

**ALMA MATER STUDIORUM - UNIVERSITÀ DI BOLOGNA**

**SCUOLA DI INGEGNERIA E ARCHITETTURA**

*DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA DELL'ENERGIA ELETTRICA E  
DELL'INFORMAZIONE "GUGLIELMO MARCONI"–DEI*

*CORSO DI LAUREA MAGISTRALE IN  
INGEGNERIA DELL'ENERGIA ELETTRICA*

**TESI DI LAUREA**

in

Modellistica dei Sistemi Elettromeccanici M

**Controllo sensorless di attuatori tubolari pentafase**

CANDIDATO  
Giacomo Sala

RELATORE  
Prof. Angelo Tani

CORRELATORI  
Prof. Luca Zarri  
Prof. Michele Mengoni

Anno Accademico 2013/14

Sessione II

**ALMA MATER STUDIORUM - UNIVERSITÀ DI BOLOGNA**

SCUOLA DI INGEGNERIA E ARCHITETTURA  
DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA DELL'ENERGIA  
ELETTRICA E DELL'INFORMAZIONE "GUGLIELMO  
MARCONI"–DEI

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria dell'Energia  
Elettrica

# **CONTROLLO SENSORLESS DI ATTUATORI TUBOLARI PENTAFASE**

Tesi di Laurea di

**Giacomo Sala** matricola 0000675393

Relatore

**Prof. Angelo Tani**

Correlatori

**Prof. Luca Zarri**

**Prof. Michele Mengoni**

Anno Accademico: 2013/2014 - II sessione

*Ai familiari,  
gli amici  
ed i professori  
che mi hanno sostenuto in questo progetto  
ed in questi due bellissimi anni ...*

# Indice

<b>Introduzione</b>	<b>i</b>
<b>1 Attuatori tubolari</b>	<b>1</b>
1.1 Introduzione . . . . .	1
1.2 Confronto tra le differenti tipologie di attuatori lineari . . . . .	3
1.3 Principi di funzionamento dei motori lineari . . . . .	6
1.4 Particolarità progettuali dei motori tubolari . . . . .	8
<b>2 Sistemi multifase</b>	<b>11</b>
2.1 Introduzione . . . . .	11
2.2 Vettori di spazio multipli . . . . .	12
2.3 Principali vantaggi di un azionamento multifase . . . . .	14
2.4 Azionamenti ‘fault tolerant’ . . . . .	15
2.5 Azionamenti multimotore . . . . .	17
2.6 Inverter multifase . . . . .	20
2.7 Approccio Duty Cycle Space Vector e limite di tensione . . . . .	22
<b>3 Attuatore tubolare pentafase a magneti permanenti</b>	<b>31</b>
3.1 Introduzione . . . . .	31
3.2 Struttura dell’attuatore . . . . .	32
3.3 Descrizione delle forze presenti . . . . .	33
3.4 Scelte progettuali per l’ottimizzazione dell’attuatore . . . . .	35

---

<b>4</b>	<b>Modello matematico della macchina</b>	<b>43</b>
4.1	Introduzione . . . . .	44
4.2	Ipotesi di studio . . . . .	44
4.3	Campo magnetico in un traferro indifferentemente anisotropo prodotto da generici avvolgimenti statorici . . . . .	45
4.4	Campo magnetico dovuto a magneti permanenti con geometrie di interesse industriale . . . . .	61
4.5	Determinazione dei flussi concatenati . . . . .	68
4.6	Modello di macchina brushless pentafase anisotropa . . . . .	71
4.7	Espressione della coppia elettromagnetica . . . . .	82
4.8	Applicazione del modello ad una macchina tubolare . . . . .	86
<b>5</b>	<b>Algoritmo di stima della posizione sensorless</b>	<b>89</b>
5.1	Introduzione . . . . .	89
5.2	Peculiarità di un controllo di posizione sensorless . . . . .	90
5.3	Algoritmi sensorless . . . . .	91
5.3.1	Stimatori basati sull'eccitazione fondamentale . . . . .	92
5.3.2	Stimatori che, basati sull'anisotropia, sfruttano l'iniezione di segnali . . . . .	93
5.4	Algoritmo di stima della posizione sensorless per un attuatore a magneti permanenti anisotropo . . . . .	93
5.5	Applicazione dell'algoritmo ad un attuatore di tipo tubolare pentafase . . . . .	99
5.6	Vantaggi e problematiche del metodo . . . . .	108
<b>6</b>	<b>Simulazioni dell'azionamento</b>	<b>111</b>
6.1	Introduzione . . . . .	111
6.2	Definizione del modello Simulink . . . . .	112
6.3	Implementazione dell'algoritmo sensorless per la stima di posizione . . . . .	119
6.4	Taratura del regolatore e scelta dei parametri per le simulazioni . . . . .	125
6.5	Risultati delle simulazioni . . . . .	129
6.5.1	Simulazioni con metodo in catena aperta . . . . .	131
6.5.2	Simulazioni con metodo in catena chiusa . . . . .	132

---

6.5.3	Simulazioni con metodo in catena chiusa "semplificato" . . .	136
6.5.4	Andamenti di grandezze rilevanti, ottenuti durante le simulazioni con metodo in catena chiusa nello spazio 3 . . .	138
6.5.5	Simulazione del sistema di controllo sensorless realizza- to con l'implementazione dell'algoritmo in catena chiusa nello spazio 3 . . . . .	142
6.6	Conclusioni sulle simulazioni . . . . .	143
<b>7</b>	<b>Prove sperimentali su un prototipo di azionamento tubolare</b>	<b>145</b>
7.1	Introduzione . . . . .	145
7.2	Verifica del livello di anisotropia dell'attuatore . . . . .	146
7.3	Descrizione del banco di prova . . . . .	151
7.4	Stesura del codice di stima della posizione sensorless in linguag- gio di programmazione C . . . . .	153
7.5	Prove sperimentali della stima di posizione sensorless . . . . .	160
7.6	Conclusioni sulle prove sperimentali . . . . .	167
<b>8</b>	<b>Conclusioni</b>	<b>169</b>
	<b>Bibliografia</b>	<b>175</b>



# Elenco delle figure

1.1	Processo intuitivo di taglio e compressione di una macchina rotativa per ottenere un motore lineare a doppia faccia. . . . .	2
1.2	Processo intuitivo per ottenere un motore di tipo tubolare partendo da una macchina di tipo rotativo. . . . .	2
1.3	Vista tridimensionale di un motore tubolare con magneti permanenti a magnetizzazione assiale. . . . .	9
1.4	Rappresentazione schematica di un materiale SMC. . . . .	10
2.1	Principio schematico della connessione di $(m-1)/2$ macchine in serie in un azionamento multimotore alimentato da un inverter ad $m$ fasi. . . . .	18
2.2	Struttura di un inverter VSI multifase. . . . .	20
2.3	Segnale portante (carrier) e segnali modulanti. . . . .	22
2.4	Schema di generazione del segnale dello stato di un generico ramo di inverter. . . . .	23
2.5	Schema di generazione dei segnali modulanti per ciascun ramo di inverter secondo l'approccio DCSV. . . . .	26
2.6	Andamento grafico del limite di tensione per una macchina pentafase, con sincronizzazione dei vettori di spazio. . . . .	29
2.7	Andamento grafico del limite di tensione per una macchina pentafase, con vettori di spazio indipendenti. . . . .	30
3.1	Schema di base di un motore tubolare con magneti permanenti a magnetizzazione assiale. . . . .	32

3.2	Rappresentazione schematica dei parametri geometrici necessari a descrivere un attuatore tubolare. . . . .	37
3.3	Schema che mostra i parametri geometrici di una macchina tubolare, con particolare rilievo sulla geometria degli avvolgimenti statorici (a), fornendone anche una vista tridimensionale (b). . . .	38
3.4	Andamento delle linee di campo magnetico in prossimità dei dischi compensatori. . . . .	39
3.5	Immagine del prototipo di motore tubolare in studio. . . . .	41
4.1	Spira a statorica. . . . .	45
4.2	Spira a statorica riportata in piano. . . . .	46
4.3	Distribuzione lineare di densità di corrente per la spira a statorica riportata in piano. . . . .	46
4.4	Distribuzione lineare di densità di corrente per la spira a statorica puntiforme riportata in piano. . . . .	47
4.5	Convenzioni utilizzate per la circuitazione magnetica. . . . .	49
4.6	Andamento del traferro. . . . .	59
4.7	Andamento dell'inverso dello spessore del traferro. . . . .	59
4.8	Convenzioni per il sistema di riferimento rotorico. . . . .	62
4.9	Parametri geometrici che descrivono i magneti permanenti rotorici. . . . .	62
4.10	Caratteristica di legame materiale in un mezzo magnetico lineare. . . . .	63
4.11	Linee di circuitazione magnetica di interesse per la trattazione analitica. . . . .	64
4.12	Andamento del campo magnetico nel traferro dovuto ai magneti permanenti. . . . .	66
4.13	Macchina brushless pentafase anisotropa semplificata. . . . .	72
6.1	Schema a blocchi per l'equazione di macchina d'asse q rispetto al primo vettore di spazio. . . . .	115
6.2	Schema a blocchi per il calcolo della coppia. . . . .	116
6.3	Schema a blocchi del modello del motore nel riferimento rotorico. . . . .	117

---

6.4	Schema a blocchi del modello dell'inverter pentafase controllato con tecnica PWM simmetrica. . . . .	118
6.5	Schema a blocchi dell'algoritmo sensorless in catena aperta. . . . .	121
6.6	Schema a blocchi dell'iniezione del segnale in catena aperta. . . . .	121
6.7	Schema a blocchi del modello dell'azionamento. . . . .	121
6.8	Schema a blocchi dell'algoritmo in catena aperta. . . . .	122
6.9	Schema a blocchi dell'algoritmo sensorless in catena chiusa. . . . .	122
6.10	Schema a blocchi dell'iniezione del segnale in catena chiusa. . . . .	123
6.11	Schema a blocchi dell'algoritmo in catena chiusa. . . . .	123
6.12	Schema a blocchi dell'algoritmo sensorless in catena chiusa semplificato. . . . .	124
6.13	Schema a blocchi dell'algoritmo in catena chiusa semplificato. . . . .	124
6.14	Schema a blocchi del regolatore implementato negli algoritmi in catena chiusa. . . . .	126
6.15	Stima di posizione a rotore fermo dell'algoritmo in catena aperta nello spazio 3. . . . .	132
6.16	Stima di posizione dell'algoritmo in catena aperta nello spazio 3. . . . .	133
6.17	Stima di posizione a rotore fermo dell'algoritmo in catena chiusa nello spazio 1. . . . .	134
6.18	Stima di posizione a rotore fermo dell'algoritmo in catena chiusa nello spazio 3. . . . .	134
6.19	Stima di posizione con l'algoritmo in catena chiusa nello spazio 1, per un transitorio 0-200-0 radianti. . . . .	135
6.20	Stima di posizione con l'algoritmo in catena chiusa nello spazio 3, per un transitorio 0-50-0 radianti. . . . .	136
6.21	Stima di posizione con l'algoritmo in catena chiusa nello spazio 1, per una rampa fino alla divergenza. . . . .	137
6.22	Stima di posizione con l'algoritmo in catena chiusa nello spazio 3, per una rampa fino alla divergenza. . . . .	137
6.23	Stima di velocità. . . . .	139
6.24	Ampiezza del primo vettore di spazio delle correnti statoriche. . . . .	140

---

6.25	Ampiezza del terzo vettore di spazio delle correnti statoriche. . . .	140
6.26	Ampiezza della componente inversa della corrente di spazio 3. . . .	141
6.27	Segnale in ingresso al blocco "atan2". . . . .	141
6.28	Velocità di riferimento e velocità effettiva del motore con controllo completamente sensorless dell'azionamento implementato nello spazio 3. . . . .	142
7.1	Strumentazione utilizzata per la verifica dell'esistenza di un livel- lo di anisotropia sufficiente per l'implementazione dell'algoritmo sensorless. . . . .	147
7.2	Andamento di corrente e tensione durante la prova a 50 Hz. . . . .	148
7.3	Andamento di corrente e tensione durante la prova a 200 Hz. . . . .	148
7.4	Andamento di corrente durante la prova a 200 Hz (zoom ad 1 secondo). . . . .	149
7.5	Andamento di corrente e tensione durante la prova ad 1 kHz. . . . .	149
7.6	Andamento di corrente durante la prova ad 1 kHz (zoom ad 1 secondo). . . . .	149
7.7	Andamento di corrente durante la prova ad 1 kHz (zoom a 0.1 secondi). . . . .	150
7.8	Risultati sperimentali. Forme d'onda di corrente e tensione della fase alimentata durante la prova ad 1 kHz (20 ms/div; 0.5 A/div; 20 V/div). . . . .	150
7.9	Banco prova utilizzato per le prove sperimentali. Sopra una vista generale. Sotto le componenti più importanti dell'azionamento, da sinistra: DSP, inverter e motore tubolare. . . . .	153
7.10	Prove Sperimentali. Corrente ad alta frequenza associata al segnale di tensione iniettato per implementare l'algoritmo sensorless (0.5 ms/div; 1 A/div). . . . .	160
7.11	Prove sperimentali. Andamento dei segnali di posizione misurati dal trasduttore SinCos (blu, 4cm/div) e stimati dall'algoritmo sen- sorless in catena aperta (giallo, 2cm/div); con una scala temporale di 2s/div. . . . .	162

- 
- 7.12 Prove sperimentali. Algoritmo in catena chiusa nello spazio 1:  
errore (verde;  $2\pi$  rad/div); posizione misurata (blu; 20 cm/div);  
posizione stimata dall'algoritmo sensorless (giallo; 20 cm/div);  
velocità stimata (rosso; 50 rad/s/div); (5 s/div). . . . . 163
- 7.13 Prove sperimentali. Algoritmo in catena chiusa nello spazio 3:  
errore (verde;  $4\pi$  rad/div); posizione misurata (blu; 10 cm/div);  
posizione stimata dall'algoritmo sensorless (giallo; 10 cm/div);  
velocità stimata (rosso; 20 rad/s/div); (5 s/div). . . . . 164
- 7.14 Prove sperimentali. Algoritmo in catena chiusa con metodo sem-  
plicitato nello spazio 1: errore (verde;  $2\pi$  rad/div); posizione mis-  
urata (blu; 20 cm/div); posizione stimata dall'algoritmo sensorless  
(giallo; 20 cm/div); velocità stimata (rosso; 50 rad/s/div); (5 s/div). 166



# **Elenco delle tabelle**

2.1	Tabella delle permutazioni per la connessione in serie di motori multifase. . . . .	19
-----	---	----



# **Introduzione**

L'elaborato si pone l'obiettivo di proporre un algoritmo per il controllo sensorless di posizione adatto ad un attuatore tubolare pentafase anisotropo a magneti permanenti.

Le peculiarità degli attuatori tubolari sono molteplici: assenza di organi di trasmissione del moto; compattezza; elevate densità di forza e prestazioni nella dinamica, con una più ampia banda passante per il sistema di controllo; maggiore precisione, risoluzione, ripetibilità ed affidabilità. Tale tipologia di macchina è pertanto molto interessante in diverse applicazioni quali robotica, automazione, packaging, sistemi di posizionamento ecc., ed è altresì promettente nei settori aerospaziale e automotive. L'azionamento in studio è inoltre di tipo multifase. In tal caso si ottengono diversi vantaggi: possibilità di suddividere la potenza su un numero elevato di rami del convertitore; capacità di lavorare in condizioni di guasto; incremento della densità di coppia della macchina; possibilità di controllare in modo indipendente e con un solo inverter più macchine collegate in serie. Prestazioni migliori della macchina si possono ottenere con un opportuno sistema di controllo. Nel caso di azionamenti a magneti permanenti risulta particolarmente attraente il controllo di tipo sensorless della posizione rotorica, in alternativa ad un encoder o un resolver. Questo aumenta l'affidabilità, riduce i costi e diminuisce l'ingombro complessivo dell'azionamento.

Appare dunque molto interessante l'utilizzo di un azionamento tubolare di tipo multifase, e ancor più lo sviluppo di un apposito controllo sensorless di posizione. L'algoritmo sensorless di stima della posizione dell'attuatore può essere sviluppato partendo dall'anisotropia di macchina, sfruttando la possibilità peculiare delle macchine multifase di estrarre informazioni sullo stato attraverso i molteplici gradi di libertà presenti. Nel caso in questione si tratta del controllo della terza armonica spaziale del campo magnetico al traferro. Fondamentale è la definizione di un modello matematico in grado di rappresentare in modo opportuno l'anisotropia di macchina. In letteratura non sono ancora presenti modelli adatti a descrivere il dispositivo in questione; pertanto una parte essenziale della tesi è stata dedicata a definire tale modello e a verificarne la validità. Partendo dal modello è possibile dunque sviluppare un appropriato algoritmo di stima della posizione sensorless e

rappresentare in Simulink l'intero azionamento. Nella parte conclusiva del lavoro di tesi vengono presentate le simulazioni e le prove sperimentali, finalizzate alla verifica del funzionamento dell'algoritmo di stima della posizione. Infine sono analizzati i risultati ottenuti, mostrandone gli aspetti più rilevanti, le criticità ed i possibili sviluppi futuri.



# Capitolo 1

## Attuatori tubolari

In questo capitolo vengono fornite le informazioni di base per comprendere il funzionamento dei motori lineari, partendo da un confronto tra le diverse categorie e soffermandosi poi sulla descrizione di quelli lineari di tipologia tubolare (paragrafi 2-3). Particolare attenzione è data infine alle scelte progettuali che sono necessarie per la realizzazione dei motori tubolari a magneti permanenti (paragrafo 4), come il prototipo che è stato utilizzato per le prove sperimentali di questo lavoro di tesi. La trattazione che segue viene ampiamente approfondita in [1] e [2].

### 1.1 Introduzione

Gli azionamenti basati su macchine di tipologia lineare sono sempre più richiesti ed utilizzati in ambito industriale grazie anche agli sviluppi nei materiali, nelle tecniche di progettazione/produzione e nei metodi di controllo. Essi sono in grado di conferire una forza di spinta al carico, senza bisogno di utilizzare organi di trasmissione o riduttori, rendendo i dispositivi più compatti e con migliori prestazioni in termini di dinamica. Tali vantaggi sono accentuati nella tipologia tubolare di motori lineari a magneti permanenti, la quale presenta inoltre una maggiore densità di forza e non presenta i problemi di montaggio tipici delle macchine lineari. Per comprendere rapidamente le macchine lineari si può partire da quella a doppia faccia. Una macchina lineare a doppia faccia può essere vista come

una macchina rotativa tagliata lungo un piano radiale e premuta come mostrato in figura 1.1.

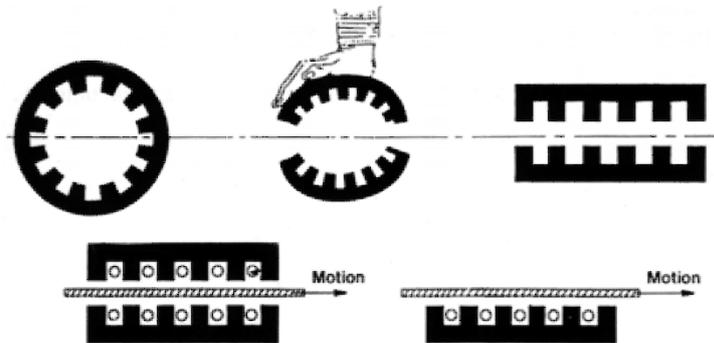


Figura 1.1: Processo intuitivo di taglio e compressione di una macchina rotativa per ottenere un motore lineare a doppia faccia [2].

Per ottenere invece la versione tubolare di motore lineare, occorre semplicemente effettuare una protrusione cilindrica rispetto all'asse di simmetria, oppure prendere una sola delle due facce e arrotolarla come viene mostrato in figura 1.2 per lo sviluppo del rotore in slider.

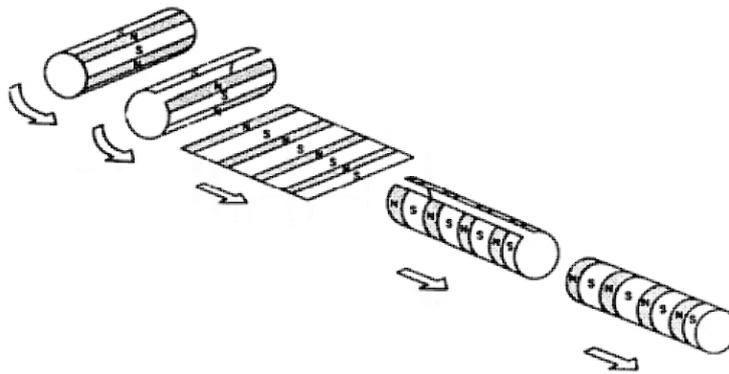


Figura 1.2: Processo intuitivo per ottenere un motore di tipo tubolare partendo da una macchina di tipo rotativo [2].

In tali macchine non si può più parlare di rotore, ma ci si riferisce alla parte mobile

della macchina con i termini forcer, mover o slider.

Oggi i motori lineari sono utilizzati per servomotori ed apparecchi atti a gestire movimenti controllati, come i macchinari di posizionamento e quelli di impacchettamento ad alte velocità, i robot industriali ecc. Essi vengono richiesti anche per compressori e condizionatori alternativi, ma comunque restando sempre nel campo delle basse potenze. Applicazioni a potenze medio-alte sono più rare e riguardano fondamentalmente proposte di ricerca, come gli studi sui sistemi di produzione di energia elettrica basati sullo sfruttamento delle maree e delle onde. Un campo in cui tale tipo di motore è fondamentale riguarda il settore dei trasporti: sia pubblici, quali i people-movers e i treni a levitazione magnetica, sia per applicazioni industriali, per movimentare merci ad alta o anche a bassa velocità. In futuro si prevede che gli azionamenti con motori lineari possano trovare sviluppo anche nei settori aerospaziale ed automobilistico.

## **1.2 Confronto tra le differenti tipologie di attuatori lineari**

Una differenza fondamentale che distingue le macchine lineari da quelle rotative consiste nella limitatezza dello slider e dello statore. Poiché si desidera avere sempre lo stesso tipo di accoppiamento magnetico tra statore e slider, una delle due parti deve essere più lunga dell'altra per permettere un movimento reciproco senza alterare le condizioni di funzionamento. Esistono pertanto macchine in cui è più lungo l'uno e macchine in cui è più lungo l'altro a seconda degli scopi a cui è destinato l'azionamento. Nei sistemi industriali di trasporto conviene in genere utilizzare uno statore più lungo, mentre per i dispositivi di imballaggio e di movimentazione di organi per la lavorazione conviene generalmente la soluzione in cui risulta più esteso lo slider. In entrambi i casi la limitatezza dello statore e dello slider provocano una discontinuità del circuito magnetico che genera quello che viene definito come effetto di estremità.

La tipologia di slider determina la nomenclatura della macchina elettrica (asin-

crona, a magneti permanenti, a riluttanza ecc.) in modo analogo a come avviene per il rotore nelle classiche macchine rotative.

Si possono distinguere i motori lineari nelle seguenti categorie principali:

1. attuatori lineari asincroni (Linear Induction Actuators, LIAs)
2. attuatori lineari sincroni a magneti permanenti (Linear Permanent Magnet Synchronous Actuators, LPMSAs)
3. attuatori lineari sincroni a riluttanza (Linear Reluctance Synchronous Actuators, LRSAs)
4. attuatori lineari a riluttanza variabile e passo-passo (Linear Switched Reluctance Actuators, LSRAs, e Linear Stepper Actuators, LSAs)

Gli attuatori lineari asincroni presentano un avvolgimento multifase nello statore e una gabbia di scoiattolo o un avvolgimento cortocircuitato nello slider. Il nucleo magnetico sia di statore che di rotore necessita di essere laminato per ridurre le perdite nel ferro. A causa dei problemi nell'effettuare la laminazione del circuito magnetico, la realizzazione di cave aperte o semichiusure risulta più facile. Per quanto riguarda i motori tubolari, realizzare cave chiuse è stato impossibile fino all'avvento dei compositi magnetici dolci (Soft magnetic Composites, SMCs). I motori lineari asincroni vengono generalmente sviluppati nella forma tubolare per applicazioni fino a 0.5 m di corsa. Per corse fino a 2-3 m si preferisce una soluzione piana in cui la parte alimentata (primario) risulta quella mobile. Questo viene reso possibile tramite un cavo flessibile che alimenta gli avvolgimenti. Nel caso di corse superiori alle precedenti è la gabbia di scoiattolo (o gli avvolgimenti cortocircuitati) ad essere messa in movimento, mentre il lungo statore (primario) viene alimentato solo nel tratto in cui si trova affacciato istante per istante con lo slider (che in tal caso funge da secondario).

Gli attuatori lineari sincroni a magneti permanenti hanno iniziato a competere sul mercato grazie agli sviluppi nei materiali magnetici sia duri che dolci. Il progresso che si è avuto nei magneti permanenti ad alta energia basati su terre rare, con prestazioni elevatissime anche ad alte temperature, è stato appunto fondamentale

per la loro diffusione. Nonostante le macchine asincrone risultino decisamente più economiche, quelle a magneti permanenti presentano una maggiore densità di forza e migliori prestazioni in termini di dinamica. Inoltre, più l'attuatore è piccolo più la corrente magnetizzante diventa percentualmente importante nelle macchine asincrone e quindi il passaggio ad una tipologia a magneti permanenti risulta sempre più attraente. Bisogna tuttavia prestare sempre attenzione al fatto che, in ambienti inquinati, le particelle di ferro possono essere attratte dai magneti e provocare, nella migliore delle ipotesi, il fermo macchina per manutenzione. I magneti possono essere montati superficialmente o affogati nella struttura ferromagnetica (come nel prototipo analizzato in questa tesi), mentre la parte alimentata è dello stesso tipo di quella delle macchine asincrone. Per sfruttare meglio i materiali ed avere un attuatore più compatto, si preferisce la soluzione tubolare per corse fino ad 1 m di lunghezza. Per corse fino ai 3 metri si usano soluzioni piane in cui viene movimentato il primario della macchina; mentre per corse superiori è la parte contenente i magneti permanenti a fungere da slider.

Gli attuatori lineari sincroni a riluttanza si presentano concettualmente come degli attuatori sincroni a magneti permanenti privati dei magneti, anche se spesso la geometria del circuito ferromagnetico risulta più complessa. La forza di spinta viene prodotta solo dall'interazione del campo magnetico prodotto dagli avvolgimenti del primario con l'anisotropia del circuito magnetico del secondario, in particolare quella tra l'asse  $d$  e l'asse  $q$ . Tali motori sono i più semplici motori ac da controllare. Rispetto ai motori a magneti permanenti risultano economici e possono raggiungere buone prestazioni soprattutto nel campo ad alta velocità, non avendo la necessità di deflussare ed avendo uno slider più robusto. Rispetto ai motori asincroni non presentano teoricamente perdite nel secondario e, se progettati opportunamente, possono raggiungere anche una densità di forza comparabile con questi ultimi.

Gli attuatori lineari a riluttanza variabile e passo-passo sono dei motori simili a quelli sincroni a riluttanza ma con diversi principi di funzionamento e geometrie costruttive. I motori a riluttanza variabile presentano avvolgimenti concentrati. Questo permette di ridurre i costi di produzione e manutenzione, oltre che di ren-

derli tolleranti in caso di guasto di una fase. Il limite di tali motori, che comunque restano molto usati per i bassi costi, consiste nel ripple che ha la forza di spinta. Questo li confina ad applicazioni di precisione, in cui diventa poco importante la dinamica dell'azionamento. I motori lineari di tipo passo-passo sfruttano invece la forza di spinta per allineare i poli della parte mobile con quelli della parte fissa. In tali macchine la tipologia lineare piana presenta un'elevata forza normale che può causare notevoli problemi meccanici se non contrastata. Una soluzione a doppia faccia è comunque già sufficiente a risolvere questo inconveniente.

Per corse brevi si è visto come sia preferibile utilizzare motori lineari tubolari. I motori tubolari risultano apparentemente simili a dei pistoni idraulici o pneumatici. Tuttavia, nelle applicazioni in cui è richiesto un buon controllo nella dinamica dell'azionamento, i tradizionali pistoni non risultano più adatti. Questi ultimi sono generalmente controllati in catena aperta generando una pressione ad un fluido, la quale si converte in forza agente sul carico. I motori tubolari hanno dunque enormi vantaggi in termini di precisione, affidabilità del controllo, risposta dinamica, minor richiesta di manutenzione, facilità nell'alimentazione e mancanza di perdite di fluido.

### 1.3 Principi di funzionamento dei motori lineari

Come nelle macchine rotative, anche per quelle lineari compaiono due forze: la forza tangenziale al moto e quella normale ad esso. La differenza sostanziale tra le due tipologie di macchina è dovuta al fatto che nelle macchine rotative la forza normale si annulla a causa della simmetria cilindrica della macchina. Questo problema può essere risolto se la macchina lineare è di tipo tubolare, come nel nostro caso. Si noti che la forza normale non può essere trascurata in fase di progettazione di una macchina lineare piana, in quanto essa assume in genere valori di 8-10 volte quelli della forza complessiva di spinta.

A seconda della tipologia di macchina elettrica, la forza principale viene prodotta attraverso un fenomeno fisico differente. I motori asincroni lineari generano, una volta alimentati con corrente alternata, un campo magnetico traslante che

interagisce con quello prodotto dalle correnti indotte nel secondario per produrre la forza di spinta. Nel caso dei motori sincroni invece il campo magnetico prodotto dal primario, sempre tramite un'alimentazione in corrente alternata, genera la forza interagendo con i poli magnetici e/o con l'anisotropia magnetica del secondario. Nel caso dei motori a riluttanza variabile e passo-passo il campo magnetico del primario viene invece prodotto alimentando opportunamente gli avvolgimenti in corrente continua tramite interruttori elettronici, mentre la produzione della forza avviene ancora tramite l'interazione di quest'ultimo campo con i poli magnetici e/o con l'anisotropia magnetica del circuito secondario.

La tipologia di macchina lineare di tipo tubolare sincrona a magneti permanenti risulta molto attraente per la sua struttura compatta, la compensazione intrinseca della forza normale e l'elevata densità di forza. Tuttavia, la presenza dei magneti permanenti provoca un disturbo di forza, interagendo con la struttura ferromagnetica del primario. Questo genera vibrazioni, rumore, un moto disuniforme a basse velocità dell'azionamento ed errori nel suo posizionamento. Tale contributo indesiderato di forza è provocato da due componenti: la forza di cogging e l'effetto di estremità. La forza di cogging è causata dalla tendenza dei magneti ad allinearsi con lo statore nelle posizioni in cui la permeanza del circuito magnetico è massima (dunque nelle configurazioni in cui la riluttanza è minima). Tale forza ha una lunghezza d'onda spaziale che dipende dal numero di poli, dal numero di cave e dal passo polare. L'effetto di estremità dipende dall'interazione tra la lunghezza finita del nucleo magnetico statorico ed il movimento dei magneti permanenti. Questa seconda forza ha una lunghezza d'onda di un passo polare. Per ridurre questi due elementi di disturbo vi sono diverse scelte progettuali che possono essere prese, come l'inclinazione (skew) e la disposizione ottimale dei magneti, l'ottimizzazione della lunghezza dello statore ed infine lo sviluppo di una strategia di controllo sulla forma delle correnti nelle fasi statoriche.

## 1.4 Particolarità progettuali dei motori tubolari

Un motore lineare di tipo tubolare presenta alcuni vantaggi sia rispetto ai motori rotativi, sia in confronto alle altre tipologie di motori lineari. Innanzitutto non presenta testate, così che i conduttori partecipano completamente in modo attivo alla generazione del campo magnetico, con minori perdite Joule. Questo permette di raggiungere un rendimento più alto e una potenza specifica superiore rispetto alle macchine rotative e a quelle lineari di tipo piano. Gli avvolgimenti sono costituiti da degli anelli di conduttori facilmente producibili a livello industriale. Tali anelli possono essere pre-assemblati e compattati, così da ottenere un ottimo fattore di riempimento degli avvolgimenti. Lo statore viene ottenuto alternando semplicemente i dischi conduttivi con dischi di materiale ferromagnetico, sfruttando meglio la cava e migliorando lo scambio termico grazie alla distribuzione più uniforme della temperatura degli avvolgimenti.

La geometria tubolare rende tali macchine neutrali alla forza normale tra lo statore e lo slider, alla pari di quello che avviene per le macchine rotative, e gli conferisce la peculiarità di risultare particolarmente adatte a lavorare in un ambiente inquinato o comunque critico, essendo macchine strutturalmente chiuse. D'altra parte, come si può intuire da quanto esposto al paragrafo precedente, tale tipologia di macchina può essere utilizzata solo per corse corte. Questa limitazione nasce dal fatto che una flessione eccessiva dell'albero provoca vibrazioni che possono danneggiare il motore.

La struttura classica di un motore tubolare a magneti permanenti a magnetizzazione assiale è mostrata in figura 1.3.

Esistono anche motori in cui i magneti permanenti sono montati superficialmente. Sebbene a parità di volume le due tipologie di magneti permanenti forniscono la stessa densità di forza, quelli a magnetizzazione assiale vengono preferiti perché i magneti permanenti a terre rare con anisotropia assiale risultano più economici e diffusi sul mercato. I magneti permanenti sono in genere in ferrite o in Nd-Fe-B. I primi sono sicuramente più economici, con bassa rimanenza, bassa energia specifica ed elevata temperatura di declassamento. Quelli in leghe di Nd-Fe-B sono invece la tipologia a maggiore energia specifica, con rimanenza e campo coerciti-

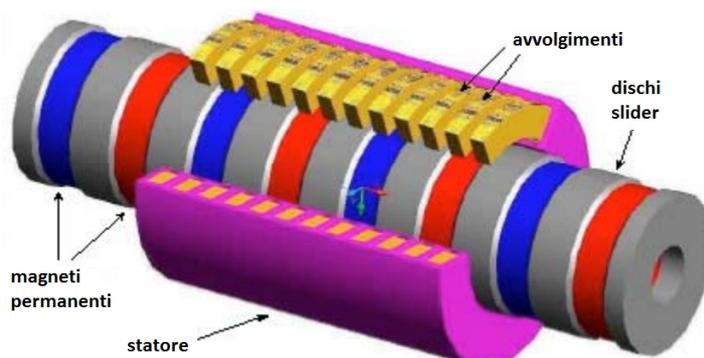


Figura 1.3: Vista tridimensionale di un motore tubolare con magneti permanenti a magnetizzazione assiale [2].

vo intrinseco più alti anche per temperature di  $100 - 150^{\circ}\text{C}$ .

Un discorso altrettanto importante riguarda la scelta del materiale utilizzato in queste macchine per il circuito magnetico. Nei motori tradizionali rotativi il nucleo magnetico è ottenuto attraverso la laminazione planare, che consente di interrompere la circolazione delle correnti parassite indotte dai campi magnetici variabili nel tempo. Nelle macchine tubolari tali correnti scorrono sulla circonferenza dell'attuatore; pertanto, per essere interrotte, occorre una laminazione "a fetta di torta", che risulta praticamente irrealizzabile. Una laminazione longitudinale rende difficile allineare i lamierini attorno all'asse della macchina ed una laminazione tangenziale provoca un aumento della riluttanza magnetica, a seguito di un aumento dello spessore di isolante tra i lamierini nelle corone, le quali devono essere necessariamente attraversate dal flusso. Fortunatamente il problema può essere risolto con l'uso di compositi magnetici dolci (SMC), costituiti da polveri formate da particelle di materiale ferromagnetico rivestite da uno strato di isolante elettrico come mostrato in figura 1.4.

Tali polveri vengono trattate termicamente e compattate per formare un composito con proprietà magnetiche isotrope, permettendo cammini di flusso sia radiali che assiali. Generalmente questi compositi presentano minore permeabilità iniziale, minore induzione di saturazione e maggiori perdite del ferro a 50-60 Hz rispetto



Figura 1.4: Rappresentazione schematica di un materiale SMC [2].

ai tipici laminati, anche se attraverso opportuni additivi si riescono a raggiungere densità e temperature di lavorazione maggiori, tali da migliorarne le proprietà magnetiche. Gli svantaggi mostrati sono comunque compensati dall'isotropia intrinseca degli SMC e dalla possibilità di produrre circuiti magnetici di forme tridimensionali e molto più complesse rispetto a quelle raggiungibili con l'uso di lamierini. Bisogna inoltre tener conto del fatto che le macchine tubolari a magneti permanenti hanno naturalmente un'elevata riluttanza per la presenza dei magneti, pertanto la permeabilità del circuito magnetico riveste minore importanza nel raggiungimento di buone prestazioni. In [3] è mostrato come le macchine con SMC presentano generalmente prestazioni lievemente minori, differenza compensata dalla maggiore facilità nella loro produzione, con costi che risultano potenzialmente minori.

# Capitolo 2

## Sistemi multifase

In questo capitolo vengono presentate le caratteristiche principali degli azionamenti multifase. Nel primo paragrafo vengono introdotti i vettori di spazio per un sistema con un numero di fasi generico. Questi risultano molto utili nella definizione di un modello analitico adatto a descrivere in maniera efficiente il sistema. Nei paragrafi seguenti (3-4-5) sono descritte alcune delle proprietà più interessanti che caratterizzano i motori multifase, soffermandosi sulla caratteristica di tolleranza al guasto (paragrafo 4) e sulla possibilità di sviluppare azionamenti multimotore (paragrafo 5). Infine viene studiato l'inverter, indispensabile per alimentare una macchina multifase (paragrafo 6), mostrando la tecnica di modulazione DCSV e fornendo informazioni riguardo ai limiti di tensione che occorre rispettare negli azionamenti multifase per non portarsi in condizioni di sovrarmatura (paragrafo 7).

### 2.1 Introduzione

La struttura tipica di un azionamento a velocità variabile è costituita da un motore trifase alimentato da un inverter, anch'esso trifase, a tensione impressa (Voltage Source Inverter, VSI). Il convertitore può essere visto come un'interfaccia di disaccoppiamento tra la rete elettrica trifase ed il motore. Per questo motivo non è più necessario che le fasi del motore siano tre. Grazie anche agli svilup-

pi dell'elettronica di potenza, è dunque possibile considerare il numero di fasi di una macchina un'ulteriore variabile di progetto. L'interesse per gli azionamenti multifase è dovuto alla possibilità di incrementare le prestazioni di tali dispositivi sfruttando i gradi di libertà che si rendono disponibili all'aumentare del numero delle fasi.

## 2.2 Vettori di spazio multipli

Nella letteratura riguardante gli azionamenti trifase vengono spesso introdotte le coordinate d-q per poter descrivere analiticamente le equazioni di macchina in termini di vettori di spazio (uno per ogni grandezza elettromagnetica) appartenenti a tale sistema di riferimento, così da poterne comprendere il funzionamento e poter effettuare più facilmente il controllo ai valori istantanei del dispositivo. Quando si passa ad analizzare un motore di tipo multifase non è più possibile utilizzare la rappresentazione vettoriale in un unico piano d-q per descrivere il sistema elettromagnetico: occorrono più piani d-q. Per descrivere ogni grandezza elettromagnetica esiste quindi un vettore di spazio per ciascuno di tali piani d-q. La descrizione dei sistemi multifase tramite vettori di spazio multipli permette di sfruttare bene le potenzialità degli azionamenti multifase e risulta molto comoda per rappresentarli ed analizzarli.

In un sistema ad  $m$  fasi vi sono  $m$  variabili ( $x_1, x_2, x_3, \dots, x_m$ ) per ogni grandezza elettromagnetica  $x$ . Si possono ottenere altre  $m$  variabili equivalenti per mezzo della seguente trasformazione simmetrica lineare:

$$\bar{x}_h = \frac{2}{m} \sum_{k=1}^m x_k \bar{\alpha}^{h(k-1)} \quad (h = 0, 1, 2, \dots, m-1) \quad (2.1)$$

la cui antitrasformata risulta:

$$x_k = \frac{1}{2} \sum_{h=0}^{m-1} \bar{x}_h \cdot \bar{\alpha}^{h(k-1)} \quad (k = 1, 2, \dots, m) \quad (2.2)$$

dove  $\bar{\alpha} = e^{j \frac{2\pi}{m}}$ , mentre il simbolo "  $\cdot$  " rappresenta il prodotto scalare tra due variabili complesse.

Ad eccezione del caso in cui  $h = 0$  (ed  $h = \frac{m}{2}$ , solo per un numero pari di fasi), la quantità  $\bar{x}_h$  è un numero complesso che viene definito come il vettore di spazio della componente di sequenza  $h$ , o vettore di spazio sul piano  $(d - q)_h$ , rappresentativo della grandezza  $x$ .

Bisogna notare come il vettore di spazio della componente di sequenza  $h$  sia in realtà il complesso coniugato del vettore di spazio della componente di sequenza  $m - h$ , inoltre il vettore di spazio della componente di sequenza  $m - h$  coincide con il vettore di spazio della componente di sequenza  $-h$ . Pertanto si può scrivere che:

$$\bar{x}_h = \bar{x}_{-h}^* \quad (2.3)$$

La variabile  $\bar{x}_0 = x_0$ , ottenuta per  $h = 0$ , è definita come la componente alla sequenza zero, detta anche componente omopolare.

Dalle relazioni precedenti è possibile riscrivere le relazioni tra le grandezze di fase e le rispettive grandezze in termini di vettori di spazio, componente omopolare (ed eventualmente componente alla sequenza  $\frac{m}{2}$ ) come segue:

$$\bar{x}_h = \frac{2}{m} \sum_{k=1}^m x_k \bar{\alpha}^{h(k-1)} \quad (h = 1, 3, 5, \dots, m-2) \quad (2.4)$$

$$x_0 = \frac{2}{m} \sum_{k=1}^m x_k \quad (2.5)$$

$$x_{(\frac{m}{2})} = \frac{2}{m} \sum_{k=1}^m x_k (-1)^{k-1} \quad (2.6)$$

La trasformazione inversa corrispondente è invece:

$$x_k = \frac{1}{2} x_0 + \sum_{h=1,3,5,\dots}^{m-2} \bar{x}_h \cdot \bar{\alpha}^{h(k-1)} \quad (k = 1, 2, \dots, m) \quad (2.7)$$

Il vettore di spazio della componente di sequenza 1 ( $\bar{x}_1$ ) assume un'importanza notevole, perché è l'unico vettore di spazio non nullo quando la macchina elettrica si trova in condizioni bilanciate e sinusoidali. Bisogna comunque osservare che nel caso generale è necessario conoscere tutti i vettori di spazio più quello alla sequenza zero (ed eventualmente anche quello alla sequenza  $\frac{m}{2}$ ) per poter descrivere completamente il sistema ad  $m$  fasi.

## 2.3 Principali vantaggi di un azionamento multifase

Gli azionamenti multifase a velocità variabile hanno riscontrato un interesse crescente dalla metà degli anni '90, periodo nel quale la propulsione navale elettrica e i suoi sviluppi hanno dato slancio alla ricerca in tale settore. Le principali motivazioni tecniche che hanno portato all'uso di soluzioni multifase in sostituzione di quelle trifase sono di seguito elencate:

1. a parità di potenza gli azionamenti multifase riducono le correnti statoriche circolanti in ciascuna fase;
2. l'uso di più fasi aumenta l'affidabilità, per le caratteristiche di tolleranza ai guasti che si presentano nei sistemi multifase (sistemi fault-tolerant);
3. le macchine multifase riescono a raggiungere rendimenti più alti, poiché presentano un minor contenuto armonico del campo magnetico al traferro e possono raggiungere una coppia superiore;
4. con un unico inverter multifase è possibile controllare un azionamento multifase multi-motore.

La possibilità di ridurre le correnti circolanti su ciascuna fase aiuta a risolvere i problemi che si hanno nelle applicazioni di alta potenza (propulsione navale e trasporti) a causa dei limiti di corrente degli azionamenti. Si possono utilizzare convertitori con componenti elettronici più piccoli, senza aumentare la tensione di fase.

La possibilità di continuare ad utilizzare una macchina multifase anche in stato di guasto la rende molto più affidabile. Se una fase di una macchina trifase si guasta e si apre, non è possibile effettuare un auto avviamento e mentre è in moto vi è un declassamento molto spinto. Quando è invece una fase di una macchina multifase a portarsi in condizione di circuito aperto, l'azionamento riesce comunque ad auto avviarsi ed a funzionare in una condizione di declassamento che può essere ancora accettabile e che dipende dal numero delle fasi e dalla strategia di controllo utilizzata per compensare il guasto.

Se si confrontano due macchine identiche, con stesso traferro e stessa componente fondamentale delle correnti statoriche, quella multifase presenta minori perdite Joule per il minore contenuto di armoniche di flusso al traferro. Questo comporta un lieve aumento dell'efficienza via via che si aumenta il numero di fasi. Questo andamento avviene tuttavia in modo asintotico (per esempio passare da 12 a 15 fasi statoriche fa ridurre le perdite Joule statoriche solo dello 0.2 per cento).

Studi più recenti hanno mostrato la possibilità di sfruttare i gradi di libertà delle macchine multifase per ottenere coppie maggiori e per realizzare azionamenti multi-motore con un unico inverter di alimentazione. Coppie maggiori si possono ottenere sfruttando la terza armonica di spazio del campo magnetico al traferro, così da poter eventualmente ridurre l'ingombro dell'azionamento a parità di coppia desiderata per esso.

## **2.4 Azionamenti ‘fault tolerant’**

L'aumento del numero di fasi negli azionamenti multifase offre benefici considerevoli per la possibilità di continuarne il funzionamento anche quando una o più fasi si guastano.

Negli azionamenti trifase un guasto in una fase o in un ramo dell'inverter comporta un fermo macchina per manutenzione non programmata. Tale motore sarebbe ancora in grado di muoversi ma non di auto avviarsi, ed il costo di un intervento non programmato può essere anche parecchio elevato. Per le macchine multifase invece è possibile continuare il funzionamento in condizioni post guasto attraverso un'alimentazione sbilanciata della struttura asimmetrica degli avvolgimenti non guasti. Questo genera una coppia con un disturbo piccolo, rispetto al caso di una macchina trifase, e di valore ancora paragonabile a quello che si ha in condizioni nominali. La possibilità di funzionamento post guasto è molto utile nelle applicazioni in cui la sicurezza del sistema è critica ed occorre un'elevata affidabilità, come nella propulsione navale, nelle applicazioni by-wire, nel campo aerospaziale di tipologia more-electric e nei veicoli ibridi.

Per ottenere un azionamento multifase tollerante ai guasti si possono facilmente

progettare B gruppi di avvolgimenti di un sistema ad A fasi per ottenere il sistema complessivo ad  $n = AB$  fasi. In tale sistema esistono dunque B gruppi, ciascuno con il proprio centro stella e con un apposito inverter ad A rami per alimentare le sue A fasi. In questa tipologia di motori multifase, quando un avvolgimento si guasta, è sufficiente sconnettere il gruppo che si è guastato, ossia tutte le sue A fasi, e continuare il controllo dell'azionamento come se il guasto non fosse avvenuto, tranne che per un declassamento in coppia e potenza di  $\frac{b-1}{b}$  su ognuna delle A-fasi complessive.

Il metodo visto è molto semplice ma non è quello migliore, in quanto a seguito di un guasto vengono sconnessi tutti gli A avvolgimenti di un gruppo anche se  $A - 1$  risultano sani. Per sfruttare pienamente i gradi di libertà di una macchina multifase e raggiungere migliori caratteristiche di funzionamento in condizioni post-guasto conviene abbandonare la soluzione a più centri stella per una a singolo centro stella. In questo modo si può escludere solo l'avvolgimento della fase in cui è avvenuto il guasto e continuare il funzionamento con un minore declassamento rispetto al caso precedente. La soluzione a singolo centro stella deve tuttavia prevedere un sistema di controllo che sia in grado di rivelare il guasto e di adattare la sua strategia alle nuove condizioni di funzionamento. Appunto il sistema di controllo deve determinare le relazioni post guasto da imporre tra le correnti delle fasi sane, per continuare a far lavorare l'azionamento nel miglior modo possibile. La strategia deve essere sviluppata in relazione alle condizioni di carico e alla caratteristica di coppia del motore. Se la strategia di controllo non variasse a seguito del guasto si avrebbe una riduzione delle perdite Joule statoriche di  $\frac{n-1}{n}$ , ed un conseguente declassamento in coppia, senza sfruttare le potenzialità dei gradi di libertà disponibili in una macchina multifase. Una strategia può essere dunque quella di aumentare l'ampiezza delle correnti nelle fasi sane, in modo da tenere le perdite Joule al valore precedente al guasto ed avere una minor variazione della coppia (dunque una minor riduzione della velocità rotorica a seguito del guasto). Un'altra possibilità è quella di mantenere la coppia e la potenza ai valori precedenti al guasto, aumentando le correnti nelle fasi sane oltre il valore che si aveva con la strategia precedente. In questa tipologia di controllo le perdite statoriche

aumentano; pertanto tale condizione di funzionamento non può essere sostenuta per periodi lunghi a causa dell'insorgere di problemi termici di surriscaldamento. Tutte le soluzioni proposte risultano nella pratica limitate dalla corrente nominale che gli interruttori dell'inverter possono sopportare e dalle massime tensioni applicabili all'alimentazione del motore, dovute al vincolo della tensione sul collegamento in continua (bus dc).

## 2.5 Azionamenti multimotore

In diverse applicazioni nell'industria dell'automazione sono necessari più motori per poter movimentare in modo coordinato delle masse o dei dispositivi, come avviene nei sistemi di posizionamento su piani x-y, per le macchine per il confezionamento di prodotti ad alta velocità, nei plotter, ecc. Generalmente viene utilizzato un azionamento trifase per ogni asse di movimento, ciascun motore con il proprio inverter di alimentazione. Tali motori sono poi controllati da un'unica centralina che manda il segnale a tutti gli inverter, oppure il controllo di ogni motore viene implementato sul proprio inverter e la sincronizzazione del moto tra i vari assi viene gestito da un dispositivo che funge da master.

Per ottimizzare la componentistica e il ricircolo di energia dell'intero sistema, si può utilizzare un unico raddrizzatore trifase per alimentare un unico bus dc in comune tra tutti gli inverter. Un'idea molto interessante, per sfruttare i gradi di libertà che si rendono disponibili nelle macchine multifase, è quella di controllare con un unico inverter multifase più macchine multifase in modo indipendente tra loro. Il principio di base è quello di controllare ogni motore con la sola armonica fondamentale del campo al traferro, ossia con solo il primo vettore di spazio delle correnti statoriche. Per ottenere questo in un azionamento multimotore, occorre connettere gli avvolgimenti degli statori dei motori multifase in serie con un'opportuna permutazione delle fasi e collegare infine tutte le fasi ad un unico centro stella, come mostrato in figura 2.1.

La necessità di trasporre le fasi statoriche ad ogni motore si può dedurre diret-

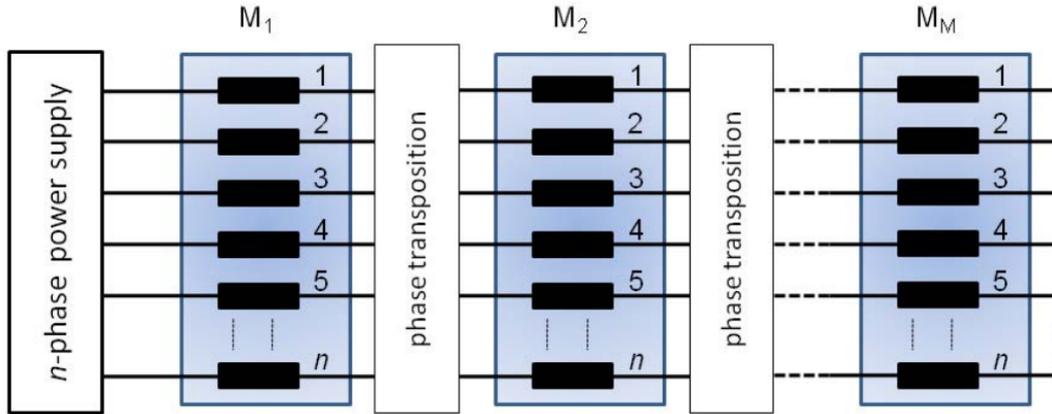


Figura 2.1: Principio schematico della connessione di  $(m-1)/2$  macchine in serie in un azionamento multimotore alimentato da un inverter ad  $m$  fasi [2].

tamente dalla matrice di trasformazione di Clarke:

$$C = \sqrt{\frac{2}{m}} \begin{bmatrix} 1 & \cos(\theta) & \cos(2\theta) & \cos(3\theta) & \dots & \cos(2\theta) & \cos(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \sin(2\theta) & \sin(3\theta) & \dots & -\sin(2\theta) & -\sin(\theta) \\ 1 & \cos(2\theta) & \cos(4\theta) & \cos(6\theta) & \dots & \cos(4\theta) & \cos(2\theta) \\ 0 & \sin(2\theta) & \sin(4\theta) & \sin(6\theta) & \dots & -\sin(4\theta) & -\sin(2\theta) \\ 1 & \cos(3\theta) & \cos(6\theta) & \cos(9\theta) & \dots & \cos(6\theta) & \cos(3\theta) \\ 0 & \sin(3\theta) & \sin(6\theta) & \sin(9\theta) & \dots & -\sin(6\theta) & -\sin(3\theta) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & \cos(\frac{m-1}{2}\theta) & \cos(\frac{m-1}{2}2\theta) & \cos(\frac{m-1}{2}3\theta) & \dots & \cos(\frac{m-1}{2}2\theta) & \cos(\frac{m-1}{2}\theta) \\ 0 & \sin(\frac{m-1}{2}\theta) & \sin(\frac{m-1}{2}2\theta) & \sin(\frac{m-1}{2}3\theta) & \dots & -\sin(\frac{m-1}{2}2\theta) & -\sin(\frac{m-1}{2}\theta) \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \dots & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

Leggendo la matrice in colonna si riesce a vedere di quanto ciascuna fase andrà trasposta per ottenere la corretta permutazione: la fase 1 resterà la stessa per ogni macchina della serie; la fase 2 della prima macchina ha uno sfasamento di  $\theta$  e dunque andrà connessa con la fase 3 della seconda macchina e poi con la fase 4 della terza macchina e così via; la fase 3 della prima macchina per lo stesso motivo andrà connessa con la fase 5 della seconda macchina e poi con la fase 7 della terza macchina e così via; lo stesso ragionamento avviene per connettere tutte le altre fasi. Quanto appena descritto viene schematicamente mostrato in tabella 2.1

Con le permutazioni descritte: il primo vettore di spazio delle correnti in uscita dall'inverter sarà responsabile della prima componente armonica spaziale di cam-

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	L	M
M1	a	b	c	d	e	f	g	h	i	l	...
M2	a	b+1	c+2	d+3	e+4	f+5	g+6	h+7	i+8	l+9	...
M3	a	b+2	c+4	d+6	e+8	f+10	g+12	h+14	i+16	l+18	...
M4	a	b+3	c+6	d+9	e+12	f+15	g+18	h+21	i+24	l+27	...
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...

Tabella 2.1: Tabella delle permutazioni per la connessione in serie di motori multifase.

po al traferro nel primo motore, il secondo vettore di spazio sarà responsabile della prima componente armonica spaziale di campo al traferro nel secondo motore, il terzo vettore di spazio nel terzo motore ecc. Questo permette di poter applicare un differente algoritmo di controllo di tipo vettoriale ad ogni macchina in modo separato, e generare un unico segnale di riferimento per il controllo dei rami dell'inverter. Il numero massimo di motori multifase connettabili in serie dipende dal numero di fasi dell'inverter: ad un inverter ad  $m$  fasi possono essere connessi fino ad  $M$  motori multifase, dove  $M = \frac{m-2}{2}$  se  $m$  è un numero pari ed  $M = \frac{m-1}{2}$  se  $m$  è un numero dispari.

Il numero di fasi di ciascuno dei motori dalla serie invece corrisponde al numero di vettori di spazio indipendenti tra loro che si possono ricavare dalla trasformazione di Clarke (2.8). Pertanto se  $m$  è un numero primo si avranno  $M = \frac{m-1}{2}$  motori in serie con ciascuno  $m$  fasi. Nel caso in cui  $m$  è scrivibile come  $m = l^n$  allora esisteranno alcune macchine della serie con  $m$  fasi, ma altre avranno  $\frac{m}{l}$  fasi ed altre ancora  $\frac{m}{l^2}$  fasi ecc. Ad esempio se  $m = 9 = 3^2$  si avrà una serie composta da una macchina a 3 fasi e tre macchine a 9 fasi. Nel caso generale si avrà comunque una serie di macchine, ciascuna con un determinato numero di fasi. La regola che sicuramente persiste per qualsiasi numero di fasi è quella di collegare i motori per numero decrescente di fasi, questo perché non è possibile collegare un avvolgimento con un numero di fasi minori ad uno con un numero di fasi maggiori, mentre è possibile il contrario.

Rispettati i criteri di connessione dei motori in serie si può dunque ottenere un azionamento particolarmente interessante. L'uso di un azionamento multifase multimotore riduce infatti la componentistica hardware, richiedendo un minor numero di rami di inverter complessivi e circuiti ausiliari, ma anche semplificando la struttura di controllo, permettendo di implementare l'algoritmo di controllo vettoriale per tutti i motori tramite un unico DSP (Digital Signal Processor). L'unico inconveniente di questa tipologia di azionamenti è l'aumento delle perdite Joule statoriche che si ha per il passaggio della corrente attraverso gli avvolgimenti di tutti i motori della serie. Se ad esempio un unico motore è in movimento, le perdite Joule che si hanno in esso sono presenti allo stesso modo anche su tutti gli altri motori. L'efficienza di conseguenza cala rispetto al caso di un'applicazione identica costituita da più motori trifase (uno per ogni asse di movimento). I vantaggi hardware e sul controllo possono tuttavia giustificare ampiamente tale scelta.

## 2.6 Inverter multifase

Dal punto di vista hardware l'unica differenza tra un inverter trifase ed uno ad  $m$  fasi consiste nel diverso numero di rami di inverter presenti. Una rappresentazione schematica di un inverter multifase a tensione impressa (Voltage Source Inverter, VSI), che alimenta un carico bilanciato collegato a stella, viene mostrata nella figura 2.2.

