

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

Scuola di Scienze

Corso di Laurea Magistrale in Fisica del Sistema Terra

Dinamica di una faglia con due asperità in presenza di accoppiamento viscoelastico

Relatore:

Prof. Michele Dragoni

Presentata da:

Emanuele Lorenzano

Sessione II

Anno Accademico 2013/2014

Indice

Introduzione	1
1 Meccanica delle faglie e reologia della litosfera	3
1.1 Meccanica delle faglie	3
1.1.1 Modello ad asperità	6
1.2 Reologia della litosfera	7
1.2.1 Deformazione a carico costante	9
1.2.2 Rilassamento a deformazione costante	9
2 Modelli discreti: proprietà e principali sviluppi storici	12
2.1 Teoria dei sistemi dinamici - cenni	12
2.2 Modelli di faglia discreti	15
2.2.1 Modello a due asperità con accoppiamento elastico: <i>caso asimmetrico</i>	21
2.2.2 Modello a due asperità con accoppiamento viscoelastico: <i>caso simmetrico</i>	25
3 Modello di faglia con due asperità in un mezzo viscoelastico	30
3.1 Caratterizzazione della <i>sticking region</i>	33
3.2 Modi dinamici	35
3.2.1 Modo 00	36
3.2.2 Modo 10	37
3.2.3 Modo 01	39
3.2.4 Modo 11	42
3.3 Caratterizzazione dello stato iniziale	46
3.4 Effetto dell'accoppiamento viscoelastico	48
3.5 Regole di corrispondenza	50

4	Applicazione al terremoto dell'Alaska del 1964	57
4.1	L'evento sismico	58
4.1.1	Scelta dei parametri	59
4.2	Sequenza 00→10→01→00	61
4.2.1	Stato del sistema prima dell'evento del Marzo 1964	64
4.2.2	Stato di sforzo sui segmenti S_1 e S_2	65
4.2.3	Evoluzione delle trazioni sulle asperità	67
4.2.4	Rilascio di momento sismico	70
4.3	Evoluzione successiva	74
4.3.1	Rilascio di momento sismico	78
4.4	Possibili futuri terremoti	86
4.4.1	Gli studi precedenti	87
	Conclusioni	91
	Bibliografia	94

Introduzione

I terremoti sono fenomeni con origine localizzata nella litosfera, lo strato più esterno della Terra, esteso dalla superficie fino a una profondità che oscilla tra 100 km (al di sotto degli oceani) e 200 km (al di sotto dei continenti). La litosfera si presenta frammentata in placche, il cui moto relativo costituisce una manifestazione superficiale dei moti convettivi in atto nel mantello sottostante.

Le sorgenti sismiche sono riconosciute in particolari fratture della litosfera, denominate *faglie*: si tratta di superfici di debolezza, i cui lembi possono scorrere l'uno rispetto all'altro in risposta all'accumulo di sforzo generato dal moto delle placche tettoniche.

Lo scorrimento di una faglia è ostacolato dalla resistenza di attrito presente sulla sua superficie. A esso contribuiscono molteplici fattori (composizione delle rocce litosferiche, pressione, presenza di fluidi, orientamento spaziale) fortemente variabili sia nello spazio che nel tempo: pertanto, l'attrito sulla superficie di una faglia è contraddistinto da una significativa disomogeneità, di cui è fondamentale tenere conto per comprendere appieno le osservazioni sismologiche.

In particolare, le zone più resistenti della superficie di una faglia, caratterizzate da una maggiore soglia di attrito, sono note come *asperità*. Esse giocano un ruolo essenziale nel meccanismo di generazione dei terremoti: lo sviluppo dei cosiddetti *modelli ad asperità* ha infatti ampliato notevolmente la comprensione del fenomeno sismico, consentendo di giustificare svariate osservazioni quali terremoti multipli, repliche e sequenze sismiche.

Il presente lavoro si colloca nell'ambito della meccanica delle faglie ed è dedicato alla descrizione dell'evoluzione dinamica di una faglia dotata di due asperità (o due faglie complanari) caratterizzate da differente soglia di attrito, in presenza di accoppiamento viscoelastico.

Per l'analisi è stato impiegato un modello discreto a tre gradi di libertà, i cui elementi di base sono le asperità: questo ha permesso di studiare l'evoluzione sul lungo periodo del sistema dinamico tracciandone le orbite nello spazio delle fasi.

Nel primo capitolo saranno illustrate le principali nozioni utili a comprendere l'attività di una faglia, soffermandosi sui molteplici fattori che ne determinano l'evoluzione dinamica; verranno inoltre presentate le proprietà reologiche della litosfera, la cui conoscenza risulta essenziale per descriverne il comportamento sul breve e lungo periodo.

Il secondo capitolo contiene una sommaria descrizione delle caratteristiche dei sistemi dinamici, proseguendo quindi con una sintetica rassegna storica dei modelli di faglia discreti, con particolare attenzione verso due dei lavori più recenti, base di partenza per il lavoro di tesi.

Verrà infine introdotto il nuovo modello, impiegato nel seguito per descrivere il comportamento dinamico della faglia in esame.

Nel terzo capitolo verranno indagate le proprietà della faglia che scaturiscono dalle ipotesi assunte nel modello discreto: sarà in particolare possibile

1. identificare l'insieme degli stati intersismici del sistema (*sticking region*) in cui entrambe le asperità sono ferme;
2. individuare le condizioni per il cedimento delle due asperità e il conseguente verificarsi di eventi sismici;
3. definire i possibili modi dinamici del sistema, con relative equazioni del moto e loro soluzione analitica;
4. quantificare l'effetto dell'accoppiamento viscoelastico tra le asperità.

Il quarto capitolo sarà infine dedicato all'applicazione del modello al sistema di asperità all'origine di uno dei più grandi eventi sismici registrati nel XX secolo, verificatosi in Alaska nel 1964. Il risultato dell'analisi sarà messo a confronto con quanto determinato dagli studi precedenti, sottolineandone le differenze più significative.

Capitolo 1

Meccanica delle faglie e reologia della litosfera

1.1 Meccanica delle faglie

Una delle principali proprietà delle rocce litosferiche, inferita da evidenze geologiche, è un'estesa fratturazione che si esplica a ogni scala di osservazione. A causa del moto relativo delle placche tettoniche, le rocce sono perennemente soggette a un campo di sforzo, che si traduce in un processo deformativo crescente nel tempo; il mezzo tende a rilasciare lo sforzo progressivamente accumulato tramite lo scorrimento relativo delle pareti delle fratture (cui si contrappone una resistenza di attrito) piuttosto che generando nuove rotture, in modo da minimizzare il dispendio energetico. Laddove si osserva che una frattura ha subito una dislocazione (spostamento relativo dei suoi lembi) si parla di *faglia*.

Il moto delle faglie non è continuo nel tempo, ma si manifesta tra lunghi periodi di inattività (dell'ordine di decine e centinaia di anni) durante i quali si svolge il lento processo di caricamento tettonico; quando vengono raggiunte le condizioni per lo scorrimento, esso si può esplicare in maniera stabile, asismica, oppure in modo violento (dislocazione dinamica), con conseguente emissione di onde elastiche. Per indicare questo meccanismo, caratterizzato da periodi di stazionarietà (durante i quali lo sforzo sulle faglie viene progressivamente ripristinato) e da successive fasi di instabilità dinamica, viene adottata l'espressione *stick-slip*; all'origine di questo comportamento "a scatti" si pone un processo noto come indebolimento per velocità, secondo il quale l'attrito tra le pareti della faglia diminuisce all'aumentare della velocità di scorrimento.

Il comportamento dinamico di una faglia è governato da due fattori: lo sforzo applicato e la resistenza di attrito tra le pareti, entrambe quantità che possono variare significativamente sia con la posizione che nel tempo.

Al campo di sforzo agente su una faglia contribuiscono sia il già citato sforzo tettonico che la pressione litostatica (ovvero la pressione associata al peso delle rocce litosferiche): mentre quest'ultima fornisce sempre contributo normale al piano di faglia, producendo un effetto di compressione, lo sforzo tettonico consiste in generale di una componente normale e di una tangenziale alla superficie della faglia; è quest'ultimo termine a determinare, sotto opportune condizioni, lo scorrimento della faglia.

Per quanto riguarda la resistenza allo scorrimento, l'attrito radente che si esplica tra le pareti di una faglia dipende da un gran numero di fattori, tra cui la temperatura, l'estensione e la velocità di scorrimento della faglia: numerose sono state le relazioni empiriche proposte per descrivere questi effetti [Dieterich 1972], [Ruina 1983], [Dieterich 1994].

Gli studi sperimentali hanno in particolare portato a definire equazioni costitutive note come *rate- and state-dependent friction laws*, in cui lo sforzo di attrito su una superficie dipende dallo sforzo a essa normale, dalla velocità di scorrimento e da una variabile descrivente lo stato della superficie: in tale stato possono essere incluse, ad esempio, la distribuzione della temperatura, la pressione di poro e l'interazione di natura chimica tra le superfici a contatto.

Per quanto accurata sia questa trattazione, il tipico comportamento di *stick-slip* di una faglia può essere riprodotto adottando una descrizione più essenziale: nella sua forma più semplice, l'attrito radente è comunemente descritto tramite la *legge di Amonton*.

Indicato con τ lo sforzo di taglio sulla faglia, lo scorrimento ha inizio quando viene raggiunta la soglia

$$\tau_s = \kappa_s(p - \sigma_n - p') \quad (1.1)$$

In quest'espressione, κ_s è noto come coefficiente di attrito statico, p è la pressione litostatica, σ_n la componente di sforzo tettonico normale al piano di faglia (quantità negativa) e p' la pressione di poro (ovvero la pressione associata ai fluidi di poro presenti nella litosfera). Si noti dunque come la soglia di attrito statico aumenti al crescere (in valore assoluto) delle componenti di sforzo normali alla superficie di faglia; al contrario, i fluidi di poro agiscono da lubrificante, favorendo

lo scorrimento. Analogo effetto sortiscono i cosiddetti *detriti di faglia*, prodotti dell'intrusione di acqua nei frammenti di roccia accumulatisi nel tempo tra le pareti della faglia.

Una volta avviato lo scorrimento, l'attrito assume un valore dinamico inferiore rispetto a quello statico, causa la dissipazione di energia sotto forma di calore e la triturazione delle pareti della faglia.

La (1.1) mostra chiaramente come l'attrito possa variare sia nello spazio che nel tempo, in seguito al cambiamento di uno qualunque dei fattori che vi contribuiscono: κ_s dipende dalla composizione del mezzo in cui si trova la faglia, p e σ_n dall'orientamento e dalla profondità della faglia, p' dalla concentrazione di fluidi di poro.

L'evoluzione dinamica di una faglia risulta ulteriormente complicata dal fatto che essa non può considerarsi isolata [Harris 1998], [Stein 1999], [Steady et al. 2005]. Ogni faglia è infatti soggetta all'interazione con quelle circostanti: laddove due o più faglie siano sufficientemente vicine da influenzarsi in modo significativo, si parla di *sistemi di faglie*. In tali sistemi, il campo di sforzo su una qualunque faglia è alterato dallo sforzo associato allo scorrimento delle altre.

Il prodotto di tale trasferimento di sforzo è radicalmente diverso a seconda dell'orientazione relativa delle faglie del sistema: lo sforzo trasferito σ' può difatti sia inibire (posticipare) che favorire (anticipare) il cedimento di una faglia. Il terremoto successivo risulta inibito quando la componente di σ' normale al piano di faglia è compressiva, così da accrescere la soglia di attrito statico (1.1), e/o quando la componente tangenziale è opposta al verso dello sforzo tettonico; viceversa, si ha anticipazione quando le componenti normale e tangenziale di σ' sono, rispettivamente, distensiva e concorde allo sforzo tettonico.

Un efficace strumento per comprendere la natura dell'interazione tra faglie è rappresentato dallo *sforzo di Coulomb*: se σ_t è la componente di sforzo complessivo tangente al piano di faglia nella direzione dello scorrimento, esso è definito come

$$\sigma_C \equiv \sigma_t - \tau_s \quad (1.2)$$

Evidentemente, il cedimento si verifica quando $\sigma_C = 0$. Come già rimarcato, il trasferimento di sforzo da faglie circostanti può modificare sia σ_t che τ_s : se la conseguente variazione $\Delta\sigma_C$ dello sforzo di Coulomb è positiva, lo scorrimento viene anticipato, il contrario se $\Delta\sigma_C$ è negativa.

1.1.1 Modello ad asperità

Il modello ad asperità venne per la prima volta proposto in [Scholz & Engelder 1976] e [Byerlee 1978] per interpretare i risultati di una serie di esperimenti di laboratorio sulla resistenza di attrito; in seguito, esso venne introdotto nel contesto della meccanica delle faglie [Lay & Kanamori 1981], [Lay et al. 1982], [Ruff 1983], [Scholz 1990]. Fu così suggerita l'esistenza, sulla superficie di faglia, di aree localizzate a elevato attrito, note come asperità: durante il periodo di stazionarietà della faglia, tali regioni ne mantengono saldate insieme le pareti e sono caratterizzate da una particolare concentrazione di sforzo, possibile risultato di variazioni nell'orientamento geometrico e/o di eterogeneità strutturali lungo la zona di contatto. L'intensità dell'accoppiamento tra le pareti della faglia è governata dal prodotto fra area di contatto e intensità dell'attrito statico sulle asperità: pertanto, faglie con asperità molte estese e un elevato coefficiente di attrito risultano in un forte accoppiamento.

Il comportamento dinamico di una distribuzione di asperità è stato studiato in [Kanamori 1978] al fine di inquadrarne il ruolo negli eventi sismici più rilevanti. Il progressivo aumento dello sforzo causato dal caricamento tettonico può dar luogo allo scorrimento delle zone più deboli del piano di faglia, che possono scorrere sia in modo asismico che con la produzione di piccoli terremoti: ciò si traduce in una concentrazione di sforzo sulle asperità. Laddove lo sforzo di taglio raggiunge la soglia di attrito, si verifica il cedimento di una prima asperità: lo sforzo accumulato può allora essere rilasciato in uno scorrimento localizzato o, se questo primo scorrimento induce sufficiente incremento di sforzo sulle asperità adiacenti, tramite una più complessa sequenza di scorrimenti multipli, cui sono associati eventi sismici più intensi.

Un ruolo essenziale è giocato dalla distribuzione e dalle dimensioni delle asperità sul piano di faglia: se le asperità hanno caratteristiche simili, l'incremento di sforzo associato a un primo scorrimento è in genere sufficiente a innescare lo scorrimento delle asperità vicine; laddove invece la distribuzione delle asperità sia più complessa, essa può inibire l'efficienza del caricamento sulle asperità adiacenti, poiché buona parte dello sforzo viene rilasciato nello scorrimento di zone più piccole e deboli.

Due possibili casi sono esemplificati in Figura 1.1.

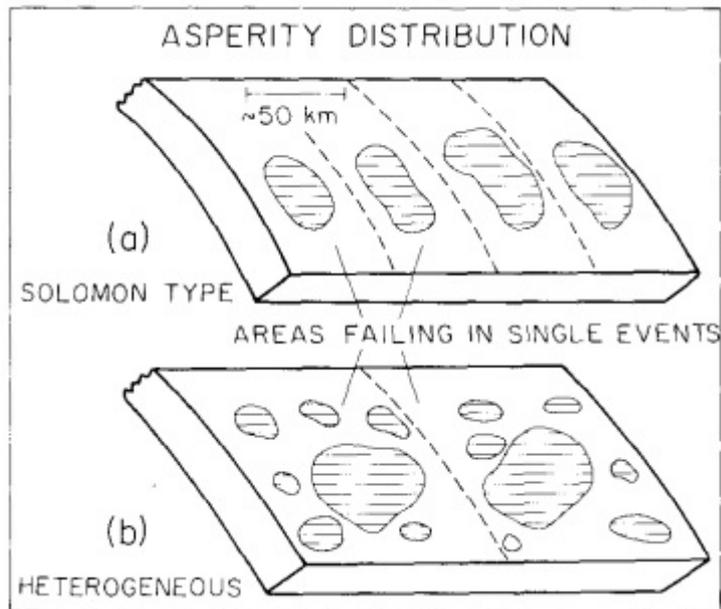


Figura 1.1: Esempio di distribuzione di asperità [Lay et al. 1982].

Esistono svariate osservazioni sismologiche a supporto di quanto previsto dai modelli ad asperità. Ad esempio, il *clustering* pre-sismico di terremoti nella regione circostante l'epicentro degli eventi principali riflette la concentrazione di sforzo su un'asperità; ancora, l'espansione della zona di *aftershock* indica che lo scorrimento associato all'evento sismico principale si estende a una regione caratterizzata da debole accoppiamento.

1.2 Reologia della litosfera

Le proprietà reologiche dell'interno della Terra possono essere inferite a partire da osservazioni sismologiche, dallo studio delle deformazioni che avvengono su lunghe scale di tempo e da esperienze di laboratorio volte a determinare l'equazione costitutiva (relazione tra sforzo e deformazione) dei materiali più rappresentativi delle zone interne del pianeta [Christensen 1971], [Carter 1976], [Nishimura & Thatcher 2003], [Bürgmann & Dresen 2008].

Oltre che da intrinseche caratteristiche composizionali, il comportamento reologico delle rocce dipende fortemente da fattori esterni (quali pressione e temperatura), oltre che dalla scala di tempo su cui vengono effettuate le osservazioni; è infatti importante sottolineare come il comportamento della litosfera sia di tipo elastico

(rigido) su brevi scale di tempo, quali quelle tipiche della propagazione delle onde sismiche, mentre un carattere di tipo fluido si esplica su scale temporali di gran lunga superiori [Kirby 1983], [Kirby & Kronenberg 1987].

In generale, pertanto, il comportamento reologico che viene assegnato alla litosfera cosiddetta *termica* (la regione che si estende dalla superficie fino all'isoterma 1600 K) è di tipo *viscoelastico*, purché a essa sia associata una viscosità molto più elevata rispetto a quella del mantello sottostante.

Tra i modelli viscoelastici esistenti, il corpo di Maxwell è quello più utilizzato, in quanto si presta a descrivere con maggiore semplicità il comportamento a lungo termine delle rocce terrestri.

I modelli reologici trovano rappresentazione grafica nella combinazione di elementi meccanici di base; nello specifico, il corpo di Maxwell è raffigurato dalla serie di un elemento elastico di Hooke (molla) e di un elemento viscoso di Newton (ammortizzatore), secondo lo schema riportato in Figura 1.2.

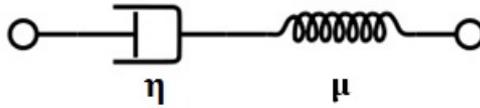


Figura 1.2: Solido viscoelastico di Maxwell.

Per l'elemento elastico, si assuma la relazione costitutiva lineare

$$\epsilon_e = \frac{\sigma}{2\mu} \quad (1.3)$$

essendo μ il modulo di rigidità, ϵ_e una componente deviatorica di deformazione elastica e σ la componente deviatorica di sforzo associato; per quanto riguarda invece l'elemento viscoso, si consideri la legge newtoniana

$$\dot{\epsilon}_v = \frac{\sigma}{2\eta} \quad (1.4)$$

dove η è la viscosità, $\dot{\epsilon}_v$ lo strain rate associato alla componente deviatorica di deformazione viscosa e, di nuovo, σ la componente deviatorica di sforzo associato.

Nella serie di due elementi, la deformazione complessiva è pari alla somma delle singole deformazioni: pertanto, derivando la (1.3) rispetto al tempo e sommandola alla (1.4), si ottiene la relazione costitutiva

$$2\dot{\epsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{\mu} + \frac{\sigma}{\eta} \quad (1.5)$$

Risulta utile definire il tempo caratteristico di Maxwell

$$\tau \equiv \frac{\eta}{\mu} \quad (1.6)$$

tale per cui, per tempi $t \ll \tau$, prevale il comportamento elastico, mentre per tempi $t \gg \tau$, prevale il comportamento viscoso.

Si considerino ora due situazioni limite: deformazione a carico costante e rilassamento a deformazione costante.

1.2.1 Deformazione a carico costante

Si supponga di applicare al corpo di Maxwell un carico costante per tempi $t > 0$, espresso da

$$\sigma(t) = \sigma_0 H(t) \Rightarrow \dot{\sigma}(t) = 0 \quad \forall t > 0 \quad (1.7)$$

dove $H(t)$ è la funzione di Heaviside. Istantaneamente, la risposta del mezzo sarà di tipo elastico, dal momento che l'ammortizzatore non ha tempo di reagire all'impulso ricevuto: pertanto

$$\epsilon(t = 0^+) = \frac{\sigma_0}{2\mu} \quad (1.8)$$

Dalla (1.5) si ottiene l'equazione differenziale

$$2\dot{\epsilon} = \frac{\sigma}{\eta} \quad (1.9)$$

che, integrata con condizione iniziale (1.8), fornisce soluzione

$$\epsilon(t) = \frac{\sigma_0 H(t)}{2\mu} \left(1 + \frac{t}{\tau}\right) \quad (1.10)$$

Il corpo risponde pertanto con una deformazione istantanea iniziale, che cresce poi linearmente nel tempo: si noti come, per $t \ll \tau$, la (1.10) si riduce al caso elastico (1.3), mentre, per $t \gg \tau$, si ritrova il caso di fluido newtoniano (1.4).

L'andamento è illustrato in Figura 1.3.

1.2.2 Rilassamento a deformazione costante

Si supponga di applicare al corpo di Maxwell una deformazione costante per tempi $t > 0$ (come nel caso di una dislocazione all'origine di un evento sismico), secondo la relazione

$$\epsilon(t) = \epsilon_0 H(t) \Rightarrow \dot{\epsilon}(t) = 0 \quad \forall t > 0 \quad (1.11)$$

Istantaneamente, la risposta del mezzo sarà anche in questo caso di tipo elastico, dal momento che l'ammortizzatore non ha tempo di reagire all'impulso ricevuto: pertanto

$$\sigma(t = 0^+) = 2\mu\epsilon_0 \quad (1.12)$$

Dalla (1.5) si ottiene l'equazione differenziale

$$\frac{\sigma}{\eta} + \frac{\sigma}{\mu} = 0 \quad (1.13)$$

che, integrata con condizione iniziale (1.12), fornisce soluzione

$$\sigma(t) = 2\mu\epsilon_0 H(t) e^{-t/\tau} \quad (1.14)$$

nota come *funzione di rilassamento*.

La repentina risposta elastica viene quindi progressivamente rilassata nel tempo, fino ad annullarsi per tempi $t \gg \tau$: pertanto τ viene in questo contesto definito *tempo di rilassamento* e rappresenta l'istante di tempo in corrispondenza del quale lo sforzo inizialmente sviluppato viene a essere ridotto di un fattore $1/e$.

L'andamento è illustrato in Figura 1.4.

Nel capitolo successivo verrà illustrato come i processi meccanici e le proprietà reologiche fin qui descritti possano essere riprodotti nell'ambito di un modello di faglia discreto.

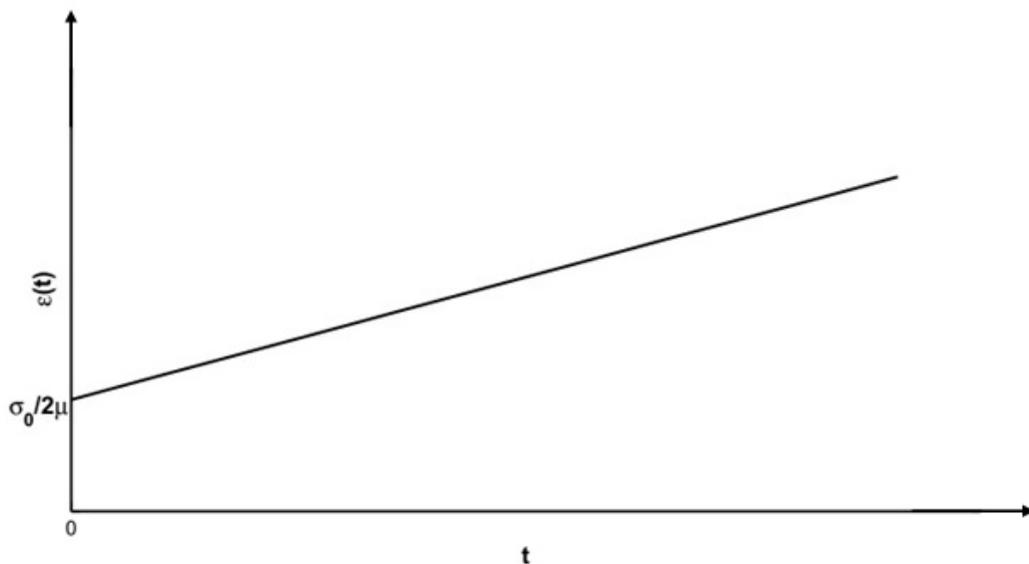


Figura 1.3: Deformazione a carico costante per il corpo di Maxwell.

