3}{\partial x^3} dx^3 \wedge dx^1 \wedge dx^2 + \frac{\partial B_3}{\partial x^4} dx^4 \wedge dx^1 \wedge dx^2 = \\ &= dx^2 \wedge dx^3 \wedge dx^4 \left(\frac{\partial E_3}{\partial x^2} - \frac{\partial E_2}{\partial x^3} + \frac{\partial B_1}{\partial x^4} \right) + \\ &+ dx^3 \wedge dx^1 \wedge dx^4 \left(\frac{\partial E_1}{\partial x^3} - \frac{\partial E_3}{\partial x^1} + \frac{\partial B_2}{\partial x^4} \right) + \\ &+ dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^4 \left(\frac{\partial E_2}{\partial x^1} - \frac{\partial E_1}{\partial x^2} + \frac{\partial B_3}{\partial x^4} \right) + \\ &+ dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \left(\frac{\partial B_1}{\partial x^1} + \frac{\partial B_2}{\partial x^2} + \frac{\partial B_3}{\partial x^3} \right) = 0. \end{aligned}$$

□

Si può immediatamente vedere che sostituendo la coordinata x^4 con cdt , e identificando le triple \mathbf{E} e \mathbf{B} con i campi elettrico e magnetico, si ottengono esattamente le equazioni di Maxwell (i) e (iv). Inoltre è facile notare che $\omega = \alpha$, perciò la condizione di chiusura è in realtà analoga alla 2.1.

2.2.2 Equazioni di Maxwell dipendenti dalle sorgenti

Sia $\omega_{(\mathbf{E},\mathbf{B})}$ sempre una 2-forma differenziale in \mathbb{R}^4 . Diremo che in generale la sua forma co-differenziale sarà una 1-forma

$$\eta_{(\mathbf{J},\rho)} = J_1 dx^1 + J_2 dx^2 + J_3 dx^3 - \rho dx^4$$

dove ρ è una funzione di classe $C^\infty(\mathbb{R}^4)$ e $\mathbf{J} = (J_1, J_2, J_3)$ con J_i appartenenti a $C^\infty(\mathbb{R}^4)$.

Teorema 2.2.2.0.1. *Sia $\omega_{(\mathbf{E},\mathbf{B})}$ una 2-forma su \mathbf{R}^4 e sia $\eta_{(\mathbf{J},\rho)}$ una qualsiasi 1-forma sempre su \mathbb{R}^4 . Le condizioni necessarie e sufficienti affinché si possa avere $\bar{d}\omega = \eta$ sono le due seguenti equazioni di Maxwell*

- $\text{curl } \mathbf{B} - \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial x^4} = \mathbf{J}$

- $\text{div } \mathbf{E} = \rho$

Dimostrazione. Anche in questo caso è sufficiente calcolare esplicitamente $\bar{d}\omega$

$$\begin{aligned}
\bar{d}\omega &= - * d * \omega = - * d[-(B_1 dx^1 + B_2 dx^2 + B_3 dx^3) \wedge dx^4 + \\
&\quad + E_1 dx^2 \wedge dx^3 + E_2 dx^3 \wedge dx^1 + E_3 dx^1 \wedge dx^2] = \\
&= \left[-\frac{\partial B_1}{\partial x^2} dx^2 \wedge dx^1 \wedge dx^4 - \frac{\partial B_1}{\partial x^3} dx^3 \wedge dx^1 \wedge dx^4 \right. \\
&\quad - \frac{\partial B_2}{\partial x^1} dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^4 - \frac{\partial B_2}{\partial x^3} dx^3 \wedge dx^2 \wedge dx^4 \\
&\quad - \frac{\partial B_3}{\partial x^1} dx^1 \wedge dx^3 \wedge dx^4 - \frac{\partial B_3}{\partial x^2} dx^2 \wedge dx^3 \wedge dx^4 \\
&\quad + \frac{\partial E_1}{\partial x^1} dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 + \frac{\partial E_1}{\partial x^4} dx^4 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \\
&\quad + \frac{\partial E_2}{\partial x^2} dx^2 \wedge dx^3 \wedge dx^1 + \frac{\partial E_2}{\partial x^4} dx^4 \wedge dx^3 \wedge dx^1 \\
&\quad \left. + \frac{\partial E_3}{\partial x^3} dx^3 \wedge dx^1 \wedge dx^2 + \frac{\partial E_3}{\partial x^4} dx^4 \wedge dx^1 \wedge dx^2 \right] = \\
&= - * \left\{ dx^2 \wedge dx^3 \wedge dx^4 \left[-\left(\frac{\partial B_3}{\partial x^2} - \frac{\partial B_2}{\partial x^3} \right) + \frac{\partial E_1}{\partial x^4} \right] + \right. \\
&\quad + dx^3 \wedge dx^1 \wedge dx^4 \left[-\left(\frac{\partial B_1}{\partial x^3} - \frac{\partial B_3}{\partial x^1} \right) + \frac{\partial E_2}{\partial x^4} \right] + \\
&\quad + dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^4 \left[-\left(\frac{\partial B_2}{\partial x^1} - \frac{\partial B_1}{\partial x^2} \right) + \frac{\partial E_3}{\partial x^4} \right] + \\
&\quad \left. + dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \left[\frac{\partial E_1}{\partial x^1} + \frac{\partial E_2}{\partial x^2} + \frac{\partial E_3}{\partial x^3} \right] \right\} = \\
&= \left[dx^1 \left(\frac{\partial B_3}{\partial x^2} - \frac{\partial B_2}{\partial x^3} - \frac{\partial E_1}{\partial x^4} \right) + \right. \\
&\quad + dx^2 \left(\frac{\partial B_1}{\partial x^3} - \frac{\partial B_3}{\partial x^1} - \frac{\partial E_2}{\partial x^4} \right) + \\
&\quad + dx^3 \left(\frac{\partial B_2}{\partial x^1} - \frac{\partial B_1}{\partial x^2} - \frac{\partial E_3}{\partial x^4} \right) - \\
&\quad \left. - dx^4 \left(\frac{\partial E_1}{\partial x^1} + \frac{\partial E_2}{\partial x^2} + \frac{\partial E_3}{\partial x^3} \right) \right] = \\
&= \eta
\end{aligned}$$

Si vede immediatamente che l'uguaglianza è verificata se valgono le due equazioni di Maxwell \square

Come prima possiamo facilmente recuperare le due equazioni di Maxwell, (ii) e (iii), e verificare che $\bar{d}\omega = \eta$ coincide con (2.2).

2.2.3 Teorema di Gauss

Il teorema di Gauss è un caso particolare del teorema di Stokes che abbiamo visto precedentemente, più precisamente è il caso un cui integriamo su una varietà tridimensionale V il cui bordo è ∂V . L'applicazione di questo teorema e sfruttando la teoria dell'integrazione vista nelle sezioni precedenti, possiamo recuperare la forma integrale delle equazioni di Maxwell che ci dà un'interpretazione fisica più diretta. Per dimostrare i risultati che ci si presenteranno è utile introdurre un lemma

Lemma 2.2.3.0.1. *Sia V una varietà n -dimensionale ($1 \leq n \leq 4$) orientabile in \mathbb{R}^4 e sia ω una $(5-n)$ -forma in \mathbb{R}^4 . Allora vale*

$$\int_V *d\omega = \int_{\partial V} *\omega$$

Dimostrazione. Dall'uguaglianza $*d\omega = d*\omega$ otteniamo

$$\int_V *d\omega = \int_V d*\omega$$

Ora per il teorema di Stokes abbiamo il risultato cercato

$$\int_V *d\omega = \int_{\partial V} *\omega$$

□

Enunciamo ora il teorema di Gauss nel modo seguente

Teorema 2.2.3.0.1. *Sia V una varietà tridimensionale orientabile in \mathbb{R}^4 con bordo ∂V . Assumiamo inoltre che essa sia contenuta nella sottovarietà di \mathbb{R}^4 definita da $x^4 = \text{cost}$. Allora vale*

- 1) $\int_{\partial V} B_1 dx^2 \wedge dx^3 + B_2 dx^3 \wedge dx^1 + B_3 dx^1 \wedge dx^2 = 0$
- 2) $\int_{\partial V} J_1 dx^2 \wedge dx^3 + J_2 dx^3 \wedge dx^1 + J_3 dx^1 \wedge dx^2 = \frac{d}{dx^4} \int_V \rho dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3$

Dove la 1) ci dice che il flusso del campo magnetico attraverso la superficie ∂V è nullo a ogni istante di tempo fissato. La 2) ci dice che la corrente che attraversa la superficie ∂V è uguale alla variazione di carica all'interno di V , cioè è l'equazione di conservazione della carica elettrica.