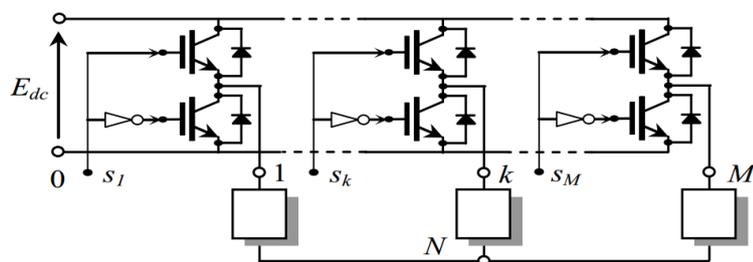


Figura 2.2: Struttura di un inverter VSI multifase [1].

Al fine di sfruttare completamente le potenzialità delle macchine multifase occorre definire un'opportuna strategia di modulazione per gli inverter VSI che le alimentano.

Esistono due metodi differenti che vengono generalmente utilizzati: la modulazione tramite i vettori di spazio (Space Vector Modulation, SVM) e la modulazione di ampiezza di impulso basata su un segnale portante (carrier-based Pulse Width Modulation, PWM). Nel caso di inverter VSI trifase è stato dimostrato che i due metodi sono equivalenti ed applicabili in modo intercambiabile. Al contrario, nel caso di inverter VSI multifase, la modulazione di tipologia PWM sembra essere quella più efficiente a causa della sua semplicità di implementazione. Questo perché la modulazione PWM si focalizza sul controllo di ogni singolo ramo di inverter, obiettivo molto più semplice rispetto a quello della tecnica SVM, ossia di determinare la configurazione degli interruttori (configurazione che coinvolge tutti i rami dell'inverter). Per queste ragioni, nel caso di inverter multifase VSI, la modulazione PWM basata sull'uso di un segnale portante è considerata più promettente di quella SVM.

L'idea di base è quella di estendere agli inverter multifase il metodo di modulazione PWM utilizzato comunemente per gli inverter trifase. Unendo la tecnica PWM alla rappresentazione coi vettori di spazio, utile nella descrizione del modello della macchina multifase e nel suo controllo, si ottiene un metodo di modulazione che viene chiamato Duty-Cycle Space Vector (DCSV). Attraverso l'approccio DCSV è possibile predire il limite di tensione dell'inverter, cruciale per raggiungere le prestazioni ottimali nel funzionamento ad alte velocità sfruttando tutta la tensione disponibile sul collegamento in continua (bus dc). Inoltre tale metodo si adatta molto bene al controllo degli inverter nei sistemi multifase multimotore, permettendo di modulare contemporaneamente i vettori di spazio delle tensioni nei differenti piani d-q.

## 2.7 Approccio Duty Cycle Space Vector e limite di tensione

Al fine di implementare una qualsiasi strategia di controllo di un azionamento ad  $m$  fasi è necessario determinare una tecnica di modulazione per l'inverter VSI in grado di sintetizzare, in ogni periodo di ciclo  $T_c$ ,  $\frac{m-1}{2}$  vettori di spazio di tensione arbitrari ed indipendenti tra loro.

L'approccio DCSV si basa sulla determinazione diretta dei segnali  $S_k$ , che determinano lo stato di ogni ramo dell'inverter come avviene nel metodo PWM basato su un segnale portante. Il calcolo dei segnali  $S_k$  viene ripetuto in ogni periodo di ciclo  $T_c$ , con lo scopo di sintetizzare facilmente la forma d'onda di tensione desiderata. I segnali di commutazione dei rami  $S_k$  ( $k = 1, 2, \dots, m$ ) sono ottenuti confrontando un segnale portante triangolare  $c$  (carrier), che varia tra 0 ed 1, con gli  $m$  segnali modulanti  $m_k$  di ciascun ramo ( $k = 1, 2, \dots, m$ ), supposti costanti in ogni periodo di ciclo  $T_c$  (modulanti regular-sampled). In figura 2.3 vengono mostrati i segnali modulanti ed il segnale portante nel caso di una macchina multifase.

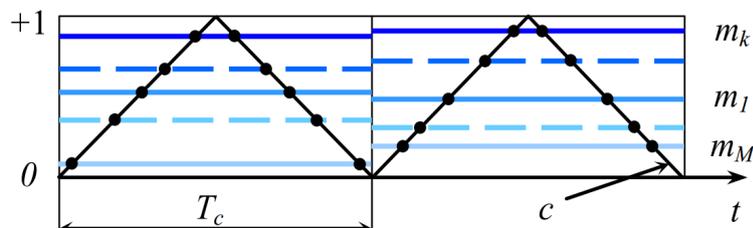


Figura 2.3: Segnale portante (carrier) e segnali modulanti [1].

In figura 2.4 viene invece mostrata la rispettiva logica per la generazione del segnale che determina lo stato del generico ramo di inverter.

Si può notare come i segnali modulanti rappresentino i duty-cycles dei rami dell'inverter e debbano pertanto essere dei segnali compresi tra 0 ed 1.

$$c \in [0, 1] \quad (2.9)$$

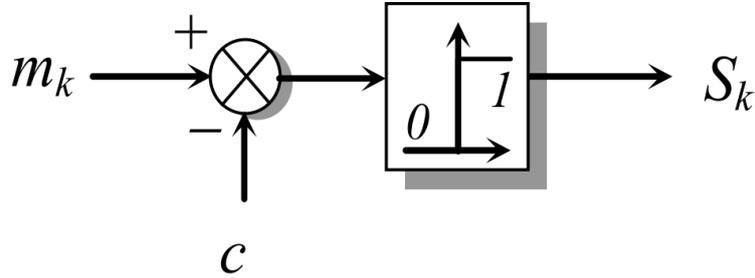


Figura 2.4: Schema di generazione del segnale dello stato di un generico ramo di inverter [1].

$$m_k \in [0, 1] \quad (k = 1, 2, \dots, m) \quad (2.10)$$

Assumendo i valori di ingresso e di uscita dall'inverter delle quantità rappresentate dal loro valore medio nel periodo di ciclo  $T_c$ , i segnali modulanti  $m_k$  in ciascun ciclo si possono ricavare, in accordo con l'approccio DCSV, come descritto di seguito.

Per ogni ramo di inverter si può scrivere che:

$$v_{kN} = v_{k0} - v_{N0} \quad (k = 1, 2, \dots, m) \quad (2.11)$$

dove  $v_{kN}$  e  $v_{k0}$  sono le tensioni di carico e di polo della fase  $k_{esima}$ , mentre  $v_{N0}$  è la tensione del centro stella.

In termini di vettori di spazio, sostituendo la (2.1) nella (2.11), si ottiene:

$$v_0^L = v_0^P - 2v_{N0} \quad (2.12)$$

$$\bar{v}_h^L = \bar{v}_h^P \quad (h = 1, 3, 5, \dots, m-2) \quad (2.13)$$

$v_0^L$  e  $v_0^P$  sono le componenti alla sequenza zero delle tensioni di carico e di polo, mentre  $\bar{v}_h^L$  e  $\bar{v}_h^P$  sono i rispettivi vettori di spazio alla sequenza  $h_{esima}$ .

Supponendo il carico bilanciato e collegato a stella,  $v_0^L$  risulta nulla e dunque si può riscrivere che:

$$v_0^P = 2v_{N0} \quad (2.14)$$

Si nota come la componente alla sequenza omopolare (sequenza zero) delle tensioni di polo  $v_0^P$  non agisce sulle tensioni di carico, ma determina solamente la tensione del centro stella  $v_{NO}$ ; mentre i vettori di spazio delle tensioni di carico coincidono con i corrispondenti vettori di spazio delle tensioni di polo.

Le tensioni di polo  $v_{k0}$  si possono scrivere direttamente in funzione dei rispettivi segnali modulanti  $m_k$  (a rigore questo risulta vero solo in termini di valore medio in ogni periodo di ciclo  $T_c$ ):

$$v_{k0} = E_{dc}m_k \quad (k = 1, 2, \dots, m) \quad (2.15)$$

con  $E_{dc}$  la tensione di alimentazione del bus dc.

Applicando la trasformazione (2.1) alla (2.15) si ottiene:

$$v_0^P = E_{dc}m_0 \quad (2.16)$$

$$\bar{v}_h^P = E_{dc}\bar{m}_h \quad (h = 1, 3, 5, \dots, m - 2) \quad (2.17)$$

dove:

$$m_0 = \frac{2}{m} \sum_{k=1}^m m_k \quad (2.18)$$

$$\bar{m}_h = \frac{2}{m} \sum_{k=1}^m m_k \bar{\alpha}^{h(k-1)} \quad (h = 1, 3, 5, \dots, m - 2) \quad (2.19)$$

La quantità  $m_0$  è la componente alla sequenza zero dei duty-cycles, mentre  $\bar{m}_h$  rappresenta il vettore di spazio del duty-cycle (DCSV) della componente alla sequenza  $h$ -esima.

Dalle relazioni (2.13) e (2.20) si ricava che:

$$\bar{v}_h^L = E_{dc}\bar{m}_h \quad (h = 1, 2, 3, \dots, m - 2) \quad (2.20)$$

Si noti come gli  $\frac{m-1}{2}$  vettori di spazio delle tensioni di carico siano direttamente proporzionali ai rispettivi DCSVs.

Allo stesso modo, dalle (2.14) e (2.16), si ha:

$$v_{NO} = \frac{E_{dc}m_0}{2} \quad (2.21)$$

Dunque la componente alla sequenza zero dei duty-cycles non altera le tensioni di carico, ma determina solamente la tensione del centro stella  $v_{N0}$ .

La strategia che viene generalmente utilizzata per la modulazione di un inverter multifase può essere ora conclusa per mezzo delle relazioni precedentemente trovate.

Se si considerano i vettori di spazio delle tensioni di riferimento  $\bar{v}_{h,ref}$  ( $h = 1, 3, 5, \dots, m-2$ ), che vengono generati in ogni periodo di ciclo  $T_c$  dal sistema di controllo dell'azionamento, si ricavano le tensioni di fase dalla (2.7), come segue:

$$v_k^P = \frac{1}{2}v_0^P + \sum_{h=1,3,5,\dots}^{m-2} \bar{v}_h^P \cdot \bar{\alpha}^{h(k-1)} \quad (k = 1, 2, \dots, m) \quad (2.22)$$

dividendo per  $E_{dc}$ , ponendo  $m_k = \frac{v_k^P}{E_{dc}}$  e sostituendo a  $\bar{v}_h^P$  il termine  $\bar{v}_h^L$  (per la relazione (2.13)), si ricava:

$$m_k = \frac{v_k^P}{E_{dc}} = \frac{1}{2} \frac{v_0^P}{E_{dc}} + \sum_{h=1,3,5,\dots}^{m-2} \frac{\bar{v}_h^L \cdot \bar{\alpha}^{h(k-1)}}{E_{dc}} \quad (k = 1, 2, \dots, m)$$

sfruttando la relazione (2.16), per cui  $\frac{v_0^P}{E_{dc}} = m_0$ , ed introducendo al posto delle tensioni di fase effettivamente impresse dall'inverter i loro riferimenti,  $\bar{v}_h^L = \bar{v}_{h,ref}$ , si ottiene:

$$m_k = \frac{1}{2}m_0 + \frac{1}{E_{dc}} \sum_{h=1,3,5,\dots}^{m-2} \bar{v}_{h,ref} \cdot \bar{\alpha}^{h(k-1)} \quad (k = 1, 2, \dots, m) \quad (2.23)$$

Quest'ultima rappresenta l'equazione fondamentale della modulazione DCSV, attraverso la quale si possono ricavare per ogni periodo di ciclo  $T_c$  i segnali per il controllo dei rami dell'inverter come in figura 2.5.

Tutte le tipologie di modulazione PWM si possono ottenere scegliendo opportunamente il valore della componente alla sequenza zero ( $m_0$ ), la quale rappresenta pertanto un grado di libertà. La scelta di  $m_0$  può avere come obiettivo quello di sfruttare pienamente la tensione sul bus dc ( $E_{dc}$ ), oppure ottimizzare altre caratteristiche come la frequenza di commutazione o lo spettro armonico delle tensioni in uscita.

Definito l'algoritmo di modulazione di tipo DCSV, vengono ora analizzati i limiti

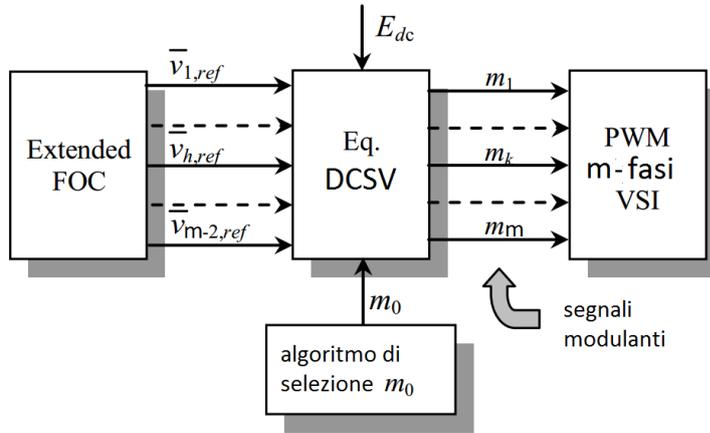


Figura 2.5: Schema di generazione dei segnali modulanti per ciascun ramo di inverter secondo l'approccio DCSV [1].

di tensione che si hanno in diverse condizioni di funzionamento per i diversi vettori di spazio.

I vincoli sulle modulanti (2.10), e dunque sui duty-cycles, introducono delle limitazioni complicate sui valori dei vettori di spazio di riferimento delle tensioni  $\bar{v}_{ref} = (\bar{v}_{1,ref}, \bar{v}_{3,ref}, \bar{v}_{5,ref}, \dots, \bar{v}_{\frac{m-1}{2},ref})$  che possono effettivamente essere applicabili al carico dall'inverter in ogni periodo di ciclo  $T_c$ . Nel caso di un inverter trifase il problema riguarda solo il primo vettore di spazio delle tensioni  $\bar{v}_{1,ref}$  e dunque la soluzione del problema del calcolo del limite di tensione risulta immediata: i vincoli sul duty-cycle sono soddisfatti (e dunque il vettore di spazio delle tensioni può effettivamente essere applicato dall'inverter) se  $\bar{v}_{1,ref}$  giace all'interno di un esagono ben definito, le cui dimensioni dipendono dal valore della tensione sul bus dc  $E_{dc}$ . Nel caso multifase invece il problema riguarda  $\frac{m-1}{2}$  vettori di spazio contemporaneamente.

Una soluzione semplificata può essere quella di considerare solo i moduli dei vettori di spazio trascurandone la fase, ossia ammettendo che ciascuno di essi possa avere una fase qualsiasi nell'intervallo  $[0, 2\pi]$ .

I vincoli di tensione assumono quindi la forma:

$$m_k - m_l \leq 1 \quad (k = 1, 2, \dots, m) \wedge (l = 1, 2, \dots, m) \quad (2.24)$$

Sostituendo l'espressione (2.23) nella (2.24), e tenendo conto della (2.20), si ottiene:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}m_0 + \frac{1}{E_{dc}} \sum_{h=1,3,5,\dots}^{m-2} E_{dc} \bar{m}_h \cdot \bar{\alpha}^{h(k-1)} - \frac{1}{2}m_0 - \frac{1}{E_{dc}} \sum_{h=1,3,5,\dots}^{m-2} E_{dc} \bar{m}_h \cdot \bar{\alpha}^{h(l-1)} = \\ & = \sum_{h=1,3,5,\dots}^{m-2} \bar{m}_h \cdot (\bar{\alpha}^{h(k-1)} - \bar{\alpha}^{h(l-1)}) \leq 1 \end{aligned}$$

Considerando  $\bar{m}_h = M_h e^{j\beta_h}$ , l'espressione precedente diviene:

$$\begin{aligned} & \sum_{h=1,3,5,\dots}^{m-2} M_h e^{j\beta_h} \cdot (\bar{\alpha}^{h(k-1)} - \bar{\alpha}^{h(l-1)}) = \\ & = \sum_{h=1,3,5,\dots}^{m-2} M_h e^{j\beta_h} \cdot (e^{j\frac{2\pi}{m}h(k-1)} - e^{j\frac{2\pi}{m}h(l-1)}) = \\ & = \sum_{h=1,3,5,\dots}^{m-2} M_h \{ \cos[\beta_h] \cos[\frac{2\pi}{m}h(k-1)] + \sin[\beta_h] \sin[\frac{2\pi}{m}h(k-1)] + \\ & - \cos[\beta_h] \cos[\frac{2\pi}{m}h(l-1)] - \sin[\beta_h] \sin[\frac{2\pi}{m}h(l-1)] \} \leq 1 \end{aligned}$$

che, dopo opportuni passaggi, diventa:

$$\sum_{h=1,3,5,\dots}^{m-2} M_h \sin[\beta_h - \frac{\pi}{m}h(k+l-2)] \sin[\frac{\pi}{m}h(k-l)] \leq \frac{1}{2} \quad (2.25)$$

L'espressione (2.25) rappresenta l'espressione dei vincoli di tensione. Tali vincoli vanno analizzati per ogni coppia (k,l) di rami di inverter, ossia per ogni coppia di fasi dell'azionamento ad m fasi.

Prendendo in considerazione solo lo scenario peggiore, si ricava la formula semplificata:

$$\sum_{h=1,3,5,\dots}^{m-2} M_h \sin[\frac{\pi}{m}h(k-l)] \leq \frac{1}{2} \quad (k, l = 1, 2, \dots, m) \quad (2.26)$$

Questa disuguaglianza rappresenta una relazione esaustiva dei vincoli di tensione ed è applicabile ad ogni tipo di inverter multifase con un numero dispari di rami. Per comprendere meglio il risultato ottenuto, viene di seguito esplicitato nel caso

pentafase (di particolare interesse per questa tesi).

Per un inverter a cinque rami (pentafase) i vincoli possono essere espressi come segue:

$$m_k - m_l \leq 1 \quad (k = 1, 2, \dots, 5) \wedge (l = 1, 2, \dots, 5) \quad (2.27)$$

$$\sum_{h=1,3} M_h e^{j\beta_h} \cdot (\bar{\alpha}^{h(k-1)} - \bar{\alpha}^{h(l-1)}) \leq 1 \quad (2.28)$$

$$\sum_{h=1,3} M_h \sin[\beta_h - \frac{\pi}{5}h(k+l-2)] \sin[\frac{\pi}{5}h(k-l)] \leq \frac{1}{2} \quad (2.29)$$

L'espressione finale assume dunque la seguente forma:

$$\begin{aligned} & |\bar{m}_1| \sin[\beta_1 - \frac{\pi}{5}(k+l-2)] \sin[\frac{\pi}{5}(k-l)] + \\ & + |\bar{m}_3| \sin[\beta_3 - \frac{3\pi}{5}(k+l-2)] \sin[\frac{3\pi}{5}(k-l)] \leq \frac{1}{2} \end{aligned} \quad (2.30)$$

Con questa espressione risulta ora possibile determinare in ogni periodo di ciclo Tc il limite di tensione che occorre rispettare. Questo limite diventa molto importante quando si vogliono avere funzionamenti ad elevate velocità utilizzando un controllo di coppia sia sullo spazio 1 che sullo spazio 3, oppure quando si vogliono gestire applicazioni multimotore.

Se supponiamo un funzionamento in cui la prima e la terza armonica di spazio siano sincronizzate, possiamo scrivere le relazioni mostrate di seguito:

$$\begin{aligned} \bar{m}_1 &= M_1 e^{j\omega t} \\ \bar{m}_3 &= M_1 e^{-j\phi} e^{j3\omega t} \end{aligned}$$

In questo caso il limite di tensione viene descritto dalla seguente equazione:

$$\begin{aligned} & M_1 \sin[\omega t - \frac{\pi}{5}(k+l-2)] \sin[\frac{\pi}{5}(k-l)] + \\ & + M_3 \sin[3\omega t - \phi - \frac{3\pi}{5}(k+l-2)] \sin[\frac{3\pi}{5}(k-l)] \leq \frac{1}{2} \end{aligned} \quad (2.31)$$

In figura 2.6 viene riportato l'andamento grafico dell'espressione analitica del limite di tensione per un azionamento pentafase nelle condizioni di funzionamento appena descritte (2.31)

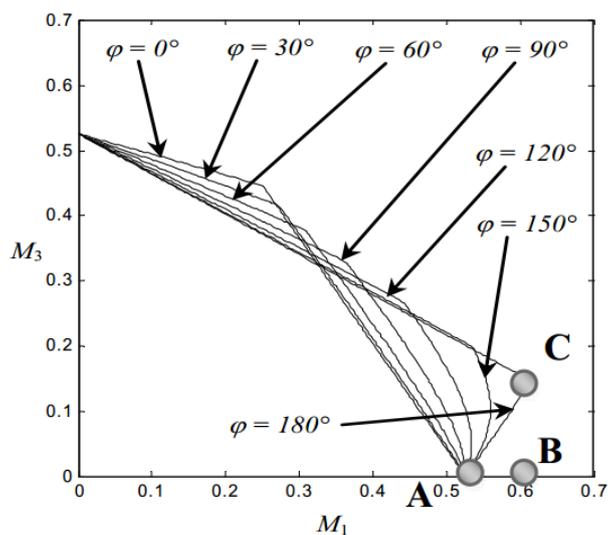


Figura 2.6: Andamento grafico del limite di tensione per una macchina pentafase, con sincronizzazione dei vettori di spazio [1].

Dunque, supponendo di controllare i due vettori di spazio in modo indipendente tra loro (che equivale a considerare valori indefiniti dell'angolo  $\phi$ ), la regione ammessa per rispettare il limite di tensione viene rappresentata in figura 2.7.

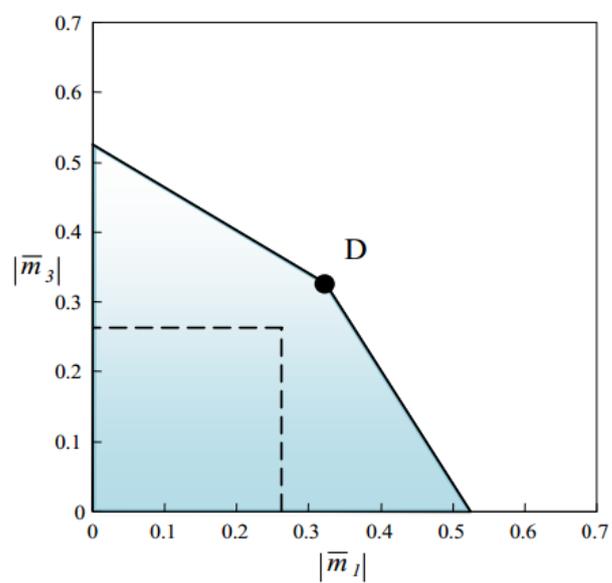


Figura 2.7: Andamento grafico del limite di tensione per una macchina pentafase, con vettori di spazio indipendenti [1].

## **Capitolo 3**

# **Attuatore tubolare pentafase a magneti permanenti**

In questo capitolo viene descritto il motore di tipo tubolare pentafase a magneti permanenti anisotropo che è stato utilizzato per la verifica sperimentale della teoria sensorless sviluppata durante l'intero lavoro di tesi. Il dispositivo in questione è il risultato di una ricerca approfondita e ben descritta nella tesi di dottorato di Filippo Milanese [2]. Dopo un'introduzione all'attuatore (paragrafo 2), sono descritte le forze che l'azionamento può produrre (paragrafo 3), accennando ai metodi utilizzati per ridurre le oscillazioni di forza, indesiderate ma inevitabilmente esistenti nei motori lineari a magneti permanenti. Particolare importanza viene data infine (paragrafo 4) alle scelte progettuali che hanno portato allo sviluppo definitivo del prototipo.

### **3.1 Introduzione**

Nel corso della tesi sono state svolte alcune prove sperimentali su un motore piuttosto particolare: si tratta di un motore lineare tubolare pentafase a magneti permanenti anisotropo. Innanzitutto la geometria e le forze presenti durante il funzionamento di questa macchina, come i disturbi di forza, sono quelle tipiche dei motori lineari di tipologia tubolare, descritte nel capitolo 1. L'aspetto che

caratterizza invece l'intero azionamento (motore ed inverter) è la peculiarità di essere di tipo multifase, in particolare pentafase. I vantaggi che si possono avere nell'utilizzare un attuatore multifase sono descritti nel capitolo 2; mentre nel capitolo 5 viene introdotta la possibilità di sfruttare i gradi di libertà aggiuntivi delle macchine multifase per implementare un apposito algoritmo sensorless di stima della posizione rotorica. Il motore presenta uno slider a magneti permanenti a magnetizzazione assiale, con vantaggi in termini di prestazioni ottenibili. Infine, l'anisotropia, oltre che permettere di avere una caratteristica di coppia del motore particolarmente interessante soprattutto alle alte velocità, risulta indispensabile per poter realizzare l'algoritmo sensorless, come mostrato nel capitolo 5. In questo capitolo viene dunque presentato l'attuatore nei suoi aspetti fondamentali, prima di addentrarsi nel modello analitico utilizzato per descriverlo (capitolo 4).

### 3.2 Struttura dell'attuatore

Una schematizzazione di base della tipologia di motore in studio è presentata nella figura 3.1.

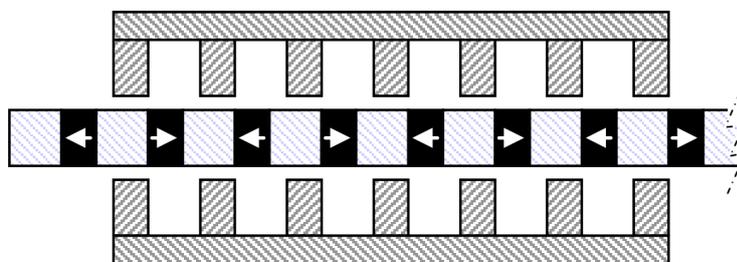


Figura 3.1: Schema di base di un motore tubolare con magneti permanenti a magnetizzazione assiale [2].

Il motore in questione è innanzitutto di tipologia lineare, ed in particolare tubolare. Nel primo capitolo sono state descritte le proprietà di queste macchine, mettendone in luce i principali pregi rispetto ai motori rotativi e anche rispetto alle altre tipologie di motori lineari. La macchina analizzata è sincrona a magneti perma-

nenti ed anisotropa: lo slider è costituito da un tubo contenente magneti permanenti in Nd-Fe-B a magnetizzazione assiale alternati a dischi di materiale ferromagnetico, mentre lo statore presenta una struttura magnetica cilindrica con diversi dischi interni, tra i quali sono disposti gli avvolgimenti a forma di anello. Il fatto di essere a magneti permanenti ed anisotropa rende tale macchina ancor più attraente dal punto di vista della densità di coppia e potenza, oltre che in termini di prestazioni ottenibili durante il funzionamento anche ad alta velocità. Tali proprietà presentano tuttavia lo svantaggio di far diventare il modello matematico necessario a descrivere la macchina particolarmente complesso (v. capitolo 4).

Per evitare i problemi della laminazione del circuito magnetico in una macchina, come quella tubolare, in cui i cammini di flusso del campo magnetico sono tridimensionali, sono stati utilizzati compositi in materiali magnetici dolci (SMCs). In questo modo è stato semplificato notevolmente il progetto della parte ferromagnetica del motore, grazie all'isotropia degli SMCs, ma si è reso anche molto più semplice il processo di produzione di componenti anche geometricamente complessi. Occorre ricordare che tali vantaggi sono a discapito di una minore resistenza meccanica, maggiori perdite a bassa frequenza e minore permeabilità massima.

In ultimo, l'azionamento utilizzato ha la caratteristica di essere multifase; dunque è adatto ad essere utilizzato nei sistemi in cui può essere utile disporre di più gradi di libertà per implementare particolari strategie di controllo, come mostrato nel capitolo 2.

### **3.3 Descrizione delle forze presenti**

Nel primo capitolo si è visto come la struttura a simmetria cilindrica permette, in un attuatore di tipo tubolare, di compensare la forza normale. Tuttavia, oltre alla forza normale e a quella tangenziale, dovute all'interazione tra i magneti permanenti e le correnti circolanti negli avvolgimenti statorici, la limitatezza geometrica della macchina e l'anisotropia provocano l'insorgere di altri contributi di forza

dovuti alla variazione della riluttanza del circuito magnetico. L'espressione della coppia per un motore pentafase anisotropo a magneti permanenti è ricavata nel capitolo 4 per un motore di tipo rotativo (4.57). Sebbene l'espressione non può essere direttamente utilizzata per descrivere la forza complessiva di un motore di tipologia tubolare, essa viene comunque riportata di seguito per poter fare alcune considerazioni a livello qualitativo sulle principali forze presenti in tale tipo di motore.

$$\begin{aligned}
 C_{em} = & \frac{5}{2}p[i_{d1}i_{q1}(L_{d1} - L_{q1}) + 3i_{d3}i_{q3}(L_{d3} - L_{q3})] + \\
 & + \frac{5}{2}p[L_{13}(i_{d1}i_{q3} - i_{q1}i_{d3} + 3i_{d3}i_{q1} - 3i_{q3}i_{d1})] + \\
 & + \frac{5}{2}p[\phi_{Md1}i_{q1} + 3\phi_{Md3}i_{q3}]
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

Innanzitutto da tale espressione si vede immediatamente come, per una macchina pentafase anisotropa a magneti permanenti di tipo rotante, il contributo dei magneti permanenti è generalmente presente sia nello spazio 1 che nello spazio 3 e pertanto il controllo vettoriale ottimale deve essere sviluppato analizzando entrambi gli spazi. Inoltre è possibile osservare come l'anisotropia produce dei termini nell'espressione della coppia che possono essere sfruttati per incrementare le prestazioni dell'azionamento. Come viene approfondito nel capitolo 4, il parametro  $L_{13}$  risulta strettamente legato all'anisotropia di macchina; dunque anche la componente della coppia associata ad esso è legata all'anisotropia di macchina. La differenza che vi è nelle macchine tubolari, rispetto a quelle rotanti, è la presenza di quattro componenti di disturbo nella forza dovute all'andamento della riluttanza del circuito magnetico:

1. effetto cogging: tendenza dei magneti permanenti ad allinearsi con i denti statorici nelle posizioni in cui la riluttanza del circuito magnetico risulta minima;
2. effetto di estremità: effetto dovuto alla discontinuità del circuito magnetico, il quale risulta naturalmente aperto nelle macchine lineari;
3. presenza di armoniche nella distribuzione di densità di flusso al traferro dovuta ai magneti permanenti;

4. presenza di elevati ordini armonici nell'andamento della riluttanza del circuito magnetico.

Non vengono invece considerate, come in genere avviene, le oscillazioni di forza causate dal fatto che l'alimentazione della macchina è originata da una modulazione di tipo PWM, con un ripple ad alta frequenza.

Purtroppo i metodi tradizionali utilizzati nelle macchine rotative per compensare la forza di cogging, come l'inclinazione dei magneti (skew) o la loro distribuzione in modo asimmetrico, non sono facilmente applicabili alle macchine tubolari. Di conseguenza per tali macchine si può ridurre la forza di cogging solo agendo sulla geometria delle cave statoriche e/o su quella dei magneti e dei poli dello slider.

Per compensare l'effetto di estremità si possono invece aggiungere dei dischi ferromagnetici da un lato o da entrambi i lati della struttura statorica.

Dal punto di vista meccanico lo slider di un motore tubolare a magneti permanenti presenta in genere una lieve eccentricità rispetto all'asse di simmetria dello statore per disallineamenti in fase di assemblaggio o presenza di spazi nei cuscinetti. Questi difetti producono una forza radiale risultante, dovuta ai magneti permanenti ed agente sullo slider, non nulla. Tale forza, nelle configurazioni di equilibrio statico, tende a far flettere l'asse dello slider. Il calcolo del massimo spostamento dello slider è molto importante per verificare che esso non generi un'interazione tra lo slider e lo statore. Inoltre bisogna anche determinare la forza di reazione dei cuscinetti, per valutare l'incremento degli attriti dovuti ad essa e la conseguente riduzione della vita utile dell'attuatore.

### **3.4 Scelte progettuali per l'ottimizzazione dell'attuatore**

In [2] vengono descritti in modo approfondito i metodi e gli algoritmi che sono stati sviluppati per arrivare alla progettazione del motore utilizzato per le prove sperimentali di questa tesi.

Per ottenere un progetto ottimale, in grado di sfruttare pienamente i limiti imposti

dai materiali magnetici (sia dolci che duri) e tale da fornire elevate prestazioni dell'azionamento, sono stati presi in considerazione aspetti sia elettromagnetici che termici e meccanici. Poiché l'azionamento è pensato per un'applicazione nel settore dell'automazione industriale, l'obiettivo è stato quello di ottenere le migliori prestazioni dinamiche, ossia di massimizzare la densità di forza / accelerazione e minimizzare il ripple di forza complessivo. La dinamica nei motori lineari è fondamentale a causa del moto di tipo alternativo dello slider, che rende il funzionamento di tali macchine caratterizzato da condizioni di transitori permanenti (a differenza di quelle rotative in cui il progetto può essere fatto per il funzionamento ad una determinata coppia e velocità). Contemporaneamente si è dunque tenuto conto dei limiti termici imposti dai materiali isolanti utilizzati per gli avvolgimenti statorici e dei vincoli meccanici associati al massimo spostamento accettabile, generato dalle forze elettromagnetiche in presenza di possibili disallineamenti in fase di assemblaggio.

Il procedimento è consistito in due fasi principali: nella prima è stato utilizzato un modello integrato del motore per analizzare le relazioni tra il progetto e le prestazioni, tenendo conto dei vincoli termici e meccanici; in seguito si è potuto raffinare il progetto dal punto di vista del ripple di forza attraverso l'uso di un'analisi agli elementi finiti (FEM) di tipo bidimensionale.

I principali parametri geometrici che sono stati analizzati in [2] per definire il modello elettromagnetico del motore sono rappresentati in figura 3.2.

In figura 3.3 è mostrata un'altra immagine della geometria di macchina, la quale evidenzia i parametri che interessano gli avvolgimenti statorici, con anche una vista 3D di un disco di avvolgimenti.

Nella prima fase del progetto sono stati considerati tre gruppi di parametri a seconda del significato che essi assumono negli algoritmi di ottimizzazione, ossia della tipologia di vincoli a cui sono associati:

1. parametri con vincoli fissi;
2. parametri limitati in un intervallo;
3. parametri limitati superiormente.

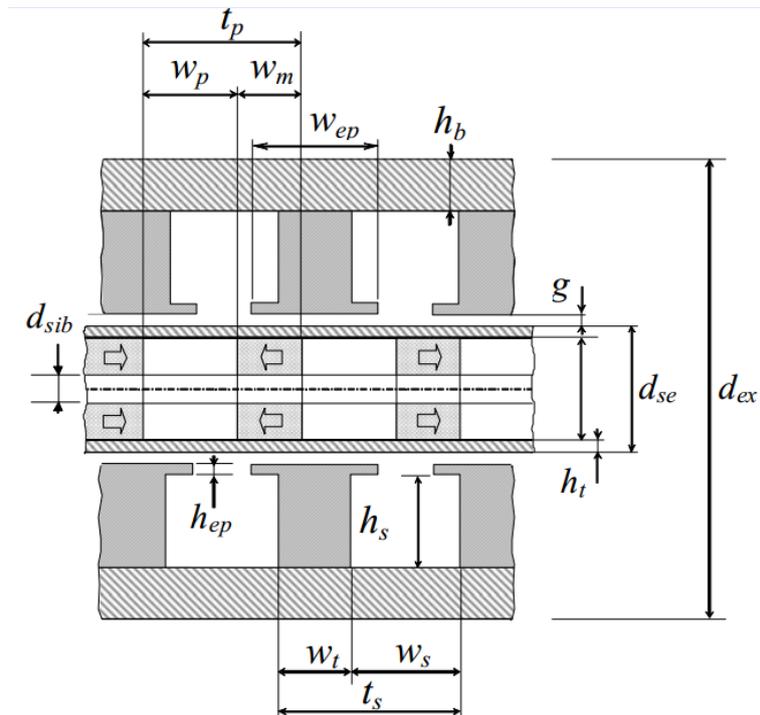


Figura 3.2: Rappresentazione schematica dei parametri geometrici necessari a descrivere un attuatore tubolare [2].

I parametri scelti con vincoli fissi sono:

- $N_s$ : numero di cave statoriche;
- $N_p$ : numero di poli della macchina;
- $d_{ex}$ : diametro esterno statorico;
- $w_{act}$ : lunghezza totale dell'attuatore;
- $w_{ep}$ : larghezza della scarpa polare dei denti statorici;
- $H_{ep}$ : altezza della scarpa polare;
- $h_t$ : spessore del tubo esterno dello slider;
- $g$ : lunghezza del traferro meccanico;

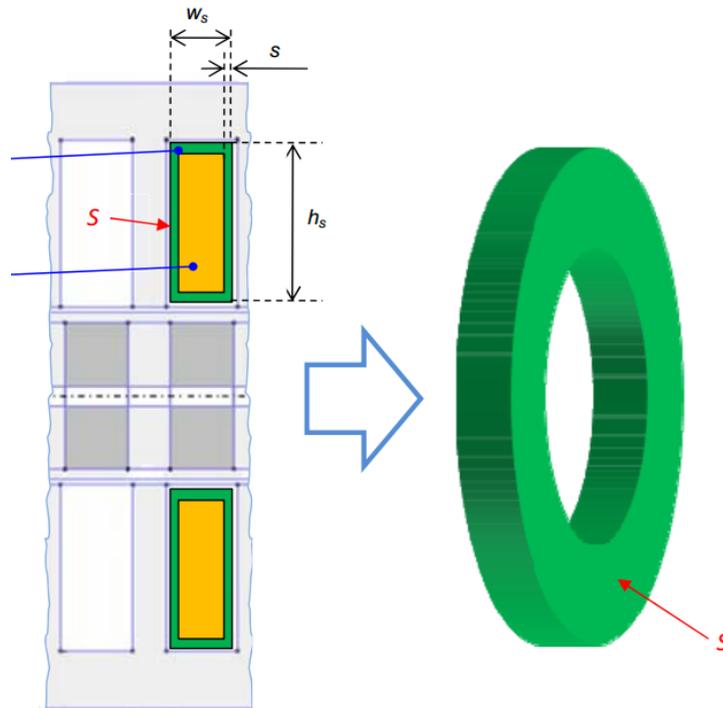


Figura 3.3: Schema che mostra i parametri geometrici di una macchina tubolare, con particolare rilievo sulla geometria degli avvolgimenti statorici (a), fornendone anche una vista tridimensionale (b) [2].

- $d_{sib}$ : diametro interno dello slider;
- $B_t$ : densità di flusso nei denti statorici;
- $v_0$ : eccentricità iniziale dello slider;
- $\theta_{w-e}$ : massima sovratemperatura degli avvolgimenti statorici.

Questi parametri definiscono il volume del motore, le caratteristiche elettromagnetiche principali, la massima sovratemperatura degli avvolgimenti e l'eccentricità iniziale dello slider (dovuta ad errori di assemblaggio e spazi nei cuscinetti).

I vincoli limitati in un intervallo sono invece quelli associati alla fattibilità tecnica di realizzare le geometrie desiderate con SMCs e magneti permanenti in Nd-Fe-B:

- $w_m$ : spessore dei magneti [ $\in w_{m,min}; w_{m,max}$ ];
- $d_{si}$ : diametro interno dello slider [ $\in d_{si,min}; d_{si,max}$ ].

Vi sono infine dei limiti superiori che occorre imporre:

- $B_{p,max}$ : massima densità di flusso nel ferro statorico;
- $y_{max}$ : massimo disallineamento dello slider.

Risolto l'algoritmo di ottimizzazione e valutate le opportune scelte progettuali si possono ricavare poi altri parametri di macchina in modo immediato come: passo polare  $t_p$ , diametro medio magneti permanenti  $d_g = d_{si} + 2h_t + g$ , spessore del traferro magnetico  $\delta_0 = h_t + g$ , spessore di cava  $w_s = \frac{w_{act}}{N_s} - w_t$ , altezza della corona  $h_b$ , altezza di cava  $h_s$ , ecc.

Nella seconda fase è stata svolta una valutazione della forza di cogging e dell'effetto di estremità attraverso un'analisi agli elementi finiti (FEM). Studiando l'effetto di estremità, sono stati dunque posizionati dei dischi compensatori nel tentativo di ridurlo, come mostrato in figura 3.4.

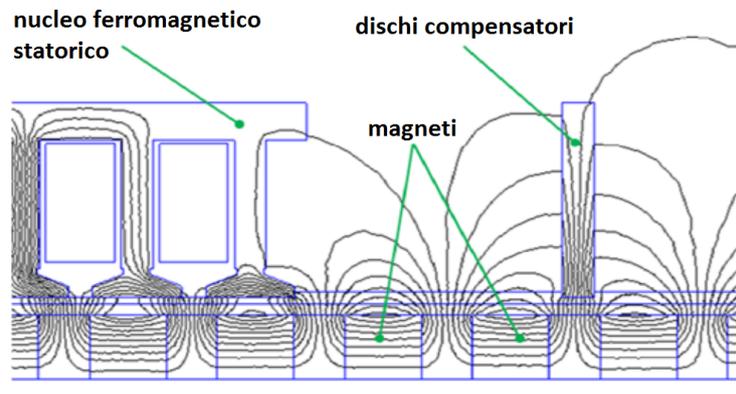


Figura 3.4: Andamento delle linee di campo magnetico in prossimità dei dischi compensatori [2].

Per ridurre l'effetto di cogging è stato invece scelto un opportuno valore del numero di poli  $N_p$  e del numero di cave  $N_s$ . Tale soluzione risulta essenziale per

ridurre il valore della forza di cogging, in quanto i valori di  $N_p$  ed  $N_s$  influenzano sensibilmente l'ampiezza e la periodicità spaziale di tale forza e le soluzioni tecniche generalmente utilizzate nelle macchine rotative non sono facilmente applicabili sugli attuatori tubolari. Per venire incontro a tale richiesta e per generare un campo al traferro il più sinusoidale possibile durante il funzionamento sono stati utilizzati avvolgimenti a passo frazionario.

Di seguito sono illustrate alcune caratteristiche del motore finale, risultato dei metodi precedentemente descritti.

Lo statore ed i cilindri magnetici dello slider sono stati costruiti in SMC:

*Somaloy*<sup>TM</sup>500 con lo 0.5% di *Kenolube*<sup>TM</sup>, compattato ad una densità di  $7.16g/cm^3$ .

I magneti permanenti in Nd-Fe-B (con  $B_R = 1.1T$  a  $20^\circ C$ ) sono stati assemblati all'interno di un tubo di acciaio inossidabile non magnetico.

La scelta ottimale del numero di poli e di cave, al fine di ridurre la forza di cogging dell'attuatore pentafase, è stata di  $N_p = 14$  poli ed  $N_s = 15$  cave statoriche.

In questo modo gli avvolgimenti di tipo frazionario presentano un numero di cave per fase e per polo pari a 3, producendo una distribuzione di densità di flusso al traferro quasi sinusoidale.

L'effetto di estremità è stato parzialmente ridotto tramite dischi compensatori opportunamente dimensionati e posizionati.

Il motore definitivo è dunque mostrato in figura 3.5.

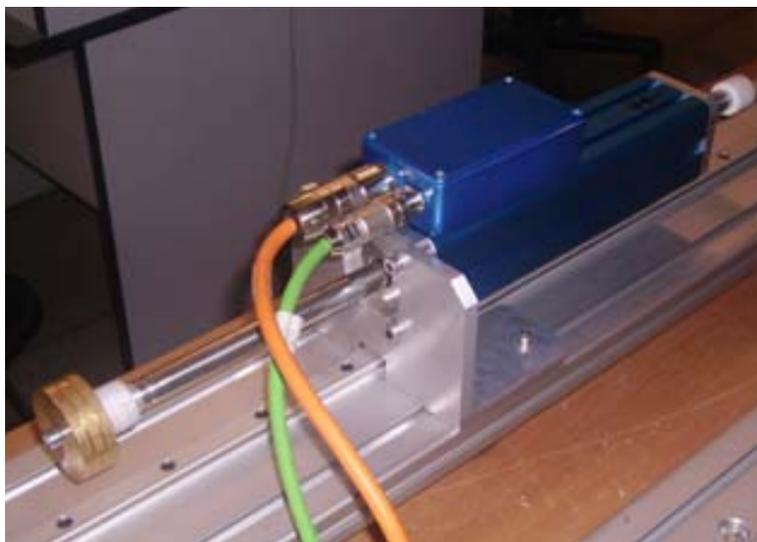


Figura 3.5: Immagine del prototipo di motore tubolare in studio [2].



# Capitolo 4

## Modello matematico della macchina

In questo capitolo viene sviluppato l'intero modello matematico, necessario per descrivere analiticamente il motore pentafase utilizzato nel progetto di tesi. Nel paragrafo 2 sono esposte le ipotesi di studio che sono state indispensabili per poter affrontare lo studio del modello. Inizialmente si è tentato di mantenere la trattazione il più generale possibile, per introdurre via via le approssimazioni necessarie a proseguire nel lavoro. Nei paragrafi 3 e 4 vengono ricavate le espressioni dei contributi al campo magnetico complessivo nel traferro dovuti alle correnti statoriche (paragrafo 3) e ai magneti permanenti (paragrafo 4); mentre nel paragrafo 5 sono determinate le equazioni dei flussi concatenati con gli avvolgimenti statorici. Per ottenere una forma del modello analitico compatta e confrontabile con gli altri testi presenti in letteratura, viene completato lo studio del comportamento elettromagnetico per una particolare macchina brushless pentafase anisotropa (paragrafo 6). Per questa è stata ricavata l'espressione della coppia elettromagnetica (paragrafo 7). Nell'ultimo paragrafo (paragrafo 8) viene commentato in maniera critica il modello ottenuto. Sono mostrati i fenomeni che vengono trascurati a causa delle approssimazioni effettuate, rispetto a quelli presenti nel motore tubolare reale utilizzato nella fase sperimentale. Viene infine giustificata la coerenza del modello con l'obiettivo di sviluppare l'algoritmo sensorless (presentato dettagliatamente nel capitolo 5).

## 4.1 Introduzione

Per poter analizzare le caratteristiche di un qualsiasi azionamento, implementarne il controllo o studiarne anche solamente la dinamica, occorre disporre di un modello analitico che possa approssimare in modo sufficientemente dettagliato i fenomeni fisici del sistema in esame. In questa tesi si desidera studiare la possibilità di sviluppare un algoritmo sensorless per la stima della posizione rotorica, essenziale per effettuare un qualsiasi tipo di controllo vettoriale della macchina. Nonostante il prototipo su cui sono state condotte le prove sperimentali sia un attuatore tubolare pentafase anisotropo a magneti permanenti, si è scelto di procedere alla definizione di un modello in grado di descrivere il comportamento elettromagnetico ed elettromeccanico di una macchina rotativa, piuttosto che tubolare. Questa scelta ben si concilia con due aspetti fondamentali: la generalità dell'algoritmo sensorless che si vuole sviluppare, valido per una generica macchina pentafase anisotropa, e la possibilità di elaborare il modello in modo analitico senza dover ricorrere ad un'analisi agli elementi finiti.

## 4.2 Ipotesi di studio

È stato scelto di sviluppare un modello matematico atto a descrivere nel modo più generale possibile una macchina elettrica multifase di tipo brushless a rotore anisotropo. Si è supposto dunque di considerare:

- macchina elettrica di tipo rotativa (non lineare);
- statore isotropo (trascurando l'effetto cava);
- magneti permanenti superficiali e a spessore costante;
- circuito magnetico lineare (assenza di condizioni di saturazione magnetica);
- linee di campo magnetico al traferro perpendicolari allo statore e rettilinee;
- presenza di sole armoniche pari nello sviluppo in serie dello spessore del traferro (equivalente alla presenza di una simmetria geometrica);

- presenza di sole armoniche dispari nello sviluppo in serie della densità lineare di corrente degli avvolgimenti statorici.

Nel trattare il modello, si è mantenuta una trattazione rigorosa, nei limiti delle possibilità di una descrizione di tipo analitico. Appunto, il sistema in studio richiede una descrizione degli aspetti fisici che non può prescindere da modelli matematici complessi.

### **4.3 Campo magnetico in un traferro indifferente-mente anisotropo prodotto da generici avvolgimenti statorici**

Per descrivere il campo magnetico prodotto al traferro dalle correnti che attraversano gli avvolgimenti statorici di una generica macchina elettrica, è necessario partire dalla definizione dello sviluppo in serie di Fourier della distribuzione lineare di densità di corrente  $\gamma$  di una generica spira  $J_{esima}$  di statore. In figura 4.1 viene mostrata la spira  $a$  statorica:  $J = a$ .

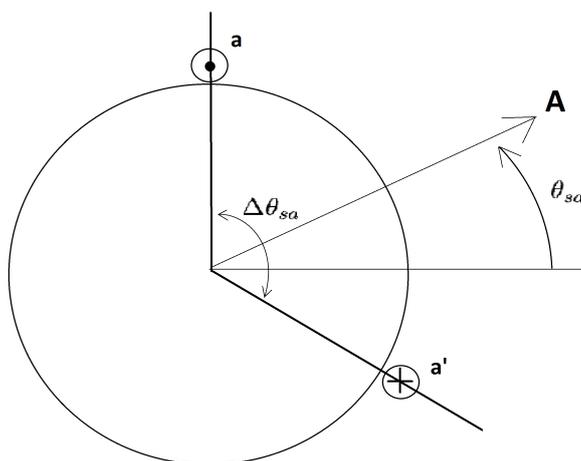


Figura 4.1: Spira a statorica.

Osservando la stessa spira dal retro della macchina elettrica e riportando su un

piano la geometria statorica si ottiene la figura 4.2.

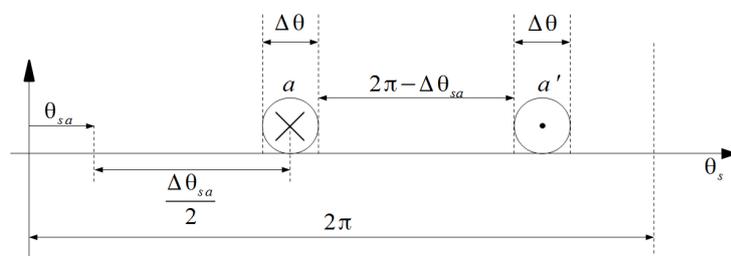


Figura 4.2: Spira a statorica riportata in piano.

La corrispondente distribuzione lineare di corrente  $\gamma'_{sa}$  si può quindi rappresentare come in figura 4.3.

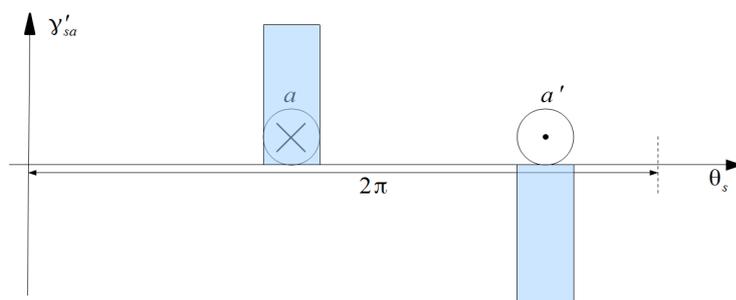


Figura 4.3: Distribuzione lineare di densità di corrente per la spira a statorica riportata in piano.

Supponendo di poter considerare una spira come se fosse puntiforme, la sua distribuzione lineare di densità di corrente  $\gamma_{sa}$  può essere descritta da una funzione di tipo delta di Dirac come quella nella figura 4.4.

Si calcola quindi lo sviluppo in serie della distribuzione spaziale di densità lineare di corrente di una generica spira  $J_{esima}(\gamma_{sJ})$  come segue:

$$\gamma_{sJ}(\theta_s, t) = \lim_{\Delta\theta \rightarrow 0} \gamma'_{sJ}(\theta_s, t) = \lim_{\Delta\theta \rightarrow 0} [\gamma'_{sJ0}(t) + \sum_{h=1}^{\infty} \Re\{\bar{\Gamma}'_{Jh}(t) e^{-jh\theta_s}\}] \quad (4.1)$$

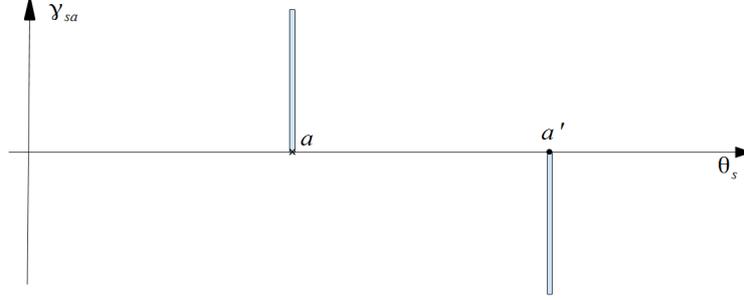


Figura 4.4: Distribuzione lineare di densità di corrente per la spira a statorica puntiforme riportata in piano.

Per la simmetria di ogni spira, la corrente complessiva che attraversa una qualsiasi superficie perpendicolare allo sviluppo dello statore è nulla, pertanto il valore medio della distribuzione spaziale della densità lineare di corrente risulta nullo [ $\gamma'_{sJ0}(t) = 0$ ] sempre.

Il vettore di spazio  $\bar{\Gamma}'_{Jh}(t)$ , che rappresenta l'armonica  $h_{esima}$  dello sviluppo in serie di Fourier, è definito come:

$$\bar{\Gamma}'_{Jh}(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \gamma'_{sJ}(\theta_s, t) e^{jh\theta_s} d\theta_s$$

dove, in accordo con la rappresentazione grafica di figura 4.3, l'andamento di  $\gamma'_{sJ}(\theta_s, t)$  si può sintetizzare dalle relazioni seguenti:

$$\gamma'_{sJ}(\theta_s, t) = \left\{ \begin{array}{l} \frac{i_{sJ}(t)}{R\Delta\theta} \text{ con } \theta_s \in \left[ \theta_{sJ} + \frac{\Delta\theta_{sJ}}{2} - \frac{\Delta\theta}{2}; \theta_{sJ} + \frac{\Delta\theta_{sJ}}{2} + \frac{\Delta\theta}{2} \right], \\ -\frac{i_{sJ}(t)}{R\Delta\theta} \text{ con } \theta_s \in \left[ \theta_{sJ} - \frac{\Delta\theta_{sJ}}{2} - \frac{\Delta\theta}{2}; \theta_{sJ} - \frac{\Delta\theta_{sJ}}{2} + \frac{\Delta\theta}{2} \right] \end{array} \right\}$$

dunque, introducendo le relazioni che caratterizzano la distribuzione di  $\gamma'_{sJ}(\theta_s, t)$  nell'equazione dell'armonica  $h_{esima}$  della distribuzione spaziale della densità lineare di corrente ( $\bar{\Gamma}'_{Jh}(t)$ ), si ha:

$$\bar{\Gamma}'_{Jh}(t) = \frac{1}{\pi} \int_{\theta_{sJ} + \frac{\Delta\theta_{sJ}}{2} - \frac{\Delta\theta}{2}}^{\theta_{sJ} + \frac{\Delta\theta_{sJ}}{2} + \frac{\Delta\theta}{2}} \left[ \frac{i_{sJ}(t)}{R\Delta\theta} \right] e^{jh\theta_s} d\theta_s + \frac{1}{\pi} \int_{\theta_{sJ} - \frac{\Delta\theta_{sJ}}{2} - \frac{\Delta\theta}{2}}^{\theta_{sJ} - \frac{\Delta\theta_{sJ}}{2} + \frac{\Delta\theta}{2}} \left[ -\frac{i_{sJ}(t)}{R\Delta\theta} \right] e^{jh\theta_s} d\theta_s =$$

svolvendo i calcoli risulta:

$$= \frac{i_{sJ}(t)}{jh\pi R\Delta\theta} e^{jh\theta_{sJ}} (e^{jh\frac{\Delta\theta_{sJ}}{2}} - e^{-jh\frac{\Delta\theta_{sJ}}{2}}) (e^{jh\frac{\Delta\theta}{2}} - e^{-jh\frac{\Delta\theta}{2}})$$

tenendo conto che  $e^{jx} - e^{-jx} = 2\text{senh}(jx)$  e  $\text{senh}(jx) = j\text{senh}(x)$ , si ottiene:

$$\bar{\Gamma}'_{Jh}(t) = \frac{j 4i_{sJ}(t)}{h\pi R \Delta\theta} e^{jh\theta_{sJ}} \text{sen}\left(h\frac{\Delta\theta_{sJ}}{2}\right) \text{sen}\left(h\frac{\Delta\theta}{2}\right) \quad (4.2)$$

Per descrivere l'andamento della densità lineare di corrente per la generica spira J statorica puntiforme riportata in piano, come in figura 4.4, si ricava quindi dalle (4.1) e (4.2) la seguente espressione:

$$\gamma_{sJ}(\theta_s, t) = \lim_{\Delta\theta \rightarrow 0} \left[ \sum_{h=1}^{\infty} \Re\left\{ \frac{j 4i_{sJ}(t)}{h\pi R \Delta\theta} e^{jh\theta_{sJ}} \text{sen}\left(h\frac{\Delta\theta_{sJ}}{2}\right) \text{senh}\left(h\frac{\Delta\theta}{2}\right) e^{-jh\theta_s} \right\} \right]$$

poichè  $\lim_{\Delta\theta \rightarrow 0} \text{sen}\left(h\frac{\Delta\theta}{2}\right) = h\frac{\Delta\theta}{2}$  si ha:

$$\gamma_{sJ}(\theta_s, t) = \sum_{h=1}^{\infty} \Re\left\{ \frac{j 2i_{sJ}(t)}{\pi R} e^{jh\theta_{sJ}} \text{sen}\left(h\frac{\Delta\theta_{sJ}}{2}\right) e^{-jh\theta_s} \right\} \quad (4.3)$$

Il vettore rappresentativo di una generica armonica dello sviluppo in serie di Fourier della distribuzione spaziale della densità lineare di corrente diventa dunque:

$$\bar{\Gamma}_h(t) = \sum_{J=1}^{n_{spire}} \frac{j 2i_{sJ}(t)}{\pi R} \text{sen}\left(h\frac{\Delta\theta_{sJ}}{2}\right) e^{jh\theta_{sJ}} \quad (4.4)$$

mentre la densità lineare di corrente risulta:

$$\gamma_s(\theta_s, t) = \sum_{h=1}^{\infty} \Re\left\{ \bar{\Gamma}_h(t) e^{-jh\theta_s} \right\} \quad (4.5)$$

Il contributo delle correnti statoriche al campo magnetico al traferro si può facilmente ricavare, nell'ipotesi di linearità magnetica, attraverso la legge della circuitazione magnetica:

$$\int_{l_C} \bar{H}_s \cdot \bar{dl} = i_{conc}$$

Le convenzioni utilizzate per rappresentare il campo magnetico, le correnti statoriche e le generiche linee di circuitazione sono mostrate in figura 4.5 per un generico tratto di traferro di spessore  $\delta$ .