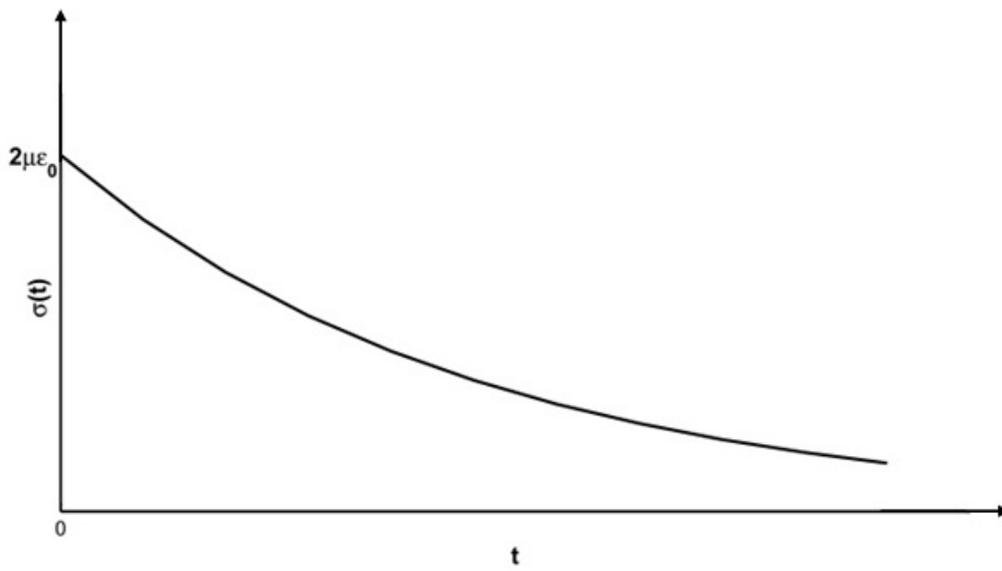


Figura 1.4: Rilassamento a deformazione costante per il corpo di Maxwell.

Capitolo 2

Modelli discreti: proprietà e principali sviluppi storici

L'evoluzione di una faglia si presta a essere agevolmente descritta assimilando la faglia a un sistema dinamico discreto: l'adozione di modelli discreti consente di tenere conto delle caratteristiche essenziali delle sorgenti sismiche (quale, ad esempio, il meccanismo di *stick-slip*, governato dal sistema di trazioni applicate e dall'attrito sulla superficie di faglia) e di evitare la più dettagliata e complessa caratterizzazione basata sulla meccanica dei mezzi continui.

Si tratta di un approccio simile a quello che prevede di descrivere un sistema fisico per mezzo di grandezze termodinamiche macroscopiche in luogo della descrizione a scala atomica della meccanica statistica, focalizzata sulla dinamica delle singole particelle da cui il sistema è composto.

2.1 Teoria dei sistemi dinamici - cenni

Sia dato un sistema descritto da un vettore \mathbf{X} definito su un sottoinsieme S dello spazio \mathbb{R}^n , denominato *spazio delle fasi* o *spazio degli stati*.

Le n componenti del vettore \mathbf{X} costituiscono le *variabili* del sistema e sono funzioni di un parametro reale t rappresentante il tempo: il valore assunto dalle variabili a un fissato istante di tempo definisce lo *stato* istantaneo del sistema.

Un sistema dinamico *continuo* viene definito tramite un sistema di n equazioni differenziali ordinarie e autonome che, in forma compatta, può essere scritto come

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt} = F(\mathbf{X}) \quad (2.1)$$

dove la mappa $F : S \rightarrow \mathfrak{R}^n$ è nota come *campo* associato al sistema dinamico.

Fissato come istante iniziale $t = 0$, l'*orbita* (o soluzione) del sistema dinamico è rappresentata da una funzione

$$[0, +\infty) \ni t \rightarrow \mathbf{X}(t) \in S \quad (2.2)$$

che verifica il sistema (2.1).

Un sistema dinamico *discreto* è invece caratterizzato da un'orbita costituita da una successione di stati $\mathbf{X}_j \in S$ ($j = 0, 1, \dots + \infty$): fissata una legge $f : S \rightarrow S$, l'evoluzione del sistema dinamico risulta in tal caso governata da una *relazione ricorsiva*

$$\mathbf{X}_{j+1} = f(\mathbf{X}_j) \quad (2.3)$$

una volta fissato lo stato iniziale \mathbf{X}_0 .

Si definisce *flusso integrale* (o integrale generale) di un sistema dinamico la famiglia di applicazioni $\phi_t : S \rightarrow S$ che associa allo stato iniziale $\mathbf{X}_0 \in S$ l'immagine $\phi_t(\mathbf{X}_0)$ data dalla soluzione $\mathbf{X}(t)$ del sistema (2.1) al tempo t ; in particolare, $t \in [0, +\infty)$ nel caso continuo, mentre $t \in Z_0^+$ nel caso discreto (dove Z_0^+ è l'insieme degli interi positivi, 0 incluso).

Tenendo conto di quest'ultima definizione, è uso indicare un sistema dinamico secondo la notazione $\{S, \phi\}$.

Un sistema dinamico si definisce *lineare* quando la (2.1) si presenta nella forma

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt} = A\mathbf{X} \quad (2.4)$$

essendo A una matrice di $n \times n$ elementi costanti.

Dato un sistema dinamico $\{S, \phi\}$, si definisce *insieme invariante* un sottoinsieme Ψ dello spazio degli stati S tale che, se $\mathbf{X}_0 \in \Psi$, allora $\phi_t(\mathbf{X}_0) \in \Psi \forall t > t_0$: in altre parole, se il punto rappresentativo del sistema giunge in una di queste regioni, vi permane indefinitivamente.

Esempi notevoli di insiemi invarianti sono i cosiddetti *punti fissi* (posizioni di

equilibrio del sistema dinamico, tali per cui $\phi_t(\mathbf{X}) = \mathbf{X}$ per tutti gli istanti t) e i *punti periodici* (posizioni per le quali l'orbita del punto rappresentativo passa ciclicamente, ovvero esistono tempi $T > 0$ per cui $\phi_T(\mathbf{X}) = \mathbf{X}$: il minimo valore di T è noto come periodo dell'orbita).

Sono detti *conservativi* i sistemi dinamici in cui non sono presenti forme di dissipazione dell'energia meccanica totale che caratterizza il sistema; in caso contrario, il sistema è detto *dissipativo* e l'energia meccanica totale a esso associata non rimane costante nel tempo.

Un tratto distintivo dei sistemi dissipativi è dato dal fatto che a essi è sempre associato un insieme invariante, noto come *attrattore*: esso è definito come un insieme chiuso e limitato Ψ topologicamente transitivo (ovvero, dati due aperti A, B di Ψ , l'intersezione $\phi_t(A) \cap B$ è non vuota per qualche t) e caratterizzato da un intorno $C \subset S$ per cui, dato $\mathbf{X} \in C$, allora $\phi_t(\mathbf{X}) \in \Psi$ per $t \rightarrow +\infty$ (il più grande di suddetti insiemi C è noto come bacino di attrazione dell'attrattore).

Pertanto, come suggerito dal nome stesso, un attrattore si qualifica come una regione dello spazio delle fasi verso la quale viene attirata l'orbita del punto rappresentativo del sistema dinamico; un sistema dinamico può essere caratterizzato da più di un attrattore, ciascuno dei quali permette di descrivere il comportamento a lungo termine del sistema.

Si definiscono *lisci* di indice r in uno spazio S i campi $F(\mathbf{X})$ di ordine C^r : le prime r derivate (calcolate rispetto alle variabili di stato del sistema) esistono continue in ogni punto $\mathbf{X} \in S$; un sistema dinamico viene definito *liscio* quando il flusso a esso associato è una mappa liscia di ordine C^∞ .

Particolarmente rilevanti risultano essere i sistemi dinamici *lisci a tratti*, caratterizzati da fasi di evoluzione liscia intervallate da transizioni repentine (che rendono peraltro il sistema non lineare): un esempio notevole è dato dai sistemi la cui dinamica è governata da una soglia di attrito, anche noti come sistemi *stick-slip*. Tali sistemi non presentano discontinuità nel valore delle variabili di stato, bensì nelle accelerazioni e nel numero di equazioni che ne governano la dinamica; inoltre, la dimensione dello spazio delle fasi può variare nel tempo, a seconda dello stato in cui il sistema si trova.

Tra i sistemi dinamici lisci a tratti vanno annoverati i cosiddetti *sistemi di Filippov*, contraddistinti da un salto nella derivata temporale prima delle variabili di

stato [Filippov 1988], [Di Bernardo et al. 2008].

Grande importanza riveste altresì la caratterizzazione dei sistemi dinamici in base alla *sensibilità* rispetto alle condizioni iniziali e alle perturbazioni alle condizioni al contorno: sono denominati *prevedibili* i sistemi la cui evoluzione non è significativamente alterata da piccole variazioni alle condizioni iniziali e al contorno, rendendo così possibile la previsione del comportamento *a lungo termine*; viceversa si dicono *caotici* quei sistemi deterministici (non stocastici) sulla cui evoluzione non è possibile compiere previsioni a lungo termine, essendo essi drasticamente sensibili a ogni piccola alterazione di condizioni iniziali e al contorno.

Un sistema dinamico caotico $\{S, \phi\}$ risulta caratterizzato da *attrattori caotici*: si tratta di insiemi attrattori Ψ sensibili alle condizioni iniziali (ovvero orbite in Ψ inizialmente comunque vicine vengono allontanate in tempi successivi) e contenenti almeno un'orbita densa (esiste almeno un'orbita in Ψ che, in un qualche istante di tempo, viene a trovarsi indefinitivamente vicina a ogni punto appartenente a Ψ). Condizioni *necessarie* al verificarsi di un'evoluzione caotica sono la non linearità del sistema dinamico e la dimensione dello spazio delle fasi, che deve essere maggiore di due, in base al teorema di Poincaré-Bendixson [Ott 1993].

2.2 Modelli di faglia discreti

La meccanica delle faglie si presta a essere utilmente analizzata tramite modelli discreti costituiti da insiemi di blocchi connessi tra loro per mezzo di molle; tali modelli possono essere classificati in due categorie principali.

Una prima tipologia si focalizza sull'analisi dell'equazione costitutiva di una faglia, ricercando in particolare come i processi di rottura e scorrimento si propaghino sulla superficie di una faglia e quale distribuzione di attrito sia la più appropriata per riprodurre le caratteristiche della sismicità osservata, sia in termini di energia rilasciata che di distribuzione temporale degli eventi. Questa categoria prevede il ricorso a un numero N elevato di blocchi, interpretati come punti di contatto tra le pareti di una faglia in moto relativo l'una rispetto all'altra: al tendere di N all'infinito, questi modelli simulano il comportamento di un mezzo elastico continuo.

Il secondo tipo di modelli è invece indirizzato a una descrizione a livello più macroscopico del comportamento dinamico delle faglie: il modello include un numero ridotto di blocchi, rappresentanti asperità sul medesimo piano di faglia o più faglie complanari. Tramite questo sistema si intende studiare l'interazione tra porzioni di una stessa faglia o tra faglie distinte sufficientemente vicine da potersi influenzare: riducendo il numero di gradi di libertà del sistema, risulta possibile studiarne l'evoluzione tramite orbite nello spazio delle fasi e analizzare sia i meccanismi di trasferimento di sforzo che il comportamento sul lungo periodo, al fine di formulare previsioni circa i possibili eventi sismici futuri.

Tra i modelli appartenenti alla prima categoria va annoverato il precursore di questa metodologia: il modello a blocchi proposto in [Burrige & Knopoff 1967]. Gli autori considerarono un sistema di blocchi disposti su un piano orizzontale scabro e connessi tra loro per mezzo di molle (vedi Figura 2.1): l'insieme è collegato a un motore che agisce come meccanismo di trascinamento.

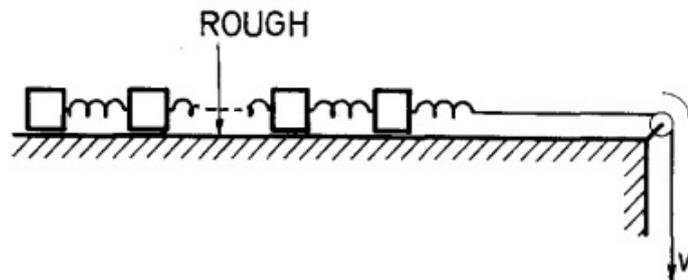


Figura 2.1: Schema del primo modello blocco-molla, proposto in [Burrige & Knopoff 1967].

Questo primo modello venne poi complicato con l'introduzione di varianti e nuovi elementi: nel complesso, gli autori hanno mostrato che il tipico comportamento di *stick-slip* e una distribuzione temporale degli eventi sismici tipo legge di potenza (secondo quanto previsto dalla relazione di Gutenberg-Richter) possono essere ritrovati introducendo una legge di indebolimento dell'attrito governata dalla velocità di scorrimento, secondo una funzione costante a tratti in base alla quale l'attrito viene caratterizzato da un valore statico e da uno dinamico; a causa di questa dipendenza non lineare dalla velocità, il sistema è dissipativo e non lineare.

Diversi studi si sono nel tempo inseriti nel filone della prima categoria: ricordiamo tra i più rilevanti i due [Carlson & Langer 1989] (in cui si mise in evidenza come

svariate peculiarità dell'attività sismica potessero essere generate sotto la condizione di non linearità del sistema), [Nakanishi 1990], [Nakanishi 1991], [Carlson et al. 1991], [Huang et al. 1992], [Hainzl et al. 1999], [Pelletier 2000] (tra i primi a introdurre l'effetto dell'astenosfera tramite un ritardo nel trasferimento di sforzo tra le varie porzioni di una faglia) e, tra i più recenti, [Weatherley & Abe 2004]; da qui in avanti l'attenzione sarà però focalizzata su sistemi del secondo tipo, cui appartiene anche il modello sviluppato nel lavoro di tesi.

Uno dei più significativi studi di un sistema a blocchi è rappresentato da [Nussbaum & Ruina 1987], in cui venne simulato il moto relativo di due placche rigide accompagnato dal "rimbalzo" (*rebound*) elastico di due blocchi interposti tra le placche: tali blocchi erano accoppiati tramite attrito a una delle placche ed elasticamente congiunti tra loro e alla placca rimanente, secondo lo schema riportato in Figura 2.2. In particolare, il modello era dotato di una *simmetria spaziale* completa, assumendo per i blocchi pari valore di massa, rigidità delle molle di accoppiamento con il meccanismo di guida e resistenza di attrito statico e dinamico.

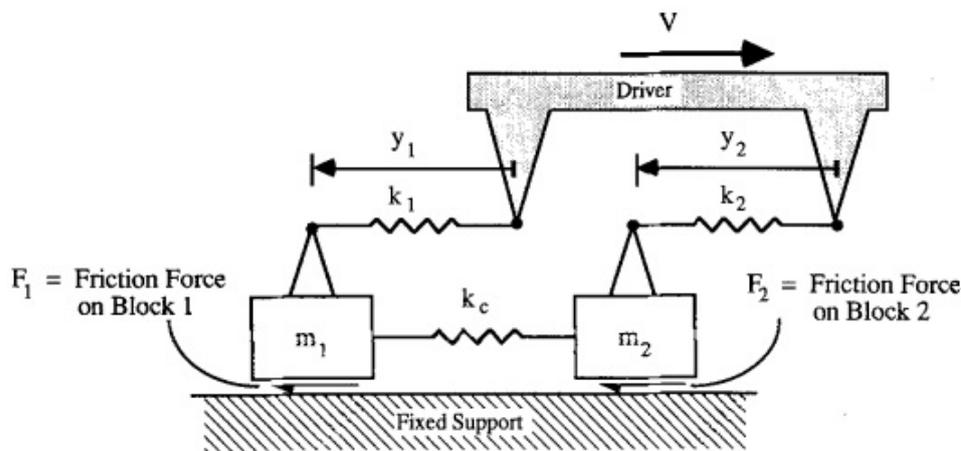


Figura 2.2: Schema del modello a due blocchi proposto in [Nussbaum & Ruina 1987].

Possono essere stabilite le seguenti **corrispondenze**, valide in termini del tutto generali anche per i modelli successivi:

- blocchi \longleftrightarrow asperità su uno stesso piano di faglia o faglie complanari;
- meccanismo di trascinamento esterno \longleftrightarrow moto delle placche tettoniche;
- estensione delle molle \longleftrightarrow deformazione elastica della litosfera;
- forza esercitata dalle molle sui blocchi \longleftrightarrow trazione agente sulle asperità;

- attrito alla base dei blocchi \longleftrightarrow resistenza tra le pareti della faglia;
- moto di un blocco \longleftrightarrow scorrimento di un'asperità;
- molle di accoppiamento \longleftrightarrow trasferimento di sforzo tra asperità.

La maggior parte dei terremoti risultò scaturire dal moto di un blocco per volta, ma occasionalmente venne anche osservato come, sotto particolari condizioni, il moto di un blocco fosse in grado di innescare lo scorrimento dell'altro per effetto dell'accoppiamento elastico.

A causa delle rapide transizioni tra fasi di *stick* e *slip*, il sistema dinamico si configura come liscio a tratti e rientra nella categoria dei sistemi di Filippov [Filippov 1988], [Di Bernardo et al. 2008]. Tra le proprietà più rilevanti di questo tipo di sistemi vanno annoverati i concetti di *sticking region* e *failure locus*: la *sticking region* (“regione di adesione”) è una regione dello spazio delle variabili di stato in cui si trovano tutti gli stati del sistema in cui i blocchi sono immobili. Analogamente, è possibile individuare luoghi geometrici tali che, intersecati dall'orbita del punto rappresentativo del sistema, vengono realizzate le condizioni necessarie allo scorrimento: ognuno di tali luoghi è noto come *failure locus*.

Durante una fase di *stick* globale lo stato del sistema può essere descritto in termini della differenza costante p tra la posizione dei due blocchi rispetto al meccanismo di guida; in seguito allo scorrimento di uno o di entrambi i blocchi, p assume un nuovo valore. L'evoluzione del sistema risulta pertanto descrivibile tramite una sequenza di valori della variabile p , successione che può essere interpretata come una mappa del tipo $p_{k+1} = f(p_k)$: tale funzione è nota come *mappa degli eventi*, dal momento che a ogni iterazione corrisponde un evento sismico.

Le ipotesi di simmetria assunte in [Nussbaum & Ruina 1987] furono parzialmente rilassate in [Huang & Turcotte 1990a], ammettendo una differente soglia di attrito statico e dinamico per i due blocchi: tale eterogeneità risultò essere condizione necessaria per il manifestarsi di un comportamento caotico deterministico del sistema, generando altresì pattern di sismicità coerenti con quelli prodotti su segmenti di faglia reali [Huang & Turcotte 1990b], [Huang & Turcotte 1992].

Una tipica descrizione dell'attrito sul piano di faglia assume che l'accoppiamento tra le pareti della faglia sia contraddistinto da un coefficiente di attrito dinamico più piccolo di quello statico, secondo un fattore costante predefinito: in [Narkounskaia & Turcotte 1992] si è stabilita l'esistenza di una trasformazione lineare tra sistemi caratterizzati da diverso rapporto tra coefficiente di attrito statico e

dinamico, per cui modificare tale rapporto non altera il comportamento del sistema.

Un ulteriore esame degli effetti di eterogeneità più o meno marcate introdotte nel modello a due blocchi, in presenza di attrito dipendente dalla velocità e dallo stato del sistema, è stato condotto in [He 2003], evidenziando come il pattern di ricorrenza degli eventi di *slip* dipenda principalmente dalla costante elastica di accoppiamento tra i due blocchi: in particolare, la complessità delle evoluzioni osservate tende ad aumentare al diminuire del valore di tale parametro. Laddove l'attrito alla base dei blocchi sia differente (sistema asimmetrico), la progressiva riduzione della rigidità di accoppiamento si traduce in perdita di periodicità, fino all'instaurarsi di un regime caotico, in cui ciascun blocco appare muoversi indipendentemente dall'altro.

Si noti, in linea generale, che l'interazione (ovvero, l'accoppiamento) tra due porzioni di una faglia cresce al diminuire della distanza tra le stesse.

Tra gli studi condotti sull'interazione tra segmenti di una stessa faglia va annoverato il lavoro presentato in [Lynch et al. 2003]. Gli autori hanno costruito un modello di faglia di tipo *strike-slip* racchiusa in uno strato elastico superficiale, a sua volta sovrastante un più spesso strato viscoelastico; la faglia è composta da due asperità principali, collegate tra loro da un segmento asismico.

I risultati ottenuti hanno mostrato che l'accoppiamento tra i terremoti generati dalle due asperità aumenta al diminuire della viscosità della porzione inferiore della crosta e dell'estensione del segmento asismico che le collega; in particolare, bassi valori di viscosità accelerano il processo di caricamento tettonico, per cui le asperità risultano più prossime alle condizioni di cedimento durante i rispettivi cicli sismici.

Inoltre, una variazione della soglia di sforzo necessaria allo scorrimento di un'asperità non influenza esclusivamente il tempo di ritorno di tale asperità, ma anche il comportamento dell'altra, come ci si può aspettare per un sistema accoppiato.

Nello studio dei sistemi discreti a due blocchi si inserisce il lavoro presentato in [Dragoni & Santini 2010] e [Dragoni & Santini 2011]. Al fine di simulare il comportamento di una faglia con due asperità (o, similmente, due segmenti di faglia complanari) soggetta a *strain rate* tettonico costante, viene considerato un modello composto da due blocchi accoppiati elasticamente e trascinati a velocità costante su un piano scabro; si assume che i due blocchi siano caratterizzati

dal medesimo valore di attrito statico e dinamico alla base di appoggio (sistema simmetrico).

L'analisi ha permesso di identificare una regione L dello spazio delle fasi a partire dalla quale il sistema entra immediatamente in un ciclo limite, caratterizzato da un comportamento periodico, con lo scorrimento alternato delle due asperità. Esiste un'infinità non numerabile di suddetti cicli limite, la cui particolare forma dipende dalla posizione iniziale del punto rappresentativo in L , ovvero dalla disomogeneità dello sforzo applicato alla faglia.

Se una perturbazione esterna altera la distribuzione di sforzo cui corrisponde il suddetto carattere periodico, per cui il punto rappresentativo del sistema è inizialmente al di fuori di L , la faglia può produrre terremoti più grandi, generati dallo scorrimento simultaneo delle due asperità. In questo caso, infatti, il momento sismico complessivo non è semplicemente pari alla somma dei momenti rilasciati dalle due asperità quando scorrono separatamente, a causa dell'interazione tra le asperità stesse durante l'evento di scorrimento: i terremoti così generati possono essere considerati come i più grandi cui la faglia può dar luogo. In tempi successivi, si torna poi a stabilire una distribuzione di sforzo compatibile con il comportamento periodico.

Il fatto che lo spazio degli stati possa essere diviso in sottoinsiemi corrispondenti a evoluzioni del sistema molto diverse implica la sensibilità del sistema a piccole perturbazioni: ciò ha significative conseguenze per una faglia, che non può essere considerata come un sistema isolato a causa delle interazioni con le faglie circostanti.

Alla luce di quanto discusso in precedenza, appare evidente che l'analisi dei modelli discreti è stata nel tempo incentrata sull'indagine di due caratteristiche peculiari dei sistemi di faglie.

Un ruolo fondamentale è giocato dalla relazione costitutiva della faglia, ovvero dalla particolare legge di attrito che governa il processo di *stick-slip*; allo stesso tempo, è essenziale prendere in considerazione l'interazione tra faglie, fenomeno esaminato tramite sistemi composti da blocchi accoppiati.

In [Dragoni & Piombo 2011] è stata indagata una terza possibilità, nell'ipotesi che lo *strain rate* tettonico cui sono soggette le faglie sismogenetiche sia (lentamente) variabile nel tempo, tipicamente per effetto di un cambiamento nella velocità di convezione del mantello.

Mentre valori costanti di *strain rate* tettonico corrispondono a eventi sismici con

fissato periodo di ricorrenza, uno *strain rate* variabile è causa di aperiodicità, rendendo particolarmente ardua ogni previsione del comportamento a lungo termine del sistema; a questo si aggiunge il fatto che perturbazioni esterne, quali i terremoti prodotti da sistemi di faglie circostanti, danno luogo a ulteriori modifiche nei pattern di sismicità, anticipando o ritardando gli scorrimenti.

In ogni caso, va sottolineato che le variazioni di *strain rate* tettonico sono tipicamente difficili da osservare, a causa della loro lentezza e di varie forme di perturbazione esterna.

Al termine di questa rassegna storica dei progressi fatti nello studio dei modelli di faglia discreti, verranno ora discussi con maggior livello di dettaglio due casi che si pongono a fondamento del presente lavoro di tesi.