Dimostrazione. Iniziamo con la dimostrazione della 1). Sappiamo che essendo V tridimensionale su ∂V che è bidimensionale integreremo delle 2-forme. Scriveremo la 2-forma in modo generico come abbiamo fatto finora e sfrutteremo il teorema di Stokes

$$d\omega_{(\mathbf{E},\mathbf{B})} = 0 \Rightarrow \int_V d\omega = \int_{\partial V} \omega = 0 \quad (2.3)$$

Esplicitando $\omega_{(\mathbf{E},\mathbf{B})}$ troveremo la condizione 1)

$$\int_{\partial V} (E_1 dx^1 + E_2 dx^2 + E_3 dx^3) \wedge dx^4 + \int_{\partial V} B_1 dx^2 \wedge dx^3 + B_2 dx^3 \wedge dx^1 + B_3 dx^1 \wedge dx^2 = 0 \quad (2.4)$$

Poiché su ∂V , $x^4 = cost$ il primo integrale sarà nullo e abbiamo così dimostrato l'equazione 1). Ora procediamo alla dimostrazione della 2) Considerando sempre la 2-forma $\omega_{(\mathbf{E},\mathbf{B})}$, per il lemma 2.2.3.0.1 abbiamo

$$\int_V * \bar{d}\omega = \int_{\partial V} *\omega$$

e applicando il teorema 2.2.2 possiamo scrivere

$$\int_V *\eta_{(\mathbf{J},\rho)} = \int_{\partial V} *\omega_{(\mathbf{E},\mathbf{B})}$$

Applicando la definizione dell'operatore hodge

$$\begin{aligned} *\eta_{(\mathbf{J},\rho)} &= (J_1 dx^2 \wedge dx^3 + J_2 dx^3 \wedge dx^1 + J_3 dx^1 \wedge dx^2) \wedge dx^4 - \rho dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \\ *\omega_{(\mathbf{E},\mathbf{B})} &= -(B_1 dx^1 + B_2 dx^2 + B_3 dx^3) \wedge dx^4 + E_1 dx^2 \wedge dx^3 + E_2 dx^3 \wedge dx^1 + E_3 dx^1 \wedge dx^2 \end{aligned}$$

Sapendo che V è una varietà con $x^4 = cost \Rightarrow dx^4 = 0$, i primi termini delle due forme appena scritte daranno risultato nullo se integrati, perciò resterà

$$\int_V \rho dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 = - \int_{\partial V} E_1 dx^2 \wedge dx^3 + E_2 dx^3 \wedge dx^1 + E_3 dx^1 \wedge dx^2$$

Derivando entrambi i membri rispetto alla coordinata x^4 otteniamo

$$\begin{aligned} - \frac{d}{dx^4} \int_V \rho dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 &= \int_{\partial V} \frac{\partial E_1}{\partial x^4} dx^2 \wedge dx^3 + \frac{\partial E_2}{\partial x^4} dx^3 \wedge dx^1 + \frac{\partial E_3}{\partial x^4} dx^1 \wedge dx^2 = \\ &= \int_{\partial V} d(B_1 dx^1 + B_2 dx^2 + B_3 dx^3) - \int_{\partial V} (J_1 dx^2 \wedge dx^3 + J_2 dx^3 \wedge dx^1 + J_3 dx^1 \wedge dx^2) = \\ &= \int_V d[d(B_1 dx^1 + B_2 dx^2 + B_3 dx^3)] - \int_{\partial V} (J_1 dx^2 \wedge dx^3 + J_2 dx^3 \wedge dx^1 + J_3 dx^1 \wedge dx^2) = \\ &= - \int_{\partial V} (J_1 dx^2 \wedge dx^3 + J_2 dx^3 \wedge dx^1 + J_3 dx^1 \wedge dx^2) \end{aligned} \quad (2.5)$$

Dove nella seconda uguaglianza abbiamo sfruttato sempre il teorema 2.2.2 che afferma che $\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial x^4} = \text{curl } \mathbf{B} - \mathbf{J}$, nella terza il teorema di Stokes e nella quarta il fatto che $dd\omega = 0$. \square

2.2.4 Altre leggi integrali classiche

Ora abbiamo tutti gli strumenti per ricavare, a partire dalle equazioni di Maxwell ottenute, le leggi integrali dell'elettromagnetismo

Legge di Faraday L'equazione

$$d(E_1 dx^1 + E_2 dx^2 + E_3 dx^3) + \frac{\partial B_1}{\partial x^4} dx^2 \wedge dx^3 + \frac{\partial B_2}{\partial x^4} dx^3 \wedge dx^1 + \frac{\partial B_3}{\partial x^4} dx^1 \wedge dx^2 = 0$$

corrisponde alla prima equazione di Maxwell nel teorema 2.2.2, contenendo solo 2-forme può essere integrata su una sottovarietà di \mathbb{R}^4 S 2-dimensionale stazionaria ($x^4 = cost$) e orientabile

$$\begin{aligned} \int_S d(E_1 dx^1 + E_2 dx^2 + E_3 dx^3) + \frac{\partial B_1}{\partial x^4} dx^2 \wedge dx^3 + \frac{\partial B_2}{\partial x^4} dx^3 \wedge dx^1 + \frac{\partial B_3}{\partial x^4} dx^1 \wedge dx^2 &= 0 \\ \Rightarrow \int_{\partial S} E_1 dx^1 + E_2 dx^2 + E_3 dx^3 &= -\frac{d}{dx^4} \int_S \frac{\partial B_1}{\partial x^4} dx^2 \wedge dx^3 + \frac{\partial B_2}{\partial x^4} dx^3 \wedge dx^1 + \frac{\partial B_3}{\partial x^4} dx^1 \wedge dx^2 \end{aligned}$$

questa è proprio la legge di Faraday che ci dice che la circuitazione del campo elettrico lungo il bordo di una superficie orientabile e stazionaria, coincide con la variazione temporale del flusso del campo magnetico attraverso la superficie.

Legge di Biot-Savart Se consideriamo l'equazione

$$\begin{aligned} d(B_1 dx^1 + B_2 dx^2 + B_3 dx^3) - \frac{\partial E_1}{\partial x^4} dx^2 \wedge dx^3 + \frac{\partial E_2}{\partial x^4} dx^3 \wedge dx^1 + \frac{\partial E_3}{\partial x^4} dx^1 \wedge dx^2 = \\ J_1 dx^2 \wedge dx^3 + J_2 dx^3 \wedge dx^1 + J_3 dx^1 \wedge dx^2 \end{aligned}$$

che corrisponde alla prima equazione di Maxwell del teorema 2.2.2, e la integriamo come abbiamo fatto con l'equazione precedente otteniamo

$$\int_{\partial S} B_1 dx^1 + B_2 dx^2 + B_3 dx^3 = \int_S (J_1 + \frac{\partial E_1}{\partial x^4}) dx^2 \wedge dx^3 + (J_2 + \frac{\partial E_2}{\partial x^4}) dx^3 \wedge dx^1 + (J_3 + \frac{\partial E_3}{\partial x^4}) dx^1 \wedge dx^2$$

Questa è la legge di Biot-Savart.

Legge di Ampère Considerando l'equazione precedente nel caso in cui \mathbf{E} sia indipendente da x^4 , otteniamo l'equazione di Ampère

$$\int_{\partial S} B_1 dx^1 + B_2 dx^2 + B_3 dx^3 = \int_S \frac{\partial E_1}{\partial x^4} dx^2 \wedge dx^3 + \frac{\partial E_2}{\partial x^4} dx^3 \wedge dx^1 + \frac{\partial E_3}{\partial x^4} dx^1 \wedge dx^2$$

Questa legge afferma che se il campo elettrico è stazionario, allora la circuitazione del campo magnetico lungo il bordo di una superficie orientabile uguaglia il flusso di corrente elettrica attraverso tale superficie.

Capitolo 3

Monopolo di Dirac

Nelle sezioni precedenti abbiamo mostrato come l'elettromagnetismo possa essere inquadrato direttamente nella cornice dell'algebra delle forme e dell'integrazione di forme. La corrispondenza però non è sempre così diretta e questo è manifesto quando studiamo le condizioni di chiusura ed esattezza delle forme differenziali in spazi non euclidei, quindi non in \mathbb{R}^n . Infatti, mentre in quel caso avevamo il lemma di Poincaré che ci mostrava in modo semplice quando una forma chiusa fosse esatta, in una varietà non euclidea questo non è più banale e ci sono condizioni aggiuntive più complesse da verificare per garantire l'esattezza di una forma differenziale su tale varietà. Tutto questo è espresso dai teoremi di de Rham, dai quali capiamo che quelle condizioni dipenderanno in generale dalla topologia dello spazio che consideriamo. In questa sezione lo scopo è proprio quello di mostrare un caso in cui questo si verifica, un caso in cui ci troviamo a dover studiare un sistema fisico su uno spazio che non è più banalmente lo spazio euclideo \mathbb{R}^n . Più precisamente l'obiettivo è quello di trovare le equazioni del moto di una particella carica nel campo di un monopolo magnetico e vedremo che l'applicazione della teoria dell'elettromagnetismo così come la abbiamo espressa non sarà diretta. Per maggiore chiarezza trattiamo il problema prima da un punto di vista fisico e analitico per poi reinterpretarlo in termini geometrici. Prima di tutto questo però è opportuno inquadrare il problema dell'esistenza del monopolo magnetico e capire come storicamente sia nato.

