

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

Scuola di Scienze
Corso di Laurea in Fisica

Termodinamica Dei Buchi Neri e Radiazione di Hawking

Relatore:
Prof. Roberto Casadio

Presentata da:
Luca Mantani

Sessione II
Anno Accademico 2013/2014

*Ai miei genitori
per avermi insegnato
a non dare nulla per scontato.*

Sommario

Questo lavoro di tesi si occupa dello studio dei buchi neri e delle loro proprietà termodinamiche da un punto di vista teorico. Nella prima parte si affronta una analisi teorico-matematica che mostra la soluzione dell'equazione di Einstein in relatività generale per un problema a simmetria sferica. Da questa soluzione si osserva la possibile presenza nell'universo di oggetti ai quali nemmeno alla luce è data la possibilità di fuggire, chiamati buchi neri. Ad ogni buco nero è associato un orizzonte degli eventi che si comporta come una membrana a senso unico: materia e luce possono entrare ma niente può uscire. È studiata inoltre la possibile formazione di questi oggetti, mostrando che se una stella supera un certo valore critico di massa, durante la fase finale della sua evoluzione avverrà un collasso gravitazionale che nessuna forza conosciuta sarà in grado di fermare, portando alla formazione di un buco nero.

Nella seconda parte si studiano le leggi meccaniche dei buchi neri. Queste leggi descrivono l'evoluzione degli stessi attraverso parametri come l'area dell'orizzonte degli eventi, la massa e la gravità di superficie. Si delinea quindi una analogia formale tra queste leggi meccaniche e le quattro leggi della termodinamica, con l'area dell'orizzonte degli eventi che si comporta come l'entropia e la gravità di superficie come la temperatura.

Nella terza parte, attraverso l'utilizzo della meccanica quantistica, si mostra che l'analogia non è solo formale. Ad un buco nero è associata l'emissione di uno spettro di radiazione che corrisponde proprio a quello di un corpo nero che ha una temperatura proporzionale alla gravità di superficie. Si osserva inoltre che l'area dell'orizzonte degli eventi può essere interpretata come una misura della informazione contenuta nel buco nero e di conseguenza della sua entropia.

Indice

Introduzione	2
1 La Soluzione di Schwarzschild	5
1.1 Metrica di Schwarzschild	5
1.2 Singolarità e Coni Luce	7
1.3 Geodetiche Radiali e Red-Shift Gravitazionale	9
1.4 Coordinate di Eddington-Finkelstein	10
1.5 Massima Estensione Analitica: la Soluzione di Kruskal	13
1.6 Diagramma di Penrose	16
1.7 Collasso Gravitazionale	18
2 Le Quattro Leggi della Termodinamica dei Buchi Neri	22
2.1 Gravità di Superficie di un Buco Nero	22
2.2 Legge Zero	25
2.3 Prima Legge	26
2.4 Seconda Legge	29
2.5 Terza Legge	31
2.6 Osservazioni Riassuntive	32
3 Radiazione di Hawking	33
3.1 Entropia di Bekenstein-Hawking	33
3.2 Radiazione di Hawking come Effetto Tunnel	35
3.3 Seconda Legge Generalizzata della Termodinamica	38
4 Conclusione	41
Bibliografia	43

Introduzione

Il concetto di buco nero nasce ben prima della relatività generale. Verso la fine dell'800, quando la gravità sembra essere ben spiegata dalla teoria Newtoniana, Mitchell e Laplace si chiedono quale sia il raggio r che un corpo di massa M debba avere affinché la sua velocità di fuga coincida con la velocità della luce c . Si consideri una particella con velocità $v = c$ che cerca di fuggire dal campo gravitazionale di una massa M . Il valore minimo del raggio della massa M si può trovare imponendo la condizione che l'energia della particella sia nulla. La conservazione dell'energia permette quindi di trovare la relazione

$$\frac{GM}{r} = \frac{1}{2}c^2.$$

Ribaltando la formula ed esplicitando r , si può trovare il raggio minimo che la massa da cui il corpo sta cercando di fuggire deve avere affinché sia impedita la fuga:

$$r = \frac{2GM}{c^2}.$$

Questi oggetti vengono chiamati dark star ma il loro studio viene rapidamente abbandonato poichè studiando la radiazione luminosa si scopre che i fotoni sono privi di massa e di conseguenza, per la teoria della gravità di Newton, non sono soggetti all'interazione gravitazionale: le dark star non possono esistere nell'universo.

Nel 1916 Einstein pubblica la teoria della relatività generale, reinterpretando la gravità: lo spazio-tempo è una varietà Riemanniana dotata di una metrica g_{ab} , la quale, dato il tensore energia impulso caratteristico della materia presente nello spazio tempo, soddisfa l'equazione di Einstein

$$G_{ab} = R_{ab} - \frac{1}{2}Rg_{ab} = 8\pi GT_{ab},$$

dove R_{ab} e R sono rispettivamente il tensore di Ricci e lo scalare di Ricci, costruiti a partire dalle derivate prime e seconde della metrica. Secondo questa teoria, le masse deformano lo spazio tempo cambiandone la metrica. Sarà proprio quest'ultima che determinerà le traiettorie delle masse nello spazio-tempo. In particolare anche la luce deve seguire le traiettorie imposte dalla metrica. Poche settimane dopo la pubblicazione del

lavoro di Einstein, il fisico tedesco Karl Schwarzschild fornisce una soluzione dell'equazione per un problema a simmetria sferica. La particolarità di questa soluzione è data dal fatto che si osserva la presenza di una singolarità delle coordinate per $r = 2GM/c^2$, lo stesso valore calcolato per le dark star. Si osserva che radiazione prodotta in prossimità di questo valore critico del raggio, subirebbe un red-shift infinito e non raggiungerebbe mai un osservatore posto infinitamente lontano. Si pose quindi il problema di determinare che cosa sarebbe successo se un corpo avesse avuto dimensioni inferiori a questo valore. Inizialmente la comunità scientifica era scettica sull'esistenza di oggetti di questo tipo in quanto si pensava che la natura "evitasse" la formazione di questi oggetti e di conseguenza non si pose il problema di studiarli.

Nel frattempo gli studi in ambito astrofisico e nucleare, portarono a una maggiore comprensione dei processi fisici che avvengono all'interno delle stelle. Si scoprì in particolare che una stella, finito il "combustibile" per le reazioni nucleari, subisce un collasso gravitazionale. Il destino del corpo celeste dipende dalla massa caratteristica del nucleo nella fase finale della sua evoluzione:

- Se la massa del nucleo è inferiore a 1,4 masse solari, la pressione degli elettroni dovuta all'effetto quantistico del principio di Pauli detta pressione di degenerazione, riesce a fermare il collasso. La stella così formata è detta nana bianca.
- Se la massa è compresa tra 1,4 e 4 masse solari, la pressione degli elettroni non riesce a fermare il collasso, i protoni e gli elettroni si fondono per formare neutroni che, essendo fermioni, fermano il collasso con la loro pressione di degenerazione.
- Se la massa è superiore a 4 masse solari, neanche la pressione di degenerazione dei neutroni riesce a fermare il collasso e la stella si contrae a tal punto da superare il raggio critico trovato da Schwarzschild.

Diventa quindi chiaro che queste particolari situazioni necessitano di essere studiate. Negli anni '50 Finkelstein scoprì che con un cambio di coordinate era possibile eliminare la singolarità in corrispondenza del valore critico del raggio trovato da Schwarzschild e studiare la regione dello spazio-tempo per $r < 2GM/c^2$. Si scoprì che sia luce che materia non possono uscire da questa regione interna e che quindi la superficie sferica a $r = 2GM/c^2$ è una membrana a senso unico: la materia e la luce possono entrare, ma nulla può uscire. Questa superficie viene chiamata orizzonte degli eventi. Date le caratteristiche, John Wheeler coniò il termine buco nero per questi oggetti. Nonostante la loro osservazione risulti essere estremamente complicata, al giorno d'oggi, tra i fisici, sono pochi i dubbi sulla loro esistenza.

Negli anni '70 si aprì un nuovo fronte di ricerca: la termodinamica dei buchi neri. Quest'ultima è l'area di studio che cerca di conciliare le leggi della termodinamica con l'esistenza di un orizzonte degli eventi. Una caratteristica strabiliante del mondo fisico è il fatto che, nonostante sia composto da un numero enorme di particelle ciascuna con la

propria posizione e momento, un sistema può essere descritto semplicemente in termini statistici attraverso una formulazione termodinamica. Questa descrizione comprende un numero molto piccolo di parametri come la temperatura, l'entropia, il volume, la pressione e così via. Quando questi sistemi interagiscono con l'ambiente, lo fanno in accordo con le quattro leggi della termodinamica. Uno dei risultati più sorprendenti della ricerca sui buchi neri degli ultimi quaranta anni è stata la realizzazione che la loro evoluzione può essere completamente descritta da un sistema di leggi molto simili alle leggi termodinamiche. Si trova infatti che, in analogia con i sistemi termodinamici, la dinamica dei buchi neri è descritta da un numero molto piccolo di parametri. La nascita di questa teoria si deve principalmente a S. Hawking e J. Bekenstein. Fu infatti Hawking che nei primi anni '70 si rese conto di una proprietà fondamentale dei buchi neri: l'area dell'orizzonte degli eventi non poteva mai diminuire. Hawking però non comprese a pieno la portata della scoperta, ma fu Bekenstein che nel 1973 pubblicò un articolo la cui tesi sostenuta era il fatto che l'area dell'orizzonte degli eventi fornisse una misura della entropia di un buco nero. Con questa ipotesi non sarebbe più stato violato il secondo principio della termodinamica nel caso in cui la materia fosse inghiottita da un buco nero. Infatti, se consideriamo il caso in cui materia con contenuto entropico cade in un buco nero, l'entropia totale della materia all'esterno di esso diminuirebbe. Dell'entropia all'interno del buco nero non si può dire nulla, non si possono estrarre informazioni dalla regione interna. Il secondo principio della termodinamica sarebbe violato, se non fosse per l'ipotesi di Bekenstein: quando la materia cade nel buco nero, aumenta l'entropia sottoforma di area dell'orizzonte degli eventi. Inizialmente questa ipotesi non fu però accolta positivamente: se un sistema è dotato di entropia deve essere dotato anche di temperatura, ma un buco nero per il principio zero della termodinamica ha formalmente temperatura nulla. Il problema fu successivamente risolto da Hawking dimostrando che, attraverso un procedimento quantistico, il buco nero emette radiazione con uno spettro termico ed è quindi dotato di temperatura. In particolare mostrò che le particelle emesse non provengono dall'interno del buco nero ma dallo spazio vuoto che si trova subito fuori dall'orizzonte degli eventi, attraverso un meccanismo di creazione di coppia. Nei capitoli seguenti si mostrerà inizialmente una descrizione della soluzione di Schwarzschild per un buco nero stazionario non rotante. Si studieranno poi le quattro leggi della termodinamica per questo particolare tipo di buco nero e infine il processo di radiazione di Hawking.

Capitolo 1

La Soluzione di Schwarzschild

Nel seguente capitolo sarà introdotta la soluzione dell'equazione di Einstein per un campo gravitazionale a simmetria centrale. In seguito saranno studiate le peculiarità, analizzando le sue simmetrie e singolarità. Saranno introdotti diversi sistemi di coordinate al fine di studiarne le proprietà globali.

Infine si discuterà il problema del collasso gravitazionale.

1.1 Metrica di Schwarzschild

L'obiettivo è quello di trovare una soluzione esatta dell'equazione di Einstein:

$$G_{ab} = R_{ab} - \frac{1}{2}Rg_{ab} = 8\pi GT_{ab}, \quad (1.1.1)$$

con R_{ab} tensore di Ricci, R la sua traccia, g_{ab} tensore metrico, G costante di gravitazione universale e T_{ab} tensore energia-impulso caratteristico della sorgente.

Si consideri un campo gravitazionale generato da una distribuzione a simmetria centrale di massa. La simmetria centrale del campo implica che la metrica dello spazio tempo debba essere identica in tutti i punti equidistanti dal centro. Al di fuori della sorgente di campo, ovvero nel vuoto, il tensore energia-impulso $T_{ab} = 0$. Di conseguenza la traccia del tensore di Einstein soddisfa la relazione

$$R - \frac{1}{2}Rg_a^a = -R = 0. \quad (1.1.2)$$

La equazione di Einstein diventa quindi

$$R_{ab} = 0. \quad (1.1.3)$$

Per trovare una soluzione a questa equazione facciamo utilizzo della presenza di simmetrie, ovvero l'esistenza di vettori di Killing.

Per cominciare si cerca una soluzione di tipo statico e quindi dovrà esistere un vettore di Killing di tipo tempo che denotiamo

$$\vec{\xi} = \frac{\partial}{\partial t}. \quad (1.1.4)$$

Inoltre, per la sopracitata simmetria sferica del problema, esistono 3 vettori di Killing di tipo spazio che generano le rotazioni attorno ai 3 assi coordinati

$$\vec{K}_i = \frac{d}{d\theta_i} \quad i = 1, 2, 3. \quad (1.1.5)$$

Questi 3 vettori si conservano nel tempo, il che significa che commutano con il vettore di Killing di tipo tempo,

$$\left[\frac{\partial}{\partial t}, \frac{d}{d\theta_i} \right] = 0. \quad (1.1.6)$$

Si assuma inoltre che la metrica sia tale per cui le rotazioni siano ortogonali a $\vec{\xi}$ e che si possano usare l'analogo delle coordinate polari per superfici a t costante.