2.2.1 Modello a due asperità con accoppiamento elastico: *caso asimmetrico*

Questo studio, presentato in [Dragoni & Santini 2012], costituisce il naturale completamento di quanto svolto in [Dragoni & Santini 2010] e [Dragoni & Santini 2011]. Gli autori hanno considerato il sistema discreto costituito da due blocchi di uguale massa m , connessi tramite molle di pari rigidità K a un meccanismo di guida esterno, in moto con velocità v costante e parallela al piano orizzontale su cui poggiano i blocchi medesimi; questi sono infine accoppiati tra loro per mezzo di una terza molla di costante elastica K_C .

Il modello, riprodotto in Figura 2.3, viene impiegato per descrivere la dinamica di una faglia con due asperità (o di due faglie complanari); nel seguito, ci si riferirà ai due blocchi tramite quantità con pedice 1 e 2 rispettivamente.

La superficie di appoggio dei due blocchi è scabra: la forza di attrito che agisce conseguentemente sulle due masse si esplica in un termine statico f_{S1} , f_{S2} durante la fase di *stick* e in uno dinamico f_{D1} , f_{D2} durante quella di scorrimento.

Definendo $\beta = f_{S2}/f_{S1} = f_{D2}/f_{D1}$, il modello asimmetrico considera il caso $\beta \neq 1$, laddove invece in [Dragoni & Santini 2010] - [Dragoni & Santini 2011] si era esaminato il caso simmetrico $\beta = 1$.

Altro parametro essenziale per l'analisi è $\alpha = K_C/K$, caratterizzante il grado di accoppiamento dei due blocchi: nel caso limite $\alpha = 0$ essi risultano completamente indipendenti, mentre si ha perfetto accoppiamento per $\alpha \rightarrow \infty$.

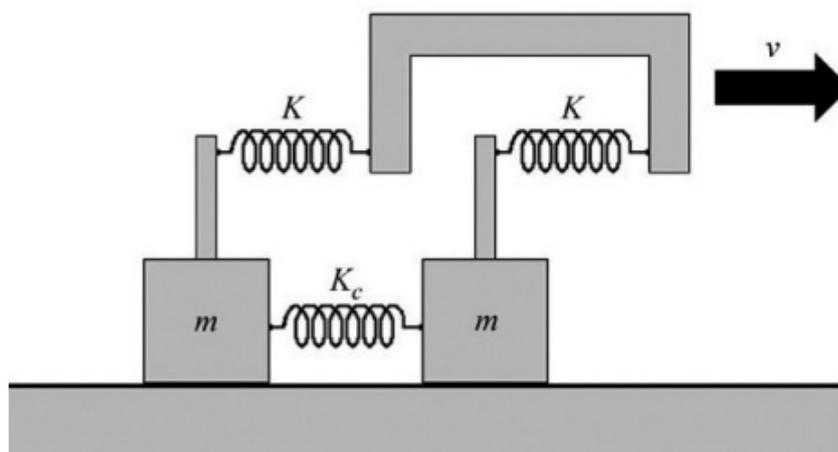


Figura 2.3: Modello a due blocchi con accoppiamento elastico [Dragoni & Santini 2012].

Lo stato del sistema può essere descritto in termini di due variabili, x e y , rappresentanti rispettivamente l'estensione della molla 1 e 2 rispetto alla corrispondente configurazione a riposo, in funzione del tempo; queste quantità possono essere adimensionalizzate e riscritte come X e Y impiegando opportune combinazioni dei parametri del problema.

Si noti che le variabili $x(t)$ e $y(t)$ corrispondono fisicamente allo *slip deficit* dell'asperità 1 e 2: esso è definito, a un certo istante di tempo, come lo scorrimento richiesto a un'asperità per eguagliare lo spostamento relativo delle placche tettoniche avvenuto fino a quel momento.

In conclusione, il modello presenta 2 gradi di libertà e lo spazio delle fasi è quadridimensionale: questa circostanza, unitamente alla non linearità del sistema (determinata dalla dipendenza non lineare dell'attrito dalla velocità dei blocchi), comporta che il sistema può presentare comportamento caotico. Questo comportamento insorge per valori relativamente elevati del parametro di accoppiamento α e non è stato considerato dagli autori.

In vista delle applicazioni sismologiche, viene introdotto il seguente vincolo: dal momento che il segno dello sforzo di taglio su una faglia è costante nel tempo, si assume che le molle 1 e 2 siano sempre rilassate o tese, ma mai contratte, ovvero $X \geq 0$, $Y \geq 0$; ne consegue che il moto dei blocchi avviene sempre nel verso della velocità v .

Un'ulteriore ipotesi che accompagna il modello è quella di assumere la velocità v del meccanismo di guida esterno trascurabile rispetto alla velocità di scorrimento dei blocchi: questo trova giustificazione nel fatto che il rapporto tra la velocità delle placche tettoniche e la velocità di scorrimento delle faglie è tipicamente dell'ordine di 10^{-9} . Ciò si traduce nel fatto che il meccanismo di caricamento possa essere considerato virtualmente immobile durante il moto dei blocchi.

Dal momento che il sistema permane in una configurazione statica per la maggior parte del tempo (fase di lento caricamento tettonico), è lecito condurre l'analisi all'interno della proiezione dello spazio degli stati sul piano XY : essa è data da un rettangolo \mathbf{R} le cui dimensioni dipendono dai parametri α e β .

Le condizioni di innesco del moto dei blocchi portano a definire due rette nel piano XY , a loro volta dipendenti dai parametri α e β , secanti in un punto P . Tali rette, unitamente ai limiti $X \geq 0$, $Y \geq 0$, racchiudono un quadrilatero \mathbf{Q} che rappresenta la *sticking region* del sistema: essa contiene tutti gli stati del sistema corrispondenti a una configurazione statica (blocchi immobili); in particolare, l'area di \mathbf{Q} diminuisce al crescere del grado di accoppiamento α tra i blocchi.

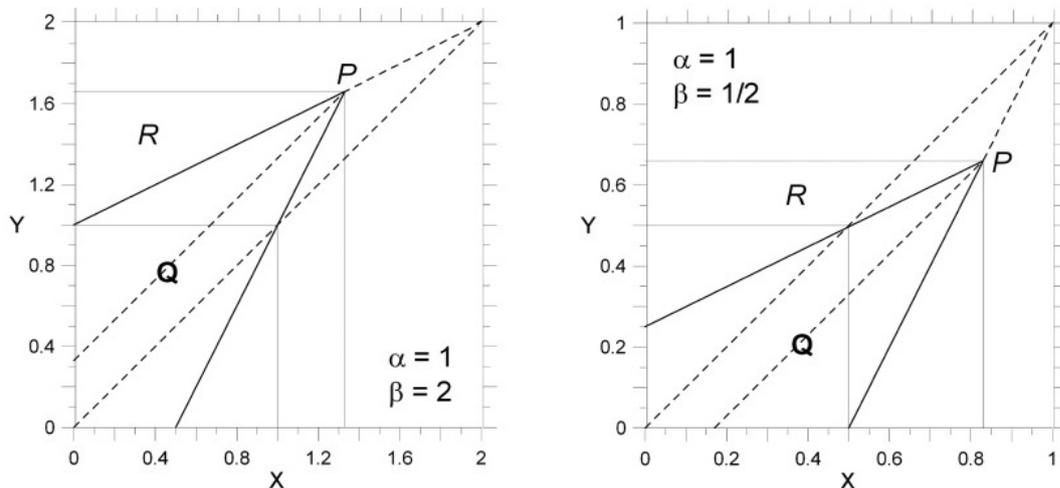


Figura 2.4: Proiezione dello spazio delle fasi sul piano XY nel modello sviluppato in [Dragoni & Santini 2012] per una particolare scelta dei parametri α, β ; sono evidenziati il rettangolo \mathbf{R} e la *sticking region* \mathbf{Q} .

Gli autori hanno poi mostrato come la dinamica del sistema possa essere studiata in termini di 4 distinti modi dinamici, corrispondenti a blocchi stazionari (modo

00), blocco 1 in moto (modo 10), blocco 2 in moto (modo 01) e blocchi in moto simultaneo (modo 11). Ogni modo è descritto da un sistema di equazioni differenziali ordinarie e autonome: di conseguenza, il sistema dinamico si configura come liscio a tratti e rientra nella particolare categoria dei sistemi di Filippov [Filippov 1988], [Di Bernardo et al. 2008].

Un'importante osservazione riguarda poi il fatto che le suddette equazioni del moto risultano invarianti rispetto a uno scambio di ruolo dei due blocchi e alla trasformazione $\beta \rightarrow 1/\beta$: in altri termini, la scelta del blocco contraddistinto da maggiore resistenza allo scorrimento è del tutto arbitraria, per cui è possibile condurre l'analisi concentrandosi su un caso specifico (ad esempio, $\beta > 1$) senza perdita di generalità.

Per ognuno dei quattro modi dinamici sono state fornite le soluzioni analitiche delle corrispondenti equazioni del moto; inoltre, al fine di applicare i risultati ottenuti a un sistema di asperità reale, sono state stabilite opportune regole di corrispondenza tra il modello discreto e un modello basato sulla meccanica dei mezzi continui.

Il sistema ha evidenziato come una faglia composta da due asperità può esibire un vasto assortimento di evoluzioni, con terremoti generati dal cedimento di una singola asperità o di entrambe; tipicamente, dopo lo scorrimento di una sola asperità, l'evento sismico successivo viene prodotto dallo scorrimento dell'altra, ma può anche ripetersi sulla medesima. Nel caso di scorrimento simultaneo di entrambe le asperità, i corrispondenti terremoti mostrano momento sismico comparabile, sebbene con epicentro differentemente localizzato a seconda che lo scorrimento dell'asperità 1 abbia innescato quello dell'asperità 2 o viceversa.

Essenziale risulta poi il fatto che la specifica evoluzione del sistema dipende a ogni istante di tempo dallo stato di sforzo presente nella litosfera: in particolare, è legata alla disomogeneità dello sforzo applicato alla faglia, causata dalla differenza tra le trazioni agenti su ciascuna asperità e dall'effetto dell'accoppiamento tra le asperità stesse.

2.2.2 Modello a due asperità con accoppiamento viscoelastico: *caso simmetrico*

In [Amendola & Dragoni 2013] il sistema discreto studiato in [Dragoni & Santini 2012] è stato ripreso e modificato: al fine di riprodurre una forma di accoppiamento di tipo viscoelastico, il meccanismo di connessione puramente elastico (molla 3) tra i due blocchi è stato sostituito con un solido di Maxwell, rappresentato da un ammortizzatore (con costante di smorzamento Γ) posto in serie a una molla di rigidità K_C .

Rimangono inalterate tutte le caratteristiche assunte nel modello elastico, con una sola eccezione: viene qui presentato il caso simmetrico, in cui $\beta = f_{S2}/f_{S1} = f_{D2}/f_{D1} = 1$; in altre parole, gli autori hanno studiato un sistema di due asperità (o due faglie complanari) caratterizzate dal medesimo valore di attrito statico e dinamico.

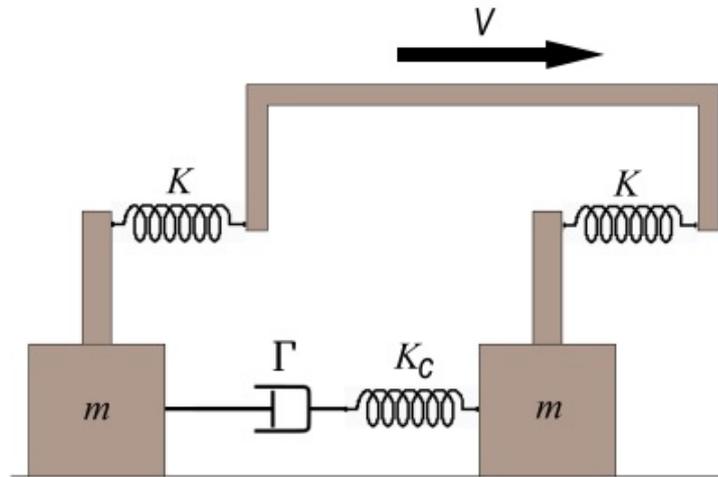


Figura 2.5: Modello a due blocchi con accoppiamento viscoelastico [Amendola & Dragoni 2013].

In conformità a quanto descritto in §1.2, indicando con ϵ_e e ϵ_v una componente deviatorica di deformazione rispettivamente elastica e viscosa, le corrispondenti forze agenti sui blocchi per effetto del meccanismo di accoppiamento possono essere valutate come

$$F_e = K_C \epsilon_e, \quad F_v = \Gamma \dot{\epsilon}_v \quad (2.5)$$

quindi, ridefinendo $F_e = F_v = F$ e ricordando che, per un corpo di Maxwell, la deformazione totale è pari alla somma delle deformazioni associate ai due elementi

costitutivi, si ottiene

$$\frac{\dot{F}}{K_C} + \frac{F}{\Gamma} = \dot{\epsilon} \quad (2.6)$$

Imponendo al tempo $t = 0$ una deformazione costante $\epsilon(t) = \epsilon_0 H(t)$, riconducibile al moto del meccanismo di guida esterno, l'andamento della forza F sopra definita è analogo a quanto visto per lo sforzo in §1.2.2:

$$F(t) = K_C \epsilon_0 H(t) e^{-t/\tau} \quad (2.7)$$

dove $\tau = \Gamma/K_C$ è il tempo di rilassamento caratteristico del corpo di Maxwell; la forza associata al meccanismo di accoppiamento diminuisce dunque in tempi successivi, fino a essere completamente rilassata per tempi $t \gg \tau$.

Lo stato del sistema può essere descritto in termini di tre variabili x, y e z , funzioni del tempo t , associate all'allungamento della molla 1, 2 e 3 rispetto alla corrispondente posizione di equilibrio. Il sistema è pertanto caratterizzato da 3 gradi di libertà e lo spazio delle fasi è una 6-varietà: questa proprietà, unitamente alla non linearità del sistema (determinata dalla dipendenza non lineare dell'attrito dalla velocità dei blocchi), comporta che il sistema può presentare comportamento caotico.

Al fine di adimensionalizzare il problema, si introducono le variabili e il tempo adimensionali

$$X \equiv \frac{Kx}{f_{S1}}, \quad Y \equiv \frac{Ky}{f_{S1}}, \quad Z \equiv \frac{Kz}{f_{S1}}, \quad T \equiv \sqrt{\frac{K}{m}} t \quad (2.8)$$

Vengono inoltre definiti i seguenti parametri adimensionali:

$$\epsilon \equiv \frac{f_{D1}}{f_{S1}} = \frac{f_{D2}}{f_{S2}}, \quad V \equiv \frac{\sqrt{Km}}{f_{S1}} v, \quad \Theta \equiv \sqrt{\frac{K}{m}} \tau \quad (2.9)$$

Il parametro ϵ compara attrito statico e dinamico alla base di uno stesso blocco: poiché la soglia di attrito in condizioni dinamiche è inferiore a quella in condizioni statiche, si ha $0 < \epsilon < 1$; per quanto riguarda il meccanismo di guida, è ragionevole porre $V > 0$, dal momento che il moto delle placche tettoniche che racchiudono una faglia non subisce inversioni nel tempo.

La trazione associata alla sforzo tettonico agente sulle pareti di una faglia ha verso costante nel tempo: ciò può essere introdotto nel modello imponendo che le molle 1 e 2 siano sempre tese o, al limite, in equilibrio, ma mai contratte, come nel modello elastico descritto in §2.2.1. In termini delle variabili adimensionali sopra

introdotte, vale quindi la condizione $X \geq 0$, $Y \geq 0$; come ulteriore vincolo, si è assunto che queste due quantità non possano essere maggiori dell'unità, ovvero sia la forza che il meccanismo di trascinamento esercita su un blocco può essere al più uguale alla forza di attrito statico.

Per quanto concerne invece la molla 3, il valore massimo assumibile dallo spostamento rispetto alla posizione di equilibrio, corrispondente al caso di accoppiamento puramente elastico, è $Z = Y - X$: in definitiva, valgono le condizioni

$$0 \leq X \leq 1, \quad 0 \leq Y \leq 1, \quad -1 \leq Z \leq 1 \quad (2.10)$$

Queste restrizioni individuano un parallelepipedo che costituisce la proiezione dello spazio delle fasi nello spazio XYZ : poiché il sistema permane in una configurazione statica per la maggior parte del tempo (fase di lento caricamento tettonico), è lecito condurre l'analisi all'interno di questa regione.

Indicando con f_1 e f_2 la forza agente sul blocco 1 e 2 rispettivamente, le corrispondenti quantità adimensionali sono date da

$$F_1 \equiv \frac{f_1}{f_{S1}}, \quad F_2 \equiv \frac{f_2}{f_{S1}} \quad (2.11)$$

che, tenendo conto delle (2.8), possono essere riscritte nella forma

$$F_1 = -X + \alpha Z, \quad F_2 = -Y - \alpha Z \quad (2.12)$$

Assumendo come negativa la velocità di scorrimento dei blocchi, osserviamo dunque che la trazione su un generico blocco può essere diretta nel verso dello scorrimento quando negativa, il contrario quando positiva.

Essendo per ipotesi $X \geq 0$, $Y \geq 0$, tali quantità (che descrivono l'effetto del caricamento tettonico) danno entrambe contributo negativo alla trazione, ovvero favoriscono in ogni istante lo scorrimento; la variabile Z corrisponde invece sempre a un contributo di segno opposto sui due blocchi. In particolare, se $Z > 0$ lo sforzo associato all'interazione tra i due blocchi fornisce contributo negativo alla trazione sul blocco 2, positivo sul blocco 1; viceversa se $Z < 0$.

Conseguentemente, il trasferimento di sforzo da un blocco all'altro dovuto all'accoppiamento viscoelastico può sia anticipare (quando il contributo di Z alle trazioni è negativo) che ritardare (quando il contributo di Z alle trazioni è positivo) l'occorrenza degli scorrimenti, ovvero i terremoti generati dal sistema.

Le condizioni di innesco del moto dei blocchi portano a definire due piani nello spazio XYZ , funzioni del parametro α : tali piani, unitamente ai vincoli (2.10),

delimitano un esaedro \mathbf{H} che costituisce la *sticking region* del sistema, in cui sono contenuti tutti gli stati corrispondenti a una configurazione statica (blocchi immobili); in particolare, il volume di \mathbf{H} risulta inversamente proporzionale al parametro α che esprime il grado di accoppiamento tra i blocchi.

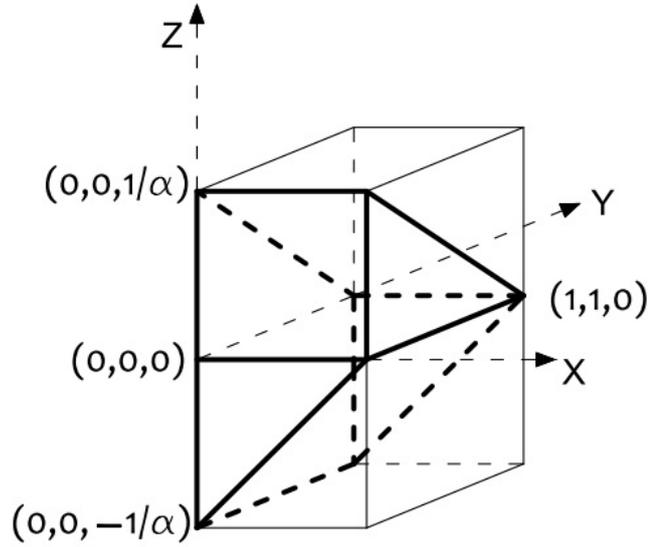


Figura 2.6: Proiezione dello spazio delle fasi nello spazio XYZ per il modello sviluppato in [Amendola & Dragoni 2013]: è evidenziata la *sticking region* \mathbf{H} .

L'esaedro \mathbf{H} è tagliato a metà dal piano XY e la sua sezione è data da un quadrato di lato unitario, all'interno del quale viene a trovarsi la proiezione sul piano XY di ogni orbita del punto rappresentativo del sistema.

Come nel caso di accoppiamento puramente elastico, la dinamica del sistema può essere studiata in termini di 4 distinti modi dinamici, corrispondenti a blocchi stazionari (modo 00), blocco 1 in moto (modo 10), blocco 2 in moto (modo 01) e blocchi in moto simultaneo (modo 11). Ogni modo è descritto da un sistema di equazioni differenziali ordinarie e autonome: di conseguenza, il sistema dinamico si configura come liscio a tratti e rientra nella particolare categoria dei sistemi di Filippov [Filippov 1988], [Di Bernardo et al. 2008].

Va evidenziato che, a causa dell'elevata velocità del moto dei blocchi, l'ammortizzatore rimane sostanzialmente immobile durante le fasi di scorrimento: di conseguenza, le equazioni che governano il modo 10, 01 e 11 sono le stesse studiate nel caso elastico.

Indicando con $P_0 = (X_0, Y_0, Z_0)$ il punto iniziale da cui evolve l'orbita di modo 00, gli autori hanno assunto che la condizione di innesco del moto del blocco 1 o 2 venga raggiunta, rispettivamente, per $Z_0 < 0$ (molla 3 inizialmente compressa) e $Z_0 > 0$ (molla 3 inizialmente tesa): noto dunque il valore di Z_0 , questa proprietà consente di inferire previsioni sulla successiva evoluzione del sistema.

Come discusso in [Dragoni & Santini 2010] e [Dragoni & Santini 2011], il comportamento sul lungo termine di un sistema di due asperità con accoppiamento elastico puro è descritto, indipendentemente dallo stato iniziale, in termini di un ciclo limite con un particolare pattern di ricorrenza dei terremoti, con lo scorrimento alternato delle due asperità.

Tale semplice comportamento periodico viene meno in presenza di accoppiamento viscoelastico: ciò è dovuto al fatto che, rispetto al caso elastico, la differenza tra le trazioni agenti sulle asperità non è costante nel tempo durante la fase di caricamento tettonico.

Di conseguenza, gli eventi sismici prodotti da questo sistema si presentano in anticipo o in ritardo rispetto al caso elastico, a seconda dello stato iniziale del sistema, ovvero in funzione della distribuzione dello sforzo sulle due asperità.

In conclusione, l'aperiodicità osservata nei pattern di attività sismica può scaturire anche in modelli rigorosamente simmetrici come quello qui descritto, a causa della presenza di una forma di accoppiamento viscoelastico.

L'effetto dell'accoppiamento viscoelastico risulta in particolare governato dal prodotto tra velocità di caricamento tettonico e tempo caratteristico del rilassamento viscoelastico: in termini adimensionali, valori dell'ordine dell'unità di questo prodotto risultano in un'influenza significativa sul tempo di occorrenza dei terremoti, mentre l'effetto diviene virtualmente trascurabile per valori maggiori della decina.

Capitolo 3

Modello di faglia con due asperità in un mezzo viscoelastico

Il modello a due blocchi con accoppiamento viscoelastico descritto nella precedente §2.2.2 verrà ora impiegato per analizzare un sistema composto da due asperità poste sullo stesso piano di faglia (o due faglie complanari) e caratterizzate da diverso attrito.

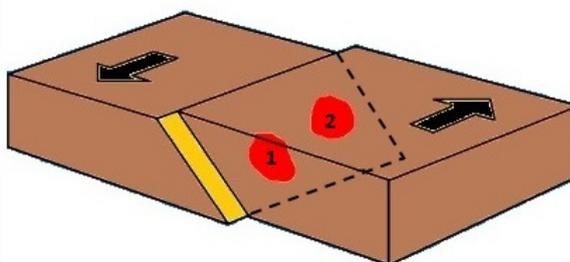


Figura 3.1: Modello di faglia con due asperità.

In termini dei parametri del problema, indicando con f_{S1} , f_{D1} e f_{S2} , f_{D2} i valori di attrito statico e dinamico rispettivamente sull'asperità 1 e 2, si ha

$$\beta = \frac{f_{S2}}{f_{S1}} = \frac{f_{D2}}{f_{D1}} \neq 1 \quad (3.1)$$

proprietà cui si deve l'asimmetria attribuita al modello.

Il comportamento reologico viscoelastico di tipo Maxwelliano attribuito alla crosta terrestre comporta il parziale rilassamento dello sforzo trasferito da un'asperità

all'altra durante il periodo intersismico, determinando l'anticipo o il ritardo dei terremoti successivi.

Sono stati esclusi possibili scorrimenti asismici delle asperità e si è trascurata l'emissione di onde elastiche, in quanto l'efficienza sismica delle faglie è relativamente piccola.

Non si è introdotto accoppiamento viscoelastico tra le asperità e le placche tettoniche, nell'ipotesi che il tempo di Maxwell associato al caricamento tettonico sia molto maggiore dei tipici intervalli intersismici, in modo tale che il comportamento reologico possa essere assunto elastico; in caso contrario, lo sforzo imposto alla faglia dal moto delle placche tettoniche tenderebbe in tempi successivi a un valore costante, inibendo ogni possibile terremoto.