3.1 Monopolo di Dirac

Nel suo articolo sul monopolo magnetico del 1931 [7], Dirac propose una giustificazione puramente teorica dell'esistenza del monopolo magnetico che si basava sul concetto di fase non integrabile e qui cercheremo di riproporre il ragionamento che lui seguì. Per farlo introduciamo quindi le fasi non integrabili e studiamo velocemente le condizioni di consistenza di questi oggetti con il quadro della meccanica quantistica.

3.1.1 Fasi non integrabili

Consideriamo una particella il cui moto sia descritto da una funzione d'onda che in generale è una funzione d'onda di x, y, z e t . In questo contesto non ci interessa la forma precisa della funzione d'onda, ci basta esprimerla nella forma:

$$\psi = Ae^{i\gamma}$$

dove A e γ sono funzioni reali di x, y, z e t e rappresentano rispettivamente l'ampiezza e la fase della funzione d'onda. Sappiamo che ψ è determinata a meno della moltiplicazione per una costante di modulo uno, quindi potremo aggiungere alla fase γ una costante arbitraria senza modificare lo stato di moto della particella. Perciò il valore della fase in un punto non ha alcun significato fisico, ma solo la differenza di fase tra due punti ha importanza.

Questo ci porta immediatamente a generalizzare il formalismo assumendo che la fase non abbia un valore definito in ogni punto ma solo una differenza definita tra due punti qualsiasi. Possiamo ampliare ancora questo concetto affermando che questa differenza sia ben definita solo tra due punti infinitamente vicini perché se questi sono lontani avremo una differenza di fase precisa solo relativamente a una curva che li unisce, e curve diverse daranno in generale differenze di fase diverse. La conseguenza di questo è che non c'è nessuna garanzia che una fase torni al suo valore di partenza dopo un ciclo, quindi anche lungo una curva chiusa potremmo avere una differenza di fase finita.

E' necessario però verificare la consistenza di questo formalismo con i risultati della meccanica quantistica e in particolare richiediamo che questo ci permetta ancora di definire l'ampiezza di probabilità, che è la quantità di interesse fisico. Tutto questo non ci dà nessun problema se consideriamo la funzione densità di probabilità $\psi^*\psi$ visto che sarà sempre indipendente dalla fase. Possono però sorgere problemi se consideriamo due diverse funzioni d'onda che rappresentano due stati diversi del nostro sistema, ψ_n e ψ_m . In questo caso potremmo dover utilizzare il prodotto $\psi_m^*\psi_n$ per definire la probabilità di sovrapposizione dei due stati, data dal modulo dell'integrale

$$\int \psi_m^*\psi_n dx dy dz$$

Affinché l'integrale abbia modulo definito, l'integrando deve avere una differenza di fase definita tra due punti qualsiasi (vicini o no), altrimenti dipenderebbe dal percorso scelto e non avrebbe più senso. Questo implica che il cambiamento di fase in $\psi_m^*\psi_n$ lungo una curva chiusa deve annullarsi e quindi il cambiamento di fase su ψ_n lungo una curva chiusa deve essere uguale e opposto a quello di ψ_m^* e perciò esattamente lo stesso di ψ_m . Questo ci porta a un risultato generale : *Il cambiamento di fase di una funzione d'onda lungo una qualsiasi curva chiusa deve essere lo stesso per ogni funzione d'onda.* Così capiamo come il cambiamento di fase attorno a una curva chiusa sia determinato dalla natura del sistema dinamico stesso e sia indipendente dallo stato in cui esso si trova.

Per comodità riscriviamo la funzione d'onda isolando la fase non integrabile in un fattore ϕ

$$\psi = \psi_1 e^{i\phi}$$

dove ψ_1 è una funzione d'onda ordinaria con fase definita in ogni punto e il cui modulo è ovunque uguale a quello di ψ . Perciò ϕ , essendo una fase non integrabile, non ha un valore definito in ogni punto ma deve avere derivate

$$\kappa_x = \frac{\partial\phi}{\partial x}, \quad \kappa_y = \frac{\partial\phi}{\partial y}, \quad \kappa_z = \frac{\partial\phi}{\partial z}, \quad \kappa_0 = \frac{\partial\phi}{\partial t}$$

definite in ogni punto, perché poter calcolare la differenza tra due punti devo integrare le derivate. Perciò il cambiamento di fase attorno una curva chiusa sarà, grazie al teorema di Stokes

$$\oint \kappa ds = \int_{\mathbf{S}} \text{curl } \kappa d\mathbf{S}, \quad (3.1)$$

dove ds è un 4-vettore che rappresenta l'elemento d'arco di una curva chiusa e $d\mathbf{S}$ è un 6-vettore, elemento d'area della superficie due dimensionale che ha come bordo la curva chiusa.

Ora vogliamo studiare l'equazione di Schroedinger della nostra particella

$$ih \frac{\partial}{\partial t} \psi = \hat{H} \psi = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi$$

Perciò vediamo come gli operatori di derivata agiscono sulla funzione d'onda e sulla fase. Per il nostro scopo ci basta studiarlo sulle derivate prime anche per il membro destro

$$\begin{aligned} ih \frac{\partial}{\partial t} \psi &= e^{i\phi} \left(ih \frac{\partial}{\partial t} - \hbar \kappa_0 \right) \psi_1 \\ -ih \frac{\partial}{\partial x} \psi &= e^{i\phi} \left(-ih \frac{\partial}{\partial x} + \hbar \kappa_x \right) \psi_1 \\ -ih \frac{\partial}{\partial y} \psi &= e^{i\phi} \left(-ih \frac{\partial}{\partial y} + \hbar \kappa_y \right) \psi_1 \\ -ih \frac{\partial}{\partial z} \psi &= e^{i\phi} \left(-ih \frac{\partial}{\partial z} + \hbar \kappa_z \right) \psi_1 \end{aligned}$$

e l'equazione di Schroedinger diventa

$$ih \frac{\partial \psi_1}{\partial t} = \frac{1}{2m} (-ih \nabla + \hbar \boldsymbol{\kappa})^2 \psi_1 + \hbar \kappa_0 \psi_1$$

dove κ indica le derivate spaziali della fase ϕ . Confrontando quanto ottenuto con l'hamiltoniana di una particella con carica $-e$ in un campo elettromagnetico

$$\hat{H} = \frac{1}{2m} \left(\mathbf{p} + \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^2 - eA_0$$

si può notare la somiglianza delle due equazioni. Infatti diremo che se assumiamo che ψ soddisfi l'equazione d'onda per una particella libera, allora ψ_1 soddisfa l'equazione d'onda per una particella con carica $-e$ in un campo elettromagnetico i cui potenziali vettore e scalare sono

$$\mathbf{A} = hc/e\kappa \quad A_0 = -h/e\kappa_0 \quad (3.2)$$

Il campo elettrico e magnetico saranno della forma

$$\text{curl } \kappa = \frac{e}{hc} \mathbf{B} \quad \text{grad } \kappa_0 - \frac{\partial \kappa}{\partial t} = \frac{e}{h} \mathbf{E}$$

e vediamo che la (3.1) rappresenta il flusso del campo elettromagnetico. Perciò il nostro problema delle fasi non integrabili si riduce a quello del moto di un elettrone in un campo elettromagnetico, visto che ψ_1 è una funzione d'onda ordinaria. Possiamo rigirare il problema e dire che dobbiamo avere una funzione d'onda che soddisfa sempre la stessa equazione in presenza o assenza di un campo. Così l'unico effetto del campo è quello di rendere la fase non integrabile. Ovvero se prendiamo una ψ_1 che soddisfa l'equazione di Schroedinger per una particella libera, quando in presenza di un campo con potenziale (3.2), soddisferà sempre l'equazione di una particella libera ma con l'aggiunta di una fase non integrabile.

Sotto questo ragionamento c'è una trasformazione di gauge. Infatti se ci poniamo in una situazione più generale in cui la particella era già immersa in un campo elettromagnetico, possiamo eliminare la fase non integrabile proprio effettuando una trasformazione di gauge, che non cambia la fisica del sistema. Perciò dovremo modificare il potenziale vettore in modo opportuno

$$\begin{aligned} \psi e^{i\phi} &\longrightarrow \psi \\ \mathbf{A} &\longrightarrow \mathbf{A} + \nabla\phi \end{aligned}$$

Questa trasformazione aggiungerà al potenziale vettore già esistente un termine di potenziale dato dalle relazioni (3.2). La differenza è che quando le avevamo ricavate, eravamo nella situazione in cui $\mathbf{A} = 0$, quindi avevamo l'aggiunta del solo termine $\nabla\phi$, che risultava come l'introduzione di un campo elettromagnetico che prima non esisteva.