Tutto ciò ci permette di scrivere la metrica nella forma diagonale generica

$$ds^2 = -A(r)dt^2 + B(r)dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2), \quad (1.1.7)$$

dove la coordinata r è stata scelta in modo che l'area della sfera sia $4\pi r^2$.

Attraverso questa scelta della metrica è ora possibile calcolare i simboli di Christoffel e di conseguenza il tensore di Ricci. Risolvendo l'equazione troviamo

$$A = 1 - \frac{2k}{r}, \quad B = A^{-1}, \quad (1.1.8)$$

con k costante, che determiniamo ponendoci in condizioni di campo debole e non relativistiche. Sfruttando la riduzione dell'equazione delle geodetiche alla legge di Newton

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} = \frac{1}{2} \eta^{ii} h_{00,i}, \quad (1.1.9a)$$

$$V = -\frac{1}{2} h_{00} = -\frac{k}{r}, \quad (1.1.9b)$$

segue $k = Gm$, con m massa della sorgente. La metrica di Schwarzschild è dunque

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2G_N m}{r} \right) dt^2 + \left(1 - \frac{2G_N m}{r} \right)^{-1} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2). \quad (1.1.10)$$

Il valore $r = 2Gm$ è conosciuto come *raggio di Schwarzschild* e sarà indicato con r_H . La coordinata temporale t è in relazione con l'orologio di un osservatore statico ad $r \rightarrow \infty$ dato che un osservatore statico ad $r = r_0$ misura, con il proprio orologio,

$$d\tau^2 = \left(1 - \frac{r_H}{r_0}\right) dt^2 \quad (1.1.11)$$

per cui $d\tau < dt$. La coordinata t è di tipo tempo e r è di tipo spazio quando $r > 2G_N m$, mentre le coordinate θ e ϕ sono sempre di tipo spazio [1].

1.2 Singolarità e Coni Luce

Un generico sistema di coordinate copre solo una porzione della varietà. Ad esempio le coordinate di Schwarzschild non coprono l'asse $\theta = 0, \pi$ dato che l'elemento di linea degenera e cessa di essere di rango 4. Questi tipi di punti sono chiamati singolarità delle coordinate, dato che riflettono mancanze del sistema di coordinate e sono perciò rimovibili. Ci sono altri 2 valori delle coordinate tali per cui l'elemento di linea degenera: $r = r_H$ e $r = 0$. La ipersuperficie $r = r_H$ si scopre essere una singolarità rimovibile. Si può verificare calcolando l'invariante di Kretschmann, a partire dal tensore di Riemann,

$$R_{ijkl}R^{ijkl} = 48m^2r^{-6} \quad (1.2.1)$$

che è finito in $r = r_H$. Essendo uno scalare, il suo valore rimane invariato in tutti i sistemi di coordinate e si può osservare che diverge per $r = 0$. La singolarità nell'origine non è perciò rimovibile. La ipersuperficie $r = r_H$ è nulla e divide la varietà in due componenti. Nella regione interna le coordinate t e r invertono il loro ruolo, con t che diventa di tipo spazio e r di tipo tempo.

È utile studiare ora le geodetiche radiali nulle. Al fine di determinare l'andamento dei coni luce in un diagramma spazio-tempo, abbiamo quindi:

$$ds^2 = \dot{\theta} = \dot{\phi} = 0, \quad (1.2.2)$$

a cui segue immediatamente

$$\left(1 - \frac{r_H}{r}\right)\dot{t}^2 - \left(1 - \frac{r_H}{r}\right)^{-1}\dot{r}^2 = 0, \quad (1.2.3)$$

dove il punto denota la derivata rispetto ad un parametro affine u . Per ricavare una equazione nella forma $t = t(r)$, si calcola

$$\frac{dt}{dr} = \frac{dt/du}{dr/du} = \frac{\dot{t}}{\dot{r}} = \pm \frac{r}{r - r_H} \quad (1.2.4)$$

dall'equazione (1.2.3). Se le geodetiche sono uscenti si prende il segno positivo, e la (1.2.4) può essere integrata, dando come risultato

$$t = r + r_H \ln |r - r_H| + cost. \quad (1.2.5)$$

Allo stesso modo si possono trovare le geodetiche entranti prendendo il segno meno nella (1.2.3):

$$t = -(r + r_H \ln |r - r_H| + cost). \quad (1.2.6)$$

Si noti che sotto la trasformazione $t \rightarrow -t$, le geodetiche entranti e uscenti si scambiano tra loro. Ora usiamo le congruenze per disegnare un diagramma spazio tempo della soluzione di Schwarzschild con due dimensioni sopresse (Fig. 1.2.1). Si nota che le geodetiche nulle tendono a diventare rette con angolo di 45° per $r \rightarrow \infty$, dato che la soluzione è asintoticamente piatta. I coni luce nella regione interna risultano ruotati dato che ora la linea $t = cost$ è di tipo tempo. Un osservatore in questa regione non può stare a riposo ma deve necessariamente muovere verso la singolarità [2]. Questo diagramma è comunque fuorviante e approfondiremo questo argomento in seguito.

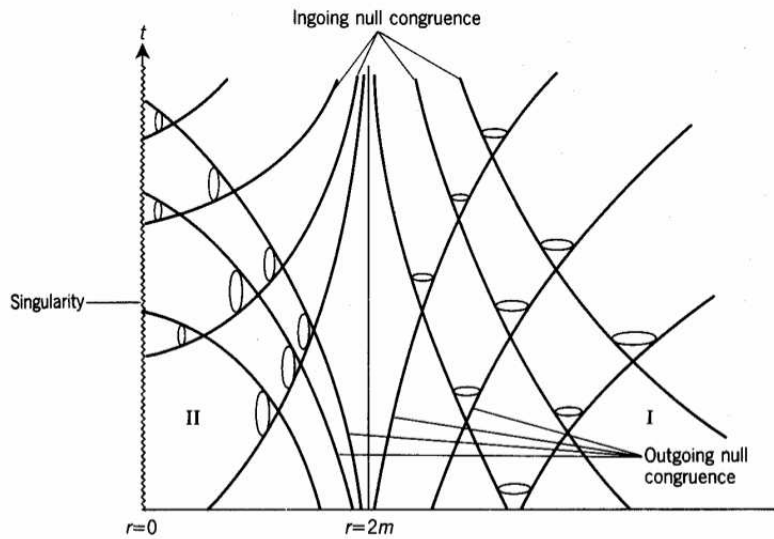


Figura 1.2.1: Diagramma Spazio-Tempo della soluzione di Schwarzschild

1.3 Geodetiche Radiali e Red-Shift Gravitazionale

Si consideri ora il moto di una particella di prova che compie una traiettoria radiale. Le sue equazioni del moto saranno date da:

$$\left(1 - \frac{r_H}{r}\right)\dot{t} = k. \quad (1.3.1a)$$

$$\left(1 - \frac{r_H}{r}\right)\dot{t}^2 - \left(1 - \frac{r_H}{r}\right)\dot{r}^2 = 1. \quad (1.3.1b)$$

con il punto che denota la derivata rispetto al tempo proprio τ . La scelta della costante k cambia solamente la condizione iniziale di caduta. Ad esempio $k = 1$ corrisponde a una particella che cade dall'infinito con velocità iniziale nulla. Dalle equazioni (1.3.1a) e (1.3.1b) si trova che

$$\left(\frac{d\tau}{dr}\right)^2 = \frac{r}{r_H}, \quad (1.3.2)$$

da cui si può vedere che l'ipersuperficie $r = r_H$ è attraversata in un intervallo di tempo proprio finito. Se invece si vuole descrivere il moto con la coordinata temporale t , abbiamo

$$\frac{dt}{dr} = \frac{\dot{t}}{\dot{r}} = -\left(\frac{r}{r_H}\right)\left(1 - \frac{r_H}{r}\right)^{-1}, \quad (1.3.3)$$

che diventa singolare in $r = r_H$ [3].

In particolare si può vedere che occorre un tempo $t \rightarrow \infty$ per raggiungere il raggio di Schwarzschild. Le due situazioni sono illustrate in figura. La coordinata t è utile e ha un significato fisico asintotico per grandi r dato che corrisponde al tempo proprio di un osservatore statico per $r \rightarrow \infty$. Dal punto di vista di quell'osservatore la particella impiega quindi un tempo infinito per raggiungere il raggio di Schwarzschild. D'altra parte, come abbiamo visto, la particella raggiunge $r = r_H$ in un tempo proprio finito. Risulta quindi chiaro che la coordinata t è inappropriata per la descrizione di questo tipo di moto. Per capire meglio il problema, studiamo il fenomeno del red-shift gravitazionale. Consideriamo una particella che cade emettendo fotoni, utilizzando geodetiche radiali nulle. Prima di tutto notiamo che, se esiste un vettore

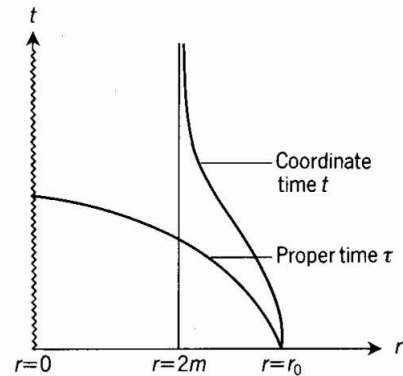


Figura 1.3.1: Traiettorie radiali con parametro t e τ

di Killing di tipo tempo, allora si può definire una quantità detta Energia di Killing, che si conserva lungo le geodetiche,

$$E = -\xi^a u_a \quad (1.3.4)$$

con u_a quadri-velocità. Osserviamo inoltre che la quadri-velocità di un osservatore statico deve essere proporzionale al vettore di Killing $\vec{\xi}$ e sarà quindi dato da

$$U^a = \frac{\xi^a}{\sqrt{-\xi^b \xi_b}} = \frac{\xi^a}{|\vec{\xi}|}, \quad (1.3.5)$$

dato che vale $U^a U_a = -1$. L'energia misurata dall'osservatore sarà quindi data da

$$\omega = -U^a u_a = -\frac{\xi^a u_a}{|\vec{\xi}|} = \frac{E}{|\vec{\xi}|}. \quad (1.3.6)$$

Si consideri ora un fotone che attraversa 2 osservatori statici nei punti r_1 e r_2 rispettivamente. Il rapporto tra le loro misure sarà dato da

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{|\vec{\xi}(r_2)|}{|\vec{\xi}(r_1)|} = \sqrt{\frac{1 - r_H/r_2}{1 - r_H/r_1}}. \quad (1.3.7)$$

Se $r_2 = r_s$ posizione della sorgente e $r_1 = r_o \gg r_H$ la posizione dell'osservatore si ha che

$$\omega_o \simeq \omega_s \sqrt{1 - \frac{r_H}{r_s}}. \quad (1.3.8)$$

Gli osservatori statici vedono quindi il fotone perdere energia quando risale il potenziale gravitazionale. Si osserva che quando la sorgente si trova sul raggio di Schwarzschild il fotone emesso non riesce a raggiungere l'osservatore. Per questo motivo il raggio di Schwarzschild è anche detto *orizzonte degli eventi* [4].