Come ulteriore ipotesi, si assume la condizione $f_{S1} > f_{S2}$ e $f_{D1} > f_{D2}$: conseguentemente, si ha $0 < \beta < 1$.

In questo ambito, si è maggiormente interessati alla distribuzione spaziale dell'attrito sulla faglia, piuttosto che alle sue variazioni temporali durante gli scorrimenti: gli attriti dinamici sono dunque da considerare come i valori medi nel tempo dell'attrito durante lo scorrimento della faglia.

Si è deciso di adottare la più semplice descrizione dell'attrito tra quelle possibili (si veda §1), al fine di non complicare ulteriormente il modello; essa è in ogni caso in grado di riprodurre il tipico meccanismo di *stick-slip* osservato per le faglie.

Il piano di faglia è racchiuso tra i lembi di due placche tettoniche in moto con velocità relativa v , con verso costante e, per ipotesi, sempre positivo; è inoltre ragionevole assumere questa velocità trascurabile rispetto a quella caratterizzante lo scorrimento delle asperità.

Il sistema può essere descritto in termini delle variabili x e y , funzioni del tempo t , rappresentanti lo *slip deficit* delle asperità 1 e 2; il trasferimento di sforzo tra di esse viene analogamente espresso dalla variabile $z = z(t)$.

Si introducono le variabili e il tempo adimensionali

$$X \equiv \frac{Kx}{f_{S1}}, \quad Y \equiv \frac{Ky}{f_{S1}}, \quad Z \equiv \frac{Kz}{f_{S1}}, \quad T \equiv \sqrt{\frac{K}{m}}t \quad (3.2)$$

e i parametri adimensionali

$$\alpha \equiv \frac{K_C}{K} \quad \epsilon \equiv \frac{f_{D1}}{f_{S1}} = \frac{f_{D2}}{f_{S2}}, \quad V \equiv \frac{\sqrt{Km}}{f_{S1}}v, \quad \Theta \equiv \sqrt{\frac{K}{m}}\tau \quad (3.3)$$

Il parametro $\alpha \geq 0$ caratterizza il grado di accoppiamento delle due asperità: nel caso limite $\alpha = 0$ esse risultano completamente indipendenti, mentre si ha perfetto accoppiamento per $\alpha \rightarrow \infty$; ϵ è il rapporto tra attrito dinamico e attrito statico sulla superficie della singola asperità: poichè l'attrito in condizioni dinamiche è inferiore a quello in condizioni statiche, si ha $0 < \epsilon < 1$. Per quanto riguarda il meccanismo di guida, è ragionevole porre $V > 0$, dal momento che il moto delle placche tettoniche che racchiudono una faglia non subisce inversioni nel tempo.

La trazione associata alla sforzo tettonico agente sulle pareti di una faglia ha verso costante nel tempo: ciò può essere introdotto nel modello imponendo che gli *slip deficit* delle asperità siano sempre positivi o, al limite, nulli. In termini delle variabili adimensionali sopra introdotte, vale quindi la condizione $X \geq 0, Y \geq 0$.

Indicando con f_1 e f_2 la trazione agente sull'asperità 1 e 2 rispettivamente, le corrispondenti quantità adimensionali sono date da

$$F_1 \equiv \frac{f_1}{f_{S1}}, \quad F_2 \equiv \frac{f_2}{f_{S1}} \quad (3.4)$$

che, tenendo conto delle (3.2), possono essere riscritte nella forma

$$F_1 = -X + \alpha Z, \quad F_2 = -Y - \alpha Z \quad (3.5)$$

Assumendo come negativa la velocità di scorrimento delle asperità, osserviamo dunque che la trazione su una generica asperità può essere diretta nel verso dello scorrimento quando negativa, il contrario quando positiva.

Essendo per ipotesi $X \geq 0, Y \geq 0$, tali quantità (che descrivono l'effetto del caricamento tettonico) danno entrambe contributo negativo alla trazione, ovvero favoriscono in ogni istante lo scorrimento; la variabile Z corrisponde invece sempre a un contributo di segno opposto sulle due asperità. In particolare, se $Z > 0$ lo sforzo associato all'interazione tra le asperità fornisce contributo negativo alla trazione sull'asperità 2, positivo sulla 1; viceversa se $Z < 0$.

Conseguentemente, il trasferimento di sforzo da un'asperità all'altra dovuto all'accoppiamento viscoelastico può sia anticipare (quando il contributo di Z alle trazioni è negativo) che ritardare (quando il contributo di Z alle trazioni è positivo)

l'occorrenza degli scorrimenti, ovvero i terremoti generati dal sistema.

Queste osservazioni giustificano il fatto che le quantità X, Y possono assumere (in modulo) anche valori maggiori dell'unità: il sistema può trovarsi in una configurazione statica anche in questa circostanza, causa il trasferimento di sforzo tra le asperità. Ad esempio, si noti che la condizione $F_1 > -1$ (asperità 1 ferma) viene soddisfatta, sotto l'ipotesi $X > 1$, se $Z > 0$.

Il presente lavoro generalizza pertanto il modello di [Amendola & Dragoni 2013].

3.1 Caratterizzazione della *sticking region*

La generica asperità del sistema si mette in movimento non appena la trazione agente su di essa raggiunge la soglia di attrito statico: le condizioni di avvio del moto

$$F_1 = -1 \vee F_2 = -\beta \quad (3.6)$$

definiscono i piani

$$X - \alpha Z - 1 = 0 \quad (3.7)$$

$$Y + \alpha Z - \beta = 0 \quad (3.8)$$

cui ci si riferirà, d'ora innanzi, come Π_1 e Π_2 . Essi, unitamente ai piani YZ e XZ , che traducono i vincoli $X \geq 0, Y \geq 0$, identificano la *sticking region* del sistema in esame, in cui giace ogni possibile configurazione statica, nel volume dello spazio XYZ definito come l'insieme dei punti di coordinate

$$0 \leq X \leq \beta + 1, \quad 0 \leq Y \leq \beta + 1, \quad \frac{X - 1}{\alpha} \leq Z \leq \frac{\beta - Y}{\alpha} \quad (3.9)$$

corrispondente al tetraedro \mathbf{T} riprodotto in Figura 3.2.

Si noti, in particolare, che l'esaedro \mathbf{H} individuato in [Amendola & Dragoni 2013] come *sticking region* e riportato in Figura 2.6 risulta essere un sottoinsieme di \mathbf{T} : è una conseguenza delle assunzioni più restrittive adottate in quello studio.

I vertici di \mathbf{T} indicati in Figura 3.2 hanno coordinate

$$A = (0, 0, -\frac{1}{\alpha}), \quad B = (0, 0, \frac{\beta}{\alpha}), \quad C = (\beta + 1, 0, \frac{\beta}{\alpha}), \quad D = (0, \beta + 1, -\frac{1}{\alpha}) \quad (3.10)$$

Il volume di \mathbf{T} è pari a $(\beta + 1)^3/6\alpha$: pertanto, la regione dello spazio XYZ che contiene le configurazioni statiche del sistema diminuisce con il grado di

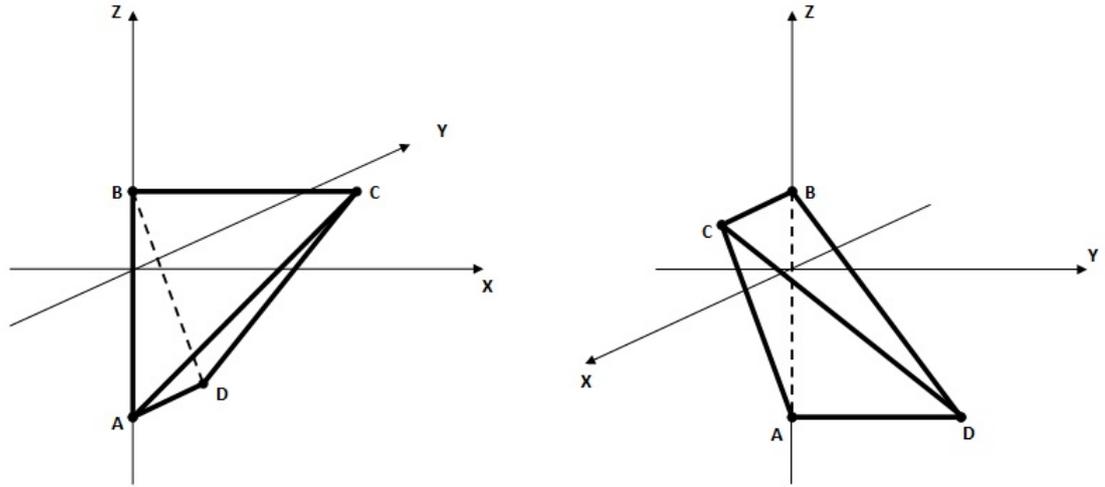


Figura 3.2: Il tetraedro \mathbf{T} rappresentante la *sticking region* del sistema dinamico.

accoppiamento delle due asperità, mentre è tanto più grande quanto più l'attrito dell'asperità 2 è prossimo a quello dell'asperità 1.

I piani Π_1 e Π_2 si intersecano in corrispondenza dello spigolo CD del tetraedro \mathbf{T} , giacente sulla retta

$$\begin{cases} X - \alpha Z - 1 = 0 \\ Y + \alpha Z - \beta = 0 \end{cases} \quad (3.11)$$

Su tale spigolo è possibile individuare un punto P di coordinate

$$X_P = \frac{\alpha(1 + \beta) + 1}{1 + 2\alpha}, \quad Y_P = \frac{\alpha(1 + \beta) + \beta}{1 + 2\alpha}, \quad Z_P = \frac{\beta - 1}{1 + 2\alpha} \quad (3.12)$$

corrispondente a uno stato di sforzo equivalente al caso elastico, ovvero con $Z_P = Y_P - X_P$.

Come riportato in Figura 3.3, la *sticking region* individua con il piano XY un rettangolo di dimensioni $(1, \beta)$, mentre la sua proiezione sul piano XY definisce un triangolo rettangolo isoscele di lato $(\beta + 1)$.

Dal momento che il sistema si trova in una configurazione statica per la maggior parte del tempo (fase di caricamento tettonico), durante la quale $\dot{X} = \dot{Y} = \dot{Z} = 0$, risulta naturale studiare l'orbita del punto rappresentativo del sistema nello spazio XYZ anziché nello spazio delle fasi esadimensionale.

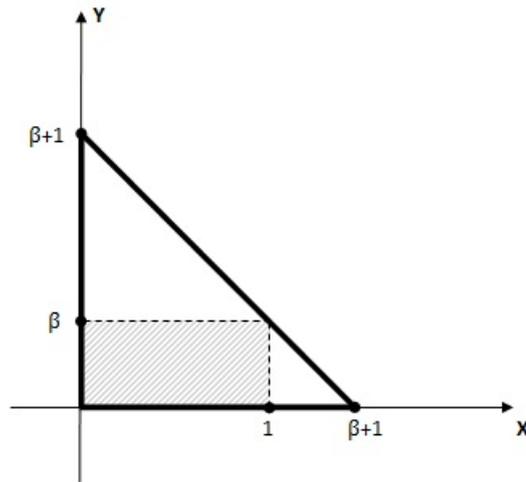


Figura 3.3: Proiezione della *sticking region* sul piano XY ; è evidenziata in grigio la regione corrispondente all'intersezione con il piano $Z = 0$.

3.2 Modi dinamici

Il sistema in esame risulta caratterizzato da quattro distinti modi dinamici, ciascuno descritto da un particolare sistema di equazioni differenziali autonome:

- modo 00: entrambe le asperità immobili;
- modo 10: scorrimento asperità 1;
- modo 01: scorrimento asperità 2;
- modo 11: scorrimento di ambo le asperità.

In accordo con [Filippov 1988] e [Di Bernardo et al. 2008], il sistema dinamico si qualifica come

- ▶ dissipativo, per la presenza di attrito sulle asperità;
- ▶ non lineare, a causa della dipendenza non lineare dell'attrito dalla velocità delle asperità;
- ▶ liscio a tratti, a causa delle transizioni istantanee da un modo dinamico all'altro;
- ▶ di Filippov, dal momento che il campo vettoriale di velocità è discontinuo sulle superfici di transizione da un modo all'altro.

La non linearità, unitamente alla dimensione dello spazio degli stati, porta ad affermare che il sistema può presentare comportamento caotico; tuttavia la scelta dei valori dei parametri che verrà effettuata non porterà a esaminare questo caso.

Verranno ora discusse le equazioni che governano i diversi modi e le relative soluzioni: il generico punto iniziale dell'orbita verrà indicato come

$$\bar{P} = (\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z}) \quad (3.13)$$

mentre ci si riferirà agli scorrimenti delle due asperità con le notazioni

$$\Delta X(T) = \bar{X} - X(T), \quad \Delta Y(T) = \bar{Y} - Y(T) \quad (3.14)$$

Infine, la variazione della coordinata Z verrà rappresentata come

$$\Delta Z(T) = \bar{Z} - Z(T) \quad (3.15)$$

3.2.1 Modo 00

Le variabili X, Y, Z sono governate da equazioni analoghe al caso simmetrico ($\beta = 1$):

$$\ddot{X} = 0, \quad \ddot{Y} = 0, \quad \ddot{Z} = Z/\Theta^2 \quad (3.16)$$

dove le derivate temporali si intendono calcolate rispetto al tempo adimensionale T ; assumendo condizioni iniziali

$$\dot{X}(0) = V, \quad \dot{Y}(0) = V, \quad \dot{Z}(0) = -\bar{Z}/\Theta \quad (3.17)$$

dove V è la velocità del moto tettonico definita nella (3.3), le soluzioni per $T \geq 0$ sono

$$X(T) = \bar{X} + VT, \quad Y(T) = \bar{Y} + VT, \quad Z(T) = \bar{Z}e^{-T/\Theta} \quad (3.18)$$

Esse sono le equazioni parametriche di una curva appartenente al piano

$$X - Y + \bar{Y} - \bar{X} = 0 \quad (3.19)$$

parallelo all'asse Z e asintoticamente tendente alla retta

$$X - Y + \bar{Y} - \bar{X} = 0, \quad Z = 0 \quad (3.20)$$

corrispondente alla proiezione della curva stessa sul piano XY : un esempio è riportato in Figura 3.4.

L'andamento delle soluzioni (3.18) può essere spiegato in termini del modello discreto: $X(T)$ e $Y(T)$ sono entrambe funzioni linearmente crescenti nel tempo a causa del processo di caricamento tettonico, mentre $Z(T)$ diminuisce esponenzialmente nel tempo, in accordo con la (2.7), in ragione del processo di rilassamento viscoelastico.

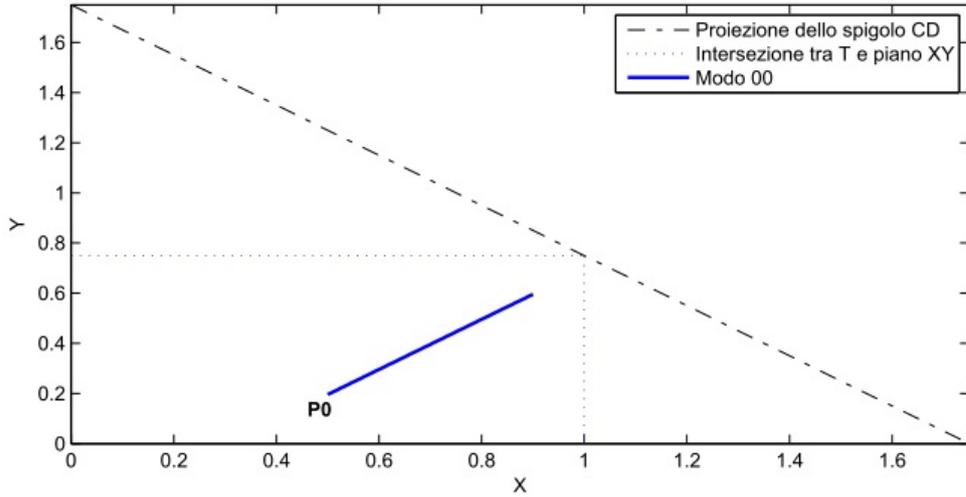


Figura 3.4: Esempio di orbita di modo 00.

3.2.2 Modo 10

In virtù dell'elevata velocità con cui scorrono le asperità, l'effetto del rilassamento viscoelastico può essere ragionevolmente trascurato nei modi dinamici: è pertanto possibile porre $Z = Y - X$ e risolvere equazioni analoghe al caso puramente elastico

$$\ddot{X} = \epsilon + \alpha Z - X, \quad \ddot{Y} = 0, \quad \ddot{Z} = -\ddot{X} \quad (3.21)$$

Le soluzioni per $T \geq 0$ sono

$$X(T) = \bar{X} - \Delta X(T) \quad (3.22)$$

$$Y(T) = \bar{Y} \quad (3.23)$$

$$Z(T) = \bar{Z} + \Delta X(T) \quad (3.24)$$

corrispondenti alle equazioni parametriche della retta

$$Z(X) = \bar{Z} + \bar{X} - X \quad (3.25)$$

giacente sul piano $Y = \bar{Y}$.

Le soluzioni sopra riportate hanno un chiaro riscontro fisico: durante lo scorrimento dell'asperità 1 la trazione su di essa diminuisce progressivamente (man mano che viene assecondato il moto delle placche tettoniche), per cui $X(T)$ è una funzione decrescente del tempo.

Per quanto riguarda la componente tettonica dello sforzo sull'asperità 2, essa rimane virtualmente immutata, dal momento che l'evento di scorrimento può

essere considerato sostanzialmente istantaneo: la velocità delle placche tettoniche è difatti trascurabile rispetto a quella con cui si muove l'asperità 1.

Caso generale: passaggio dal modo 11 al modo 10

Si supponga che le asperità siano inizialmente in moto simultaneo (modo 11) e che, al tempo $T = 0$, l'asperità 2 si arresti e solo l'asperità 1 continui a scorrere: il sistema entra quindi nel modo 10. Assumendo condizioni iniziali

$$X(0) = \bar{X}, \quad Y(0) = \bar{Y}, \quad Z(0) = \bar{Z} \quad (3.26)$$

$$\dot{X}(0) = \bar{V}, \quad \dot{Y}(0) = 0, \quad \dot{Z}(0) = -\bar{V} \quad (3.27)$$

risulta

$$\Delta X(T) = \frac{U_1}{2}(1 - \cos \omega T) - \frac{\bar{V}}{\omega} \sin \omega T \quad (3.28)$$

avendo definito

$$U_1 \equiv 2 \frac{\bar{X} - \alpha \bar{Z} - \epsilon}{\omega^2}, \quad \omega \equiv \sqrt{1 + \alpha} \quad (3.29)$$

L'annullarsi della velocità dello scorrimento permette di calcolare la durata del modo 10 in termini della quantità

$$T_{10} = \frac{1}{\omega} \left(\pi + \arctan \frac{2\bar{V}}{\omega U_1} \right) \quad (3.30)$$

da cui si ricava l'ampiezza finale dello scorrimento:

$$U_{10} \equiv \Delta X(T_{10}) = \frac{U_1}{2} + \sqrt{\left(\frac{U_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\bar{V}}{\omega}\right)^2} \quad (3.31)$$

Si noti che tanto la durata quanto l'ampiezza finale dello scorrimento risultano inversamente proporzionali, tramite ω , al parametro α : in effetti, l'accoppiamento elastico tende a trattenere l'asperità in moto, causa la rigidità del mezzo.

Caso particolare: passaggio dal modo 00 al modo 10

Si supponga che le asperità siano inizialmente entrambe immobili (modo 00) e che, al tempo $T = 0$, si verifichino le condizioni per lo scorrimento dell'asperità 1: il sistema entra quindi nel modo 10.

In questo frangente il punto \bar{P} appartiene a Π_1 : con condizioni iniziali

$$X(0) = \bar{X}, \quad Y(0) = \bar{Y}, \quad Z(0) = \bar{Z} = \frac{\bar{X} - 1}{\alpha} \quad (3.32)$$

$$\dot{X}(0) = 0, \quad \dot{Y}(0) = 0, \quad \dot{Z}(0) = 0 \quad (3.33)$$

lo scorrimento è dato da

$$\Delta X(T) = \frac{U}{2}(1 - \cos \omega T) \quad (3.34)$$

essendo

$$U = 2 \frac{1 - \epsilon}{1 + \alpha} \quad (3.35)$$

Se il punto rappresentativo del sistema si ferma entro \mathbf{T} , si ha

$$T_{10} = \frac{\pi}{\omega} \Rightarrow U_{10} = U \quad (3.36)$$

Se invece l'orbita interseca Π_2 prima dell'istante T_{10} , il sistema entra nel modo 11 e $U_{10} < U$.

La proiezione dell'orbita del punto rappresentativo del sistema sul piano $Z = 0$ si configura sempre come un segmento di retta: due esempi sono riportati in Figura 3.5.

3.2.3 Modo 01

Con considerazioni simili a quelle per il modo 10, le equazioni del moto sono date da

$$\ddot{X} = 0, \quad \ddot{Y} = \beta\epsilon - Y - \alpha Z, \quad \ddot{Z} = \ddot{Y} \quad (3.37)$$

Le soluzioni per $T \geq 0$ sono

$$X(T) = \bar{X} \quad (3.38)$$

$$Y(T) = \bar{Y} - \Delta Y(T) \quad (3.39)$$

$$Z(T) = \bar{Z} - \Delta Y(T) \quad (3.40)$$

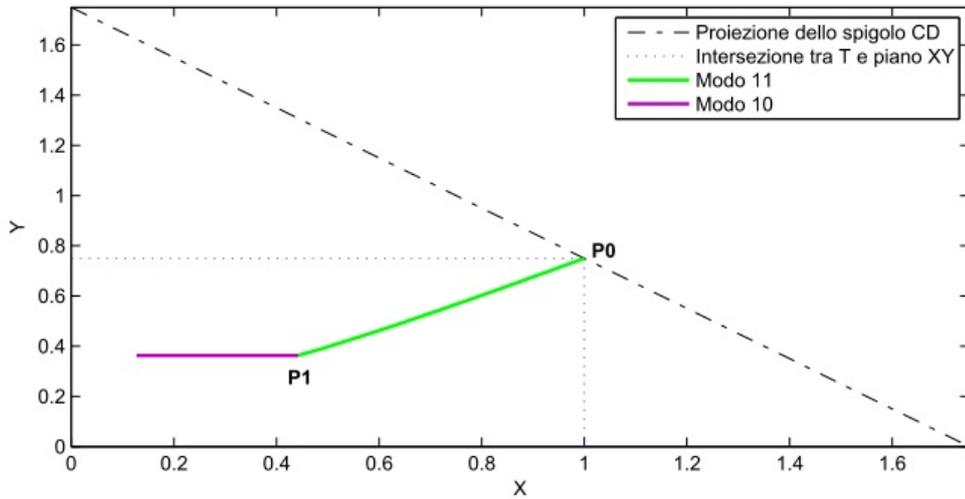
Esse corrispondono alle equazioni parametriche della retta

$$Z(Y) = \bar{Z} - \bar{Y} + Y \quad (3.41)$$

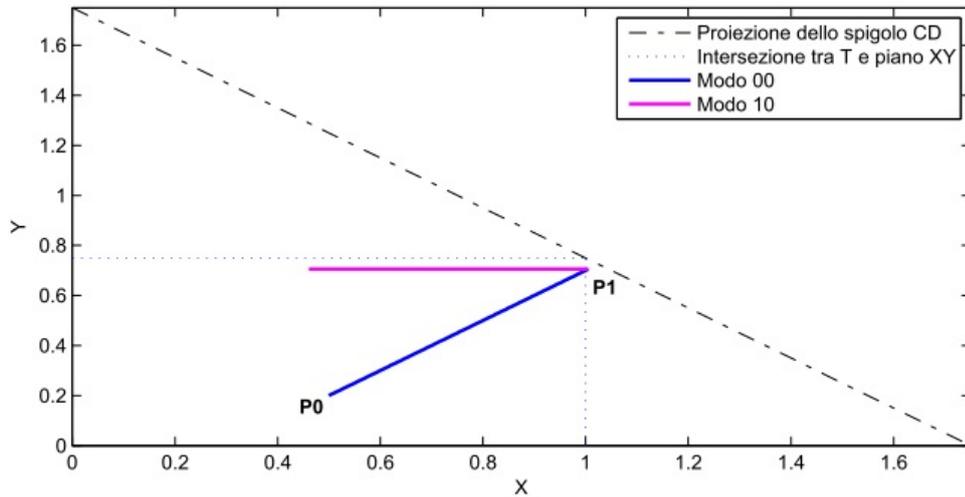
giacente sul piano $X = \bar{X}$.

Anche in questo caso può essere data ragione fisica della forma delle soluzioni: durante lo scorrimento dell'asperità 2 la trazione su di essa diminuisce progressivamente, per cui $Y(T)$ è funzione decrescente del tempo.