3.1.2 Singolarità nodali

Nella sezione precedente abbiamo però trascurato un aspetto della fase, cioè il fatto che una fase sia sempre definita a meno di un multiplo intero di 2π ($e^{i\phi} = e^{i(\phi+2\pi)}$). Questo

ci riporta indietro perché dovremo fare delle considerazioni aggiuntive per rendere non ambigua l'interpretazione fisica della teoria. Dovremo infatti rilassare la condizione per cui il cambiamento di fase lungo una linea chiusa deve essere lo stesso per ogni funzione d'onda, e dire che in realtà questo può essere diverso tra diverse funzioni d'onda per un multiplo arbitrario di 2π . Dovremo quindi reinterpretare anche le conseguenze fisiche e il collegamento con la teoria elettromagnetica che avevamo fatto.

Tenendo presente che la funzione d'onda deve essere continua, come richiesto dall'equazione d'onda, se consideriamo una piccola curva chiusa, il cambiamento di fase dovrà essere piccolo e nel limite tendere a 0. Perciò la condizione di continuità non ci permette di aggiungere un multiplo di 2π alla fase e ritorniamo nella situazione descritta nella sezione precedente. Quindi possiamo definire il potenziale vettore (3.2) e di conseguenza il flusso del campo elettromagnetico come in (3.1).

C'è però un caso particolare che si ha quando la funzione si annulla. Poiché la funzione d'onda è complessa, il suo annullamento richiederà due condizioni, e in generale i punti in cui si annulla formeranno una curva, detta linea nodale. In questo caso possiamo avere l'indeterminazione della fase per multipli di 2π perché l'azzeramento della funzione d'onda ci garantisce la continuità nel limite in cui la curva si stringe intorno al punto in cui la funzione si annulla e tale limite è ora definito. In questo caso non è così immediato associare la variazione di fase al flusso del campo elettromagnetico come nella situazione precedente e dovremo fare delle considerazioni aggiuntive per interpretare quello che succede. Infatti la variazione totale di fase è data da

$$2\pi n + \int_{\mathbf{S}} \text{curl } \kappa \, d\mathbf{S} = 2\pi n + \frac{e}{hc} \int_{\mathbf{S}} \mathbf{B} \, d\mathbf{S}$$

Adesso possiamo considerare una curva più grande dividendola in una rete di curve infinitesime che giacciono su una superficie Ω il cui bordo è la curva più grande. Il cambiamento di fase attorno a questa sarà pari alla somma di tutti i cambiamenti intorno alle curve piccole. Perciò basterà sommare tutti questi e integrare sulla superficie il cui bordo è la nostra curva per generalizzare la formula appena ottenuta

$$2\pi \sum n + \frac{e}{hc} \int_{\Omega} \mathbf{B} \, d\Omega$$

Questa espressione contiene due parti, una direttamente legata al flusso del campo che è certamente la stessa per ogni funzione d'onda e una parte $2\pi \sum n$ che potrebbe essere diversa per funzioni d'onda diverse.

La relazione ottenuta rappresenta il cambiamento di fase lungo il bordo di una superficie. Perciò se la applichiamo a una superficie chiusa, quindi con bordo nullo, deve annullarsi. Ne segue che

$$-\frac{e}{2\pi hc} \int_{\Omega} \mathbf{B} \, d\Omega = \sum n$$

e quindi che $\sum n$ deve essere uguale per tutte le funzioni d'onda, sapendo che lo è il flusso. Ora se $\sum n$ non si annulla deve esistere qualche linea nodale con un estremo all'interno della superficie perché se una linea entra e esce dalla superficie contribuisce due volte con segno opposto. Questo ci porta a dire che i termini non nulli della somma sono solo quelli relativi alle linee nodali con estremi interni alla superficie e che il valore di $\sum n$ è uguale per ogni funzione d'onda del sistema. Poiché questo risultato vale per ogni superficie chiusa diremo che questi punti estremi delle curve sono punti di singolarità del campo elettromagnetico. Ora calcoliamo il flusso totale su una superficie chiusa, quindi sull'angolo solido e otteniamo

$$4\pi g = 2\pi nhc/e$$

dove qui rappresentiamo la somma $\sum n$ con un solo intero n . Perciò la singolarità del campo ci dice che nei punti estremi ci sarà un monopolo magnetico di intensità

$$g = \frac{1}{2}nhc/e$$

Così abbiamo mostrato che la teoria della meccanica quantistica non esclude l'esistenza di monopoli magnetici, la cui intensità deve essere quantizzata. Il quanto g_0 è strettamente legato alla carica elettrica dalla relazione

$$\frac{hc}{eg_0} = 2 \tag{3.3}$$

Ora quando studieremo il problema di una particella nel campo di un monopolo magnetico dovremo considerare il fatto che ogni funzione d'onda avrà una linea nodale che uscente dall'origine, dove poniamo il polo. Perciò non potremo trovare derivate della fase che soddisfino le (3.2) ovunque, infatti ci sarà una linea di singolarità del potenziale vettore legato alle derivate della fase è singolare. Questa la chiamiamo *stringa di Dirac*.

3.2 Fase di Berry

Dopo aver introdotto le fasi non integrabili e avere intuito la loro importanza nell'ambito dei monopoli magnetici, vogliamo adattare questo concetto a un sistema fisico più generico. In questo modo otterremo un formalismo, introdotto da Berry [8], che tornerà molto utile quando vorremo trovare il potenziale vettore per un monopolo magnetico. Immaginiamo di avere un sistema fisico quantistico descritto da un'hamiltoniana \hat{H} che dipende da un certo numero di parametri \mathbf{R} . Se il sistema è in uno stato stazionario, il teorema adiabatico (vedi [9]) ci garantisce che variando lentamente questi parametri, il sistema sarà in ogni istante in uno stato stazionario dell'hamiltoniana istantanea. In particolare se ritorniamo al punto di partenza otterremo lo stesso stato da cui eravamo partiti a

meno di una fattore di fase. Questo conterrà un termine dipendente dal percorso seguito $\exp(i\gamma)$ in aggiunta al solito termine dinamico $\exp(-iEt/h)$ che è legato all'evoluzione temporale di ogni stato stazionario. Questo fattore di fase può essere osservato tramite interferenza con un altro sistema identico la cui hamiltoniana è stata mantenuta costante e da luogo a vari fenomeni fisici sperimentalmente provati come l'effetto Aharonov-Bohm.

Ora proviamo a calcolare questo fattore di fase aggiuntivo per un sistema descritto dall'hamiltoniana $\hat{H}(\mathbf{R}(t))$. L'evoluzione del sistema tra il tempo $t = 0$ e $t = T$ può essere descritta immaginandola come un trasporto nello spazio dei parametri tra $R(t = 0)$ e $R(t = T)$ con $R(t = 0) = R(t = T)$, quindi considerando un percorso chiuso. Lo stato $|\psi(t)\rangle$ del sistema evolve secondo l'equazione di Schroedinger

$$\hat{H}(\mathbf{R}(t))|\psi(t)\rangle = ih\frac{d}{dt}|\psi(t)\rangle \quad (3.4)$$

In ogni istante esiste una base ortonormale di autostati $|n(\mathbf{R})\rangle$ che soddisfa l'equazione agli autovalori dell'hamiltoniana $\hat{H}(\mathbf{R})$ con $\mathbf{R} = \mathbf{R}(t)$

$$\hat{H}(\mathbf{R})|n(\mathbf{R})\rangle = E_n(\mathbf{R})|n(\mathbf{R})\rangle \quad (3.5)$$

Un sistema preparato in uno di questi stati $|n(\mathbf{R}(0))\rangle$ evolverà nel tempo attraverso l'hamiltoniana e si troverà in uno stato $|n(\mathbf{R}(t))\rangle$. Perciò possiamo scrivere $|\psi(t)\rangle$ nella forma

$$|\psi(t)\rangle = \exp\left(-\frac{i}{h}\int_0^t dt' E_n(\mathbf{R}(t'))\right) \exp(i\gamma_n(t))|n(\mathbf{R}(t))\rangle \quad (3.6)$$

Vediamo che qui compare quel fattore di fase dipendente dal percorso. E' importante sottolineare che questo rappresenta una fase non integrabile, che non ritorna al valore di partenza se integrata su un ciclo chiuso ($\gamma_n(0) \neq \gamma_n(T)$). Inserendo ora questa espressione per la funzione d'onda nell'equazione di Schroedinger (3.4) e sfruttando la (3.5) otteniamo

$$\begin{aligned} \dot{\gamma}_n(t) &= i\langle n(\mathbf{R}(t))|\nabla_{\mathbf{R}}n(\mathbf{R}(t))\rangle\dot{\mathbf{R}}(t) = \\ &= i\langle n(\mathbf{R}(t))|\frac{d}{dt}n(\mathbf{R}(t))\rangle \end{aligned}$$

Se consideriamo il percorso chiuso C il contributo di questo fattore al cambiamento totale di fase diventa

$$\gamma_n(C) = i\oint_C \langle n(\mathbf{R})|\nabla_{\mathbf{R}}n(\mathbf{R})\rangle d\mathbf{R} \quad (3.7)$$

ora applicando il teorema di Stokes

$$\gamma_n(C) = -Im \int_S \text{curl}\langle n|\nabla n\rangle d\mathbf{S}$$

e come dimostra Berry nel suo articolo [8], questa può essere espressa

$$\gamma_n(C) = - \int_S V_n(\mathbf{R}) d\mathbf{S}$$

con $V_n(\mathbf{R})$ opportuno. Vediamo che $V_n(\mathbf{R})$ è il rotore di $\langle n | \nabla n \rangle$, questo ci fa pensare che possiamo interpretare il primo come un campo magnetico e il secondo come il potenziale vettore ad esso associato. Inoltre come ulteriore conferma osserviamo che $\text{curl} \langle n | \nabla n \rangle$ dipende in generale dalla fase e questa dipendenza la potremo scrivere nel modo seguente

$$\begin{aligned} |n\rangle &\longrightarrow \exp(i\mu(\mathbf{R}))|n\rangle \\ \Rightarrow \langle n | \nabla n \rangle &\longrightarrow \langle n | \nabla n \rangle + i\nabla\mu \end{aligned}$$

e si nota subito che questa può essere interpretata come trasformazione di gauge sul potenziale vettore.