1.4 Coordinate di Eddington-Finkelstein

Si è visto nei paragrafi precedenti che la soluzione di Schwarzschild acquisisce un significato fisico ben preciso per $r > r_H$. Come vedremo in seguito però, un corpo sufficientemente massivo può collassare gravitazionalmente a tal punto da risultare interamente contenuto entro il proprio raggio di Schwarzschild, per cui la regione interna $r < r_H$ acquisisce un significato fisico rilevante. Come si è precedentemente osservato, $r = r_H$ non costituisce una singolarità intrinseca, bensì una singolarità del sistema di coordinate. Per questo motivo le coordinate precedentemente utilizzate non sono utili per lo studio della regione interna ed è quindi necessario introdurre nuove coordinate. Il motivo per cui le coordinate di Schwarzschild falliscono nella descrizione del punto $r = r_H$ è legato al fatto che esse

sono associate a osservatori statici, ma nel punto $r = r_H$ la quadri-accelerazione diverge, per cui risulta impossibile costruire un osservatore statico in quel punto. Cerchiamo di costruire quindi nuove coordinate. Definiamo tramite,

$$\bar{t} = t + r_H \ln(r - r_H), \quad (1.4.1)$$

una nuova coordinata temporale in modo che le geodetiche radiali nulle entranti diventino rette per $r > r_H$. Con questa coordinata la (1.2.6) diventa

$$\bar{t} = -r + \text{cost}, \quad (1.4.2)$$

e se sostituiamo

$$dt = d\bar{t} - \frac{r_H}{r - r_H} dr \quad (1.4.3)$$

nell'elemento di linea di Schwarzschild (1.1.10), si ottiene la forma di Eddington e Finklestein:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{r_H}{r}\right) d\bar{t}^2 + \frac{2r_H}{r} d\bar{t} dr + \left(1 + \frac{r_H}{r}\right) dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2). \quad (1.4.4)$$

La soluzione risulta ora regolare per $r = r_H$, e lo è in tutto il range $0 < r < r_H$. Quindi tale cambio di coordinate ha esteso la capacità delle coordinate di descrivere la varietà. Questo processo è chiamato *estensione analitica*. Nella regione in comune tra le 2 soluzioni, ovvero per $r > r_H$, le 2 soluzioni devono coincidere. Si veda infatti il diagramma spazio tempo in figura 1.4.1. Come nelle coordinate di Schwarzschild i coni luce si aprono a 45° quando $r \rightarrow \infty$. Tutte le geodetiche entranti sono ora a -45° mentre quelle uscenti si stringono sempre più rispetto alla verticale fino a raggiungerla in corrispondenza del raggio di Schwarzschild, mentre per $r < r_H$, le geodetiche uscenti risultano di fatto entranti. Da notare il fatto che sul raggio di Schwarzschild i fotoni uscenti rimangono “fermi” mentre i corpi massivi non possono più fuggire. Una caratteristica interessante della soluzione nelle coordinate di Eddington-Finklestein è il fatto che non è più simmetrica rispetto al tempo. Infatti per ottenere una soluzione con il tempo invertito è necessario introdurre una differente coordinata temporale

$$t^* = t - r_H \ln(r - r_H) \quad (1.4.5)$$

che trasforma le geodetiche radiali nulle uscenti in rette. Possiamo riscrivere la (1.4.4) in una forma più semplice introducendo una coordinata nulla

$$v = \bar{t} + r \quad (1.4.6)$$

chiamata tempo avanzato. La metrica diventa quindi:

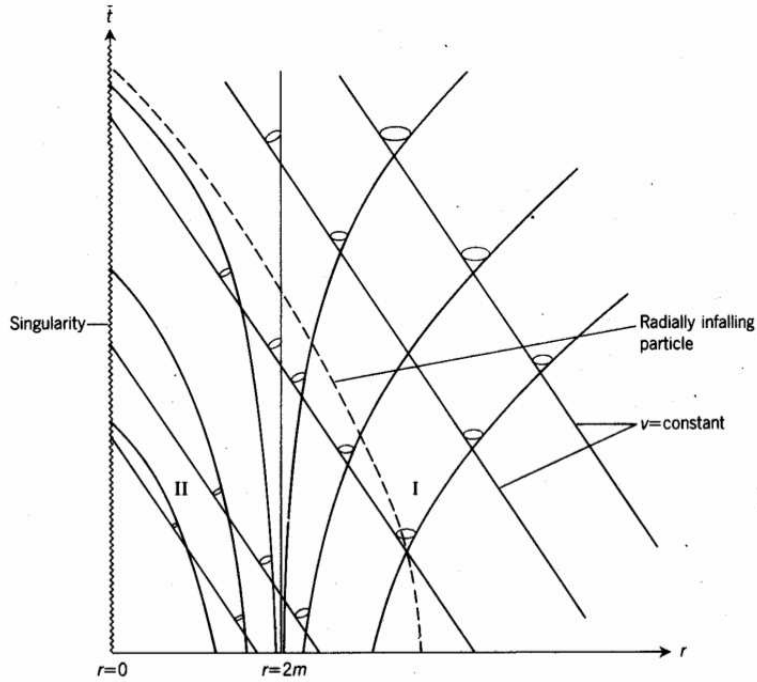


Figura 1.4.1: Diagramma Spazio-Tempo della soluzione di Schwarzschild con le coordinate di Eddington-Finkelstein

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{r_H}{r}\right)dv^2 + 2dvdr + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2). \quad (1.4.7)$$

Le geodetiche radiali nulle entranti sono ora date da $v = cost$. Dalla figura 1.4.1 risulta chiaro che la superficie ad $r = r_H$ si comporti come una membrana unidirezionale dato che geodetiche di tipo tempo e nulle possono solo entrare, ma nulla può uscire. Da ciò segue la denominazione orizzonte degli eventi, dato che un osservatore inerziale nella regione esterna non può ricevere segnali di alcun tipo dalla regione interna. Se definissimo diversamente la coordinata nulla, tipo $w = t^* - r$ detto parametro di tempo ritardato, allora l'elemento di linea diverrebbe:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{r_H}{r}\right)dw^2 - 2dwdr + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2). \quad (1.4.8)$$

Questa soluzione è ancora regolare nella regione $0 < r < \infty$ e corrisponde alla soluzione avanzata di Eddington-Finkelstein ma con il tempo invertito. La superficie ad $r = r_H$ è ancora unidirezionale, ma questa volta agisce nell'altra direzione temporale, permettendo alle geodetiche di tipo tempo e nulle di uscire ma non di entrare (vedi figura 1.4.2) [5].

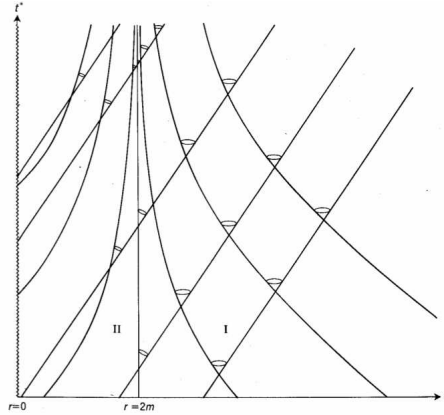


Figura 1.4.2: Diagramma Spazio-Tempo della soluzione di Schwarzschild con le coordinate di Eddington-Finkelstein ritardate

1.5 Massima Estensione Analitica: la Soluzione di Kruskal

È stato appena visto che la soluzione di Schwarzschild può essere estesa sia nella soluzione avanzata di Eddington-Finkelstein, sia in quella ritardata. Ora si vuole vedere se sia possibile una ulteriore estensione. Una varietà dotata di una geometria metrica è detta massimale se qualsiasi geodetica che parte da un punto arbitrario della varietà, o si estende per valori infiniti del parametro affine in entrambe le direzioni o finisce in una singolarità intrinseca. La soluzione di Eddington-Finkelstein non è massimale e può quindi essere estesa. L'idea alla base utilizzata per estendere la soluzione è quella di rettificare sia le geodetiche nulle uscenti che quelle entranti. Si introduce quindi la coordinata avanzata v e la coordinata ritardata w , così che l'elemento di linea diventi:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{r_H}{r}\right)dvdw + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2), \quad (1.5.1)$$

con r che ora è una funzione di v e w . Se ci poniamo a θ e ϕ costanti, si ha quindi la metrica

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{r_H}{r}\right)dvdw. \quad (1.5.2)$$

Si può vedere che questa metrica è conformemente piatta, ovvero

$$ds^2 = A^2(r, t)(-dt^2 + dx^2). \quad (1.5.3)$$

Se infatti si definisce:

$$t = \frac{1}{2}(v + w), \quad x = \frac{1}{2}(v - w),$$

la (1.5.2) diviene

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_H}{r}\right)(-dt^2 + dx^2). \quad (1.5.4)$$

Il cambio di coordinate più generale che lascia il 2-spazio conformemente piatto è dato da

$$V = V(v), \quad W = W(w)$$

e l'elemento di linea si legge

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{r_H}{r}\right) \frac{dv}{dV} \frac{dw}{dW} dV dW. \quad (1.5.5)$$

Introducendo

$$T = \frac{1}{2}(V + W), \quad X = \frac{1}{2}(V - W),$$

si può scrivere la (1.5.2) nella forma generale

$$ds^2 = F^2(T, X)(-dT^2 + dX^2). \quad (1.5.6)$$

Il cambio di coordinate scelto da Kruskal è

$$V = \exp(v/2r_H), \quad (1.5.7a)$$

$$W = -\exp(-w/2r_H), \quad (1.5.7b)$$

da cui si trova che F è dato da

$$F^2 = \frac{4r_H^2}{r} \exp(-r/r_H), \quad (1.5.8)$$

con r determinato dall'equazione implicita

$$T^2 - X^2 = -(r - r_H) \exp(r/r_H). \quad (1.5.9)$$

L'elemento di linea diventa quindi:

$$ds^2 = -\frac{4r_H^2}{r} \exp\left(-\frac{r}{r_H}\right) dT^2 + \frac{4r_H^2}{r} \exp\left(-\frac{r}{r_H}\right) dX^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2). \quad (1.5.10)$$

Presentiamo ora un diagramma spazio tempo nelle coordinate di Kruskal (Fig. 1.5.1). Come precedentemente detto, i coni luce sono ora costituiti da linee rette con un angolo di 45° .

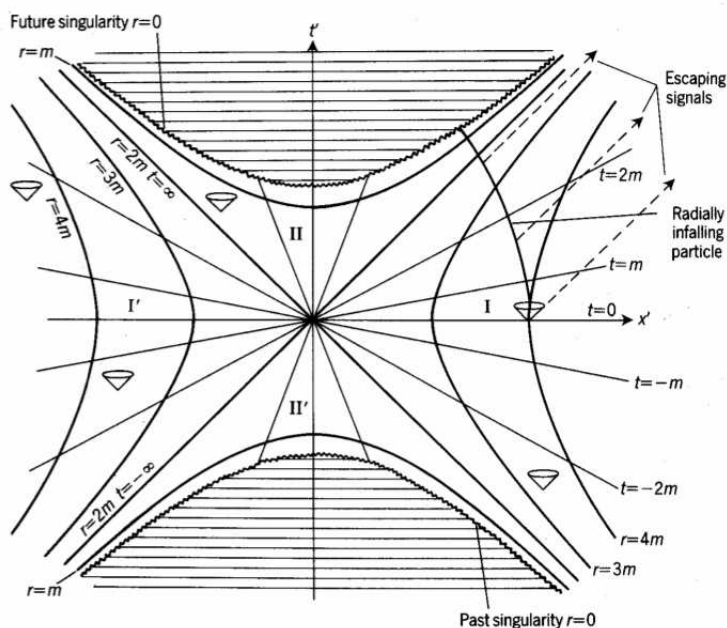


Figura 1.5.1: Diagramma Spazio-Tempo della soluzione di Schwarzschild con le coordinate di Kruskal

La figura mostra una geodetica radiale di tipo tempo che parte da $(r = 2r_H, T = 0)$ e cade nell'orizzonte degli eventi finendo nella singolarità futura ad $r = 0$. Si nota dalla (1.5.9) che un valore di r determina due ipersuperfici. In due dimensioni, lo spazio tempo è limitato da 2 iperboli che rappresentano la singolarità passata e futura, corrispondenti ad $r = 0$. La singolarità futura è di tipo spazio e quindi irraggiungibile nella regione II. Gli asintoti delle iperboli rappresentano l'orizzonte degli eventi, corrispondenti a $r = r_H$. Questi asintoti dividono lo spazio tempo in quattro regioni. Le regioni I e II corrispondono alle regioni in coordinate avanzate di Eddington-Finkelstein, con in particolare la regione I che non è altro che la soluzione di Schwarzschild per $r > r_H$ e la regione II è la soluzione di Buco Nero. Le regioni I e II' corrispondono invece alla soluzione ritardata di Eddington-Finkelstein e la regione II' rappresenta la soluzione di Buco Bianco. C'è inoltre una nuova regione, chiamata I', che è geometricamente identica alla regione I. [6]

1.6 Diagramma di Penrose

In questo paragrafo sarà introdotto il diagramma di Penrose, considerando inizialmente il caso dello spazio-tempo di Minkowski [7]. L'idea alla base è quella di partire da una metrica fisica g_{ab} e introdurre una nuova metrica non fisica \bar{g}_{ab} conformemente relazionata a g_{ab} tramite le trasformazioni di Weyl

$$\bar{g}_{ab} = \Omega^2 g_{ab}, \quad (1.6.1)$$

in cui Ω è una funzione reale, chiamato fattore conforme. Con una opportuna scelta del fattore conforme è possibile portare l'intero spazio tempo in una porzione finita, così da studiare la struttura causale dell'infinito. È semplice verificare che le geodetiche nulle di metriche conformemente collegate sono identiche. Le geodetiche nulle rappresentano i coni luce che determinano la struttura causale dello spazio-tempo. L'idea essenziale per portare l'intero spazio-tempo in un diagramma di dimensioni finite, è quella di utilizzare trasformazioni di coordinate con funzioni tipo $\arctan x$ che mappano l'intervallo $(-\infty, +\infty)$ nell'intervallo finito $(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2})$. Si introducono ora le coordinate nulle definite da

$$v = t + r, \quad (1.6.2a)$$

$$w = t - r. \quad (1.6.2b)$$

Di conseguenza l'elemento di linea nello spazio tempo di Minkowski diventa

$$ds^2 = -dvdw + \frac{1}{4}(v-w)^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2). \quad (1.6.3)$$

Per quanto riguarda il range dei valori assunti dalle coordinate v e w si ha $(-\infty < v < +\infty, -\infty < w < +\infty)$ con la condizione

$$v \geq w. \quad (1.6.4)$$

Si definiscono ora le nuove coordinate

$$p = \arctan v, \quad (1.6.5a)$$

$$q = \arctan w, \quad (1.6.5b)$$

dove per via della (1.6.4) vale

$$p \geq q. \quad (1.6.6)$$

L'elemento di linea diviene quindi

$$ds^2 = \frac{1}{4} \sec^2 p \sec^2 q [-4dpdq + \sin^2(p-q)(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)], \quad (1.6.7)$$

mentre l'elemento di linea della metrica non fisica è dato da

$$ds^2 = -4dpdq + \sin^2(p - q)(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (1.6.8)$$

Questo processo sin qui descritto è chiamato compattificazione conforme. La regione spazio-tempo è costituita dalle seguenti sottovarietà:

- una superficie nulla $p = \frac{1}{2}\pi$ denominata \mathcal{I}^+ ,
- una superficie nulla $q = \frac{1}{2}\pi$ denominata \mathcal{I}^- ,
- un punto $(p = \frac{1}{2}, q = \frac{1}{2})$ denominato i^+ ,
- un punto $(p = \frac{1}{2}, q = -\frac{1}{2})$ denominato i^0 ,
- un punto $(p = -\frac{1}{2}, q = -\frac{1}{2})$ denominato i^- .