Per quanto riguarda la componente tettonica dello sforzo sull'asperità 1, essa rimane virtualmente immutata, dal momento che l'evento di scorrimento può essere considerato sostanzialmente istantaneo: la velocità delle placche tettoniche è difatti trascurabile rispetto a quella con cui si muove l'asperità 2.



(a)



(b)

Figura 3.5: Esempio di orbita di modo 10: (a) caso generale: l'orbita di modo 11 termina nel punto P_1 , da cui prende avvio il modo 10; (b) caso particolare: l'orbita di modo 00 interseca il piano Π_1 nel punto P_1 .

Caso generale: passaggio dal modo 11 al modo 01

Si supponga che le asperità siano inizialmente in moto simultaneo (modo 11) e che, al tempo $T = 0$, l'asperità 1 si arresti e solo l'asperità 2 continui a scorrere: il sistema entra quindi nel modo 01. Assumendo condizioni iniziali

$$X(0) = \bar{X}, \quad Y(0) = \bar{Y}, \quad Z(0) = \bar{Z} \quad (3.42)$$

$$\dot{X}(0) = 0, \quad \dot{Y}(0) = \bar{V}, \quad \dot{Z}(0) = \bar{V} \quad (3.43)$$

risulta

$$\Delta Y(T) = \frac{U_2}{2}(1 - \cos \omega T) - \frac{\bar{V}}{\omega} \sin \omega T \quad (3.44)$$

dove

$$U_2 \equiv 2 \frac{\bar{Y} + \alpha Z - \beta \epsilon}{\omega^2} \quad (3.45)$$

La durata del modo 01 è pari a

$$T_{01} = \frac{1}{\omega} \left(\pi + \arctan \frac{2\bar{V}}{\omega U_2} \right) \quad (3.46)$$

da cui si ricava l'ampiezza finale dello scorrimento:

$$U_{01} \equiv \Delta Y(T_{01}) = \frac{U_2}{2} + \sqrt{\left(\frac{U_2}{2}\right)^2 + \left(\frac{\bar{V}}{\omega}\right)^2} \quad (3.47)$$

Analogamente a quanto discusso per il modo 10, la durata e l'ampiezza finale dello scorrimento risultano inversamente proporzionali, tramite ω , al parametro di accoppiamento α .

Caso particolare: passaggio dal modo 00 al modo 01

Si supponga che le asperità siano inizialmente entrambe immobili (modo 00) e che, al tempo $T = 0$, si verifichino le condizioni per lo scorrimento dell'asperità 2: il sistema entra quindi nel modo 01.

In questo frangente il punto \bar{P} appartiene a Π_2 : con condizioni iniziali

$$X(0) = \bar{X}, \quad Y(0) = \bar{Y}, \quad Z(0) = \bar{Z} = \frac{\beta - \bar{Y}}{\alpha} \quad (3.48)$$

$$\dot{X}(0) = 0, \quad \dot{Y}(0) = 0, \quad \dot{Z}(0) = 0 \quad (3.49)$$

lo scorrimento è pari a

$$\Delta Y(T) = \frac{\beta U}{2}(1 - \cos \omega T) \quad (3.50)$$

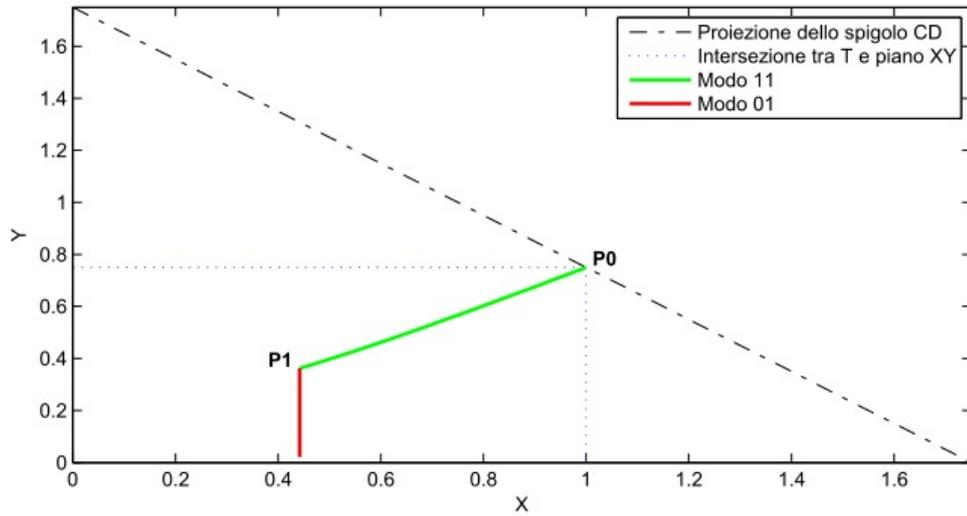
Se il punto rappresentativo del sistema si ferma entro \mathbf{T} , si ha

$$T_{01} = \frac{\pi}{\omega} \Rightarrow U_{01} = \beta U \quad (3.51)$$

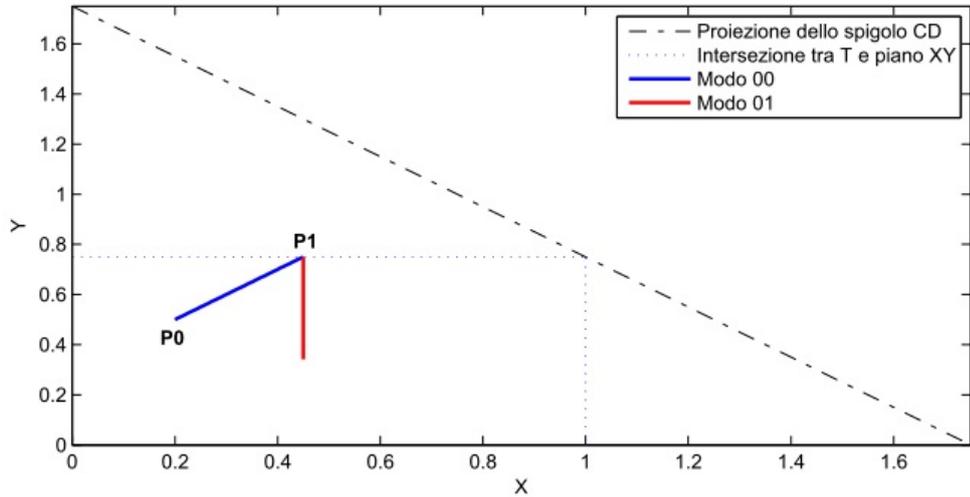
Se invece l'orbita interseca Π_1 prima dell'istante T_{01} , il sistema entra nel modo 11 e $U_{01} < \beta U$.

Si noti che U_{01} è direttamente proporzionale al parametro β : poiché per ipotesi è $0 < \beta < 1$, lo scorrimento massimo dell'asperità 2 nel modo 01 risulta sempre inferiore a quello dell'asperità 1 nel modo 10.

La proiezione dell'orbita del punto rappresentativo del sistema sul piano $Z = 0$ si configura sempre come un segmento di retta: due esempi sono riportati in Figura 3.6.



(a)



(b)

Figura 3.6: Esempio di orbita di modo 01: (a) caso generale: l'orbita di modo 11 termina nel punto P_1 , da cui prende avvio il modo 01; (b) caso particolare: l'orbita di modo 00 interseca il piano Π_2 nel punto P_1 .

3.2.4 Modo 11

Lo scorrimento simultaneo delle due asperità richiede la contemporanea risoluzione delle equazioni per le variabili X e Y :

$$\ddot{X} = \epsilon - X + \alpha Z, \quad \ddot{Y} = \beta\epsilon - Y - \alpha Z \quad (3.52)$$

mentre la variabile Z evolve come $Y - X$:

$$\ddot{Z} + \Omega^2 Z = \epsilon(\beta - 1) \quad (3.53)$$

essendo $\Omega \equiv \sqrt{1 + 2\alpha}$. Le soluzioni per $T \geq 0$ sono

$$X(T) = \epsilon X_P + A \sin T + B_1 \cos T + C \sin \Omega T + D \cos \Omega T \quad (3.54)$$

$$Y(T) = \epsilon Y_P + A \sin T + B_2 \cos T - C \sin \Omega T - D \cos \Omega T \quad (3.55)$$

$$Z(T) = \epsilon Z_P + (B_2 - B_1) \cos T - 2(C \sin \Omega T + D \cos \Omega T) \quad (3.56)$$

dove le costanti A, B_1, B_2, C, D dipendono dalle condizioni iniziali.

La simultanea evoluzione delle coordinate X e Y ha come conseguenza che la proiezione dell'orbita sul piano $Z = 0$ risulta curvilinea e può anche uscire dalla *sticking region* definita dal tetraedro \mathbf{T} .

Caso (a): dal modo 10 al modo 11

Lo scorrimento dell'asperità 1 innesca quello dell'asperità 2, ovvero l'orbita di modo 10 intercetta il piano Π_2 : le condizioni iniziali sono esprimibili come

$$X(0) = \bar{X}, \quad Y(0) = \bar{Y}, \quad Z(0) = \bar{Z} \quad (3.57)$$

$$\dot{X}(0) = \bar{V}, \quad \dot{Y}(0) = 0, \quad \dot{Z}(0) = -\bar{V} \quad (3.58)$$

cui corrispondono

$$A = \frac{\bar{V}}{2} \quad (3.59)$$

$$B_1 = \frac{1}{2}[2\bar{X} + \bar{Z} - \epsilon(X_P + Y_P)] \quad (3.60)$$

$$B_2 = \frac{1}{2}[2\bar{Y} - \bar{Z} - \epsilon(X_P + Y_P)] \quad (3.61)$$

$$C = \frac{\bar{V}}{2\Omega} \quad (3.62)$$

$$D = -\frac{1}{2}[\bar{Z} + \epsilon(X_P - Y_P)] \quad (3.63)$$

Un esempio è riportato in Figura 3.7.

Caso (b): dal modo 01 al modo 11

Lo scorrimento dell'asperità 2 innesca quello dell'asperità 1, ovvero l'orbita di modo 01 intercetta il piano Π_1 : le condizioni iniziali sono esprimibili come

$$X(0) = \bar{X}, \quad Y(0) = \bar{Y}, \quad Z(0) = \bar{Z} \quad (3.64)$$

$$\dot{X}(0) = 0, \quad \dot{Y}(0) = \bar{V}, \quad \dot{Z}(0) = \bar{V} \quad (3.65)$$

cui corrispondono

$$A = \frac{\bar{V}}{2} \quad (3.66)$$

$$B_1 = \frac{1}{2}[2\bar{X} + \bar{Z} - \epsilon(X_P + Y_P)] \quad (3.67)$$

$$B_2 = \frac{1}{2}[2\bar{Y} - \bar{Z} - \epsilon(X_P + Y_P)] \quad (3.68)$$

$$C = -\frac{\bar{V}}{2\Omega} \quad (3.69)$$

$$D = -\frac{1}{2}[\bar{Z} + \epsilon(X_P - Y_P)] \quad (3.70)$$

Un esempio è riportato in Figura 3.7.

Caso (c): dal modo 00 al modo 11

Le due asperità iniziano a scorrere contemporaneamente: le condizioni iniziali sono esprimibili come

$$X(0) = \bar{X}, \quad Y(0) = \bar{Y}, \quad Z(0) = \bar{Z} \quad (3.71)$$

$$\dot{X}(0) = 0, \quad \dot{Y}(0) = 0, \quad \dot{Z}(0) = 0 \quad (3.72)$$

dove $\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z}$ appartengono al segmento CD; in questo caso si ha

$$A = 0 \quad (3.73)$$

$$B_1 = \frac{1}{2}[2\bar{X} + \bar{Z} - \epsilon(X_P + Y_P)] \quad (3.74)$$

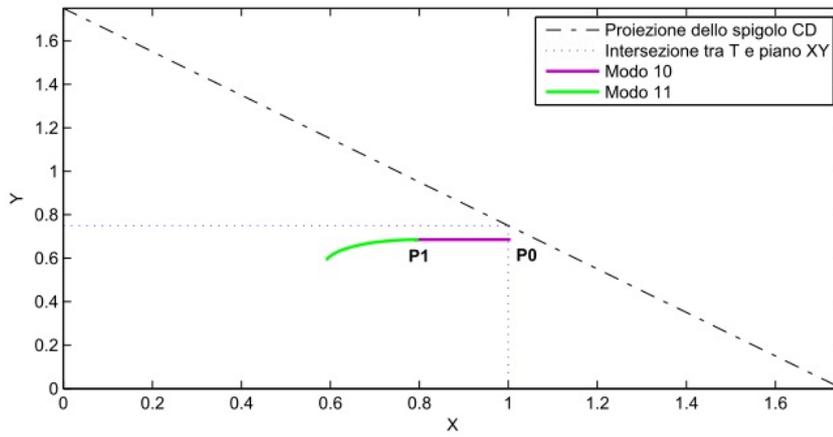
$$B_2 = \frac{1}{2}[2\bar{Y} - \bar{Z} - \epsilon(X_P + Y_P)] \quad (3.75)$$

$$C = 0 \quad (3.76)$$

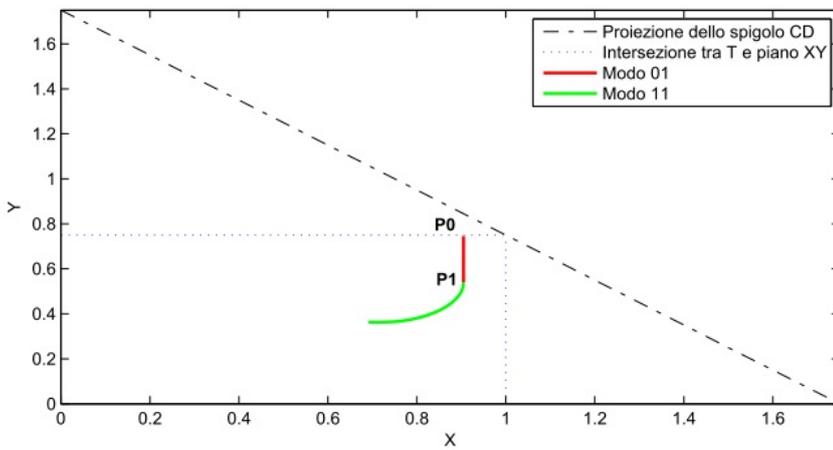
$$D = -\frac{1}{2}[\bar{Z} + \epsilon(X_P - Y_P)] \quad (3.77)$$

Un esempio è riportato in Figura 3.7.

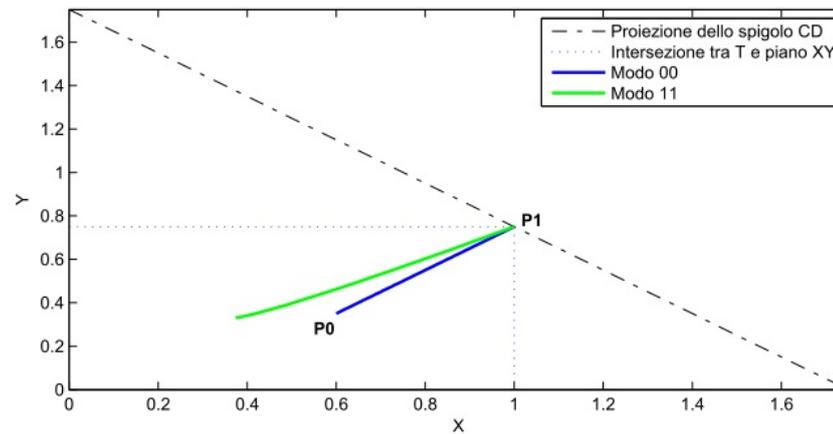
In tutti e tre i casi, la forma dell'orbita di modo 11 può essere compresa osservando che al moto simultaneo delle due asperità corrisponde il rilassamento dello sforzo tettonico agente su di esse, ragion per cui $X(T)$ e $Y(T)$ risultano essere funzioni decrescenti del tempo.



(a)



(b)



(c)

Figura 3.7: Esempio di orbita di modo 11: (a) l'orbita di modo 10 interseca il piano Π_2 nel punto P_1 ; (b) l'orbita di modo 01 interseca il piano Π_1 nel punto P_1 ; (c) l'orbita di modo 00 interseca lo spigolo CD nel punto P_1 .

La durata del modo 11 e il conseguente scorrimento finale di ciascuna asperità devono essere valutati per via numerica.

Siano T_x e T_y rispettivamente le soluzioni positive più piccole delle equazioni $\dot{X}(T) = 0$, $\dot{Y}(T) = 0$, con $X(T)$ e $Y(T)$ date dalle (3.54)-(3.55): la durata del modo 11 può allora essere individuata come $\min(T_x, T_y)$.

Se $T_x < T_y$, l'asperità 1 si arresta per prima e il sistema passa dal modo 11 al modo 01: in tal caso, lo scorrimento finale delle due asperità nel modo 11 è dato da $\Delta X(T_x)$, $\Delta Y(T_x)$.

Qualora invece $T_y < T_x$, l'asperità 2 si arresta per prima e il sistema passa dal modo 11 al modo 10: in tal caso, lo scorrimento finale delle due asperità nel modo 11 è dato da $\Delta X(T_y)$, $\Delta Y(T_y)$.

Nel caso particolare in cui $T_x = T_y$, le due asperità si arrestano simultaneamente e il sistema entra nel modo 00.

3.3 Caratterizzazione dello stato iniziale

A seconda della posizione iniziale del punto rappresentativo $P_0 = (X_0, Y_0, Z_0)$, il sistema può incorrere nel passaggio dal modo 00 al modo 10/01/11; scopo della presente sezione è quello di discriminare a quale regione del tetraedro \mathbf{T} deve appartenere il suddetto punto affinché l'evoluzione della sua orbita inneschi le condizioni per lo scorrimento dell'asperità 1, dell'asperità 2 o di entrambe.

Da un punto di vista prettamente geometrico, ogni orbita di modo 00, se prolungata all'esterno di \mathbf{T} , incontra sempre sia il piano Π_1 che Π_2 . Il passaggio dal modo 00 al modo 10 (scorrimento dell'asperità 1) si verifica dopo il tempo \tilde{T}_1 tale che

$$X_0 + V\tilde{T}_1 = 1 + \alpha Z_0 e^{-\tilde{T}_1/\Theta} \quad (3.78)$$

La soluzione è data da

$$\tilde{T}_1 = \Theta W(\gamma_1) + \frac{1 - X_0}{V} \quad (3.79)$$

dove W è la funzione di Lambert e

$$\gamma_1 = \frac{\alpha Z_0}{V\Theta} e^{(X_0-1)/V\Theta} \quad (3.80)$$

Il passaggio dal modo 00 al modo 01 (scorrimento dell'asperità 2) si verifica dopo il tempo \tilde{T}_2 tale che

$$Y_0 + V\tilde{T}_2 = \beta - \alpha Z_0 e^{-\tilde{T}_2/\Theta} \quad (3.81)$$

La soluzione è data da

$$\tilde{T}_2 = \Theta W(\gamma_2) + \frac{\beta - Y_0}{V} \quad (3.82)$$

dove

$$\gamma_2 = -\frac{\alpha Z_0}{V\Theta} e^{(Y_0 - \beta)/V\Theta} \quad (3.83)$$

Evidentemente, se $\tilde{T}_1 < \tilde{T}_2$, l'orbita interseca per primo Π_1 ; viceversa, se $\tilde{T}_2 < \tilde{T}_1$, l'orbita incontra prima Π_2 . Sia

$$\Delta T(X_0, Y_0, Z_0) = \tilde{T}_1(X_0, Z_0) - \tilde{T}_2(Y_0, Z_0) \quad (3.84)$$

La condizione $\Delta T = 0$ individua la superficie trascendente Σ siffatta

$$V\Theta[W(\gamma_1) - W(\gamma_2)] + Y_0 - X_0 + 1 - \beta = 0 \quad (3.85)$$

di cui si riporta un esempio in Figura 3.8.

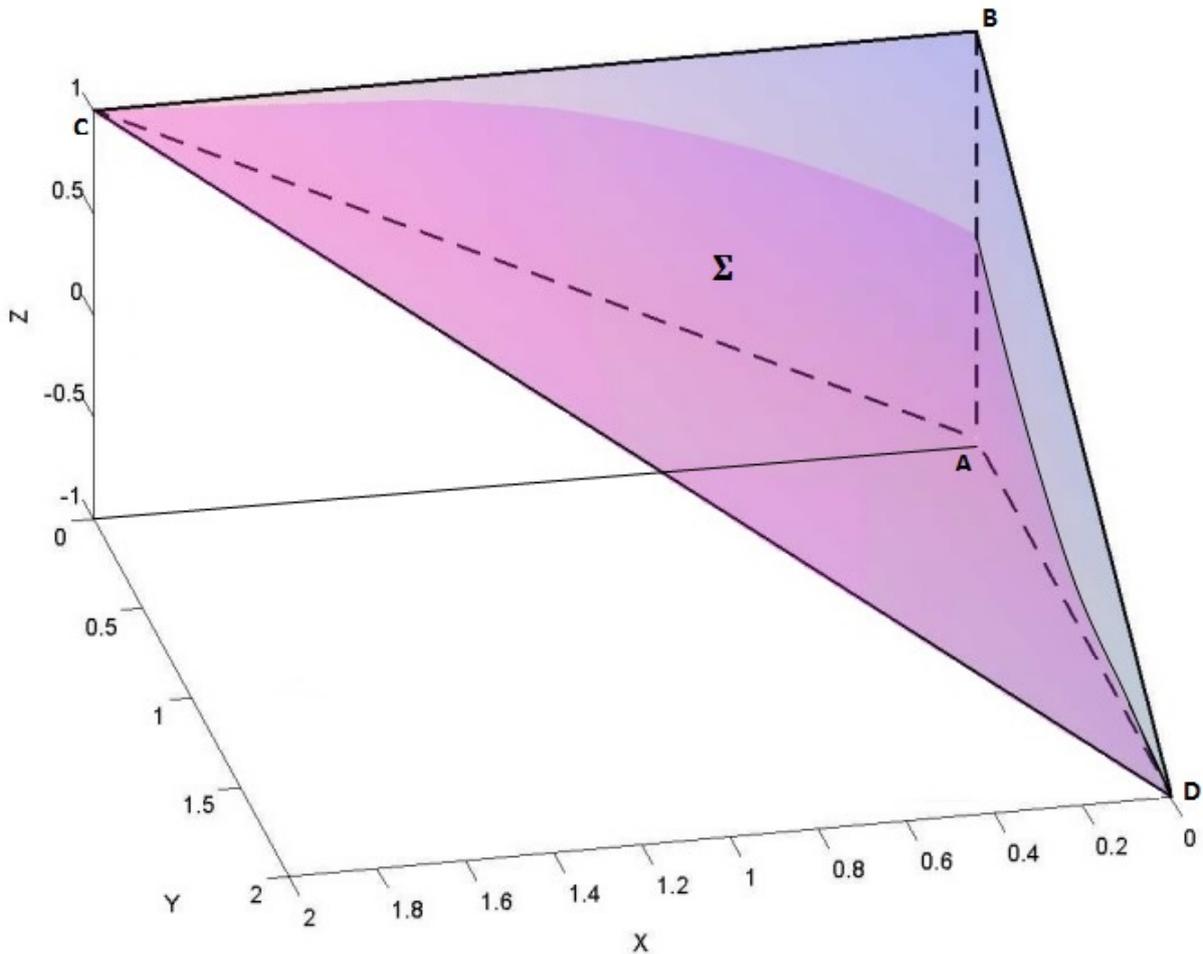


Figura 3.8: Grafico della superficie Σ per $\alpha = 1, \beta = 1, V\Theta = 1$.

Per sua stessa definizione, tale superficie passa per lo spigolo CD di \mathbf{T} (innesco dello scorrimento simultaneo delle due asperità, modo 11) e divide la *sticking region* del sistema in due sottoinsiemi, \mathbf{T}_1 e \mathbf{T}_2 , rispettivamente al di sotto e al di sopra della Σ (scegliendo il verso positivo dell'asse Z verso l'alto); inoltre, Σ individua sul piano XY la retta $Y = X + \beta - 1$.

Si può concludere che:

- se $P_0 \in \mathbf{T}_1$, l'evoluzione dell'orbita di modo 00 porterà al modo 10;
- se $P_0 \in \mathbf{T}_2$, l'evoluzione dell'orbita di modo 00 porterà al modo 01;
- se $P_0 \in \Sigma$, l'evoluzione dell'orbita di modo 00 porterà al modo 11.

3.4 Effetto dell'accoppiamento viscoelastico

La presente sezione ha lo scopo di illustrare l'effetto dell'accoppiamento viscoelastico sul tempo di occorrenza dei terremoti generati dallo scorrimento delle asperità.