Per un tratto  $d\theta_s$  infinitesimo, supponendo che al traferro si abbiano linee di campo parallele tra loro e perpendicolari allo statore, si può scrivere:

$$\int_{l_C} \bar{H}_s \cdot \bar{dl} = H(\theta_s, t) \delta(\theta_s, t) - H(\theta_s + d\theta_s, t) \delta(\theta_s + d\theta_s, t)$$

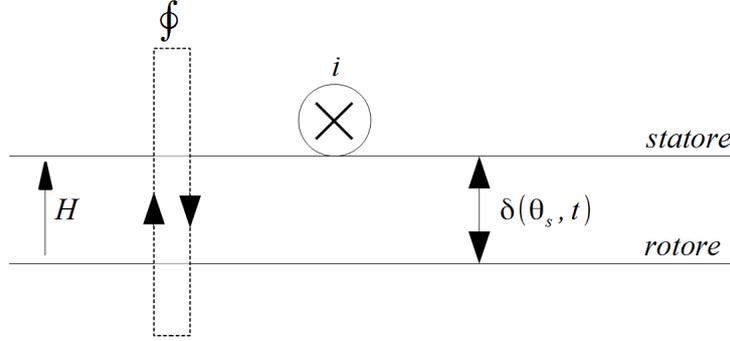


Figura 4.5: Convenzioni utilizzate per la circuitazione magnetica.

Per la corrente concatenata si ha invece che:  $i_{conc} = \gamma_s(\theta_s, t)Rd\theta_s$ .

Per risolvere il problema fisico della determinazione del campo magnetico al traferro dovuto alle correnti statoriche risulta conveniente descrivere la geometria della macchina attraverso la funzione inversa dello spessore del traferro  $g(\theta_s, t) = \frac{1}{\delta(\theta_s, t)}$ , come è mostrato in seguito:

$$\int_{l_C} \bar{H}_s \cdot \bar{dl} = \frac{H(\theta_s, t)}{g(\theta_s, t)} - \frac{H(\theta_s + d\theta_s, t)}{g(\theta_s + d\theta_s, t)} =$$

sviluppando in serie di Taylor e trascurando gli infinitesimi di ordine superiore, si ricava:

$$= \frac{H(\theta_s, t)}{g(\theta_s, t)} - \frac{H(\theta_s, t) + \frac{dH(\theta_s, t)}{d\theta_s} d\theta_s}{g(\theta_s, t) + \frac{dg(\theta_s, t)}{d\theta_s} d\theta_s} =$$

mantenendo implicita la dipendenza da  $(\theta_s, t)$ , moltiplicando numeratore e denominatore per  $\frac{1}{g^2} [1 - \frac{1}{g} \frac{dg}{d\theta_s} d\theta_s]$  ed osservando che  $\frac{H}{g^2} \frac{dg}{d\theta_s} - \frac{1}{g} \frac{dH}{d\theta_s} = \frac{d[\frac{H}{g}]}{d\theta_s}$ , si arriva in pochi passaggi alla seguente forma di espressione per la circuitazione magnetica  $\int_{l_C} \bar{H}_s \cdot \bar{dl}$ :

$$= \frac{-\frac{d}{d\theta_s} [\frac{H}{g}] d\theta_s [1 - \frac{1}{g} \frac{dg}{d\theta_s} d\theta_s]}{1 - [\frac{1}{g} \frac{dg}{d\theta_s} d\theta_s]^2} =$$

trascurando gli infinitesimi di ordine superiore diventa:

$$= -\frac{d}{d\theta_s} \left[ \frac{H(\theta_s, t)}{g(\theta_s, t)} \right] d\theta_s$$

dunque la legge della circuitazione del campo magnetico risulta semplicemente descritta dalla relazione:

$$\int_{l_C} \bar{H}_s \cdot \bar{dl} = -\frac{d}{d\theta_s} \left[ \frac{H(\theta_s, t)}{g(\theta_s, t)} \right] d\theta_s \quad (4.6)$$

Sostituendo l'espressione appena trovata e quella della corrente concatenata  $i_{conc}$  nell'equazione della circuitazione magnetica per un tratto infinitesimo del traferro, si ha:

$$\int_{l_C} \bar{H}_s \cdot \bar{dl} = -\frac{d}{d\theta_s} \left[ \frac{H(\theta_s, t)}{g(\theta_s, t)} \right] d\theta_s = i_{conc} = \gamma_s(\theta_s, t) R d\theta_s$$

si ottiene pertanto l'espressione:

$$\frac{d}{d\theta_s} \left[ \frac{H(\theta_s, t)}{g(\theta_s, t)} \right] = -\gamma_s(\theta_s, t) R \quad (4.7)$$

Definendo la funzione forza magnetomotrice  $F_m(\theta_s, t) = \frac{H(\theta_s, t)}{g(\theta_s, t)}$  e sostituendo a  $\gamma_s(\theta_s, t)$  l'espressione (4.5) con la (4.4), si può scrivere la (4.7) come:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\theta_s} [F_m(\theta_s, t)] &= \frac{d}{d\theta_s} \sum_{h=1}^{\infty} \Re\{\bar{F}_{mh}(t) e^{-j h \theta_s}\} = \\ &= -R \{\gamma_s(\theta_s, t) = \sum_{h=1}^{\infty} \Re\{\bar{\Gamma}_h(t) e^{-j h \theta_s}\}\} R = \\ &= \sum_{h=1}^{\infty} \Re\left\{ \sum_{J=1}^{n_{spire}} \frac{j 2i_{sJ}(t)}{\pi} \text{sen}\left(h \frac{\Delta\theta_{sJ}}{2}\right) e^{j h \theta_{sJ}} e^{-j h \theta_s} \right\} \end{aligned}$$

quindi, l'espressione riferita ad una generica armonica dello sviluppo in serie si può scrivere come:

$$-j h \bar{F}_{mh}(t) = \sum_{J=1}^{n_{spire}} \frac{j 2i_{sJ}(t)}{\pi} \text{sen}\left(h \frac{\Delta\theta_{sJ}}{2}\right) e^{j h \theta_{sJ}}$$

la quale, considerando  $N_s$  spire per ogni bobina  $J_{esima}$ , conduce alla seguente relazione:

$$\bar{F}_{mh}(t) = \sum_{J=1}^{n_{bobine}} \frac{2N_s}{\pi h} i_{sJ}(t) \text{sen}\left(h \frac{\Delta\theta_{sJ}}{2}\right) e^{j h \theta_{sJ}} \quad (4.8)$$

Una volta ricavate le espressioni di  $F_m(\theta_s, t)$  e  $g(\theta_s, t)$  si può trovare immediatamente l'andamento del campo magnetico al traferro dovuto alle correnti statoriche dall'espressione:

$$H_s(\theta_s, t) = g(\theta_s, t) F_m(\theta_s, t). \quad (4.9)$$

A verifica delle relazioni ricavate fino ad ora, viene di seguito determinato il campo magnetico al traferro prodotto dalle correnti statoriche di una macchina trifase con una cava per polo e per fase, una coppia di poli, traferro isotropo, correnti equilibrate ed avvolgimenti disposti in modo simmetrico e con ampiezza di un passo polare (caso molto semplificato):

$$\begin{aligned} F_{mh}(t) &= \sum_{J=1}^3 \frac{2N_s}{\pi h} i_{sJ}(t) \operatorname{sen}\left(h\frac{\pi}{2}\right) e^{j h \theta_{sJ}} \\ &= \frac{2N_s}{\pi h} \operatorname{sen}\left(h\frac{\pi}{2}\right) [i_{s1}(t) e^{j h \frac{0}{3}\pi} + i_{s2}(t) e^{j h \frac{2}{3}\pi} + i_{s3}(t) e^{j h \frac{4}{3}\pi}] = \\ &= \frac{3N_s}{\pi h} \operatorname{sen}\left(h\frac{\pi}{2}\right) \bar{i}_{sh}(t) \end{aligned}$$

dove  $\bar{i}_{sh}(t)$  è il vettore di spazio rappresentativo delle correnti di fase statoriche di  $h_{esima}$  armonica di un motore con  $m = 3$  fasi, definito come:

$$\bar{i}_{sh}(t) = \frac{2}{m} \sum_{J=1}^m i_{sJ}(t) \bar{\alpha}^{(J-1)} \quad \text{con } \bar{\alpha} = e^{j h \frac{2}{m}\pi}$$

ossia:

$$\bar{i}_{sh}(t) = \frac{2}{m} \sum_{J=1}^m i_{sJ}(t) e^{J h \frac{2}{m}\pi(j-1)} \quad (4.10)$$

Supponendo un traferro uniforme  $g = g_0 = \frac{1}{\delta_0}$ , dalla (4.9), si ha che  $\bar{H}_h(t) = \frac{\bar{F}_{mh}(t)}{\delta}$  (con  $\bar{H}_h(t)$  l' $h_{esima}$  armonica di campo magnetico al traferro), da cui risulta:

$$\bar{H}_h(t) = \frac{3N_s}{\pi \delta h} \operatorname{sen}\left(h\frac{\pi}{2}\right) \bar{i}_{sh}(t)$$

che in prima armonica diventa la nota espressione:

$$\bar{H}_1(t) = \frac{3N_s}{\pi \delta} \bar{i}_{s1}(t)$$

da cui si ricava l'andamento del campo magnetico al traferro dovuto alle correnti statoriche nel riferimento stazionario, definito dalla relazione:

$$H(\theta_s, t) = \sum_{h=1}^{\infty} \Re\{\bar{H}_h(t) e^{-j h \theta_s}\} = \Re\left\{\frac{3N_s}{\pi \delta} \bar{i}_{s1}(t) e^{-j \theta_s}\right\}$$

Verificata la validità delle formule nel caso di una macchina semplice con traferro isotropo, viene ora analizzato un procedimento per ricavare una formula per una macchina con un traferro il più generale possibile. Le uniche ipotesi che vengono fatte sono di considerare: l'anisotropia del rotore con una simmetria tale da determinarne uno sviluppo in serie con sole armoniche pari; una distribuzione di densità lineare di corrente con sole armoniche dispari; linee di campo al traferro rettilinee e perpendicolari allo statore supposto isotropo.

Considerare solo armoniche pari per l'anisotropia e solo armoniche dispari per le correnti è necessario per poter determinare analiticamente il campo al traferro. Infatti, se non si effettuano queste due ipotesi sorgono dei contributi omopolari di campo magnetico al traferro che non rispettano le leggi della fisica; in particolare sono in disaccordo con la legge di Gauss per il campo magnetico:  $\int_{supc} \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$ . Il procedimento utilizzato è quello di risolvere il problema analitico per un numero via via crescente di armoniche degli sviluppi in serie della funzione inversa del traferro e della densità lineare di corrente, fino a dedurre una formula generale che possa tener conto di infinite armoniche dei rispettivi sviluppi in serie.

Vengono riportati i passaggi per ricavare il campo magnetico al traferro prodotto dalle correnti statoriche per i seguenti valori di armoniche  $k_{esame}$  della distribuzione di densità lineare di corrente  $\gamma$  e di armoniche  $i_{esame}$  dell'inverso del traferro:

- $k = 1$  e  $i = 0$ ;
- $k = 1$  e  $i = 0, 2$ ;
- $k = 1, 3$  e  $i = 0, 2$ ;
- $k = 1, 3, 5$  e  $i = 0, 2, 4$ .

In modo deduttivo viene infine ricavata l'espressione per  $k = 1, 3, 5, 7 \dots \infty_{odd}$  e  $i = 0, 2, 4, 6, 8 \dots \infty_{even}$ .

Analizziamo dunque i diversi casi appena elencati.

Caso con  $k = 1$  ed  $i = 0$ : imporre  $k = 1$  corrisponde a considerare  $\gamma = \Re\{\bar{\gamma}_1 e^{-j\theta_s}\}$ ;  $i = 0$  invece equivale a supporre il traferro isotropo, descrivibile dalla funzione inversa  $g = g_0$ .

Con le ipotesi del caso, la relazione (4.7)  $[\frac{dF_m}{d\theta_s} = -\gamma R]$  si può rielaborare come segue:

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\theta_s}[\Re\{F_{m1}^- e^{-j\theta_s}\}] &= -\Re\{\bar{\gamma}_1 e^{-j\theta_s}\} R \\ \Re\{-j F_{m1}^- e^{-j\theta_s}\} &= \Re\{-R\bar{\gamma}_1 e^{-j\theta_s}\} \\ F_{m1}^- &= -j R\bar{\gamma}_1\end{aligned}$$

Esplicitando i termini dell'equazione (4.9)  $[H = gF_m]$ , sostituendovi la relazione appena trovata, si ottiene:

$$\begin{aligned}H &= gF_m = g_0[\Re\{F_{m1}^- e^{-j\theta_s}\}] \\ \Re\{\bar{H}_1 e^{-j\theta_s}\} &= \Re\{g_0 F_{m1}^- e^{-j\theta_s}\} \\ \bar{H}_1 &= g_0 F_{m1}^-\end{aligned}$$

la quale, riscritta in forma vettoriale, diventa:

$$[\bar{H}_1] = g_0[F_{m1}^-]$$

Caso con  $k = 1$  e  $i = 0, 2$ : imporre  $k = 1$  corrisponde a considerare  $\gamma = \Re\{\bar{\gamma}_1 e^{-j\theta_s}\}$ ;  $i = 0, 2$  invece equivale a supporre il traferro descrivibile dalla funzione inversa  $g = g_0 + \Re\{\bar{g}_2 e^{-j2\theta_s}\}$ .

In queste ipotesi l'espressione (4.7)  $[\frac{dF_m}{d\theta_s} = -\gamma R]$  assume ancora la forma del caso precedente:

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\theta_s}[\Re\{F_{m1}^- e^{-j\theta_s}\}] &= -\Re\{\bar{\gamma}_1 e^{-j\theta_s}\} R \\ \Re\{-j F_{m1}^- e^{-j\theta_s}\} &= \Re\{-R\bar{\gamma}_1 e^{-j\theta_s}\} \\ F_{m1}^- &= -j R\bar{\gamma}_1\end{aligned}$$

L'equazione (4.9) [ $H = gF_m$ ] invece cambia aspetto per la presenza dell'anisotropia del traferro (associata al termine  $\bar{g}_2$ ). Si ottiene dunque:

$$\begin{aligned}
h = gF_m &= [g_0 + \Re\{\bar{g}_2 e^{-j2\theta_s}\}][\Re\{F_{m1}^- e^{-j\theta_s}\}] = \\
&= [g_0 + \frac{\bar{g}_2 e^{-j2\theta_s} + \bar{g}_2^* e^{j2\theta_s}}{2}][\frac{F_{m1}^- e^{-j\theta_s} + F_{m1}^{-*} e^{j\theta_s}}{2}] = \\
&= \frac{g_0 F_{m1}^- e^{-j\theta_s} + g_0 F_{m1}^{-*} e^{j\theta_s}}{2} + \frac{\bar{g}_2 F_{m1}^- e^{-j3\theta_s} + \bar{g}_2^* F_{m1}^{-*} e^{j3\theta_s}}{4} + \\
&\quad + \frac{\bar{g}_2^* F_{m1}^- e^{j\theta_s} + \bar{g}_2 F_{m1}^{-*} e^{-j\theta_s}}{4} = \\
&= \Re\{g_0 F_{m1}^- e^{-j\theta_s} + \frac{\bar{g}_2 F_{m1}^- e^{-j3\theta_s}}{2} + \frac{\bar{g}_2 F_{m1}^{-*} e^{-j\theta_s}}{2}\} = \\
&= \Re\{(g_0 F_{m1}^- + \frac{\bar{g}_2 F_{m1}^{-*}}{2})e^{-j\theta_s} + (\frac{\bar{g}_2 F_{m1}^-}{2})e^{-j3\theta_s}\} = \\
&= \Re\{\bar{H}_1 e^{-j\theta_s} + \bar{H}_3 e^{-j3\theta_s}\}
\end{aligned}$$

Le relazioni tra le componenti armoniche, scritte in forma vettoriale, risultano pertanto:

$$\begin{bmatrix} \bar{H}_1 \\ \bar{H}_3 \end{bmatrix} = g_0 \begin{bmatrix} F_{m1}^- \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{2}\bar{g}_2 \begin{bmatrix} 0 \\ F_{m1}^- \end{bmatrix} + \frac{1}{2}\bar{g}_2^* \begin{bmatrix} F_{m1}^{-*} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Caso con  $k = 1, 3$  e  $i = 0, 2$ : imporre  $k = 1, 3$  corrisponde a considerare  $\gamma = \Re\{\bar{\gamma}_1 e^{-j\theta_s} + \bar{\gamma}_3 e^{-j3\theta_s}\}$ ;  $i = 0, 2$  equivale a supporre il traferro descrivibile dalla funzione inversa  $g = g_0 + \Re\{\bar{g}_2 e^{-j2\theta_s}\}$ .

Dalla (4.7) [ $\frac{dF_m}{d\theta_s} = -\gamma R$ ], si ricava ora:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\theta_s}[\Re\{F_{m1}^- e^{-j\theta_s} + F_{m3}^- e^{-j3\theta_s}\}] &= -\Re\{\bar{\gamma}_1 e^{-j\theta_s} + \bar{\gamma}_3 e^{-j3\theta_s}\}R \\
\Re\{-j F_{m1}^- e^{-j\theta_s} - j3 F_{m3}^- e^{-j3\theta_s}\} &= \Re\{-R\bar{\gamma}_1 e^{-j\theta_s} - R\bar{\gamma}_3 e^{-j3\theta_s}\}
\end{aligned}$$

l'analisi delle diverse componenti armoniche porta dunque alla presenza di due termini nello sviluppo in serie, i quali sono definiti come di seguito:

$$F_{m1}^- = -j R \bar{\gamma}_1 \quad \wedge \quad F_{m3}^- = -j R \frac{\bar{\gamma}_3}{3}$$

L'equazione (4.9)  $[H = gF_m]$  inizia a complicarsi per l'aggiunta di armoniche degli sviluppi in serie, assumendo la seguente forma:

$$\begin{aligned} h = gF_m &= [g_0 + \Re\{\bar{g}_2 e^{-j2\theta_s}\}][\Re\{F_{m1}^- e^{-j\theta_s} + F_{m3}^- e^{-j3\theta_s}\}] = \\ &= [g_0 + \frac{\bar{g}_2 e^{-j2\theta_s} + \bar{g}_2^* e^{j2\theta_s}}{2}][\frac{F_{m1}^- e^{-j\theta_s} + F_{m1}^-^* e^{j\theta_s}}{2} + \\ &+ \frac{F_{m3}^- e^{-j3\theta_s} + F_{m3}^-^* e^{j3\theta_s}}{2}] = \end{aligned}$$

procedendo in modo analogo ai casi precedenti, si ottiene:

$$\begin{aligned} &= \Re\{(g_0 F_{m1}^- + \frac{\bar{g}_2 F_{m1}^-^*}{2} + \frac{\bar{g}_2^* F_{m3}^-}{2})e^{-j\theta_s} + (g_0 F_{m3}^- + \\ &+ \frac{\bar{g}_2 F_{m1}^-}{2})e^{-j3\theta_s} + (\frac{\bar{g}_2 F_{m3}^-}{2})e^{-j5\theta_s}\} = \\ &= \Re\{\bar{H}_1 e^{-j\theta_s} + \bar{H}_3 e^{-j3\theta_s} + \bar{H}_5 e^{-j5\theta_s}\} \end{aligned}$$

Le relazioni tra le componenti armoniche, scritte in forma vettoriale, risultano:

$$\begin{bmatrix} \bar{H}_1 \\ \bar{H}_3 \\ \bar{H}_5 \end{bmatrix} = g_0 \begin{bmatrix} F_{m1}^- \\ F_{m3}^- \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{2}\bar{g}_2 \begin{bmatrix} 0 \\ F_{m1}^- \\ F_{m3}^- \end{bmatrix} + \frac{1}{2}\bar{g}_2 \begin{bmatrix} F_{m1}^-^* \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{2}\bar{g}_2^* \begin{bmatrix} F_{m3}^- \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Caso con  $k = 1, 3, 5$  e  $i = 0, 2, 4$ : imporre  $k = 1, 3, 5$  corrisponde a considerare  $\gamma = \Re\{\bar{\gamma}_1 e^{-j\theta_s} + \bar{\gamma}_3 e^{-j3\theta_s} + \bar{\gamma}_5 e^{-j5\theta_s}\}$ ;  $i = 0, 2$  equivale a supporre il traferro descrivibile dalla funzione inversa  $g = g_0 + \Re\{\bar{g}_2 e^{-j2\theta_s} + \bar{g}_4 e^{-j4\theta_s}\}$ . Questo risulta il caso più complesso che viene sviluppato in modo rigoroso. Considerare situazioni con numeri maggiori di armoniche rende analiticamente pesante la trattazione; inoltre diventa un esercizio matematico non più necessario una volta che si è ricavata un'espressione valida per un numero generico di armoniche di entrambe le distribuzioni in serie di Fourier.

Nell'equazione(4.7)  $[\frac{dF_m}{d\theta_s} = -\gamma R]$ , vengono ora introdotti tre termini, e risulta:

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{d\theta_s} [\Re\{F_{m1}^- e^{-j\theta_s} + F_{m3}^- e^{-j3\theta_s} + F_{m5}^- e^{-j5\theta_s}\}] = \\
& = -\Re\{\bar{\gamma}_1 e^{-j\theta_s} + \bar{\gamma}_3 e^{-j3\theta_s} + \bar{\gamma}_5 e^{-j5\theta_s}\} R \\
& \Re\{-j F_{m1}^- e^{-j\theta_s} - j 3 F_{m3}^- e^{-j3\theta_s} - j 5 F_{m5}^- e^{-j5\theta_s}\} = \\
& = \Re\{-R \bar{\gamma}_1 e^{-j\theta_s} - R \bar{\gamma}_3 e^{-j3\theta_s} - R \bar{\gamma}_5 e^{-j5\theta_s}\}
\end{aligned}$$

dunque, l'analisi delle diverse componenti armoniche porta alle espressioni:

$$F_{m1}^- = -j R \bar{\gamma}_1, \quad F_{m3}^- = -j R \frac{\bar{\gamma}_3}{3} \quad e \quad F_{m5}^- = -j R \frac{\bar{\gamma}_5}{5}$$

L'equazione (4.9)  $[H = gF_m]$  assume pertanto la seguente forma:

$$\begin{aligned}
h = gF_m = & \\
= & [g_0 + \Re\{\bar{g}_2 e^{-j2\theta_s} + \bar{g}_4 e^{-j4\theta_s}\}] [\Re\{F_{m1}^- e^{-j\theta_s} + F_{m3}^- e^{-j3\theta_s} + F_{m5}^- e^{-j5\theta_s}\}] = \\
= & [g_0 + \frac{\bar{g}_2 e^{-j2\theta_s} + \bar{g}_2^* e^{j2\theta_s}}{2} + \frac{\bar{g}_4 e^{-j4\theta_s} + \bar{g}_4^* e^{j4\theta_s}}{2}] \times \\
\times & [\frac{F_{m1}^- e^{-j\theta_s} + F_{m1}^-^* e^{j\theta_s}}{2} + \frac{F_{m3}^- e^{-j3\theta_s} + F_{m3}^-^* e^{j3\theta_s}}{2} + \\
+ & \frac{F_{m5}^- e^{-j5\theta_s} + F_{m5}^-^* e^{j5\theta_s}}{2}] =
\end{aligned}$$

procedendo in modo analogo ai casi precedenti, si ottiene:

$$\begin{aligned}
& = \Re\{(g_0 F_{m1}^- + \frac{\bar{g}_2 F_{m1}^-^*}{2} + \frac{\bar{g}_2^* F_{m3}^-}{2} + \frac{\bar{g}_4 F_{m3}^-^*}{2} + \frac{\bar{g}_4^* F_{m5}^-}{2}) e^{-j\theta_s} + \\
& + (g_0 F_{m3}^- + \frac{\bar{g}_2 F_{m1}^-}{2} + \frac{\bar{g}_2^* F_{m5}^-}{2} + \frac{\bar{g}_4 F_{m1}^-^*}{2}) e^{-j3\theta_s} + \\
& = (g_0 F_{m5}^- + \frac{\bar{g}_2 F_{m3}^-}{2} + \frac{\bar{g}_4 F_{m1}^-}{2}) e^{-j5\theta_s} + \\
& + (\frac{\bar{g}_2 F_{m5}^-}{2} + \frac{\bar{g}_4 F_{m3}^-}{2}) e^{-j7\theta_s} + (\frac{\bar{g}_4 F_{m5}^-}{2}) e^{-j9\theta_s}\} = \\
& = \Re\{\bar{H}_1 e^{-j\theta_s} + \bar{H}_3 e^{-j3\theta_s} + \bar{H}_5 e^{-j5\theta_s} + \bar{H}_7 e^{-j7\theta_s} + \bar{H}_9 e^{-j9\theta_s}\}
\end{aligned}$$

Le relazioni tra le componenti armoniche, scritte in forma vettoriale,

risultano:

$$\begin{bmatrix} \bar{H}_1 \\ \bar{H}_3 \\ \bar{H}_5 \\ \bar{H}_7 \\ \bar{H}_9 \end{bmatrix} = g_0 \begin{bmatrix} \bar{F}_{m1} \\ \bar{F}_{m3} \\ \bar{F}_{m5} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \bar{g}_2 \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{F}_{m1} \\ \bar{F}_{m3} \\ \bar{F}_{m5} \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \bar{g}_4 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \bar{F}_{m1} \\ \bar{F}_{m3} \\ \bar{F}_{m5} \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \bar{g}_2 \begin{bmatrix} \bar{F}_{m1}^* \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \\ + \frac{1}{2} \bar{g}_4 \begin{bmatrix} \bar{F}_{m3}^* \\ \bar{F}_{m1}^* \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \bar{g}_2^* \begin{bmatrix} \bar{F}_{m3} \\ \bar{F}_{m5} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \bar{g}_4^* \begin{bmatrix} \bar{F}_{m5} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

In modo deduttivo, osservando l'andamento delle relazioni in forma vettoriale all'aumentare delle armoniche prese in considerazione, si ricavano le relazioni generali per descrivere il campo magnetico in un traferro indifferentemente anisotropo prodotto da generici avvolgimenti statorici di una macchina elettrica.

Per l'equazione (4.7)  $[\frac{dF_m}{d\theta_s} = -\gamma R]$  si ottiene:

$$\frac{d}{d\theta_s} [F_m] = \Re \left\{ -j k \sum_{k_{odd}=1}^{\infty} \bar{F}_{mk}(t) e^{-j k \theta_s} \right\} = \Re \left\{ -R \sum_{k_{odd}=1}^{\infty} \bar{\gamma}_k(t) e^{-j k \theta_s} \right\}$$

la quale fornisce, per la generica armonica  $k_{esima}$ , la relazione:

$$\bar{F}_{mk}(t) = -j R \frac{\bar{\gamma}_k(t)}{k} \quad (4.11)$$

Per l'equazione (4.9)  $[H = g F_m]$  si ricava, procedendo in modo deduttivo dai casi precedenti (in particolare dall'andamento grafico di come si evolvono le relazioni nella forma vettoriale), l'espressione:

$$\bar{H}_h = g_0 \bar{F}_{mh} + \frac{1}{2} \sum_{i_{even}=2}^{\infty} [\bar{g}_i \bar{F}_{m(h-i)} + \bar{g}_i \bar{F}_{m(i-h)}^* + \bar{g}_i^* \bar{F}_{m(i+h)}] \quad (4.12)$$

sostituendo l'espressione (4.11) trovata per  $\bar{F}_{mh}$  in quest'ultima relazione, si arriva infine alla seguente espressione:

$$\bar{H}_h = -j R g_0 \frac{\bar{\gamma}_h}{h} + \frac{1}{2} \sum_{i_{even}=2}^{\infty} \left[ -j R \bar{g}_i \frac{\bar{\gamma}_{(h-i)}}{h-i} + j R \bar{g}_i \frac{\bar{\gamma}_{(i-h)}^*}{i-h} - j R \bar{g}_i^* \frac{\bar{\gamma}_{(i+h)}}{i+h} \right] \quad (4.13)$$

Dall'equazione (4.13) il campo magnetico al traferro dovuto alle correnti statoriche si ricava come  $H(\theta_s, t) = \Re\{\sum_{h_{\text{odd}}=1}^{\infty} \bar{H}_h e^{-j h \theta_s}\}$ .

Come verrà mostrato, conviene descrivere l'anisotropia rotorica in un sistema di riferimento sincrono con il rotore. Le grandezze saranno pertanto rappresentate di seguito in funzione dell'angolo  $\theta_r$ ; dove, indicando con  $\theta$  la posizione del sistema di riferimento rotorico rispetto al sistema di riferimento statorico, vale la relazione  $\theta_r = \theta_s - \theta$ .

Per indicare le grandezze riferite al sistema di riferimento rotorico viene utilizzata dunque la notazione " ' " (es.  $\bar{H}_h'(t) = \bar{H}_{h, \text{rifstatorico}}(t) e^{-j h \theta(t)}$ ).

Per concludere la trattazione del paragrafo, ossia per poter determinare il campo magnetico al traferro dovuto alle correnti statoriche di una generica macchina elettrica, occorre determinare la funzione inversa del traferro  $g = \frac{1}{\delta}$ , ossia la sua distribuzione in serie di Fourier.

Per risolvere il problema fisico nelle condizioni ipotizzate, in particolare nel considerare l'anisotropia solo nel rotore e trascurare quella dello statore, risulta conveniente considerare la funzione inversa dello spessore del traferro nel sistema di riferimento solidale con il rotore  $g(\theta_r)$ . In figura 4.6 viene mostrata la geometria del traferro scelta per la descrizione del modello analitico. Bisogna notare che tale scelta delle geometrie è una delle più frequenti nelle macchine elettriche a magneti superficiali. Nel corso della trattazione vengono illustrate espressioni matematiche ed immagini riferite ad una coppia di poli, ipotizzando che la macchina presenti una geometria che si ripete in modo identico e simmetrico sotto ogni coppia di poli (come generalmente avviene); pertanto la trattazione resta ancora valida per un numero generico di coppie di poli. In altri termini di seguito sono descritte le geometrie del traferro e dei magneti permanenti in termini di coordinate elettriche e non meccaniche.

Viene dunque riportato in figura 4.7 anche l'andamento della funzione dell'inverso dello spessore del traferro.

Per poter sfruttare al meglio la funzione dell'andamento dell'inverso del traferro,

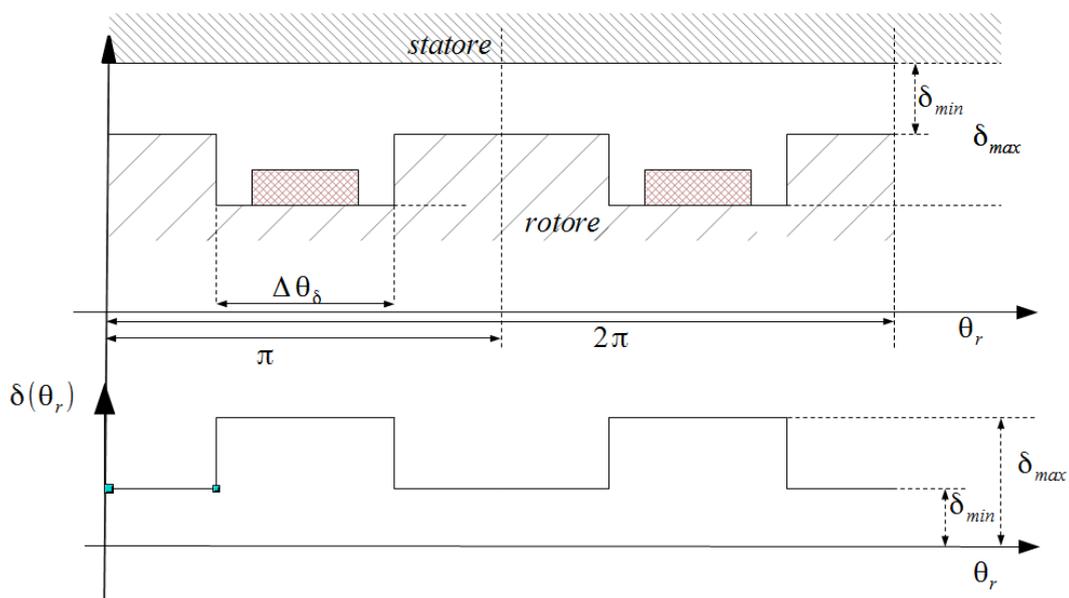


Figura 4.6: Andamento del traferro.

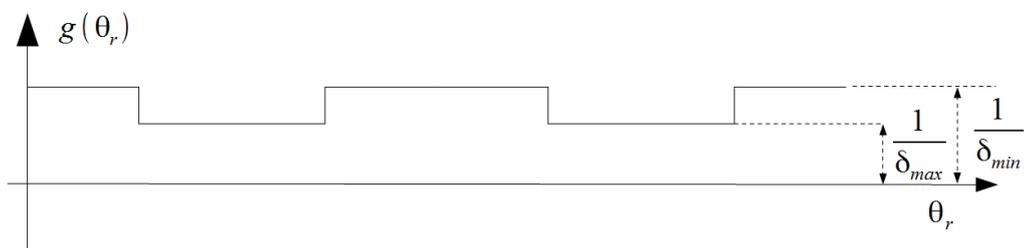


Figura 4.7: Andamento dell'inverso dello spessore del traferro.

è conveniente svilupparla in serie di Fourier come di seguito:

$$g(\theta_r) = \frac{1}{\delta(\theta_r)} = g_0 + \Re\left\{\sum_{i=1}^{\infty} \bar{g}_i' e^{-j i \theta_r}\right\} \quad (4.14)$$

dove le componenti armoniche dello sviluppo  $g_0$  e  $\bar{g}_i'$  sono definite come:

$$g_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(\theta_r) d\theta_r$$

e

$$\bar{g}_i' = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} g(\theta_r) e^{j i \theta_r} d\theta_r$$

Il valore medio dell'inverso del traferro  $g_0$  si può esplicitare come segue:

$$\begin{aligned} g_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(\theta_r) d\theta_r = \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[ \frac{2(\pi - \Delta\theta_\delta)}{\delta_{min}} + \frac{2\Delta\theta_\delta}{\delta_{max}} \right] = \\ &= \frac{1}{\delta_{min}} - \frac{\Delta\theta_\delta}{\pi} \left( \frac{1}{\delta_{min}} - \frac{1}{\delta_{max}} \right) \end{aligned}$$

Per la generica armonica  $\bar{g}_i'$  risulta invece:

$$\begin{aligned} \bar{g}_i' &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} g(\theta_r) e^{j i \theta_r} d\theta_r = \\ &= \frac{1}{\pi} \left[ \int_0^{\frac{\pi}{2} - \frac{\Delta\theta_\delta}{2}} \frac{1}{\delta_{min}} e^{j i \theta_r} d\theta_r + \int_{\frac{\pi}{2} - \frac{\Delta\theta_\delta}{2}}^{\frac{\pi}{2} + \frac{\Delta\theta_\delta}{2}} \frac{1}{\delta_{max}} e^{j i \theta_r} d\theta_r + \int_{\frac{\pi}{2} + \frac{\Delta\theta_\delta}{2}}^{\frac{3\pi}{2} - \frac{\Delta\theta_\delta}{2}} \frac{1}{\delta_{min}} e^{j i \theta_r} d\theta_r + \right. \\ &\quad \left. + \int_{\frac{3\pi}{2} - \frac{\Delta\theta_\delta}{2}}^{\frac{3\pi}{2} + \frac{\Delta\theta_\delta}{2}} \frac{1}{\delta_{max}} e^{j i \theta_r} d\theta_r + \int_{\frac{3\pi}{2} + \frac{\Delta\theta_\delta}{2}}^{2\pi} \frac{1}{\delta_{min}} e^{j i \theta_r} d\theta_r \right] = \\ &= \frac{2e^{j i \frac{\pi}{2}}}{j i \pi} (1 + e^{j i \pi}) \left( \frac{e^{j i \frac{\Delta\theta_\delta}{2}} - e^{-j i \frac{\Delta\theta_\delta}{2}}}{2} \right) \left( \frac{1}{\delta_{max}} - \frac{1}{\delta_{min}} \right) \end{aligned}$$

essendo  $(1 + e^{j i \pi}) = 0$  con  $i$  dispari e  $(1 + e^{j i \pi}) = 2$  con  $i$  pari, restano non nulle solo le componenti pari delle armoniche dello sviluppo in serie dell'inverso del traferro, ed assumono l'espressione:

$$\bar{g}_i' = -\frac{4e^{j i_{even} \frac{\pi}{2}}}{i_{even} \pi} \text{sen}\left(i_{even} \frac{\Delta\theta_\delta}{2}\right) \left( \frac{1}{\delta_{min}} - \frac{1}{\delta_{max}} \right)$$

dunque l'andamento dell'inverso del traferro diventa:

$$g(\theta_r) = g_0 + \Re \left\{ \sum_{i_{even}=1}^{\infty} \bar{g}_i' e^{-j i \theta_r} \right\}$$

dove le componenti armoniche  $g_0$  e  $\bar{g}_i'$  sono definite come segue:

$$g_0 = \frac{1}{\delta_{min}} - \frac{\Delta\theta_\delta}{\pi} \left( \frac{1}{\delta_{min}} - \frac{1}{\delta_{max}} \right)$$

e

$$\bar{g}_i' = -\frac{4e^{-j(i\frac{\pi}{2})}}{i\pi} \text{sin}\left(\frac{i\Delta\theta_\delta}{2}\right) \left( \frac{1}{\delta_{min}} - \frac{1}{\delta_{max}} \right) \quad (4.15)$$

La distribuzione spaziale della densità di corrente statorica per una macchina con  $n_J$  avvolgimenti, espressa in un sistema di riferimento rotorico e considerando solo le armoniche dispari, per le relazioni (4.4) e (4.5) risulta definita come:

$$\gamma(\theta_r, t) = \Re \sum_{k_{odd}=1}^{\infty} \{\bar{\gamma}'_k(t) e^{-j(k\theta_r)}\} = \sum_{k_{odd}=1}^{\infty} \left\{ \Re \sum_{J=1}^{n_J} [N_s \bar{\Gamma}'_{Jk}(t) e^{-j(k\theta_r)}] \right\}$$

in cui la generica armonica spaziale di densità di corrente  $\bar{\Gamma}'_{Jk}(t)$  si presenta nella forma:

$$\bar{\Gamma}'_{Jk}(t) = \frac{j2i_{sJ}(t)}{\pi R} \sin\left(k \frac{\Delta\theta_{sJ}}{2}\right) e^{j(k\theta_{sJ})} e^{-j(k\theta)} \quad (4.16)$$

dove vale la relazione:  $\theta = \theta_s - \theta_r$ .

Dunque il campo magnetico al traferro nel sistema di riferimento solidale con il rotore risulta essere in definitiva:

$$H(\theta_r, t) = \Re \sum_{h_{odd}=1}^{\infty} \{\bar{H}'_h(t) e^{-j(h\theta_r)}\} \quad (4.17)$$

dove, considerando separatamente i contributi al campo delle correnti e dei magneti permanenti (ipotesi di linearità del circuito magnetico):  $\bar{H}'_h(t) = \bar{H}'_h(t)_{magneti} + \bar{H}'_h(t)_{correnti-statoriche}$

in cui la componente armonica del campo magnetico al traferro dovuta alle correnti statoriche è definita come:

$$\begin{aligned} \bar{H}'_h(t)_{correnti} &= \\ &= -jRg_0 \frac{\bar{\gamma}'_h(t)}{h} + \frac{1}{2} \sum_{i_{even}=2}^{\infty} \left\{ \frac{-jR\bar{g}'_i \bar{\gamma}'_{h-i}(t)}{h-i} + \frac{+jR\bar{g}'_i \bar{\gamma}'_{i-h}(t)}{i-h} + \frac{-jR\bar{g}'_{i^*} \bar{\gamma}'_{i+h}(t)}{i+h} \right\} \end{aligned} \quad (4.18)$$

## 4.4 Campo magnetico dovuto a magneti permanenti con geometrie di interesse industriale

I magneti permanenti considerati nella trattazione sono di tipo superficiale e a spessore  $l_M$  costante, con la scelta della convenzione con l'asse d rotorico allineato con il centro del polo nord magnetico come mostrato in figura 4.8.

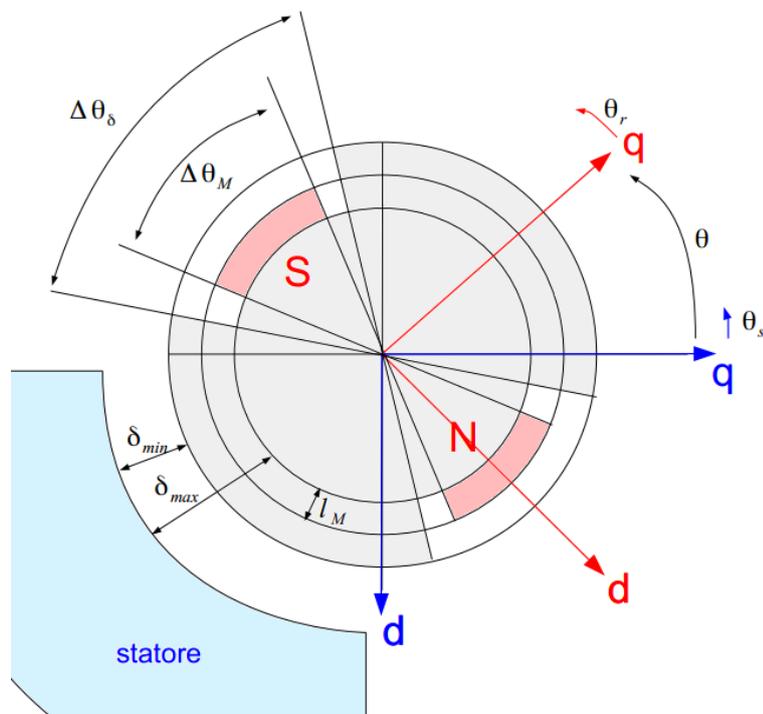


Figura 4.8: Convenzioni per il sistema di riferimento rotorico.

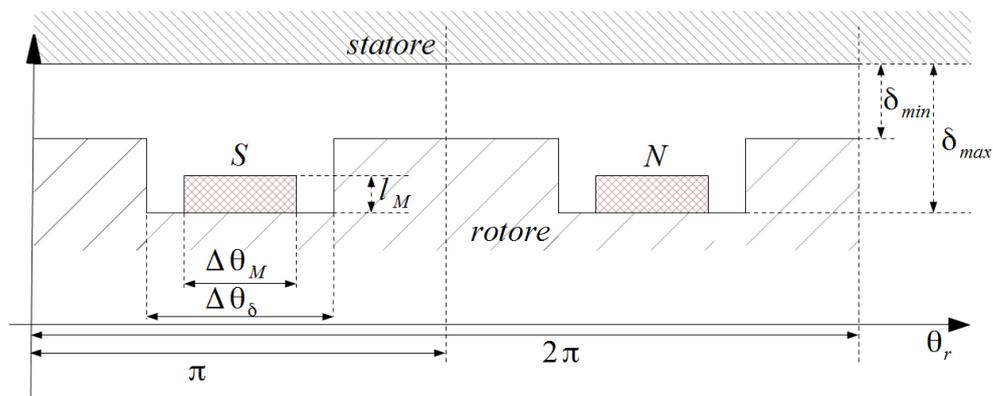


Figura 4.9: Parametri geometrici che descrivono i magneti permanenti rotorici.

In figura 4.9 viene mostrata la stessa geometria riportata in piano.

Supponendo di lavorare in condizioni di linearità, ossia trascurando la possibilità che vi siano delle saturazioni del circuito magnetico, i legami tra l'induzione

magnetica  $b$  ed il campo magnetico  $H$  risultano:

$$\begin{aligned} \text{Nel traferro } b &= \mu_0 H \\ \text{Nel magnete permanente } b_M &= b_{Mr} + \mu_d H_M \end{aligned} \quad (4.19)$$

L'andamento all'interno dei magneti permanenti, nelle ipotesi considerate, viene mostrato in figura 4.10.

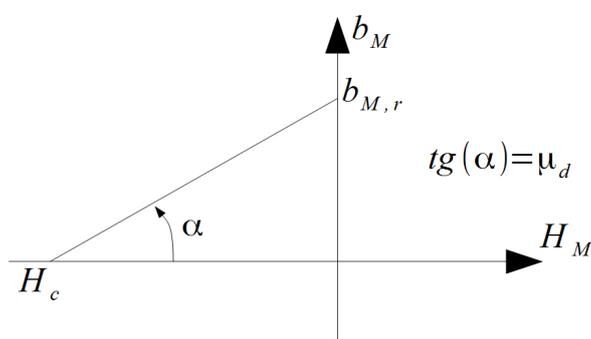


Figura 4.10: Caratteristica di legame materiale in un mezzo magnetico lineare.

È possibile ricavare l'andamento del campo magnetico nel traferro dovuto ai magneti permanenti rotorici utilizzando la legge della circuitazione magnetica  $\int_{l_c} \bar{H} \cdot \bar{dl} = i_{conc}$ , in un circuito privo di correnti ( $i_{conc} = 0$ ) e nell'ipotesi di considerare le linee di campo magnetico rettilinee e perpendicolari allo statore.

In figura 4.11 vengono mostrate le linee di circuitazione che vengono considerate per la seguente trattazione analitica.

Rispettando le convenzioni scelte in figura e assumendo il campo magnetico positivo se attraversa il traferro diretto dal rotore verso lo statore, si possono scrivere le seguenti relazioni per le diverse linee di circuitazione:

$$\begin{aligned} \int_{l_{C_{0-1}}} \bar{H} \cdot \bar{dl} &= H_0 \delta_{min} - H_1 \delta_{min} = 0 \rightarrow H_0 = H_1 \\ \int_{l_{C_{0-2}}} \bar{H} \cdot \bar{dl} &= H_0 \delta_{min} - H_2 \delta_{max} = 0 \rightarrow H_0 = H_2 \frac{\delta_{max}}{\delta_{min}} \\ \int_{l_{C_{0-3}}} \bar{H} \cdot \bar{dl} &= H_0 \delta_{min} - H_3 \delta_{min} = 0 \rightarrow H_0 = H_3 \end{aligned} \quad (4.20)$$

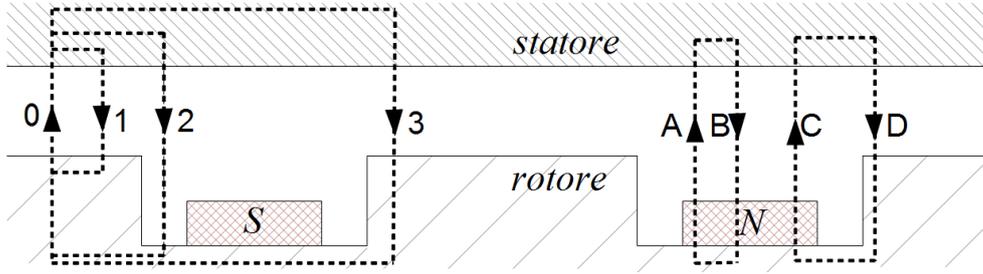


Figura 4.11: Linee di circuitazione magnetica di interesse per la trattazione analitica.

Per rispettare il teorema di Gauss applicato all'induzione magnetica  $\int_{S_C} \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$  lungo il traferro, le equazioni (4.20) si traducono nella relazione  $H_0 = H_1 = H_3 = 0$  che, associata alla seconda delle (4.20), fornisce  $H_2 = 0$ . Come fatto per i tratti 0-1, 0-2 e 0-3, per il tratto A-B risulta:

$$\int_{l_{C_{A-B}}} \vec{H} \cdot d\vec{l} = H_{AM}l_M + H_A(\delta_{max} - l_M) - H_{BM}l_M - H_B(\delta_{max} - l_M) = 0 \quad (4.21)$$

Per la continuità dell'induzione magnetica  $b$  risulta:  $b_A = b_{AM} \wedge b_B = b_{BM}$ .

Per le relazioni di legame materiale dei mezzi magnetici si ha:

$$\text{Nei magneti : } b_{AM} = b_{Mr} + \mu_d H_{AM} \wedge b_{BM} = b_{Mr} + \mu_d H_{BM}$$

$$\text{In aria : } b_A = \mu_0 H_A \wedge b_B = \mu_0 H_B$$

Elaborando queste equazioni si ottengono:

$$H_A = \frac{b_A}{\mu_0} = \frac{b_{AM}}{\mu_0} = \frac{b_{Mr} + \mu_d H_{AM}}{\mu_0}$$

$$H_B = \frac{b_B}{\mu_0} = \frac{b_{BM}}{\mu_0} = \frac{b_{Mr} + \mu_d H_{BM}}{\mu_0}$$

sostituendo le relazioni trovate per  $H_A$  e  $H_B$  nell'equazione (4.21) si ricavano:

$$H_{AM}l_M + H_A(\delta_{max} - l_M) = H_{BM}l_M + H_B(\delta_{max} - l_M)$$

$$H_{AM}l_M + \left[ \frac{b_{Mr} + \mu_d H_{AM}}{\mu_0} \right] (\delta_{max} - l_M) = H_{BM}l_M + \left[ \frac{b_{Mr} + \mu_d H_{BM}}{\mu_0} \right] (\delta_{max} - l_M)$$

effettuando le opportune semplificazioni si arriva alla conclusione che:

$$H_{AM} = H_{BM}$$

Poiché  $H_{AM} = H_{BM}$ , per le relazioni di legame materiale otteniamo  $b_{AM} = b_{BM}$  e per la continuità dell'induzione magnetica  $b_A = b_B$ . Essendo  $b_A = b_B$ , ancora per le relazioni di legame materiale, è immediato verificare che  $H_A = H_B$ . Dunque, nelle ipotesi fatte, il campo magnetico dovuto ai magneti permanenti è costante nel passo occupato dai magneti permanenti ed è nullo fuori da esso, inoltre tale campo magnetico risulta lo stesso sia all'interno dei magneti permanenti sia nel traferro in fronte ad essi.

Descritto a livello qualitativo l'andamento della componente di campo magnetico dovuta ai soli magneti permanenti, viene di seguito ricavato il suo valore in termini di ampiezza. È dunque esplicitata la legge della circuitazione magnetica per l'ultima linea di circuitazione presente in figura 4.11, introducendo le relazioni già trovate nella trattazione precedente:

$$\begin{aligned} \int_{l_{C-D}} \vec{H} \cdot d\vec{l} &= H_{CM}l_M + H_C(\delta_{max} - l_M) - H_D\delta_{min} = \\ &= H_{CM}l_M + H_C(\delta_{max} - l_M) = 0 \end{aligned}$$

Ora  $b_C = b_{CM}$  per la continuità dell'induzione magnetica, mentre  $b_C = \mu_0 H_C \wedge b_{MC} = b_{Mr} + \mu_d H_{CM}$  per i legami materiali. Dunque si ottiene:

$$H_{CM} = \frac{b_{CM} - b_{Mr}}{\mu_d} = \frac{b_C - b_{Mr}}{\mu_d} = \frac{\mu_0 H_C - b_{Mr}}{\mu_d}$$

sostituendo l'espressione di  $H_{CM}$  in quella della circuitazione, si ricava:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\mu_0 H_C - b_{Mr}}{\mu_d} l_M + H_C(\delta_{max} - l_M) \\ H_C &= \frac{b_{Mr} l_M}{\mu_d} \frac{1}{\frac{\mu_0}{\mu_d} l_M + \delta_{max} - l_M} = \frac{b_{Mr} l_M}{\mu_d \delta_{max} + l_M(\mu_0 - \mu_d)} \end{aligned}$$

con l'approssimazione di considerare  $\mu_d = \mu_0$ , risulta:

$$H_C = \frac{b_{Mr} l_M}{\mu_0 \delta_{max}}$$

Dunque in definitiva, nella parte di traferro affacciata ai magneti permanenti il campo magnetico assume l'espressione:

$$H_M(\theta_r) = \frac{b_{Mr} l_M}{\mu_0 \delta_{max}} \quad (4.22)$$

Ai lati dei magneti permanenti invece il campo magnetico è nullo:

$$H_M(\theta_r) = 0$$

In figura 4.12 viene mostrato l'andamento appena descritto del contributo del campo magnetico al traferro dovuto ai soli magneti permanenti.

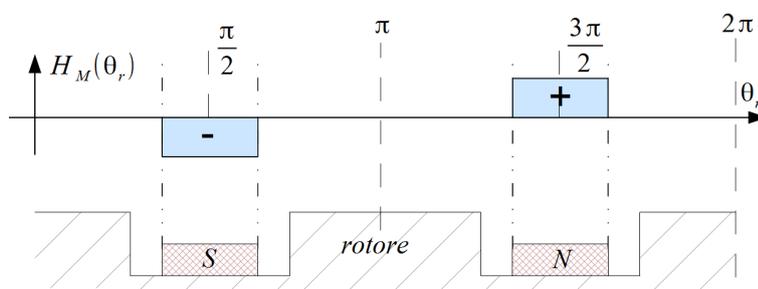


Figura 4.12: Andamento del campo magnetico nel traferro dovuto ai magneti permanenti.

Risulta comodo, per descrivere il campo magnetico al traferro, sviluppare in serie di Fourier la componente del campo dovuta ai magneti permanenti, così da ottenere le sue componenti armoniche, le quali, sommate alle componenti armoniche del campo dovute alle correnti statoriche, forniscono le armoniche del campo magnetico totale al traferro. Una volta nota l'espressione di ogni armonica del campo totale è immediato ricavare il suo andamento, in funzione delle correnti statoriche e della posizione relativa tra statore e rotore ( $\theta$ ), attraverso l'espressione:

$$H_M(\theta_r) = \Re\left\{\sum_{h=1}^{\infty} \bar{H}_{Mh} e^{-j h \theta_r}\right\}$$

dove la generica armonica di campo è definita come di seguito:

$$\begin{aligned}
 \bar{H}_{Mh} &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} H_M(\theta_r) e^{jh\theta_r} d\theta_r = \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_{\frac{\pi}{2} - \frac{\Delta\theta_M}{2}}^{\frac{\pi}{2} + \frac{\Delta\theta_M}{2}} -H_M e^{jh\theta_r} d\theta_r + \frac{1}{\pi} \int_{\frac{3\pi}{2} - \frac{\Delta\theta_M}{2}}^{\frac{3\pi}{2} + \frac{\Delta\theta_M}{2}} H_M e^{jh\theta_r} d\theta_r = \\
 &= \frac{2H_M}{j h \pi} \left[ -e^{jh(\frac{\pi}{2} + \frac{\Delta\theta_M}{2})} + e^{jh(\frac{\pi}{2} - \frac{\Delta\theta_M}{2})} + e^{jh(\frac{3\pi}{2} + \frac{\Delta\theta_M}{2})} - e^{jh(\frac{3\pi}{2} - \frac{\Delta\theta_M}{2})} \right] = \\
 &= \frac{2H_M}{j h \pi} \left( \frac{e^{jh\frac{\Delta\theta_M}{2}} - e^{-jh\frac{\Delta\theta_M}{2}}}{2} \right) [e^{jh\frac{\pi}{2}} (e^{jh\pi} - 1)] =
 \end{aligned}$$

essendo  $(e^{jh\pi} - 1) = 0$  con  $h$  pari ed  $(e^{jh\pi} - 1) = -2$  con  $h$  dispari, restano non nulle solo le armoniche dispari; pertanto l'espressione assume la seguente forma:

$$\begin{aligned}
 &= -\frac{4H_M}{j h \pi} \left( \frac{e^{jh\frac{\Delta\theta_M}{2}} - e^{-jh\frac{\Delta\theta_M}{2}}}{2} \right) e^{jh\frac{\pi}{2}} = \\
 &= -\frac{4H_M}{j h \pi} \operatorname{senh}\left(jh\frac{\Delta\theta}{2}\right) e^{jh\frac{\pi}{2}} = \\
 &= -\frac{4H_M}{j h \pi} j \operatorname{sen}\left(h\frac{\Delta\theta}{2}\right) e^{jh\frac{\pi}{2}} = \\
 &= -\frac{4H_M}{h \pi} \operatorname{sen}\left(h\frac{\Delta\theta}{2}\right) e^{jh\frac{\pi}{2}} =
 \end{aligned}$$

quindi, la generica armonica di campo magnetico al traferro (dovuta ai magneti permanenti) risulta:

$$\bar{H}'_h(t)_{magneti} = \frac{-4H_M}{\pi h} \operatorname{sen}\left(h\frac{\Delta\theta_M}{2}\right) e^{jh\frac{\pi}{2}} \quad (4.23)$$

in cui il termine  $H_M$  è definito come:

$$H_M = \frac{b_{Mr} l_M}{\mu_0 \delta_{max}}$$

Ricavata un'espressione analitica anche per tale componente del campo magnetico al traferro, quello complessivo risulta definito dalle equazioni (4.18) e (4.23) riportate di seguito:

$$H(\theta_r, t) = \Re \sum_{h_{odd}=1}^{\infty} \{ \bar{H}'_h(t) e^{-j(h\theta_r)} \}$$

dove:  $\bar{H}'_h(t) = \bar{H}'_h(t)_{magneti} + \bar{H}'_h(t)_{correnti-statoriche}$

con (per la 4.18):

$$\begin{aligned} \bar{H}'_h(t)_{correnti} &= \\ &= -jRg_0 \frac{\bar{\gamma}'_h(t)}{h} + \frac{1}{2} \sum_{i_{even}=2}^{\infty} \left\{ \frac{-jR\bar{g}'_i \bar{\gamma}'_{h-i}(t)}{h-i} + \frac{+jR\bar{g}'_i \bar{\gamma}'_{i-h}(t)}{i-h} + \frac{-jR\bar{g}'_i \bar{\gamma}'_{i+h}(t)}{i+h} \right\} \end{aligned}$$

e (per la 4.23):

$$\bar{H}'_h(t)_{magneti} = \frac{-4H_M}{\pi h} \sin\left(h \frac{\Delta\theta_M}{2}\right) e^{jh\frac{\pi}{2}} \quad \wedge \quad H_M = \frac{b_M r l_M}{\mu_0 \delta_{max}}$$

## 4.5 Determinazione dei flussi concatenati

Per una generica spira statorica  $J_{esima}$  si può calcolare il flusso concatenato con essa dovuto al campo magnetico totale al traferro  $H(\theta_s, t)$  come:

$$\phi_J(t) = -\frac{1}{i_{sJ}(t)} \int_0^{\Phi(t)} i_{sCJ}(t) d\phi(t)$$

dove:

- $\Phi(t)$  = flusso totale lungo tutto il traferro;
- $d\phi(t)$  = generico tubo di flusso infinitesimo [ $d\phi(t) = \mu_0 H(\theta_s, t) L R d\theta_s$ ];
- $i_{sCJ}(t)$  = corrente della spira  $J_{esima}$  attraversata dal tubo di flusso considerato:  
[ $i_{sCJ}(t) = \int_0^{\theta_s} \gamma_{sJ}(\theta_s, t) R d\theta_s$ ];
- $i_{sJ}(t)$  = corrente che attraversa la  $J_{esima}$  spira.