Si può dimostrare che tutte le geodetiche di tipo tempo hanno origine in i^- e terminano in i^+ . Analogamente le geodetiche nulle hanno origine in \mathcal{I}^- e terminano in \mathcal{I}^+ . Le geodetiche di tipo spazio invece hanno origine e terminano in i^0 . Si può quindi pensare che i^- e i^+ rappresentano l'infinito di tipo tempo passato e futuro, che \mathcal{I}^- e \mathcal{I}^+ rappresentino l'infinito di tipo nullo passato e futuro e che i^0 rappresenti l'infinito di tipo spazio. Tutto ciò è rappresentato in figura 1.6.1. Le geodetiche radiali nulle in questo

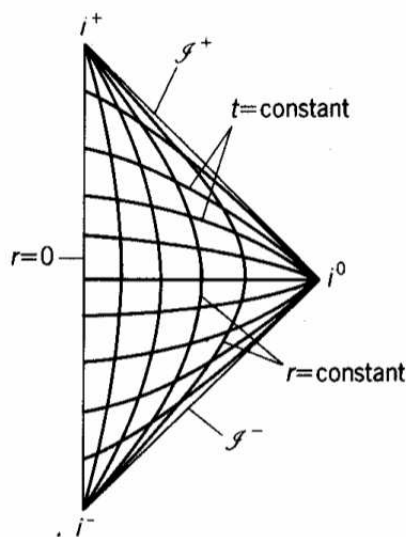


Figura 1.6.1: Diagramma di Penrose dello spazio-tempo di Minkowski con 2 dimensioni sopresse

diagramma sono linee a p e q costante inclinate a -45° e 45° rispettivamente. Seguendo un

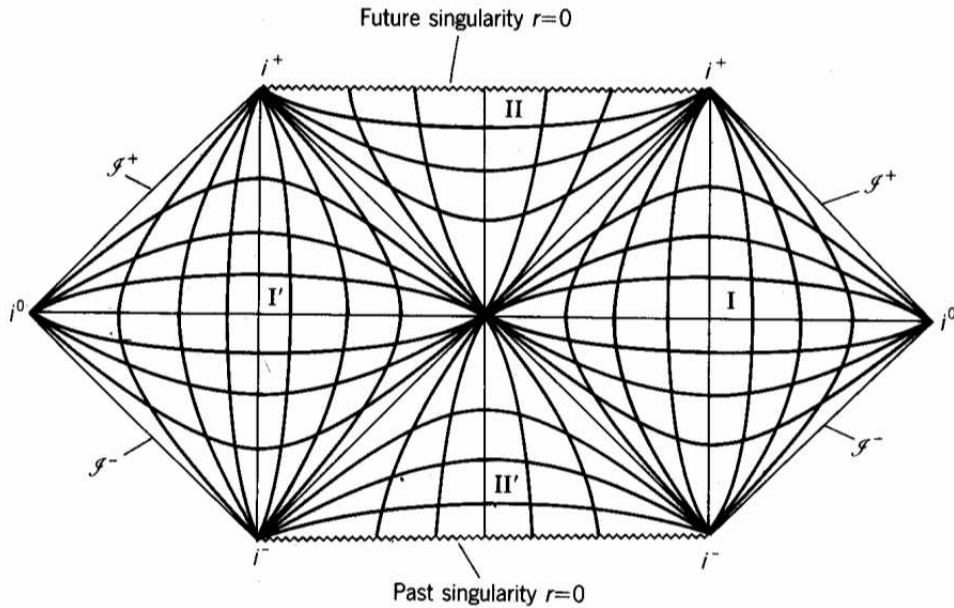


Figura 1.6.2: Diagramma di Penrose dello spazio-tempo di Kruskal

procedimento simile si può quindi realizzare un diagramma di Penrose della soluzione di Kruskal, presentato in figura 1.6.2. I coni luce sono dati ancora dalle rette a -45° e 45° . Per un qualsiasi punto al di fuori di $r = r_H$, le geodetiche nulle uscenti finiscono su \mathcal{I}^+ . Per i punti all'interno di $r = r_H$, sia le geodetiche nulle entranti che quelle uscenti finiscono sulla singolarità futura.

1.7 Collasso Gravitazionale

Per descrivere adeguatamente un buco nero in termini fisici, è necessario analizzare la natura del collasso gravitazionale di una stella. La teoria predice infatti che, in determinate condizioni, le forze gravitazionali sono talmente intense che non può esistere una forza che si opponga al collasso. La stella si restringe quindi a tal punto da oltrepassare il proprio raggio di Schwarzschild e si forma un buco nero. In particolare, stelle con masse dell'ordine di quella solare, durante il collasso, riescono a bilanciare le forze gravitazionali trovando un equilibrio. Al contrario per stelle con masse molto maggiori l'equilibrio non viene raggiunto e la stella prosegue inesorabile la propria contrazione. Si immagini ora di osservare un collasso gravitazionale. Abbiamo una stella a simmetria sferica, per cui al di fuori della sorgente avremo la metrica di Schwarzschild (1.1.10). Si assuma che il collasso prosegua a simmetria sferica così che esternamente continui a esistere la metrica di Schwarzschild (Fig. 1.7.1). Durante il collasso una particella sulla

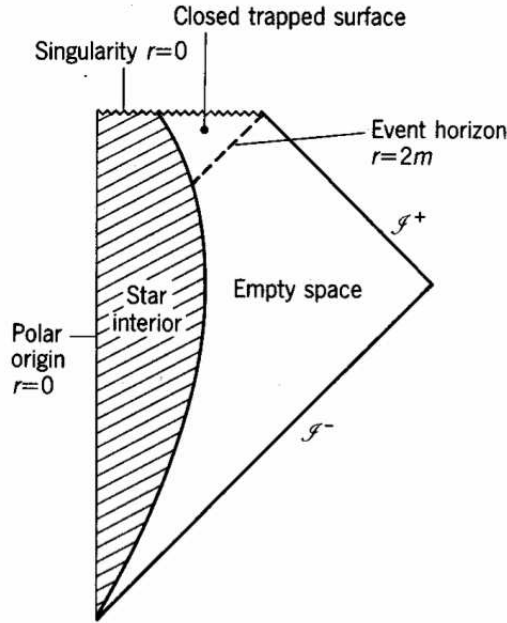


Figura 1.7.1: Diagramma di Penrose del collasso gravitazionale

superficie della stella dovrà percorrere una geodetica radiale di tipo tempo [8]. Per capire il collasso gravitazionale di una stella e la formazione di un buco nero dobbiamo studiare la configurazione statica che descrive l'interno di una stella. Dobbiamo quindi risolvere l'equazione di Einstein all'interno della sorgente

$$G_{ab} = 8\pi G_N T_{ab}. \quad (1.7.1)$$

Essendo il problema a simmetria sferica e indipendente dal tempo, la forma più generale possibile della metrica è data da una forma leggermente modificata della (1.1.7):

$$ds^2 = -e^{2\alpha(r)} dt^2 + e^{2\beta(r)} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2). \quad (1.7.2)$$

Si assuma che la stella sia formata da un fluido perfetto. Il suo tensore energia impulso sarà quindi dato da:

$$T_{ab} = (\rho + p)U_a U_b + p g_{ab}. \quad (1.7.3)$$

Con U_a quadri-velocità del fluido. Siccome cerchiamo soluzioni statiche, $U_a = (e^\alpha, 0, 0, 0)$. Il tensore energia impulso avrà quindi la forma:

$$T_{ab} = \begin{pmatrix} e^{2\alpha}\rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{2\beta}p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta p \end{pmatrix} \quad (1.7.4)$$

Risolviendo l'equazione si trova la metrica

$$ds^2 = -e^{2\alpha(r)} dt^2 + \left(1 - \frac{2G_N m(r)}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), \quad (1.7.5)$$

con

$$m(r) = 4\pi \int_0^r \rho(r') r'^2 dr. \quad (1.7.6)$$

Immaginiamo ora che la nostra stella abbia raggio R . Per far sì che la metrica nel punto $r = R$ coincida con quella di Schwarzschild deve valere

$$M = m(R) = 4\pi \int_0^R \rho(r) r^2 dr, \quad (1.7.7)$$

con M massa della stella. Sembra quindi che $m(r)$ si possa interpretare come la massa racchiusa entro il raggio r . In realtà l'elemento di volume dovrebbe essere $d^3x = e^{\beta} r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi$, per cui abbiamo che l'energia totale racchiusa entro il volume è

$$\bar{M} = 4\pi \int_0^R \rho(r) r^2 e^{\beta(r)} dr = 4\pi \int_0^R \frac{\rho(r) r^2}{\left(1 - \frac{2G_N m(r)}{r}\right)^{\frac{1}{2}}} dr. \quad (1.7.8)$$

Esiste dunque una energia di legame dovuta alla mutua attrazione del fluido nella stella:

$$E_B = \bar{M} - M > 0. \quad (1.7.9)$$

Dall'equazione di Einstein si trova inoltre l'equazione di Tolman-Oppenheimer-Volkoff o più semplicemente, l'equazione di equilibrio idrostatico

$$\frac{dp}{dr} = -\frac{(\rho + p)[G_N m(r) + 4\pi G_N r^3 p]}{r(r - 2G_N m(r))}. \quad (1.7.10)$$

Questa equazione relaziona densità e pressione. Un modello semplice e realistico di una stella si ha assumendo che il fluido sia incompressibile, ovvero che la sua densità sia costante nello spazio. Si assume quindi $\rho = \rho_*$. Si può calcolare una espressione per $p(r)$

e per $e^{\alpha(r)}$:

$$p(r) = \rho_* \left[\frac{R\sqrt{R-r_H} - \sqrt{R^3 - r_H r^2}}{\sqrt{R^3 - r_H r^2} - 3R\sqrt{R-r_H}} \right],$$

$$e^{\alpha(r)} = \frac{3}{2} \left(1 - \frac{r_H}{r} \right)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{r_H r^2}{R^3} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Si osserva quindi un aumento della pressione avvicinandosi al nucleo. Se la massa della stella $M \geq 4R/9G_N$, $p(0)$ deve essere infinita per opporsi al collasso. Questo significa che esiste una densità massima sostenibile in natura. Anche se abbiamo trovato questa condizione assumendo ρ costante, il risultato resta valido anche in generale (teorema di Buchdahl). Vediamo ora la situazione per stelle realistiche. La pressione che sostiene una stella deriva dal calore prodotto dalle reazioni termonucleari nel nucleo. Quando queste ultime cessano di produrre energia, e di conseguenza, non hanno più luogo, la stella va incontro al collasso gravitazionale. Ciò può essere fermato dalla pressione di degenerazione di Fermi degli elettroni e la stella diventa una nana bianca. Se però la massa $M \geq 1,4M_S$ (limite di Chandrasekhar con M_S massa del Sole), il collasso non riesce ad essere interrotto. Gli elettroni quindi si combinano con i protoni e si realizza una stella di neutroni. Se $M > 3 - 4M_S$ (limite di Oppenheimer-Volkoff) neanche la pressione generata dai neutroni può fermare il collasso che porta la stella alla formazione di un buco nero [9].

Capitolo 2

Le Quattro Leggi della Termodinamica dei Buchi Neri

Negli ultimi decenni la ricerca sui buchi neri ha condotto a forti indizi su una profonda relazione tra gravità, termodinamica e meccanica quantistica. Il principio di questa relazione si può osservare con le leggi meccaniche dei buchi neri che hanno forti somiglianze con le quattro leggi della termodinamica [10]. Si dimostrerà, ad esempio, che l'area di un buco nero non può diminuire, in analogia con l'entropia di un sistema termodinamico. Sorgono però dei problemi evidenti nel tentativo di contrapporre le leggi meccaniche a quelle termodinamiche. Il primo è la ricerca di un analogo della temperatura. Siccome il buco nero non permette fuoriuscita nemmeno di radiazione, per la legge del corpo nero, la sua temperatura deve essere nulla. Inoltre l'area di un buco nero non diminuisce mai, ma in termodinamica è l'entropia totale a non diminuire, non l'entropia del sistema. La soluzione di questi problemi è da ricercare con l'utilizzo della meccanica quantistica. In questo capitolo ci si soffermerà però a uno studio classico del problema.