Nella prossima sezione sfrutteremo questi risultati per trovare il potenziale vettore associato al campo di un monopolo magnetico perché ora conosciamo la relazione tra la fase di Berry e il potenziale vettore $\mathbf{A}_n(\mathbf{R}) = \langle n(\mathbf{R}) | \nabla_{\mathbf{R}} n(\mathbf{R}) \rangle$. Quindi

$$\exp i\gamma_n(t) = \exp\left[i \int_0^t \mathbf{A}_n(\mathbf{R}) d\mathbf{R}\right] \quad (3.8)$$

3.3 Trattazione analitica

Ora torniamo al problema del monopolo magnetico. Per studiare il campo di un monopolo magnetico dobbiamo studiare il comportamento di una particella sotto l'effetto di tale campo, che in perfetta simmetria con quello di una carica elettrica puntiforme assumeremo essere radiale. Perciò, seguendo [10], consideriamo una particella di spin 1/2 in un campo magnetico $\mathbf{B} = B\mathbf{n}$, dove $\mathbf{n}^2 = 1$. Scriviamo l'equazione di Schroedinger per questa particella, conoscendo l'hamiltoniana relativa all'accoppiamento tra spin e campo magnetico

$$\mu\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}|\psi(t)\rangle = i\frac{d}{dt}|\psi(t)\rangle$$

dove l'intensità B del campo magnetico è stata assorbita in μ . Assumeremo che la variazione di \mathbf{n} nel tempo sia abbastanza lenta da non causare transizioni tra i due stati di spin e quindi considereremo solo uno di essi. In generale poiché $\mathbf{n}^2 = 1$, \mathbf{n} giace su una sfera di raggio unitario e possiamo sempre scrivere $n(t) = (\sin\theta\cos\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\theta)$ e il prodotto $\mu\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}$ diventa

$$\mu\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \mu \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta e^{-i\phi} \\ \sin\theta e^{i\phi} & -\cos\theta \end{pmatrix}$$

Un'autofunzione di questo operatore è certamente la funzione d'onda

$$\langle \theta\phi | \mathbf{n}_+ \rangle = \begin{pmatrix} \cos \theta/2 \\ \sin \theta/2 e^{i\phi} \end{pmatrix} \quad (3.9)$$

con autovalore μ . Possiamo ora calcolare esplicitamente la fase di Berry

$$\gamma(t) = i \int_0^t \langle \mathbf{n}(t') | \frac{d}{dt'} | \mathbf{n}(t') \rangle dt'$$

che è direttamente legata al potenziale vettore e inserendo in questa formula l'autofunzione (3.9) otteniamo

$$\gamma_+(t) = - \int_0^t \frac{1}{2} (1 - \cos\theta) \frac{d\phi}{dt'} dt'$$

Possiamo verificare il legame con il potenziale vettore prendendo in considerazione un esempio tipico di potenziale vettore per un monopolo di Dirac di intensità $-1/2$ (cioè un potenziale vettore il cui rotore darà un campo magnetico \mathbf{B} radiale)

$$\mathbf{A}_+(\mathbf{r}) = -\frac{1}{2r} \frac{1}{y_3 + r} (-y_2, y_1, 0)$$

dove $(y_1, y_2, y_3) = (r \sin\theta \cos\phi, r \sin\theta \sin\phi, r \cos\theta)$ e quindi $\mathbf{r} = (y_1, y_2, y_3)$. Perciò

$$\mathbf{A}_+(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = \frac{-1}{2r(y_3 + r)} (y_1 dy_2 - y_2 dy_1) = -\frac{1}{2} (1 - \cos\theta) d\phi$$

Perciò abbiamo anche verificato la connessione tra la fase di Berry e il potenziale vettore, e osserviamo esplicitamente il carattere di monopolo del fattore di fase associato al moto attorno al punto $\mathbf{n} = 0$.

In ogni caso abbiamo un problema, ovvero che la funzione d'onda (3.9) è mal definita per $\theta = \pi$, poiché ϕ è indeterminato. Possiamo fare un'altra scelta di autofunzione, che è ben definita per $\theta = \pi$

$$\langle \theta\phi | \mathbf{n}_- \rangle = \begin{pmatrix} \cos \theta/2 e^{i\phi} \\ \sin \theta/2 \end{pmatrix} \quad (3.10)$$

ripetendo calcoli simili a quelli precedenti otteniamo una fase di Berry

$$\gamma_-(t) = - \int_0^t \frac{1}{2} (-1 - \cos\theta) \frac{d\phi}{dt'} dt'$$

che è equivalente a un potenziale vettore

$$\mathbf{A}_-(\mathbf{r}) = \frac{1}{2r} \frac{1}{y_3 - r} (-y_2, y_1, 0)$$

Questa autofunzione anche se è buona a $\theta = \pi$, è mal definita in $\theta = 0$.

Incontriamo qui il problema del monopolo magnetico : non esiste un solo potenziale vettore senza singolarità su tutta la varietà S^2 . In generale la singolarità giace su una linea ($y_3 = -r$ per \mathbf{A}_+ , $y_3 = r$ per \mathbf{A}_-) che è proprio la stringa di Dirac di cui abbiamo parlato nelle sezioni precedenti. Però osservando i potenziali \mathbf{A}_+ e \mathbf{A}_- vediamo che differiscono per un gradiente

$$\mathbf{A}_+ - \mathbf{A}_- = \nabla\phi$$

ovvero per una trasformazione di gauge. Questo ci fa capire che la fisica sarà la stessa descritta nella parte sopra o sotto della sfera, ma le due non combaciano. Ovvero la trasformazione di gauge ci permette solo di spostare la singolarità, non di eliminarla. Questo metodo di utilizzare due \mathbf{A} e connetterle tramite una trasformazione di gauge fu introdotto da Wu e Yang, [11], come possibile soluzione per escludere la singolarità. Ma il problema sembra inevitabile, infatti se $\mathbf{B} = \text{curl}\mathbf{A}$ e \mathbf{A} è privo di singolarità allora $\text{div}\mathbf{B} = 0$ e non sarebbe presente nessuna carica magnetica.

In realtà questo ostacolo è stato superato e si è dimostrato che un potenziale vettore non singolare per il monopolo magnetico esiste e può essere trovato realizzando una fibrazione di Hopf. Come mostrato in appendice A, questa fornisce una mappa tra S^2 e S^3 e rende evidente il fatto che mentre S^2 non può essere coperto da una sola mappa, ma ne necessitano almeno due, per S^3 questo può invece essere fatto.

Per esplicitare questa costruzione nel nostro caso introduciamo una nuova notazione ed esprimiamo le autofunzioni $|\mathbf{n}\rangle$ (3.9, 3.10), in modo da mostrare più chiaramente come realizzare la fibrazione

$$z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$$

Nelle espressioni 3.9 e 3.10 avevamo solo due gradi di libertà, ovvero le coordinate θ e ϕ di un punto sulla superficie di una sfera S^2 . In principio però z ha tre gradi di libertà perché la condizione di normalizzazione

$$z^\dagger z = 1 = |z_1|^2 + |z_2|^2$$

è un solo vincolo su due numeri complessi. Questo vuol dire che il modo più generale di scrivere 3.9 e 3.10 è moltiplicandoli per una fase arbitraria

$$z = \begin{pmatrix} \cos\theta/2 & e^{i\chi} \\ \sin\theta/2 & e^{i(\phi+\chi)} \end{pmatrix}$$

Il risultato di questa operazione è che il potenziale vettore sarà definito non più su una sfera bidimensionale ma sulla sfera tridimensionale S^3 . Dimostreremo che su questa sfera sarà definito globalmente e non singolare. Realizziamo la fibrazione di Hopf in questa situazione. Cominciamo scrivendo

$$\begin{aligned} z_1 &= x_1 + ix_2 \\ z_2 &= x_3 + ix_4 \end{aligned}$$

Allora la condizione di normalizzazione diventa

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1$$

e le coordinate x_i saranno le coordinate di una sfera S^3 . Comparando questa con la forma scritta per z otteniamo

$$\begin{cases} x_1 = \cos \theta/2 \cos \chi \\ x_2 = \cos \theta/2 \sin \chi \\ x_3 = \sin \theta/2 \cos (\phi + \chi) \\ x_4 = \sin \theta/2 \sin (\phi + \chi) \end{cases} \quad (3.11)$$