A questo punto risulta utile osservare come in genere, in una macchina con p coppie di poli, il flusso concatenato con gli avvolgimenti statorici disposti lungo tutto il traferro risulta uguale a p volte quello concatenato con gli avvolgimenti statorici presenti in una sola coppia di poli. Pertanto si può fare riferimento ad una sola coppia di poli (esprimendo dunque le grandezze in termini di gradi elettrici) per poi ricondursi al caso generico con p coppie di poli. Affinchè quanto esposto sia

vero, è necessario che, come in genere avviene, la macchina che si vuole descrivere si presenti identica sotto ogni coppia di poli.

Dunque, riferendosi ad una coppia di poli:

$$\begin{aligned}
\phi_J(t) &= -\frac{1}{i_{sJ}(t)} \int_0^{2\pi} i_{sCJ}(t) \mu_0 H(\theta_s, t) LR d\theta_s = \\
&= \int_0^{2\pi} \left[ -\frac{1}{i_{sJ}(t)} \int_0^{\theta_s} \gamma_{sJ}(\theta_s, t) R d\theta_s \right] \mu_0 H(\theta_s, t) LR d\theta_s = \\
&= -\mu_0 LR^2 \int_0^{2\pi} \left[ \int_0^{\theta_s} \frac{\gamma_{sJ}(\theta_s, t)}{i_{sJ}(t)} d\theta_s \right] H(\theta_s, t) d\theta_s = \\
&= -\mu_0 LR^2 \int_0^{2\pi} \left[ \int_0^{\theta_s} \Re \left\{ \sum_{k_{odd}=1}^{\infty} \frac{\bar{\Gamma}_{Jk}(t) e^{-j k \theta_s}}{i_{sJ}(t)} \right\} d\theta_s \right] \Re \left\{ \sum_{h=1}^{\infty} \bar{H}_h(t) e^{-j h \theta_s} \right\} d\theta_s
\end{aligned}$$

A questo punto risulta conveniente introdurre il parametro  $\Lambda_{Jk} =_{def} \frac{\bar{\Gamma}_{Jk}(t)}{i_{sJ}(t)}$ . Si noti come, esplicitando  $\bar{\Gamma}_{Jk}(t)$  dall'equazione (4.4), si può riscrivere tale parametro nella forma:  $\Lambda_{Jk} = \frac{j^2}{\pi R} \text{sen}(k \frac{\Delta \theta_{sJ}}{2}) e^{j k \theta_{sJ}}$ . Continuando i passaggi per la determinazione dei flussi concatenati, inserendo il parametro  $\Lambda_{Jk}$ , si ottiene:

$$\begin{aligned}
\phi_J(t) &= -\mu_0 LR^2 \int_0^{2\pi} \left[ \int_0^{\theta_s} \Re \left\{ \sum_{k_{odd}=1}^{\infty} \bar{\Lambda}_{Jk} e^{-j k \theta_s} \right\} d\theta_s \right] \Re \left\{ \sum_{h=1}^{\infty} \bar{H}_h(t) e^{-j h \theta_s} \right\} d\theta_s = \\
&= -\mu_0 LR^2 \int_0^{2\pi} \left[ \int_0^{\theta_s} \sum_{k_{odd}=1}^{\infty} \left( \frac{\bar{\Lambda}_{Jk} e^{-j k \theta_s} + \bar{\Lambda}_{Jk}^* e^{+j k \theta_s}}{2} \right) d\theta_s \right] \times \\
&\times \sum_{h=1}^{\infty} \left( \frac{\bar{H}_h(t) e^{-j h \theta_s} + \bar{H}_h^*(t) e^{+j h \theta_s}}{2} \bar{H}_h(t) e^{-j h \theta_s} \right) d\theta_s = \\
&= -\frac{\mu_0 LR^2}{4} \int_0^{2\pi} \left[ \sum_{k_{odd}=1}^{\infty} -\frac{1}{jk} (\bar{\Lambda}_{Jk} e^{-j k \theta_s} - \bar{\Lambda}_{Jk}) + \frac{1}{jk} (\bar{\Lambda}_{Jk}^* e^{+j k \theta_s} - \bar{\Lambda}_{Jk}^*) \right] \times \\
&\times \sum_{h=1}^{\infty} \left( \frac{\bar{H}_h(t) e^{-j h \theta_s} + \bar{H}_h^*(t) e^{+j h \theta_s}}{2} \bar{H}_h(t) e^{-j h \theta_s} \right) d\theta_s =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{\mu_0 LR^2}{4} \int_0^{2\pi} \sum_{k_{\text{odd}}=1}^{\infty} \sum_{h=1}^{\infty} \left[ -\frac{1}{jk} (\bar{\Lambda}_{Jk} e^{-jk\theta_s} - \bar{\Lambda}_{Jk}^* e^{+jk\theta_s} - \bar{\Lambda}_{Jk} + \bar{\Lambda}_{Jk}^*) \right] \times \\
&\times (\bar{H}_h(t) e^{-jh\theta_s} + \bar{H}_h^*(t) e^{jh\theta_s}) d\theta_s = \\
&= \frac{\mu_0 LR^2}{4} \int_0^{2\pi} \sum_{k_{\text{odd}}=1}^{\infty} \sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{jk} [\bar{\Lambda}_{Jk} \bar{H}_h e^{-j(k+h)\theta_s} + \bar{\Lambda}_{Jk} \bar{H}_h^* e^{-j(k-h)\theta_s} + \\
&- \bar{\Lambda}_{Jk}^* \bar{H}_h e^{j(k-h)\theta_s} - \bar{\Lambda}_{Jk}^* \bar{H}_h^* e^{j(k+h)\theta_s} + \\
&- (\bar{\Lambda}_{Jk} - \bar{\Lambda}_{Jk}^*) (\bar{H}_h(t) e^{-jh\theta_s} + \bar{H}_h^*(t) e^{jh\theta_s})] d\theta_s
\end{aligned}$$

Tutti i termini esponenziali del tipo  $e^{\pm jz\theta_s}$  si annullano quando vengono integrati tra 0 e  $2\pi$  ( $\int_0^{2\pi} e^{\pm jz\theta_s} d\theta_s = \pm \frac{1}{jz} [e^{\pm jz2\pi} - 1] = 0$ ); restano pertanto solo i termini in cui  $z = 0$  che risultano costanti ( $\int_0^{2\pi} \text{cost} d\theta_s = 2\pi \text{cost}$ ). I termini che non si annullano sono quindi quelli con  $z = k - h = 0$  e  $z = k - (-h) = 0$ , ossia con  $h = k$ . Questo significa che le uniche armoniche non nulle, dello sviluppo in serie dei flussi concatenati con gli avvolgimenti statorici, possono essere soltanto quelle non nulle dello sviluppo in serie della distribuzione di densità lineare di corrente. Tenendo conto di queste considerazioni, si ha:

$$\begin{aligned}
\phi_J(t) &= \frac{\mu_0 LR^2}{4} \int_0^{2\pi} \sum_{k_{\text{odd}}=1}^{\infty} \frac{1}{jk} [\bar{\Lambda}_{Jk} \bar{H}_h^* - \bar{\Lambda}_{Jk}^* \bar{H}_h] d\theta_s = \\
&= \mu_0 LR^2 \pi \sum_{k_{\text{odd}}=1}^{\infty} \frac{\frac{-j}{k} \bar{\Lambda}_{Jk} \bar{H}_h^* + \frac{j}{k} \bar{\Lambda}_{Jk}^* \bar{H}_h}{2} = \quad (4.24) \\
&= \mu_0 LR^2 \pi \sum_{k_{\text{odd}}=1}^{\infty} \Re \left\{ \frac{-j}{k} \bar{\Lambda}_{Jk} \bar{H}_h^* \right\}
\end{aligned}$$

Per passare all'equazione nel sistema di riferimento rotorico è sufficiente sostituire  $\bar{H}_k(t) = \bar{H}'_k(t) e^{jk\theta}$  e  $\bar{H}_k^*(t) = \bar{H}'_k{}^*(t) e^{-jk\theta}$ , da cui l'espressione finale:

$$\phi_J(t) = \mu_0 LR^2 \pi \sum_{k_{\text{odd}}=1}^{\infty} \Re \left\{ -j \frac{\bar{\Lambda}_{Jk} \bar{H}'_k{}^*(t)}{k} e^{-jk\theta} \right\} \quad (4.25)$$

I flussi concatenati con gli avvolgimenti statorici per una macchina con  $N_s$  spire per avvolgimento risultano quindi:

$$\Phi_J(t) = N_s \mu_0 R^2 L \pi \sum_{k=1}^{\infty} \Re \left\{ -j \frac{\bar{\Lambda}_{Jk} \bar{H}'_k{}^*(t)}{k} e^{-jk\theta(t)} \right\} \quad (4.26)$$

## 4.6 Modello di macchina brushless pentafase anisotropa

Per non appesantire la trattazione matematica del modello della macchina, si è scelto di semplificare le equazioni riferendosi ad un caso particolare di una macchina, con:

- una sola coppia di poli [ $p=1$ ];
- traferro con ampiezze identiche dei tratti a spessore minore e a spessore maggiore [ $\Delta\theta_{delta} = \frac{\pi}{2}$ ];
- avvolgimenti concentrati e collegati a stella;
- passo degli avvolgimenti  $\Delta\theta_{sJ} = \pi$ .

È stato scelto inoltre di considerare lo sviluppo in serie della distribuzione di corrente degli avvolgimenti statorici solo fino alla terza armonica [analisi in prima e terza armonica della distribuzione spaziale di densità di corrente].

La semplificazione è stata fondamentale anche per poter verificare la trattazione teorica, sviluppata durante il progetto di tesi. Poche fonti presenti in letteratura hanno precedentemente affrontato lo sviluppo di un modello matematico per macchine elettriche simili a quella in studio [4, 5, 6, 7]. Inoltre, i modelli analitici presenti in tali fonti sono stati elaborati per macchine specifiche, con geometrie relativamente semplici da trattare. Lo studio rigoroso dei paragrafi precedenti permette di ricavare una descrizione adatta a macchine anche molto più complesse. Tuttavia, per gli scopi della tesi, è sembrato sufficiente verificare la coerenza del modello descritto con i testi scientifici di riferimento.

Nella seguente figura 4.13 è mostrata schematicamente una macchina elettrica che rappresenta bene quanto descritto.

Le armoniche dello sviluppo in serie dell'inverso dello spessore del traferro, nel

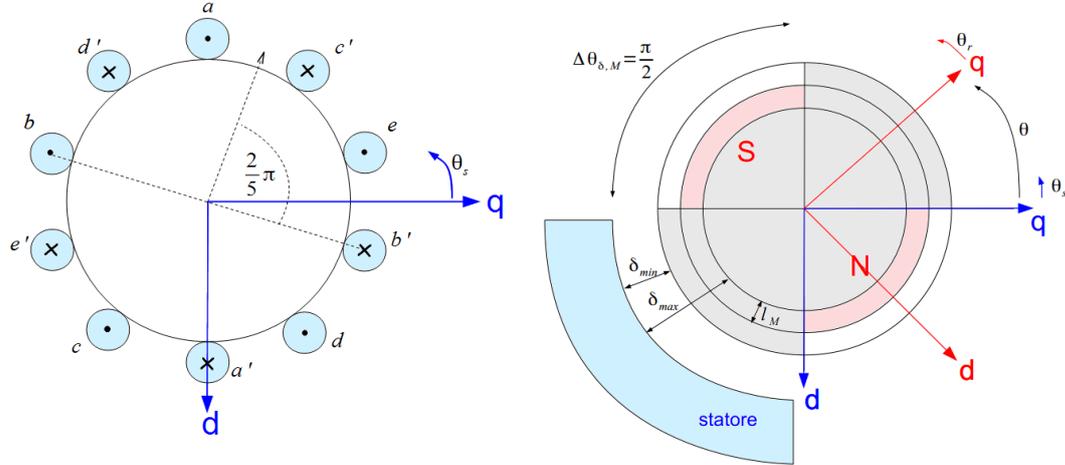


Figura 4.13: Macchina brushless pentafase anisotropa semplificata.

sistema di riferimento rotorico dalle (4.15) con  $\Delta\theta_{delta} = \frac{\pi}{2}$ , diventano:

$$\begin{aligned}
 g_0 &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\delta_{min}} + \frac{1}{\delta_{max}} \right) & g'_2 &= \frac{2}{\pi} \left( \frac{1}{\delta_{min}} - \frac{1}{\delta_{max}} \right) & g'_4 &= g'_8 = 0 \\
 g'_6 &= \frac{-2}{3\pi} \left( \frac{1}{\delta_{min}} - \frac{1}{\delta_{max}} \right) = -\frac{g'_2}{3}
 \end{aligned} \tag{4.27}$$

La distribuzione di densità lineare di corrente al traferro, considerando nella (4.5) solo le armoniche 1, 3 e 5 del suo sviluppo in serie, risulta:

$$\gamma(\theta_s, t) = \sum_{k_{odd}=1,3,5} \left\{ \Re \sum_{J=1}^5 [N_s \bar{\Gamma}_{Jk}(t) e^{-j(k\theta_s)}] \right\} \tag{4.28}$$

dove  $\bar{\Gamma}_{Jk}(t) = \frac{j2i_{sJ}(t)}{\pi R} \sin(k\frac{\pi}{2}) e^{j(k\theta_{sJ})}$ , relazione ricavata immediatamente dalla (4.4) ponendo  $\Delta\theta_{sJ} = \pi$ . Nella macchina descritta vale la relazione  $\theta_{sJ} = \frac{2}{5}\pi(J-1)$  con  $J = 1, 2, 3, 4, 5$ . Introducendo il numero complesso  $\bar{\alpha} = e^{-j\frac{2}{5}\pi}$  si ricava  $\bar{\Gamma}_{Jk}(t) = \frac{j2i_{sJ}(t)}{\pi R} \sin(k\frac{\pi}{2}) \bar{\alpha}^{k(J-1)}$ .

Introducendo l'espressione di  $\bar{\Gamma}_{Jk}(t)$  nella 4.28, si ottiene:

$$\begin{aligned}\gamma(\theta_s, t) &= \sum_{k_{odd}=1,3,5} \left\{ \Re \sum_{J=1}^5 [N_s \bar{\Gamma}_{Jk}(t) e^{-j(k\theta_s)}] \right\} = \\ &= \sum_{k_{odd}=1,3,5} \Re \left\{ \sum_{J=1}^5 \left[ N_s \frac{j2i_{sJ}(t)}{\pi R} \sin\left(k\frac{\pi}{2}\right) e^{j(k\frac{2}{5}\pi(J-1))} e^{-j(k\theta_s)} \right] \right\} = \\ &= \sum_{k_{odd}=1,3,5} \Re \left\{ \frac{j2N_s}{\pi R} \sin\left(k\frac{\pi}{2}\right) e^{-jk\theta_s} \left[ \sum_{J=1}^5 [i_{sJ}(t) \bar{\alpha}^{k(J-1)}] \right] \right\}\end{aligned}$$

Ora si nota che nell'equazione compaiono, a meno di una costante moltiplicativa, i vettori di spazio rappresentativi delle correnti statoriche definiti come nella (4.10) :  $i_{sh}^-(t) = \frac{2}{m} \sum_{J=1}^m i_{sJ}(t) e^{Jh\frac{2}{m}\pi(j-1)}$ . Dunque risulta evidente come sia possibile sostituire  $\sum_{J=1}^5 [i_{sJ}(t) \bar{\alpha}^{k(J-1)}] = \frac{5}{2} i_{sk}^-(t)$ .

I vettori di spazio rappresentativi delle correnti statoriche analizzati per il modello del motore in studio sono definiti come:

$$\begin{aligned}i_{s1}^- &= \frac{2}{5} (i_{sa} + i_{sb} \bar{\alpha} + i_{sc} \bar{\alpha}^2 + i_{sd} \bar{\alpha}^3 + i_{se} \bar{\alpha}^4) \\ i_{s3}^- &= \frac{2}{5} (i_{sa} + i_{sb} \bar{\alpha}^3 + i_{sc} \bar{\alpha} + i_{sd} \bar{\alpha}^4 + i_{se} \bar{\alpha}^2) \\ i_{s5}^- &= i_{s0} = \frac{2}{5} (i_{sa} + i_{sb} + i_{sc} + i_{sd} + i_{se})\end{aligned}\quad (4.29)$$

Per l'ipotesi fatta di considerare gli avvolgimenti collegati a stella, vale la relazione:  $i_{s5}^- = i_{s0} = 0$ .

Pertanto, l'espressione di  $\gamma(\theta_s, t)$  si può riscrivere come di seguito:

$$\begin{aligned}\gamma(\theta_s, t) &= \sum_{k_{odd}=1,3,5} \Re \left\{ \frac{j2N_s}{\pi R} \sin\left(k\frac{\pi}{2}\right) e^{-jk\theta_s} \frac{5}{2} i_{sk}^-(t) \right\} = \\ &= \sum_{k_{odd}=1,3,5} \Re \left\{ \frac{j5N_s}{\pi R} \sin\left(k\frac{\pi}{2}\right) i_{sk}^-(t) e^{-jk\theta_s} \right\} = \\ &= \Re \left\{ \frac{j5N_s}{\pi R} i_{s1}^-(t) e^{-j\theta_s} - \frac{j5N_s}{\pi R} i_{s3}^-(t) e^{-j3\theta_s} \right\} = \\ &= \Re \left\{ \bar{\gamma}_1(t) e^{-j(\theta_s)} + \bar{\gamma}_3(t) e^{-j(3\theta_s)} \right\}\end{aligned}$$

dunque le armoniche della distribuzione spaziale di densità di corrente sono associate ai vettori di spazio rappresentativi delle correnti statoriche dalle relazioni:

$$\bar{\gamma}_1(t) = \frac{j5N_s \bar{i}_{s1}(t)}{\pi R} \quad \wedge \quad \bar{\gamma}_3(t) = \frac{-j5N_s \bar{i}_{s3}(t)}{\pi R} \quad (4.30)$$

Tali equazioni espresse nel sistema di riferimento rotorico assumono la forma

$\bar{\gamma}'_k(t) = \bar{\gamma}_k(t)e^{-jk\theta(t)}$ , ossia:

$$\bar{\gamma}'_1(t) = \frac{j5N_s \bar{i}_{s1}(t)}{\pi R} e^{-j\theta(t)} \quad \wedge \quad \bar{\gamma}'_3(t) = \frac{-j5N_s \bar{i}_{s3}(t)}{\pi R} e^{-j3\theta(t)} \quad (4.31)$$

Il campo magnetico complessivo al traferro, espresso nel sistema di riferimento solidale con il rotore, e somma del contributo dovuto alle correnti statoriche con quello dei magneti permanenti, è descritto analiticamente dalla combinazione delle espressioni generali (4.18) e (4.23), di seguito riportate:

$$H(\theta_r, t) = \Re\{\bar{H}'_h(t)e^{-jh\theta_r}\}$$

in cui ciascuna armonica spaziale del campo si può ricondurre alla somma dei due contributi:

$$\bar{H}'_h(t) = \bar{H}'_h(t)_{correnti} + \bar{H}'_h(t)_{magneti}$$

dove si possono scrivere le due componenti esplicitandone l'espressione nelle forme:

$$\begin{aligned} \bar{H}'_h(t)_{correnti} &= \\ &= -jRg_0 \frac{\bar{\gamma}'_h(t)}{h} + \frac{1}{2} \sum_{i_{even}=2}^{\infty} \left[ \frac{-jR\bar{g}'_i \bar{\gamma}'_{h-i}(t)}{h-i} + \frac{+jR\bar{g}'_i \bar{\gamma}'_{i-h}(t)}{i-h} + \frac{-jR\bar{g}'_i \bar{\gamma}'_{i+h}(t)}{i+h} \right] \end{aligned}$$

e

$$\bar{H}'_h(t)_{magneti} = \frac{-4H_M}{\pi h} \sin\left(h \frac{\Delta\theta_M}{2}\right) e^{jh\frac{\pi}{2}} \quad \wedge \quad H_M = \frac{b_{Mr} l_M}{\mu_0 \delta_{max}}$$

dunque l'espressione complessiva del campo magnetico al traferro risulta:

$$\begin{aligned} H(\theta_r, t) &= \Re\left\{ \left( \frac{-4H_M}{\pi h} \sin\left(h \frac{\Delta\theta_M}{2}\right) e^{jh\frac{\pi}{2}} \right) e^{-jh\theta_r} - jRg_0 \frac{\bar{\gamma}'_h(t)}{h} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \sum_{i_{even}=2}^{\infty} \left[ \frac{-jR\bar{g}'_i \bar{\gamma}'_{h-i}(t)}{h-i} + \frac{+jR\bar{g}'_i \bar{\gamma}'_{i-h}(t)}{i-h} + \frac{-jR\bar{g}'_i \bar{\gamma}'_{i+h}(t)}{i+h} \right] \right\} \quad (4.32) \end{aligned}$$

Nel modello in studio le armoniche della distribuzione spaziale (4.27) dell'inverso del traferro sono delle costanti reali:  $\bar{g}'_i = \bar{g}'_i^* = g'_i$ . Inoltre, per la scelta di

analizzare nel modello solo le armoniche 1, 3 e 5 della densità lineare di corrente statorica ( $h = 1, 3, 5$ ) e per aver considerato gli avvolgimenti a stella, si avranno solo le componenti armoniche  $\bar{\gamma}_1$  e  $\bar{\gamma}_3$  da considerare per la descrizione della densità di corrente.

Ora risulta possibile scrivere l'espressione analitica delle armoniche di campo magnetico al traferro nel sistema di riferimento rotorico  $[\bar{H}'_1(t), \bar{H}'_3(t), \bar{H}'_5(t)]$  in funzione dei vettori di spazio delle correnti statoriche riferite a rotore  $\bar{i}'_{s1}(t) = \bar{i}_{s1}(t)e^{-j\theta}$  e  $\bar{i}'_{s3}(t) = \bar{i}_{s3}(t)e^{-j3\theta}$ .

Per quanto riguarda la prima armonica spaziale di campo al traferro si ha:

$$\begin{aligned}\bar{H}'_1(t) &= -\frac{4H_M}{\pi} \sin\left(\frac{\Delta\theta_M}{2}\right) e^{j\frac{\pi}{2}} - jRg_0\bar{\gamma}'_1(t) + \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{i_{even}=2}^{\infty} \left[ \frac{-jRg'_i\bar{\gamma}'_{1-i}(t)}{1-i} + \frac{+jRg'_i\bar{\gamma}'_{i-1}(t)}{i-1} + \frac{-jRg'_i\bar{\gamma}'_{i+1}(t)}{i+1} \right] = \\ &= -\frac{j4H_M}{\pi} \sin\left(\frac{\Delta\theta_M}{2}\right) - jRg_0\bar{\gamma}'_1(t) + \\ &+ \frac{1}{2} \left[ jRg'_2\bar{\gamma}'_1(t) - \frac{jRg'_2\bar{\gamma}'_3(t)}{3} + \frac{jRg'_4\bar{\gamma}'_3(t)}{3} \right]\end{aligned}$$

sostituendo le espressioni delle armoniche di distribuzione di corrente (4.31) si ottiene:

$$\begin{aligned}\bar{H}'_1(t) &= -jRg_0 \left( \frac{j5N_s}{\pi R} \bar{i}_{s1}(t) e^{-j\theta(t)} \right) + \frac{JRg'_2}{2} \left( -\frac{j5N_s}{\pi R} \bar{i}_{s1}^*(t) e^{j\theta(t)} \right) + \\ &- \frac{JRg'_2}{6} \left( -\frac{j5N_s}{\pi R} \bar{i}_{s3}(t) e^{-j3\theta(t)} \right) + \frac{JRg'_4}{6} \left( \frac{j5N_s}{\pi R} \bar{i}_{s3}^*(t) e^{j3\theta(t)} \right) - \frac{j4H_M}{\pi} \sin\left(\frac{\Delta\theta_M}{2}\right) = \\ &= \frac{5N_s g_0}{\pi} \bar{i}'_{s1}(t) + \frac{5N_s g'_2}{2\pi} \bar{i}'_{s1}{}^*(t) - \frac{5N_s g'_2}{6\pi} \bar{i}'_{s3}(t) + \\ &- \frac{5N_s g'_4}{6\pi} \bar{i}'_{s3}{}^*(t) - \frac{j4H_M}{\pi} \sin\left(\frac{\Delta\theta_M}{2}\right)\end{aligned}\tag{4.33}$$

Per la terza armonica spaziale di campo al traferro si ha:

$$\begin{aligned}\bar{H}'_3(t) &= -\frac{4H_M}{3\pi} \sin\left(\frac{3\Delta\theta_M}{2}\right) e^{j\frac{3\pi}{2}} - jRg_0 \frac{\bar{\gamma}'_3(t)}{3} + \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{i_{even}=2}^{\infty} \left[ \frac{-jRg'_i \bar{\gamma}'_{3-i}(t)}{3-i} + \frac{+jRg'_i \bar{\gamma}'_{i-3}(t)}{i-3} + \frac{-jRg'_i \bar{\gamma}'_{i+3}(t)}{i+3} \right] = \\ &= +\frac{j4H_M}{3\pi} \sin\left(\frac{3\Delta\theta_M}{2}\right) - jRg_0 \frac{\bar{\gamma}'_3(t)}{3} + \\ &+ \frac{1}{2} [-jRg'_2 \bar{\gamma}'_1(t) + jRg'_4 \bar{\gamma}'_1^*(t) + \frac{jRg'_6 \bar{\gamma}'_3^*(t)}{3}]\end{aligned}$$

procedendo come per  $\bar{H}'_1(t)$  si ottiene:

$$\begin{aligned}\bar{H}'_3(t) &= -\frac{5N_s g'_0}{3\pi} i_{s3}^{-'}(t) + \frac{5N_s g'_2}{2\pi} i_{s1}^{-'}(t) + \frac{5N_s g'_4}{2\pi} i_{s1}^{-'*(t)} - \frac{5N_s g'_6}{6\pi} i_{s3}^{-'*(t)} + \\ &+ \frac{j4H_M}{3\pi} \sin\left(\frac{3\Delta\theta_M}{2}\right)\end{aligned}\tag{4.34}$$

Per la quinta armonica spaziale di campo al traferro si ha infine:

$$\begin{aligned}\bar{H}'_5(t) &= -\frac{4H_M}{5\pi} \sin\left(\frac{5\Delta\theta_M}{2}\right) e^{j\frac{5\pi}{2}} - jRg_0 \frac{\bar{\gamma}'_5(t)}{5} + \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{i_{even}=2}^{\infty} \left[ \frac{-jRg'_i \bar{\gamma}'_{5-i}(t)}{5-i} + \frac{+jRg'_i \bar{\gamma}'_{i-5}(t)}{i-5} + \frac{-jRg'_i \bar{\gamma}'_{i+5}(t)}{i+5} \right] \\ &= \frac{1}{2} [-jRg'_2 \frac{\bar{\gamma}'_3(t)}{3} - jRg'_4 \bar{\gamma}'_1(t) + jRg'_6 \bar{\gamma}'_1^*(t) + jRg'_8 \frac{\bar{\gamma}'_3^*(t)}{3}] + \\ &- \frac{j4H_M}{5\pi} \sin\left(\frac{5\Delta\theta_M}{2}\right)\end{aligned}$$

procedendo come per  $\bar{H}'_1(t)$  ed  $\bar{H}'_3(t)$  risulta:

$$\begin{aligned}\bar{H}'_5(t) &= -\frac{5N_s g'_2}{6\pi} i_{s3}^{-'}(t) + \frac{5N_s g'_4}{2\pi} i_{s1}^{-'}(t) + \frac{5N_s g'_6}{2\pi} i_{s1}^{-'*(t)} - \frac{5N_s g'_8}{6\pi} i_{s3}^{-'*(t)} + \\ &- \frac{j4H_M}{5\pi} \sin\left(\frac{5\Delta\theta_M}{2}\right)\end{aligned}\tag{4.35}$$

L'espressione (4.26) del flusso concatenato con un generico avvolgimento statorico per la macchina pentafase in studio risulta:

$$\Phi_J(t) = N_s \mu_0 R^2 L \pi \sum_{k=1}^{\infty} \Re \left\{ -j \frac{\bar{\Lambda}_{Jk} \bar{H}'_k^*(t)}{k} e^{-jk\theta(t)} \right\}\tag{4.36}$$

dove  $\bar{\Lambda}_{Jk}$  viene definito nel seguente modo:

$$\bar{\Lambda}_{Jk} = \frac{\bar{\Gamma}_{Jk}(t)}{i_{sJ}(t)} = \frac{j2}{\pi R} \text{sen}\left(k\frac{\pi}{2}\right) e^{jk\frac{2}{5}\pi(J-1)} \quad (4.37)$$

I vettori di spazio rappresentativi dei flussi concatenati con gli avvolgimenti statorici risultano pertanto come di seguito.

Per la componente omopolare si ricava:

$$\begin{aligned} \phi'_0 = \phi_0 &= \frac{2}{5} \sum_{J=1}^5 \{\phi_J\} = \\ &= \frac{2}{5} \sum_{J=1}^5 N_s \mu_0 R^2 L \pi \sum_{k=1}^{\infty} \Re \left\{ -j \frac{\bar{\Lambda}_{Jk} \bar{H}'_k(t)}{k} e^{-jk\theta(t)} \right\} \\ &= \frac{2}{5} N_s \mu_0 R^2 L \pi \Re \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{J=1}^5 -j \frac{j2}{\pi R} \text{sen}\left(k\frac{\pi}{2}\right) e^{jk\frac{2}{5}\pi(J-1)} \frac{\bar{H}'_k(t)}{k} e^{-jk\theta(t)} \right\} \\ &= \frac{4}{5} N_s \mu_0 R L \Re \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\text{sen}\left(k\frac{\pi}{2}\right)}{k} \bar{H}'_k(t) e^{-jk\theta(t)} \left( \sum_{J=1}^5 e^{jk\frac{2}{5}\pi(J-1)} \right) \right\} \end{aligned}$$

dove  $\sum_{J=1}^5 e^{jk\frac{2}{5}\pi(J-1)} = 0$  sempre tranne che con  $k = 5$  e con  $\text{sen}\left(\frac{5\pi}{2}\right) = 1$ , e pertanto l'espressione diventa:

$$\phi'_0 = \frac{4}{5} N_s \mu_0 R L \Re \left\{ \frac{1}{5} \bar{H}'_5(t) e^{-j5\theta(t)} (5) \right\}$$

riscrivibile, considerando sempre valida l'uguaglianza  $\Re\{\bar{x}\} = \Re\{\bar{x}^*\}$ , nel seguente modo:

$$\phi'_0 = \frac{4}{5} N_s \mu_0 R L \Re \left\{ \bar{H}'_5(t) e^{j5\theta(t)} \right\} \quad (4.38)$$

Per il primo vettore di spazio si possono svolgere i seguenti passaggi:

$$\begin{aligned}
\bar{\phi}'_1(t) &= \bar{\phi}_1 e^{-j\theta(t)} = \frac{2}{5} \sum_{J=1}^5 \{ \phi_J e^{j\frac{2}{5}\pi(J-1)} e^{-j\theta(t)} \} = \\
&= \frac{2}{5} \sum_{J=1}^5 N_s \mu_0 R^2 L \pi \sum_{k=1}^{\infty} \Re \left\{ -j \frac{\bar{\Lambda}_{Jk} \bar{H}'_k(t) e^{-jk\theta(t)}}{k} \right\} e^{j\frac{2}{5}\pi(J-1)} e^{-j\theta(t)} \\
&= \frac{2}{5} N_s \mu_0 R^2 L \pi \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{J=1}^5 \left[ \frac{-j \left( \frac{\bar{\Lambda}_{Jk} \bar{H}'_k(t) e^{-jk\theta(t)}}{k} \right) + j \left( \frac{\bar{\Lambda}_{Jk}^* \bar{H}'_k(t) e^{jk\theta(t)}}{k} \right)}{2} \right] e^{j\frac{2}{5}\pi(J-1)} e^{-j\theta(t)} \\
&= \frac{1}{5} N_s \mu_0 R^2 L \pi \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{J=1}^5 \left[ -j \frac{\left( \frac{j2}{\pi R} \text{sen}\left(k\frac{\pi}{2}\right) e^{jk\frac{2}{5}\pi(J-1)} \right) \bar{H}'_k(t) e^{-jk\theta(t)}}{k} + \right. \\
&\quad \left. + j \frac{\left( \frac{-j2}{\pi R} \text{sen}\left(k\frac{\pi}{2}\right) e^{-jk\frac{2}{5}\pi(J-1)} \right) \bar{H}'_k(t) e^{jk\theta(t)}}{k} \right] e^{j\frac{2}{5}\pi(J-1)} e^{-j\theta(t)} \\
&= \frac{2}{5} N_s \mu_0 R L e^{-j\theta(t)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\text{sen}\left(k\frac{\pi}{2}\right)}{k} \left[ \sum_{J=1}^5 e^{j\frac{2}{5}\pi(J-1)(k+1)} \bar{H}'_k(t) e^{-jk\theta(t)} + \right. \\
&\quad \left. + e^{-j\frac{2}{5}\pi(J-1)(k-1)} \bar{H}'_k(t) e^{jk\theta(t)} \right]
\end{aligned}$$

dove, tenendo conto del fatto che  $\sum_{J=1}^5 e^{j\frac{2}{5}\pi(J-1)(k\pm 1)} = 5$  solo se  $k = \pm 1$  ( $k =$  dispari per ipotesi), altrimenti  $\sum_{J=1}^5 e^{j\frac{2}{5}\pi(J-1)(k\pm 1)} = 0$ , resta solo l'esponenziale  $e^{\dots(k-1)}$  con  $k = 1$ . Dunque l'espressione diventa:

$$\bar{\phi}'_1(t) = \frac{2}{5} N_s \mu_0 R L e^{-j\theta(t)} \frac{\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)}{1} [5 \bar{H}'_1(t) e^{j\theta(t)}] = 2 N_s \mu_0 R L \bar{H}'_1 \quad (4.39)$$

Per il terzo vettore di spazio, infine, vengono percorsi i seguenti passaggi:

$$\begin{aligned}
\bar{\phi}'_3(t) &= \bar{\phi}_3 e^{-j3\theta(t)} = \frac{2}{5} \sum_{J=1}^5 \{ \phi_J e^{-j\frac{2}{5}3\pi(J-1)} e^{-j3\theta} \} = \\
&= \frac{2}{5} \sum_{J=1}^5 N_s \mu_0 R^2 L \pi \sum_{k=1}^{\infty} \Re \left\{ -j \frac{\bar{\Lambda}_{Jk} \bar{H}'_k(t) e^{-jk\theta(t)}}{k} \right\} e^{j\frac{6}{5}\pi(J-1)} e^{-j3\theta(t)} = \\
&= \frac{2}{5} N_s \mu_0 R^2 L \pi \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{J=1}^5 \left[ \frac{-j \left( \frac{\bar{\Lambda}_{Jk} \bar{H}'_k(t) e^{-jk\theta(t)}}{k} \right)}{2} + j \left( \frac{\bar{\Lambda}_{Jk}^* \bar{H}'_k(t) e^{jk\theta(t)}}{k} \right) \right] e^{j\frac{6}{5}\pi(J-1)} e^{-j3\theta(t)} = \\
&= \frac{2}{5} N_s \mu_0 R^2 L \pi e^{-j3\theta(t)} \times \\
&\quad \times \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{J=1}^5 \Re \left\{ -j \frac{\left( \frac{j2}{\pi R} \text{sen}(k\frac{\pi}{2}) e^{jk\frac{2}{5}\pi(J-1)} \right) \bar{H}'_k(t) e^{-jk\theta(t)}}{k} \right\} e^{j\frac{6}{5}\pi(J-1)} = \\
&= \frac{2}{5} N_s \mu_0 R L e^{-j3\theta(t)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\text{sen}(k\frac{\pi}{2})}{k} \left[ \sum_{J=1}^5 e^{j\frac{2}{5}\pi(J-1)(k+3)} \bar{H}'_k(t) e^{-jk\theta(t)} + \right. \\
&\quad \left. + e^{-j\frac{2}{5}\pi(J-1)(k-3)} \bar{H}'_k(t) e^{jk\theta(t)} \right]
\end{aligned}$$

dove, essendo  $\sum_{J=1}^5 e^{j\frac{2}{5}\pi(J-1)(k\pm 3)} = 5$  solo se  $k = \pm 3$  ( $k = \text{dispari}$  per ipotesi) altrimenti  $\sum_{J=1}^5 e^{j\frac{2}{5}\pi(J-1)(k\pm 3)} = 0$ , in questo caso resta solo l'esponenziale con  $e^{\dots(k-3)}$  con  $k = 3$ , dando luogo alla seguente espressione:

$$\bar{\phi}'_3(t) = \frac{2}{5} N_s \mu_0 R L e^{-j3\theta(t)} \frac{\text{sen}(3\frac{\pi}{2})}{3} [5 \bar{H}'_3(t) e^{j3\theta(t)}] = -\frac{2}{3} N_s \mu_0 R L \bar{H}'_3 \quad (4.40)$$

Le espressioni (4.33), (4.34) e (4.35) delle armoniche di campo magnetico al traferro, introducendo le relazioni semplificate (4.27) che descrivono l'anisotropia della macchina in studio nelle ipotesi fatte, assumono la seguente forma:

$$\begin{aligned}
\bar{H}'_1(t) &= \frac{5N_s g_0}{\pi} i_{s1}^{-'}(t) + \frac{5N_s g'_2}{2\pi} i_{s1}^{-'*(t)} - \frac{5N_s g'_2}{6\pi} i_{s3}^{-'}(t) - \frac{j4H_M}{\pi} \sin\left(\frac{\Delta\theta_M}{2}\right) \\
\bar{H}'_3(t) &= -\frac{5N_s g_0}{3\pi} i_{s3}^{-'}(t) + \frac{5N_s g'_2}{2\pi} i_{s1}^{-'}(t) - \frac{5N_s g'_2}{18\pi} i_{s3}^{-'*(t)} + \frac{j4H_M}{3\pi} \sin\left(\frac{3\Delta\theta_M}{2}\right) \\
\bar{H}'_5(t) &= -\frac{5N_s g'_2}{6\pi} i_{s3}^{-'}(t) - \frac{5N_s g'_2}{6\pi} i_{s1}^{-'*(t)} - \frac{j4H_M}{5\pi} \sin\left(\frac{5\Delta\theta_M}{2}\right)
\end{aligned} \quad (4.41)$$

Sostituendo le espressioni delle armoniche del campo magnetico (4.41) in quelle delle armoniche dei flussi concatenati con gli avvolgimenti statorici riferiti a rotore

(4.38), (4.39) e (4.40) ed introducendo la costante  $K = \mu_0 RL \frac{4N_s^2}{\pi^2}$  (in accordo con la trattazione proposta in [7]), si ha per lo spazio 1:

$$\begin{aligned}
\bar{\phi}'_1(t) &= 2N_s\mu_0RL\bar{H}'_1 = \\
&= \frac{5N_s g_0}{\pi} i_{s1}^{-\prime}(t) + \frac{5N_s g'_2}{2\pi} i_{s1}^{-\prime*}(t) - \frac{5N_s g'_2}{6\pi} i_{s3}^{-\prime}(t) - \frac{j4H_M}{\pi} \sin\left(\frac{\Delta\theta_M}{2}\right) = \\
&= \frac{10N_s^2\mu_0RLg_0}{\pi} i_{s1}^{-\prime}(t) + \frac{10N_s^2\mu_0RLg'_2}{2\pi} i_{s1}^{-\prime*}(t) + \\
&\quad - \frac{10N_s^2\mu_0RLg'_2}{6\pi} i_{s3}^{-\prime}(t) - \frac{j8H_M N_s\mu_0RL}{\pi} \sin\left(\frac{\Delta\theta_M}{2}\right) = \\
&= \frac{5\pi}{2} K g_0 i_{s1}^{-\prime}(t) + \frac{5\pi}{4} K g'_2 i_{s1}^{-\prime*}(t) - \frac{5\pi}{12} K g'_2 i_{s3}^{-\prime}(t) - \frac{j8H_M N_s\mu_0RL}{\pi} \sin\left(\frac{\Delta\theta_M}{2}\right)
\end{aligned} \tag{4.42}$$

e per lo spazio 3:

$$\begin{aligned}
\bar{\phi}'_3(t) &= -\frac{2}{3}N_s\mu_0RL\bar{H}'_3 = \\
&= +\frac{10N_s^2\mu_0RLg_0}{9\pi} i_{s3}^{-\prime}(t) - \frac{5N_s^2\mu_0RLg'_2}{3\pi} i_{s1}^{-\prime}(t) + \\
&\quad - \frac{5N_s^2\mu_0RLg'_2}{27\pi} i_{s3}^{-\prime*}(t) - \frac{j8H_M N_s\mu_0RL}{9\pi} \sin\left(\frac{3\Delta\theta_M}{2}\right) = \\
&= +\frac{5\pi}{18} K g_0 i_{s3}^{-\prime}(t) - \frac{5\pi}{12} K g'_2 i_{s1}^{-\prime}(t) - \frac{5\pi}{108} K g'_2 i_{s3}^{-\prime*}(t) - \frac{j8H_M N_s\mu_0RL}{9\pi} \sin\left(\frac{3\Delta\theta_M}{2}\right)
\end{aligned} \tag{4.43}$$

Scomponendo i vettori di spazio rispetto agli assi dq rotorici  $\bar{X}_k = X_{qk} - j X_{dk}$ , ossia  $\bar{\Phi}_k = \Phi_{qk} - j \Phi_{dk}$  e  $\bar{i}'_{sk} = i_{qk} - j i_{dk}$  si ottengono le espressioni seguenti:

$$\begin{aligned}
\phi_{q1} &= +\Re\{\bar{\phi}'_1(t)\} = \frac{5}{2}K\pi\left(g_0 + \frac{g'_2}{2}\right)i_{q1} - \frac{5}{2}K\pi\left(\frac{g'_2}{6}\right)i_{q3} \\
\phi_{d1} &= -\Im\{\bar{\phi}'_1(t)\} = \frac{5}{2}K\pi\left(g_0 - \frac{g'_2}{2}\right)i_{d1} - \frac{5}{2}K\pi\left(\frac{g'_2}{6}\right)i_{d3} \\
\phi_{q3} &= +\Re\{\bar{\phi}'_3(t)\} = \frac{5}{18}K\pi\left(g_0 - \frac{g'_2}{6}\right)i_{q3} - \frac{5}{2}K\pi\left(\frac{g'_2}{6}\right)i_{q1} \\
\phi_{d3} &= -\Im\{\bar{\phi}'_3(t)\} = \frac{5}{18}K\pi\left(g_0 + \frac{g'_2}{6}\right)i_{d3} - \frac{5}{2}K\pi\left(\frac{g'_2}{6}\right)i_{d1}
\end{aligned} \tag{4.44}$$

Aggiungendo le induttanze di dispersione è possibile scrivere:

$$\begin{aligned}
 \phi_{q1} &= L_{q1}i_{q1} - L_{13}i_{q3} + L_{ls1}i_{q1} \\
 \phi_{d1} &= L_{d1}i_{d1} - L_{13}i_{d3} + \phi_{Md1} + L_{ls1}i_{d1} \\
 \phi_{q3} &= L_{q3}i_{q3} - L_{13}i_{q1} + L_{ls3}i_{q3} \\
 \phi_{d3} &= L_{d3}i_{d3} - L_{13}i_{d1} + \phi_{Md3} + L_{ls3}i_{d3}
 \end{aligned} \tag{4.45}$$

dove, considerando ancora valida l'espressione  $K = \mu_0 R L A \frac{N_s^2}{\pi^2}$ , le induttanze di auto e mutua induzione assumono la forma:

$$\begin{aligned}
 L_{q1} &= \frac{5}{2} K \pi [g_0 + \frac{g'_2}{2}] \\
 L_{d1} &= \frac{5}{2} K \pi [g_0 - \frac{g'_2}{2}] \\
 L_{q3} &= \frac{5}{18} K \pi [g_0 - \frac{g'_2}{6}] \\
 L_{d3} &= \frac{5}{18} K \pi [g_0 + \frac{g'_2}{6}] \\
 L_{13} &= \frac{5}{2} K \pi [\frac{g'_2}{6}]
 \end{aligned} \tag{4.46}$$

Le componenti dei flussi concatenati dovute ai magneti permanenti si presentano come:

$$\begin{aligned}
 \phi_{Md1} &= \frac{8\mu_0 R L N_s h_M}{\pi} \sin\left(\frac{\Delta\theta_M}{2}\right) \\
 \phi_{Md3} &= \frac{8\mu_0 R L N_s h_M}{9\pi} \sin\left(\frac{3\Delta\theta_M}{2}\right)
 \end{aligned} \tag{4.47}$$

A questo punto della trattazione occorre riprendere un discorso iniziato precedentemente riguardante l'influenza del numero di coppie di poli ( $p$ ) di una macchina elettrica. Come si era affermato, il campo magnetico al traferro e le geometrie di macchina (traferro, avvolgimenti statorici e magneti permanenti), nelle ipotesi considerate, si ripetono identicamente all'interno di ogni coppia di poli. Pertanto il flusso concatenato con una fase di una macchina a  $p$  coppie polari altro non è che  $p$  volte quello concatenato con gli avvolgimenti di tale fase all'interno di una coppia polare. Questa affermazione equivale a riscrivere le espressioni delle induttanze di macchina, imponendo che  $K$  assuma la forma  $K = p\mu_0 R L A \frac{N_s^2}{\pi^2}$ , e dei flussi

concatenati associati ai magneti permanenti, con  $\phi_{Md1} = p \frac{8\mu_0 RL N_s h_M}{\pi} \sin\left(\frac{\Delta\theta_M}{2}\right)$  e  $\phi_{Md3} = p \frac{8\mu_0 RL N_s h_M}{9\pi} \sin\left(\frac{3\Delta\theta_M}{2}\right)$ .

Introducendo la resistenza  $r_s$  degli avvolgimenti statorici, l'equazione di macchina per la generica fase  $J_{esima}$  risulta:

$$v_J = r_s i_J + \frac{d\phi_J}{dt} \quad (4.48)$$

Si può riscrivere l'espressione per il vettore di spazio  $k_{esimo}$  come:

$$\begin{aligned} \bar{v}_k &= \frac{2}{5} \sum_{J=1}^5 v_J \bar{\alpha}^{k(J-1)} =_{4.48} \frac{2}{5} \sum_{J=1}^5 \left[ r_s i_J + \frac{d\phi_J}{dt} \right] \bar{\alpha}^{k(J-1)} = \\ &= \frac{2}{5} r_s \sum_{J=1}^5 i_J \bar{\alpha}^{k(J-1)} + \frac{2}{5} r_s \sum_{J=1}^5 \frac{d\phi_J}{dt} \bar{\alpha}^{k(J-1)} = \\ &= r_s \bar{i}_k + \frac{d\bar{\Phi}}{dt} \end{aligned} \quad (4.49)$$

dunque, nei diversi spazi, le equazioni di macchina sono:

$$\bar{v}_1 = r_s \bar{i}_1 + \frac{d\bar{\phi}_1}{dt} \quad \bar{v}_3 = r_s \bar{i}_3 + \frac{d\bar{\phi}_3}{dt} \quad v_0 = \frac{d\phi_0}{dt} \quad (4.50)$$

Riferendosi alle componenti sugli assi dq rotorici nel sistema di riferimento solido con il rotore, le (4.50) diventano:

$$\begin{aligned} v_{q1} &= r_s i_{q1} + \omega \phi_{d1} + \frac{d\phi_{q1}}{dt} \\ v_{d1} &= r_s i_{d1} - \omega \phi_{q1} + \frac{d\phi_{d1}}{dt} \\ v_{q3} &= r_s i_{q3} + 3\omega \phi_{d3} + \frac{d\phi_{q3}}{dt} \\ v_{d3} &= r_s i_{d3} - 3\omega \phi_{q3} + \frac{d\phi_{d3}}{dt} \\ v_0 &= \frac{d\phi_0}{dt} \end{aligned} \quad (4.51)$$

## 4.7 Espressione della coppia elettromagnetica

Il primo metodo utilizzato per ricavare l'espressione analitica della coppia elettromagnetica è stato quello di analizzare la variazione della coenergia magnetica

rispetto alla posizione relativa tra rotore e statore. Le difficoltà trovate nel definire la coenergia magnetica, la complicazione dei passaggi analitici nello svolgimento, la necessità di effettuare molteplici approssimazioni durante i passaggi e l'aver trovato dei risultati finali discordi da quelli presenti in letteratura hanno spinto ad abbandonare tale approccio alla soluzione. La seconda scelta, più semplice ed intuitiva, è stata quella di ricavare la coppia elettromagnetica dall'espressione della potenza elettrica istantanea assorbita dalla macchina.

La potenza elettrica istantanea in ingresso ad una macchina pentafase, attraverso gli avvolgimenti statorici, può essere scritta come:

$$p(t) = \sum_{J=1}^5 v_J(t) i_J(t) \quad (4.52)$$

Conviene a questo punto esplicitare le grandezze elettriche mediante i rispettivi vettori di spazio rappresentativi, nella forma:

$$\begin{aligned} v_J(t) &= \frac{1}{2} v_0(t) + \sum_{h=1,3} \bar{v}_h(t) \cdot \alpha^{(J-1)h} \\ i_J(t) &= \sum_{h=1,3} \bar{i}_h(t) \cdot \alpha^{(J-1)h} \end{aligned} \quad (4.53)$$

Sostituendo le (4.53) nell'espressione della potenza istantanea (4.52), si ottiene l'espressione:

$$\begin{aligned} p(t) &= \sum_{J=1}^5 v_J(t) i_J(t) = \\ &= \sum_{J=1}^5 \left[ \frac{1}{2} v_0(t) + \sum_{h=1,3} \bar{v}_h(t) \cdot \alpha^{(J-1)h} \right] \left[ \sum_{h=1,3} \bar{i}_h(t) \cdot \alpha^{(J-1)h} \right] = \\ &= \frac{1}{2} v_0(t) \sum_{J=1}^5 [\bar{i}_1(t) \cdot \alpha^{(J-1)} + \bar{i}_3(t) \cdot \alpha^{3(J-1)}] + \\ &+ \sum_{J=1}^5 [\bar{v}_1(t) \cdot \alpha^{(J-1)} + \bar{v}_3(t) \cdot \alpha^{3(J-1)}] [\bar{i}_1(t) \cdot \alpha^{(J-1)} + \bar{i}_3(t) \cdot \alpha^{3(J-1)}] \end{aligned}$$

$$\text{con } \sum_{J=1}^5 \alpha^{(J-1)} = \sum_{J=1}^5 \alpha^{3(J-1)} = 1 + \bar{\alpha} + \bar{\alpha}^2 + \bar{\alpha}^3 + \bar{\alpha}^4 = 0:$$

$$p(t) = \sum_{J=1}^5 [\bar{v}_1(t) \cdot \alpha^{(J-1)} + \bar{v}_3(t) \cdot \alpha^{3(J-1)}] [\bar{i}_1(t) \cdot \alpha^{(J-1)} + \bar{i}_3(t) \cdot \alpha^{3(J-1)}]$$

Svolgendo i calcoli, tenendo conto che  $\bar{x} \cdot \bar{y} = \frac{1}{2}[\bar{x}^* \bar{y} + \bar{x} \bar{y}^*]$  e viceversa, si ha:

$$\begin{aligned} p(t) &= \frac{5}{4}[\bar{v}_1^* \bar{i}_1 + \bar{v}_1 \bar{i}_1^* + \bar{v}_3^* \bar{i}_3 + \bar{v}_3 \bar{i}_3^*] = \\ &= \frac{5}{2}[\bar{v}_1 \cdot \bar{i}_1 + \bar{v}_3 \cdot \bar{i}_3] \end{aligned} \quad (4.54)$$

Sostituendo nell'espressione (4.54) appena trovata le espressioni dei vettori di spazio delle tensioni (4.53) risulta:

$$\begin{aligned} p(t) &= \frac{5}{2}[(r_s \bar{i}_1 + \frac{d\bar{\phi}_1}{dt}) \cdot \bar{i}_1 + (r_s \bar{i}_3 + \frac{d\bar{\phi}_3}{dt}) \cdot \bar{i}_3] = \\ &= \frac{5}{2}[r_s i_1^2 + r_s i_3^2] + \frac{5}{2}[\frac{d\bar{\phi}_1}{dt} \cdot \bar{i}_1 + \frac{d\bar{\phi}_3}{dt} \cdot \bar{i}_3] = \\ &= \frac{5}{2}[r_s i_1^2 + r_s i_3^2] + \frac{5}{2}[\frac{d(\bar{\phi}'_1 e^{j\theta})}{dt} \cdot (\bar{i}'_1 e^{j\theta}) + \frac{d(\bar{\phi}'_3 e^{j3\theta})}{dt} \cdot (\bar{i}'_3 e^{j3\theta})] \end{aligned}$$

Considerando che  $\bar{x} e^{j\theta} \cdot \bar{y} e^{j\theta} = \frac{1}{2}[\bar{x}^* e^{-j\theta} \bar{y} e^{j\theta} + \bar{x} e^{j\theta} \bar{y}^* e^{-j\theta}] = \frac{1}{2}[\bar{x}^* \bar{y} + \bar{x} \bar{y}^*] = \bar{x} \cdot \bar{y}$  e omettendo per ora il termine  $\frac{5}{2}[r_s i_1^2 + r_s i_3^2]$ , l'espressione della potenza elettrica istantanea si può ulteriormente scrivere come:

$$\begin{aligned} p(t) &= \dots + \frac{5}{2}[(\frac{d\bar{\phi}'_1}{dt} e^{j\theta}) \cdot (\bar{i}'_1 e^{j\theta}) + (j\omega \bar{\phi}'_1 e^{j\theta}) \cdot (\bar{i}'_1 e^{j\theta}) + \\ &+ (\frac{d\bar{\phi}'_3}{dt} e^{j3\theta}) \cdot (\bar{i}'_3 e^{j3\theta}) + (j3\omega \bar{\phi}'_3 e^{j3\theta}) \cdot (\bar{i}'_3 e^{j3\theta})] = \\ &= \dots + \frac{5}{2}[(\frac{d\bar{\phi}'_1}{dt}) \cdot (\bar{i}'_1) + (j\omega \bar{\phi}'_1) \cdot (\bar{i}'_1) + (\frac{d\bar{\phi}'_3}{dt}) \cdot (\bar{i}'_3) + (j3\omega \bar{\phi}'_3) \cdot (\bar{i}'_3)] \end{aligned}$$

Esplicitando le componenti sugli assi dq rotorici diventa:

$$\begin{aligned} p(t) &= \dots + \frac{5}{2}[\frac{d\bar{\phi}'_1}{dt} \cdot \bar{i}'_1 + j\omega \bar{\phi}'_1 \cdot \bar{i}'_1 + \frac{d\bar{\phi}'_3}{dt} \cdot \bar{i}'_3 + j3\omega \bar{\phi}'_3 \cdot \bar{i}'_3] \\ &= \dots + \frac{5}{2}[\frac{d(\phi_{q1} - j\phi_{d1})}{dt} \cdot (i_{q1} - j i_{d1}) + j\omega(\phi_{q1} - j\phi_{d1}) \cdot (i_{q1} - j i_{d1}) + \\ &+ \frac{d(\phi_{q3} - j\phi_{d3})}{dt} \cdot (i_{q3} - j i_{d3}) + j3\omega(\phi_{q3} - j\phi_{d3}) \cdot (i_{q3} - j i_{d3})] \end{aligned}$$

Trascurando i flussi dispersi [ $L_{ls1} = 0$ ;  $L_{ls3} = 0$ ], i quali non contribuiscono alla coppia prodotta dalla macchina, risulta:

$$\begin{aligned}
 p(t) &= \dots + \frac{5}{2} \left[ \frac{d\phi_{q1}}{dt} i_{q1} + \frac{d\phi_{d1}}{dt} i_{d1} + \frac{d\phi_{q3}}{dt} i_{q3} + \frac{d\phi_{d3}}{dt} i_{d3} + \right. \\
 &\quad \left. + \omega \phi_{d1} i_{q1} - \omega \phi_{q1} i_{d1} + 3\omega \phi_{d3} i_{q3} - \omega \phi_{q3} i_{d3} \right] = \\
 &= \dots + \frac{5}{2} \left[ \frac{d(L_{q1} i_{q1} - L_{13} i_{q3})}{dt} i_{q1} + \frac{d(L_{d1} i_{d1} - L_{13} i_{d3} + \phi_{Md1})}{dt} i_{d1} + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{d(L_{q3} i_{q3} - L_{13} i_{q1})}{dt} i_{q3} + \frac{d(L_{d3} i_{d3} - L_{13} i_{d1} + \phi_{Md3})}{dt} i_{d3} + \right. \\
 &\quad \left. + \omega (L_{d1} i_{d1} - L_{13} i_{d3} + \phi_{Md1}) i_{q1} - \omega (L_{q1} i_{q1} - L_{13} i_{q3}) i_{d1} + \right. \\
 &\quad \left. + 3\omega (L_{d3} i_{d3} - L_{13} i_{d1} + \phi_{Md3}) i_{q3} - 3\omega (L_{q3} i_{q3} - L_{13} i_{q1}) i_{d3} \right]
 \end{aligned}$$

Riordinando e tenendo conto dei termini omissi precedentemente si giunge alla seguente espressione della potenza elettrica istantanea:

$$\begin{aligned}
 p(t) &= \frac{5}{2} [r_s i_1^2 + r_s i_3^2] + \\
 &\quad + \frac{5}{2} \left\{ \left[ \frac{d}{dt} \left[ \frac{1}{2} L_{q1} i_{q1}^2 + \frac{1}{2} L_{d1} i_{d1}^2 + \frac{1}{2} L_{q3} i_{q3}^2 + \frac{1}{2} L_{d3} i_{d3}^2 \right] + \frac{d}{dt} [-L_{13} (i_{q3} i_{q1} + i_{d3} i_{d1})] \right] + \right. \\
 &\quad \left. + \omega [i_{d1} i_{q1} (L_{d1} - L_{q1}) + 3 i_{d3} i_{q3} (L_{d3} - L_{q3}) + \right. \\
 &\quad \left. + L_{13} (i_{d1} i_{q3} - i_{q1} i_{d3} + 3 i_{d3} i_{q1} - 3 i_{q3} i_{d1}) \right] \\
 &\quad \left. + \omega [\phi_{Md1} i_{q1} + 3 \phi_{Md3} i_{q3}] \right\}
 \end{aligned} \tag{4.55}$$

Dal bilancio della potenza si può scrivere:

$$p = p_{Joule} + \frac{dW_{magnetica}}{dt} + p_{elettromeccanica} \tag{4.56}$$

dove i tre termini di potenza possono essere individuati dalle componenti sugli assi dq rotorici delle grandezze elettriche, trascurando le induttanze di dispersione statoriche, come nell'equazione (4.55), fornendo le relazioni seguenti:

$$p_{Joule} = \frac{5}{2} [r_s i_1^2 + r_s i_3^2] \quad \text{con} \quad i_1 = \sqrt{i_{d1}^2 + i_{q1}^2} \quad e \quad i_3 = \sqrt{i_{d3}^2 + i_{q3}^2}$$

$$\frac{dW_{magnetica}}{dt} = \frac{5}{2} \frac{d}{dt} \left[ \frac{1}{2} (L_{q1} i_{q1}^2 + L_{d1} i_{d1}^2 + L_{q3} i_{q3}^2 + L_{d3} i_{d3}^2) - L_{13} (i_{q3} i_{q1} + i_{d3} i_{d1}) \right]$$

$$\begin{aligned}
P_{\text{elettromeccanica}} &= P_{\text{em, riluttanza}} + P_{\text{em, principale}} \\
P_{\text{em, riluttanza}} &= \frac{5}{2}\omega [i_{d1}i_{q1}(L_{d1} - L_{q1}) + 3i_{d3}i_{q3}(L_{d3} - L_{q3}) + \\
&\quad + L_{13}(i_{d1}i_{q3} - i_{q1}i_{d3} + 3i_{d3}i_{q1} - 3i_{q3}i_{d1})] \\
P_{\text{em, principale}} &= \frac{5}{2}\omega [\phi_{Md1}i_{q1} + 3\phi_{Md3}i_{q3}]
\end{aligned}$$

Dall'espressione della potenza elettromeccanica istantanea, si ricava immediatamente la coppia elettromeccanica come  $C_{em} = \frac{p_{em}}{\omega_m}$  con  $\omega_m = \frac{\omega}{p}$  e  $p = n$ . coppie di poli:

$$\begin{aligned}
C_{em} &= C_{\text{em, riluttanza}} + C_{\text{em, principale}} \\
C_{\text{em, riluttanza}} &= \frac{5}{2}p [i_{d1}i_{q1}(L_{d1} - L_{q1}) + 3i_{d3}i_{q3}(L_{d3} - L_{q3}) + \\
&\quad + L_{13}(i_{d1}i_{q3} - i_{q1}i_{d3} + 3i_{d3}i_{q1} - 3i_{q3}i_{d1})] \\
C_{\text{em, principale}} &= \frac{5}{2}p [\phi_{Md1}i_{q1} + 3\phi_{Md3}i_{q3}]
\end{aligned}$$

Quindi l'espressione completa della coppia di una macchina brushless pentafase anisotropa, in accordo con [7], risulta:

$$\begin{aligned}
C_{em} &= \frac{5}{2}p [i_{d1}i_{q1}(L_{d1} - L_{q1}) + 3i_{d3}i_{q3}(L_{d3} - L_{q3}) + \\
&\quad + L_{13}(i_{d1}i_{q3} - i_{q1}i_{d3} + 3i_{d3}i_{q1} - 3i_{q3}i_{d1})] + \\
&\quad + \frac{5}{2}p [\phi_{Md1}i_{q1} + 3\phi_{Md3}i_{q3}]
\end{aligned} \tag{4.57}$$

## 4.8 Applicazione del modello ad una macchina tubolare

Descrivere analiticamente una macchina lineare risulta estremamente complesso e probabilmente impossibile senza effettuare opportune approssimazioni. Quello che viene comunemente fatto in letteratura (come ad esempio in [8], [4], [5] e [6]) è di utilizzare il modello di una macchina rotativa ed aggiungere le peculiarità del funzionamento delle macchine lineari come sovrapposizione degli effetti. Ad

esempio in [8] viene considerato l'effetto di estremità per una macchina trifase con una sola cava per ogni fase, quindi con un contributo di questo fenomeno sul funzionamento della macchina molto significativo. In questo caso viene evidenziata la differenza tra le mutue induttanze tra le fasi statoriche aggiungendo un termine costante a quelle maggiori. Nella macchina tubolare in studio, se venissero introdotte le differenze tra le mutue induttanze dovute all'effetto di estremità, andrebbero introdotte più costanti, poiché lo statore è pentafase, ed il modello si complicherebbe molto. Inoltre, la macchina analizzata presenta 7 coppie di poli  $N_p = 14$ , pertanto le mutue induttanze risultano intuitivamente più simili tra loro rispetto a quelle in [8].