2.1 Gravità di Superficie di un Buco Nero

Per lo sviluppo della teoria sono necessari i concetti di isometria e vettore di Killing. Se il nostro spazio tempo è dotato di una metrica, si può costruire una applicazione che trasporti i punti in altri punti. Se la applicazione è differenziabile, si dice diffeomorfismo. Se il diffeomorfismo lascia invariata la metrica allora è una isometria. Se esiste una isometria si possono definire orbite lungo le quali la metrica rimane invariata e il vettore tangente a queste orbite è detto vettore di Killing. Vale quindi l'equazione

$$\mathcal{L}_\xi g = 0. \tag{2.1.1}$$

Esiste una relazione molto importante per i vettori di Killing, detta equazione di Killing

$$\nabla_a \xi_b + \nabla_b \xi_a = 0. \quad (2.1.2)$$

Si vuole ora definire una grandezza detta *gravità di superficie*, associata all'orizzonte degli eventi di un buco nero di Schwarzschild [11]. Si consideri un buco nero con orizzonte degli eventi dato da una ipersuperficie nulla. Esiste un campo di Killing $\xi^a = \frac{\partial}{\partial t}$ di tipo tempo ortogonale all'orizzonte degli eventi. Su quest'ultimo vale inoltre $\xi^a \xi_a = 0$. In particolare $\xi^a \xi_a$ è costante lungo tutto l'orizzonte degli eventi, per cui la sua derivata covariante è normale all'orizzonte e quindi parallela a ξ^a . Definiamo una costante di proporzionalità κ , detta gravità di superficie:

$$\nabla^a (\xi^b \xi_b) = -2\kappa \xi^a, \quad (2.1.3a)$$

$$\xi_b \nabla^a \xi^b + \xi^b \nabla^a \xi_b = -2\kappa \xi^a, \quad (2.1.3b)$$

$$\kappa \xi^a = -\xi_b \nabla^a \xi^b = \xi_b \nabla^b \xi^a. \quad (2.1.3c)$$

La gravità di superficie di un buco nero stazionario si può definire assumendo che l'orizzonte degli eventi sia un orizzonte di Killing, ovvero che i generatori nulli dell'orizzonte siano orbite del campo di Killing. Si assuma ora che κ non sia zero. Una volta capito il significato fisico di κ cercheremo di capire cosa significa farlo uguale a 0. Il teorema di Frobenius in geometria differenziale ci da un criterio per stabilire se un dato campo vettoriale in una varietà M sia ortogonale a una sottovarietà di M . Se si considera l'orizzonte degli eventi come sottovarietà, il teorema ci dice che il campo di Killing deve soddisfare la seguente uguaglianza:

$$\xi_{[a} \nabla_b \xi_{c]} = 0. \quad (2.1.4)$$

Da questa equazione e utilizzando la equazione (2.1.2) si trova che

$$\xi_c \nabla_a \xi_b = \xi_b \nabla_a \xi_c - \xi_a \nabla_b \xi_c = -2\xi_{[a} \nabla_{b]} \xi_c. \quad (2.1.5)$$

Se ora si moltiplicano entrambi i membri per $\nabla^a \xi^b$

$$\begin{aligned} \xi_c (\nabla^a \xi^b) (\nabla_a \xi_b) &= (\nabla^a \xi^b) (\xi_b \nabla_a \xi_c) - (\nabla^a \xi^b) (\xi_a \nabla_b \xi_c) = -2(\xi_a \nabla^a \xi^b) (\nabla_b \xi_c) = \\ &= -2\kappa (\xi^b \nabla_b \xi_c) = -2\kappa^2 \xi_c, \end{aligned} \quad (2.1.6)$$

dove nella seconda uguaglianza è stata usata la equazione di Killing e nella terza e nella quarta la definizione di κ (2.1.3c). Per cui esplicitando κ dalla equazione precedente, si trova che sull'orizzonte degli eventi, vale

$$\kappa^2 = -\frac{1}{2} (\nabla^a \xi^b) (\nabla_a \xi_b). \quad (2.1.7)$$

Non è però ben chiaro da questa trattazione, quale sia il significato fisico di κ . Al fine di comprenderlo si può verificare che vale la seguente uguaglianza in tutto lo spazio:

$$\frac{3(\xi^{[a}\nabla^b\xi^c])(\xi_{[a}\nabla_b\xi_{c]})}{\xi^a\xi_a} = -2\kappa^2 - \frac{2(\xi^b\nabla_b\xi^c)(\xi^a\nabla_a\xi_c)}{\xi^a\xi_a}. \quad (2.1.8)$$

Se ora si valuta l'uguaglianza nel limite per $r \rightarrow r_H$, nella parte sinistra dell'equazione il numeratore va a zero per (2.1.4) mentre il denominatore va a zero dato che sull'orizzonte degli eventi il modulo del campo di Killing è nullo. Si può però verificare con la regola de l'Hopital che il numeratore va a zero più velocemente, quindi la parte sinistra si annulla avvicinandosi all'orizzonte degli eventi. Di conseguenza si ha

$$\kappa^2 = -\frac{(\xi^b\nabla_b\xi^c)(\xi^a\nabla_a\xi_c)}{\xi^d\xi_d}. \quad (2.1.9)$$

Si definisce un vettore a^c e uno scalare V nel modo seguente:

$$a^c = \frac{\xi^b\nabla_b\xi^c}{-\xi^a\xi_a}, \quad (2.1.10a)$$

$$V = (-\xi^d\xi_d)^{\frac{1}{2}}. \quad (2.1.10b)$$

Come vedremo in seguito a^c è la quadri-accelerazione di un osservatore statico mentre V non è altro che il fattore di red-shift calcolato nel paragrafo 1.3. Per cui κ si può scrivere come

$$\kappa = \lim_{r \rightarrow r_H} (Va) \quad (2.1.11)$$

con $a = (a^c a_c)^{\frac{1}{2}}$. Grazie a questa formula si può capire il significato fisico di κ . Nello spazio-tempo di Schwarzschild, stare fermi, significa muoversi lungo il campo di Killing. Una particella che ha quadrivelocità u^a che soddisfa l'equazione delle geodetiche $u^a\nabla_a u^b = 0$ è in caduta libera. Se però $u^a\nabla_a u^b = a^b \neq 0$, allora la particella è accelerata con accelerazione a^b . Si prenda ora una particella che stia ferma e che abbia quindi quadrivelocità

$$u^a = \frac{\xi^a}{(-\xi^b\xi_b)^{\frac{1}{2}}}, \quad (2.1.12)$$

in modo che valga $u^a u_a = -1$. La accelerazione quindi è data da

$$a^b = \frac{\xi^a\nabla_a\xi^b}{(-\xi^b\xi_b)} = \frac{\xi^a\nabla_a\xi^b}{V^2}. \quad (2.1.13)$$

La forza necessaria per opporsi alla forza di gravità di conseguenza è

$$ma^b = m\frac{\xi^a\nabla_a\xi^b}{V^2} = -\frac{m}{2V^2}(\xi^a\nabla^b\xi_a + \xi_a\nabla^b\xi^a) = \frac{m}{V}\nabla^b(-\xi^a\xi_a)^{\frac{1}{2}} = \frac{m}{V}\nabla^b(V), \quad (2.1.14)$$

dove abbiamo usato l'equazione di Killing e la definizione (2.1.10b). Un osservatore lontano dal buco nero vede la particella ferma con energia:

$$E = -m\xi^a u_a = -m \frac{\xi^a \xi_a}{V} = m \frac{V^2}{V} = mV. \quad (2.1.15)$$

Si immagini ora che questo osservatore eserciti una forza per tenere ferma la particella nei pressi dell'orizzonte degli eventi, come se la tirasse con una corda. La forza che deve esercitare l'osservatore è data da:

$$F_\infty = (F^a F_a)^{\frac{1}{2}} = [(-\nabla^a E)(-\nabla_a E)]^{\frac{1}{2}} = m[\nabla^a V \nabla_a V]^{\frac{1}{2}}. \quad (2.1.16)$$

D'altra parte, nel sistema di riferimento della particella, la forza esercitata per farla stare ferma è data da:

$$F = m(a^b a_b)^{\frac{1}{2}} = \frac{m}{V}[\nabla^a V \nabla_a V]^{\frac{1}{2}}. \quad (2.1.17)$$

La forza richiesta per tenere ferma la particella è più piccola di un fattore V a grande distanza. κ è quindi interpretabile come la forza per unità di massa $F = Va$ richiesta da un osservatore distante per tenere una particella sull'orizzonte degli eventi. Per questo motivo κ è chiamata gravità di superficie di un buco nero. Per un buco nero di Schwarzschild vale:

$$\kappa = \frac{1}{4M}, \quad (2.1.18)$$

per cui un buco nero più massivo ha una gravità di superficie minore. Si può notare che è lo stesso valore di gravità che ha una massa M sferica con raggio $2M$ sulla sua superficie nella teoria newtoniana.

2.2 Legge Zero

In questo paragrafo si vuole mostrare che la gravità di superficie κ è costante sull'orizzonte degli eventi. Si prenda la definizione di κ

$$\xi^b \nabla_b \xi_a = \kappa \xi_a. \quad (2.2.1)$$

Si moltiplichino ora entrambi i membri dell'equazione per $\xi_{[d} \nabla_{c]}$ si ha

$$\begin{aligned} \xi_{[d} \nabla_{c]}(\kappa \xi_a) &= \xi_a \xi_{[d} \nabla_{c]} \kappa + \kappa \xi_{[d} \nabla_{c]} \xi_a = \xi_{[d} \nabla_{c]}(\xi^b \nabla_b \xi_a) = \\ &= (\xi_{[d} \nabla_{c]} \xi^b)(\nabla_b \xi_a) + \xi^b \xi_{[d} \nabla_{c]}(\nabla_b \xi_a) = \\ &= (\xi_{[d} \nabla_{c]} \xi^b)(\nabla_b \xi_a) + \xi^b (\xi_d \nabla_c \nabla_b \xi_a - \xi_c \nabla_d \nabla_b \xi_a) = \\ &= (\xi_{[d} \nabla_{c]} \xi^b)(\nabla_b \xi_a) - \xi^b R_{ba[c}{}^e \xi_{d]} \xi_e, \end{aligned} \quad (2.2.2)$$

dove l'ultima uguaglianza è data dalla definizione di tensore di Riemann e la equazione di Killing. Si può dimostrare che il primo termine a destra è uguale al termine a sinistra e di conseguenza si semplificano:

$$(\xi_{[d}\nabla_{c]}\xi^b)(\nabla_b\xi_a) = -\frac{1}{2}(\xi^b\nabla_d\xi_c)\nabla_b\xi_a = -\frac{1}{2}\kappa\xi_a\nabla_d\xi_c = \kappa\xi_{[d}\nabla_{c]}\xi_a, \quad (2.2.3)$$

dove è stata usata nella prima uguaglianza l'equazione (2.1.5), nella seconda la definizione di κ (2.2.1) e nell'ultimo passaggio di nuovo (2.1.5). L'equazione diventa

$$\xi_a\xi_{[d}\nabla_{c]}\kappa = \xi^b R_{ba[c}{}^e\xi_d]\xi_e. \quad (2.2.4)$$

Si può ora ottenere una espressione semplificata attraverso manipolazioni algebriche,

$$\xi_a\xi_{[d}\nabla_{c]}\kappa = -\xi_a\xi_{[d}R_{c]}{}^f\xi_f, \quad (2.2.5a)$$

$$\xi_{[d}\nabla_{c]}\kappa = -\xi_{[d}R_{c]}{}^f\xi_f. \quad (2.2.5b)$$

La parte destra dell'equazione si annulla sull'orizzonte degli eventi. Non lo si dimostra ma si può derivare come conseguenza dell'equazione di Raychaudhuri e del fatto che l'orizzonte degli eventi è ortogonale ai vettori che generano le geodetiche nulle. Si può così dimostrare che $\xi_{[d}R_{c]}{}^f$ è parallelo a ξ^f e per cui sull'orizzonte vale $\xi_{[d}R_{c]}{}^f\xi_f = 0$. Di conseguenza

$$\xi_{[d}\nabla_{c]}\kappa = \xi_d\nabla_c\kappa - \xi_c\nabla_d\kappa = 0. \quad (2.2.6)$$

L'unico modo per cui l'ultima espressione possa annullarsi è se $\nabla_c\kappa$ è parallelo a ξ_d sull'orizzonte degli eventi, ovvero è della forma $(a, 0, 0, 0)$ per una qualche costante a . Il gradiente di κ sulla superficie dell'orizzonte degli eventi è proporzionale al vettore di Killing e di conseguenza ortogonale alla superficie. κ è quindi costante su tutto l'orizzonte. Questa proprietà dei buchi neri è conosciuta come Legge Zero. È l'analogo della Legge Zero della termodinamica che dice che la temperatura di un sistema all'equilibrio è uniformemente costante. Questa analogia tra la temperatura e la gravità di superficie diverrà ancora più forte con le altre leggi. È stato portato avanti un ragionamento di tipo geometrico basato sulla topologia dello spazio tempo di Schwarzschild. Esiste una dimostrazione che non riportiamo che fa uso dell'equazione di Einstein e mostra che κ è costante su tutti gli orizzonti di Killing [11].