Dopo un po' di calcoli si trova la metrica sulla sfera S^3 con queste coordinate

$$ds^2 = \frac{1}{4}d\theta^2 + d\chi^2 + \sin^2\theta/2 d\phi^2 + 2\sin^2\theta/2 d\phi d\chi$$

e scrivendola più convenientemente in coordinate ortogonali introducendo $\psi = \phi + \chi$ diventa

$$ds^2 = \frac{1}{4}d\theta^2 + \cos^2\theta/2 d\chi^2 + \sin^2\theta/2 d\psi^2$$

Ora abbiamo tutti gli elementi per trovare la forma del potenziale vettore. Infatti possiamo calcolare $\mathbf{A}d\mathbf{n}$

$$A_\theta \frac{1}{2}d\theta + A_\chi \cos \theta/2 d\chi + A_\psi \sin \theta/2 d\psi$$

Riformulando l'espressione della fase di Berry nella nuova notazione introdotta otteniamo la relazione tra il potenziale vettore e z

$$\begin{aligned} \mathbf{A} d\mathbf{n} &= -iz^\dagger dz = d\chi + \frac{1}{2}(1 - \cos \theta) d\phi = \\ &= d\chi + \frac{1}{2}(1 - \cos \theta) (d\psi - d\chi) = \\ &= \frac{1 + \cos \theta}{2} d\chi + \frac{1 - \cos \theta}{2} d\psi = \\ &= \cos^2\theta/2 d\chi + \sin^2\theta/2 d\psi \end{aligned}$$

Paragonando le due forme ottenute per \mathbf{A} abbiamo

$$A_\theta = 0, \quad A_\chi = \cos \theta/2, \quad A_\psi = \sin \theta/2.$$

E' evidente che questi potenziali sono regolari su tutta la sfera S^3 . Siamo quindi riusciti a definire un unico potenziale vettore per il monopolo magnetico, senza singolarità, allargando lo spazio delle configurazioni da S^2 a S^3 . Resta da verificare che la fisica

sia veramente la stessa e lo mostreremo nella sezione successiva, prendendo i potenziali vettori \mathbf{A}_+ e \mathbf{A}_- nelle coordinate di S^3 e osservando che questi differiranno dal potenziale non singolare appena definito per il gradiente di una funzione, cioè per una trasformazione di gauge che garantisce l'invarianza della descrizione fisica del sistema.

Inseriamo per completezza questo discorso all'interno della teoria dei fibrati. E' chiaro che i potenziali \mathbf{A}_+ e \mathbf{A}_- possono essere ottenuti dal potenziale \mathbf{A} semplicemente ponendo rispettivamente $\chi = 0$ e $\chi = -\phi$. Questa restrizione di χ realizza una sezione del fibrato. Sappiamo però che non è possibile trovare una sezione globale di questo fibrato, infatti queste sono due sezioni locali, non essendo definite su tutta la varietà S^2 . Come visto precedentemente questo è direttamente legato al fatto che il fibrato $S^2 \times S^1$ non è banale e quando proiettiamo il potenziale vettore globale da S^3 in S^2 non ne basta uno solo per ricoprire tutta la sfera bidimensionale, ma ne servono almeno due.

3.4 Trattazione geometrica

Vogliamo ora inserire la teoria del monopolo nel quadro geometrico introdotto all'inizio. Il procedimento sarà simile ma mentre nella sezione precedente abbiamo sfruttato le proprietà della fase di Berry qui seguiremo una strada che si basa su proprietà geometriche dello spazio in cui studiamo il monopolo, [12]. Sarà quindi una discussione più generale che ricondurremo in modo diretto a quanto appena visto. Prima di tutto considereremo un monopolo magnetico di intensità g e non più $1/2$. Per cui i potenziali vettori in S^2 saranno le 1-forme

$$\begin{aligned} a_i^+ dy_i &= g(1 - \cos \theta) d\phi \\ a_i^- dy_i &= -g(1 + \cos \theta) d\phi \end{aligned}$$

Il differenziale di queste è una 2-forma che sulla sfera S^2 è sempre esatta, infatti possiamo scrivere

$$b = d(a_i^+ dy_i) = d(a_i^- dy_i) = \frac{g}{4\pi} \sin \theta d\theta \wedge d\phi$$

Questa rappresenta il campo magnetico del monopolo, ma il problema è che il potenziale vettore non è ben definito, ovvero ne servono due come abbiamo visto e quindi le equazioni del moto non possono essere trovate globalmente in tutto lo spazio intorno al monopolo. Perciò vogliamo trovare un potenziale vettore globale, regolare in tutto lo spazio. Come abbiamo in realtà già visto questo problema è risolto immergendo la sfera S^2 nella sfera S^3 attraverso una mappa di Hopf. Questa è un mappa $\eta : S^3 \rightarrow S^2$ che quindi ci permetterà di trasportare le forme differenziali da S^2 a S^3 come abbiamo discusso nella sezione relativa alle mappe, perché sappiamo che $\eta^* : F^p(S^2) \rightarrow F^p(S^3)$. Quindi procediamo sollevando la 2-forma differenziale appena trovata sulla sfera tridimensionale sfruttando la mappa di Hopf. Questo non è banale e richiede lunghi calcoli,

che non mostriamo, alla fine dei quali si trova

$$B = \frac{1}{2}H_{\mu\nu}dx_\mu \wedge dx_\nu = \eta^*\left(\frac{g}{4\pi}\sin\theta d\theta \wedge d\phi\right)$$

dove $H_{\mu\nu}$ è un tensore antisimmetrico le cui componenti sono

$$\begin{aligned} H_{12} &= \frac{g}{\pi}(x_3^2 + x_4^2), \\ H_{34} &= \frac{g}{\pi}(x_1^2 + x_2^2), \\ H_{13} &= H_{24} = -\frac{g}{\pi}(x_2x_3 - x_1x_4), \\ H_{14} &= H_{23} = -\frac{g}{\pi}(x_2x_4 + x_1x_3). \end{aligned}$$

Si può notare che $dB = 0$, ovvero che B è una forma chiusa e poiché ogni 2-ciclo su S^3 è un bordo tutti i periodi di B si annullano. Perciò il primo teorema di de Rham ci garantisce che B è una 2-forma esatta su S^3 e potremo esprimerlo come derivata esterna di una 1-forma opportuna su S^3 , che qui identifichiamo con $A_\mu dx_\mu$

$$\begin{aligned} B &= d(A_\mu dx_\mu) \\ \Rightarrow H_{\mu\nu} &= \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \end{aligned}$$

Conoscendo l'espressione esplicita per i termini $H_{\mu\nu}$ potremo trovarla anche per il potenziale vettore $A_\mu dx_\mu$. La soluzione di queste equazioni differenziali però non è unica ma si può dimostrare, [12], che una possibile scelta è

$$A_\mu dx_\mu = \frac{g}{2\pi}(x_2 dx_1 - x_1 dx_2 + x_4 dx_3 - x_3 dx_4)$$

che è manifestamente non singolare su S^3 . Allo stesso modo possiamo trovare le espressioni per $a_i^+ dy_i$ e $a_i^- dy_i$ mappati in S^3

$$\begin{aligned} A_\mu^+ dx_\mu &= \eta^*(a_i^+ dy_i) = \frac{g}{2\pi} \left[x_2 dx_1 - x_1 dx_2 - \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_3^2 + x_4^2} (x_4 dx_3 - x_3 dx_4) \right] \\ A_\mu^- dx_\mu &= \eta^*(a_i^- dy_i) = -\frac{g}{2\pi} \left[\frac{x_3^2 + x_4^2}{x_1^2 + x_2^2} (x_2 dx_1 - x_1 dx_2) - x_4 dx_3 - x_3 dx_4 \right] \end{aligned}$$

Notiamo che se definiamo i due piani $P_{12} = \{x, x_3 = x_4 = 0\}$ e $P_{34} = \{x, x_1 = x_2 = 0\}$, allora possiamo vedere che $A_\mu^+ dx_\mu$ e $A_\mu^- dx_\mu$ hanno singolarità rispettivamente sui cerchi $P_{12} \cap S^3$ e $P_{34} \cap S^3$. Per esprimere queste forme differenziali scegliamo il sistema di coordinate angolari dato dalle relazioni (3.11), così otteniamo

$$\begin{aligned} A_\mu^+ dx_\mu &= g(1 - \cos\theta) d\phi \\ A_\mu^- dx_\mu &= -g(1 + \cos\theta) d\phi \\ A_\mu dx_\mu &= -g[(\cos\theta - 1)d\phi - 2d\chi] \end{aligned}$$