La scelta è stata quindi quella di sfruttare il modello di una macchina pentafase anisotropa a magneti permanenti rotativa per descrivere quella tubolare utilizzata in fase sperimentale. Un'ulteriore semplificazione è stata quella di non analizzare nel modello la presenza di avvolgimenti frazionari. Queste approssimazioni sono state indispensabili per poter elaborare un algoritmo sensorless di stima della posizione, come mostrato nel seguente capitolo.



# Capitolo 5

## Algoritmo di stima della posizione sensorless

In questo capitolo viene presentato in maniera dettagliata l'algoritmo sensorless di stima della posizione rotorica. Dopo una brevissima introduzione all'argomento, sono spiegati i vantaggi nell'utilizzare un sistema di controllo sensorless nella gestione di un azionamento (paragrafo 2). Nel terzo paragrafo sono elencati, e descritti brevemente, i principali algoritmi sensorless utilizzati nelle macchine elettriche brushless a magneti permanenti. Il quarto paragrafo è incentrato sullo sviluppo analitico di tutte le equazioni necessarie all'implementazione del metodo proposto. Questa è la parte più importante del capitolo, nella quale vengono inizialmente svolti i passaggi per una macchina trifase, per poi estenderli al caso pentafase sullo spazio 3. Negli ultimi paragrafi è spiegato come l'algoritmo sia stato applicato alla macchina tubolare su cui sono state condotte le prove sperimentali, mostrando le criticità del metodo e giustificandone le approssimazioni.

### 5.1 Introduzione

Esistono diversi sensori di grandezze elettriche, meccaniche o termodinamiche, ma quando si parla di azionamenti sensorless ci si riferisce in genere all'intro-

duzione di un metodo di stima della posizione e/o della velocità del rotore di un motore, controllato in coppia in modo vettoriale, senza la necessità di trasduttori rispettivamente di posizione e/o di velocità (dinamo tachimetriche, encoder ottici, sonde hall ecc.).

Lo scopo della tesi in esame è quello di sviluppare un algoritmo di controllo di posizione sensorless adatto ad una macchina tubolare anisotropa pentafase a magneti permanenti. Per poter procedere all'individuazione di un algoritmo adatto a tale azionamento, è conveniente analizzare le equazioni che ne descrivono il comportamento elettromagnetico ed elettromeccanico; partendo da casi più semplici (ad esempio quello di una macchina trifase rotativa brushless a magneti superficiali), per poi estendere via via l'algoritmo ad una macchina pentafase ed infine tubolare.

## **5.2 Peculiarità di un controllo di posizione sensorless**

I vantaggi che si possono avere nell'implementare un algoritmo sensorless di stima della posizione in un generico azionamento possono essere molteplici. La possibilità di eliminare il trasduttore di posizione ne riduce sicuramente la complessità hardware e l'ingombro. Il costo di un azionamento sensorless, sia dei componenti che dell'installazione, può essere notevolmente minore (in alcuni casi l'onere del trasduttore può essere superiore a quello dell'intero azionamento). L'immunità ai disturbi, dovuti all'acquisizione dei segnali da parte del trasduttore, può essere notevolmente aumentata. I disturbi risultano un problema in quanto possono provocare degli errori sulla conoscenza della posizione, a causa di interferenze elettromagnetiche o per incertezza/errata taratura degli strumenti di misura. La mancanza di trasduttori rende la parte meccanica dell'azionamento più affidabile e robusta, con una conseguente minore richiesta di manutenzione. Un sensore elettromeccanico può comportare un aumento dell'inerzia del rotore, con limitazioni sul raggiungimento di elevate prestazioni. Inoltre, per motori molto piccoli o destinati a lavorare in ambienti critici, può anche essere impossibile installare un trasduttore di posizione [9], [10]. I vantaggi nell'implementazione di un algo-

ritmo di controllo sensorless di posizione su un azionamento si possono dunque riassumere in:

- riduzione della complessità/ingombro hardware e dei costi;
- aumento dell'affidabilità meccanica, con conseguente minore richiesta di manutenzione;
- maggiore immunità ai disturbi ed indipendenza dall'ambiente di lavoro.

### 5.3 Algoritmi sensorless

Esistono diversi metodi per stimare la posizione rotorica di un motore a magneti permanenti in modo sensorless, e possono essere classificati, secondo [9], [11], [12] e [13], come segue:

1. Stimatori basati sull'eccitazione fondamentale
  - a. Metodi adattativi
    - MRAS
    - Osservatore
    - Minimo errore quadratico
  - b. Metodi non adattativi
    - Misure sul bus DC
    - Monitoraggio correnti e tensioni
    - Posizione del flusso al traferro
    - Forza contro elettromotrice (back-emf , back-eemf)
2. Stimatori che, basati sull'anisotropia, sfruttano l'iniezione di segnali
  - a. Iniezione di segnali
    - Rotanti

- Rotanti ed alternati
  - b. Monitoraggio della traiettoria del vettore di spazio delle correnti
  - c. Variazione dell'induttanza con la posizione rotorica (INFORM)
3. Intelligenza artificiale (reti neurali, logica fuzzy ecc...)

Di seguito si accenna brevissimamente ad alcuni dei metodi citati.

### 5.3.1 Stimatori basati sull'eccitazione fondamentale

Il metodo MRAS (Model Reference Adaptive System) si basa sull'uso di un modello di riferimento (MR) più un secondo modello adattativo (MA); il modello adattativo elabora l'errore tra le uscite dei due modelli per far convergere la stima della posizione verso quella reale.

I metodi basati su un osservatore sono numerosi (Luenberger, reduced order, Sliding Mode Observer, quello di tipo stocastico basato sul filtro di Kalman, ecc.) e sono incentrati sull'uso di un modello adattativo (chiamato osservatore). L'uscita del modello adattativo viene confrontata con quella misurata dal motore reale, tramite opportuni trasduttori, invece che con quella di un altro modello (come avveniva invece nel metodo MRAS precedentemente descritto).

Sfruttando la misura della forza contro elettromotrice dovuta al flusso prodotto dai magneti permanenti (EMF), con eventualmente anche quella dovuta al contributo dell'anisotropia (Extended EMF), si può ricavare l'informazione della posizione rotorica per velocità del rotore non troppo basse. Questo viene fatto con l'uso di appositi algoritmi, basati sull'informazione contenuta nell'espressione analitica della forza contro elettromotrice.

### **5.3.2 Stimatori che, basati sull'anisotropia, sfruttano l'iniezione di segnali**

Sono stati studiati diversi stimatori che, iniettando segnali, riescono ad estrapolare informazioni sulla posizione rotorica, deducendola dall'andamento dell'anisotropia di macchina.

In genere, come nel metodo proposto in questa tesi, viene iniettato negli avvolgimenti statorici un segnale di tensione ad un'opportuna frequenza (tipicamente alta rispetto a quella delle grandezze elettriche elaborate dal controllo vettoriale della macchina) e viene ricavata la stima della posizione attraverso l'elaborazione delle correnti misurate. In letteratura viene proposto anche un metodo focalizzato sull'analisi delle traiettorie (ellissi) dei vettori di spazio delle correnti misurate.

Un altro metodo, che può essere implementato per la stima sensorless di posizione, è quello di usare uno stimatore di tipo INFORM (INDirect Flux detection by On-line Reactance Measurements). L'algoritmo di stima INFORM prevede di alimentare la macchina in modo opportuno, periodicamente e per un breve intervallo di tempo, per ricavare la posizione del flusso dovuto ai magneti permanenti. Questo metodo ha il vantaggio di essere indipendente dai parametri di macchina, ma risulta critico dal punto di vista delle prestazioni dell'azionamento.

## **5.4 Algoritmo di stima della posizione sensorless per un attuatore a magneti permanenti anisotropo**

Dopo un'analisi dei diversi metodi sensorless presenti in letteratura, si è scelto di sviluppare un algoritmo basato sull'iniezione di segnale. Sono stati confrontati gli effetti dell'iniezione di segnali di corrente e di tensione di tipo continuo, alternato e rotante. L'iniezione è stata valutata in sistemi di riferimento sia stazionari che rotanti, al fine di considerare tutte le possibili strade che si possono seguire per ricavare un'espressione analitica della posizione rotorica. La scelta finale (in accordo con [9], [8], [14], [15], [16], [18] e [19]) è stata di iniettare un segnale di tensione ad alta frequenza.

A questo punto della tesi si è scelto di definire un algoritmo di stima della posizione rotorica che possa funzionare sia a rotore fermo che a rotore in movimento. Un ulteriore obiettivo, non meno importante, che ci si è posti è quello di valutare la possibilità (resa disponibile dal fatto che la macchina è di tipo pentafase), di ottenere la stima della posizione unicamente dallo spazio 3. In altre parole, si suppone di poter ricavare l'informazione sulla posizione rotorica confrontando le misure con il segnale iniettato, riferendosi unicamente alla terza armonica di spazio. Viene dunque utilizzato il terzo vettore di spazio delle tensioni di fase per iniettare il segnale, e viene analizzato il terzo vettore di spazio delle correnti di fase (ricavato dalle misure di corrente sulle cinque fasi statoriche).

Viene proposta inizialmente la trattazione per una macchina di tipo trifase (quindi solo nel primo spazio), per poi estendere il metodo ad una macchina pentafase nel terzo spazio (in accordo con gli obiettivi della tesi).

L'equazione di macchina per le fasi statoriche in termini di vettori di spazio per una macchina trifase è scrivibile, nel sistema di riferimento statorico, come visto nel capitolo 4 (4.50), come:

$$\bar{v} = r_s \bar{i} + \frac{d\bar{\phi}}{dt}$$

la quale, in un sistema di riferimento stimato ( $^S$ ), diventa:

$$\bar{v}^S = r_s \bar{i}^S + \frac{d\bar{\phi}^S}{dt} + j \omega^S \bar{\phi}^S \quad (5.1)$$

e, se  $\omega^S \bar{\phi}^S$  risulta trascurabile, assume la forma semplificata seguente:

$$\bar{v}^S = r_s \bar{i}^S + \frac{d\bar{\phi}^S}{dt} \quad (5.2)$$

Si noti che il riferimento stimato può anche essere inteso come stazionario. In tal caso  $\omega^S = 0$  e dunque l'espressione non è approssimata. Se invece il sistema stimato è sincrono con la posizione stimata del rotore, allora a rotore fermo non vi è approssimazione mentre a rotore in movimento si introduce un errore nel trascurare tale termine; tuttavia, se il segnale iniettato è ad alta frequenza rispetto alla velocità rotorica, l'espressione tende ad avvicinarsi alla forma  $\bar{v}^S = \frac{d\bar{\phi}^S}{dt}$ . Quindi se il segnale iniettato è ad alta frequenza la (5.2) è con buona approssimazione l'equazione di macchina nel sistema di riferimento  $^S$ .

L'espressione del vettore di spazio dei flussi concatenati con gli avvolgimenti statorici si può elaborare come di seguito, con  $\Delta\theta = \theta - \theta^S$  (considerando le induttanze di dispersione contenute nelle auto induttanze ed omettendo il pedice " ' ", per le grandezze nel riferimento rotorico, al fine di non appesantire la trattazione):

$$\begin{aligned}\bar{\phi}^S &= \bar{\phi} e^{j\Delta\theta} = (\phi_q - j\phi_d) e^{j\Delta\theta} = \\ &= (L_q i_q - j L_d i_d - j\phi_{Md}) e^{j\Delta\theta} = \\ &= \left[ \frac{L_q + L_d}{2} (i_q - j i_d) + \frac{L_q - L_d}{2} (i_q + j i_d) - j\phi_{Md} \right] e^{j\Delta\theta}\end{aligned}$$

Introducendo le costanti  $L_1 = \frac{L_q + L_d}{2}$  ed  $L_2 = \frac{L_q - L_d}{2}$  diventa:

$$\begin{aligned}\bar{\phi}^S &= [L_1 \bar{i} + L_2 \bar{i}^* - j\phi_{Md}] e^{j\Delta\theta} = \\ &= [L_1 \bar{i}^S e^{-j\Delta\theta} + L_2 \bar{i}^{S*} e^{j\Delta\theta} - j\phi_{Md}] e^{j\Delta\theta} = \\ &= L_1 \bar{i}^S + L_2 \bar{i}^{S*} e^{j2\Delta\theta} - j\phi_{Md} e^{j\Delta\theta}\end{aligned}\tag{5.3}$$

Sostituendo la (5.3) nella (5.1), senza effettuare alcuna approssimazione, si ricava la seguente espressione:

$$\begin{aligned}\bar{v}^S &= r_s \bar{i}^S + \frac{d[L_1 \bar{i}^S + L_2 \bar{i}^{S*} e^{j2\Delta\theta} - j\phi_{Md} e^{j\Delta\theta}]}{dt} + \\ &+ j\omega^S [L_1 \bar{i}^S + L_2 \bar{i}^{S*} e^{j2\Delta\theta} - j\phi_{Md} e^{j\Delta\theta}] = \\ &= r_s \bar{i}^S + L_1 \frac{d\bar{i}^S}{dt} + L_2 \frac{d\bar{i}^{S*}}{dt} e^{j2\Delta\theta} + j2(\omega - \omega^S) L_2 \bar{i}^{S*} e^{j2\Delta\theta} + (\omega - \omega^S) \phi_{Md} e^{j\Delta\theta} + \\ &+ j\omega^S L_1 \bar{i}^S + j\omega^S L_2 \bar{i}^{S*} e^{j2\Delta\theta} + \omega^S \phi_{Md} e^{j\Delta\theta}\end{aligned}$$

Se il rotore è fermo  $\omega = 0$  ed  $\omega^S = 0$ , sia se si considera un riferimento stazionario che uno sincrono con il rotore, e dunque l'ultima relazione si può riscrivere come:

$$\bar{v}^S = r_s \bar{i}^S + L_1 \frac{d\bar{i}^S}{dt} + L_2 \frac{d\bar{i}^{S*}}{dt} e^{j2\Delta\theta}\tag{5.4}$$

Se il segnale iniettato è ad una frequenza sufficientemente alta rispetto alla velocità rotorica, l'espressione tende ad avvicinarsi alla forma  $\bar{v}^S = L_1 \frac{d\bar{i}^S}{dt} + L_2 \frac{d\bar{i}^{S*}}{dt} e^{j2\Delta\theta}$ , pertanto la (5.4) risulta con buona approssimazione l'equazione di macchina nel sistema di riferimento  $^S$  (statorico o sincrono con il rotore) per un segnale iniettato ad alta frequenza.

Se supponiamo di iniettare dunque un segnale di tensione a frequenza  $f_h$  sufficientemente elevata nel sistema di riferimento  $S$  rappresentabile come un vettore di spazio del tipo  $\bar{v}_h^S = \bar{V}_h e^{j\omega_h t}$ , ci aspettiamo di misurare ai morsetti della macchina un segnale di corrente del tipo  $\bar{i}_h^S = \bar{I}_{hd} e^{j\omega_h t} + \bar{I}_{hi} e^{-j\omega_h t}$ .

Sostituendo queste relazioni nell'equazione di macchina (5.4) si ottiene:

$$\begin{aligned} \bar{V}_h e^{j\omega_h t} &= r_s [\bar{I}_{hd} e^{j\omega_h t} + \bar{I}_{hi} e^{-j\omega_h t}] + \\ &+ L_1 \frac{d[\bar{I}_{hd} e^{j\omega_h t} + \bar{I}_{hi} e^{-j\omega_h t}]}{dt} + L_2 \frac{d[\bar{I}_{hd} e^{j\omega_h t} + \bar{I}_{hi} e^{-j\omega_h t}]^*}{dt} e^{j2\Delta\theta} = \\ &= [r_s \bar{I}_{hd} + j\omega_h L_1 \bar{I}_{hd} + j\omega_h L_2 \bar{I}_{hi}^* e^{j2\Delta\theta}] e^{j\omega_h t} + \\ &+ [r_s \bar{I}_{hi} - j\omega_h L_1 \bar{I}_{hi} - j\omega_h L_2 \bar{I}_{hd}^* e^{j2\Delta\theta}] e^{-j\omega_h t} \end{aligned}$$

Separando le componenti dirette da quelle inverse si ha:

$$\begin{aligned} \bar{V}_h &= r_s \bar{I}_{hd} + j\omega_h L_1 \bar{I}_{hd} + j\omega_h L_2 \bar{I}_{hi}^* e^{j2\Delta\theta} \\ 0 &= r_s \bar{I}_{hi} - j\omega_h L_1 \bar{I}_{hi} - j\omega_h L_2 \bar{I}_{hd}^* e^{j2\Delta\theta} \end{aligned} \quad (5.5)$$

Dalla prima delle (5.5) si ricava:

$$\begin{aligned} \bar{V}_h &= r_s \bar{I}_{hd} + j\omega_h L_1 \bar{I}_{hd} + j\omega_h L_2 \bar{I}_{hi}^* e^{j2\Delta\theta} \\ \bar{I}_{hi}^* &= \frac{\bar{V}_h - r_s \bar{I}_{hd} - j\omega_h L_1 \bar{I}_{hd}}{j\omega_h L_2 e^{j2\Delta\theta}} \end{aligned}$$

dunque, dalle proprietà dei numeri complessi, si arriva all'espressione:

$$\bar{I}_{hi} = \frac{\bar{V}_h^* - r_s \bar{I}_{hd}^* + j\omega_h L_1 \bar{I}_{hd}^*}{-j\omega_h L_2 e^{-j2\Delta\theta}} \quad (5.6)$$

Dalla seconda delle (5.5) si ricava, sostituendo l'espressione (5.6):

$$\begin{aligned} 0 &= r_s \bar{I}_{hi} - j\omega_h L_1 \bar{I}_{hi} - j\omega_h L_2 \bar{I}_{hd}^* e^{j2\Delta\theta} \\ 0 &= r_s \frac{\bar{V}_h^* - r_s \bar{I}_{hd}^* + j\omega_h L_1 \bar{I}_{hd}^*}{-j\omega_h L_2 e^{-j2\Delta\theta}} - j\omega_h L_1 \bar{I}_{hi} - j\omega_h L_2 \bar{I}_{hd}^* e^{j2\Delta\theta} \\ 0 &= [r_s - j\omega_h L_1] \bar{V}_h^* - [r_s^2 - j2\omega_h r_s L_1 + \omega_h^2 (L_2^2 - L_1^2)] \bar{I}_{hd}^* \\ \bar{I}_{hd}^* &= \frac{[r_s - j\omega_h L_1] \bar{V}_h^*}{r_s^2 - j2\omega_h r_s L_1 + \omega_h^2 (L_2^2 - L_1^2)} \end{aligned}$$

dunque, dalle proprietà dei numeri complessi, si ottiene:

$$\bar{I}_{hd} = \frac{[r_s + j\omega_h L_1] \bar{V}_h}{r_s^2 + j2\omega_h r_s L_1 + \omega_h^2 (L_2^2 - L_1^2)} \quad (5.7)$$

Sostituendo la (5.7) nella (5.6) si ha:

$$\begin{aligned}
 \bar{I}_{hi} &= \frac{\bar{V}_h^* - (r_s + j\omega_h L_1) \frac{[r_s - j\omega_h L_1] \bar{V}_h^*}{r_s^2 - j2\omega_h r_s L_1 + \omega_h^2 (L_2^2 - L_1^2)}}{-j\omega_h L_2 e^{-j2\Delta\theta}} = \\
 &= \frac{\bar{V}_h^* [r_s^2 - j2\omega_h r_s L_1 + \omega_h^2 (L_2^2 - L_1^2) - r_s^2 + \omega_h^2 L_1^2 + j2\omega_h r_s L_1]}{-j\omega_h L_2 e^{-j2\Delta\theta} [r_s^2 - j2\omega_h r_s L_1 + \omega_h^2 (L_2^2 - L_1^2)]} = \\
 &= \frac{\bar{V}_h^* [\omega_h L_2]}{-j e^{-j2\Delta\theta} [r_s^2 - j2\omega_h r_s L_1 + \omega_h^2 (L_2^2 - L_1^2)]} \\
 &= \frac{j\omega_h L_2 e^{j2\Delta\theta} \bar{V}_h^*}{r_s^2 - j2\omega_h r_s L_1 + \omega_h^2 (L_2^2 - L_1^2)}
 \end{aligned} \tag{5.8}$$

Dunque iniettando un segnale di tensione in alta frequenza  $\bar{v}_h^S = \bar{V}_h e^{j\omega_h t}$ , le correnti corrispondenti saranno del tipo  $\bar{i}_h^S = \bar{I}_{hd} e^{j\omega_h t} + \bar{I}_{hi} e^{-j\omega_h t}$  con:

$$\bar{I}_{hd} = \frac{[r_s + j\omega_h L_1]}{r_s^2 + j2\omega_h r_s L_1 + \omega_h^2 (L_2^2 - L_1^2)} \bar{V}_h \tag{5.9}$$

e:

$$\bar{I}_{hi} = \frac{j\omega_h L_2 e^{j2\Delta\theta}}{r_s^2 - j2\omega_h r_s L_1 + \omega_h^2 (L_2^2 - L_1^2)} \bar{V}_h^* \tag{5.10}$$

dove  $L_1 = \frac{L_q + L_d}{2}$  ed  $L_2 = \frac{L_q - L_d}{2}$ .

La relazione (5.10) è alla base degli algoritmi sensorless di stima della posizione rotorica sviluppati in questa tesi. Si può notare appunto che tale relazione contiene un'informazione sulla posizione rotorica  $\theta$ , essendo  $\Delta\theta = \theta - \theta^S$ .

Gli algoritmi proposti prevedono di misurare la componente ad alta frequenza delle correnti, e dunque di ricavare continuamente il vettore di spazio che le rappresenta  $\bar{i}_h^S = \bar{I}_{hd} e^{j\omega_h t} + \bar{I}_{hi} e^{-j\omega_h t}$  (espresso nello stesso sistema di riferimento in cui viene iniettato il segnale di tensione ad alta frequenza). L'angolo  $\theta$  viene ricavato dalla conoscenza del vettore di spazio  $\bar{i}_h^S$  come descritto di seguito.

Poiché l'informazione sull'angolo  $\theta$  è contenuta solo nella componente inversa del vettore di spazio delle correnti ad alta frequenza, ed in particolare nel suo fasore rappresentativo  $\bar{I}_{hi}$ , il vettore di spazio delle correnti misurate viene moltiplicato per  $e^{j\omega_h t}$  così da ottenere  $\bar{i}_h^S e^{j\omega_h t} = \bar{I}_{hd} e^{j2\omega_h t} + \bar{I}_{hi}$ , ossia una componente a frequenza doppia di quella del segnale iniettato ed una componente costante (o comunque a bassa frequenza quando non si è a regime). Filtrando questo segnale con un filtro passa basso (Low Pass Filter) si ottiene la componente desiderata

$LPF\{\bar{i}_h^S e^{j\omega_h t}\} = LPF\{\bar{I}_{hd} e^{j2\omega_h t} + \bar{I}_{hi}\} = \bar{I}_{hi}$ . A questo punto non resta che estrapolare l'angolo  $\theta$  dall'ormai nota espressione (5.10) del fasore rappresentativo del vettore di spazio della componente inversa delle correnti ad alta frequenza  $\bar{I}_{hi}$ .

Il segnale iniettato è deducibile immediatamente in termini di vettori di spazio e nel sistema di riferimento  $S$  nella sua forma  $\bar{v}_h^S = \bar{V}_h e^{j\omega_h t}$ . Si suppone di conoscere tutti i parametri di macchina:  $r_s$ ,  $L_q$  ed  $L_d$ ; dunque  $L_1$  ed  $L_2$ . Dall'espressione di  $\bar{I}_{hi}$  si ricava  $e^{j2\Delta\theta}$ , il cui argomento contiene  $\Delta\theta = \theta - \theta^S$ . Poiché  $\theta^S$  è noto (essendo il sistema di riferimento in cui si inietta il segnale di tensione) risulta immediato ricavare l'angolo  $\theta$  dall'espressione (5.10).

Nello sviluppo della tesi sono state proposte tre tipologie di algoritmi sensorless:

- in catena aperta;
- in catena chiusa;
- in catena chiusa semplificato.

L'algoritmo in catena aperta viene ottenuto iniettando il segnale di tensione nel sistema di riferimento stazionario ( $S=S$ =stazionario e dunque  $\theta^S = \theta_S = 0$ ). Il metodo consiste nel ricavare la stima di  $\theta$  direttamente dall'espressione analitica precedentemente ricavata (5.10). In formule tale algoritmo di stima della posizione rotorica si può riassumere nel seguente modo:

$$e^{j2\theta} = LPF\{\bar{i}_{hS} e^{j\omega_h t}\} \frac{r_s^2 - j2\omega_h r_s L_1 + \omega_h^2 (L_2^2 - L_1^2)}{j\omega_h L_2 \bar{V}_h^*}$$

dunque, esplicitando l'argomento dell'esponenziale, si ottiene:

$$\theta = \frac{1}{2} \arg(e^{j2\theta}) = \frac{1}{2} \operatorname{atan2}\left[ LPF\{\bar{i}_{hS} e^{j\omega_h t}\} \frac{r_s^2 - j2\omega_h r_s L_1 + \omega_h^2 (L_2^2 - L_1^2)}{j\omega_h L_2 \bar{V}_h^*} \right] \quad (5.11)$$

Un algoritmo in catena aperta, tuttavia, presenta diversi limiti in termini di prestazioni e di stabilità; pertanto è stato sviluppato un algoritmo di stima della posizione in catena chiusa.

L'idea di base è quella di iniettare il segnale di tensione in un sistema di riferimento stimato sincrono ( $S$ =sincrono) con la posizione stimata del rotore ( $\theta^S = \hat{\theta}$ ),

dove  $\hat{\theta}$  è la stima della posizione. In questo caso l'angolo  $\Delta\theta = \theta - \theta^S = \theta - \hat{\theta}$  viene considerato come l'errore della stima di posizione  $\Delta\theta = \epsilon$  e l'obiettivo dell'algoritmo diventa quello di annullarlo. La specifica primaria diventa quindi di imporre a regime la condizione:  $\epsilon = 0$ . In questo modo, quando la stima è esatta, l'errore  $\epsilon$  è nullo ed il segnale di tensione viene iniettato in un sistema di riferimento sincrono con la posizione rotorica. A questo punto la stima di posizione coincide con la posizione del sistema di riferimento stimato:  $\hat{\theta} = \theta^S$ .

Un algoritmo in catena chiusa leggermente più semplice da implementare, che è stato proposto in questo lavoro di tesi, è basato sull'iniezione del segnale di tensione nel sistema di riferimento stazionario, tenendo conto del fatto che il segnale di tensione viene ora iniettato in un sistema che quindi ha uno sfasamento pari alla posizione rotorica rispetto al rotore stesso. Tenendo conto di tale sfasamento è possibile dunque ricondursi, tramite la conoscenza della posizione stimata, ad un algoritmo formalmente molto simile al precedente.

## **5.5 Applicazione dell'algoritmo ad un attuatore di tipo tubolare pentafase**

L'obiettivo del presente paragrafo è quello di mostrare l'applicabilità ad una macchina pentafase dell'algoritmo sviluppato, per la stima della posizione rotorica, in una macchina trifase. In particolare viene sviluppato il metodo nello spazio 3, così da raggiungere il secondo degli obiettivi accennati al paragrafo 5.4: valutare la possibilità di ottenere la stima della posizione rotorica controllando il terzo vettore di spazio delle tensioni di fase, per iniettare il segnale ad alta frequenza, e misurando il terzo vettore di spazio delle correnti, per ottenere l'informazione desiderata. Questa idea nasce dal fatto che la macchina è di tipo pentafase, e pertanto presenta un grado di libertà addizionale rispetto ad una macchina trifase.

Le equazioni di macchina per le fasi statoriche in termini di vettori di spazio per

una macchina pentafase sono, come visto nel capitolo 4 (4.50):

$$\bar{v}_1 = r_s \bar{i}_1 + \frac{d\bar{\phi}_1}{dt} \quad \wedge \quad \bar{v}_3 = r_s \bar{i}_3 + \frac{d\bar{\phi}_3}{dt}$$

In un sistema di riferimento stimato ( $^S$ ) diventano:

$$\bar{v}_1^S = r_s \bar{i}_1^S + \frac{d\bar{\phi}_1^S}{dt} + j \omega^S \bar{\phi}_1^S \quad \wedge \quad \bar{v}_3^S = r_s \bar{i}_3^S + \frac{d\bar{\phi}_3^S}{dt} + j 3 \omega^S \bar{\phi}_3^S \quad (5.12)$$

Se i termini in  $\omega^S$  risultano trascurabili si hanno:

$$\bar{v}_1^S = r_s \bar{i}_1^S + \frac{d\bar{\phi}_1^S}{dt} \quad \wedge \quad \bar{v}_3^S = r_s \bar{i}_3^S + \frac{d\bar{\phi}_3^S}{dt}$$

Le espressioni dei vettori di spazio dei flussi concatenati con gli avvolgimenti statorici (4.45) (considerando le induttanze di dispersione contenute nelle auto induttanze per non appesantire la trattazione) si possono elaborare come di seguito, con  $\Delta\theta = \theta - \theta^S$ :

$$\begin{aligned} \bar{\phi}_1^S &= \bar{\phi}_1 e^{j\Delta\theta} = (\phi_{q1} - j \phi_{d1}) e^{j\Delta\theta} = \\ &= (L_{q1} i_{q1} - L_{13} i_{q3} - j L_{d1} i_{d1} - j \phi_{Md1} + j L_{13} i_{d3}) e^{j\Delta\theta} = \\ &= \left[ \frac{L_{q1} + L_{d1}}{2} (i_{q1} - j i_{d1}) + \frac{L_{q1} - L_{d1}}{2} (i_{q1} + j i_{d1}) + \right. \\ &\quad \left. - L_{13} (i_{q3} - j i_{d3}) - j \phi_{Md1} \right] e^{j\Delta\theta} \end{aligned}$$

Introducendo le costanti  $L_1 = \frac{L_{q1} + L_{d1}}{2}$  ed  $L_2 = \frac{L_{q1} - L_{d1}}{2}$  si ricava:

$$\begin{aligned} \bar{\phi}_1^S &= [L_1 \bar{i}_1 + L_2 \bar{i}_1^* - L_{13} \bar{i}_3 - j \phi_{Md1}] e^{j\Delta\theta} = \\ &= [L_1 \bar{i}_1^S e^{-j\Delta\theta} + L_2 \bar{i}_1^{S*} e^{j\Delta\theta} - L_{13} \bar{i}_3^S e^{-j3\Delta\theta} - j \phi_{Md1}] e^{j\Delta\theta} = \quad (5.13) \\ &= L_1 \bar{i}_1^S + L_2 \bar{i}_1^{S*} e^{j2\Delta\theta} - L_{13} \bar{i}_3^S e^{-j2\Delta\theta} - j \phi_{Md1} e^{j\Delta\theta} \end{aligned}$$

Sostituendo la (5.13) nella (5.12), senza alcuna approssimazione, si ottiene:

$$\begin{aligned} \bar{v}_1^S &= r_s \bar{i}_1^S + \frac{d[L_1 \bar{i}_1^S + L_2 \bar{i}_1^{S*} e^{j2\Delta\theta} - L_{13} \bar{i}_3^S e^{-j2\Delta\theta} - j \phi_{Md1} e^{j\Delta\theta}]}{dt} + \\ &\quad + j \omega^S [L_1 \bar{i}_1^S + L_2 \bar{i}_1^{S*} e^{j2\Delta\theta} - L_{13} \bar{i}_3^S e^{-j2\Delta\theta} - j \phi_{Md1} e^{j\Delta\theta}] = \\ &= r_s \bar{i}_1^S + L_1 \frac{d\bar{i}_1^S}{dt} + L_2 \frac{d\bar{i}_1^{S*}}{dt} e^{j2\Delta\theta} - L_{13} \frac{d\bar{i}_3^S}{dt} e^{-j2\Delta\theta} + \\ &\quad + (\omega - \omega^S) [j 2 L_2 \bar{i}_1^{S*} e^{j2\Delta\theta} - j 2 L_{13} \bar{i}_3^S e^{-j2\Delta\theta} + \phi_{Md1} e^{j\Delta\theta}] + \\ &\quad + \omega^S [j L_1 \bar{i}_1^S + j L_2 \bar{i}_1^{S*} e^{j2\Delta\theta} - j L_{13} \bar{i}_3^S e^{-j2\Delta\theta} + \phi_{Md1} e^{j\Delta\theta}] = \end{aligned}$$

## 5.5 Applicazione dell'algoritmo ad un attuatore di tipo tubolare pentafase 101

Considerando di poter trascurare i termini moltiplicati per  $\omega^S$  e per  $(\omega - \omega^S)$  diventa:

$$\bar{v}_1^S = r_s \bar{i}_1^S + L_1 \frac{d\bar{i}_1^S}{dt} + L_2 \frac{d\bar{i}_1^{S*}}{dt} e^{j2\Delta\theta} - L_{13} \frac{d\bar{i}_3^S}{dt} e^{-j2\Delta\theta} \quad (5.14)$$

Questo risultato non contiene alcuna approssimazione quando il rotore è fermo; mentre si può supporre che l'approssimazione sia accettabile quando il rotore è in movimento, poiché il segnale viene iniettato ad alta frequenza. Procedendo quindi in modo analogo ai passaggi svolti nello spazio 1, per l'equazione di macchina riferita allo spazio 3 risulta:

$$\begin{aligned} \bar{\phi}_3^S &= \bar{\phi}_3 e^{j3\Delta\theta} = (\phi_{q3} - j\phi_{d3}) e^{j3\Delta\theta} = \\ &= (L_{q3} i_{q3} - L_{13} i_{q1} - jL_{d3} i_{d3} - j\phi_{Md3} + jL_{13} i_{d1}) e^{j3\Delta\theta} = \\ &= \left[ \frac{L_{q3} + L_{d3}}{2} (i_{q3} - j i_{d3}) + \frac{L_{q3} - L_{d3}}{2} (i_{q3} + j i_{d3}) + \right. \\ &\quad \left. - L_{13} (i_{q1} - j i_{d1}) - j\phi_{Md3} \right] e^{j3\Delta\theta} \end{aligned}$$

Introducendo le costanti  $L_{1.3} = \frac{L_{q3} + L_{d3}}{2}$  ed  $L_{2.3} = \frac{L_{q3} - L_{d3}}{2}$  diventa:

$$\begin{aligned} \bar{\phi}_3^S &= [L_{1.3} \bar{i}_3 + L_{2.3} \bar{i}_3^* - L_{13} \bar{i}_1 - j\phi_{Md3}] e^{j\Delta\theta} = \\ &= [L_{1.3} \bar{i}_3^S e^{-j3\Delta\theta} + L_{2.3} \bar{i}_3^{S*} e^{j3\Delta\theta} - L_{13} \bar{i}_1^S e^{-j\Delta\theta} - j\phi_{Md3}] e^{j3\Delta\theta} = \quad (5.15) \\ &= L_{1.3} \bar{i}_3^S + L_{2.3} \bar{i}_3^{S*} e^{j6\Delta\theta} - L_{13} \bar{i}_1^S e^{j2\Delta\theta} - j\phi_{Md3} e^{j3\Delta\theta} \end{aligned}$$

Sostituendo la (5.15) nella (5.12) senza alcuna approssimazione, si ha:

$$\begin{aligned} \bar{v}_3^S &= r_s \bar{i}_3^S + \frac{d[L_{1.3} \bar{i}_3^S + L_{2.3} \bar{i}_3^{S*} e^{j6\Delta\theta} - L_{13} \bar{i}_1^S e^{j2\Delta\theta} - j\phi_{Md3} e^{j3\Delta\theta}]}{dt} + \\ &+ j3\omega^S [L_{1.3} \bar{i}_3^S + L_{2.3} \bar{i}_3^{S*} e^{j6\Delta\theta} - L_{13} \bar{i}_1^S e^{j2\Delta\theta} - j\phi_{Md3} e^{j3\Delta\theta}] = \\ &= r_s \bar{i}_3^S + L_{1.3} \frac{d\bar{i}_3^S}{dt} + L_{2.3} \frac{d\bar{i}_3^{S*}}{dt} e^{j6\Delta\theta} - L_{13} \frac{d\bar{i}_1^S}{dt} e^{j2\Delta\theta} + \\ &+ (\omega - \omega^S) [j6L_{2.3} \bar{i}_3^{S*} e^{j6\Delta\theta} - j2L_{13} \bar{i}_1^S e^{j2\Delta\theta} + 3\phi_{Md3} e^{j3\Delta\theta}] + \\ &+ 3\omega^S [jL_{1.3} \bar{i}_3^S + jL_{2.3} \bar{i}_3^{S*} e^{j6\Delta\theta} - jL_{13} \bar{i}_1^S e^{j2\Delta\theta} + \phi_{Md3} e^{j3\Delta\theta}] \end{aligned}$$

Considerando di poter trascurare i termini moltiplicati per  $\omega^S$  e per  $\omega - \omega^S$  (senza alcuna approssimazione quando il rotore è fermo e supponendo che l'approssimazione sia accettabile quando il rotore è in movimento, per l'elevata frequenza

del segnale iniettato) si ottiene:

$$\bar{v}_3^S = r_s \bar{i}_3^S + L_{1,3} \frac{d\bar{i}_3^S}{dt} + L_{2,3} \frac{d\bar{i}_3^{S*}}{dt} e^{j6\Delta\theta} - L_{13} \frac{d\bar{i}_1^S}{dt} e^{j2\Delta\theta} \quad (5.16)$$

Occorre notare che la trattazione viene svolta supponendo di iniettare il segnale nello spazio 3. Tuttavia è possibile procedere in modo analogo per analizzare l'iniezione del segnale nello spazio 1; ottenendo in tale spazio una relazione, tra le correnti misurate nello spazio 1 ed il segnale iniettato nello stesso spazio, parente stretta di quella che si ottiene nello spazio 3.

Supponiamo di iniettare dunque un segnale di tensione a frequenza  $f_h$  sufficientemente elevata nello spazio 3, nel sistema di riferimento stimato  $^S$ , rappresentabile come un vettore di spazio del tipo  $\bar{v}_{h3}^S = \bar{V}_{h3} e^{j\omega_h t}$ . Imponiamo di avere una componente di tensione ad alta frequenza nulla nello spazio 1:  $\bar{v}_{h1}^S = 0$ .

Ci aspettiamo di misurare ai morsetti della macchina un segnale di corrente che nello spazio 1 assume la forma  $\bar{i}_{h1}^S = \bar{I}_{hd1} e^{j\omega_h t} + \bar{I}_{hi1} e^{-j\omega_h t}$  e nello spazio 3 la forma  $\bar{i}_{h3}^S = \bar{I}_{hd3} e^{j\omega_h t} + \bar{I}_{hi3} e^{-j\omega_h t}$ .

Sostituendo queste relazioni nelle equazioni di macchina (5.14) e (5.16) si può scrivere che:

$$\begin{aligned} 0 &= r_s (\bar{I}_{hd1} e^{j\omega_h t} + \bar{I}_{hi1} e^{-j\omega_h t}) + L_1 \frac{d(\bar{I}_{hd1} e^{j\omega_h t} + \bar{I}_{hi1} e^{-j\omega_h t})}{dt} + \\ &+ L_2 \frac{d(\bar{I}_{hd1} e^{j\omega_h t} + \bar{I}_{hi1} e^{-j\omega_h t})^*}{dt} e^{j2\Delta\theta} - L_{13} \frac{d(\bar{I}_{hd3} e^{j\omega_h t} + \bar{I}_{hi3} e^{-j\omega_h t})}{dt} e^{-j2\Delta\theta} = \\ &= r_s \bar{I}_{hd1} e^{j\omega_h t} + r_s \bar{I}_{hi1} e^{-j\omega_h t} + j\omega_h L_1 \bar{I}_{hd1} e^{j\omega_h t} - j\omega_h L_1 \bar{I}_{hi1} e^{-j\omega_h t} + \\ &- j\omega_h L_2 \bar{I}_{hd1}^* e^{-j\omega_h t} e^{j2\Delta\theta} + j\omega_h L_2 \bar{I}_{hi1}^* e^{j\omega_h t} e^{j2\Delta\theta} + \\ &- j\omega_h L_{13} \bar{I}_{hd3} e^{j\omega_h t} e^{-j2\Delta\theta} + j\omega_h L_{13} \bar{I}_{hi3} e^{-j\omega_h t} e^{-j2\Delta\theta} \end{aligned} \quad (5.17)$$

Separando le componenti dirette da quelle inverse si ottengono le relazioni:

$$\begin{aligned} 0 &= r_s \bar{I}_{hd1} + j\omega_h L_1 \bar{I}_{hd1} + j\omega_h L_2 \bar{I}_{hi1}^* e^{j2\Delta\theta} - j\omega_h L_{13} \bar{I}_{hd3} e^{-j2\Delta\theta} = \\ &= r_s \bar{I}_{hi1} - j\omega_h L_1 \bar{I}_{hi1} - j\omega_h L_2 \bar{I}_{hd1}^* e^{j2\Delta\theta} + j\omega_h L_{13} \bar{I}_{hi3} e^{-j2\Delta\theta} \end{aligned} \quad (5.18)$$

Dalla prima delle (5.18) si ricava:

$$\bar{I}_{hi1}^* = \frac{j\omega_h L_{13} \bar{I}_{hd3} e^{-j2\Delta\theta} - r_s \bar{I}_{hd1} - j\omega_h L_1 \bar{I}_{hd1}}{j\omega_h L_2 e^{j2\Delta\theta}}$$

## 5.5 Applicazione dell'algoritmo ad un attuatore di tipo tubolare pentafase 103

ossia, dalle proprietà dei numeri complessi, si ha:

$$\bar{I}_{hi1} = \frac{-j\omega_h L_{13} \bar{I}_{hd3}^* e^{j2\Delta\theta} - r_s \bar{I}_{hd1}^* + j\omega_h L_1 \bar{I}_{hd1}^*}{-j\omega_h L_2 e^{-j2\Delta\theta}} \quad (5.19)$$

Dalla seconda delle (5.18) si ricava, sostituendo l'espressione (5.19):

$$0 = (r_s - j\omega_h L_1) \left[ \frac{-j\omega_h L_{13} \bar{I}_{hd3}^* e^{j2\Delta\theta} - r_s \bar{I}_{hd1}^* + j\omega_h L_1 \bar{I}_{hd1}^*}{-j\omega_h L_2 e^{-j2\Delta\theta}} \right] + \\ -j\omega_h L_2 \bar{I}_{hd1}^* e^{j2\Delta\theta} + j\omega_h L_{13} \bar{I}_{hi3} e^{-j2\Delta\theta}$$

svolgendo i passaggi opportuni si ottiene:

$$\bar{I}_{hd1}^* = \frac{j\omega_h r_s L_{13} \bar{I}_{hd3}^* e^{j2\Delta\theta} + \omega_h^2 L_1 L_{13} \bar{I}_{hd3}^* e^{j2\Delta\theta} - \omega_h^2 L_2 L_{13} \bar{I}_{hi3} e^{-j4\Delta\theta}}{-r_s^2 + j2\omega_h r_s L_1 + \omega_h^2 (L_2^2 - L_1^2)} \quad (5.20) \\ \bar{I}_{hd1} = \frac{j\omega_h r_s L_{13} \bar{I}_{hd3} e^{-j2\Delta\theta} - \omega_h^2 L_1 L_{13} \bar{I}_{hd3} e^{-j2\Delta\theta} + \omega_h^2 L_2 L_{13} \bar{I}_{hi3}^* e^{j4\Delta\theta}}{r_s^2 + j2\omega_h r_s L_1 + \omega_h^2 (L_2^2 - L_1^2)}$$

Sostituendo la (5.20) nella (5.19) è possibile scrivere:

$$\bar{I}_{hi1} = \frac{j\omega_h L_{13} \bar{I}_{hd3}^* e^{j2\Delta\theta}}{j\omega_h L_2 e^{-j2\Delta\theta}} + \\ + \frac{(r_s - j\omega_h L_1) \left[ \frac{j\omega_h r_s L_{13} \bar{I}_{hd3}^* e^{j2\Delta\theta} + j\omega_h^2 L_1 L_{13} \bar{I}_{hd3}^* e^{j2\Delta\theta} - \omega_h^2 L_2 L_{13} \bar{I}_{hi3} e^{-j4\Delta\theta}}{-r_s^2 + j2\omega_h r_s L_1 + \omega_h^2 (L_2^2 - L_1^2)} \right]}{j\omega_h L_2 e^{-j2\Delta\theta}}$$

la quale, svolgendo i passaggi, permette di giungere alla seguente espressione:

$$\bar{I}_{hi1} = \frac{-j\omega_h r_s L_{13} \bar{I}_{hi3} e^{-j2\Delta\theta} - \omega_h^2 L_1 L_{13} \bar{I}_{hi3} e^{-j2\Delta\theta} + \omega_h^2 L_2 L_{13} \bar{I}_{hd3}^* e^{j4\Delta\theta}}{r_s^2 - j2\omega_h r_s L_1 + \omega_h^2 (L_2^2 - L_1^2)} \quad (5.21)$$

Riscrivendo le (5.20) e (5.21), riportandole allo stesso denominatore, elaborando un poco le espressioni e omettendo il pedice h per non appesantire ulteriormente la scrittura, si perviene alle relazioni:

$$\bar{I}_{d1} = \frac{L_{13} \omega \{ \bar{I}_{d3} [(j r_s - \omega L_1) e^{-j2\Delta\theta}] + \bar{I}_{i3}^* [(\omega L_2) e^{j4\Delta\theta}] \}}{[r_s^2 + \omega^2 (L_2^2 - L_1^2)]^2 + [2\omega r_s L_1]^2} \times \\ \times \{ [r_s^2 + \omega^2 (L_2^2 - L_1^2)] - j [2\omega r_s L_1] \} \\ \bar{I}_{i1} = \frac{L_{13} \omega \{ \bar{I}_{i3} [(-j r_s - \omega L_1) e^{-j2\Delta\theta}] + \bar{I}_{d3}^* [(\omega L_2) e^{j4\Delta\theta}] \}}{[r_s^2 + \omega^2 (L_2^2 - L_1^2)]^2 + [2\omega r_s L_1]^2} \times \\ \times \{ [r_s^2 + \omega^2 (L_2^2 - L_1^2)] + j [2\omega r_s L_1] \}$$

Ponendo  $K = \frac{L_{13}\omega}{[r_s^2 + \omega^2(L_2^2 - L_1^2)]^2 + [2\omega r_s L_1]^2}$  ed elaborando le equazioni precedenti, si ottiene per la componente diretta:

$$\begin{aligned}\bar{I}_{d1} &= K \{ \bar{I}_{d3} [(j r_s - \omega L_1) e^{-j 2\Delta\theta}] + \bar{I}_{i3}^* [(\omega L_2) e^{j 4\Delta\theta}] \} \times \\ &\quad \times \{ [r_s^2 + \omega^2(L_2^2 - L_1^2)] - j [2\omega r_s L_1] \} = \\ &= K \bar{I}_{d3} e^{-j 2\Delta\theta} \{ [2\omega r_s^2 L_1 - \omega L_1 r_s^2 - \omega^3 L_1 (L_2^2 - L_1^2)] + \\ &\quad + j [r_s^3 + r_s \omega^2 (L_2^2 - L_1^2) + 2\omega^2 r_s L_1^2] \} + \\ &\quad + K \bar{I}_{i3}^* e^{j 4\Delta\theta} \{ [\omega L_2 r_s^2 + \omega^3 L_2 (L_2^2 - L_1^2)] + j [-2\omega^2 r_s L_1 L_2] \}\end{aligned}$$

che diventa, introducendo le costanti A,B,C e D:

$$\bar{I}_{d1} = K \bar{I}_{d3} e^{-j 2\Delta\theta} (A + j C) + K \bar{I}_{i3}^* e^{j 4\Delta\theta} (B + j D) \quad (5.22)$$

Per la componente inversa risulta:

$$\begin{aligned}\bar{I}_{i1} &= K \{ \bar{I}_{i3} [(-j r_s - \omega L_1) e^{-j 2\Delta\theta}] + \bar{I}_{d3}^* [(\omega L_2) e^{j 4\Delta\theta}] \} \times \\ &\quad \times \{ [r_s^2 + \omega^2(L_2^2 - L_1^2)] + j [2\omega r_s L_1] \} = \\ &= K \bar{I}_{i3} e^{-j 2\Delta\theta} \{ [2\omega r_s^2 L_1 - \omega L_1 r_s^2 - \omega^3 L_1 (L_2^2 - L_1^2)] + \\ &\quad - j [r_s^3 + r_s \omega^2 (L_2^2 - L_1^2) + 2\omega^2 r_s L_1^2] \} + \\ &\quad + K \bar{I}_{d3}^* e^{j 4\Delta\theta} \{ [\omega L_2 r_s^2 + \omega^3 L_2 (L_2^2 - L_1^2)] - j [-2\omega^2 r_s L_1 L_2] \}\end{aligned}$$

la quale, introducendo le stesse costanti A,B,C e D, diventa:

$$\bar{I}_{i1} = K \bar{I}_{i3} e^{-j 2\Delta\theta} (A - j C) + K \bar{I}_{d3}^* e^{j 4\Delta\theta} (B - j D) \quad (5.23)$$

dove risulta ovvio il significato delle costanti A, B, C e D.