In presenza di accoppiamento elastico puro, l'andamento delle trazioni sulle asperità durante il modo 00 è dato dalle relazioni

$$F_1(T) = -X_0 - VT - \alpha(X_0 - Y_0), \quad F_2(T) = -Y_0 - VT - \alpha(Y_0 - X_0) \quad (3.86)$$

dove X_0 e Y_0 sono le coordinate del punto iniziale P_0 dell'orbita di modo 00; una semplice derivazione temporale permette di ricavare

$$\dot{F}_1 = \dot{F}_2 = -V \quad (3.87)$$

La velocità di variazione delle trazioni è dunque costante e uguale per entrambe le asperità.

Nel caso di accoppiamento viscoelastico, l'andamento delle trazioni sulle asperità durante il modo 00 è dato da

$$F_1(T) = -X_0 - VT + \alpha Z_0 e^{-T/\Theta}, \quad F_2(T) = -Y_0 - VT - \alpha Z_0 e^{-T/\Theta} \quad (3.88)$$

A differenza del caso puramente elastico, la dipendenza dal tempo non è semplicemente di tipo lineare e la differenza $(F_1 - F_2)$ non è costante nel tempo, ovvero la distribuzione dello sforzo sulle asperità varia durante la fase di caricamento del sistema.

Per quanto riguarda la velocità di variazione delle trazioni, si ha

$$\dot{F}_1(T) = -V - \frac{\alpha Z_0 e^{-T/\Theta}}{\Theta}, \quad \dot{F}_2(T) = -V + \frac{\alpha Z_0 e^{-T/\Theta}}{\Theta} \quad (3.89)$$

Emergono dunque alcune significative differenze rispetto al caso elastico: la velocità di variazione delle trazioni sulle asperità non è costante nel tempo, ma è diversa istante per istante; in secondo luogo, essa è diversa per le due asperità e risulta dipendere dalla posizione iniziale del punto rappresentativo del sistema, attraverso la coordinata Z_0 .

In accordo con quanto discusso in § 2.2.2, il segno di Z_0 si rivela essenziale: se $Z_0 > 0$ la velocità di variazione della trazione sull'asperità 1 è maggiore (in modulo) rispetto al caso elastico, per cui il cedimento dell'asperità 1 può verificarsi in anticipo; viceversa se $Z_0 < 0$ è lo scorrimento dell'asperità 2 a poter essere anticipato.

Verrà ora illustrato come sia possibile quantificare questo effetto di anticipazione/posticipazione.

Nella sezione precedente si sono esplicitati i tempi corrispondenti all'intersezione dell'orbita di modo 00 con Π_1

$$\tilde{T}_1 = \Theta W(\gamma_1) + \frac{1 - X_0}{V} \quad (3.90)$$

e con Π_2

$$\tilde{T}_2 = \Theta W(\gamma_2) + \frac{\beta - Y_0}{V} \quad (3.91)$$

Gli analoghi elastici [Dragoni & Santini 2012] sono dati da

$$T_1^{el} = \frac{1 + \alpha Y_0 - X_0(\alpha + 1)}{V} \quad (3.92)$$

per l'innesco dello scorrimento dell'asperità 1 e

$$T_2^{el} = \frac{\beta + \alpha X_0 - Y_0(\alpha + 1)}{V} \quad (3.93)$$

per l'innesco dello scorrimento dell'asperità 2: l'effetto viscoelastico può dunque essere valutato studiando le quantità

$$\Delta\tilde{T}_1(X, Y, Z) = \tilde{T}_1 - T_1^{el}, \quad \Delta\tilde{T}_2(X, Y, Z) = \tilde{T}_2 - T_2^{el} \quad (3.94)$$

Valori positivi di $\Delta\tilde{T}_1$ corrispondono alla posticipazione dell'evento sismico generato dallo scorrimento dell'asperità 1, mentre valori negativi indicano un'anticipazione; considerazioni analoghe circa lo scorrimento dell'asperità 2 valgono per il segno di $\Delta\tilde{T}_2$.

In Figura 3.9-3.10 sono riportati *contour plots* di $\Delta\tilde{T}_1/\Theta$ e $\Delta\tilde{T}_2/\Theta$ su sezioni del tetraedro \mathbf{T} parallele al piano XY : fissato $Z = Z_0$, tali sezioni sono date dai rettangoli

$$0 \leq X \leq 1 + \alpha Z_0, \quad 0 \leq Y \leq \beta - \alpha Z_0 \quad (3.95)$$

Si noti come all'aumentare (in valore assoluto) di Z_0 la densità delle isolinee risulta crescere; inoltre, le quantità $\Delta\tilde{T}_1/\Theta$ e $\Delta\tilde{T}_2/\Theta$ divengono via via indipendenti, rispettivamente, dal valore di Y_0 e X_0 .

Al fine di valutare la dipendenza della durata del modo 00 dalla scelta del punto iniziale P_0 è possibile costruire *contour plots* delle quantità \tilde{T}_1/Θ e \tilde{T}_2/Θ su sezioni del tetraedro \mathbf{T} parallele al piano XZ e YZ rispettivamente.

In Figura 3.11 e 3.12 sono inoltre considerati valori differenti del prodotto $V\Theta$. In entrambi i casi appare evidente come la disposizione delle isolinee sia fortemente influenzata dalla scelta di $V\Theta$: al diminuire di tale grandezza (ovvero, man mano che il rilassamento viscoelastico si fa più rapido) la durata del modo 00 cresce progressivamente e appare essere via via sostanzialmente indipendente dal valore di Z_0 .

3.5 Regole di corrispondenza

La scelta dei parametri definiti nell'ambito del modello discreto può essere effettuata stabilendo una serie di relazioni con un modello basato sulla meccanica dei continui, come in [Dragoni & Santini 2012] e [Amendola & Dragoni 2013].

Si consideri una regione di ampiezza d racchiusa tra i margini di due placche tettoniche: il moto relativo delle due porzioni litosferiche è caratterizzato da scorrimento di puro taglio e avviene alla velocità relativa v ; si assuma che tale zona di taglio si comporti come un mezzo viscoelastico tipo corpo di Maxwell di rigidità μ e viscosità η e che il piano di faglia ivi contenuto presenti due asperità di pari superficie A , poste a distanza R .

Lo sforzo di taglio tettonico sul piano di faglia cresce nel tempo secondo la relazione

$$\sigma = \frac{\mu vt}{d} \quad (3.96)$$

La corrispondente forza agente su ciascuna asperità è pari a

$$f = \sigma A \quad (3.97)$$

Confrontando tale espressione con la forza Kvt applicata alla generica asperità del modello discreto, si ha

$$K \approx \frac{\mu A}{d} \quad (3.98)$$

Poichè si è qui interessati a comprendere il comportamento a lungo termine del sistema, piuttosto che i dettagli del processo di scorrimento, risulta lecito scegliere la più semplice delle descrizioni possibili per la caratterizzazione dell'attrito, secondo la quale lo scorrimento è ostacolato da uno sforzo statico σ_{S1}, σ_{S2} e dinamico σ_{D1}, σ_{D2} rispettivamente per l'asperità 1 e 2. Le forze di attrito corrispondenti ai suddetti sforzi sono

$$f_{S1} = \sigma_{S1}A, \quad f_{D1} = \sigma_{D1}A \quad (3.99)$$

$$f_{S2} = \sigma_{S2}A, \quad f_{D2} = \sigma_{D2}A \quad (3.100)$$

Conseguentemente

$$\epsilon = \frac{\sigma_{D1}}{\sigma_{S1}} = \frac{\sigma_{D2}}{\sigma_{S2}} \quad (3.101)$$

dove si è mantenuta l'ipotesi fatta nell'ambito del modello discreto, secondo cui il rapporto tra attrito dinamico e statico è il medesimo per le due asperità ($f_{D1}/f_{S1} = f_{D2}/f_{S2}$). Inoltre

$$\beta = \frac{\sigma_{S2}}{\sigma_{S1}} = \frac{\sigma_{D2}}{\sigma_{D1}} \quad (3.102)$$

Osservando che, dalla (3.96), lo *stress rate* tettonico è

$$\dot{\sigma} = \frac{\mu v}{d} \quad (3.103)$$

e indicando con u_1, u_2 l'ampiezza dello scorrimento dell'asperità 1 e 2 rispettivamente, si ha

$$u_1 = v \frac{\sigma_{S1} - \sigma_{D1}}{\dot{\sigma}}, \quad u_2 = v \frac{\sigma_{S2} - \sigma_{D2}}{\dot{\sigma}} \quad (3.104)$$

Ne segue

$$\frac{u_2}{u_1} = \frac{\sigma_{S2} - \sigma_{D2}}{\sigma_{S1} - \sigma_{D1}} = \frac{\sigma_{S2}}{\sigma_{S1} - \sigma_{D1}} - \frac{\sigma_{D2}}{\sigma_{S1} - \sigma_{D1}} = \frac{\beta}{1 - \epsilon} - \frac{\epsilon\beta}{1 - \epsilon} = \beta \quad (3.105)$$

ovvero, il parametro β corrisponde anche al rapporto tra il rilascio di sforzo sulle asperità, a sua volta pari al rapporto tra le ampiezze dello scorrimento delle asperità.

In generale, allo scorrimento u di un'asperità corrisponde un trasferimento di sforzo di taglio $\Delta\sigma$ sull'altra, distribuito in modo non omogeneo a causa delle

dimensioni finite delle asperità. Al fine di confrontare questo sforzo con l'attrito statico, esso viene stimato valutandone il valore medio sull'area delle asperità. Tipicamente, la distanza R tra le asperità è maggiore dell'estensione lineare \sqrt{A} delle stesse, circostanza che consente di adottare l'approssimazione di sorgente puntiforme per stimare il trasferimento di sforzo:

$$\Delta\sigma \approx \frac{\mu u A}{R^3} \quad (3.106)$$

La corrispondente variazione della trazione su un'asperità è dunque

$$\Delta f \approx \Delta\sigma A \quad (3.107)$$

Nell'ambito del modello discreto, lo scorrimento u corrisponde alla differenza $|x - y|$ tra i deficit di scorrimento delle asperità, mentre la variazione della trazione Δf è data dal prodotto $K_C u$: pertanto

$$K_C \approx \frac{\mu A^2}{R^3}, \quad \alpha = \frac{K_C}{K} \approx \frac{Ad}{R^3} \quad (3.108)$$

il che mostra come il parametro di accoppiamento α sia legato alla geometria del sistema. In particolare, esso è direttamente proporzionale alla superficie delle asperità e all'ampiezza della zona viscoelastica che le racchiude, mentre diminuisce all'aumentare della distanza tra le asperità.

Per quanto riguarda infine l'accoppiamento viscoelastico tra le asperità, si noti che le equazioni del moto dei modi dinamici del sistema possono essere riscritte in modo che le quantità V e Θ compaiano sempre nel prodotto $V\Theta$: ricordando che

$$V\Theta = \frac{Kv\tau}{f_S} \quad (3.109)$$

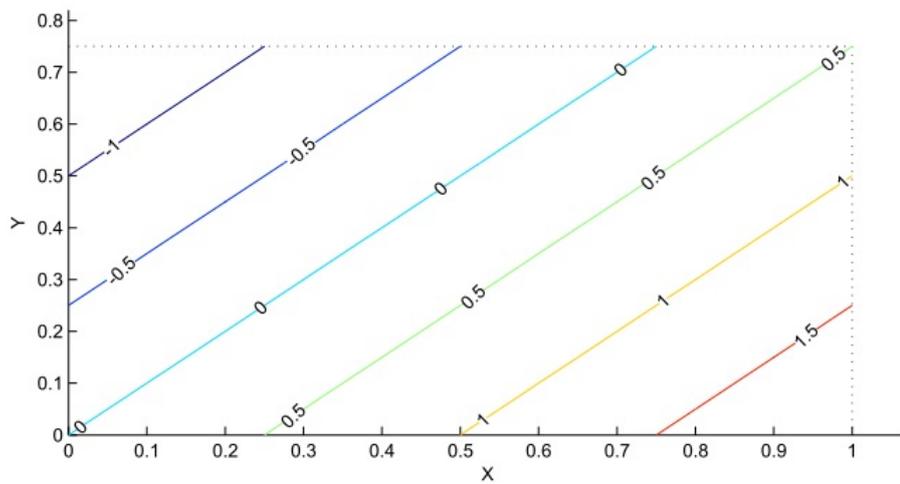
e osservando che

$$u = \frac{f_S U}{K} \quad (3.110)$$

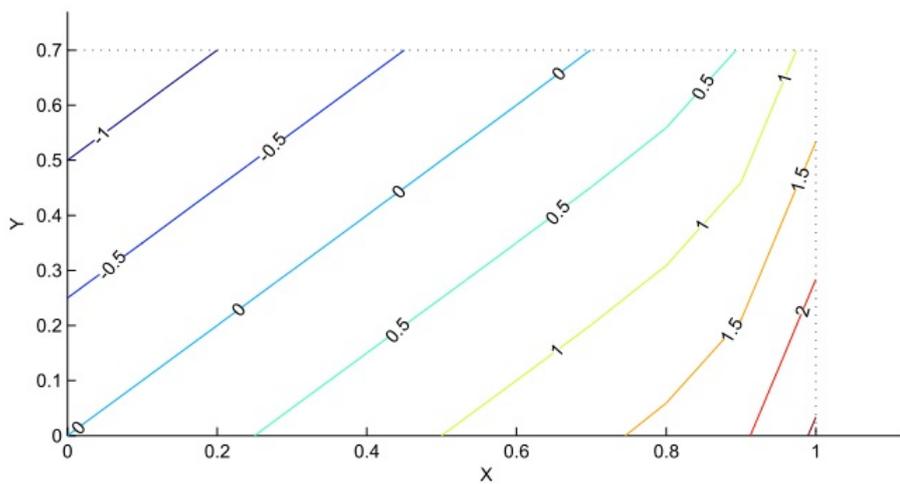
segue

$$V\Theta \approx \frac{Uv\tau}{u} \quad (3.111)$$

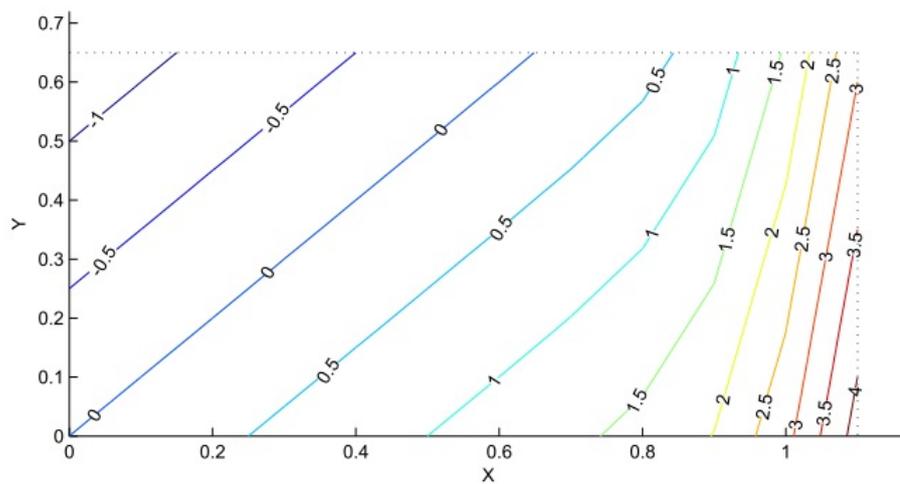
Quindi l'applicazione del modello ai casi reali può essere effettuata valutando i parametri del modello tramite le equazioni precedenti, che richiedono la conoscenza delle caratteristiche geometriche e meccaniche della regione sismogenica considerata.



(a)

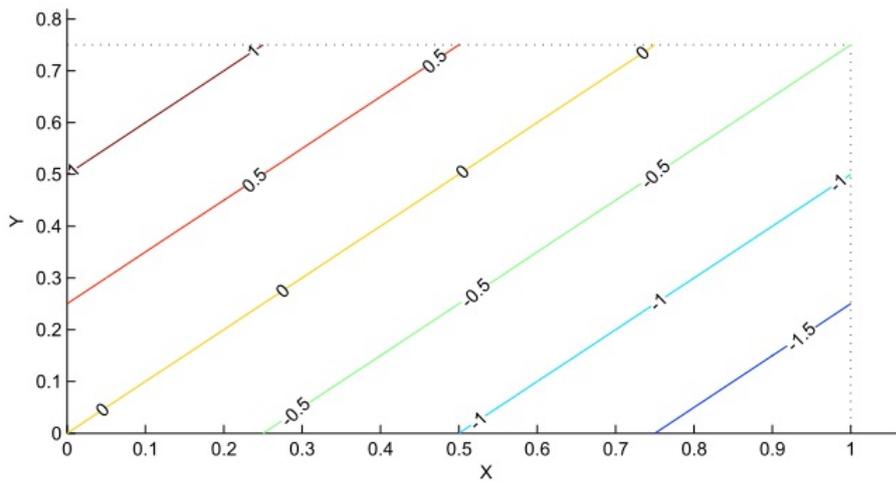


(b)

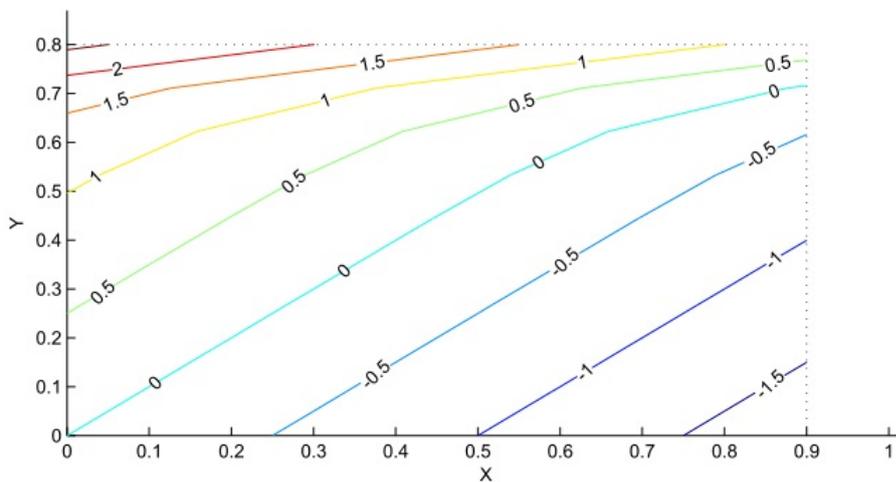


(c)

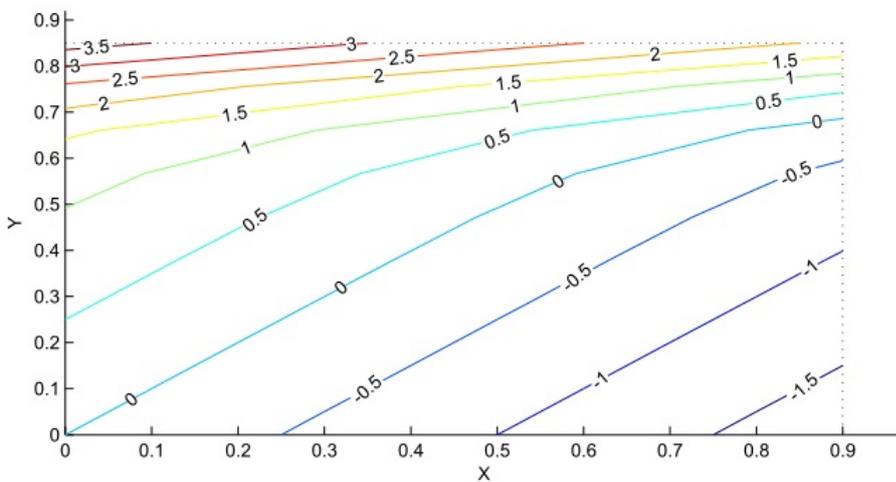
Figura 3.9: *Contour plots* di $\Delta\tilde{T}_1/\Theta$ su varie sezioni di \mathbf{T} ($\alpha = 0.1$, $V\Theta = 0.05$):
 (a) $Z_0 = 0$, (b) $Z_0 = 0.5$, (c) $Z_0 = 1$.



(a)

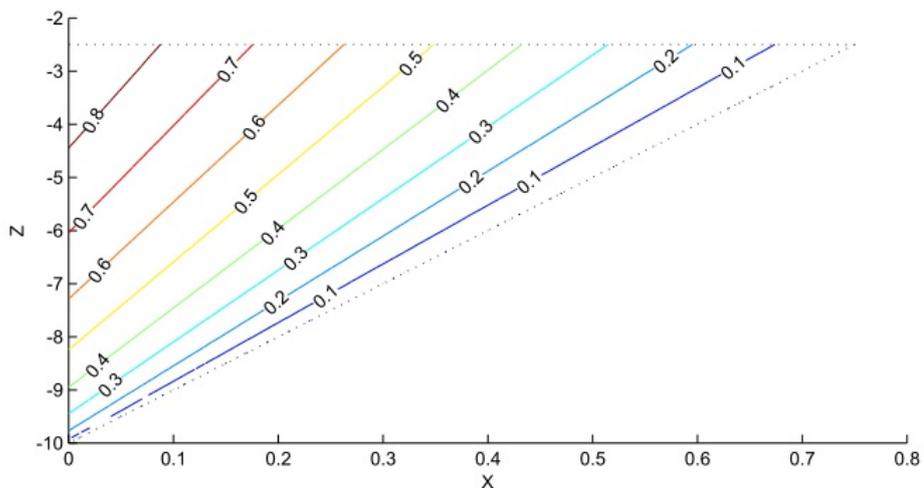


(b)

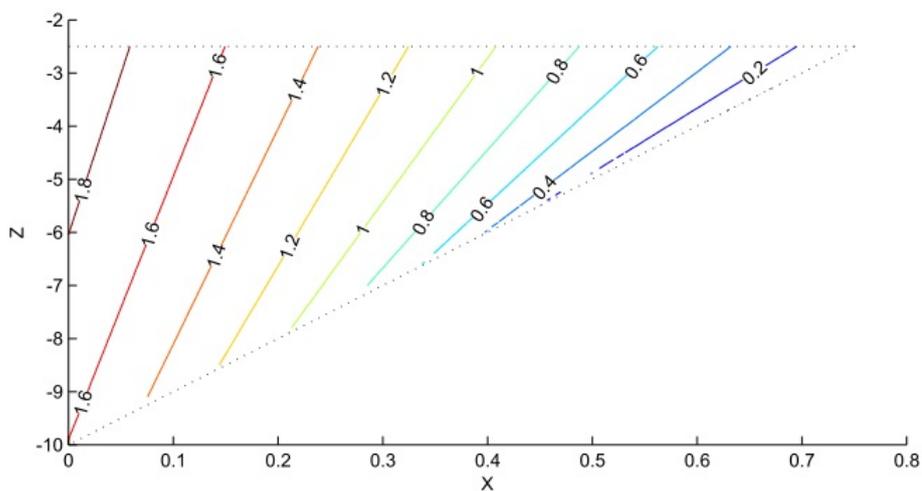


(c)

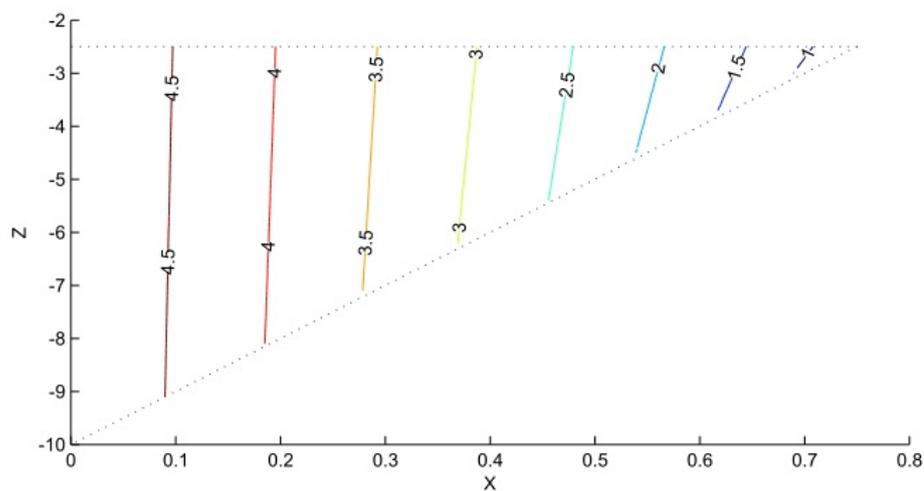
Figura 3.10: *Contour plots* di $\Delta\tilde{T}_2/\Theta$ su varie sezioni di \mathbf{T} ($\alpha = 0.1$, $V\Theta = 0.05$):
 (a) $Z_0 = 0$, (b) $Z_0 = -0.5$, (c) $Z_0 = -1$.