E' chiaro che $A_\mu^+ dx_\mu$ e $A_\mu^- dx_\mu$ hanno esattamente la stessa forma di $a_i^+ dy_i$ e $a_i^- dy_i$ perché se inseriamo le (3.11) nel sistema di equazioni che definiscono la mappa di Hopf otteniamo esattamente le coordinate $(y_1, y_2, y_3) = (\sin\theta \cos\phi, \sin\theta \sin\phi, \cos\theta)$ della sfera due dimensionale. Visto che conosciamo già anche la metrica in questo sistema di coordinate possiamo seguire lo stesso procedimento visto nella trattazione analitica e trovare le componenti angolari dei potenziali vettori. Per maggiore chiarezza riscriviamo la metrica sfruttando le coordinate ortogonali, cioè con la sostituzione $\psi = (\phi + \chi)$

$$ds^2 = \frac{1}{4}d\theta^2 + \cos^2\theta/2 d\chi^2 + \sin^2\theta/2 d\psi^2$$

che ci da la decomposizione generale delle forme differenziali

$$A_\mu dx_\mu = A_\theta \frac{1}{2}d\theta + A_\chi \cos\theta/2 d\chi + A_\psi \sin\theta/2 d\psi$$

Le 1-forme dei potenziali vettori si decomporranno nel modo seguente

$$\begin{aligned} A_\mu^+ dx_\mu &= g(1 - \cos\theta) d(\psi - \chi) = \\ &= g [(1 - \cos\theta)d\psi - (1 - \cos\theta)d\chi] = \\ &= 2g \left[-\sin^2\frac{\theta}{2}d\chi + \sin^2\frac{\theta}{2}d\psi \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_\mu^- dx_\mu &= -g(1 + \cos\theta) d(\psi - \chi) = \\ &= -g [(1 + \cos\theta)d\psi - (1 + \cos\theta)d\chi] = \\ &= 2g \left[\cos^2\frac{\theta}{2}d\chi - \cos^2\frac{\theta}{2}d\psi \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_\mu dx_\mu &= -g[(\cos\theta - 1)d(\psi - \chi) - 2d\chi] = \\ &= -g[(\cos\theta - 1)d\psi - (\cos\theta - 1)d\chi - 2d\chi] \\ &= 2g \left[\cos^2\frac{\theta}{2}d\chi + \sin^2\frac{\theta}{2}d\psi \right] \end{aligned}$$

Perciò vediamo subito che

$$\begin{array}{lll}
A_\theta^+ = 0 & A_\chi^+ = -2g \frac{\sin^2 \frac{\theta}{2}}{\cos \frac{\theta}{2}} & A_\psi^+ = 2g \sin \frac{\theta}{2} \\
A_\theta^- = 0 & A_\chi^- = 2g \cos \frac{\theta}{2} & A_\psi^- = -2g \frac{\cos^2 \frac{\theta}{2}}{\sin \frac{\theta}{2}} \\
A_\theta = 0 & A_\chi = 2g \cos \frac{\theta}{2} & A_\psi = 2g \sin \frac{\theta}{2}
\end{array}$$

E' chiaro che mentre A ha tutte le componenti regolari, A_χ^+ e A_ψ^- hanno singolarità rispettivamente per $\theta = \pi$ e $\theta = 0$.

Ora come avevamo anticipato alla fine della sezione precedente, verifichiamo che questi potenziali vettori siano collegati a coppie da trasformazioni di gauge

$$\begin{aligned}
A_\mu dx_\mu - A_\mu^+ dx_\mu &= 2g \left[\cos^2 \frac{\theta}{2} d\chi + \sin^2 \frac{\theta}{2} d\psi \right] - 2g \left[-\sin^2 \frac{\theta}{2} d\chi + \sin^2 \frac{\theta}{2} d\psi \right] = \\
&= 2g d\chi
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_\mu dx_\mu - A_\mu^- dx_\mu &= 2g \left[\cos^2 \frac{\theta}{2} d\chi + \sin^2 \frac{\theta}{2} d\psi \right] - 2g \left[\cos^2 \frac{\theta}{2} d\chi - \cos^2 \frac{\theta}{2} d\psi \right] = \\
&= 2g d\psi
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_\mu^+ dx_\mu - A_\mu^- dx_\mu &= 2g \left[-\sin^2 \frac{\theta}{2} d\chi + \sin^2 \frac{\theta}{2} d\psi \right] - 2g \left[\cos^2 \frac{\theta}{2} d\chi - \cos^2 \frac{\theta}{2} d\psi \right] = \\
&= 2g d(\psi - \chi) = 2g d\phi
\end{aligned}$$

Perciò abbiamo verificato direttamente che il potenziale vettore regolare trovato sulla sfera tridimensionale descrive la stessa fisica degli altri due, e quindi è adeguato per descrivere il moto di una particella nel campo di un monopolo magnetico, tutto intorno a esso.

Capitolo 4

Conclusioni

Alla fine di tutta questa discussione dovrebbe essere più chiara l'importanza e l'utilità dell'interpretazione geometrica di un fenomeno fisico. Ne abbiamo un esempio evidente con la teoria dell'elettromagnetismo che può essere interamente riassunta nelle equazioni (2.2.1.0.1, 2.2.2), la cui forma è estremamente semplificata rispetto alle quattro equazioni di Maxwell. Perciò nonostante le difficoltà iniziali nel definire in modo corretto e rigoroso gli oggetti necessari per costruire la struttura geometrica, o almeno la parte che ci interessava, alla fine abbiamo un modello che ci ha permesso di ricavare in modo naturale le leggi dell'elettromagnetismo a partire da considerazioni del tutto generali.

Con il monopolo magnetico abbiamo allargato la discussione per risolvere i problemi che sorgono quando giustificiamo, su basi del tutto teoriche, la sua esistenza. Siamo riusciti ad ottenere un modello coerente che permette di ricavare le equazioni del moto di una particella con spin (ma poteva essere una qualsiasi particella interagente con il campo magnetico), in modo globale intorno al monopolo. Questo ha richiesto una complicazione matematica dovuta al fatto che, per come emerge dalla trattazione di Dirac, il potenziale vettore del monopolo è singolare su una stringa che inizia sulla sorgente del campo stessa. Ma come abbiamo visto se estendiamo lo spazio su cui studiamo il sistema, alla sfera tridimensionale attraverso la mappa di Hopf, un solo potenziale vettore esiste, non singolare. Questo ci permette di trovare equazioni del moto della nostra particella sonda, perché un potenziale vettore regolare conduce a una corrispondente hamiltoniana, anche se qui non lo abbiamo mostrato.

Dopo aver compreso e formalizzato tutte le problematiche teoriche riguardanti la ricerca di un potenziale vettore non singolare per il monopolo di Dirac, è stato possibile interpretare anche questo in termini dell'algebra delle forme differenziali, cosa che sarebbe stata molto più complicata senza sapere come trattare il sistema del monopolo magnetico. In realtà il percorso storico è quello inverso. Infatti Minami nel 1979 aveva già trovato un potenziale vettore non singolare partendo da un'interpretazione geometrica del problema, utilizzando la mappa di Hopf, ma per seguire il suo ragionamento per intero sarebbero state necessarie nozioni di omologia e co-omologia che avrebbero complicato l'esposizione.

Gli aspetti teorici sono quindi risolti, ma dal punto di vista sperimentale il monopolo di Dirac crea ancora delle difficoltà e nessuno è ancora riuscito a dimostrarne e osservarne l'esistenza. Ci sono però dei risultati emersi nel 2014, [14], che riportano evidenze della sua probabile presenza. E' stato studiato un condensato di Bose-Einstein sotto l'effetto di un campo magnetico esterno di quadrupolo. Il vortice creato all'interno del condensato

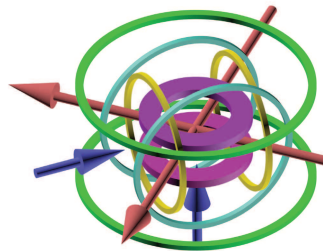


Figura 4.1: Immagine dell'apparato sperimentale che mostra il quadrupolo magnetico e il campo di polarizzazione esterno. [14]

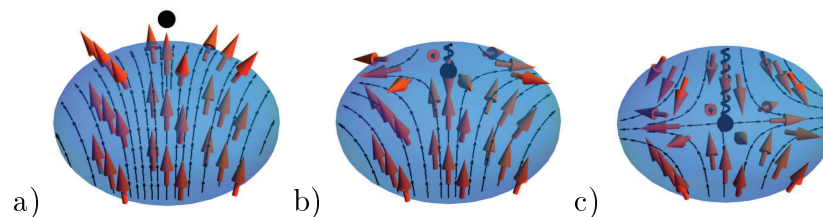


Figura 4.2: Direzioni teoriche degli spin all'interno del condensato quando la singolarità del campo (punto nero) è a) sopra, b) entrante, c) nel mezzo del condensato. La spirale rappresenta la singolarità nel vortice. [14]

dall'orientazione dello spin delle particelle mostrerebbe effetti riconducibili alla presenza del monopolo di Dirac.