A questo punto si può ricavare l'espressione completa del primo vettore di spazio nel sistema di riferimento  $^S \bar{i}_{h1}^S = \bar{I}_{hd1} e^{j \omega_h t} + \bar{I}_{hi1} e^{-j \omega_h t}$  come segue (si noti la reintroduzione del pedice h):

$$\begin{aligned}\bar{i}_{h1}^S &= [K \bar{I}_{hd3} e^{-j 2\Delta\theta} (A + j C) + K \bar{I}_{hi3}^* e^{j 4\Delta\theta} (B + j D)] e^{j \omega_h t} + \\ &\quad + [K \bar{I}_{hi3} e^{-j 2\Delta\theta} (A - j C) + K \bar{I}_{hd3}^* e^{j 4\Delta\theta} (B - j D)] e^{-j \omega_h t} = \\ &= K \{ A (\bar{I}_{hd3} e^{j \omega_h t} + \bar{I}_{hi3} e^{-j \omega_h t}) e^{-j 2\Delta\theta} + B (\bar{I}_{hd3}^* e^{-j \omega_h t} + \bar{I}_{hi3}^* e^{j \omega_h t}) e^{j 4\Delta\theta} + \\ &\quad + j C (\bar{I}_{hd3} e^{j \omega_h t} - \bar{I}_{hi3} e^{-j \omega_h t}) e^{-j 2\Delta\theta} + j D (-\bar{I}_{hd3}^* e^{-j \omega_h t} + \bar{I}_{hi3}^* e^{j \omega_h t}) e^{j 4\Delta\theta} \} = \\ &= K A \bar{i}_{h3}^S e^{-j 2\Delta\theta} + K B \bar{i}_{h3}^{S*} e^{j 4\Delta\theta} + \\ &\quad + j K C (\bar{I}_{hd3} e^{j \omega_h t} - \bar{I}_{hi3} e^{-j \omega_h t}) e^{-j 2\Delta\theta} + j K D (-\bar{I}_{hd3}^* e^{-j \omega_h t} + \bar{I}_{hi3}^* e^{j \omega_h t}) e^{j 4\Delta\theta}\end{aligned} \quad (5.24)$$

È ora possibile sostituire l'espressione trovata per  $\bar{i}_{h1}^S$  all'interno dell'espressione (5.14):

$$\bar{v}_3^S = r_s \bar{i}_3^S + L_{1.3} \frac{d\bar{i}_3^S}{dt} + L_{2.3} \frac{d\bar{i}_3^{S*}}{dt} e^{j6\Delta\theta} - L_{13} \frac{d\bar{i}_1^S}{dt} e^{j2\Delta\theta}$$

Svolgendo i passaggi, trascurando i termini in cui compare il termine  $\frac{d\Delta\theta}{dt}$  (per i motivi già più volte esposti per cui tale approssimazione è accettabile poiché il segnale viene iniettato ad alta frequenza), si ha:

$$\begin{aligned} & - L_{13} \frac{d\bar{i}_{h1}^S}{dt} e^{j2\Delta\theta} = \\ & = -L_{13}K[A \frac{d\bar{i}_{h3}^S}{dt} + B \frac{d\bar{i}_{h3}^{S*}}{dt} e^{j6\theta} + jC(j\omega_h \bar{I}_{hd3} e^{j\omega_h t} + j\omega_h \bar{I}_{hi3} e^{-j\omega_h t}) + \\ & + jD(j\omega_h \bar{I}_{hd3}^* e^{-j\omega_h t} + j\omega_h \bar{I}_{hi3}^* e^{j\omega_h t}) e^{j6\Delta\theta}] = \\ & = -L_{13}KA \frac{d\bar{i}_{h3}^S}{dt} - L_{13}KB \frac{d\bar{i}_{h3}^{S*}}{dt} e^{j6\theta} + L_{13}KC\omega_h \bar{i}_{h3}^S + L_{13}KD\omega_h \bar{i}_{h3}^{S*} e^{j6\Delta\theta} \end{aligned} \quad (5.25)$$

Sostituendo la (5.25) nell'espressione (5.14) e riordinando i termini, si ricava:

$$\begin{aligned} \bar{v}_{h3}^S & = (r_s + L_{13}KC\omega_h) \bar{i}_{h3}^S + (L_{13}KD\omega_h) \bar{i}_{h3}^{S*} e^{j6\Delta\theta} + \\ & + (L_{1.3} - L_{13}KA) \frac{d\bar{i}_{h3}^S}{dt} + (L_{2.3} - L_{13}KB) \frac{d\bar{i}_{h3}^{S*}}{dt} e^{j6\Delta\theta} = \quad (5.26) \\ & = P \bar{i}_{h3}^S + Q \bar{i}_{h3}^{S*} e^{j6\Delta\theta} + R \frac{d\bar{i}_{h3}^S}{dt} + S \frac{d\bar{i}_{h3}^{S*}}{dt} e^{j6\Delta\theta} \end{aligned}$$

È importante notare come i termini P, Q, R ed S siano tutti e quattro delle costanti reali. Dunque si può procedere come è stato fatto nella trattazione per una macchina trifase, con la differenza che ora compare anche un termine in più (quello associato alla costante Q).

Sostituendo nella (5.26)  $\bar{v}_{h3}^S = \bar{V}_{h3} e^{j\omega_h t}$  e  $\bar{i}_{h3}^S = \bar{I}_{hd3} e^{j\omega_h t} + \bar{I}_{hi3} e^{-j\omega_h t}$ , si può scrivere l'espressione seguente:

$$\begin{aligned} \bar{V}_{h3} e^{j\omega_h t} & = P (\bar{I}_{hd3} e^{j\omega_h t} + \bar{I}_{hi3} e^{-j\omega_h t}) + Q (\bar{I}_{hd3}^* e^{-j\omega_h t} + \bar{I}_{hi3}^* e^{j\omega_h t}) e^{j6\Delta\theta} + \\ & + R \frac{d(\bar{I}_{hd3} e^{j\omega_h t} + \bar{I}_{hi3} e^{-j\omega_h t})}{dt} + S \frac{d(\bar{I}_{hd3}^* e^{-j\omega_h t} + \bar{I}_{hi3}^* e^{j\omega_h t})}{dt} e^{j6\Delta\theta} \end{aligned} \quad (5.27)$$

Svolgendo i passaggi e separando i termini della componente diretta ( $e^{j\omega_h t}$ ) da quelli della componente inversa ( $e^{-j\omega_h t}$ ), si giunge alle relazioni:

$$\begin{aligned} \bar{V}_{h3} &= P \bar{I}_{hd3} + Q \bar{I}_{hi3}^* e^{j6\Delta\theta} + j\omega_h R \bar{I}_{hd3} + j\omega_h S \bar{I}_{hi3}^* e^{j6\Delta\theta} \\ 0 &= P \bar{I}_{hi3} + Q \bar{I}_{hd3}^* e^{j6\Delta\theta} - j\omega_h R \bar{I}_{hi3} - j\omega_h S \bar{I}_{hd3}^* e^{j6\Delta\theta} \end{aligned} \quad (5.28)$$

Dalla prima relazione delle (5.28) si ottiene:

$$\begin{aligned} \bar{I}_{hd3} &= \frac{\bar{V}_{h3} - Q \bar{I}_{hi3}^* e^{j6\Delta\theta} - j\omega_h S \bar{I}_{hi3}^* e^{j6\Delta\theta}}{P + j\omega_h R} \\ \bar{I}_{hd3}^* &= \frac{\bar{V}_{h3}^* - Q \bar{I}_{hi3} e^{-j6\Delta\theta} + j\omega_h S \bar{I}_{hi3} e^{-j6\Delta\theta}}{P - j\omega_h R} \end{aligned} \quad (5.29)$$

Sostituendo l'espressione di  $\bar{I}_{hd3}^*$  appena trovata nella seconda delle (5.28), si ricava:

$$\begin{aligned} 0 &= (P - j\omega_h R) \bar{I}_{hi3} + (Q - j\omega_h S) \bar{I}_{hd3}^* e^{j6\Delta\theta} = \\ &= (P - j\omega_h R) \bar{I}_{hi3} + (Q - j\omega_h S) \left[ \frac{\bar{V}_{h3}^* - Q \bar{I}_{hi3} e^{-j6\Delta\theta} + j\omega_h S \bar{I}_{hi3} e^{-j6\Delta\theta}}{P - j\omega_h R} \right] e^{j6\Delta\theta} \end{aligned}$$

dunque, esplicitando il termine  $\bar{I}_{hi3}$ , diventa:

$$\bar{I}_{hi3} = \frac{(Q - j\omega_h S) e^{j6\Delta\theta}}{Q^2 - P^2 - \omega_h^2 (S^2 - R^2) - j2\omega_h (QS - PR)} \bar{V}_{h3}^* \quad (5.30)$$

Sostituendo l'espressione (5.30) di  $\bar{I}_{hi3}$  nella (5.29), si ottiene:

$$\begin{aligned} \bar{I}_{hd3} &= \frac{\bar{V}_{h3} - (Q + j\omega_h S) \left[ \frac{(Q - j\omega_h S) e^{j6\Delta\theta}}{Q^2 - P^2 - \omega_h^2 (S^2 - R^2) - j2\omega_h (QS - PR)} \bar{V}_{h3}^* \right] e^{j6\Delta\theta}}{P + j\omega_h R} = \\ &= \frac{-(P + j\omega_h R)}{Q^2 - P^2 - \omega_h^2 (S^2 - R^2) + j2\omega_h (QS - PR)} \bar{V}_{h3} \end{aligned}$$

Quindi anche in questo caso, come in quello della macchina trifase, si è trovata un'espressione (5.30) derivata dalla misura delle correnti che, se opportunamente elaborata, può fornire un'informazione sulla posizione del rotore.

Riassumendo, viene iniettato un segnale di tensione ad alta frequenza nello spazio 3 nel sistema di riferimento  $S$ , rappresentato dal vettore di spazio  $\bar{v}_{h3}^S = \bar{V}_{h3} e^{j\omega_h t}$ . Si impone per le tensioni nello spazio 1 ad alta frequenza:  $\bar{v}_{h1}^S = 0$ . Ai morsetti

della macchina viene costantemente misurato un segnale di corrente che spazio nello spazio 3 è rappresentato dal vettore  $\bar{i}_{h3}^S = \bar{I}_{hd3}e^{j\omega_h t} + \bar{I}_{hi3}e^{-j\omega_h t}$ . Nella sola ipotesi fatta di trascurare i termini proporzionali alla velocità rotorica quando il rotore è in movimento, si è ricavata l'espressione (5.30) per  $\bar{I}_{hi3}$ , in cui compare esplicitamente l'informazione della posizione rotorica. Con lo stesso metodo visto nel caso di una macchina trifase si può dunque ricavare la formulazione analitica che descrive l'algoritmo di stima della posizione rotorica:

$$e^{j6\Delta\theta} = LPF\{\bar{i}_{h3}^S e^{j\omega_h t}\} \frac{Q^2 - P^2 - \omega_h^2(S^2 - R^2) - j2\omega_h(QS - PR)}{(Q - j\omega_h S)\bar{V}_{h3}^*}$$

dunque, esplicitando l'angolo  $\Delta\theta$ , si ricava la seguente espressione:

$$\begin{aligned} \Delta\theta &= \frac{1}{6} \arg(e^{j6\Delta\theta}) = \\ &= \frac{1}{6} \operatorname{atan2}\left[ LPF\{\bar{i}_{h3}^S e^{j\omega_h t}\} \frac{Q^2 - P^2 - \omega_h^2(S^2 - R^2) - j2\omega_h(QS - PR)}{(Q - j\omega_h S)\bar{V}_{h3}^*} \right] = \\ &= \frac{1}{6} \operatorname{atan2}\left[ LPF\{\bar{i}_{h3}^S e^{j\omega_h t}\} \bar{X} \right] \end{aligned} \quad (5.31)$$

dove tutti i termini sono costanti derivate dai parametri di macchina e dal segnale di tensione iniettato, mentre il parametro  $\bar{i}_{h3}^S$  deriva dalla misura delle correnti statoriche.

Riportiamo di seguito le espressioni delle costanti che compaiono nella (6.3), andando a definire la costante complessa  $\bar{X}$ :

$$\begin{aligned} P &= r_s + L_{13}KC\omega_h & Q &= L_{13}KD\omega_h \\ R &= L_{1.3} - L_{13}KA & S &= L_{2.3} - L_{13}KB \end{aligned} \quad (5.32)$$

le quali sono deducibili dai parametri di macchina e dalle costanti A, B, C, D e K, definite come:

$$\begin{aligned} A &= 2\omega_h r_s^2 L_1 - \omega_h L_1 r_s^2 - \omega_h^3 L_1 (L_2^2 - L_1^2) & B &= \omega_h L_2 r_s^2 + \omega_h^3 L_2 (L_2^2 - L_1^2) \\ C &= r_s^3 + r_s \omega_h^2 (L_2^2 - L_1^2) + 2\omega_h^2 r_s L_1^2 & D &= -2\omega_h^2 r_s L_1 L_2 \\ K &= \frac{L_{13}\omega_h}{[r_s^2 + \omega_h^2 (L_2^2 - L_1^2)]^2 + [2\omega_h r_s L_1]^2} \end{aligned} \quad (5.33)$$

a loro volta determinate dai parametri di macchina e dai valori che assumono le costanti  $L_1$ ,  $L_2$ ,  $L_{1.3}$  ed  $L_{2.3}$ , espresse ancora in funzione dei parametri di macchina come segue:

$$\begin{aligned} L_1 &= \frac{L_q + L_d}{2} & L_2 &= \frac{L_q - L_d}{2} \\ L_{1.3} &= \frac{L_{q3} + L_{d3}}{2} & L_{2.3} &= \frac{L_{q3} - L_{d3}}{2} \end{aligned} \quad (5.34)$$

## 5.6 Vantaggi e problematiche del metodo

Il metodo proposto presenta il grande vantaggio di essere applicabile alla macchina sia quando è ferma che quando è in movimento, inoltre l'iniezione di un segnale in alta frequenza produce delle insensibili oscillazioni di coppia che non alterano per nulla le prestazioni dell'azionamento. La possibilità, che si presenta per una macchina di tipo pentafase, di iniettare il segnale di tensione nello spazio 3 consente inoltre di poter controllare la coppia nello spazio 1 e stimare la posizione rotorica nello spazio 3.

I vantaggi teorici del metodo analitico sopracitati presentano tuttavia alcuni problemi non trascurabili. Il primo problema riguarda la determinazione delle costanti P, Q, R ed S, le quali dipendono in modo complicato dai parametri di macchina  $r_s$ ,  $L_{q1}$ ,  $L_{d1}$ ,  $L_{q3}$ ,  $L_{d3}$  ed  $L_{13}$ , nonché dalla conoscenza del segnale iniettato  $\bar{v}_{h3}^S = \bar{V}_{h3} e^{j\omega_h t}$ . I parametri di macchina dipendono da come sono state svolte le prove del motore e si possono ritenere con buona approssimazione delle costanti se la macchina funziona con bassi carichi di lavoro, e pertanto la resistenza statorica non subisce rilevanti variazioni causate dalla temperatura. Il segnale iniettato invece è generalmente noto con buona precisione nel suo segnale di riferimento che viene richiesto in ingresso all'inverter dell'azionamento, ma il segnale applicato al motore subisce un ritardo dovuto alla modulazione di tipo PWM di  $\frac{T_c}{2}$ , dove  $T_c$  è il tempo di ciclo dell'inverter. In fase di simulazione si è dunque tenuto conto sia del ritardo dell'inverter che dei parametri di macchina, invece in fase sperimentale i parametri di macchina non sono stati utilizzati a causa della precisione sul loro valore richiesta dal metodo per compensare lo sfasamento introdotto da essi. Si nota appunto come, considerando il ritardo dell'inverter

ma senza compensazione dei parametri di macchina, si ha un errore  $\epsilon_{fase}$  costante :  $\Delta\theta = \frac{1}{6}atan2[LPF\{\bar{i}_{h3}^S e^{j\omega_h(t-\frac{T_c}{2})}\}] + \epsilon_{fase}$  . Un'ulteriore criticità riguarda il fatto che essendo la fase dell'esponenziale  $e^{j6\Delta\theta}$  variabile tra  $-\pi$  e  $+\pi$ , la presenza del fattore moltiplicativo 6 implica una variabilità sulla conoscenza di  $\Delta\theta$  tra  $-\frac{\pi}{6}$  e  $+\frac{\pi}{6}$ , rendendo dunque più difficile la stima della posizione in catena aperta ma soprattutto rendendo impossibile la conoscenza della posizione iniziale del rotore. In letteratura ([18],[20],[17] et al.) esistono diversi metodi per la stima della posizione iniziale dell'azionamento. In simulazione si è potuto studiare come l'algoritmo in catena chiusa riesca ad agganciarsi alla posizione rotorica a meno dell'incertezza rispetto alla posizione che corrisponde a  $\Delta\theta = 0$  (lo stesso valore per cui l'algoritmo si porta a considerare  $\Delta\theta = 0$  si ha per  $\Delta\theta = 0; \frac{\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}; \pi; \frac{4\pi}{3}; \frac{5\pi}{3}$ ). Per poter effettuare un controllo completamente di tipo sensorless è dunque necessario conoscere con un'incertezza massima di  $\pm\frac{\pi}{6}$  la posizione iniziale del rotore. In simulazione ed in fase sperimentale non si è potuto effettuare un controllo puramente sensorless, poiché si sono riscontrate diverse difficoltà nel retroazionare la posizione stimata nel sistema di controllo vettoriale della macchina. In questa tesi si è dunque deciso di disporre il rotore sempre nella stessa posizione iniziale all'inizio di ogni prova sperimentale, così da non dover utilizzare un metodo per valutare la posizione iniziale ma piuttosto studiare la posizione relativa del rotore rispetto a tale posizione iniziale presa come posizione 0. Nonostante non sia stato possibile chiudere in retroazione il segnale della posizione stimata per controllare la macchina, si è riusciti, sebbene con diverse criticità, ad ottenere con tale algoritmo una stima della posizione relativa del rotore coerente con quella misurata dal sensore di posizione preesistente. La peculiarità di aver iniettato un segnale di riferimento rotante nel sistema di riferimento stimato piuttosto che un segnale di tipo alternato, come viene fatto ad esempio in [21] e [8], fornisce la possibilità di utilizzare lo stesso algoritmo di stima della posizione rotorica sia a rotore fermo che a rotore in movimento, invece di considerare due differenti algoritmi come generalmente avviene.



# Capitolo 6

## Simulazioni dell'azionamento

In questo capitolo viene mostrato come è possibile verificare il funzionamento dell'algoritmo sensorless di stima della posizione rotorica, attraverso opportune simulazioni in ambiente Simulink. La parte di simulazione è un punto nodale del lavoro di questa tesi, pertanto gli è stato dedicato l'intero capitolo. Dopo una breve introduzione sulla scelta del modello e dell'algoritmo, nel secondo paragrafo viene mostrato come sono stati realizzati i modelli dell'inverter e del motore, partendo dalle equazioni ricavate nel capitolo 4. Nel terzo paragrafo sono approfondite le diverse soluzioni possibili per realizzare l'algoritmo sensorless: vengono illustrati gli schemi che le rappresentano, gli stessi che sono poi stati implementati in ambiente Simulink. Il paragrafo 4 analizza la taratura del regolatore, presente in entrambi gli algoritmi in catena chiusa proposti, e la scelta di tutti i parametri dell'azionamento (inverter e motore). Completata la descrizione puntuale del modello Simulink realizzato, sono riportati i risultati delle simulazioni (paragrafo 5). L'ultimo paragrafo è dedicato alle conclusioni sui risultati ottenuti con le simulazioni, e quindi sull'intero lavoro di tesi.

### 6.1 Introduzione

Per verificare i risultati teorici dell'algoritmo proposto al capitolo 5, e valutarne l'applicabilità, è stato utilizzato il programma Simulink di Matlab. Grazie alle

simulazioni è stato possibile valutare i differenti metodi, osservare le criticità ed elaborare soluzioni per ottimizzarli. In questa fase è stato anche possibile tarare i filtri ed il regolatore, presenti negli schemi di funzionamento dell'algoritmo.

Un ulteriore contributo teorico di questa tesi è stato quello di sviluppare un modello adatto al motore studiato. Nella costruzione del modello si è tenuto conto anche della modulazione PWM dell'inverter pentafase VSI nell'alimentazione della macchina, compensandone il ritardo sull'immissione del segnale ad alta frequenza. È stata inoltre introdotta l'espressione esatta della costante complessa  $\bar{X}$  (definita nel capitolo precedente), che permette di ottenere l'informazione esatta sulla posizione rotorica (o sull'errore di stima della posizione, nei metodi in catena chiusa).

La trattazione che segue riguarda dunque la simulazione di un azionamento di tipo pentafase anisotropo rotativo. Inizialmente è stato applicato l'algoritmo sensorless ad un modello di macchina trifase, procedendo come nel capitolo 5, per poi espandere i risultati all'azionamento pentafase nello spazio 1 e poi nello spazio 3. Dal momento che l'implementazione dell'algoritmo sensorless risulta concettualmente simile per le due tipologie di motori, si è scelto di illustrare il lavoro svolto, nel realizzare le simulazioni dell'algoritmo, per l'azionamento pentafase.

## 6.2 Definizione del modello Simulink

Per simulare l'algoritmo sensorless è stato necessario innanzitutto definire il modello della macchina elettrica. Si è scelto di svilupparlo nel sistema di riferimento rotorico, come mostrato di seguito.

Le equazioni di macchina, nello spazio 1 e 3, sono state già ricavate nel capitolo 4 (4.51). Queste equazioni, rappresentate nel sistema di riferimento rotorico, possono essere riscritte, introducendo le espressioni dei flussi concatenati con gli avvolgimenti statorici (4.45), definiti sempre nel sistema di riferimento rotorico. Questo permette di elaborare facilmente le equazioni in termini di trasformata di Laplace: una forma adatta ad essere implementata in ambiente Simulink.

Le equazioni di una macchina pentafase sono scrivibili come:

$$\begin{aligned}v_{q1} &= r_s i_{q1} + \omega \phi_{d1} + \frac{d\phi_{q1}}{dt} \\v_{d1} &= r_s i_{d1} - \omega \phi_{q1} + \frac{d\phi_{d1}}{dt} \\v_{q3} &= r_s i_{q3} + 3\omega \phi_{d3} + \frac{d\phi_{q3}}{dt} \\v_{d3} &= r_s i_{d3} - 3\omega \phi_{q3} + \frac{d\phi_{d3}}{dt}\end{aligned}$$

I flussi concatenati, considerando i termini di dispersione  $L_{ls1}$  e  $L_{ls3}$  inclusi in quelli di autoinduttanza, sono legati alle correnti statoriche dalle espressioni:

$$\begin{aligned}\phi_{q1} &= L_{q1} i_{q1} - L_{13} i_{q3} \\ \phi_{d1} &= L_{d1} i_{d1} - L_{13} i_{d3} + \phi_{Md1} \\ \phi_{q3} &= L_{q3} i_{q3} - L_{13} i_{q1} \\ \phi_{d3} &= L_{d3} i_{d3} - L_{13} i_{d1} + \phi_{Md3}\end{aligned}$$

Considerando che le derivate temporali dei flussi concatenati dovuti ai magneti permanenti sono nulle nel sistema di riferimento rotorico, si può scrivere:

$$\begin{aligned}v_{q1} &= r_s i_{q1} + \omega [L_{d1} i_{d1} - L_{13} i_{d3} + \phi_{Md1}] + \frac{d[L_{q1} i_{q1} - L_{13} i_{q3}]}{dt} \\v_{d1} &= r_s i_{d1} - \omega [L_{q1} i_{q1} - L_{13} i_{q3}] + \frac{d[L_{d1} i_{d1} - L_{13} i_{d3}]}{dt} \\v_{q3} &= r_s i_{q3} + 3\omega [L_{d3} i_{d3} - L_{13} i_{d1} + \phi_{Md3}] + \frac{d[L_{q3} i_{q3} - L_{13} i_{q1}]}{dt} \\v_{d3} &= r_s i_{d3} - 3\omega [L_{q3} i_{q3} - L_{13} i_{q1}] + \frac{d[L_{d3} i_{d3} - L_{13} i_{d1}]}{dt}\end{aligned} \quad (6.1)$$

Le (6.1) si possono riadattare nella seguente forma:

$$\begin{aligned}\frac{di_{q1}}{dt} &= \frac{v_{q1} - r_s i_{q1} - \omega [L_{d1} i_{d1} - L_{13} i_{d3} + \phi_{Md1}] + L_{13} \frac{di_{q3}}{dt}}{L_{q1}} \\ \frac{di_{d1}}{dt} &= \frac{v_{d1} - r_s i_{d1} + \omega [L_{q1} i_{q1} - L_{13} i_{q3}] + L_{13} \frac{di_{d3}}{dt}}{L_{d1}} \\ \frac{di_{q3}}{dt} &= \frac{v_{q3} - r_s i_{q3} - 3\omega [L_{d3} i_{d3} - L_{13} i_{d1} + \phi_{Md3}] + L_{13} \frac{di_{q1}}{dt}}{L_{q3}} \\ \frac{di_{d3}}{dt} &= \frac{v_{d3} - r_s i_{d3} + 3\omega [L_{q3} i_{q3} - L_{13} i_{q1}] + L_{13} \frac{di_{d1}}{dt}}{L_{d3}}\end{aligned} \quad (6.2)$$

A questo punto si possono sostituire le derivate esplicitate nelle (6.2) all'interno delle espressioni di macchina (6.1). Infine, riscrivendo le espressioni ricavate in termini di Laplace, si ottengono delle espressioni agilmente implementabili in Simulink.

Dalla prima delle (6.1) con la terza delle (6.2) si ricava:

$$\begin{aligned} v_{q1} &= r_s i_{q1} + \omega [L_{d1} i_{d1} - L_{13} i_{d3} + \phi_{Md1}] + L_{q1} \frac{di_{q1}}{dt} - L_{13} \frac{di_{q3}}{dt} = \\ &= r_s i_{q1} + \omega [L_{d1} i_{d1} - L_{13} i_{d3} + \phi_{Md1}] + L_{q1} \frac{di_{q1}}{dt} + \\ &\quad - L_{13} \frac{v_{q3} - r_s i_{q3} - 3\omega [L_{d3} i_{d3} - L_{13} i_{d1} + \phi_{Md3}] + L_{13} \frac{di_{q1}}{dt}}{L_{q3}} \end{aligned}$$

da cui, esplicitando  $i_{q1}$  e scrivendo in termini di Laplace ( $\frac{d}{dt} \rightarrow s$ ), si ottiene:

$$\begin{aligned} i_{q1} &= \frac{v_{q1} - \omega [L_{d1} i_{d1} - L_{13} i_{d3} + \phi_{Md1}]}{r_s + s(L_{q1} - \frac{L_{13}^2}{L_{q3}})} + \\ &\quad + \frac{\frac{L_{13}}{L_{q3}} [v_{q3} - r_s i_{q3} - 3\omega (L_{d3} i_{d3} - L_{13} i_{d1} + \phi_{Md3})]}{r_s + s(L_{q1} - \frac{L_{13}^2}{L_{q3}})} \end{aligned} \quad (6.3)$$

In modo analogo, dalla seconda delle (6.1) con la quarta delle (6.2), si giunge all'espressione:

$$i_{d1} = \frac{v_{d1} + \omega [L_{q1} i_{q1} - L_{13} i_{q3}] + \frac{L_{13}}{L_{d3}} [v_{d3} - r_s i_{d3} + 3\omega (L_{q3} i_{q3} - L_{13} i_{q1})]}{r_s + s(L_{d1} - \frac{L_{13}^2}{L_{d3}})} \quad (6.4)$$

Dalla terza delle (6.1) con la prima delle (6.2), si ha:

$$\begin{aligned} i_{q3} &= \frac{v_{q3} - 3\omega [L_{d3} i_{d3} - L_{13} i_{d1} + \phi_{Md3}]}{r_s + s(L_{q3} - \frac{L_{13}^2}{L_{q1}})} + \\ &\quad + \frac{\frac{L_{13}}{L_{q1}} [v_{q1} - r_s i_{q1} - \omega (L_{d1} i_{d1} - L_{13} i_{d3} + \phi_{Md1})]}{r_s + s(L_{q3} - \frac{L_{13}^2}{L_{q1}})} \end{aligned} \quad (6.5)$$

Dalla quarta delle (6.1) con la seconda delle (6.2), diventa infine immediato scrivere la relazione:

$$i_{d3} = \frac{v_{d3} + 3\omega [L_{q3} i_{q3} - L_{13} i_{q1}] + \frac{L_{13}}{L_{d1}} [v_{d1} - r_s i_{d1} + \omega (L_{q1} i_{q1} - L_{13} i_{q3})]}{r_s + s(L_{d3} - \frac{L_{13}^2}{L_{d1}})} \quad (6.6)$$

Tali espressioni risultano ora comode da rappresentare in schemi a blocchi, e dunque da tradurre in un opportuno modello Simulink. È stato scelto di rappresentarle con il metodo del "filtro passa basso". Nell'immagine 6.1 viene mostrato lo schema Simulink sviluppato per tradurre l'equazione (6.3) nel modello della simulazione.

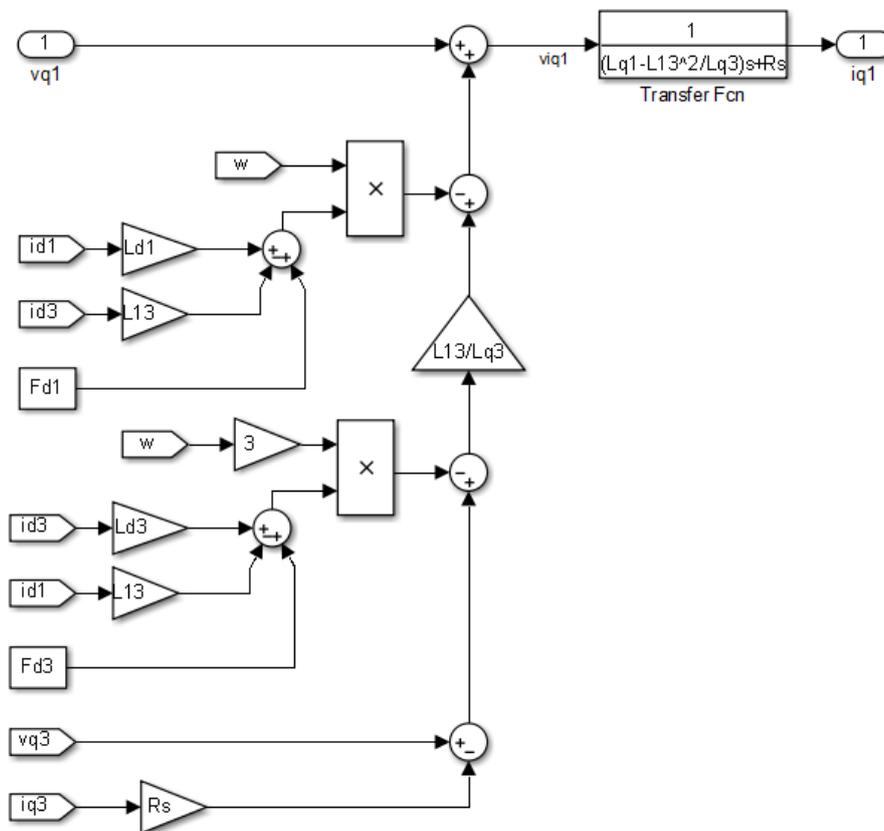


Figura 6.1: Schema a blocchi per l'equazione di macchina d'asse q rispetto al primo vettore di spazio.

La coppia sviluppata dal motore istante per istante è espressa dall'equazione (4.7),

di seguito riportata:

$$C_{em} = C_{em,riluttanza} + C_{em,principale}$$

$$C_{em,riluttanza} = \frac{5}{2}p[i_{d1}i_{q1}(L_{d1} - L_{q1}) + 3i_{d3}i_{q3}(L_{d3} - L_{q3}) + L_{13}(i_{d1}i_{q3} - i_{q1}i_{d3} + 3i_{d3}i_{q1} - 3i_{q3}i_{d1})]$$

$$C_{em,principale} = \frac{5}{2}p[\phi_{Md1}i_{q1} + 3\phi_{Md3}i_{q3}]$$

L'implementazione in Simulink del calcolo della coppia viene effettuata tramite una sequenza di operazioni elementari tra le variabili di interesse, come mostrato in figura 6.2.

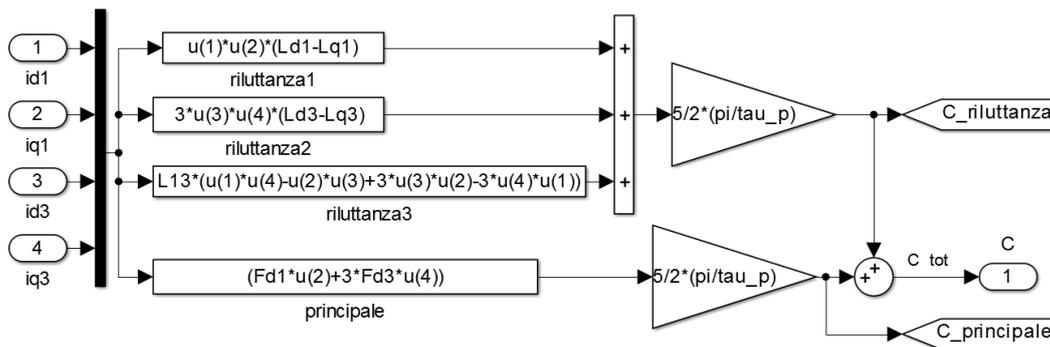


Figura 6.2: Schema a blocchi per il calcolo della coppia.

Complessivamente il modello del motore, nel sistema di riferimento rotorico, si può dunque rappresentare tenendo conto delle due tipologie di sottosistemi appena analizzati. In particolare con quattro blocchi che rappresentano le equazioni elettriche della macchina (un'equazione per ogni asse di riferimento) ed un blocco per il calcolo della coppia. Lo schema complessivo viene presentato in figura 6.3.

L'inverter, mostrato in figura 6.4, è ovviamente modellizzato nel sistema di riferimento stazionario. Esso è stato implementato come un inverter VSI ad interruttori ideali, controllato con tecnica PWM. La modulazione proposta è quella simmetrica, così da avere le migliori prestazioni possibili.

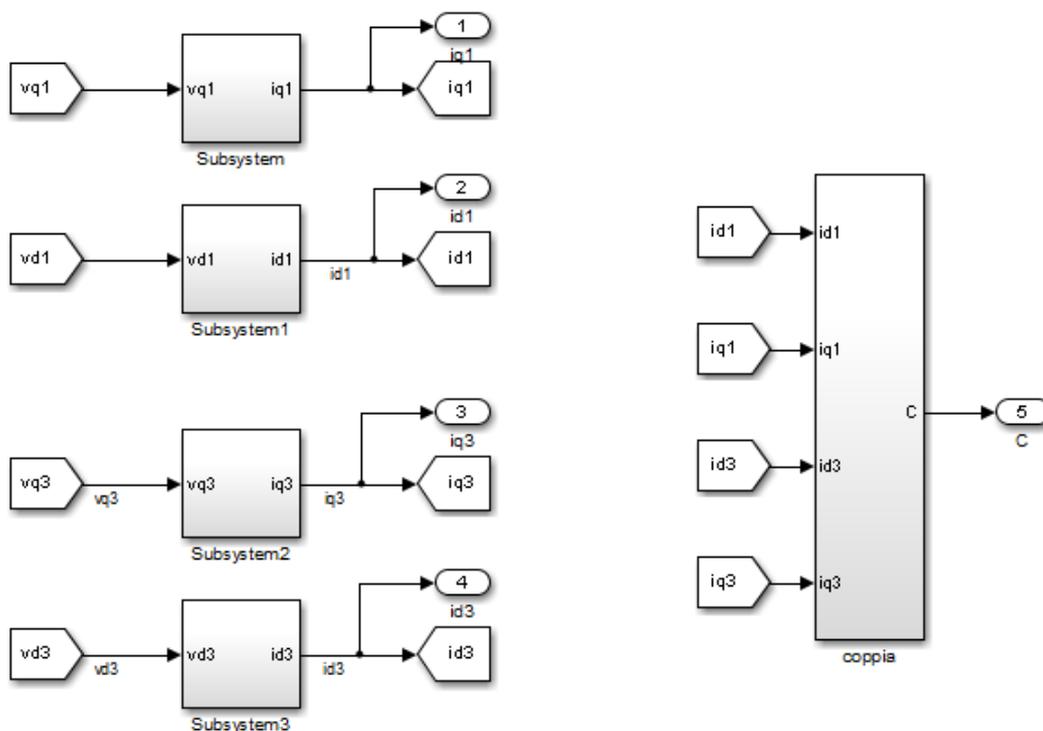


Figura 6.3: Schema a blocchi del modello del motore nel riferimento rotorico.

L'inverter ha in ingresso i riferimenti di tensione elaborati dall'algoritmo sensorless di stima della posizione rotorica, ed eventualmente anche quelli del sistema di controllo in coppia dell'azionamento. I riferimenti di tensione devono essere resi disponibili, all'ingresso dell'inverter, nella forma di tensioni di fase (a, b, c, d ed e) nel sistema di riferimento stazionario. L'inverter normalizza tali tensioni rispetto alla tensione disponibile sul collegamento in continua (bus dc). I valori ottenuti vengono opportunamente slittati di uno stesso valore ( $m_0$ ), il quale determina la tipologia di modulazione utilizzata. Nel nostro caso si è optato per implementare la modulazione simmetrica, nella quale viene imposto  $m_0 = \frac{1}{2E_{dc}}[1 - v_{min} - v_{max}]$ . Vengono così ottenuti i segnali modulanti. I blocchi Zero-order Hold di Simulink campionano il segnale di riferimento normalizzato e ne conservano il valore per ogni ciclo  $T_c$ , come nella realtà avviene attraverso i dispositivi Sample and Hold. Limitati i valori delle modulanti nell'intervallo  $[0; 1]$ , esse vengono confrontate

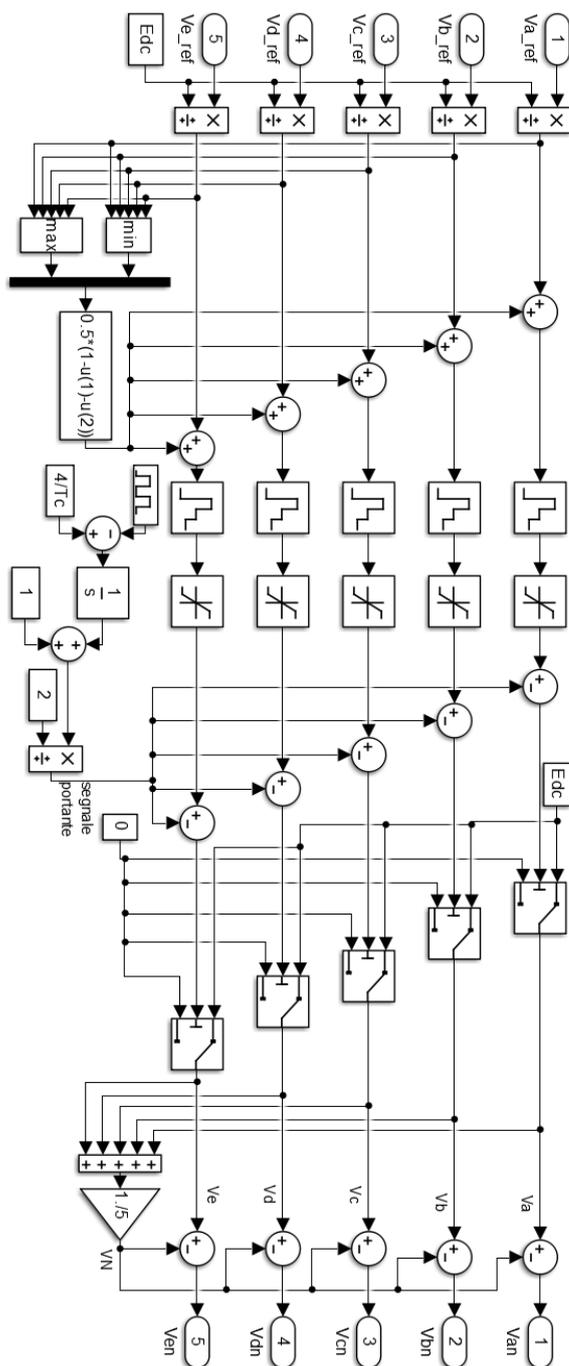


Figura 6.4: Schema a blocchi del modello dell'inverter pentafase controllato con tecnica PWM simmetrica.

con il segnale portante di tipo triangolare (anch'esso variabile nel range  $[0; 1]$ ) per ottenere istante per istante lo stato che devono assumere gli interruttori dell'inverter. Lo stato dei rami di inverter è tale da realizzare l'obiettivo finale della modulazione: alimentare le fasi statoriche con una tensione che sia, mediamente in ogni periodo di ciclo ( $T_c$ ), pari a quella di riferimento.

Infine, per interfacciare le tensioni in uscita dall'inverter con il modello del motore (scritto nel sistema di riferimento rotorico in termini di vettori di spazio), vengono utilizzate le trasformate di Clarke e di Park. La trasformata di Clarke permette di ricondurre le grandezze di fase (a, b, c, d ed e) ai vettori di spazio (0, 1, 3) o meglio alle loro rispettive componenti dq (0, q1, d1, q3, d3). Con la trasformata di Park si può invece passare a scrivere le grandezze, definite in termini di vettori di spazio, da un sistema di riferimento d'assi d-q ad un nuovo sistema di riferimento d'assi d'-q', sfasato di un angolo generico  $\alpha$  rispetto al precedente.

Tali trasformazioni risulteranno indispensabili anche nell'implementazione dell'algoritmo sensorless, come si vedrà nel paragrafo seguente.

### **6.3 Implementazione dell'algoritmo sensorless per la stima di posizione**

L'equazione (6.3), che descrive analiticamente l'algoritmo sensorless sviluppato nello spazio 3, rappresenta il punto di partenza con cui è stato implementato lo schema di stima della posizione rotorica, e viene pertanto riportata di seguito:

$$\begin{aligned} \Delta\theta &= \frac{1}{6} \arg(e^{j6\Delta\theta}) = \\ &= \frac{1}{6} \operatorname{atan2} \left[ \operatorname{LPF} \{ \bar{i}_{h3}^S e^{j\omega_h t} \} \frac{Q^2 - P^2 - \omega_h^2 (S^2 - R^2) - j 2\omega_h (QS - PR)}{(Q - j\omega_h S) \bar{V}_{h3}^*} \right] = \\ &= \frac{1}{6} \operatorname{atan2} [ \bar{I}_{i3} \bar{X} ] \end{aligned}$$

Come accennato al capitolo 5, in questa tesi sono state proposte tre metodologie per la stima di posizione:

- In catena aperta

- In catena chiusa
- In catena chiusa semplificato

Tutti i tre algoritmi si basano sull'iniezione di un segnale di tensione ad alta frequenza (nello spazio 1 o 3). L'inverter riproduce tale segnale, alimentando opportunamente le fasi statoriche con tecnica PWM simmetrica. Il motore, alimentato con tale tensione ad alta frequenza, reagisce con una corrente nelle fasi statoriche, anch'essa ad alta frequenza. Misurando la componente ad alta frequenza delle correnti statoriche, ottenibile tramite un filtro passa banda sulla misura delle correnti, si ricavano, con la trasformata di Clarke, i vettori di spazio delle correnti statoriche nel riferimento stazionario. Con la trasformata di Park si riportano i vettori di spazio delle correnti così misurate nel sistema di riferimento stimato. A questo punto ci si può portare in un sistema di riferimento sincrono con la componente inversa della corrente ad alta frequenza (nello spazio 1 o 3), moltiplicando per  $e^{j\omega_h t}$  (o meglio per  $e^{j\omega_h(t-T_c/2)}$ , se si tiene conto del ritardo dovuto alla modulazione PWM del segnale iniettato). Filtrando la componente a frequenza doppia (associata alla componente diretta del segnale di corrente ad alta frequenza), si ricava il numero complesso rappresentativo della componente inversa del segnale di corrente ad alta frequenza (nello spazio 1 o 3).

Moltiplicando il vettore della componente inversa del segnale di corrente così ottenuto per la costante complessa  $\bar{X}$ , che nel caso di implementazione della stima nello spazio 3 risulta definita come  $\bar{X} = \frac{Q^2 - P^2 - \omega_h^2(S^2 - R^2) - j2\omega_h(QS - PR)}{(Q - j\omega_h S)V_{h3}^*}$ , si ottiene  $e^{j6\Delta\theta}$  (nello spazio 3). L'argomento del risultato di tali passaggi fornisce l'angolo  $6\Delta\theta$ ; ossia, dividendo per 6, l'angolo  $\Delta\theta = \theta - \theta^S$ .

Nel caso di implementazione nello spazio 1 la costante complessa  $\bar{X}$  assume un'espressione differente e, soprattutto, al posto di avere come risultato il valore dell'angolo  $6\Delta\theta$  si ottiene un angolo pari a  $2\Delta\theta$ .

A questo punto sarebbe già possibile avere l'informazione sulla posizione rotorica se si ponesse  $\theta^S = \theta_S = 0$  (iniettando quindi il segnale di tensione nel sistema di riferimento stazionario) e si effettuasse la stima di posizione in catena aperta.

La soluzione in catena aperta, appena vista, può essere schematizzata come in figura 6.5.

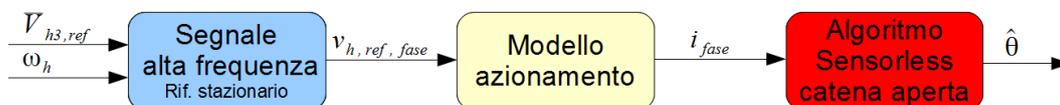


Figura 6.5: Schema a blocchi dell' algoritmo sensorless in catena aperta.

In questo caso l' algoritmo risulta ovviamente molto semplificato. Esso viene ottenuto iniettando il segnale di tensione nel sistema di riferimento stazionario ( $^S$ =stazionario e dunque  $\theta^S = 0$ ), come viene illustrato in figura 6.6.



Figura 6.6: Schema a blocchi dell' iniezione del segnale in catena aperta.

Il riferimento del segnale di tensione ad alta frequenza viene sommato direttamente con la richiesta di tensione da parte del sistema di controllo dell' azionamento. Il riferimento complessivo viene elaborato dall' inverter VSI con tecnica PWM, e le tensioni in uscita dall' inverter sono applicate direttamente al carico (ossia al motore). Lo schema logico dell' azionamento è ben rappresentato in figura 6.7.

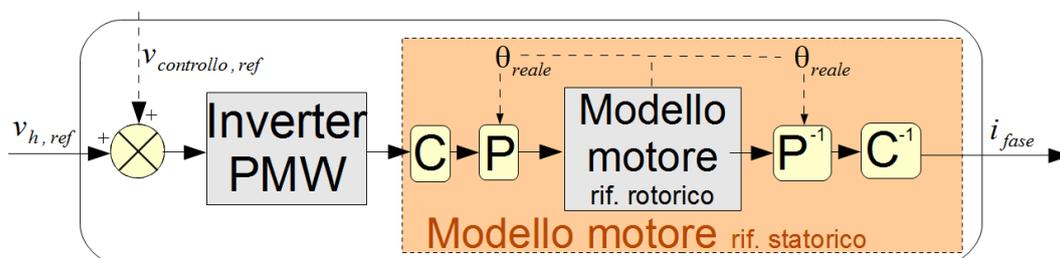


Figura 6.7: Schema a blocchi del modello dell' azionamento.

Si può notare come il modello del motore è stato implementato nel riferimento rotorico, in accordo con la trattazione svolta al paragrafo precedente.

A questo punto la stima della posizione rotorica  $\hat{\theta}$  viene effettuata direttamente seguendo l'espressione (6.3), come mostrato in figura 6.8.

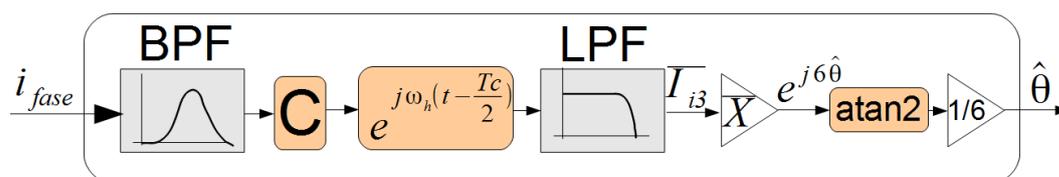


Figura 6.8: Schema a blocchi dell'algoritmo in catena aperta.

Passando dallo schema in catena aperta a quello in catena chiusa cambia lo schema dell'algoritmo sensorless. La struttura di base resta molto simile, ma concettualmente i metodi differiscono sensibilmente. In figura 6.9 è mostrato lo schema logico del metodo in catena chiusa.



Figura 6.9: Schema a blocchi dell'algoritmo sensorless in catena chiusa.

Innanzitutto il metodo in catena chiusa si basa sull'iniezione di un segnale di tensione ad alta frequenza corrispondente ad un vettore di spazio rotante ad alta frequenza nel sistema di riferimento stimato (sfasato di  $\theta^S = \hat{\theta}$  rispetto al sistema di riferimento stazionario). Per questo scopo viene introdotta la trasformata di Park all'interno del blocco di iniezione del segnale, come mostrato in figura 6.10 (gli schemi riportati sono riferiti al metodo applicato nello spazio 3).

Il metodo in catena chiusa prevede inoltre, come già visto nel capitolo 5, di considerare  $\Delta\theta = \varepsilon$ ; cioè di fare in modo che l'algoritmo di stima della posizione rotorica vari continuamente la posizione in cui viene iniettato il segnale ad alta

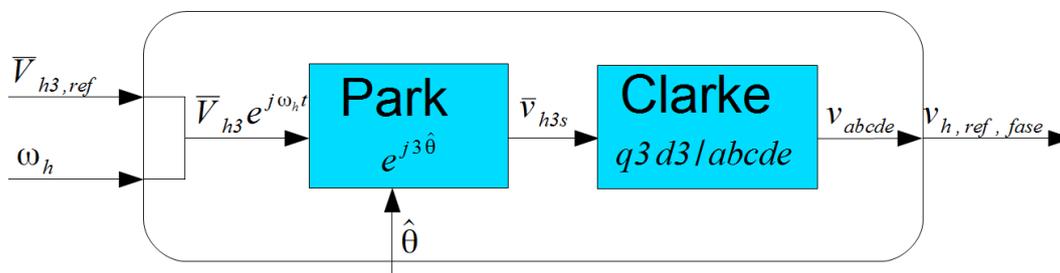


Figura 6.10: Schema a blocchi dell'iniezione del segnale in catena chiusa.

frequenza al fine di annullare tale errore. A regime, quando l'errore è nullo, si avrà  $\theta = \theta^S$  e il segnale viene iniettato in un sistema sincrono con la posizione rotorica. Viene introdotto quindi un regolatore (R) che si occupa di fare variare la posizione stimata  $\hat{\theta}$ , e dunque il sistema di riferimento in cui viene iniettato il segnale  $\theta^S$  per annullare l'errore  $\varepsilon = \theta - \theta^S$ . È importante notare come l'uscita del regolatore (R), oltre ad essere il valore stimato della posizione rotorica  $\hat{\theta}$ , rappresenti la posizione del sistema di riferimento  $\theta^S$  in cui si inietta il segnale di tensione e nel quale vengono riportate le correnti statoriche misurate, per poterle elaborare ed ottenere istante per istante il valore dell'errore  $\varepsilon$  della stima di posizione.

Lo schema a blocchi che rappresenta l'azionamento è lo stesso mostrato per il metodo in catena aperta (fig. 6.7), mentre l'algoritmo sensorless si trasforma come nello schema di figura 6.11.

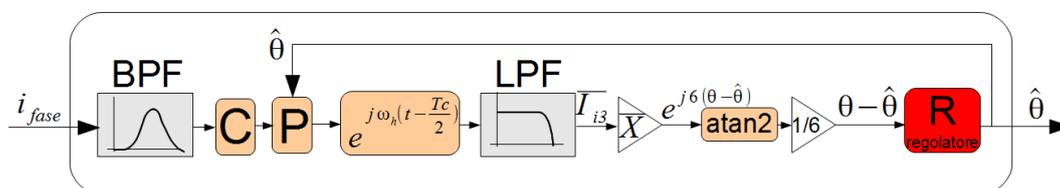


Figura 6.11: Schema a blocchi dell'algoritmo in catena chiusa.

L'ultimo metodo che è stato proposto è un ibrido tra i due precedenti, ed è stato nominato "metodo in catena chiusa semplificato". Lo schema che lo caratterizza

è quello in figura 6.12.

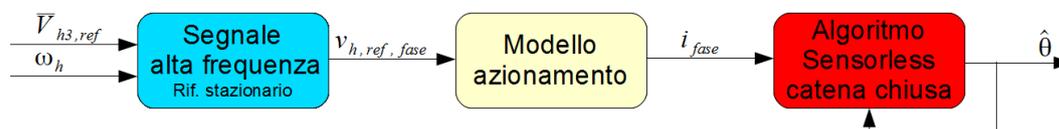


Figura 6.12: Schema a blocchi dell'algoritmo sensorless in catena chiusa semplificato.

L'idea di base è quella di iniettare il segnale di tensione nel sistema di riferimento stazionario, mantenendo tuttavia una retroazione dell'angolo stimato. Come nel caso in catena chiusa, è presente un regolatore che fa variare la sua uscita con lo scopo di annullare l'errore che gli si presenta in ingresso. L'uscita del regolatore viene dunque retroazionata come posizione del sistema di riferimento nel quale vengono riportate le correnti misurate, per elaborarle ed ottenere istante per istante il valore dell'errore della stima di posizione. La grande differenza rispetto al metodo in catena chiusa è che il segnale di tensione ora non è più iniettato nel sistema sincrono; in particolare viene iniettato in un sistema di riferimento con uno sfasamento pari alla posizione rotorica rispetto al rotore stesso. Tenendo conto di tale sfasamento è possibile dunque ricondursi, tramite la conoscenza della posizione stimata, ad uno schema formalmente molto simile al precedente (in catena chiusa) ma concettualmente notevolmente differente. L'algoritmo descritto è mostrato in figura 6.13.

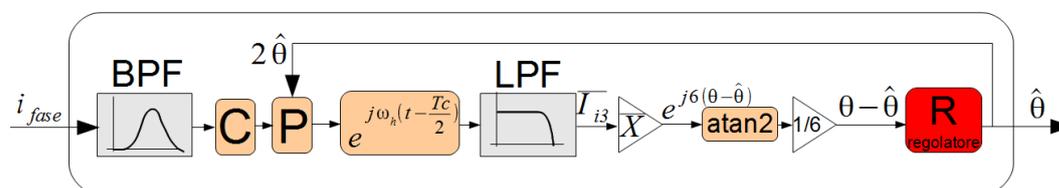


Figura 6.13: Schema a blocchi dell'algoritmo in catena chiusa semplificato.

Si noti come (in figura 6.13) la retroazione dell'angolo stimato  $\hat{\theta}$  entra nel blocco della trasformata dopo essere stata moltiplicata per 2. In questo modo viene

compensato lo sfasamento dell'iniezione del segnale di tensione ad alta frequenza rispetto alla posizione rotorica.

Quest'ultimo metodo può sembrare più semplice in quanto presenta un ramo in meno di retroazione del segnale stimato, pertanto è stato definito come "metodo in catena chiusa semplificato". Tuttavia il principio su cui si basa è meglio rappresentato dal "metodo in catena chiusa". Infatti, il metodo "semplificato" altro non è che un tentativo di rendere più robusto e agevole l'algoritmo in catena chiusa.

## 6.4 Taratura del regolatore e scelta dei parametri per le simulazioni

L'algoritmo in catena chiusa presenta uno schema simile a quello di un circuito di controllo di tipo "Phase-Locked Loop (PLL)", ossia di un circuito che ha l'obiettivo di sincronizzare due segnali sia in termini di frequenza che in termini di fase. Il regolatore è stato tarato per rispondere alle seguenti specifiche del sistema in retroazione:

- sistema asintoticamente stabile;
- errore a regime nullo per un ingresso a gradino;
- errore a regime nullo per un ingresso a rampa (funzionamento a velocità costante);
- tempi di assestamento il più brevi possibili;
- sovraelongazioni minori possibili (idealmente assenti).

Sono stati provati diversi tipi di regolatori (PI, PID ecc.), ma la scelta effettuata, in accordo con [21] e [8], è stata quella di analizzare tipologie di regolatori di tipo I (puro integratore) e II (con in aggiunta all'integratore un doppio integratore in parallelo). È stato provato anche un regolatore di tipo III (con in parallelo al regolatore di tipo II un triplo integratore). Un integratore nel regolatore impone un

polo nell'origine che è necessario per assicurare un errore nullo a regime a fronte di un ingresso costante (gradino). L'uso di un puro integratore, con un opportuno guadagno, rende meno probabile il causarsi di instabilità del sistema, mantenendo più alto il margine di fase, ed assicura l'ottenimento dell'informazione di posizione quando il rotore segue una rampa e si assesta in una nuova posizione. Tale scelta è stata seguita in [8]. Tuttavia, durante il transitorio a velocità costante vi è un errore anch'esso costante che è tanto più elevato quanto più la rampa è ripida, ossia quanto maggiore è la velocità. Per poter seguire anche profili di velocità costanti del rotore con un errore di inseguimento della posizione nullo è stato aggiunto un doppio integratore come in [21]. Il regolatore è stato realizzato dunque come un regolatore PI (del tipo  $K_p + \frac{K_i}{s}$  opportunamente tarato) in serie ad un puro integratore ( $\frac{1}{s}$ ), come mostrato in figura 6.14.

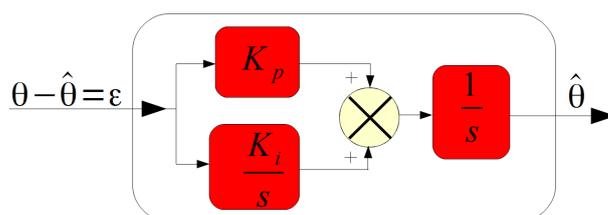


Figura 6.14: Schema a blocchi del regolatore implementato negli algoritmi in catena chiusa.

Tale scelta è stata quella maggiormente utilizzata durante le simulazioni ed in fase sperimentale, ed è quella più diffusa in letteratura nella taratura dei circuiti PLL. Alcune soluzioni alternative per ottimizzare i circuiti PLL nel caso di inseguimento di segnali a frequenza variabile sono state proposte in [22] e [23]. In questa tesi è stato provato anche un regolatore di tipo III, con l'idea di poter inseguire la posizione rotorica anche nelle fasi ad accelerazione costante. Tale scelta è stata provata senza essere poi utilizzata, poiché non ha apportato sensibili vantaggi in termini di prestazioni dell'algoritmo sensorless, rendendo più complesso l'algoritmo ed implicando un maggior rischio di instabilità a seguito della riduzione del margine di fase di  $90^\circ$ . La taratura del regolatore di tipo II è stata svolta in prima analisi in modo analitico, considerando la presenza del solo regolatore nella fun-

zione di trasferimento del sistema in catena aperta, così da analizzare in termini di diagramma di Bode le relazioni necessarie tra le costanti  $K_p$  e  $K_i$  per rispettare le specifiche sul sistema in retroazione (in catena chiusa). Tramite la funzione "step" di Matlab si è vista l'importanza di usare un regolatore di tipo II rispetto a quelli di tipo I, confrontando le simulazioni delle risposte al gradino unitario e alla rampa. Allo stesso tempo si sono potute verificare le variazioni in termini di tempi di assestamento e sovraelongazioni al variare delle costanti  $K_p$  e  $K_i$ .

Dovendo il regolatore agire su un sistema difficilmente rappresentabile in termini di funzioni di trasferimento, per poter tarare opportunamente il regolatore, si è presto passati alla simulazione in ambiente Simulink dell'algoritmo di stima della posizione sensorless.