2.3 Prima Legge

L'obiettivo è ora quello di cercare una semplice formula per la massa di uno spazio tempo stazionario e con simmetria assiale, contenente un buco nero [11]. Sia Σ una ipersuperficie di tipo spazio che interseca l'orizzonte degli eventi H su una 2-sfera, \mathcal{H} ,

che forma la frontiera di Σ . Nella teoria newtoniana della gravità si ha che il potenziale newtoniano ϕ soddisfa l'equazione di Laplace nella regione di vuoto e in particolare, la massa della sorgente è data dal teorema di Gauss

$$\nabla^2\phi = 0, \quad (2.3.1a)$$

$$M = \frac{1}{4\pi} \int_S \vec{\nabla}\phi \cdot \hat{N} dA, \quad (2.3.1b)$$

con S 2-sfera che include la massa e \hat{N} normale unitaria alla superficie S . Siccome $\vec{\nabla}\phi$ è la forza, si ha che $4\pi M$ è la forza totale uscente dalla superficie che deve essere applicata per tenere ferma della materia con densità di massa superficiale unitaria distribuita lungo S . Si consideri ora uno spazio tempo statico e asintoticamente piatto, vuoto all'infinito e con vettore di Killing di tipo tempo ξ^a normalizzato in modo che il fattore di red-shift $V = (-\xi^a\xi_a)^{\frac{1}{2}}$ valga 1 all'infinito. In uno spazio tempo statico, stare fermi significa muoversi lungo le orbite date dal campo di Killing. L'accelerazione, già calcolata nel paragrafo 2.1, è

$$a^b = \frac{\xi^a \nabla_a \xi^b}{(-\xi^b \xi_b)} = \frac{\xi^a \nabla_a \xi^b}{V^2}. \quad (2.3.2)$$

Questa è la forza per unità di massa che deve essere esercitata localmente per opporsi alla forza gravitazionale. Come abbiamo però dimostrato la forza che deve applicare un osservatore lontano è modificata di un fattore V . Consideriamo quindi una 2-sfera S ortogonale a ξ^a . La quantità

$$F = \int_S N^b \left(\frac{\xi^a}{V} \right) \nabla_a \xi_b dA \quad (2.3.3)$$

è la forza uscente che deve essere esercitata da un osservatore esterno per tenere ferma materia con densità di massa superficiale unitaria sulla superficie S . In analogia con la teoria newtoniana, questa grandezza sarà in relazione con la massa che genera il campo gravitazionale. Abbiamo usato l'elemento di volume naturale su S indotto dalla metrica e N^b è la normale esterna, ortogonale a ξ^a . Attraverso passaggi algebrici si giunge quindi all'importante risultato di cui si omette la dimostrazione

$$M = -\frac{1}{8\pi} \int_S \epsilon_{abcd} \nabla^c \xi^d, \quad (2.3.4)$$

detta formula di Komar [13]. ϵ_{abcd} è l'elemento di volume dello spazio tempo associato alla metrica. Se la 2-sfera è la frontiera di una ipersuperficie Σ tale che $\Sigma \cup S$ è una varietà compatta con frontiera, allora si può usare il teorema di Stokes per passare ad un integrale di volume, ed utilizzando anche la equazione di Einstein si giunge al risultato

$$M = 2 \int_{\Sigma} (T_{ab} - \frac{1}{2} T g_{ab}) n^a \xi^b dV, \quad (2.3.5)$$

con n^a che è la normale unitaria che punta al futuro (tale che $\epsilon_{abc} = n^d \epsilon_{abcd}$ sia l'elemento di volume naturale su Σ rappresentato da dV). Nel nostro caso, il nostro spazio tempo contiene un buco nero e dobbiamo quindi aggiungere un termine

$$M = 2 \int_{\Sigma} (T_{ab} - \frac{1}{2} T g_{ab}) n^a \xi^b dV - \frac{1}{8\pi} \int_{\mathcal{H}} \epsilon_{abcd} \nabla^c \xi^d. \quad (2.3.6)$$

Il primo termine restituisce la massa all'esterno dell'orizzonte mentre il secondo termine restituisce la massa contenuta al suo interno. Siccome si è interessati ad una soluzione di vuoto con $T_{ab} = 0$, il primo termine si annulla e si ha quindi

$$M = -\frac{1}{8\pi} \int_{\mathcal{H}} \epsilon_{abcd} \nabla^c \xi^d. \quad (2.3.7)$$

Si valuti ora il termine che restituisce la massa interna. L'elemento di volume ϵ_{ab} su \mathcal{H} si può esprimere come

$$\epsilon_{ab} = \epsilon_{abcd} N^c \xi^d, \quad (2.3.8)$$

con N^c normale entrante nulla con direzione futura a \mathcal{H} , normalizzato in modo che $N^a \xi_a = -1$. Per cui si ha che:

$$\epsilon^{ab} \epsilon_{abcd} \nabla^c \xi^d = N_e \xi_f \epsilon^{abef} \epsilon_{abcd} \nabla^c \xi^d = -4 N_c \xi_d \nabla^c \xi^d = -4\kappa, \quad (2.3.9a)$$

$$\int_{\mathcal{H}} \epsilon_{abcd} \nabla^c \xi^d = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{H}} (\epsilon^{ef} \epsilon_{efcd} \nabla^c \xi^d) \epsilon_{ab} = -2\kappa A, \quad (2.3.9b)$$

con $A = \int_{\mathcal{H}} \epsilon_{ab}$ area dell'orizzonte degli eventi. Di conseguenza si trova una formula per la massa

$$M = \frac{1}{4\pi} \kappa A. \quad (2.3.10)$$

Essendo interessati ad una equazione di tipo differenziale, si effettua la variazione della equazione precedente

$$\delta M = \frac{1}{4\pi} (A \delta \kappa + \kappa \delta A). \quad (2.3.11)$$

Per un buco nero di Schwarzschild vale inoltre la (2.1.18), per cui

$$\delta\kappa = -\frac{1}{4M^2}\delta M, \quad (2.3.12a)$$

$$A = 4\pi(2M)^2 \quad \Rightarrow \quad M^2 = \frac{A}{16\pi}, \quad (2.3.12b)$$

$$\delta\kappa = -\frac{4\pi}{A}\delta M. \quad (2.3.12c)$$

L'equazione finale risulta quindi essere:

$$\delta M = \frac{1}{8\pi}\kappa\delta A, \quad (2.3.13)$$

conosciuta come prima legge della termodinamica per un buco nero di Schwarzschild. Infatti è analoga alla prima legge della termodinamica in assenza di lavoro esterno:

$$dE = TdS. \quad (2.3.14)$$

Con questa formula si trova quindi una analogia tra massa ed energia, che non è sorprendente, una analogia tra temperatura e gravità di superficie mostrata anche dalla legge zero, e una analogia tra entropia e area dell'orizzonte degli eventi. Quest'ultima sarà successivamente avvalorata dalla seconda legge. Il termine di lavoro esterno δW trova un analogo meccanico quando si considera il buco nero di Kerr, dotato di rotazione.

2.4 Seconda Legge

In questo paragrafo si vuole dimostrare il teorema dell'area, che sostiene il fatto che l'area dell'orizzonte degli eventi non diminuisce mai [14]. Il teorema necessita di alcune ipotesi di lavoro, tra cui la congettura che non si presentino mai singolarità nude, conosciuta come ipotesi di censura cosmica. Sia λ un parametro affine dei generatori nulli delle geodetiche dell'orizzonte degli eventi \mathcal{H} e sia k^a la tangente alle curve secondo questa parametrizzazione. Sia inoltre l^a un vettore nullo ausiliario con le proprietà

$$k^a\nabla_a l^b = 0, \quad (2.4.1a)$$

$$k^a l_a = -1. \quad (2.4.1b)$$

L'espansione θ dei generatori delle geodetiche nulle di \mathcal{H} in un punto p è definita come:

$$\theta = \nabla_a k^a. \quad (2.4.2)$$

Equivalentemente, se si considera una sezione d'area infinitesima in un punto p e trasportiamo questo elemento secondo le regole del trasporto di Lie lungo una geodetica nulla, si ha che l'espansione è data da

$$\theta = \frac{1}{A} \frac{dA}{d\lambda}, \quad (2.4.3)$$

ovvero θ misura il tasso locale di cambiamento dell'area muovendosi lungo una geodetica. L'espansione non è però l'unico parametro che governa l'evoluzione delle geodetiche. La descrizione più generale necessita di un tensore di taglio σ_{ab} che descrive la tendenza delle geodetiche di muoversi allontanandosi l'una dalle altre per un piccolo cambiamento di λ , e un tensore di torsione ω_{ab} che descrive la rotazione di un elemento d'area. Entrambi i tensori hanno elementi diagonali nulli. Il tensore di taglio è simmetrico mentre quello di torsione antisimmetrico. Il comportamento totale delle geodetiche è descritto dal tensore

$$B_{ab} = \frac{1}{2}\theta h_{ab} + \sigma_{ab} + \omega_{ab} = \nabla_b k_a, \quad (2.4.4)$$

con $h_{ab} = g_{ab} + l_a k_b + k_a l_b$ metrica nel sottospazio ortogonale ai due vettori. Al fine di comprendere meglio questo tensore se ne studia il suo comportamento lungo una geodetica.

$$\begin{aligned} k^c \nabla_c B_{ab} &= k^c \nabla_c \nabla_b k_a = \\ &= k^c \nabla_b \nabla_c k_a + R_{cba}{}^d k^c k_d = \\ &= \nabla_b (k^c \nabla_c k_a) - (\nabla_b k^c) (\nabla_c k_a) + R_{cba}{}^d k^c k_d = \\ &= -B_b^c B_{ac} + R_{cba}{}^d k^c k_d, \end{aligned} \quad (2.4.5)$$

dove abbiamo usato la definizione del tensore di Riemann nel primo passaggio e il fatto che essendo k^a il vettore tangente alla geodetica, $k^c \nabla_c k_a$ è zero per l'equazione delle geodetiche. Si prenda ora la traccia del tensore risultante, alzando l'indice b e contraendolo con l'indice a .

$$k^c \nabla_c B_a^b = -B^{cb} B_{ac} + R_c{}^b{}_a{}^d k^c k_d, \quad (2.4.6a)$$

$$k^c \nabla_c \theta = \frac{d\theta}{d\lambda} = -\frac{1}{2}\theta^2 - \sigma_{ab}\sigma^{ab} + \omega_{ab}\omega^{ab} - R_{ab}k^a k^b. \quad (2.4.6b)$$

Quest'equazione finale è conosciuta come equazione di Raychaudhuri e governa l'espansione delle geodetiche nulle nel tempo. L'ultimo termine si può studiare attraverso l'equazione di Einstein

$$R_{ab}k^a k^b = [8\pi T_{ab} + \frac{1}{2}Rg_{ab}]k^a k^b = 8\pi T_{ab}k^a k^b, \quad (2.4.7)$$

dove è stato utilizzato il fatto che k^a è tale per cui $k_a k^a = 0$ in quanto nullo. Esiste una speciale condizione che T_{ab} deve soddisfare che impone restrizioni su R_{ab} . Siccome la

quantità $T_{ab}k^ak^b$ è la densità di energia locale misurata da un osservatore con quadrivelocità k^a , ci aspettiamo che questa quantità non sia negativa. Questa richiesta è chiamata *null energy condition*. Di conseguenza l'equazione di Einstein impone che $R_{ab}k^ak^b \geq 0$, il che può essere vista come la richiesta che la gravità sia attrattiva e che la presenza di materia faccia convergere piuttosto che divergere le geodetiche. per quanto riguarda il termine di torsione $\omega_{ab}\omega^{ab} = 0$ mentre il termine di taglio $\sigma_{ab}\sigma^{ab} \geq 0$. Di conseguenza si ha

$$\frac{d\theta}{d\lambda} \leq -\frac{1}{2}\theta^2, \quad (2.4.8a)$$

$$\int_{\theta_0}^{\theta} \frac{d\theta}{\theta^2} \leq -\int_0^{\lambda} \frac{1}{2}d\lambda, \quad (2.4.8b)$$

$$\frac{1}{\theta(\lambda)} \geq \frac{1}{\theta_0} + \frac{1}{2}\lambda. \quad (2.4.8c)$$

Se θ_0 è negativo, quando aumenta λ si arriva al punto in cui la parte destra è nulla e di conseguenza anche la parte sinistra deve passare da zero. Questo però implica una espansione infinita, il che è non fisico. L'unica alternativa è di avere θ_0 positivo, e di conseguenza si ha che θ rimane positivo per tutta l'evoluzione. Siccome aumentare λ significa muoversi avanti nel tempo, questa restrizione ci dice che l'area dell'orizzonte degli eventi non può diminuire nel tempo. Si ha quindi una analogia con la seconda legge della termodinamica che dice che l'entropia dell'universo non può diminuire in un processo termodinamico. L'analogia sembra comunque superficiale, dato che il fatto che l'area dell'orizzonte aumenti si può dimostrare analiticamente grazie alla geometria, mentre il secondo principio della termodinamica è basato su proprietà statistiche dei sistemi termodinamici.