Appendice A

Fibrati

Per definire la struttura chiamata fibrato (vedi [15]), cominciamo con un esempio semplice. Consideriamo il cilindro C definito come la varietà bidimensionale

$$C = S^1 \times \mathbb{R} = \{(x, y) \in [0, 2\pi] \times \mathbb{R} \text{ tale che } (0, y) \sim (2\pi, y)\}$$

e su esso definiamo una mappa $\pi : C \rightarrow S^1$, tale che $\pi(x, y) = x \in S^1$ che è continua e suriettiva ma non iniettiva e quindi non invertibile. Infatti la controimmagine attraverso π di $x_0 \in S^1$ è data da $\pi^{-1}(x_0) = \{(x_0, y), y \in \mathbb{R}\}$, cioè la controimmagine di un punto nel cerchio S^1 riproduce un insieme omeomorfo a \mathbb{R} . tutta questa struttura la possiamo rappresentare nel modo seguente

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \hookrightarrow & C = S^1 \times \mathbb{R} \\ & & \downarrow \pi \\ & & S^1 \end{array}$$

Ora generalizziamo il concetto di fibrato, intendendo con esso una costruzione composta dalle seguenti parti

- una varietà p -dimensionale P , detta *spazio totale*;
- una varietà m -dimensionale M , detta *base*;
- una mappa $\pi : P \rightarrow M$ suriettiva e continua, detta *proiezione*;
- uno spazio topologico F , detto *fibra tipica*, omeomorfo a tutte le fibre $\pi^{-1}(m \in M)$.

Possiamo rappresentarlo con un diagramma come nel caso del cilindro

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F} & \hookrightarrow & P \\ & & \downarrow \pi \\ & & M \end{array}$$

Notiamo che il cilindro è una situazione particolare e rientra nella classe di quelli che sono chiamati *fibrati globalmente banali*, ovvero spazi che possono essere scritti come prodotto diretto di due varietà. In questi casi possiamo scrivere $P = M \times N$ e il diagramma diventa

$$\begin{array}{ccc} N & \hookrightarrow & P = M \times N \\ & & \downarrow \pi \\ & & M \end{array}$$

In questi casi è possibile dimostrare l'esistenza di una *sezione globale*, cioè un'applicazione $s : M \rightarrow P$, dalla base allo spazio totale, continua e tale che $\pi \circ s = id_M$. Questa è evidentemente iniettiva e riproduce la varietà M all'interno dello spazio totale. Una situazione generale si ha prendendo in considerazione i *fibrati localmente banali*, cioè spazi che sono solo localmente omeomorfi a prodotti diretti di varietà. In questo caso lo spazio totale P e la base M possiedono un atlante

$$\begin{array}{ll} \{(U_i, \varphi_i)\} & \varphi_i : U_i \subset P \rightarrow \mathbb{R}^p \\ \{(V_i, \psi_i)\} & \psi_i : V_i \subset M \rightarrow \mathbb{R}^m \end{array}$$

tali che U_i (o $\pi^{-1}(V_j)$) sia omeomorfo a $V_j \times \mathcal{F}$. Non è però garantita l'esistenza di una sezione globale ma sicuramente esistono sezioni locali $s_j : V_j \rightarrow P$ tali che $\pi \circ s_j = id_{V_j}$.

Fibrazione di Hopf

Consideriamo ora il gruppo $SU(2)$ delle matrici unitarie 2×2 con determinante uguale a 1 (speciali):

$$SU(2) = \left\{ \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ -\bar{z}_2 & \bar{z}_1 \end{pmatrix}, (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \text{ tale che } |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1 \right\}$$

se scriviamo $z_1 = x_1 + ix_2$, $z_2 = x_3 + ix_4$, la condizione di unitarietà del determinante diventa $\sum_{i=1}^4 x_i^2 = 1$ che è l'equazione di una sfera tridimensionale. Perciò diremo che $SU(2)$, come spazio topologico è omeomorfo a una sfera tridimensionale

$$S^3 = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \text{ tale che } |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1\}$$

Si dice quindi che S^3 è la varietà del gruppo di Lie $SU(2)$.

Su S^3 possiamo definire una relazione di equivalenza

$$(z_1, z_2) \sim (z'_1, z'_2) \Leftrightarrow \exists \varphi \in [0, 2\pi] \text{ tale che } (z'_1, z'_2) = e^{i\varphi}(z_1, z_2)$$

Questa relazione identifica le classi di equivalenza $[(z_1, z_2)]_{\sim}$ sulla sfera S^3 che sono insiemi di punti che differiscono tra loro per un fattore di fase. Sia ora $M = S^3 / \sim$ (spazio

quoziente dato dalla relazione di equivalenza) l'insieme di tutte le classi di equivalenza. Allora definiamo la mappa suriettiva $\pi : S^3 \rightarrow M$, $\pi(z_1, z_2) = [(z_1, z_2)]_{\sim} \in M$. Manca la continuità per identificarla con la mappa della fibrazione, ma se dotiamo lo spazio M della topologia quoziente (ovvero $U \subset M$ è aperto se e solo se $\pi^{-1}(U) \subset S^3$ è aperto) allora la mappa π è una mappa di proiezione ed è continua. Inoltre, dato un $m \in M$, $\pi^{-1}(m) = \{e^{i\varphi}(z_1, z_2), \varphi \in [0, 2\pi]\}$ è un insieme omeomorfo al gruppo $U(1) = \{e^{i\varphi}, \varphi \in [0, 2\pi]\}$ che a sua volta omeomorfo a S^1 . Perciò la sfera tridimensionale è dotata della struttura di fibrato

$$\begin{array}{ccc} S^1 & \hookrightarrow & S^3 \\ & & \downarrow \pi \\ & & M \end{array}$$

Resta da studiare la struttura della base M . Possiamo subito dire che in essa saranno presenti due gradi di libertà, poiché S^3 ne ha 3 e S^1 ne ha 1. Sfruttando le matrici di Pauli $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

costruiamo la mappa

$$\mathbf{n} = z^\dagger \boldsymbol{\sigma} z$$

che scritta esplicitamente è

$$\begin{cases} n_1 = \bar{z}_1 z_2 + z_1 \bar{z}_2 \\ n_2 = -i(\bar{z}_1 z_2 - z_1 \bar{z}_2) \\ n_3 = |z_1|^2 - |z_2|^2 \end{cases}$$

La riscriviamo in termini di x_i (sapendo che è la forma utilizzata nel testo)

$$\begin{cases} n_1 = 2(x_1 x_3 + x_2 x_4) \\ n_2 = 2(x_1 x_4 - x_2 x_3) \\ n_3 = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - x_4^2 \end{cases}$$

Possiamo notare che gli n_i definiti da questa mappa non dipendono dal singolo punto (z_1, z_2) sulla sfera S^3 , ma dalla classe di equivalenza del punto, perciò questa mappa parametrizza M , e possiamo usarla come mappa di proiezione $\pi : S^3 \rightarrow M$, $\pi(z_1, z_2) = (n_1, n_2, n_3)$. E' facile verificare che $n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1$. Perciò M è un insieme omeomorfo alla sfera S^2 . Questa struttura è detta fibrazione di Hopf e la rappresentiamo con il diagramma

$$\begin{array}{ccc} S^1 & \hookrightarrow & S^3 \\ & & \downarrow \pi \\ & & S^2 \end{array}$$

Questo fibrato non è banale, infatti $S^3 \neq S^2 \times S^1$.

Bibliografia

- [1] H. Flanders, *Differential Forms with Applications to the Physical Sciences* (Dover Publications Inc.).
- [2] V.I Arnold, *Metodi Matematici della Meccanica Classica* (Editori Riuniti).
- [3] B. Schutz, *Geometrical Methods of Mathematical Physics* (Cambridge University Press).
- [4] R. P. Feynmann, R.B Leighton, M. Sands, *La Fisica di Feynmann, Elettromagnetismo e materia* (Zanichelli).
- [5] P. Mazzoldi, M. Nigro, C. Voci, *Fisica*, Vol.2 (EdiSES).
- [6] E. Catsigeras, *Differential Geometry and Electromagnetism*.
- [7] P.A.M Dirac, *Proc. Roy. Soc.*, A 133, 60 (1931).
- [8] M. V. Berry, *Proc. Roy. Soc.*, A 392, 45 (1984).
- [9] A. Messiah, *Quantum Mechanics*, Vol.2, Amsterdam: North Holland.
- [10] I.J Aitchison, *Acta Physica Polonica*, Vol. B18, 207 (1987).
- [11] T.T. Wu, C.N. Yang, *Phys. Rev.*, D 12, 3845 (1975).
- [12] M. Minami, *Prog. Theor. Phys.*, Vol.62, 1128 (1979).
- [13] V. Pietila, M. Mottonen, *Phys. rev. Lett.*, 103, 030401 (2009).
- [14] M. W. Ray, E. Ruokokoski, S. Kandel, M. Mottonen, D. S. Hall, *Nature*, Vol. 505, 657 (2014).
- [15] R. Bott, L. W. Tu, *Differential Forms in Algebraic Topology* (Springer Verlag).