Durante le simulazioni si è potuto verificare come le prestazioni dell'algoritmo risultino molto sensibili, oltre che alla taratura dei regolatori, alla scelta della costante di tempo del filtro passa basso (LPF). Il filtro passa basso ha il compito di estrapolare la componente a bassa frequenza del segnale al suo ingresso, la quale contiene l'informazione sulla posizione (o meglio sull'errore di posizione, nei metodi in catena chiusa). È fondamentale che il filtro non vada a rallentare la dinamica dell'algoritmo di controllo. Esso è posto nella serie dei calcoli necessari alla stima della posizione e pertanto non deve agire sulle componenti alla frequenza elettrica rotorica, altrimenti la stima di posizione e l'iniezione del segnale avvengono con un ritardo che può compromettere la stabilità dell'algoritmo.

Dopo diversi tentativi si sono trovati i valori delle costanti del regolatore e del filtro passa basso in grado di ottimizzare la stima di posizione:

- $K_p = 1000 \text{ s}^{-1} \wedge K_i = 1000 \text{ s}^{-2}$  per l'algoritmo implementato nello spazio 1;
- $K_p = 100 \text{ s}^{-1} \wedge K_i = 1000 \text{ s}^{-2}$  per l'algoritmo implementato nello spazio 3.

L'ultimo passo necessario, per poter effettuare le simulazioni in modo appropriato, è quello di definire i parametri dell'azionamento da inserire nel modello. A questo scopo, si è scelto di considerare dei valori derivati da quelli utilizzati in studi

precedenti a questo lavoro di tesi sul prototipo di motore tubolare in studio. Si è tenuto conto delle relazioni teoriche esistenti tra i diversi parametri di macchina (quelli del modello semplificato, nel sistema di riferimento rotorico, definiti dalle equazioni 4.46) e si è supposto un basso livello di anisotropia ( $L_{d1} = 0.8L_{q1}$ ). Dalle relazioni del capitolo 4, assieme ai dati forniti in [6], sono stati scelti infine i seguenti parametri dell'azionamento.

Parametri relativi all'inverter:

- tensione sul bus dc:  $E_{dc} = 100 V$ ;
- periodo di ciclo della modulazione PWM:  $T_c = 200e - 6 s$ .

Parametri relativi al segnale di tensione iniettato ad alta frequenza:

- ampiezza del segnale:  $V_h = 30 V$ ;
- frequenza del segnale:  $f_h = 1000 Hz$ ;
- pulsazione del segnale:  $\omega_h = 6283 Hz$ .

Parametri relativi al motore:

- resistenza degli avvolgimenti statorici:  $R_s = 6.5 \Omega$ ;
- coefficiente di autoinduzione d'asse q nello spazio 1:  $L_{q1} = 17.70 mH$ ;
- coefficiente di autoinduzione d'asse d nello spazio 1:  $L_{d1} = 14.16 mH$ ;
- coefficiente di autoinduzione d'asse q nello spazio 3:  $L_{q3} = 4.00 mH$ ;
- coefficiente di autoinduzione d'asse d nello spazio 3:  $L_{d3} = 4.13 mH$ ;
- coefficiente di mutuainduzione tra gli assi nello spazio 1 e gli assi nello spazio 3:  $L_{13} = 1.18 mH$ ;
- flusso concatenato dovuto ai magneti permanenti d'asse d nello spazio 1:  $\phi_{d1} = 0.0431 Wb$ ;

- flusso concatenato dovuto ai magneti permanenti d'asse d nello spazio 3:  
 $\phi_{d3} = 0.0036 \text{ Wb}$ ;
- numero di coppie di poli:  $p = 1$ .

Parametri relativi all'algoritmo sensorless:

- ritardo nell'iniezione del segnale dovuto alla modulazione PWM dell'inverter:  $\text{ritardo}_{\text{inverter}} = Tc/2$ ;
- costante di tempo del filtro passa basso:  $\tau_{LPF} = 0.05 \text{ s}$ ;
- costante proporzionale del regolatore (R) :  $K_p = 1000 \text{ s}^{-1}$  nello spazio 1  $\wedge$   $K_p = 100 \text{ s}^{-1}$  nello spazio 3;
- costante integrativa del regolatore (R) :  $K_i = 1000 \text{ s}^{-2}$  in entrambi gli spazi.

Tarato il regolatore e definiti i parametri dell'azionamento, è possibile verificare le prestazioni dell'algoritmo sensorless, implementato secondo i tre metodi analizzati. Nel seguente paragrafo sono mostrati alcuni dei risultati delle simulazioni svolte.

## 6.5 Risultati delle simulazioni

Per le simulazioni svolte, occorre ricordare come la trattazione per lo sviluppo dell'algoritmo in tutti e tre i metodi si presenta per lo spazio 1 in modo analogo a quella nello spazio 3. Le uniche differenze sostanziali riguardano la periodicità dell'anisotropia e la taratura del regolatore.

Si è ritenuto utile riportare i risultati sulla stima della posizione rotorica ottenuti per le simulazioni elencate di seguito.

Simulazioni con metodo in catena aperta (solo nello spazio 3):

- a rotore fermo (posizione iniziale 0.3 radianti);
- per un piccolo spostamento (0-2.5 radianti).

Simulazioni con metodo in catena chiusa:

- a rotore fermo nello spazio 1 (posizione iniziale 0.3 radianti);
- a rotore fermo nello spazio 3 (posizione iniziale 0.3 radianti);
- dinamica prossima al limite della stabilità dell'algoritmo nello spazio 1;
- dinamica prossima al limite della stabilità dell'algoritmo nello spazio 3;
- aumento progressivo della velocità, fino alla perdita di stabilità dell'algoritmo nello spazio 1;
- aumento progressivo della velocità, fino alla perdita di stabilità dell'algoritmo nello spazio 3.

Simulazioni con metodo in catena chiusa semplificato:

- dinamica prossima al limite della stabilità dell'algoritmo nello spazio 1;
- dinamica prossima al limite della stabilità dell'algoritmo nello spazio 3 (figura omessa in quanto identica a quella ottenuta con il metodo in catena chiusa).

Per la simulazione in catena chiusa svolta nello spazio 3 sono stati riportati inoltre gli andamenti di:

- stima della velocità ed errore di tale stima;
- ampiezza del primo vettore di spazio delle correnti statoriche;
- ampiezza del terzo vettore di spazio delle correnti statoriche;
- ampiezza della componente inversa della corrente di spazio 3 ad alta frequenza;
- ampiezza del segnale in ingresso al blocco "atan2" (teoricamente  $e^{j6\Delta\theta}$ ).

Infine viene descritta un'ultima simulazione, per mostrare i risultati ottenuti con l'implementazione del sistema di controllo sensorless. Questo per confermare la possibilità di realizzare un sistema di controllo sensorless retroazionando i segnali di posizione e velocità stimati ottenuti con i metodi da noi proposti. In particolare si riporta il risultato per:

- Simulazione del sistema di controllo sensorless realizzato con l'implementazione dell'algoritmo in catena chiusa nello spazio 3.

### 6.5.1 Simulazioni con metodo in catena aperta

La prima simulazione (figura 6.15) mostra la stima effettuata dall'algoritmo implementato in catena aperta nello spazio 3 quando il rotore si trova fermo in una posizione diversa da zero (in questo caso 0.3 radianti) e viene attivato il meccanismo di stima di posizione.

La stima di posizione in catena aperta quando il rotore è fermo risulta dunque possibile, con un'oscillazione a 2 kHz nel valore della stima con ampiezza picco-picco attorno agli 0.04 radianti. Questo è dovuto al fatto che la componente diretta della corrente ad alta frequenza non è filtrata totalmente, per non rendere troppo lento l'algoritmo di stima. Nella seconda simulazione 6.16 il rotore viene portato da 0 a 2,5 radianti.

Si nota come durante il transitorio l'errore di stima aumenta con l'aumentare della velocità. Oltre a tale errore, inaccettabile già per basse velocità di funzionamento, la stima di posizione presenta un andamento limitato tra  $\pm\pi/6$ . Questo è causato dalla presenza del blocco "atan2", il quale fornisce in uscita il valore di  $\hat{\theta}$  limitato tra  $\pm\pi$ . Nell'ultima parte della simulazione il fenomeno risulta molto evidente in quanto il ripple del valore dell'angolo stimato continua a farlo oscillare attorno al limite superiore.

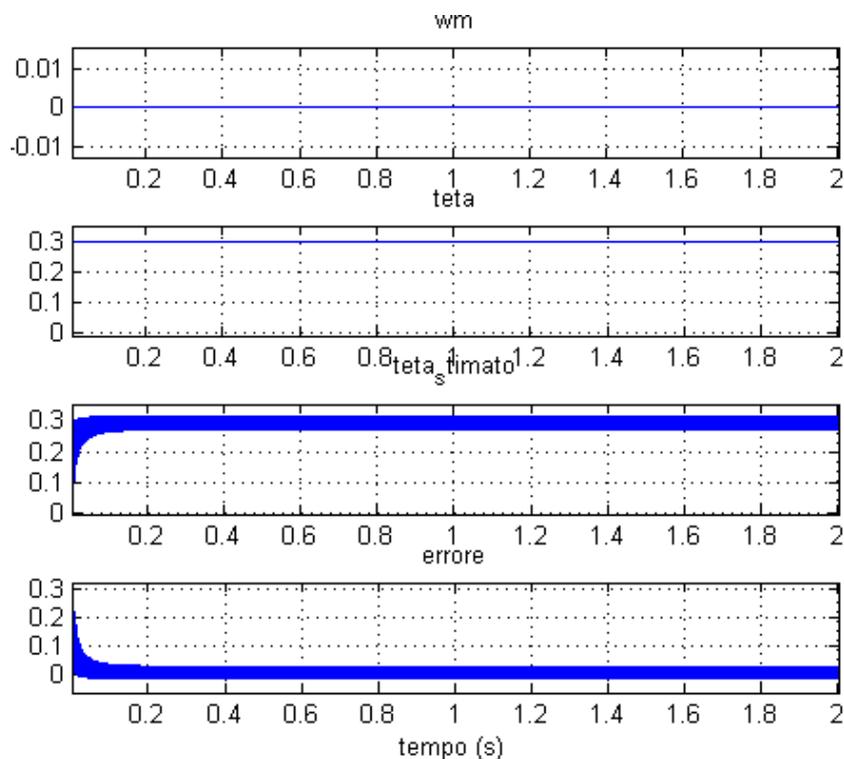


Figura 6.15: Stima di posizione a rotore fermo dell' algoritmo in catena aperta nello spazio 3.

### 6.5.2 Simulazioni con metodo in catena chiusa

Attraverso gli schemi in catena chiusa le prestazioni dell' algoritmo di stima della posizione rotorica aumentano sensibilmente. La prima simulazione 6.17 mostra la stima effettuata dall' algoritmo implementato in catena chiusa nello spazio 1 quando il rotore si trova fermo in una posizione diversa da zero (in questo caso 0.3 radianti) e viene attivato il meccanismo di stima di posizione.

La stima di posizione in catena chiusa quando il rotore è fermo risulta decisamente migliore di quella in catena aperta, non presentando alcun tipo di oscillazione a regime. Lo stesso avviene nello spazio 3, come si vede in figura 6.18 dove sono riportati i risultati ottenuti con le stesse condizioni di funzionamento del motore. In figura 6.19 il rotore viene portato da fermo ( in posizione zero) a 200 radianti e nuovamente alla posizione iniziale. La velocità con cui avviene il transitorio au-

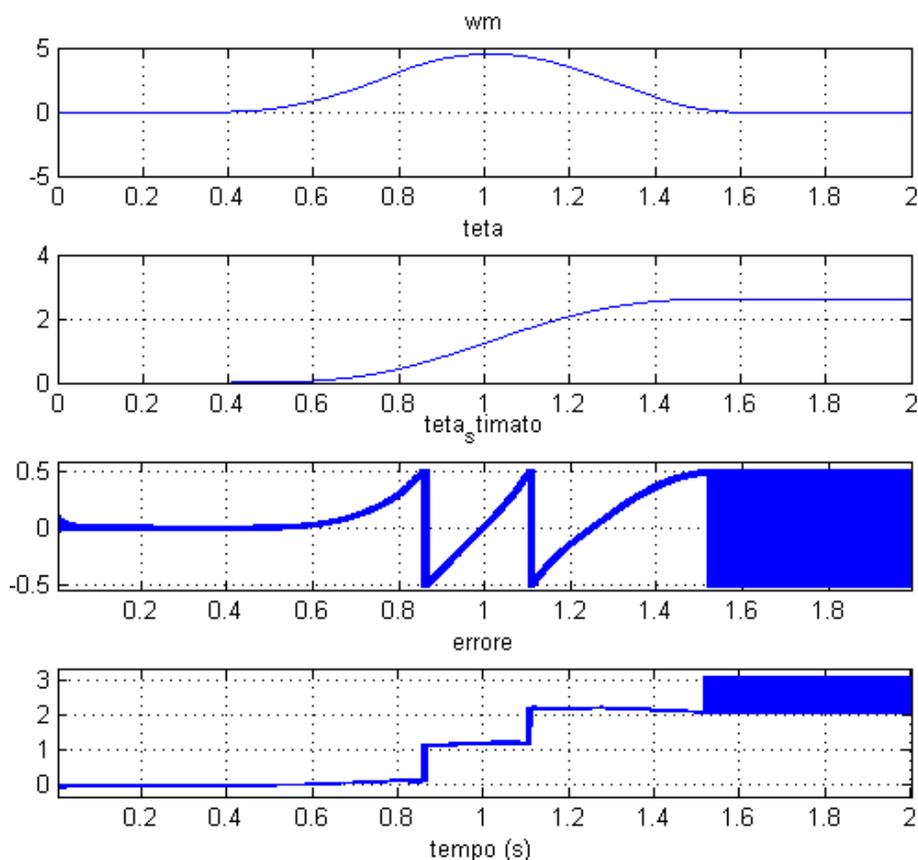


Figura 6.16: Stima di posizione dell'algorithm in catena aperta nello spazio 3.

menta gradualmente fino a poco più di 400 rad/s, per poi ridursi fino ad invertirsi, superare i - 400 rad/s e tornare ad annullarsi. Anche in questo caso viene riportata prima la simulazione svolta nello spazio 1.

Si noti come l'errore di posizione aumenta con l'aumentare della velocità. La stima risulta comunque buona finché si resta a basse velocità e non è disturbata dall'inversione del moto. Bisogna inoltre osservare come l'errore tenda nuovamente ad annullarsi quando la velocità si riduce fino a fermarsi (fenomeno che in una macchina di tipo lineare avviene necessariamente al termine di ogni corsa). Se si esegue la stessa simulazione stimando la posizione nello spazio 3 l'algorithm diverge. Nel corso della tesi si è potuto verificare che implementare l'algorithm di stima della posizione nello spazio 3 risulti più difficile che nello spazio 1. Nello

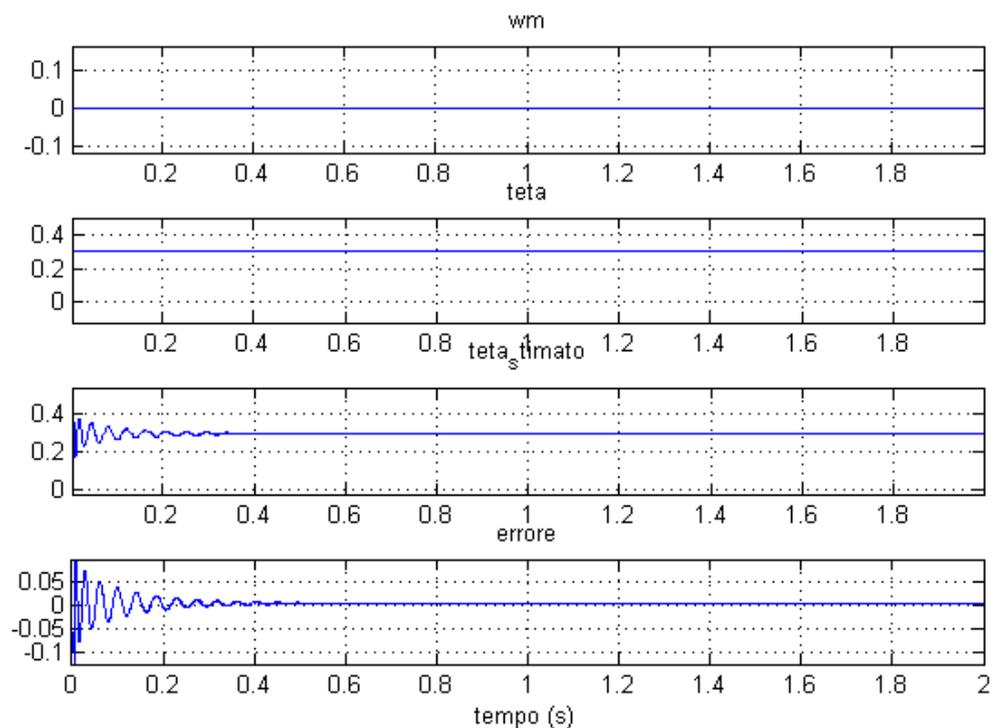


Figura 6.17: Stima di posizione a rotore fermo dell' algoritmo in catena chiusa nello spazio 1.

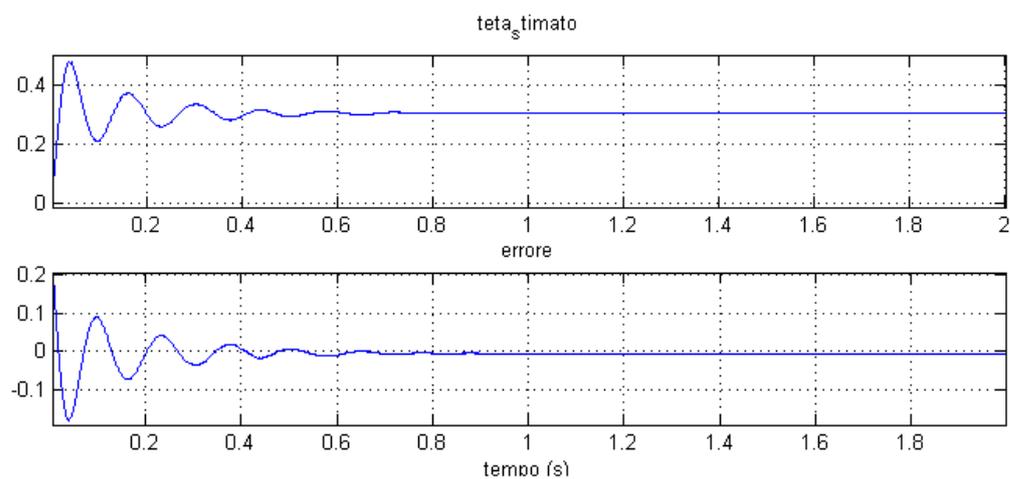


Figura 6.18: Stima di posizione a rotore fermo dell' algoritmo in catena chiusa nello spazio 3.

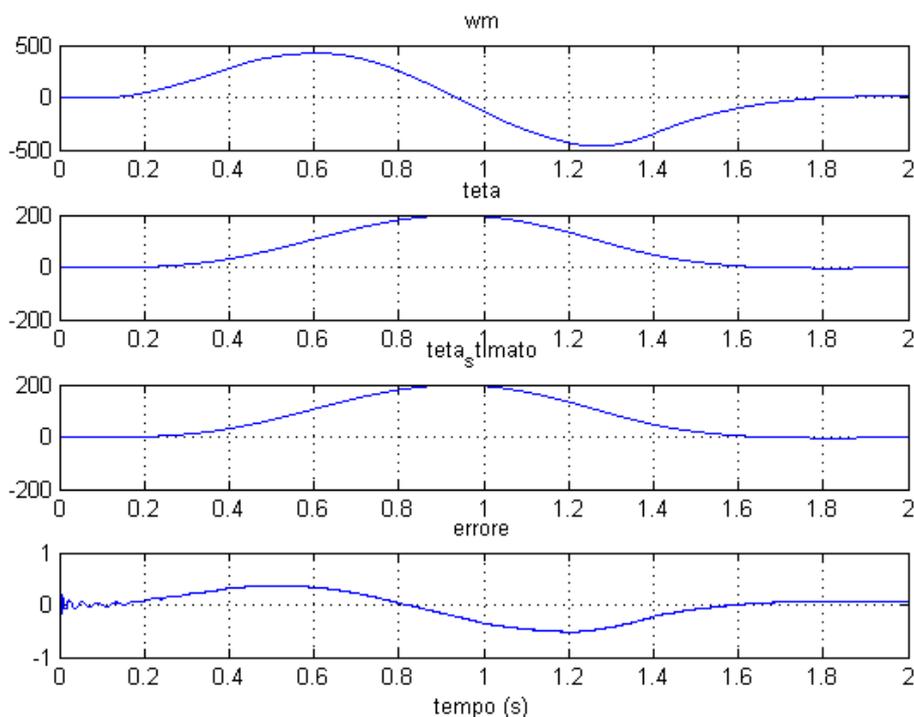


Figura 6.19: Stima di posizione con l' algoritmo in catena chiusa nello spazio 1, per un transitorio 0-200-0 radianti.

spazio 3 la taratura dei regolatori permette la stabilità dell' algoritmo in un range minore di variazione delle costanti  $K_p$  e  $K_i$  e all' aumentare della velocità del rotore la stima risulta presto più critica rispetto a quella effettuata nello spazio 1.

La figura 6.20 mostra la stima di posizione per un funzionamento della macchina prossimo al limite delle prestazioni dell' algoritmo di stima nello spazio 3.

In figura 6.21 è illustrato l' andamento della perdita di funzionamento dell' algoritmo sensorless nello spazio 1.

La velocità viene fatta aumentare in modo graduale fino a quando si nota che la stima di posizione risulta errata. Si vede come, oltre i 600 rad/s l' algoritmo inizia a diventare instabile. Riducendo la velocità, anche se l' algoritmo tornasse stabile la sincronizzazione avverrebbe per un angolo rotorico diverso da quello iniziale. Pertanto, la perdita anche transitoria del funzionamento dell' algoritmo risulta inaccettabile nella pratica, ponendo limitazioni alla massima velocità a cui

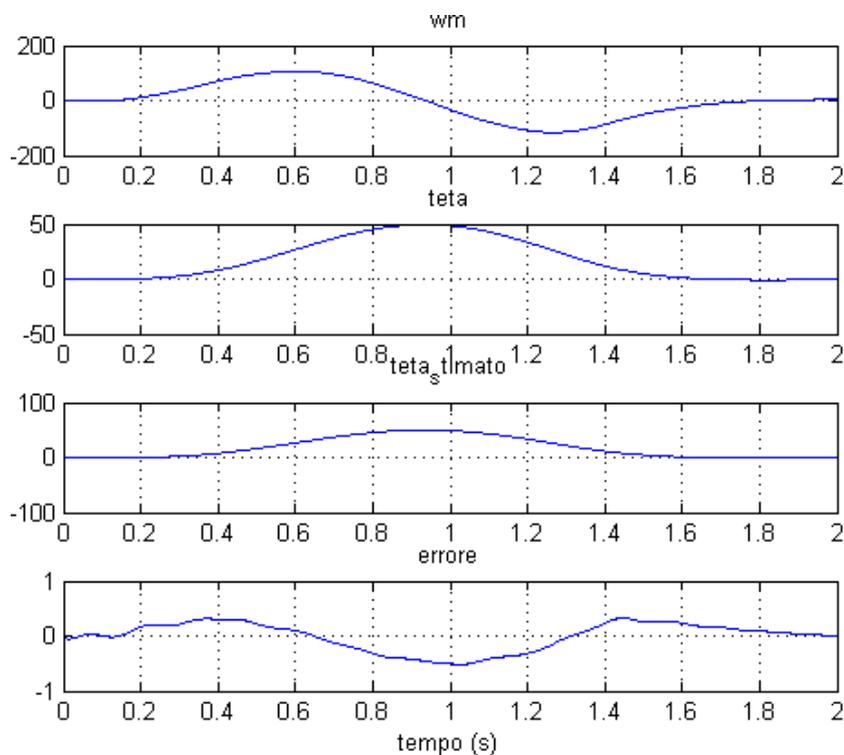


Figura 6.20: Stima di posizione con l'algoritmo in catena chiusa nello spazio 3, per un transitorio 0-50-0 radianti.

può essere utilizzato l'algoritmo.

Nello spazio 3 invece, a parità di rampa di velocità, l'algoritmo si perde poco dopo i 150 rad/s, con l'andamento della stima di posizione mostrato in figura 6.22.

### 6.5.3 Simulazioni con metodo in catena chiusa "semplificato"

Le ultime simulazioni riguardano l'algoritmo semplificato.

Le simulazioni svolte con l'algoritmo in catena chiusa semplificato, sia nello spazio 3 che nello spazio 1, hanno dato risultati del tutto analoghi a quelli ottenuti nel caso in catena chiusa. Quindi possiamo affermare che a livello di simulazione i due metodi hanno fornito gli stessi risultati.

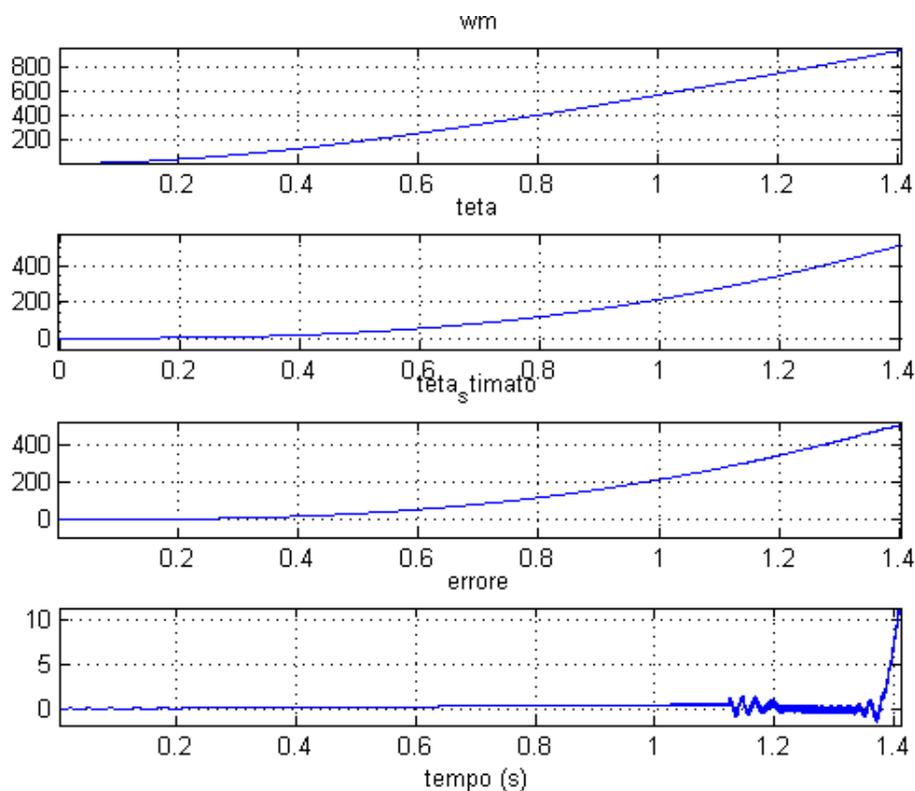


Figura 6.21: Stima di posizione con l' algoritmo in catena chiusa nello spazio 1, per una rampa fino alla divergenza.

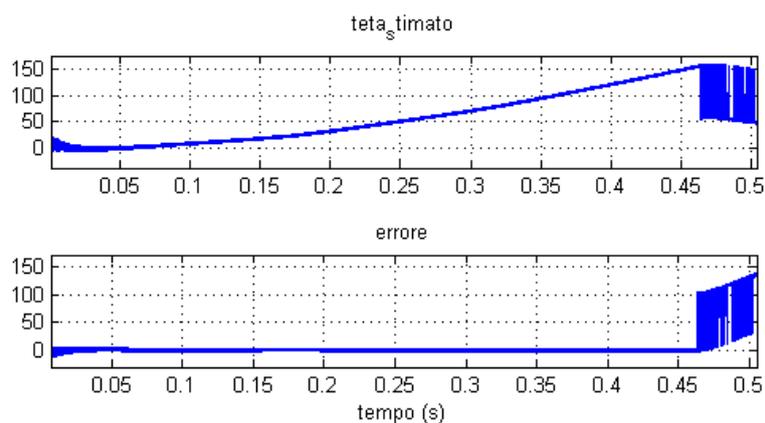


Figura 6.22: Stima di posizione con l' algoritmo in catena chiusa nello spazio 3, per una rampa fino alla divergenza.

Dal punto di vista teorico, i due algoritmi in catena chiusa sono basati sullo stesso principio, con la sola differenza di uno sfasamento (corrispondente alla stima di posizione) identico per l'iniezione del segnale e per l'elaborazione delle correnti di fase.

#### **6.5.4 Andamenti di grandezze rilevanti, ottenuti durante le simulazioni con metodo in catena chiusa nello spazio 3**

Oltre ai grafici precedentemente presentati, risulta interessante riportare gli andamenti di altre grandezze. Per chiarezza, queste vengono riportate per la stessa simulazione presentata in figura 6.20: stima di posizione con metodo in catena chiusa nello spazio 3, 0-50-0 radianti.

Innanzitutto, all'uscita del regolatore è presente il segnale di stima della posizione, a monte del quale vi è un puro integratore. Pertanto, il segnale prima dell'integratore rappresenta la stima della velocità rotorica. In figura 6.23 viene presentato l'andamento della stima di velocità ottenibile con l'algoritmo sensorless implementato.

La stima di velocità risulta notevolmente rumorosa e con un errore inaccettabile per effettuare un controllo di velocità basato sulla retroazione di tale segnale. Una possibilità per la retroazione del segnale di stima della velocità può essere quella di filtrarlo al fine di ridurre il ripple. Un ulteriore inconveniente della stima di velocità è la presenza di fenomeni oscillatori smorzati (visibile nell'andamento dell'errore di stima), tipici di risposte di sistemi del secondo ordine, con tempi di assestamento lenti rispetto alla dinamica del motore.

In figura 6.24 è mostrata l'ampiezza del primo vettore di spazio delle correnti statoriche.

Nonostante il segnale ad alta frequenza venga iniettato nello spazio 3, la presenza di un mutuo accoppiamento tra gli spazi 1 e 3 genera una circolazione di corrente anche nello spazio 1. Tale fenomeno, in accordo con la teoria del capitolo 4, è stato verificato sperimentalmente, come mostrato in figura 6.24. Esso è dovuto

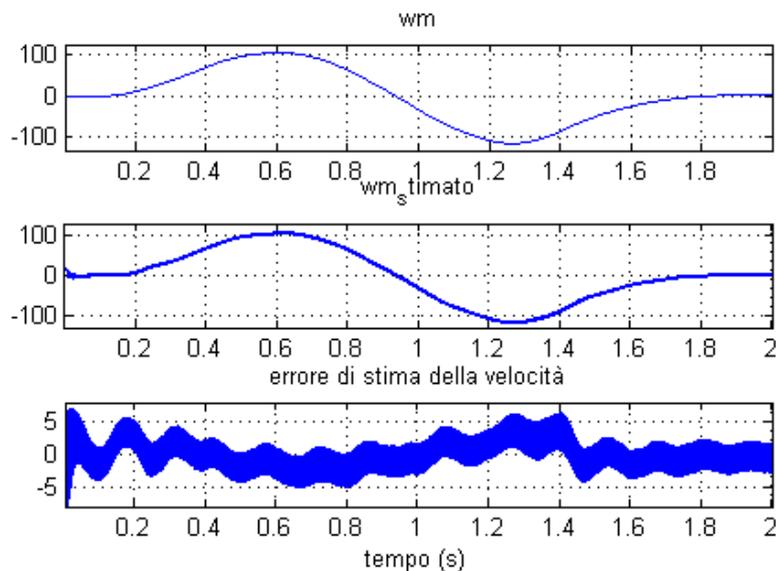


Figura 6.23: Stima di velocità.

alla presenza del termine  $L_{13}$  associato all'anisotropia della macchina pentafase. In figura 6.25 è mostrata l'ampiezza del terzo vettore di spazio delle correnti statoriche.

L'ampiezza della componente inversa della corrente di spazio 3 viene invece riportata in figura 6.26.

L'ampiezza della componente inversa della corrente di spazio 3 è il segnale che contiene l'informazione sulla posizione rotorica rispetto al sistema di riferimento stimato  $\Delta\theta$ . Si può osservare come tale componente ha un'ampiezza che risulta due ordini di grandezza inferiore rispetto all'ampiezza della corrente complessiva di spazio 3. La stessa analisi svolta per le correnti nello spazio 1, quando viene iniettato il segnale di tensione nello spazio 1, risulta in un rapporto tra i moduli della componente inversa e quella complessiva di un solo ordine di grandezza. Questa osservazione sembra far preferire l'implementazione dell'algoritmo di stima sensorless sullo spazio 1. Tuttavia è anche vero che le induttanze nello spazio 1 sarebbero circa nove volte superiori a quelle nello spazio 3 se la macchina fosse isotropa e si trascurassero le induttanze di dispersione (vedi eq. 4.46). Si

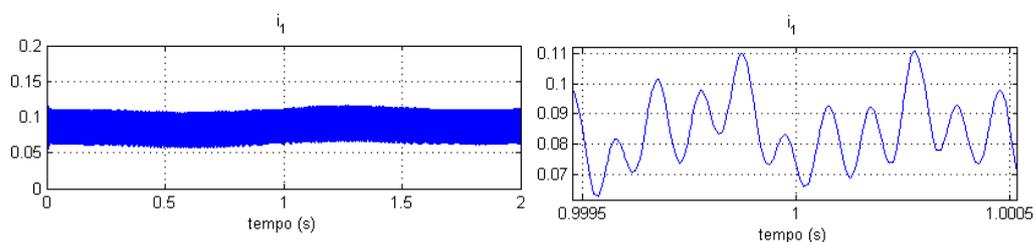


Figura 6.24: Ampiezza del primo vettore di spazio delle correnti statoriche.

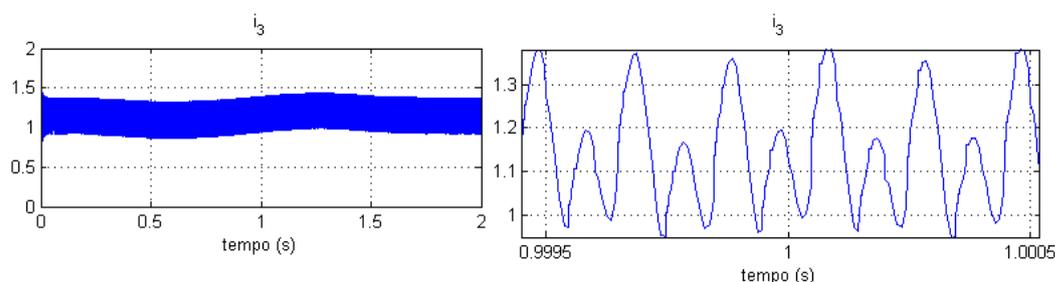


Figura 6.25: Ampiezza del terzo vettore di spazio delle correnti statoriche.

può quindi affermare che, a parità di ampiezza del segnale di tensione iniettato e per un motore con parametri paragonabili a quelli supposti per il modello studiato, l'ampiezza della componente inversa di corrente ottenuta con il metodo nello spazio 1 è superiore a quella inversa che si ha con il metodo nello spazio 3, ma il rapporto tra i due valori va valutato di macchina in macchina. Il rapporto dipende soprattutto dal livello di anisotropia e dai valori delle induttanze di dispersione, e nel caso della simulazione è risultato circa di 3.

Per verificare di aver svolto correttamente la soluzione analitica dell'algoritmo di stima sensorless nel capitolo 5, si è visualizzato il segnale in ingresso al blocco "atan2" (vedi figura 6.27). Dalla teoria del capitolo 5, ci aspettiamo di poter ottenere il termine esponenziale contenente l'errore di stima della posizione ( $e^{j6\Delta\theta}$ ) moltiplicando la componente inversa della corrente ad alta frequenza nello spazio 3 per la costante  $\bar{X}$ . La presenza di un errore nullo a regime, nella stima di posizione, è indice che la fase del vettore  $\bar{X}$  sia definita analiticamente in modo

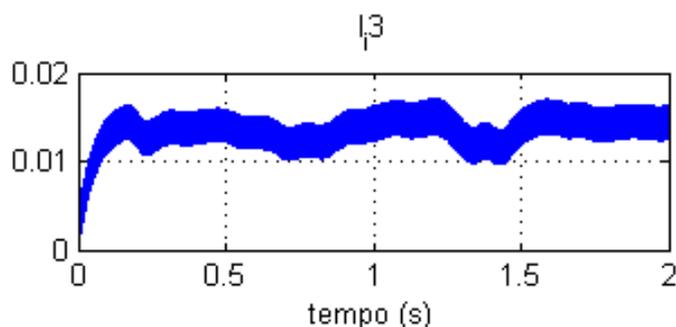


Figura 6.26: Ampiezza della componente inversa della corrente di spazio 3.

corretto. Se così non fosse, si avrebbe un errore nullo in ingresso al regolatore solo quando alla sua uscita fosse presente una stima di posizione pari all'errore commesso nel definire la fase di  $\bar{X}$ . Ai fini dell'algoritmo sarebbe sufficiente conoscere la fase di  $\bar{X}$ ; tuttavia attraverso le simulazioni è stato possibile verificare anche l'esattezza dell'espressione analitica di  $\bar{X}$  in termini di ampiezza. A tale scopo occorre visualizzare il segnale in figura 6.27.

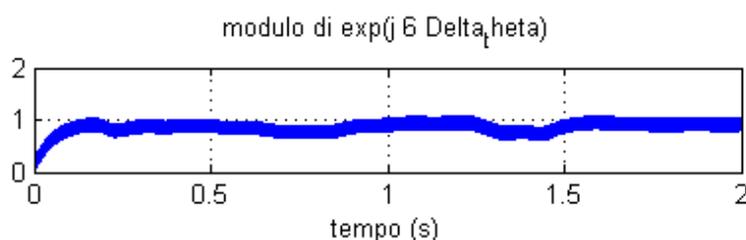


Figura 6.27: Segnale in ingresso al blocco "atan2".

Dalla figura 6.27 si vede come l'ampiezza del segnale in ingresso al blocco "atan2" è circa unitaria. Dalla teoria del capitolo 5 sappiamo che tale valore dovrebbe corrispondere al modulo di  $e^{j6\Delta\theta}$  (ossia esattamente 1). Quindi l'espressione analitica trovata per  $\bar{X}$  risulta corretta sia in ampiezza che in fase. Questo risultato è molto importante per sostenere la teoria alla base del metodo di stima implementato. In fase sperimentale, la forte dipendenza del termine  $\bar{X}$  da tutti i parametri di macchina fa perdere importanza all'espressione analitica per la sua determi-

nazione. Viene lasciata comunque in risalto la proprietà del termine  $\bar{X}$  di essere una costante complessa, risultato importantissimo del lavoro di tesi.

### 6.5.5 Simulazione del sistema di controllo sensorless realizzato con l'implementazione dell'algorithm in catena chiusa nello spazio 3

Per concludere il lavoro di simulazione dell'algorithm sensorless è stata verificata la possibilità di retroazionare i segnali di posizione e velocità stimati per realizzare il controllo sensorless dell'azionamento. Per tale scopo si è scelto di implementare un controllo di velocità dell'azionamento. Dopo una rapida taratura dei regolatori e dei filtri necessari per retroazionare la velocità stimata, è stato ottenuto il risultato di figura 6.28; in cui è stato simulato un controllo sensorless dell'azionamento utilizzando la retroazione della posizione e della velocità stimate dall'algorithm sensorless in catena chiusa implementato nello spazio 3.

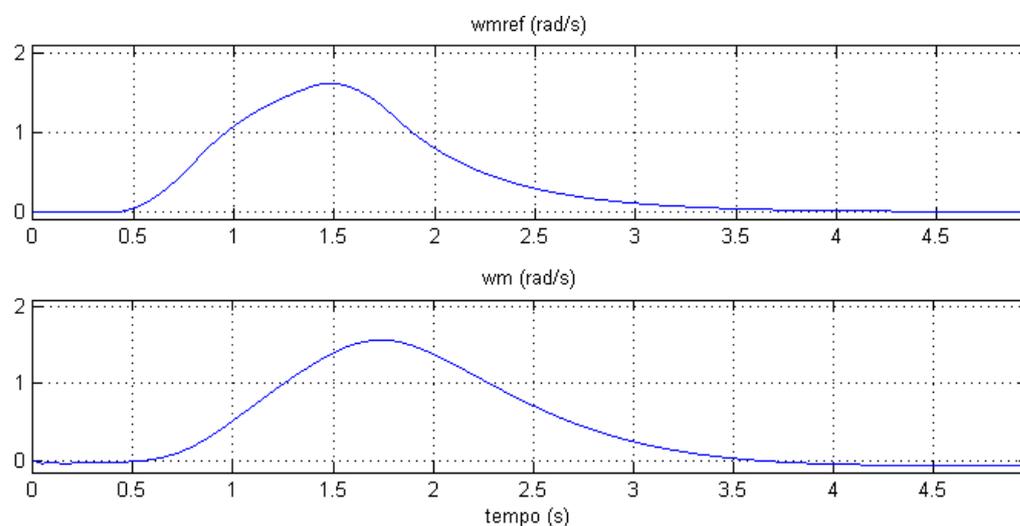


Figura 6.28: Velocità di riferimento e velocità effettiva del motore con controllo completamente sensorless dell'azionamento implementato nello spazio 3.

Di seguito viene brevemente spiegato come abbiamo realizzato il sistema di con-

trollo.

L'errore tra la velocità di riferimento e quella stimata è stato inviato all'ingresso di un regolatore PI. L'uscita del regolatore è stata utilizzata come segnale di riferimento per la componente d'asse  $q$  nello spazio 1 della corrente nel sistema di riferimento rotorico stimato. Dunque il sistema di controllo è stato sviluppato per agire solo sulla componente di coppia principale associata alla corrente di spazio 1. I riferimenti per le altre componenti di corrente sono stati posti nulli. Gli errori tra le correnti di riferimento e quelle misurate, riportate nel sistema di riferimento rotorico stimato, vengono anch'essi elaborati da regolatori PI per fornire in uscita le tensioni interne di macchina. Alle tensioni interne sono state sottratte le stime delle forze contro elettromotrici nella loro espressione completa. I segnali risultanti da queste operazioni sono le tensioni di riferimento nel sistema di riferimento rotorico stimato. Riportando queste tensioni in quelle di fase, attraverso la trasformata di Park (associata alla posizione rotorica stimata) e di Clarke, sono ricavati i riferimenti di tensione per l'inverter da sommare a quelli necessari per l'iniezione del segnale ad alta frequenza.

## 6.6 Conclusioni sulle simulazioni

Le simulazioni hanno permesso di verificare la validità dell'algoritmo proposto per la stima sensorless della posizione rotorica di un azionamento pentafase anisotropo. Si è visto come tutti i metodi analizzati riescano a stimare la posizione rotorica entro certi limiti. È stato possibile infine confrontare i tre algoritmi.

L'algoritmo in catena aperta è stato presto abbandonato in quanto molto sensibile alla velocità rotorica. Inoltre esso fornisce un segnale della posizione stimata piuttosto rumoroso e limitato da una periodicità intrinseca dovuta al blocco "atan2" all'interno dell'algoritmo. I metodi in catena chiusa si sono verificati invece ugualmente validi. Per quanto riguarda la scelta dello spazio nel quale applicare l'algoritmo sensorless, si è visto come nello spazio 1 si riescano ad ottenere delle prestazioni migliori in termini di errore nella stima all'aumentare della velocità.

Nel corso della tesi ci si è soffermati in modo particolare sull'algoritmo di stima della posizione. Si è comunque verificato come l'algoritmo proposto risulti adatto per implementare un sistema di controllo sensorless per l'azionamento. In particolare è stato verificato come l'implementazione del metodo in catena chiusa nello spazio 3 permetta la retroazione dei segnali di posizione e di velocità stimate per chiudere l'anello di controllo della macchina. Per quanto riguarda il passaggio dalle simulazioni alle prove sperimentali, è stata valutata analiticamente l'importanza della precisione sulla conoscenza dei parametri di macchina per poter implementare in modo rigoroso l'algoritmo sensorless. Si è potuto vedere come la costante complessa  $\bar{X}$  risulti estremamente suscettibile alle variazioni dei parametri. Anche differenze di pochi punti percentuali sui parametri (5-10%) portano a variazioni sulla stima di posizione inaccettabili. Tuttavia è fondamentale il risultato teorico ricavato al capitolo 5 sul fatto che  $\bar{X}$  sia una costante. Questo giustifica la scelta, fatta durante le prove pratiche, di non compensare lo sfasamento introdotto da tale termine, supponendo di voler conoscere la posizione relativa dello slider rispetto a quella iniziale. Per un'applicazione industriale si potrebbe valutare sperimentalmente il valore dello sfasamento introdotto dal parametro  $\bar{X}$  la prima volta che viene fatto lavorare l'azionamento, o al più all'inizio di ogni ciclo di lavoro.

# Capitolo 7

## Prove sperimentali su un prototipo di azionamento tubolare

In questo capitolo vengono mostrate le prove sperimentali sul funzionamento dell'algoritmo sensorless di stima della posizione rotorica. Dopo una breve introduzione sulle procedure e sulle scelte prese durante la fase sperimentale, nel secondo paragrafo vengono presentate le prove effettuate per verificare l'esistenza di un'anisotropia nel prototipo di motore tubolare pentafase in studio. Nel terzo paragrafo viene descritto il banco di prova: sistema di alimentazione, inverter, azionamento, sistema di controllo, trasduttori e interfaccia utente. Il paragrafo 4 si focalizza sul codice utilizzato per implementare l'algoritmo sul DSP dedicato alla gestione dell'azionamento complessivo; mentre nel quinto vengono riportati i risultati delle prove sperimentali. Nelle conclusioni del capitolo viene lasciato spazio per chiarire gli obiettivi raggiunti, durante le prove sperimentali, ed i limiti del lavoro di tesi svolto.

### 7.1 Introduzione

Per verificare i risultati teorici e sperimentali dell'algoritmo sensorless, sono state condotte diverse prove sul prototipo di motore tubolare pentafase brushless disponibile in laboratorio. Il primo passo è stato quello di verificare la possibilità di

implementare l'algoritmo sull'azionamento disponibile. Sono state pertanto eseguite delle prove di verifica dell'esistenza di un livello apprezzabile di anisotropia, alimentando la macchina con dei segnali di tensione ad alta frequenza ed osservando gli andamenti della corrente di fase al variare della posizione dello slider. Verificata la presenza dell'anisotropia nella macchina, è stato scritto il codice per la programmazione dell'algoritmo sensorless all'interno del DSP TMS320F2812, predisposto alla gestione dell'azionamento. Per questo scopo è stato utilizzato il software Code Composer Studio (CCStudio), un ambiente di sviluppo integrato adatto alla programmazione dei DSPs della Texas Instruments (TI). Terminata la prima stesura del codice è iniziata la fase di prova dei diversi metodi sensorless. Durante le prove sperimentali il codice dei diversi algoritmi ha subito notevoli modifiche. Sono stati tarati diversamente i parametri presenti nei calcoli del codice (costanti del regolatore e filtri) e sono state introdotte nuove operazioni, per compensare i fenomeni di disturbo, migliorare la stima di posizione e la dinamica dell'algoritmo.

## 7.2 Verifica del livello di anisotropia dell'attuatore

Prima di applicare l'algoritmo di stima della posizione rotorica sensorless all'azionamento è stato necessario eseguire alcune prove al fine di verificare l'esistenza di un'anisotropia nello slider (parte mobile di una macchina lineare). La presenza di un'anisotropia è l'ipotesi fondamentale alla base dei metodi di stima della posizione proposti. Pertanto sono state condotte tre prove a 50 Hz, 200 Hz ed 1 kHz. Durante le prove è stata alimentata la fase  $a$ , tra il morsetto di entrata ed il centro stella (che nel motore in esame risulta accessibile), con un generatore di tensione; così da simulare un ramo di inverter dell'azionamento. La prova si è svolta muovendo manualmente lo slider in modo sufficientemente lento.

Sono state utilizzate una sonda di corrente (con rapporto di attenuazione 1/10) ed una di tensione (con rapporto di attenuazione 1/20), entrambe collegate agli ingressi dell'oscilloscopio.

La strumentazione utilizzata viene mostrata in figura 7.1

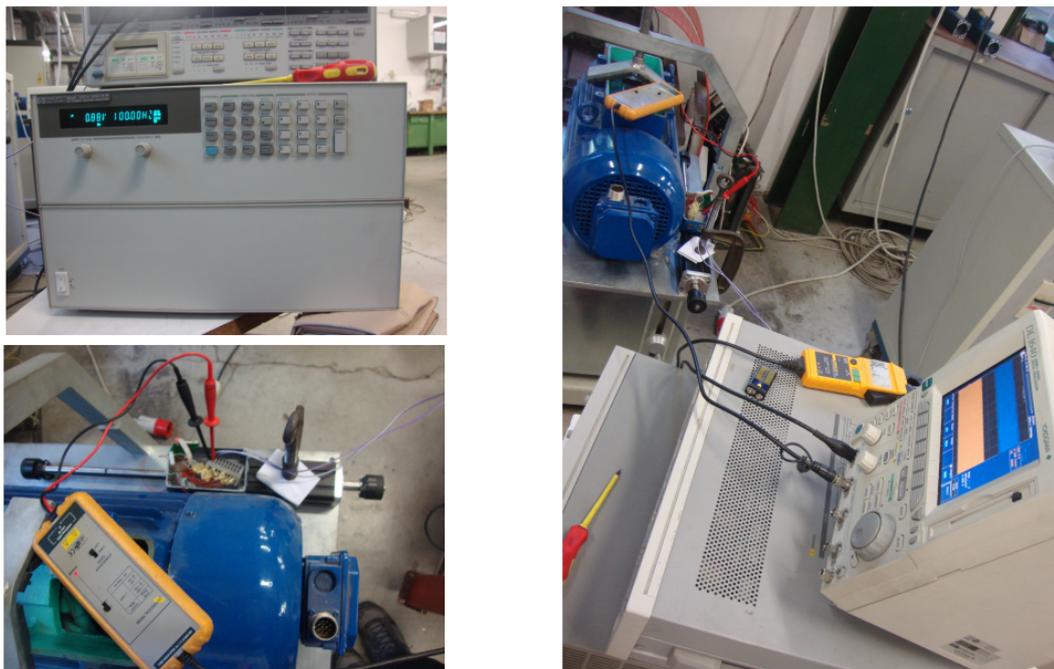


Figura 7.1: Strumentazione utilizzata per la verifica dell'esistenza di un livello di anisotropia sufficiente per l'implementazione dell'algorithm sensorless.

Sono state dunque eseguite le prove con i seguenti valori della tensione di alimentazione:

1. 50 Hz, 10 Vrms
2. 200 Hz, 15 Vrms
3. 1 kHz, 10 Vrms

I dati registrati dall'oscilloscopio sono stati memorizzati su chiavetta usb ed importati in Matlab. È stato così possibile riprodurre gli andamenti sfruttando il comando "plot" di Matlab. Il campionamento è stato impostato ad una frequenza di 20000 sample/sec, per un totale di 100200 campioni, dunque per un tempo di simulazione di  $100200/20000 = 5.01$  secondi. I dati sono stati dunque plottati in Matlab, tenendo conto del campionamento effettuato dall'oscilloscopio, come mostrato nelle immagini seguenti.

In figura 7.2 vengono riportati gli andamenti della corrente e della tensione, misurati durante la prova in cui l'avvolgimento della fase  $a$  è stato alimentato con una tensione di 10 Vrms ad una frequenza di 50 Hz.

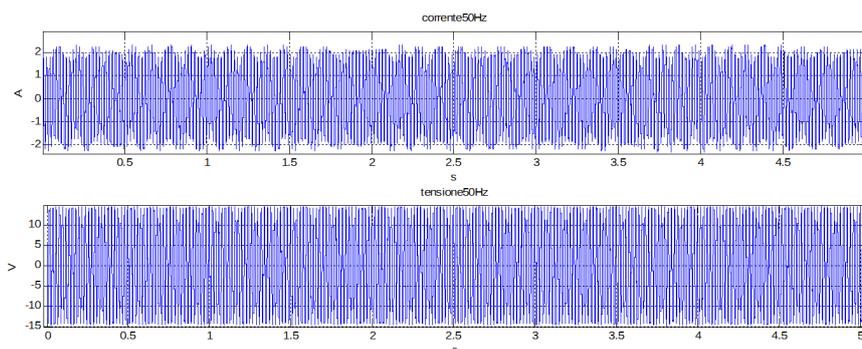


Figura 7.2: Andamento di corrente e tensione durante la prova a 50 Hz.

In figura 7.3 vengono riportati gli andamenti della corrente e della tensione, misurati durante la prova in cui l'avvolgimento della fase  $a$  è stato alimentato con una tensione di 15 Vrms a 200 Hz di frequenza.

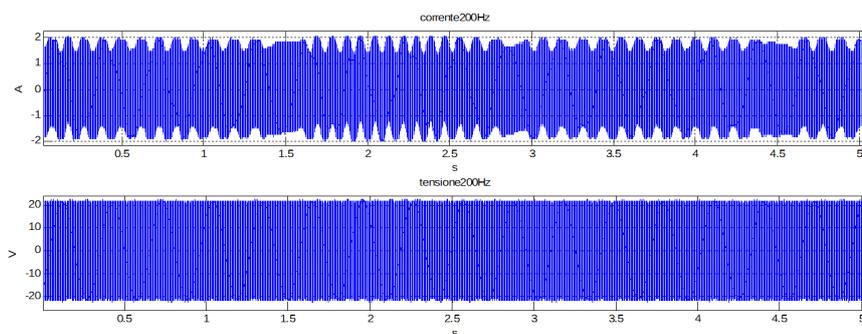


Figura 7.3: Andamento di corrente e tensione durante la prova a 200 Hz.

Nota: i punti con andamento differente corrispondono ai punti in cui stato invertito il moto (manualmente il rotore è stato fatto rallentare in tali punti).

In 7.4 è mostrato l'andamento della corrente analizzando solo 1 secondo della scala temporale.

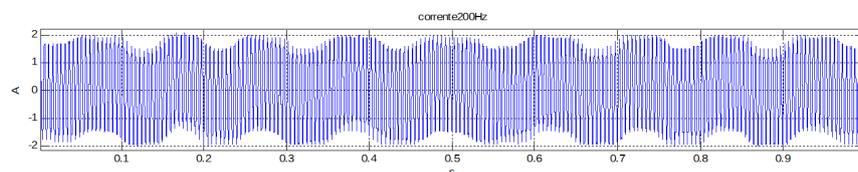


Figura 7.4: Andamento di corrente durante la prova a 200 Hz (zoom ad 1 secondo).

In figura 7.5 vengono riportati gli andamenti della corrente e della tensione, misurati durante la prova in cui l'avvolgimento della fase a è stato alimentato con una tensione di 10 Vrms ad una frequenza di 1 kHz.

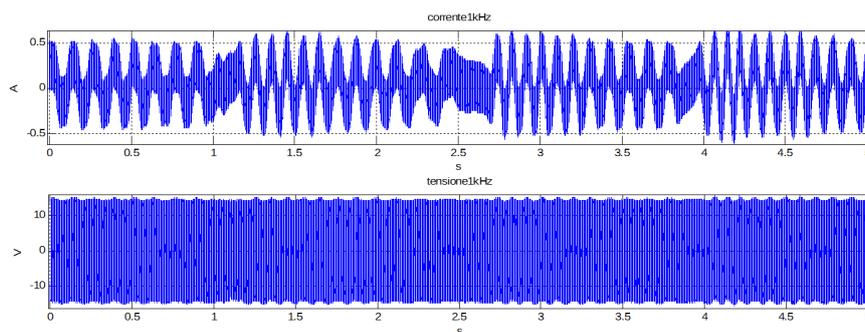


Figura 7.5: Andamento di corrente e tensione durante la prova ad 1 kHz.

In 7.6 è mostrato l'andamento della corrente analizzando solo 1 secondo della scala temporale.

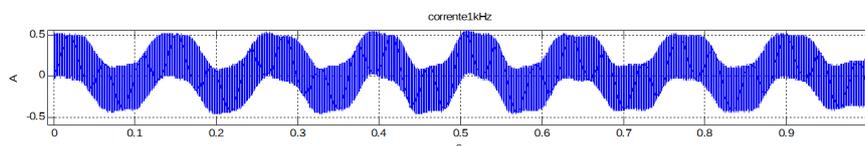


Figura 7.6: Andamento di corrente durante la prova ad 1 kHz (zoom ad 1 secondo).

In 7.7 viene analizzato invece solo un tratto di 0.1 secondi della scala temporale.

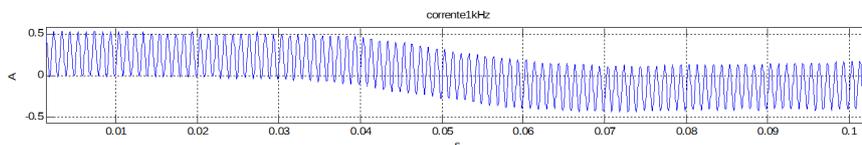


Figura 7.7: Andamento di corrente durante la prova ad 1 kHz (zoom a 0.1 secondi).

L'immagine della schermata dell'oscilloscopio di quest'ultima prova è riportato in figura 7.8, dove: la scala temporale è di 0.2 s/div, per un totale di 2 secondi; il segnale giallo rappresenta l'andamento della tensione ai morsetti della fase *a*, di ampiezza 10 Vrms (20 V/div); il segnale blu rappresenta la corrente circolante nella fase *a*, di ampiezza massima attorno agli 0.5 A (0.5 A/div).