(a)

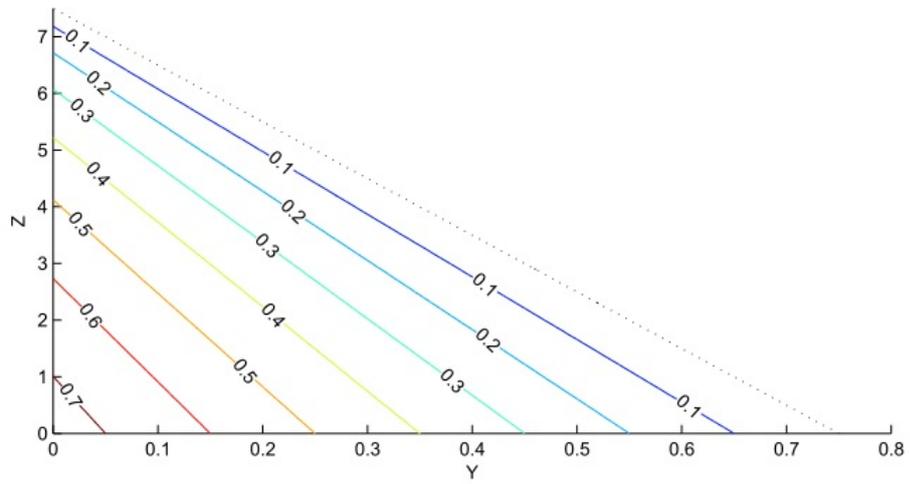


(b)

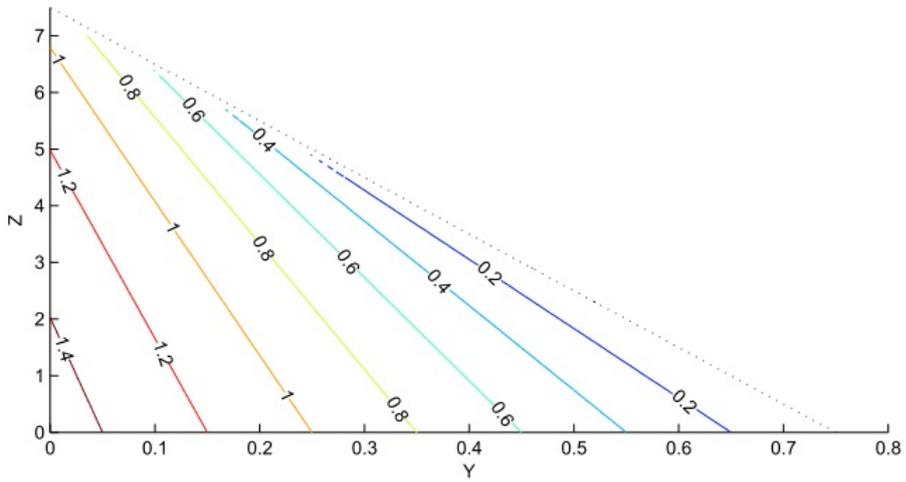


(c)

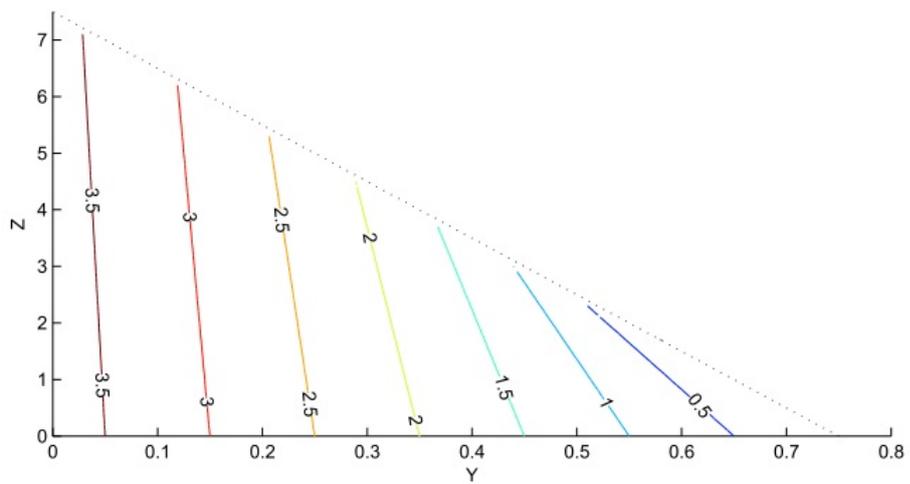
Figura 3.11: *Contour plots* di \tilde{T}_1/Θ su sezioni di \mathbf{T} parallele al piano XZ ($\alpha = 0.1$):
 (a) $V\Theta = 1$, (b) $V\Theta = 0.5$, (c) $V\Theta = 0.2$.



(a)



(b)



(c)

Figura 3.12: *Contour plots* di \tilde{T}_2/Θ su sezioni di \mathbf{T} parallele al piano YZ ($\alpha = 0.1$):
 (a) $V\Theta = 1$, (b) $V\Theta = 0.5$, (c) $V\Theta = 0.2$.

Capitolo 4

Applicazione al terremoto dell'Alaska del 1964

Il presente capitolo contiene un'applicazione del modello con accoppiamento viscoelastico precedentemente descritto a un particolare evento sismico: il grande terremoto verificatosi in Alaska nel Marzo 1964. L'analisi consentirà di rispondere ad alcuni quesiti:

- quale stato di sforzo caratterizzava la faglia prima e dopo l'evento?
- come può essere descritta la funzione sorgente (*moment rate*) associata al terremoto?
- quali considerazioni sul possibile futuro sviluppo del sistema possono essere inferite?

La scelta di questo evento sismico è stata determinata da alcuni fattori: in primo luogo, l'evento sismico è stato il risultato del cedimento di due asperità, per cui si presta a essere analizzato tramite il modello sviluppato nel capitolo precedente. E' stato poi sufficientemente intenso da causare un rilassamento post-sismico significativo, e la deformazione associata a questo processo si è potuta osservare chiaramente, essendo trascorso un lasso di tempo abbastanza lungo.

Questo stesso terremoto è stato scelto come applicazione dei modelli sviluppati in [Dragoni & Santini 2012] e [Amendola & Dragoni 2013], già descritti in §2.2.1 e §2.2.2: i risultati forniti dai tre diversi modelli verranno discussi e messi a confronto al termine del capitolo.

4.1 L'evento sismico

L'evento in esame si è verificato in data 28 Marzo 1964 nella penisola di Kenai, una regione dell'Alaska centro-meridionale caratterizzata dalla subduzione della placca Pacifica al di sotto della placca Nord Americana; il terremoto ha comportato la fratturazione di un segmento esteso per circa 800 km in direzione Nord Est-Sud Ovest. L'epicentro, di coordinate 61.04 °N, 147.73 °W [Johnson et al. 1996], è localizzato a circa 130 km a Est di Anchorage e 70 km a Ovest di Valdez, ma la zona di aftershock si estende per circa 300 km fino a Cape Yakataga e per 800 km in direzione Sud Ovest verso la regione di Kodiak Island, arrivando a coprire un'area di quasi 200000 km² [Christensen & Beck 1994], [Johnson et al. 1996]. Con un momento sismico stimato pari a $8.2 \cdot 10^{22}$ Nm [Kanamori 1977], corrispondente a magnitudo momento $M_w \simeq 9.2$, il terremoto in questione è annoverato tra i più forti del XX secolo, secondo solo al terremoto verificatosi in Cile nel 1960, di magnitudo momento $M_w \simeq 9.5$.

L'analisi congiunta di dati geodetici e forme d'onda degli tsunami prodotti [Johnson et al. 1996] ha permesso di caratterizzare la distribuzione dello scorrimento, portando a identificare due regioni con un ruolo dominante nel processo: le asperità di Prince William Sound e Kodiak Island, con uno scorrimento medio di circa 24 m e 18 m rispettivamente, secondo quanto stimato in [Santini et al. 2003].

A differenza dell'approccio adottato nei precedenti studi [Dragoni & Santini 2012], [Amendola & Dragoni 2013], nel presente lavoro ci si riferirà all'asperità di Prince William Sound e di Kodiak Island come asperità 1 e 2 rispettivamente: l'ipocentro dell'evento sismico del Marzo 1964 viene pertanto a essere localizzato sull'asperità 1, regione che, nell'ambito del modello discreto adottato, è caratterizzata da più elevato attrito statico e dinamico ($0 < \beta < 1$).

L'analisi precedentemente condotta ha evidenziato come la dinamica di un sistema composto da due asperità possa essere descritta in termini di 3 possibili modi (10/01/11), contraddistinti dallo scorrimento di una o di entrambe le asperità; il particolare terremoto che ci si propone di esaminare è il prodotto dello scorrimento di ambo le asperità.

Inizialmente il sistema si trova in una configurazione statica (fase di lento caricamento tettonico), fino a quando non si creano le condizioni per il cedimento dell'asperità 1: essa scorre isolatamente per un certo tempo, quindi, nell'istante

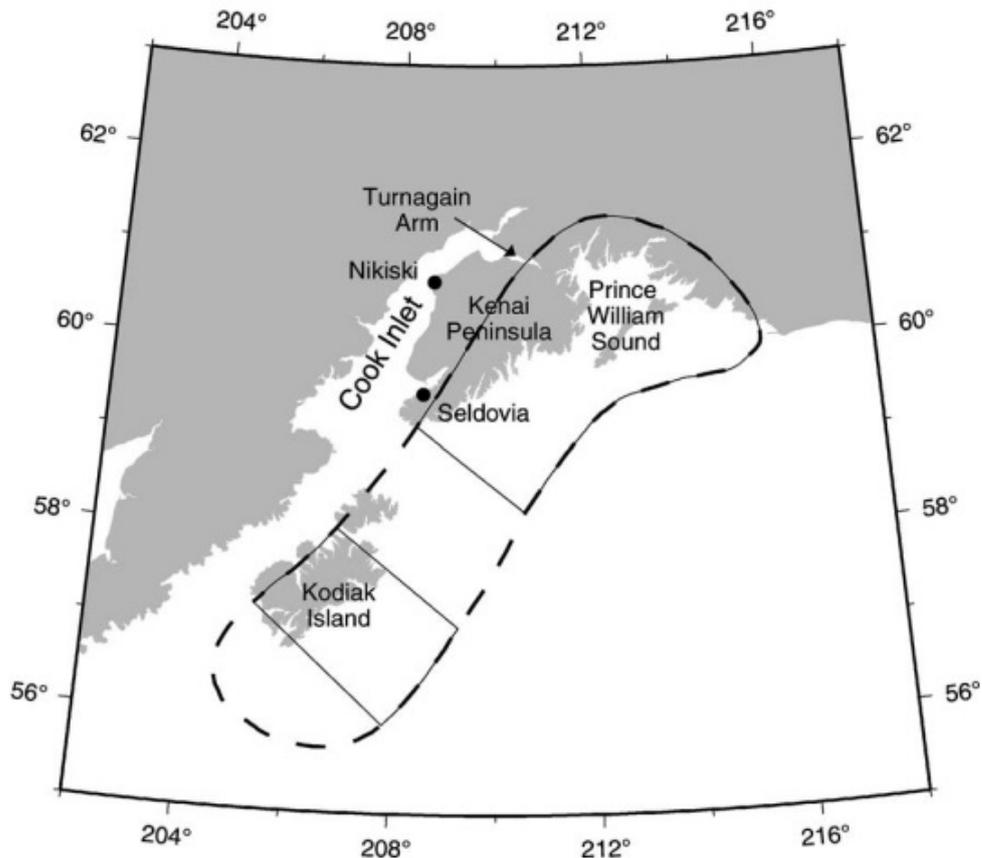


Figura 4.1: Asperità di Prince William Sound e Kodiak Island [Zweck et al. 2002].

esatto in cui essa si arresta, vengono raggiunte le condizioni per lo scorrimento dell'asperità 2; al termine di questa seconda fase di moto, il sistema rientra in una configurazione statica.

Si sottolinea fin da ora che, per riprodurre il *moment rate* osservato, tra gli scorrimenti delle due asperità verrà introdotto un intervallo di tempo finito (ma trascurabile rispetto ai tempi associati al caricamento tettonico).

Traducendo il processo in termini di modi dinamici coinvolti, la specifica sequenza che si intende esaminare è costituita dalla successione $00 \rightarrow 10 \rightarrow 01 \rightarrow 00$.

4.1.1 Scelta dei parametri

L'adozione del modello discreto definito nel precedente capitolo richiede la specificazione di un serie di parametri, per la scelta dei quali è necessario ricorrere alle regole di corrispondenza descritte in §3.5: verranno qui adottate le considerazioni fatte in [Dragoni & Santini 2012] e [Amendola & Dragoni 2013].

Come a più riprese evidenziato, scopo della presente analisi è la descrizione del comportamento a lungo termine del sistema: per tale ragione, si trascura la differenza in estensione delle due asperità, discussa in [Zweck et al. 2002], assumendo un valore medio $A \approx 10^4 \text{ km}^2$; sia inoltre $R \approx 300 \text{ km}$ la distanza tra le due porzioni di faglia.

La deformazione tettonica in atto nella regione dell'Alaska è distribuita su un'area molto maggiore rispetto allo spessore dello slab in subduzione: questa evidenza consente di scegliere $d \approx 300 \text{ km}$ come stima dell'estensione della regione viscoelastica racchiusa tra i lembi delle placche tettoniche. Ne consegue

$$\alpha \approx \frac{Ad}{R^3} \simeq 0.1 \quad (4.1)$$

Inoltre, ponendo il rapporto tra attrito dinamico e statico sulle due asperità $\epsilon = 0.7$ [Scholz 1990], lo scorrimento medio della singola asperità può essere quantificato in

$$U = 2 \frac{1 - \epsilon}{1 + \alpha} \simeq 0.54 \quad (4.2)$$

L'analisi delle deformazioni cosismiche superficiali condotta in [Santini et al. 2003] ha consentito di stimare gli scorrimenti medi in termini di $u_1 \simeq 24 \text{ m}$ per l'asperità di Prince William Sound e $u_2 \simeq 18 \text{ m}$ per quella di Kodiak Island: pertanto, secondo la (3.105),

$$\beta = \frac{u_2}{u_1} \simeq 0.75 \quad (4.3)$$

dove, in accordo con quanto esposto in §3.5, si è assunto che il rapporto tra gli scorrimenti delle due asperità sia uguale a quello tra i rispettivi attriti.

In [Zweck et al. 2002] si è mostrato che le deformazioni post-sismiche osservate nei decenni successivi all'evento del Marzo 1964 sono un processo che decade nel tempo: in particolare, i tassi di deformazione non appaiono consistenti con l'ipotesi di un fenomeno dominato da un solo tempo caratteristico e avviato immediatamente dopo il terremoto. Gli autori hanno concluso l'esistenza di almeno due componenti: una prima, più rapida, posta in relazione a processi di creep e scorrimenti asisimici sul piano di faglia, con velocità proporzionale a t^{-1} e tempo caratteristico di pochi anni, caduta sostanzialmente a zero entro i primi anni '90; una seconda, dovuta a rilassamento viscoelastico, con dipendenza temporale di tipo esponenziale e tempo caratteristico $\tau \simeq 30 \text{ a}$.

Assumendo un modulo di rigidità $\mu = 55 \text{ GPa}$, calcolato come media sullo spessore

della crosta terrestre [Dziewonski & Anderson 1981], e ricordando che $\tau = \eta/\mu$, è possibile stimare $\eta \simeq 5.2 \cdot 10^{19}$ Pa s per la viscosità della zona di margine tettonico; si noti che tale valore non rappresenta la viscosità media della litosfera (molto più elevata), ma la viscosità corrispondente alle particolari condizioni reologiche del margine tettonico.

Con una velocità tettonica relativa $v \simeq 5.7 \text{ cm}\cdot\text{a}^{-1}$ [DeMets & Dixon 1999], è possibile porre, secondo la (3.111),

$$V\Theta \approx \frac{Uv\tau}{u_1} \simeq 0.039 \quad (4.4)$$

in base alle considerazioni sull'accoppiamento viscoelastico viste in §3.5; siffatto valore indica un processo di rilassamento viscoelastico assai rapido.

4.2 Sequenza $00 \rightarrow 10 \rightarrow 01 \rightarrow 00$

Siano dati i punti $P_1 = (X_1, Y_1, Z_1)$ e $P_2 = (X_2, Y_2, Z_2)$, posizioni del punto rappresentativo del sistema rispettivamente all'inesco del modo 10 (scorrimento asperità 1) e 01 (scorrimento asperità 2): affinché al termine del modo 10 abbia immediatamente seguito l'avvio del modo 01, devono valere le condizioni

$$\begin{cases} X_2 = X_1 - \Delta X(T^*) = X_1 - U \\ Y_2 = Y_1 \\ Z_2 = Z_1 + \Delta X(T^*) = Z_1 + U \end{cases} \quad (4.5)$$

essendo T^* , U rispettivamente la durata e l'ampiezza finale dello scorrimento dell'asperità 1 nel modo 10, pari a

$$T^* = \frac{\pi}{\omega}, \quad U = 2 \frac{1 - \epsilon}{1 + \alpha} \quad (4.6)$$

Inoltre, le coordinate di P_1, P_2 devono soddisfare le equazioni dei piani Π_1, Π_2 : segue dal sistema (4.5) che deve essere

$$X_1 = \alpha Z_1 + 1 \quad (4.7)$$

$$Y_1 = \beta - \alpha(Z_1 + U) \quad (4.8)$$

$$X_2 = \alpha Z_1 + 1 - U \quad (4.9)$$

$$Y_2 = Y_1 \quad (4.10)$$

$$Z_2 = Z_1 + U \quad (4.11)$$

A fronte di tale sistema di 5 equazioni in 6 incognite, si è scelto di esprimere ogni grandezza in funzione della coordinata Z_1 : il dominio di variazione di tale

quantità verrà definito nel seguito.

In virtù della linearità delle equazioni che regolano l'evoluzione del sistema nel modo 00, l'insieme dei punti P_1 tali da innescare la sequenza di interesse è un segmento S_1 giacente su Π_1 : gli estremi del suddetto segmento possono essere fissati tenendo conto delle cosiddette condizioni di *no overshooting*

$$\begin{cases} X_2 = X_1 - U \geq 0 \\ Y_3 = Y_2 - \beta U \geq 0 \end{cases} \quad (4.12)$$

dove la variabile Y_3 è riferita al punto P_3 in corrispondenza del quale si conclude il modo 01; tali restrizioni garantiscono, rispettivamente, che, terminato lo scorrimento dell'asperità 1 e 2, il punto rappresentativo del sistema si trovi all'interno del tetraedro \mathbf{T} o, al limite, sulla sua superficie di contorno.

Inserendo le (4.7)-(4.10), segue

$$\frac{U-1}{\alpha} \leq Z_1 \leq \frac{\beta - U(\alpha + \beta)}{\alpha} \quad (4.13)$$

ovvero, nel caso in esame,

$$-4.6 \leq Z_1 \leq 2.91 \quad (4.14)$$

Tale risultato consente di definire gli estremi di S_1 : sfruttando infatti le (4.7)-(4.8), essi risultano dati dai punti

$$P_1^{inf} = (0.54, 1.15, -4.6), \quad P_1^{sup} = (1.29, 0.40, 2.91) \quad (4.15)$$

In maniera del tutto analoga, l'insieme dei punti P_2 corrispondenti alla sequenza di interesse è un segmento S_2 giacente su Π_2 che può essere delimitato sfruttando le condizioni appena determinate su Z_1 : tenendo conto della (4.11) si ha infatti

$$\frac{U(1+\alpha)-1}{\alpha} \leq Z_2 \leq \frac{\beta(1-U)}{\alpha} \quad (4.16)$$

da cui

$$-4.06 \leq Z_2 \leq 3.45 \quad (4.17)$$

Le (4.9)-(4.10) individuano infine gli estremi di S_2 nei punti

$$P_2^{inf} = (0, 1.15, -4.06), \quad P_2^{sup} = (0.75, 0.40, 3.45) \quad (4.18)$$

I segmenti S_1, S_2 giacciono rispettivamente sui piani

$$\zeta_1) \quad X + Z + aY + b = 0 \quad (4.19)$$

$$\zeta_2) \quad Y + Z + cX + d = 0 \quad (4.20)$$

dove

$$a = 11.01, \quad b = -8.6, \quad c = -9.01, \quad d = 2.91 \quad (4.21)$$

L'intersezione di tali piani con Π_1 e Π_2 individua le rette

$$r_1 \begin{cases} X + Z + aY + b = 0 \\ X - \alpha Z - 1 = 0 \end{cases} \quad (4.22)$$

$$r_2 \begin{cases} Y + Z + cX + d = 0 \\ Y + \alpha Z - \beta = 0 \end{cases} \quad (4.23)$$

caratterizzate dagli stessi coseni direttori.

Si noti che i due segmenti risultano essere entrambi paralleli allo spigolo CD di \mathbf{T} : indicando infatti con $\mathbf{m1}$ e $\mathbf{m2}$ rispettivamente il vettore dei coseni direttori di r_1 (o r_2) e di CD, si trova

$$\mathbf{m2} = f \cdot \mathbf{m1} \quad (4.24)$$

con $f \simeq -2.33$.

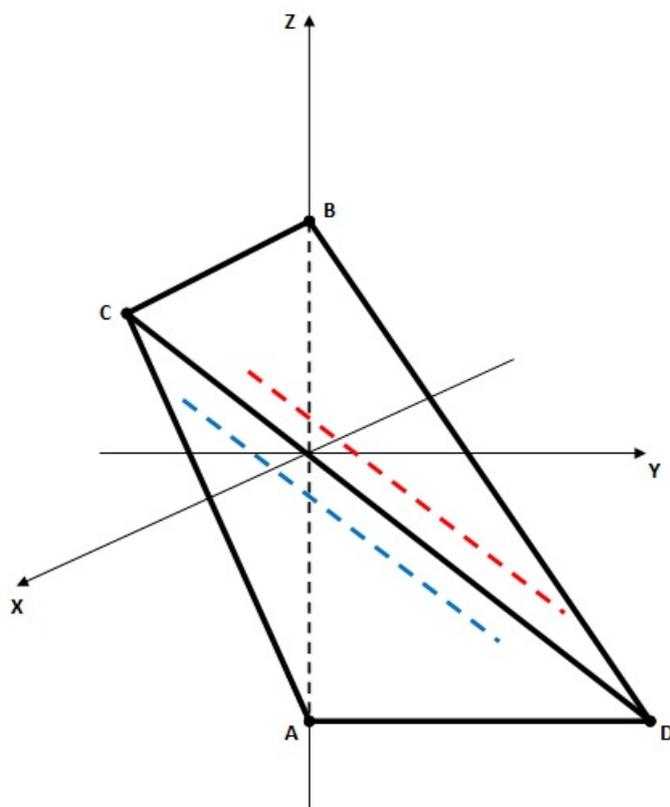


Figura 4.2: Segmenti S_1 e S_2 , rispettivamente in blu e rosso.

4.2.1 Stato del sistema prima dell'evento del Marzo 1964

Non è possibile risalire in modo univoco al punto iniziale $P_0 = (X_0, Y_0, Z_0)$ la cui evoluzione determina la sequenza in analisi: infatti, l'evoluzione della variabile Z durante il modo 00 impone la relazione

$$Z_1 = Z_0 e^{-\tilde{T}/\Theta} \quad (4.25)$$

avendo indicato con \tilde{T} la durata del modo 00, pari a

$$\tilde{T} = \Theta W(\gamma_1) + \frac{1 - X_0}{V} \quad (4.26)$$

dove W è la funzione di Lambert e

$$\gamma_1 = \frac{\alpha Z_0}{V\Theta} e^{(X_0 - 1)/V\Theta} \quad (4.27)$$

La particolare evoluzione del sistema mostra dunque un'imprescindibile dipendenza dalle *condizioni iniziali*: fissato un valore di Z_1 , non risulta possibile risalire a un unico punto P_0 facendo evolvere "a ritroso" il sistema, in virtù del fatto che la durata del modo 00 dipende da P_0 stesso secondo la (4.26).

In definitiva, a ogni punto $P_1 \in S_1$ corrisponde una e una sola orbita di modo 00: poichè tuttavia a essa appartiene un'infinità non numerabile di potenziali punti P_0 , ogni punto P_1 può essere messo in relazione ad infiniti punti P_0 giacenti su suddetta (univoca) orbita. Poichè il particolare punto P_1 individuato su S_1 dipende dall'orbita di modo 00 considerata, diversi punti P_0 portano a disparate evoluzioni successive, ma tutte contraddistinte dalla sequenza di modi $00 \rightarrow 10 \rightarrow 01 \rightarrow 00$.

In modo del tutto generale, le coordinate di P_0 possono essere riscritte in termini della coordinata Z_1 : le equazioni del moto per il modo 00 forniscono le relazioni

$$X_1 = \alpha Z_1 + 1 = X_0 + V\tilde{T} \quad (4.28)$$

$$Y_1 = \beta - \alpha(Z_1 + U) = Y_0 + V\tilde{T} \quad (4.29)$$

$$Z_1 = Z_0 e^{-\tilde{T}/\Theta} \quad (4.30)$$

da cui

$$X_0 = \alpha Z_1 + 1 - V\tilde{T} \quad (4.31)$$

$$Y_0 = \beta - \alpha(Z_1 + U) - V\tilde{T} \quad (4.32)$$

$$Z_0 = Z_1 e^{\tilde{T}/\Theta} \quad (4.33)$$

Queste coordinate possono essere determinate in modo univoco, una volta fissato il punto P_1 , data una particolare scelta di \tilde{T} .