2.5 Terza Legge

Quando nel paragrafo 2.1 è stato introdotto il parametro κ , si è assunto che esso non fosse nullo. La cosa è giustificata dal suo significato fisico. Se infatti κ fosse nullo vorrebbe significare che un osservatore all'infinito non vede un buco nero attrattivo. Ancor meno sensata sembra l'ipotesi di κ negativo, in quanto il buco nero in questo caso presenterebbe proprietà repulsive. Risulta quindi evidente che $\kappa \geq 0$ con $\kappa \rightarrow 0$ solo se il buco nero tende a diventare sempre più debole [12]. La terza legge meccanica di un buco nero, dice che è impossibile raggiungere $\kappa = 0$ con un processo fisico (per esempio immettendo materia), si necessiterebbe infatti di un tempo infinito e di infinita divisibilità della materia [10]. Questa legge è l'analogo meccanico della terza legge della termodinamica che ci dice che non è possibile raggiungere $T = 0$ con un numero finito di processi termodinamici.

2.6 Osservazioni Riassuntive

Si può ora sintetizzare le leggi meccaniche dei buchi neri e le corrispondenti leggi termodinamiche in tabella:

Buchi Neri	Termodinamica
$\kappa = \text{const}$	$T = \text{const}$
$\delta M = \frac{1}{8\pi}\kappa\delta A$	$\delta E = T\delta S$
$\delta A \geq 0$	$\delta S \geq 0$
$\kappa \geq 0$	$T \geq 0$

Per tutto il capitolo è stato evidenziato il fatto che queste equazioni sono analoghe, ma la loro connessione è ben più profonda. Queste quattro equazioni sono in realtà identiche. Per vedere ciò è però necessario lo studio del processo di emissione di radiazione di Hawking che sarà descritto nel prossimo capitolo. Questa connessione rappresenta il primo passo verso una teoria quantistica della gravità. Infatti alcune teorie come la Quantum Loop Gravity, usano le equazioni della termodinamica come punto iniziale per la costruzione di una descrizione statistica dei buchi neri.

Capitolo 3

Radiazione di Hawking

In questo capitolo si cercherà di dare un significato ai risultati precedentemente ottenuti. In particolare si darà un significato alla entropia di un buco nero e alla sua temperatura. L'obiettivo è quindi quello di mostrare che le quattro leggi della meccanica di un buco nero non sono solo analoghe alle leggi della termodinamica, ma sono sostanzialmente le stesse leggi.

3.1 Entropia di Bekenstein-Hawking

Nel paragrafo 2.4 è stato mostrato che in analogia con l'entropia dell'universo, l'area di un buco nero non diminuisce mai in un processo fisico. In sostanza, così come l'entropia nei processi termodinamici, questa legge meccanica seleziona una direzione preferenziale nel tempo per quanto concerne la dinamica dei buchi neri. In ambito termodinamico l'aumento di entropia implica che una certa quantità di energia è stata degradata, ovvero che non può più essere trasformata in lavoro. Per quanto riguarda un buco nero, la sua massa è data da

$$M = \left(\frac{A}{16\pi} \right)^{\frac{1}{2}} . \quad (3.1.1)$$

Essa rappresenta l'energia che non può essere estratta. In questo senso può essere vista come energia inerte che non può più essere trasformata in lavoro. Quindi sia un aumento dell'entropia S che dell'area A di un buco nero corrisponde a una degradazione di energia. È inoltre risaputo che esiste una connessione tra l'entropia di un sistema termodinamico e l'informazione. L'entropia misura infatti l'informazione contenuta nella configurazione interna del sistema. Si supponga che tutto quello che si sa della configurazione interna di un sistema siano le probabilità p_n di trovare il sistema nello stato n . Allora l'entropia associata al sistema è data dalla formula di Shannon

$$S = - \sum_n p_n \ln p_n. \quad (3.1.2)$$

Questa è una definizione di entropia adimensionale, dato che si è posta la costante di Boltzmann k_B uguale ad 1. L'entropia di un sistema termodinamico non all'equilibrio aumenta in quanto l'informazione contenuta nella sua configurazione interna è persa durante la sua evoluzione. Risulta abbastanza naturale introdurre il concetto di entropia di un buco nero come misura dell'accessibilità di informazione relativa alla configurazione interna. Ora si cerca di trovare una espressione per l'entropia di un buco nero. In maniera del tutto generale si assume che

$$S = f(A), \quad (3.1.3)$$

con f funzione monotona crescente.

La scelta più logica è quella di assumere

$$f = \gamma A, \quad (3.1.4)$$

con γ costante con unità di misura [lunghezza]⁻². Non esiste però in relatività generale una costante fisica con queste dimensioni. A questo punto entra quindi in gioco la meccanica quantistica. Si seguirà ora un argomento portato avanti da Bekenstein [15] per trovare l'espressione esatta. Immaginiamo che una particella venga inghiottita da un buco nero di Schwarzschild. Dato che questa particella di fatto sparisce, abbiamo una perdita di informazione che, per quanto detto precedentemente, causerà un aumento di entropia. L'obiettivo è quello di cercare di capire quanta informazione è persa in un processo di questo tipo. La quantità di informazione dipende da molteplici fattori come lo stato interno della particella o la direzione di caduta, ma possiamo assumere che il minimo assoluto di informazione sia l'esistenza o meno della particella. Quando la particella è esterna al buco nero è possibile in ogni momento constatare se la particella è presente o meno, ma una volta inghiottita non è più possibile verificarne l'esistenza. In questo senso quindi si può dire che è stato perso un bit di informazione. Si immagini di mandare un fotone verso un buco nero, che abbia una lunghezza d'onda dell'ordine del raggio di Schwarzschild r_H in modo che l'unica informazione che possa portare è la presenza o l'assenza e non la direzione in cui entra. Quindi si ha

$$\lambda = r_H, \quad (3.1.5a)$$

$$\delta E = \frac{\hbar c}{\lambda} = \frac{\hbar c}{r_H}, \quad (3.1.5b)$$

con δE energia portata dal fotone. Di conseguenza, valendo la equazione $E = mc^2$, la variazione di massa del buco nero è data da

$$\delta M = \frac{\hbar}{c r_H}. \quad (3.1.6)$$

La variazione del raggio dell'orizzonte degli eventi sarà quindi

$$\delta r_H = \frac{2G}{c^2} \delta M = \frac{2G\hbar}{c^3 r_H}, \quad (3.1.7)$$

per cui

$$r_H \delta r_H = \frac{2G\hbar}{c^3} \simeq \delta A. \quad (3.1.8)$$

Si nota quindi che aggiungendo un bit di informazione, l'area di un buco nero aumenta di una quantità costante. Possiamo misurare l'area in bit e chiamarla entropia

$$S \propto \frac{Ac^3}{\hbar G} = \frac{A}{l_p^2}, \quad (3.1.9)$$

con l_p lunghezza di Planck.

Successivamente Hawking trovò l'espressione esatta fissando la costante di proporzionalità ad $1/4$, per cui

$$S_{BH} = \frac{1}{4} \frac{Ac^3}{\hbar G}. \quad (3.1.10)$$

Questa espressione è chiamata entropia di Bekenstein-Hawking. Il suo ruolo nella termodinamica sarà descritto in seguito nel paragrafo 3.3.

3.2 Radiazione di Hawking come Effetto Tunnel

Esistono molteplici derivazioni della radiazione di Hawking, qui ne verrà presentata una che fa uso dell'effetto tunnel, una delle visioni più utilizzate per descrivere la produzione di radiazione da sorgenti termiche. In accordo con questo modello di emissione, la radiazione nasce in un processo simile alla creazione di coppia elettrone positrone in un campo elettrico costante. Una coppia può materializzarsi con zero energia totale nei pressi dell'orizzonte, dopodichè una delle due particelle create fugge dal buco nero per effetto tunnel. Questo schema si può utilizzare per derivare in maniera semiclassica la presenza di radiazione di un buco nero. La conservazione dell'energia ha un ruolo fondamentale in questa visione. Si consideri un buco nero immerso in un bagno termico, nello spazio-tempo di Schwarzschild con geometria dinamica che consenta la conservazione dell'energia. Si mostrerà che un equilibrio stabile è possibile e di conseguenza il buco nero emette radiazione [16].

Per descrivere fenomeni attraverso l'orizzonte degli eventi è necessario scegliere coordinate che al contrario di quelle di Schwarzschild non siano singolari per $r = r_H$. Una scelta particolarmente comoda è data da

$$t = t_s + 2\sqrt{2Mr} + 2M \ln \frac{\sqrt{r} - \sqrt{2M}}{\sqrt{r} + \sqrt{2M}}, \quad (3.2.1)$$

con t_s tempo di Schwarzschild.

Con questa scelta del parametro temporale, l'elemento di linea diventa

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + 2\sqrt{\frac{2M}{r}} dt dr + dr^2 + r^2 d\Omega^2. \quad (3.2.2)$$

Così facendo ora non c'è singolarità sull'orizzonte e il carattere dello spazio-tempo di essere stazionario ma non statico è manifesto. Queste coordinate furono introdotte da Painlevè. È quindi possibile definire uno stato di vuoto effettivo di un campo quantistico richiedendo che annichili i modi che portano una frequenza negativa rispetto a t . Uno stato del genere sarebbe visto vuoto da un osservatore in caduta libera che attraversa l'orizzonte. Le geodetiche radiali nulle sono date da

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \pm 1 - \sqrt{\frac{2M}{r}}, \quad (3.2.3)$$

con il segno $+$ che corrisponde alle geodetiche uscenti e il segno $-$ alle geodetiche entranti. Queste equazioni si modificano se si considera anche la gravità data dalla particella in caduta libera. È stato mostrato da Kraus e Wilczek che se si considera fissa la massa del buco nero, potendo variare la massa totale ADM, un guscio di energia ω si muove nello spazio-tempo seguendo geodetiche date da un buco nero di massa $M + \omega$. Se invece si considera fissata la massa totale e si fa variare quella del buco nero, il guscio di energia ω si muove su geodetiche date da un buco nero di massa $M - \omega$.

Si richiama ora la teoria di Hamilton-Jacobi e la sua connessione con la meccanica quantistica, dato che sarà utile per la trattazione successiva. Si definisce la funzione principale di Hamilton

$$S = \int_{t_i}^{t_f} \sum_{i=1}^n p_i dq_i - H dt, \quad (3.2.4)$$

con H hamiltoniana del sistema. L'azione soddisfa un principio variazionale $\delta S = 0$ che determina le equazioni del moto. Se l'hamiltoniana non dipende esplicitamente dal tempo come nel nostro caso, il principio variazionale è soddisfatto dall'azione ridotta

$$\hat{S} = \int_{t_i}^{t_f} \sum_{i=1}^n p_i dq_i. \quad (3.2.5)$$

In meccanica quantistica si scopre poi che la funzione d'onda associata a un sistema hamiltoniano è data da

$$\psi = \sqrt{\rho} e^{iS}, \quad (3.2.6)$$

con ρ densità di probabilità spaziale.

Se è presente una barriera di energia potenziale con ampiezza superiore all'energia del sistema, l'azione assume valori immaginari e di conseguenza si ha che la probabilità di attraversamento della barriera per effetto tunnel è proporzionale a

$$\Gamma \sim e^{-2\Im S}. \quad (3.2.7)$$

Si consideri quindi un'onda uscente con frequenza positiva che attraversa l'orizzonte da r_{in} a r_{out} secondo una geodetica radiale. La parte immaginaria della sua azione ridotta è data da

$$\Im \hat{S} = \Im \int_{r_{in}}^{r_{out}} p_r dr = \Im \int_{r_{in}}^{r_{out}} \int_0^{p_r} dp'_r dr. \quad (3.2.8)$$

Ora si moltiplica e si divide l'integrando per le due parti dell'equazione di Hamilton

$$\dot{r} = \frac{dH}{dp_r}, \quad (3.2.9)$$

si effettua un cambio di variabile passando dal momento all'energia e si scambia l'ordine di integrazione

$$\Im \hat{S} = \Im \int_M^{M-\omega} \int_{r_{in}}^{r_{out}} \frac{dr}{\dot{r}} dH = \Im \int_0^\omega \int_{r_{in}}^{r_{out}} \frac{dr}{1 - \sqrt{\frac{2(M-\omega')}{r}}} (-d\omega'), \quad (3.2.10)$$

dove il segno meno compare in quanto $H = M - \omega'$. Risolvendo l'integrale si trova

$$\Im \hat{S} = 4\pi\omega \left(M - \frac{\omega}{2} \right), \quad (3.2.11)$$

se $r_{in} > r_{out}$.