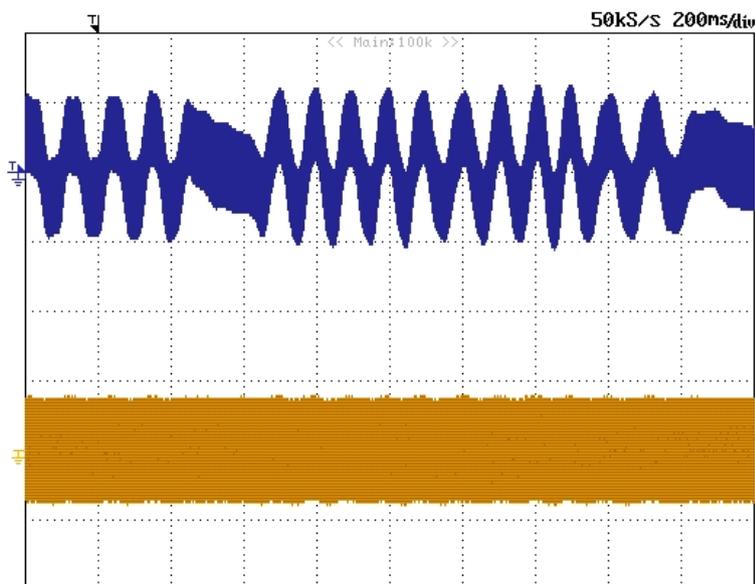


Figura 7.8: Risultati sperimentali. Forme d'onda di corrente e tensione della fase alimentata durante la prova ad 1 kHz (20 ms/div; 0.5 A/div; 20 V/div).

Dagli andamenti delle correnti si nota la presenza di un'anisotropia. Come ci aspettavamo, tale fenomeno risulta tanto più evidente tanto più è elevata la frequenza con cui viene alimentato l'avvolgimento di macchina. La prova non è

rigorosa e non fornisce informazioni utili per la valutazione dei parametri di macchina. L'obiettivo di questo esperimento è stato appunto solamente quello di verificare l'esistenza di un'anisotropia nello slider del motore tubolare pentafase disponibile in dipartimento. L'esistenza dell'anisotropia è l'ipotesi alla base del funzionamento dell'algoritmo di stima sensorless, argomento di questo lavoro di tesi. Dunque una verifica dell'anisotropia è stata di fondamentale importanza.

Verificata la possibilità di utilizzare l'azionamento per testare l'algoritmo sensorless, si è passati ad allestire un opportuno banco di prova e ad implementare il metodo di stima attraverso il programma Code Composer Studio (CCStudio) sul DSP (Digital Signal Processor) TMS320F2812 della Texas Instruments, già disponibile in laboratorio.

### 7.3 Descrizione del banco di prova

Il banco prova è costituito da un motore pentafase tubolare brushless a magneti permanenti anisotropo, alimentato per tutte le sue cinque fasi da un unico inverter multifase. L'alimentazione dell'inverter avviene tramite un variac in serie ad un raddrizzatore trifase non controllato. Il variac permette di trasformare la tensione disponibile, a 400 Vrms (concatenata), in una tensione alla stessa frequenza ma con ampiezza variabile a piacere tra 0 e 400 Vrms. Il raddrizzatore non controllato trifase è invece in grado di raddrizzare la tensione da alternata a continua (da 0-400 Vrms concatenati a 0-566 Vdc, dalla relazione  $V_{dc} = \sqrt{2}V_{rms}$ ). Il variac viene monitorato in tensione per mezzo di un voltmetro posto a monte del raddrizzatore. Il raddrizzatore alimenta dunque il bus dc dell'inverter, sul quale sono posti quattro condensatori (due in serie per aumentare la portata in tensione ed arrivare alla tensione desiderata e due in parallelo allo scopo di livellare la tensione sul bus dc).

Il motore è un prototipo (sviluppato da Simel S.p.A.) nel quale gli avvolgimenti delle cinque fasi sono alimentabili da entrambe le estremità (centro stella accessibile). I morsetti sono dunque all'interno di un'apposito box, nel quale sono disposti anche l'uscita del sensore di temperatura e la scheda di elaborazione del

segnale uscente dal SinCos (resolver): dispositivo costituito da due sonde hall, sfasate di 90 gradi elettrici tra loro, utilizzato come trasduttore della posizione rotorica.

L'azionamento viene controllato da un DSP TMS320F2812 della Texas Instruments. Un'opportuna interfaccia di adattamento permette di relazionarsi con le periferiche esterne e collega il DSP con tutte le altre componenti. Permette quindi di acquisire i segnali delle misure di posizione (dal SinCos) e della temperatura, ma anche i segnali dei trasduttori di corrente e tensione che sono necessari al controllo dell'azionamento. A tale scopo sono installati cinque trasduttori di corrente, uno per fase, ed un unico trasduttore di tensione, che misura la tensione disponibile sul bus dc. Sull'interfaccia di adattamento sono stati posizionati quattro potenziometri che possono essere sfruttati per far variare quattro diverse variabili del controllo, scelte di volta in volta in modo differente programmando opportunamente il DSP.

Il DSP è collegato tramite porta parallela ad un computer che funge da interfaccia utente. Attraverso il computer è possibile riprogrammare la memoria del DSP con gli algoritmi di controllo desiderati. Per svolgere questa operazione viene utilizzato l'ambiente di sviluppo integrato Code Composer Studio della Texas Instruments. Infine, è stato adoperato un oscilloscopio digitale a 4 canali per poter salvare e vedere graficati gli andamenti temporali dei segnali desiderati (fino ad un massimo di 4 segnali), provenienti dalle uscite dei convertitori digitali-analogici (Digital-to-Analog Converters, DACs) o direttamente dai trasduttori. Un'uscita USB (Universal Serial Bus) ha reso possibile il salvataggio delle immagini graficate e dei dati memorizzati sull'oscilloscopio. Il periodo di commutazione dei rami dell'inverter (periodo di switching) è stato impostato a  $100 \mu\text{s}$ , con una corrispondente frequenza di commutazione di 10 kHz.

In figura 7.9 sono mostrati: in alto il banco prova; in basso le componenti più importanti dell'azionamento (DSP, inverter e motore tubolare).

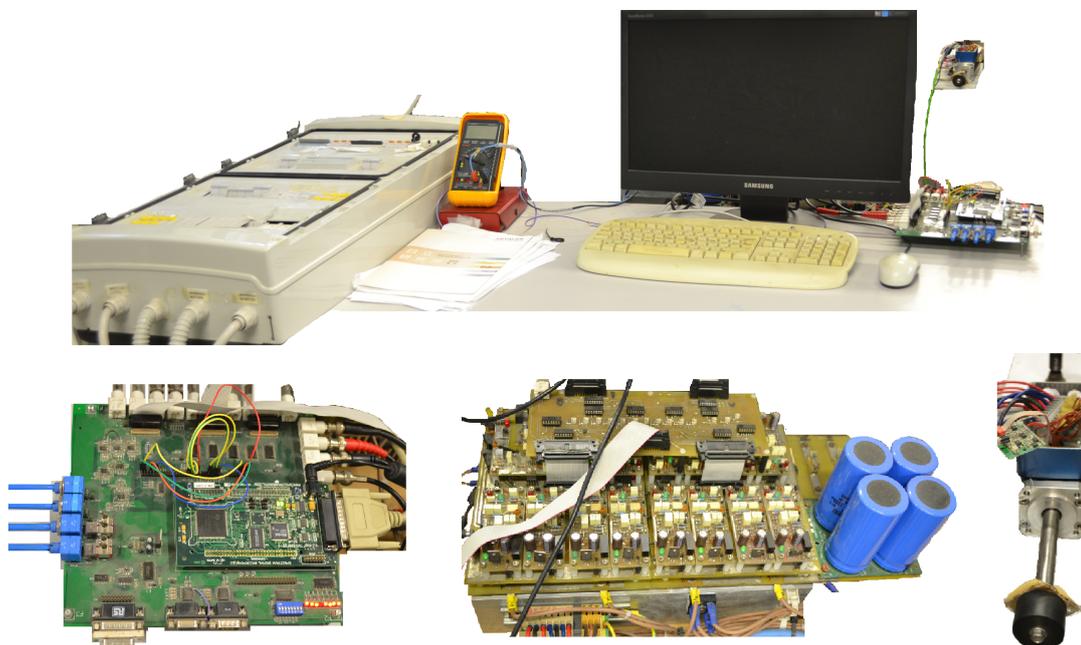


Figura 7.9: Banco prova utilizzato per le prove sperimentali. Sopra una vista generale. Sotto le componenti più importanti dell'azionamento, da sinistra: DSP, inverter e motore tubolare.

## 7.4 Stesura del codice di stima della posizione sensorless in linguaggio di programmazione C

Il software di programmazione Code Composer Studio della Texas Instruments ha reso possibile l'implementazione dell'algoritmo sensorless sulla memoria del DSP, utilizzato per la gestione dell'azionamento. Per raggiungere questo scopo è stato necessario scrivere nuovamente l'algoritmo sensorless in linguaggio C.

La scrittura in C delle operazioni ha richiesto la conversione delle funzioni di trasferimento dei filtri e del regolatore (R) da una forma continua (in termini di trasformata di Laplace) ad una forma discreta. Per la discretizzazione si è scelto di utilizzare la trasformata z. Non essendo lo scopo di questa tesi quello di analizzare le proprietà di tale trasformata, approfondite in diversi testi ed articoli presenti in letteratura, come in [24], ci siamo limitati a specificare che è stata implementata

la trasformata  $z$  di tipo trapezoidale. La soluzione trapezoidale può essere sinteticamente descritta dalla sua equivalenza rappresentativa:  $s = \frac{2}{T_c} \frac{z-1}{z+1}$ .

Nel corso delle prove sperimentali si sono apportate diverse modifiche alla scrittura in C dell'algoritmo. Queste vengono via via fatte notare nel corso della descrizione del codice, illustrando anche i tentativi che sono stati fatti per ottimizzare i diversi metodi proposti.

La scrittura in C dell'algoritmo è stata effettuata tramite il software CCStudio, andando a modificare un programma preesistente utilizzato per il controllo dell'azionamento tubolare pentafase. All'interno del programma è stato dunque generato un nuovo file nel quale sono stati implementati i diversi metodi sensorless proposti.

I listati del codice presentati nel paragrafo faranno in seguito riferimento all'algoritmo in catena chiusa implementato nello spazio 3.

All'interno del file sono state definite nuove variabili (*#define* NOME) e richiamate grandezze di altri file (*#include* NOME File.h per considerarle tutte, oppure *extern iq X* NOME per sceglierne una particolare già definita nel progetto).

Tra le variabili definite, le più rilevanti sono le seguenti:

```
#define Cost_wc (1000.*2.*Cost_PI)
#define Kp_II (100.)
#define Ki_II (1000.)
#define tau_fil_LPF (0.0005)
#define tau_fil_errore_LPF (0.0005)
#define K1_filtro_LPF
(( -Cost_Tc_2+tau_fil_LPF) *
/(Cost_Tc_2+tau_fil_LPF))
#define K2_filtro_LPF
((Cost_Tc_2)/(Cost_Tc_2+tau_fil_LPF))
#define K1_filtro_errore_LPF
(( -Cost_Tc_2+tau_fil_errore_LPF) *
1/(Cost_Tc_2+tau_fil_errore_LPF))
#define K2_filtro_errore_LPF
```

```
((Cost_Tc_2) / (Cost_Tc_2+tau_fil_errore_LPF))
```

Le componenti d e q delle correnti nello spazio 3 nel sistema di riferimento stimato vengono ricavate con le seguenti operazioni:

```
teta3_st=_IQ24mpyIQX(teta_st,28,_IQ24(3.),24);  
cos_teta3_st=_IQtoIQ29(_IQ24toIQ(_IQ24cos(teta3_st)));  
sin_teta3_st=_IQtoIQ29(_IQ24toIQ(_IQ24sin(teta3_st)));  
Id3_s=_IQmpyIQX(Is3_stat.d,GLOBAL_Q,cos_teta3_st,29)+  
+_IQmpyIQX(Is3_stat.q,GLOBAL_Q,sin_teta3_st,29);  
Iq3_s=_IQmpyIQX(Is3_stat.q,GLOBAL_Q,cos_teta3_st,29)+  
-_IQmpyIQX(Is3_stat.d,GLOBAL_Q,sin_teta3_st,29);
```

Il vettore di spazio 3 delle correnti nel riferimento stimato viene moltiplicato per  $e^{j\omega_h(t-Tc/2)}$  (in altre prove sono state effettuate anche compensazioni differenti considerando la logica con cui vengono eseguite le diverse operazioni), attraverso i passaggi qui proposti:

```
wc_t2=_IQ28mpyIQX(_IQ16(Cost_wc),16,time2,28);  
//arg_exp=(wc_t2+  
-_IQ28mpyIQX(_IQ16(Cost_wc),16,_IQ30(Cost_Tc_2),30));  
if (arg_exp > _IQ28(Cost_2PI))  
{ time2=0.; arg_exp=0.;}  
cos_exp=_IQtoIQ29(_IQ28toIQ(_IQ28cos(arg_exp)));  
sin_exp=_IQtoIQ29(_IQ28toIQ(_IQ28sin(arg_exp)));  
i3_exp_Re_in=_IQ20mpyIQX(Id3_s,GLOBAL_Q,cos_exp,29)+  
-_IQ20mpyIQX(Iq3_s,GLOBAL_Q,sin_exp,29);  
i3_exp_Im_in=_IQ20mpyIQX(Iq3_s,GLOBAL_Q,cos_exp,29)+  
+_IQ20mpyIQX(Id3_s,GLOBAL_Q,sin_exp,29);
```

In alcune soluzioni si è scelto di eliminare alla misura delle correnti il suo valore medio nel periodo del segnale ad alta frequenza, con le operazioni mostrate di seguito:

```

id3_media_sensorless=0.;
iq3_media_sensorless=0.;
for(count_s=0;count_s<9;count_s++);
{id3_media_sensorless=id3_media_sensorless+
_IQmpy(i_d3_vec_sensorless[count_s],_IQ(Cost_1_10));
iq3_media_sensorless=iq3_media_sensorless+
_IQmpy(i_q3_vec_sensorless[count_s],_IQ(Cost_1_10));}

if (k_sensorless==10) k_sensorless=0;
i_d3_vec_sensorless[k_sensorless]=Is3_stat.d;
i_q3_vec_sensorless[k_sensorless]=Is3_stat.q;
k_sensorless=(k_sensorless+1.);
Id3_stat_var=(Is3_stat.d-id3_media_sensorless);
Iq3_stat_var=(Is3_stat.q-iq3_media_sensorless);

Id3_s=
_IQmpyIQX(Id3_stat_var,GLOBAL_Q,cos_exp,29)+
_IQmpyIQX(Iq3_stat_var,GLOBAL_Q,sin_exp,29);
Iq3_s=
_IQmpyIQX(Iq3_stat_var,GLOBAL_Q,cos_exp,29)+
_IQmpyIQX(Id3_stat_var,GLOBAL_Q,sin_exp,29);
i3_exp_Re_in=_
IQ20mpyIQX(Id3_s,GLOBAL_Q,cos_teta3_st,29)+
_IQ20mpyIQX(Iq3_s,GLOBAL_Q,sin_teta3_st,29);
i3_exp_Im_in=_
IQ20mpyIQX(Iq3_s,GLOBAL_Q,cos_teta3_st,29)+
_IQ20mpyIQX(Id3_s,GLOBAL_Q,sin_teta3_st,29);

```

Il segnale risultante è stato filtrato, sfruttando la trasformata tempo discreta di tipo z trapezoidale; ne è stato quindi ricavato l'argomento ed è stato diviso il risultato per 6 attraverso le seguenti espressioni:

```
i33_d=
```

```
_IQ20mpyIQX(i33_d,20,_IQ(K1_filtro_LPF),GLOBAL_Q)+
+_IQ20mpyIQX((i3_exp_Re_in_p+i3_exp_Re_in),20,
_IQ(K2_filtro_LPF),GLOBAL_Q);
i3_exp_Re_in_p=i3_exp_Re_in;
i33_q=
_IQ20mpyIQX(i33_q,20,_IQ(K1_filtro_LPF),GLOBAL_Q)+
+_IQ20mpyIQX((i3_exp_Im_in_p+i3_exp_Im_in),20,
_IQ(K2_filtro_LPF),GLOBAL_Q);
i3_exp_Im_in_p=i3_exp_Im_in;
d_teta6_stimato=_IQ20atan2(i33_q,i33_d);
d_teta_st=
_IQ20mpyIQX(d_teta6_stimato,20,_IQ20(Cost_1_6),20);
```

Per eliminare il limite dell'errore dell'angolo tra  $\pm\pi/6$ , è stato implementato il seguente algoritmo:

```
d_teta_atan2=
_IQ20mpyIQX(d_teta6_stimato,20,_IQ20(Cost_1_6),20);
d_teta_atan2_inc=d_teta_atan2;
if((d_teta_atan2-d_teta_atan2_p)>_IQ20(Cost_PI6))
d_teta_atan2_inc=d_teta_atan2-_IQ20(Cost_PI3);
if((d_teta_atan2-d_teta_atan2_p)<-_IQ20(Cost_PI6))
d_teta_atan2_inc=d_teta_atan2+_IQ20(Cost_PI3);
d_teta_st=d_teta_st+
+(d_teta_atan2_inc-d_teta_atan2_p);
d_teta_atan2_p=d_teta_atan2;
```

In alcuni casi si è scelto di rendere più pulito il segnale di errore filtrandolo come di seguito:

```
d_teta_st_in=_IQ20mpyIQX
(d_teta6_stimato,20,_IQ20(Cost_1_6),20);
d_teta_st=_IQ20mpyIQX
(d_teta_st_p,20,_IQ(K1_filtro_errore_LPF),GLOBAL_Q)+
```

```

+_IQ20mpyIQX((d_teta_st_in_p+d_teta_st_in),20
, _IQ(K2_filtro_errore_LPF),GLOBAL_Q);
d_teta_st_in_p=d_teta_st_in;

```

L'errore è stato dunque elaborato da un regolatore di tipo II (regolatore PI in serie ad un puro integratore), ottenendo le seguenti espressioni:

```

w_s=w_s+_IQ20mpyIQX
((d_teta_st-d_teta_st_p),20,_IQ(Kp_II),GLOBAL_Q)+
+_IQ20mpy((d_teta_st+d_teta_st_p),
_IQ20mpyIQX(_IQ(Ki_II),GLOBAL_Q,_IQ28(Cost_Tc_2),28));

```

```

teta_st=teta_st+
+_IQ28mpyIQX(w_s,20,_IQ28(Cost_Tc),28);
if(teta_st>_IQ28(Cost_PI))
teta_st=teta_st-_IQ28(Cost_2PI);
if(teta_st<-_IQ28(Cost_PI))
teta_st=teta_st+_IQ28(Cost_2PI);
teta_st_p=teta_st;
d_teta_st_p=d_teta_st;

```

In realtà, per confrontare i segnali visualizzati nell'oscilloscopio in maniera più agevole, la limitazione dell'angolo stimato tra  $\pm\pi$  è stata rimossa, utilizzando l'espressione alternativa qui di seguito riportata:

```

view_teta_st=view_teta_st+
+_IQmpyIQX(teta_,20,_IQ28(Cost_Tc),28);

```

La definizione, infine, del segnale di tensione ad alta frequenza da iniettare risulta:

```

arg_v3stazrif=_IQ24mpyIQX(wc_t,28,_IQ28(1.),28)+
+_IQ24mpyIQX(M1.teta_pll,28,_IQ28(3.),28);
cos_arg_v3stazrif=_IQtoIQ29
(_IQ24toIQ(_IQ24cos(arg_v3stazrif)));
sin_arg_v3stazrif=_IQtoIQ29

```

```
(_IQ24toIQ(_IQ24sin(arg_v3stazrif)));  
vd3_hfstazrif=_IQmpyIQX  
(_IQ(Cost_Vc_3),GLOBAL_Q,cos_arg_v3stazrif,29);  
vq3_hfstazrif=_IQmpyIQX  
(_IQ(Cost_Vc_3),GLOBAL_Q,sin_arg_v3stazrif,29);
```

Per visualizzare sull'oscilloscopio le grandezze misurate sono stati utilizzati i seguenti codici (riportando solo quelli più significativi):

```
DacOut((Uin16)  
(_IQmpyI32int(_IQmpy(M1.pos,_IQ(Cost_Tau_p_PI)),  
9.9297e+004)+31500),0); //20cm=1V  
DacOut((Uin16)  
(_IQmpyI32int(_IQmpy(view_teta_st,_IQ(Cost_Tau_p_PI)),  
9.9297e+004)+31500),1); //20cm=1V  
DacOut((Uin16)  
(_IQmpyI32int(_IQ20mpy(d_teta_st,_IQ20(1)),  
3160.72)+31500),2); //2pi=1  
DacOut((Uin16)  
(_IQ20mpyI32int(w_s,198.59)+31500),3);  
//100rad/s=1V
```

I codici e le costanti principali dell'algorithm sensorless sono quelli riportati precedentemente. Ad essi sono poi state aggiunte alcune espressioni ed operazioni secondarie particolari, che sono risultate differenti a seconda del metodo implementato e dei tentativi effettuati per migliorare le prestazioni dell'algorithm. Si può notare come l'algorithm presenta una leggera complicazione nell'effettuare le operazioni di base tra le diverse variabili, dovuta alla caratteristica intrinseca del linguaggio di scrittura utilizzato. Il motivo è dovuto alla necessità di dover definire tutti i numeri come interi, in quanto le operazioni sono effettuate in virgola fissa.

## 7.5 Prove sperimentali della stima di posizione sensorless

L'algoritmo si basa sull'iniezione di un segnale di tensione ad alta frequenza e sull'analisi della componente a tale frequenza della corrente misurata; pertanto viene riportato in figura 7.10 l'andamento della corrente in una fase statorica per osservarne la presenza della componente ad alta frequenza. In particolare viene riportato l'andamento per una frequenza del segnale iniettato di 1 kHz, scelta che è stata mantenuta durante le prove sperimentali, in accordo con le scelte effettuate durante il lavoro di simulazione.

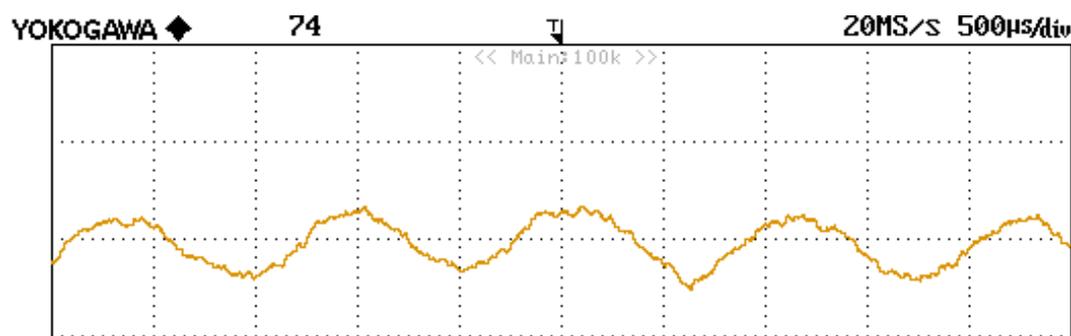


Figura 7.10: Prove Sperimentali. Corrente ad alta frequenza associata al segnale di tensione iniettato per implementare l'algoritmo sensorless (0.5 ms/div; 1 A/div).

Si è ritenuto utile riportare i risultati sulla stima della posizione rotorica ottenuti per le prove sperimentali elencate di seguito.

Simulazioni con metodo in catena aperta:

- stima di posizione nello spazio 1, ottenuta con lo slider movimentato dal sistema di controllo, con iniezione del segnale ad alta frequenza nel sistema di riferimento statorico.

Simulazioni con metodo in catena chiusa:

- stima di posizione nello spazio 1, ottenuta con lo slider movimentato dal sistema di controllo, con iniezione del segnale ad alta frequenza nel sistema di riferimento rotorico misurato (individuato dal trasduttore di posizione SinCos);
- stima di posizione nello spazio 3, ottenuta con lo slider movimentato dal sistema di controllo, con iniezione del segnale ad alta frequenza nel sistema di riferimento rotorico misurato (individuato dal trasduttore di posizione SinCos).

Simulazioni con metodo in catena chiusa semplificato:

- stima di posizione nello spazio 1, ottenuta con lo slider movimentato dal sistema di controllo;

Tutte le prove sono state eseguite movimentando lo slider con un sistema di controllo implementato sullo spazio 1, con lo scopo di valutare il funzionamento "in ombra" dell' algoritmo sensorless. Le prove svolte nello spazio 3, in catena aperta e con il metodo in catena chiusa semplificato, non sono state riportate. In catena aperta il segnale di stima ha un'oscillazione che risulta eccessivamente rumorosa; essa varia, in accordo con la teoria, tra  $-pi/6$  e  $+pi/6$  gradi elettrici, e questa limitatezza del segnale di uscita rende difficilmente distinguibile la stima dal disturbo complessivo presente sul segnale. La stima in catena chiusa con il metodo semplificato nello spazio 3 ha dato invece risultati decisamente meno soddisfacenti rispetto a quelli raggiunti nello spazio 1. Bisogna inoltre sottolineare come solo le prove in catena aperta e quelle con metodo in catena chiusa semplificato siano state svolte utilizzando degli algoritmi realmente sensorless, mentre quelle svolte utilizzando il metodo in catena chiusa hanno richiesto la retroazione del segnale di posizione misurato dal SinCos.

La prima prova sperimentale riguarda dunque l'implementazione dell'algoritmo in catena aperta nello spazio 1. Vengono riportati gli andamenti dei segnali visualizzati nell'oscilloscopio durante la prova in figura 7.11, dove lo slider è stato

movimentato molto lentamente per poter apprezzare il funzionamento, seppure a tratti, dell'algoritmo. Le curve visualizzate sono: in blu la posizione misurata dal Sin Cos; in giallo la posizione stimata dall'algoritmo sensorless in catena aperta.

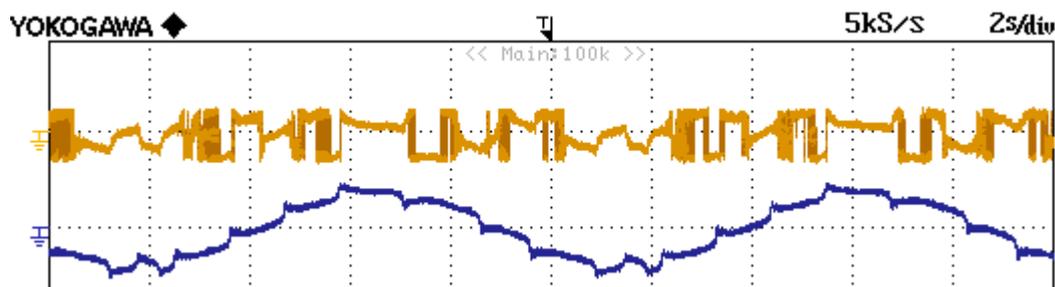


Figura 7.11: Prove sperimentali. Andamento dei segnali di posizione misurati dal trasduttore SinCos (blu, 4cm/div) e stimati dall'algoritmo sensorless in catena aperta (giallo, 2cm/div); con una scala temporale di 2s/div.

Si può notare come l'algoritmo in catena aperta riesca a seguire la posizione dello slider quando esso è fermo, o quando si muove molto lentamente. Tuttavia, appena aumenta anche di poco la velocità, l'algoritmo in catena aperta non risulta più adatto. Inoltre la periodicità della stima varia tra  $\pm\pi/2$ , rendendo il segnale di stima poco comprensibile ma soprattutto inadeguato ad essere utilizzato per il controllo dell'azionamento. Nello spazio 3 l'oscillazione della stima sarebbe ancora meno chiara, essendo limitata tra  $\pm\pi/6$ . Queste sono le ragioni principali per cui, sia in fase di simulazione che in fase sperimentale, sono stati preferiti i metodi in catena chiusa.

In seguito sono state eseguite le prove in catena chiusa. Nei grafici sono rappresentati: in verde il segnale di errore in ingresso al regolatore; in blu la posizione misurata dal Sin Cos; in giallo la posizione stimata dall'algoritmo sensorless; in rosso il segnale in ingresso all'integratore posto alla fine del regolatore, che rappresenta dunque la velocità stimata. I segnali di posizione misurati e stimati sono riportati in termini di corsa dello slider [cm], tenendo conto della relazione tra angoli elettrici e traiettoria percorsa dallo slider:  $\pi \text{ rad} \simeq 0.954 \text{ cm}$ , ossia  $1 \text{ rad} \simeq 0.3 \text{ cm}$ .

Inizialmente vengono riportati i risultati per l' algoritmo nello spazio 1 in catena chiusa, in cui il segnale di tensione viene iniettato in un riferimento misurato dal SinCos. I segnali misurati durante la prova sono mostrati in figura 7.12.

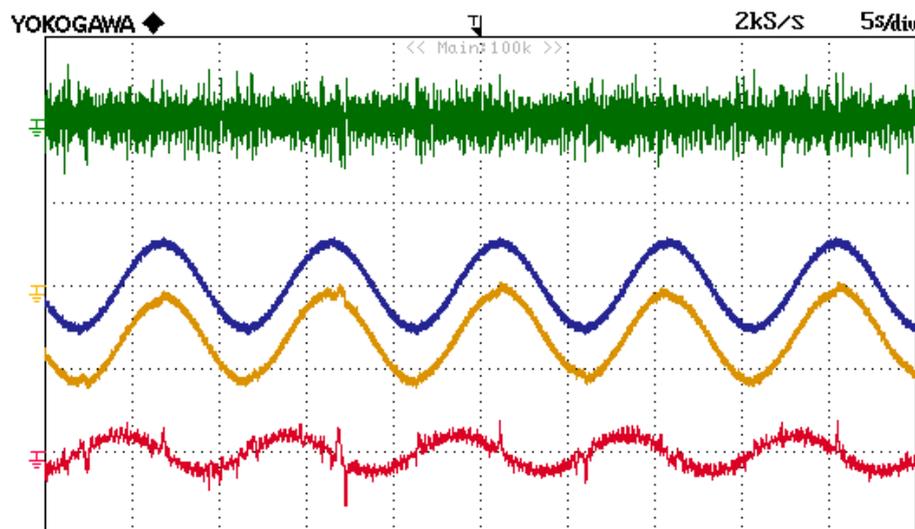


Figura 7.12: Prove sperimentali. Algoritmo in catena chiusa nello spazio 1: errore (verde;  $2\pi$  rad/div); posizione misurata (blu; 20 cm/div); posizione stimata dall'algoritmo sensorless (giallo; 20 cm/div); velocità stimata (rosso; 50 rad/s/div); (5 s/div).

Si osserva come la stima di posizione sia piuttosto simile a quella misurata dal trasduttore di posizione ad effetto hall (SinCos). In alcuni tratti l'algoritmo sensorless presenta delle prestazioni migliori rispetto a quelle in altri tratti.

Un problema, poco evidente nella figura ma tuttavia molto importante, è la presenza di un segnale sovrapposto alla stima di posizione che tende ad allontanare costantemente il segnale stimato da quello reale misurato. Tale fenomeno, di lenta divergenza del segnale, è risultato di relativamente lieve entità nello spazio 1, e soprattutto si è presentato con un carattere bidirezionale dell'errore tra i due segnali (stimato e misurato). Nello spazio 3 il fenomeno è invece decisamente più intenso e monodirezionale. Bisogna sottolineare come in questa prova non sia stato implementato un algoritmo propriamente sensorless. All'interno dell'algoritmo,

è stata appunto utilizzata la retroazione della posizione misurata dal trasduttore (SinCos), per iniettare il segnale di tensione ad alta frequenza in un sistema di riferimento sincrono con lo slider. La scelta di retroazionare il segnale del SinCos è derivata dalla necessità di procedere step by step nell'implementazione dell'algoritmo, non riuscendo tuttavia mai ad ottenere delle prove sperimentali valide, quando si è utilizzato l'algoritmo con metodo in catena chiusa totalmente sensorless.

I risultati della prova in catena chiusa nello spazio 3 sono riportati, in modo analogo a quelli ottenuti nello spazio 1, in figura 7.13.

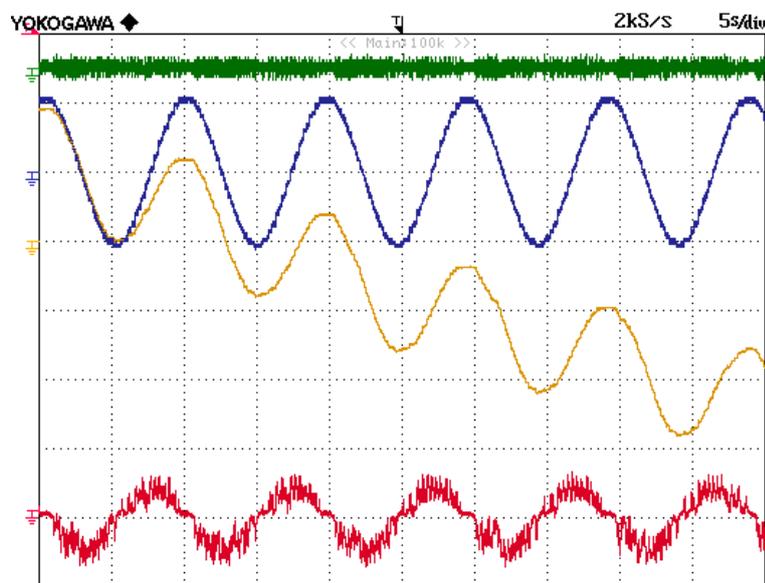


Figura 7.13: Prove sperimentali. Algoritmo in catena chiusa nello spazio 3: errore (verde;  $4\pi$  rad/div); posizione misurata (blu; 10 cm/div); posizione stimata dall'algoritmo sensorless (giallo; 10 cm/div); velocità stimata (rosso; 20 rad/s/div); (5 s/div).

Si deduce immediatamente come nello spazio 3 l'algoritmo fornisca delle prestazioni decisamente peggiori rispetto a quelle ottenute nello spazio 1. Il fenomeno della presenza di un errore incrementale risulta molto evidente e con carattere mono direzionale. Nello spazio 3, in accordo con quanto avvenuto durante la fase di

simulazione, il range di taratura dei regolatori e dei filtri, all'interno del quale l'algoritmo non presenta fenomeni di divergenza rapida del segnale di stima, è risultato decisamente più limitato. L'algoritmo nello spazio 3 ha fornito prestazioni minori già in fase di simulazione, e durante la fase sperimentale tale comportamento è apparso in maniera ancora più evidente. È stato effettuato un tentativo di eliminare possibili offset dalla misura delle correnti, sottraendone il valore medio nel periodo del segnale ad alta frequenza, ma i miglioramenti non hanno risolto il problema dell'offset incrementale dell'errore di stima. I risultati ottenuti con regolatori di tipo I (puro integratore) hanno dato prestazioni decisamente peggiori in termini di dinamica dell'algoritmo; mentre quelli di tipo III (struttura descritta al capitolo 5) non hanno portato a sensibili variazioni dei risultati. Si è verificato come il problema non sia dovuto al verso con cui viene iniettato il segnale ad alta frequenza, osservando che, per entrambi i versi di rotazione del segnale ad alta frequenza ( $\pm\omega_h$ ), la direzione dell'errore incrementale non cambia. Una soluzione provata, seppur grossolana, è stata quella di sottrarre il valore medio del segnale stimato per visualizzarlo senza l'offset. Tale soluzione, avendo ovviamente distorto la forma del segnale, non è risultata accettabile. La causa della deriva potrebbe essere dovuta ad una dissimmetria del funzionamento dell'algoritmo di controllo. È possibile che in un verso della corsa lo slider presenti una dinamica differente rispetto all'altro verso (ad esempio accelerazioni di ampiezze maggiori in una delle direzioni dello slider). La deriva è, con una certa probabilità, attribuibile all'effetto di estremità o comunque al fatto che la macchina in studio è di tipo tubolare. A tal proposito bisogna chiarire come il modello e l'algoritmo sensorless siano stati definiti per una macchina di tipo rotativo, con tutte le conseguenti approssimazioni del metodo nell'applicazione ad una macchina tubolare.

Nel tentativo di migliorare le prestazioni dell'algoritmo sensorless (per le ragioni spiegate ai capitoli 5 e 6), si è implementato e sperimentato anche l'algoritmo in catena chiusa semplificata. Solo tale soluzione ha reso possibile l'implementazione dell'algoritmo in maniera completamente sensorless. In questa soluzione il segnale di tensione ad alta frequenza viene iniettato nel sistema di riferimento statorico e, dunque, non vi è la necessità di retroazionare due volte il segnale di

stima della posizione (si veda il capitolo 6 per le spiegazioni teoriche).

La prova eseguita nello spazio 1 in catena chiusa con metodo semplificato, con lo slider movimentato dal sistema di controllo e l'algoritmo funzionante "in ombra", ha dato i risultati riportati in figura 7.14.

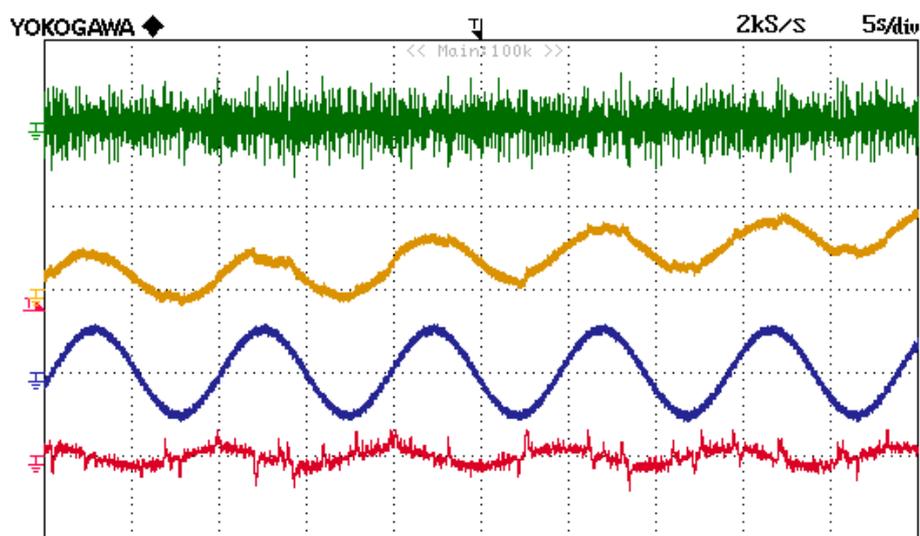


Figura 7.14: Prove sperimentali. Algoritmo in catena chiusa con metodo semplificato nello spazio 1: errore (verde;  $2\pi$  rad/div); posizione misurata (blu; 20 cm/div); posizione stimata dall'algoritmo sensorless (giallo; 20 cm/div); velocità stimata (rosso; 50 rad/s/div); (5 s/div).

Le prestazioni dell'algoritmo sensorless non sono particolarmente soddisfacenti, a differenza degli ottimi risultati ottenuti durante le simulazioni. L'andamento del segnale di stima della posizione dello slider non presenta tuttavia dei fenomeni di divergenza e si vede come esso sia parente della posizione effettiva dello slider (ossia di quella misurata dal trasduttore di posizione). Anche per l'ottimizzazione dell'algoritmo in catena chiusa con metodo semplificato, sono state provate le soluzioni proposte nel metodo in catena chiusa, al fine di migliorare la stima di posizione. Le criticità che si osservano con il metodo semplificato sono della stessa tipologia di quelle che si presentano con la soluzione ibrida in catena chiusa, in cui il segnale viene iniettato in un riferimento misurato piuttosto che in quello

stimato (algoritmo dunque solo parzialmente sensorless). In particolare si nota un offset incrementale che accompagna l'andamento della stima di posizione, assieme ad un andamento del segnale stimato che segue solo a tratti la posizione dello slider.

Le nostre prove sperimentali hanno fornito un valore della posizione stimata non ancora adeguato per poter implementare un sistema di controllo dell'azionamento sensorless; ciononostante si è potuto verificare come anche in fase sperimentale l'algoritmo sensorless possa essere implementato per ottenere l'informazione sulla posizione dello slider, una volta ottimizzati i parametri dell'algoritmo e compensato il fenomeno dell'offset incrementale.

## **7.6 Conclusioni sulle prove sperimentali**

Le prove sperimentali condotte durante il lavoro di tesi su un prototipo di motore tubolare pentafase a magneti permanenti sono state fondamentali per testare l'algoritmo sensorless elaborato teoricamente e verificato in fase di simulazione. L'algoritmo è stato implementato attraverso l'ambiente di sviluppo integrato Code Composer Studio della Texas Instruments, con il quale è stato possibile programmare il DSP TMS320F2812 per la gestione dell'intero azionamento.

La verifica di un livello apprezzabile di anisotropia è stata necessaria per poter implementare il metodo di stima della posizione, essendo la presenza dell'anisotropia dello slider (o il rotore, per una macchina di tipo rotativo) l'ipotesi su cui si basa l'algoritmo.

Le prove sperimentali hanno mostrato una notevole discrepanza, in termini di risultati, rispetto alle simulazioni. Questo può essere dovuto al fatto che il modello di macchina utilizzato e l'algoritmo sensorless sono stati entrambi sviluppati nell'ipotesi di macchina di tipo pentafase a magneti permanenti rotativa, mentre il prototipo è di tipo tubolare; dunque i fenomeni associati agli effetti di cogging ed all'effetto di estremità non sono stati considerati. Un risultato importante delle prove sperimentali è stato quello di verificare come, tra i metodi proposti in questa tesi, sia preferibile utilizzare un algoritmo di stima della posizione sensorless in

catena chiusa di tipo semplificato (intendendo con esso una particolare soluzione di implementazione dell'algoritmo, ben descritta nei capitoli 5 e 6). Questo è il metodo completamente sensorless che ha dato i migliori risultati di stima della posizione.

I risultati delle prove hanno infine permesso di trarre le conclusioni su due aspetti cruciali alla base degli obiettivi del progetto di tesi. In primis si è verificato come sia possibile implementare un algoritmo di tipo sensorless per una macchina di tipo pentafase nello spazio 1 e nello spazio 3; secondariamente è stato dimostrato, sia in fase di simulazione che durante le prove sperimentali, come le prestazioni del metodo di stima nello spazio 3 risultino peggiori e la taratura dei diversi parametri dell'algoritmo più critica in tale spazio.

# Capitolo 8

## Conclusioni

In questo progetto di tesi abbiamo proposto un algoritmo sensorless per un attuatore tubolare pentafase anisotropo a magneti permanenti.

Gli azionamenti basati su macchine di tipologia lineare sono sempre più richiesti ed utilizzati in ambito industriale. Essi sono in grado di conferire una forza di spinta al carico, senza bisogno di utilizzare organi di trasmissione o riduttori, rendendo i dispositivi più compatti e con migliori prestazioni in termini di dinamica. Tali vantaggi sono accentuati nella tipologia tubolare a magneti permanenti, particolarmente adatta in applicazioni quali robotica, automazione, packaging, sistemi di posizionamento ecc., ed altresì promettente nei settori aerospaziale e automotive.

L'azionamento in studio è pentafase. L'interesse per gli azionamenti multifase è dovuto alla possibilità di incrementare le prestazioni di tali dispositivi sfruttando i gradi di libertà che si rendono disponibili all'aumentare del numero delle fasi. In tal caso si ottengono diversi vantaggi: possibilità di suddividere la potenza su un numero elevato di rami del convertitore; capacità di lavorare in condizioni di guasto; incremento della densità di coppia della macchina; possibilità di controllare in modo indipendente e con un solo inverter più macchine collegate in serie. In questa tesi si è scelto di valutare l'opzione di sfruttare i gradi di libertà delle macchine multifase per implementare un controllo sensorless dell'azionamento. I vantaggi di un algoritmo sensorless possono essere riassunti in: riduzione della

complessità/ingombro hardware e dei costi; aumento dell'affidabilità meccanica, con conseguente minore richiesta di manutenzione; maggiore immunità ai disturbi ed indipendenza dall'ambiente di lavoro. Per la deduzione dell'algoritmo sensorless è stata fondamentale la definizione di un modello matematico in grado di rappresentare l'azionamento tenendo conto dell'anisotropia di macchina. In letteratura non erano ancora presenti modelli adatti a descrivere il dispositivo; pertanto una parte essenziale della tesi è stata dedicata a definire tale modello e a verificarne la validità.

Nonostante il prototipo su cui sono state condotte le prove sperimentali sia un attuatore tubolare pentafase anisotropo a magneti permanenti, si è scelto di procedere alla definizione di un modello in grado di descrivere il comportamento elettromagnetico ed elettromeccanico di una macchina rotativa, piuttosto che tubolare. Questa scelta è derivata da due aspetti fondamentali: la generalità dell'algoritmo sensorless che si è voluto sviluppare, valido per una generica macchina pentafase anisotropa, e la possibilità di elaborare il modello in modo analitico senza dover ricorrere ad un'analisi agli elementi finiti. Dal modello analitico sono dunque stati dedotti tre metodi di stima della posizione sensorless, uno in catena aperta e due in catena chiusa, basati sull'iniezione di un segnale di tensione ad alta frequenza e sulla misura ed analisi delle corrispondenti correnti. L'algoritmo si compone di una serie di operazioni elementari, in cui i segnali misurati di corrente vengono filtrati ed elaborati; in particolare sono presenti delle trasformazioni di rotazione, una moltiplicazione per una costante complessa associata ai parametri di macchina ( $\bar{X}$ ), ed un blocco per la determinazione della fase di un numero complesso (blocco "atan2"). Grazie alle simulazioni è stato possibile valutare i differenti metodi, ma anche tarare i filtri ed il regolatore (presente negli schemi in catena chiusa). Nella costruzione del modello Simulink si è tenuto conto anche della modulazione PWM dell'inverter pentafase VSI, compensando il ritardo sull'immissione del segnale ad alta frequenza. È stata inoltre introdotta l'espressione esatta della costante complessa  $\bar{X}$ , permettendo di ottenere così l'informazione esatta sulla posizione rotorica (o sull'errore di stima della posizione, nei metodi in catena chiusa). Le simulazioni hanno permesso di verificare, per un azionamen-

to pentafase anisotropo di tipo rotativo, la validità dell'algoritmo e la possibilità di utilizzarlo per realizzare un controllo sensorless. Si è visto come tutti i metodi analizzati riescano a stimare la posizione rotorica entro certi limiti. L'algoritmo in catena aperta è stato presto abbandonato in quanto si è mostrato molto sensibile alla velocità rotorica ed ha fornito un segnale della posizione stimata piuttosto rumoroso e limitato dalla periodicità dovuta alla presenza del blocco di calcolo "atan2". I metodi in catena chiusa si sono verificati invece ugualmente validi. Per quanto riguarda la scelta dello spazio nel quale applicare l'algoritmo sensorless, si è visto come nello spazio 1 si riescano ad ottenere delle prestazioni migliori in termini di dinamica della stima.

È stata valutata analiticamente l'importanza della precisione sulla conoscenza dei parametri di macchina per poter implementare in modo rigoroso l'algoritmo sensorless. Si è potuto vedere come la costante complessa  $\bar{X}$  risulti estremamente suscettibile alle variazioni dei parametri. Anche differenze di pochi punti percentuali (5-10%) portano a variazioni sulla stima di posizione inaccettabili. Tuttavia è fondamentale il risultato teorico ricavato al capitolo 5 sul fatto che  $\bar{X}$  sia una costante. Occorre sottolineare come i metodi proposti forniscano una stima della posizione in coordinate polari elettriche che deriva dall'andamento dell'anisotropia di macchina, con un'incertezza di  $\pi$  radianti elettrici. Per rendere completamente sensorless l'algoritmo di stima sarebbe necessario implementare un metodo che individui la posizione iniziale in termini di polarità. Le incertezze, associate al valore della costante  $\bar{X}$  ed alla polarità, giustificano la scelta, effettuata durante le prove sperimentali, di voler stimare la posizione relativa dello slider rispetto ad una generica posizione iniziale non identificata. Per un'applicazione industriale si potrebbe invece ottenere un'informazione corretta sulla posizione valutando sperimentalmente il valore dello sfasamento introdotto dal parametro  $\bar{X}$  e implementando un metodo di stima della polarità iniziale.

Nella parte conclusiva del lavoro di tesi sono state condotte diverse prove sul prototipo. Il primo passo è stato quello di verificare l'esistenza di un livello apprezzabile di anisotropia nello slider, ipotesi su cui si basa l'algoritmo. Questo è stato fatto alimentando la macchina con dei segnali di tensione ad alta frequen-

za ed osservando gli andamenti della corrente di fase al variare della posizione dello slider. Verificata la presenza dell'anisotropia nella macchina, è stato scritto il codice per la programmazione dell'algoritmo sensorless all'interno del DSP TMS320F2812 predisposto alla gestione dell'azionamento. Per questo scopo è stato utilizzato il software Code Composer Studio (CCStudio), un ambiente di sviluppo integrato adatto alla programmazione dei DSPs della Texas Instruments (TI).

Le prove sperimentali hanno mostrato una notevole discrepanza, in termini di risultati, rispetto alle simulazioni. Questo può essere dovuto al fatto che il modello di macchina utilizzato e l'algoritmo sensorless siano stati entrambi sviluppati nell'ipotesi di macchina rotativa piuttosto che tubolare, trascurando gli effetti di cogging e di estremità. Tuttavia i risultati sperimentali hanno permesso di verificare come sia possibile implementare un algoritmo di tipo sensorless per una macchina di tipo pentafase nello spazio 1 e nello spazio 3; osservando come, per la macchina in studio, le prestazioni del metodo di stima nello spazio 3 risultino peggiori e come la taratura dei diversi parametri dell'algoritmo sia più critica in tale spazio. Le prove hanno inoltre mostrato come l'algoritmo di stima della posizione sensorless "in catena chiusa semplificato" sia il metodo che fornisce i migliori risultati sperimentali, tra quelli da noi proposti.

Sono stati infine individuati diversi possibili sviluppi del lavoro di ricerca. Innanzitutto si potrebbero adottare delle strategie di ottimizzazione della compensazione dell'effetto di estremità, riducendo in questo modo i problemi sulla dinamica dell'azionamento che provocano un moto poco fluido, con fenomeni di accelerazione e decelerazione continui e particolarmente critici per l'algoritmo sensorless. Un ulteriore aspetto che potrebbe essere approfondito è quello della taratura dei parametri dei filtri e del regolatore, tenendo conto anche del blocco "atan2" all'interno della funzione di trasferimento complessiva dell'algoritmo. Sarebbe poi sicuramente interessante poter testare l'algoritmo sensorless su una macchina pentafase anisotropa di tipo rotativo, per confrontare i risultati ottenuti con quelli delle simulazioni. Il confronto chiarirebbe quali sono i fenomeni critici per l'algoritmo strettamente associati al fatto che il prototipo in studio è di tipo

tubolare piuttosto che rotativo.

Un metodo differente per ottenere un azionamento tubolare controllato in modo sensorless, può essere quello di sviluppare un algoritmo basato sull'effetto di estremità, come fatto in [15] per un motore lineare trifase. Il metodo, che assume come ipotesi la presenza di un'anisotropia nello slider assieme alla presenza dell'effetto di estremità, potrebbe essere esteso ad una macchina pentafase. In questo caso il modello andrebbe sviluppato tenendo conto della differenza tra le mutue induttanze tra le diverse fasi, a seguito della limitatezza dello statore. Per una macchina pentafase, questo si traduce in un aumento dei parametri di cui occorre tener conto nella formulazione del modello analitico; aspetto che complica le equazioni di macchina ed il processo di deduzione dell'algoritmo di stima della posizione sensorless derivato da esse.



# Bibliografia

- [1] M. Mengoni, "Modulation Techniques for Multi-Phase Converters and Control Strategies for Multi-Phase Electric Drives," Ph. D. Thesis in Electrical Engineering, Alma Mater Studiorum, 2010, Bologna.
- [2] F. Milanesi, "Design optimization and control strategies for PM Multiphase Tubular Linear Actuators," Ph. D. Thesis in Electrical Engineering, Alma Mater Studiorum, 2009, Bologna.
- [3] J. Wang, D. Howe, "Influence of soft magnetic materials on the design and performance of tubular permanent magnet machines," IEEE Trans. on Magnetics, vol. 41, num. 10, ottobre 2005, pag. 4057-4059.
- [4] L. Zarri, M. Mengoni, A. Tani, G. Serra, Y. Gritli and F. Filippetti, "Control of a multi-motor drive based on five-phase tubular PM actuators for positioning systems," Conf. IEEE-IEMDC, 15-18 maggio 2011, Niagara Falls (ON), pag. 154-159.
- [5] D. Casadei, F. Filippetti, M. Mengoni, A. Tani, G. Serra and L. Zarri, "A multi-motor drive based on five-phase tubular PM actuators," Conf. IEEE-ECCE, 12-16 settembre 2010, Atlanta (GA), pag. 3269 - 3275.
- [6] M. Mengoni, A. Tani, L. Zarri, G. Serra and D. Casadei, "Position Control of a Multi-Motor Drive Based on Series-Connected Five-Phase Tubular PM Actuators," IEEE Trans. Ind. Appl., vol. 48, num. 6, 24 ottobre 2012, pag. 2048 - 2058.

- [7] H. A. Toliyat, S. P. Waikar and T. A. Lipo, "Analysis and Simulation of Five-Phase Synchronous Reluctance Machines Including Third Harmonic of Airgap MMF," IEEE Trans. Ind. Appl., vol. 34, num. 2, marzo-aprile 1998, pag. 332 - 339.
- [8] P. Giangrande, F. Cupertino, G. Pellegrino, "Modelling of linear motor end-effects for saliency based sensorless control," Conf. IEEE-ECCE, 12-16 settembre 2010, Atlanta (GA), pag. 3261 - 3268.
- [9] P. Vas, "Sensorless Vector and Direct Torque Control," 1998, Oxford University Press (UK).
- [10] P. P. Acarnley, J. F. Watson, "Review of Position-Sensorless Operation of Brushless Permanent-Magnet Machines," IEEE Trans. Ind. Electronics, vol. 53, num. 2, aprile 2006, pag. 352-362.
- [11] O. Benjak, D. Gerling, "Review of Position Estimation Methods for IPMSM Drives without a Position Sensor: Part I: Nonadaptive Methods," International Conference on Electrical Machines, ICEM, 6-8 settembre 2010, Roma, pag.1-6.
- [12] O. Benjak, D. Gerling, "Review of Position Estimation Methods for IPMSM Drives without a Position Sensor: Part II: Adaptive Methods," International Conference on Electrical Machines, ICEM, 6-8 settembre 2010, Roma, pag.1-6.
- [13] O. Benjak, D. Gerling, "Review of Position Estimation Methods for PMSM Drives Without a Position Sensor, Part III: Methods based on Saliency and Signal Injection," International Conference on Electrical Machines, ICEM, 10-13 ottobre 2010, Roma, pag. 873-878.
- [14] F. Cupertino, P. Giangrande, L. Salvatore, G. Pellegrino, "Sensorless position control of linear tubular motors with pulsating voltage injection and improved position observer," International Electric Machines and Drives Conference, IEMDC, 3-6 maggio 2009, Miami (FL), pag. 619 - 624.

- [15] F. Cupertino, P. Giangrande, M. Scaringi, S. Stasi, L. Salvatore, "Sensorless Control of Linear Tubular Permanent Magnet Synchronous Motors Using Pulsating Signal Injection," Industry Applications Society Annual Meeting, Conf. IEEE-IAS, 5-9 ottobre 2008, Edmonton (Alta), pag. 1-8.
- [16] L. Gong, Z.Q. Zhu, "Saliency investigation of PM brushless AC motors for high-frequency carrier signal injection-based sensorless control," International Conference on Automation and Computing (ICAC), 10 settembre 2011, Huddersfield, pag. 86-91.
- [17] L. M. Gong, Z.Q. Zhu, "Robust Initial Rotor Position Estimation of Permanent-Magnet Brushless AC Machines With Carrier-Signal-Injection-Based Sensorless Control," IEEE Trans. Ind. Appl., vol. 49, num. 6, 29 maggio 2013, pag. 2602-2609.
- [18] D. Raca, P. Garcia, D. Reigosa, F. Briz, R.D. Lorenz, "Carrier Signal Selection for Sensorless Control of PM Synchronous Machines at Zero and Very Low Speeds," IEEE Trans. Ind. Appl., vol. 46, num. 1, 20 novembre 2009, pag. 167-178 .
- [19] Ji-Hoon Jang, Jung-Ik Ha, M. Ohto, K. Ide, Seung-Ki Sul, "Analysis of permanent-magnet machine for sensorless control based on high-frequency signal injection," IEEE Trans. Ind. Appl., vol. 40, num. 6, 22 novembre 2004, pag. 1595-1604.
- [20] F. Cupertino, P. Giangrande, "A simplified position observer for zero-speed sensorless control of synchronous motors," Conf. IEEE-IECON, 3-5 novembre 2009, Porto, pag. 1014-1019.
- [21] Ji-Hoon Jang, Jung-Ik Ha, Ohto, M., Ide, K., "Analysis of permanent-magnet machine for sensorless control based on high-frequency signal injection," IEEE Trans. Ind. Appl., vol. 40, num. 6, novembre-dicembre 2004, pag. 1595-1604.

- [22] Fang Xiong, Wang Yue, Li Ming, Wang Ke, Lei Wanjun, " A novel PLL for grid synchronization of power electronic converters in unbalanced and variable-frequency environment," IEEE Conf. On Power Electronics for Distributed Generation Systems (PEDG), 16-18 giugno 2010, Hefei, pag. 466-471.
- [23] F. Cupertino, E. Lavopa, P. Zanchetta, M. Sumner, L. Salvatore, "Running DFT-Based PLL Algorithm for Frequency, Phase, and Amplitude Tracking in Aircraft Electrical Systems," IEEE Trans. Ind. Electronics, vol. 58, num. 3, 29 aprile 2011, pag. 1027-1035.
- [24] A.G. Yepes, F.D. Freijedo, J. Doval-Gandoy, O. Lopez, J. Malvar, P. Fernandez-Comesaa, "Effects of Discretization Methods on the Performance of Resonant Controllers," IEEE Trans. Power Electronics, vol.25, num. 7, 26 gennaio 2010, pag. 1692-1712.