I limiti di integrazione indicano che lungo il percorso della traiettoria classicamente proibita, la particella parte da $r = r_H - \epsilon$ dentro l'orizzonte e attraversa l'orizzonte in contrazione per materializzarsi a $r = 2(M - \omega) + \epsilon$, poco fuori la posizione finale dell'orizzonte. La radiazione di Hawking si può anche vedere come una creazione di coppia fuori dall'orizzonte anzi che dentro, con la particella ad energia negativa che compie effetto tunnel nel buco nero. Siccome questa particella si propaga indietro nel tempo, dobbiamo invertire il tempo nelle equazioni del moto, per cui si ha

$$\sqrt{\frac{2M}{r}} \rightarrow -\sqrt{\frac{2M}{r}}. \quad (3.2.12)$$

Inoltre l'antiparticella vede una geometria con massa del buco nero fissata e si deve sostituire $M \rightarrow M + \omega$. Per una particella entrante con energia negativa si ha quindi

$$\Im \hat{S} = \Im \int_0^{-\omega} \int_{r_{out}}^{r_{in}} \frac{dr}{-1 + \sqrt{\frac{2(M+\omega')}{r}}} d\omega' = 4\pi\omega \left(M - \frac{\omega}{2} \right). \quad (3.2.13)$$

In entrambi i casi quindi, la parte esponenziale del tasso di emissione semiclassica è data da

$$\Gamma \sim e^{-2\Im S} = e^{-8\pi\omega \left(M - \frac{\omega}{2} \right)} = e^{\Delta S_{BH}}, \quad (3.2.14)$$

esprimendo il tutto come variazione dell'entropia di Bekenstein-Hawking. Se si ignorano i termini quadratici, l'equazione si riduce ad un fattore di Boltzmann per una particella con energia ω alla temperatura $1/8\pi M$. La correzione ω^2 a questo fattore emerge per la conservazione dell'energia, che alza la temperatura del buco nero quando irradia. Si ha quindi che la temperatura di un buco nero è data da

$$T = \frac{1}{8\pi M} = \frac{\kappa}{2\pi}. \quad (3.2.15)$$

Seguendo poi argomenti standard si può dimostrare che l'equazione (3.2.14) con i termini quadratici trascurati, implica lo spettro di Planck

$$\rho(\omega) = \frac{1}{2\pi} \frac{|Tr(\omega)|^2}{e^{8\pi M\omega} - 1}, \quad (3.2.16)$$

con $Tr(\omega)$ coefficiente di trasmissione dipendente dalla frequenza (corpo grigio). Risulta quindi evidente che l'analogia tra κ e la temperatura T non è solo formale. La meccanica quantistica dimostra infatti che un buco nero non è poi così nero, ma che ad esso è associata una temperatura fisica con uno spettro termico di emissione. Purtroppo questa temperatura risulta essere relativamente bassa e le speranze di osservare la radiazione di Hawking risultano ad oggi sostanzialmente nulle, considerando anche il fatto che la radiazione cosmica di fondo ha una temperatura di 2,7 K, ben al di sopra delle temperature stimate per i buchi neri dell'ordine dei nanokelvin.

3.3 Seconda Legge Generalizzata della Termodinamica

La seconda legge della termodinamica causa diversi problemi interpretativi quando vi è la presenza di un buco nero. In accordo con la relatività generale infatti si potrebbe prendere della materia che cade verso un buco nero e vederla scomparire nella singolarità intrinseca. In questo processo, se la materia in caduta ha un contenuto entropico,

si ha perdita di informazione e non essendoci un contributo di compensazione, l'entropia dell'intero universo complessivamente diminuisce. Si potrebbe pensare di salvare la seconda legge della termodinamica continuando a contare il contributo entropico della materia inghiottita ma questo significherebbe dare alla seconda legge uno stato di non verificabilità per osservazione. Come osservato precedentemente però, il problema si può risolvere associando ad un buco nero una entropia data dalla formula (3.1.10). Si può quindi definire una entropia generalizzata che sia la somma dell'entropia ordinaria della materia all'esterno del buco nero e dell'entropia del buco nero

$$S' = S + S_{BH} . \quad (3.3.1)$$

Si rimpiazza quindi la ordinaria seconda legge della termodinamica con la seconda legge generalizzata (GSL): l'entropia totale generalizzata dell'universo non diminuisce mai nel tempo

$$\Delta S' \geq 0 . \quad (3.3.2)$$

Quando si tiene conto della radiazione di Hawking sorge però un altro problema: la conservazione dell'energia impone che un buco nero isolato perda massa per compensare l'energia irradiata all'infinito dal processo di Hawking. Cosa ancor più inattesa è il fatto che un buco nero isolato irradia la sua intera massa in un lasso di tempo finito. Durante questo processo di evaporazione, l'area A dell'orizzonte degli eventi decresce. Meccanicamente questa diminuzione è consentita poichè il tensore energia-impulso non soddisfa più la null energy condition, ipotesi chiave del teorema dell'area. Comunque anche se la seconda legge dei buchi neri fallisce nella descrizione del processo di evaporazione, la seconda equazione generalizzata continua a valere dato che anche se l'area A diminuisce e di conseguenza diminuisce l'entropia di Bekenstein-Hawking S_{BH} , la radiazione emessa causa un aumento dell'entropia esterna al buco nero che compensa la diminuzione. In particolare, se questa nuova definizione dell'entropia soddisfa la seconda legge della termodinamica, allora l'interpretazione di S_{BH} come entropia fisica del buco nero diventa ancora più forte [17]. Fu presto notato da Bekenstein che esiste una difficoltà se si considera un processo in cui una scatola contenente materia con entropia S e energia E viene portata nei pressi di un buco nero e poi la si lascia cadere. Classicamente, se uno può portare la scatola arbitrariamente vicino all'orizzonte, si potrebbe recuperare tutta l'energia contenuta nella scatola come lavoro all'infinito. Nessuna energia sarebbe passata al buco nero e di conseguenza l'area non aumenterebbe. La scatola però ha un contenuto entropico che finirebbe nel buco nero e di conseguenza si avrebbe una violazione della GSL. Questo esperimento mentale rende manifesto il problema per cui in relatività generale classica la temperatura assoluta di un buco nero è nulla. Quello appena descritto è infatti un ciclo di Carnot in cui il calore è trasformato in lavoro con efficienza del 100%. Questo problema si risolve ammettendo che la temperatura fisica del buco nero non sia zero, bensì $\kappa/2\pi$. Esisterà quindi una pressione di radiazione che causa

una forza sulla scatola. Questa forza aumenta di intensità avvicinandosi all'orizzonte e di conseguenza, il posto ottimale per lasciare la scatola non è più l'orizzonte ma il punto in cui il suo peso è uguale alla forza esercitata dalla radiazione. Di conseguenza ci sarà un contributo energetico residuo che farà aumentare l'area del buco nero della quantità necessaria affinché la GSL valga. Ovviamente non è possibile fornire una dimostrazione generale della GSL, dato che non ne esiste una nemmeno per la seconda legge della termodinamica ordinaria. Se si considera la "atmosfera termica" però, si risolvono molti esperimenti mentali che cercano di violarla.

In conclusione si può affermare che ci sono forti motivazioni per credere che la seconda legge generalizzata della termodinamica abbia una valenza universale.

Capitolo 4

Conclusione

Nella prima parte di questo lavoro è stata fornita la soluzione di vuoto dell'equazione di Einstein per un problema a simmetria sferica, osservando la presenza di un valore critico delle coordinate per $r = 2GM/c^2$, con M massa della sorgente del campo gravitazionale. Questo valore è detto raggio di Schwarzschild ed è caratteristico della sorgente. A titolo d'esempio, la Terra ha un raggio di Schwarzschild di 9 mm, mentre quello del Sole è di 3 km. Come si può vedere, il valore di questo raggio è relativamente piccolo e solitamente le sorgenti massive di campo gravitazionale come le stelle hanno dimensioni ben maggiori, per cui il problema di cosa succeda in prossimità del raggio di Schwarzschild o nella ragione interna non ha motivo di esistere. Studiando l'evoluzione stellare però, si scopre che nella fase finale della loro vita avviene il fenomeno del collasso gravitazionale. Solitamente questo processo è interrotto dalla pressione di degenerazione di elettroni e neutroni, portando alla formazione di nane bianche e stelle di neutroni. Si osserva che esiste un valore critico della massa della stella oltre il quale nessuna forza conosciuta sarebbe in grado di fermare il collasso. La stella andrebbe quindi a contrarsi fino ad essere interamente contenuta entro il proprio raggio di Schwarzschild formando un buco nero. Diventa quindi significativo lo studio della dinamica in uno spazio in cui è presente un buco nero e si scopre che la superficie sferica con raggio il raggio di Schwarzschild si comporta come una membrana a senso unico, in cui la materia e la luce possono entrare ma nulla può uscire. L'esistenza di questi oggetti è stata a lungo dibattuta ma oggi la comunità scientifica è concorde nell'accettare la presenza di questi oggetti nell'universo, sebbene manchi ancora una prova sperimentale. Si ritiene che al centro di ogni galassia sia presente un buco nero con massa pari a milioni di volte quelle del Sole. Per questo motivo vengono chiamati buchi neri supermassicci e la loro presenza si può verificare in modo indiretto tramite gli effetti del loro intenso campo gravitazionale. In particolare nel nucleo della nostra galassia, la Via Lattea, si osserva la presenza di una sorgente radio compatta nota come Sagittarius A, la cui alta densità è compatibile con l'ipotesi che si tratti di un buco nero. Proprio questo buco nero sarà oggetto di ricerca nella prossima decade nel progetto "Event Horizon Telescope", che ha l'obiettivo di studiare l'ambiente

circostante del buco nero con una grande risoluzione.

Lo studio dei buchi neri però non si limita alla ricerca della loro esistenza. Come mostrato nel capitolo 2, negli anni '70 si è sviluppata una nuova branca: la termodinamica dei buchi neri. Osservando alcune leggi meccaniche associate a proprietà geometriche come l'area dell'orizzonte degli eventi, la gravità di superficie e la massa di un buco nero, si nota una somiglianza con le quattro leggi della termodinamica. In particolare si nota che l'area dell'orizzonte degli eventi si comporta come l'entropia di un sistema termodinamico mentre la gravità di superficie si comporta come la temperatura. Questa analogia sembra però dover rimanere una mera curiosità formale, dato che un buco nero non può avere una temperatura maggiore di zero, essendo un oggetto che tutto assorbe e niente emette. Negli anni seguenti però si scoprì che quelle quattro leggi meccaniche non erano solo analoghe alle leggi termodinamiche, erano le stesse leggi. Nel capitolo 3 è stato mostrato che con argomenti di meccanica quantistica si deriva uno spettro di emissione di un buco nero, con una temperatura caratteristica di corpo nero direttamente proporzionale alla gravità di superficie. Questa scoperta permette quindi di associare anche una entropia al buco nero, vista come l'informazione in esso contenuta. Quando un corpo massivo cade in un buco nero, l'informazione non viene persa: l'area dell'orizzonte degli eventi del buco nero aumenterà abbastanza da sopperire alla perdita di informazione contenuta nel corpo inghiottito. L'osservazione del processo di emissione di radiazione da parte dei buchi neri è però molto difficile dato che la temperatura di questi oggetti è dell'ordine dei nanokelvin e la radiazione cosmica di fondo corrisponde a una radiazione di corpo nero con temperatura di 2,7 kelvin. Una osservazione dell'effetto Hawking per via astrofisica è perciò del tutto improbabile. Tuttavia una possibile alternativa viene dalla sorprendente analogia tra la gravità e alcuni sistemi di materia condensata. L'idea alla base di questo ambito di ricerca è quello di studiare il comportamento di onde sonore in sistemi idrodinamici non omogenei. In queste condizioni infatti le onde sonore si propagano come si propagherebbe la luce in uno spazio tempo curvo. Se quindi si riuscisse a creare un sistema idrodinamico che simula la presenza dell'orizzonte degli eventi, si potrebbe studiare la formazione dell'equivalente acustico della radiazione di Hawking. Il candidato più promettente per realizzare l'analogo di un buco nero per il suono sono i condensati di Bose-Einstein, grazie al loro altissimo grado di coerenza e alla loro temperatura estremamente bassa.

Bibliografia

- [1] R. Casadio, *Elements of Relativity*, Dispense 2014. Par. 4.3.1
- [2] R. D’Inverno, *Introducing Einstein’s Relativity*, Oxford University Press Inc., 1992. Par. 16.2 e 16.4
- [3] R. D’Inverno, *Introducing Einstein’s Relativity*, Oxford University Press Inc., 1992. Par. 16.5
- [4] R. Casadio, *Elements of Relativity*, Dispense 2014. Par. 4.3.4
- [5] R. D’Inverno, *Introducing Einstein’s Relativity*, Oxford University Press Inc., 1992. Par. 16.6
- [6] R. D’Inverno, *Introducing Einstein’s Relativity*, Oxford University Press Inc., 1992. Par. 17.2
- [7] R. D’Inverno, *Introducing Einstein’s Relativity*, Oxford University Press Inc., 1992. Par. 17.4 e 17.5
- [8] R. Penrose, *Gravitational Collapse: The Role of General Relativity*, General Relativity and Gravitation, Vol. 34, No. 7, Luglio 2002
- [9] S. Carrol, *Spacetime and Geometry*, Pearson Education Inc., 2004. Par. 5.8
- [10] Bardeen, Carter, Hawking, *The Four Laws of Black Hole Mechanics* (1973)
- [11] R. M. Wald, *General Relativity*, University of Chicago Press, 1984. Par. 12.5
- [12] R. M. Wald, *General Relativity*, University of Chicago Press, 1984. Par. 12.3
- [13] R. M. Wald, *General Relativity*, University of Chicago Press, 1984. Par. 11.2
- [14] R. M. Wald, *Quantum Field Theory in Curved Spacetime and Black Hole Thermodynamics*, University of Chicago Press, 1994. Par. 6.1
- [15] J. D. Bekenstein, *Black Holes and Entropy*, Physical Review D 7, 2333-2346, 1973

- [16] M. K. Parikh, F. Wilczek, *Hawking Radiation as Tunneling*, 2001
- [17] R. M. Wald, *The Thermodynamics of Black Holes*, Living Reviews in Relativity, 2001. Par. 4