Un'ulteriore restrizione può essere introdotta tenendo conto delle considerazioni geometriche viste in §3.3: P_0 deve necessariamente appartenere al sottoinsieme \mathbf{T}_1 della *sticking region*, posto al di sotto della superficie Σ , affinché l'orbita di modo 00 intersechi il piano Π_1 e si verifichino le condizioni per lo scorrimento dell'asperità 1. Pertanto il valore di Z_0 deve essere inferiore a quello che soddisfa l'equazione (3.85) della superficie Σ per $X = X_0$ e $Y = Y_0$, dove X_0 e Y_0 verificano le relazioni

$$X_0 > 1 - \beta, \quad Y_0 < X_0 + \beta - 1 \quad (4.34)$$

dove si è tenuto conto che Σ individua sul piano XY la retta $Y = X + \beta - 1$.

Per rendere più chiara la trattazione, si riportano in Figura 4.3 due grafici, contenenti l'orbita del punto rappresentativo del sistema sia nello spazio tridimensionale XYZ che la sua proiezione sul piano XY .

4.2.2 Stato di sforzo sui segmenti S_1 e S_2

Si è ora interessati a valutare lo stato di sforzo sulle due asperità per gli stati del sistema appartenenti ai segmenti S_1 e S_2 sopra definiti. A tal scopo, è sufficiente sostituire nelle espressioni delle trazioni

$$F_1 = -X + \alpha Z, \quad F_2 = -Y - \alpha Z \quad (4.35)$$

le coordinate dei punti P_1 e P_2 : segue

$$S_1 \longrightarrow \frac{F_2}{F_1} = \beta - \alpha U \quad (4.36)$$

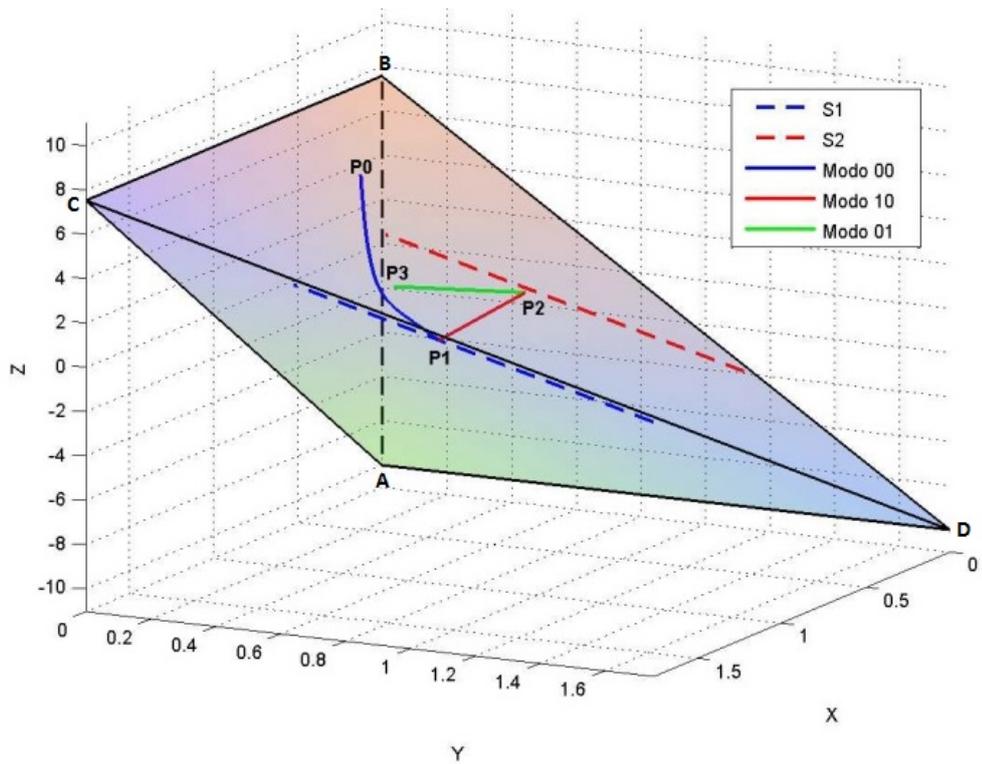
$$S_2 \longrightarrow \frac{F_2}{F_1} = \frac{\beta}{2\epsilon - 1} \quad (4.37)$$

ovvero, nel caso in esame

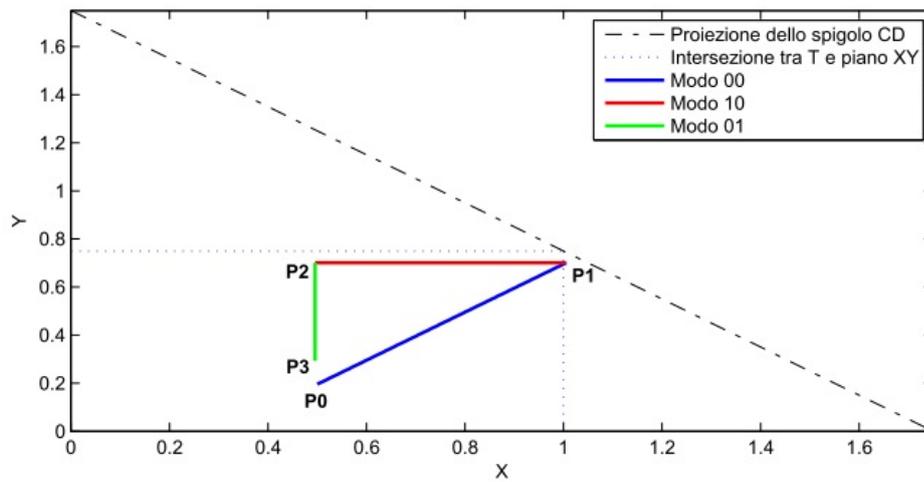
$$S_1 \longrightarrow \frac{F_2}{F_1} \simeq 0.70 \quad (4.38)$$

$$S_2 \longrightarrow \frac{F_2}{F_1} \simeq 1.85 \quad (4.39)$$

Le relazioni (4.38)-(4.39) evidenziano come tutti gli stati appartenenti a S_1 e S_2 corrispondano al medesimo rapporto tra le trazioni agenti sulle asperità, indipendentemente dalle coordinate del punto P_1 e P_2 preso, rispettivamente, su di



(a)



(b)

Figura 4.3: Orbita del sistema dinamico per la sequenza del Marzo 1964 con $P_0 = (0.5, 0.2, 5)$: (a) vista 3D; (b) proiezione sul piano XY.

essi: è una diretta conseguenza dei vincoli imposti al sistema al fine di ottenere la particolare sequenza $00 \rightarrow 10 \rightarrow 01 \rightarrow 00$.

In particolare, all'innesco del modo 10 corrisponde una trazione sull'asperità 2 pari a circa il 70% della trazione sull'asperità 1, mentre all'innesco del modo 01 lo

sforzo sull'asperità 2 arriva quasi a duplicare quello presente sull'asperità 1.

Risulta poi possibile definire un'ulteriore restrizione sui parametri del problema: le osservazioni legate alla tipica evoluzione delle zone sismogenetiche (meccanismi focali dei terremoti, stato di sforzo pre- e post-sismico, etc.) portano ad affermare che il rapporto tra le trazioni agenti sulle asperità deve essere una quantità positiva; pertanto

$$\frac{F_2}{F_1} \geq 0 \Rightarrow \beta \geq \alpha U \wedge \epsilon \geq \frac{1}{2} \quad (4.40)$$

I parametri adottati nel modello sono conformi a tali condizioni: infatti

$$\beta = 0.75 > \alpha U = 0.054, \quad \epsilon = 0.7 > \frac{1}{2} \quad (4.41)$$

4.2.3 Evoluzione delle trazioni sulle asperità

Si considerino le espressioni delle trazioni agenti sulle asperità, in funzione del tempo:

$$F_1(T) = -X(T) + \alpha Z(T) \quad (4.42)$$

$$F_2(T) = -Y(T) - \alpha Z(T) \quad (4.43)$$

Per descriverne l'andamento in istanti successivi, è sufficiente introdurre le equazioni per le coordinate X, Y, Z del punto rappresentativo del sistema nei tre diversi modi dinamici che compongono la sequenza.

Modo 00

Nell'ambito del modo 00, le (4.42)-(4.43) diventano

$$F_1(T) = -X_0 - VT + \alpha Z_0 e^{-T/\Theta} \quad (4.44)$$

$$F_2(T) = -Y_0 - VT - \alpha Z_0 e^{-T/\Theta} \quad (4.45)$$

con $0 \leq T \leq \tilde{T}$, essendo \tilde{T} la durata del modo 00.

Modo 10

All'istante $T = \tilde{T}$ si verificano le condizioni per lo scorrimento dell'asperità 1, ovvero $F_1(\tilde{T}) = -1$; durante il conseguente modo 10, le (4.42)-(4.43) forniscono

$$F_1(T) = -X_1 + \alpha Z_1 + \frac{U(1+\alpha)}{2} [1 - \cos \omega(T - \tilde{T})] \quad (4.46)$$

$$F_2(T) = -Y_1 - \alpha Z_1 + \frac{\alpha U}{2} [1 - \cos \omega(T - \tilde{T})] \quad (4.47)$$

con $\tilde{T} \leq T \leq \tilde{T} + T^*$, dove $T^* = \pi/\omega$ è la durata del modo 10.

Nelle (4.46)-(4.47), X_1, Y_1, Z_1 sono le coordinate del punto P_1 individuato sul segmento S_1 , tali per cui

$$-X_1 + \alpha Z_1 = -1 \quad (4.48)$$

Si ricorda inoltre che l'ampiezza finale dello scorrimento dell'asperità 1 è data da

$$U = 2 \frac{1 - \epsilon}{1 + \alpha} \quad (4.49)$$

Modo 01

Terminato il moto della prima asperità, vengono raggiunte le condizioni per lo scorrimento dell'asperità 2, ovvero $F_2(\tilde{T} + T^*) = -\beta$; durante il conseguente modo 01, le (4.42)-(4.43) forniscono

$$F_1(T) = -X_2 + \alpha Z_2 - \frac{\beta U}{2} [1 - \cos \omega(T - \tilde{T} - T^*)] \quad (4.50)$$

$$F_2(T) = -Y_2 - \alpha Z_2 + \frac{\beta U(1 + \alpha)}{2} [1 - \cos \omega(T - \tilde{T} - T^*)] \quad (4.51)$$

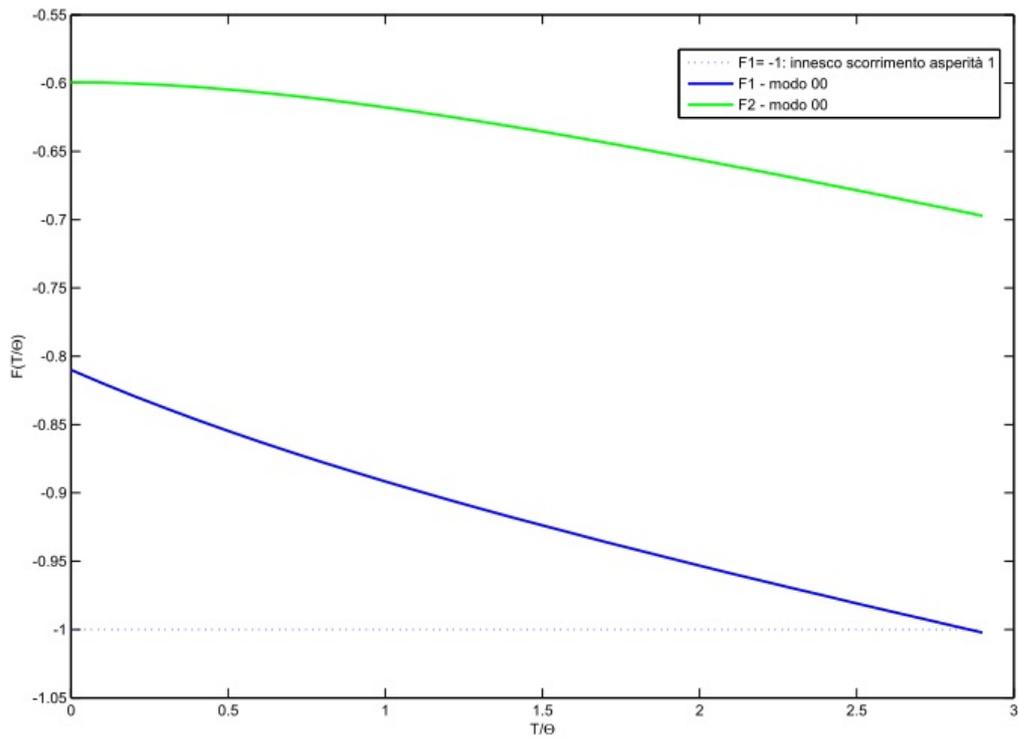
con $\tilde{T} + T^* \leq T \leq \tilde{T} + 2T^*$, in virtù del fatto che la durata del modo 01 è la stessa del modo 10.

Nelle (4.50)-(4.51), X_2, Y_2, Z_2 sono le coordinate del punto P_2 individuato sul segmento S_2 , tali per cui

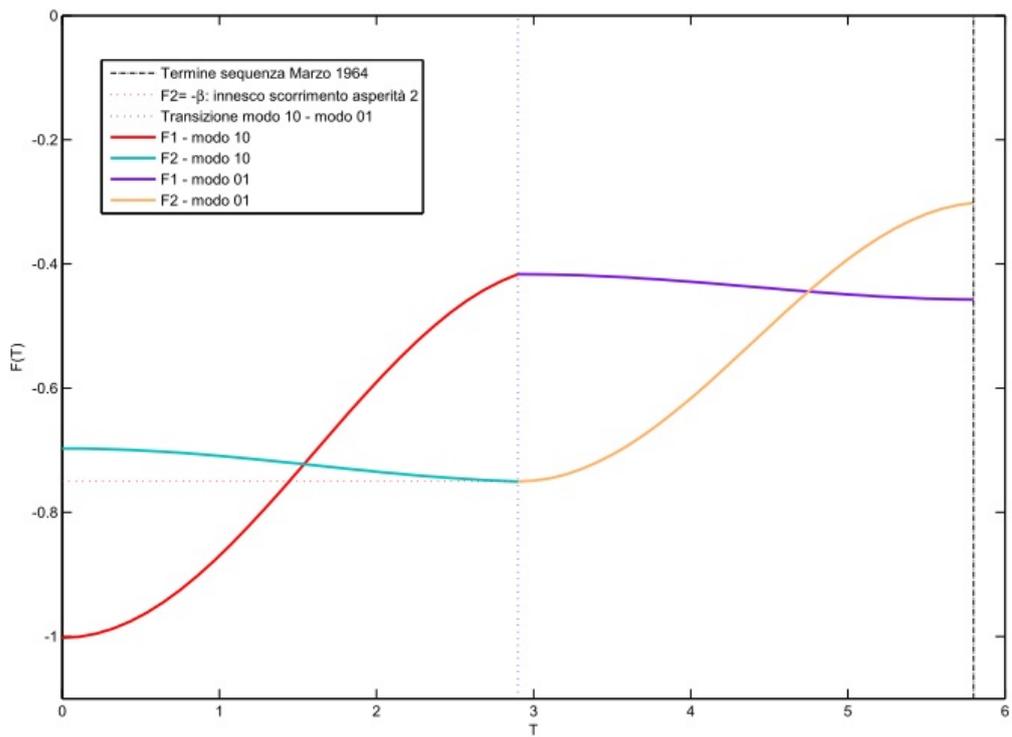
$$-Y_2 - \alpha Z_2 = -\beta \quad (4.52)$$

Concluso il modo 01, il sistema rientra nel modo 00 (asperità ferme) e l'evoluzione delle trazioni torna a essere descritta dalle (4.44)-(4.45).

Gli andamenti sono riportati in Figura 4.4 per una particolare scelta del punto originario P_0 : si noti la differente scala temporale dei due grafici, riflettente il fatto che la fase sismica della sequenza ha durata sostanzialmente trascurabile (dell'ordine di decine di secondi) rispetto a quella di caricamento tettonico che la precede, dell'ordine di decine o centinaia di anni.



(a)



(b)

Figura 4.4: Evoluzione delle trazioni sulle due asperità durante l'evento del Marzo 1964 con $P_0 = (0.86, 0.55, 0.5)$: (a) modo 00; (b) fase sismica.

Nel corso del modo 00, le trazioni su ambo le asperità assumono valori sempre più negativi, in conseguenza del processo di caricamento tettonico.

Per quanto riguarda invece la fase sismica della sequenza, si possono individuare due andamenti distinti: durante lo scorrimento dell'asperità 1 (modo 10), la trazione agente su di essa decresce rapidamente (in valore assoluto), via via che lo scorrimento asseconda il moto relativo delle placche tettoniche, mentre la trazione sull'asperità 2 permane sostanzialmente inalterata, in virtù del fatto che la velocità di scorrimento è drasticamente più elevata rispetto a quella associata al caricamento tettonico; i due andamenti si invertono al passaggio al modo 01 (scorrimento asperità 2).

4.2.4 Rilascio di momento sismico

Analogamente a quanto esposto in [Dragoni & Santini 2012], il momento sismico successivamente rilasciato durante la sequenza può essere scritto come la seguente funzione del tempo:

$$M(T) = \frac{M_1}{U} \begin{cases} \Delta X(T) & 0 \leq T \leq T^* \\ U + \Delta Y(T) & T^* \leq T \leq 2T^* \end{cases} \quad (4.53)$$

essendo M_1 il momento sismico associato allo scorrimento dell'asperità 1; si è tenuto conto del fatto che l'asperità 2 scorre immediatamente dopo l'arresto della 1 e che la durata del moto è la stessa ($T^* = \pi/\omega$) in ambo i casi. Sostituendo le espressioni (3.34)-(3.50) per gli scorrimenti nel modo 10 e 01 nel caso particolare in cui il sistema proviene dal modo 00, si ha

$$M(T) = \frac{M_1}{2} \begin{cases} (1 - \cos \omega T) & 0 \leq T \leq T^* \\ 2 + \beta(1 + \cos \omega T) & T^* \leq T \leq 2T^* \end{cases} \quad (4.54)$$

Da questa espressione si nota come il momento sismico associato allo scorrimento dell'asperità 2 è $M_2 = \beta M_1$; in definitiva, il momento sismico complessivamente rilasciato risulta pari a

$$M_0 \equiv M(2T^*) = M_1 + M_2 = M_1(\beta + 1) \quad (4.55)$$

Si è scelto di adottare per M_1 il valore $3.5 \cdot 10^{22}$ Nm stimato in [Christensen & Beck 1994]: ricordando che, per definizione, il momento sismico scalare associato allo scorrimento dell'asperità 1 è

$$M_1 = \mu A u_1 \quad (4.56)$$

l'area dell'asperità di Prince William Sound risulta essere circa 2.7 volte maggiore del valore medio $A \approx 10^4 \text{ km}^2$. Sostituendo nella (4.55), si ha

$$M_0 \simeq 6.12 \cdot 10^{22} \text{ Nm} \quad (4.57)$$

Il momento sismico finale così trovato risulta pari a circa il 75 % di quello stimato sperimentalmente in [Kanamori 1977]: è una conseguenza del fatto che si è tenuto in considerazione il solo scorrimento delle due asperità principali, trascurando lo scorrimento delle parti rimanenti della superficie di faglia.

Per quanto riguarda il *moment rate* $\dot{M}(T)$, una semplice derivazione temporale consente di scrivere

$$\dot{M}(T) = \frac{\omega M_0}{2(\beta + 1)} \begin{cases} \sin \omega T & 0 \leq T \leq T^* \\ -\beta \sin \omega T & T^* \leq T \leq 2T^* \end{cases} \quad (4.58)$$

Per generalizzare la descrizione, si può supporre che l'evento osservato abbia inizio al tempo $T = 0$, ma che lo scorrimento della prima asperità si verifichi solo dopo un intervallo temporale finito, in corrispondenza di un certo istante $T = T_1 \geq 0$; analogamente, è possibile anteporre un tempo discreto anche allo scorrimento della seconda asperità, fissandolo all'istante $T = T_2 \geq T_1 + T^*$.

Assumendo inoltre che il rilascio di momento sismico sia irrilevante al di fuori degli intervalli temporali in cui hanno luogo gli scorrimenti, l'espressione del *moment rate* può essere così riformulata:

$$\dot{M}(T) = \frac{\omega M_0}{2(\beta + 1)} \begin{cases} \sin \omega(T - T_1) & T_1 \leq T \leq T_1 + T^* \\ \beta \sin \omega(T - T_2) & T_2 \leq T \leq T_2 + T^* \end{cases} \quad (4.59)$$

L'andamento della funzione sorgente è riportato in Figura 4.5 per una scelta dei tempi T_1 e T_2 tale da riprodurre (in modo almeno approssimato) il *moment rate* osservato in [Christensen & Beck 1994].

Come discusso in [Dragoni & Santini 2012], l'interposizione di un intervallo di tempo arbitrario tra lo scorrimento delle due asperità è ragionevole, fatto salvo che esso sia assunto dello stesso ordine di grandezza della durata dello scorrimento T^* , essendo tale quantità sostanzialmente trascurabile nella dinamica sul lungo periodo del sistema. Laddove le due asperità siano significativamente distanziate sul piano di faglia, tale scelta può tenere conto del tempo finito richiesto al fronte della dislocazione per propagarsi dall'una all'altra.

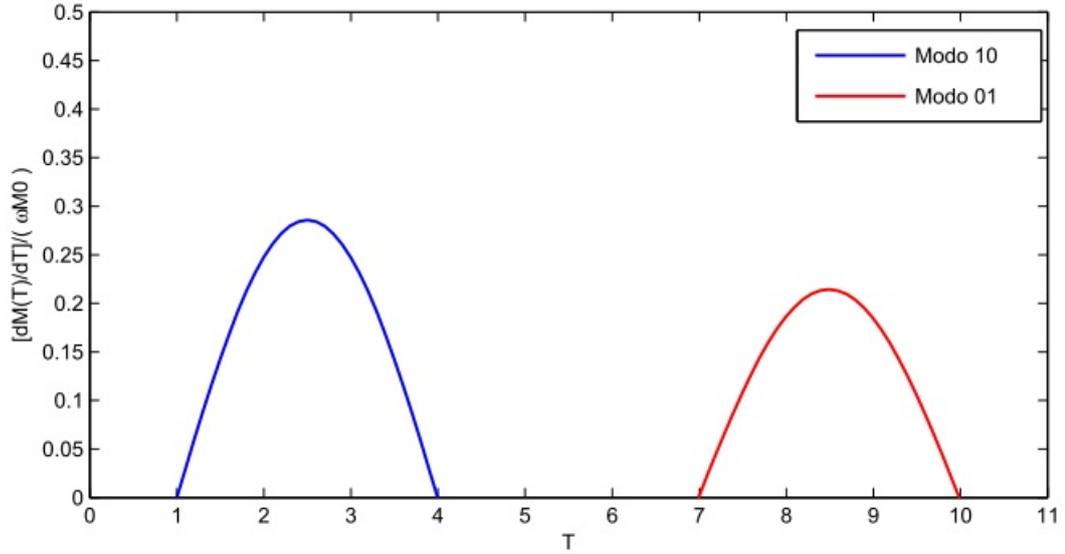


Figura 4.5: Moment rate associato alla sequenza sismica del Marzo 1964 per $T_1 = 1$ e $T_2 = T_1 + 2T^*$; in ordinata è riportata la quantità $\dot{M}(T)/(\omega M_0)$.

I valori forniti dal modello possono a questo punto essere confrontati con le osservazioni. In [Christensen & Beck 1994] è stato evidenziato come l'evento sismico in esame possa essere ricondotto a due impulsi di momento sismico (si veda la Figura 4.6): il primo, localizzato in prossimità dell'epicentro ed esteso in direzione Sud Ovest-Nord Est per circa 400 km, rilasciato nei primi 80 s di scorrimento; il secondo, di minore intensità, posto ad approssimativamente 525 km di distanza in direzione Sud Ovest rispetto all'epicentro, a 175 s dall'inizio del terremoto. La durata totale dell'evento t_e è pari a circa 240 s, mentre lo scorrimento della singola asperità avviene in un tempo $t^* \simeq 50$ s.

Il *moment rate* sviluppato nell'ambito del modello e riportato in Figura 4.5 appare anch'esso caratterizzato da due impulsi, i cui rispettivi massimi sono dati da

$$\dot{M}_{m1} \equiv \dot{M}(T_{m1}), \quad \dot{M}_{m2} \equiv \dot{M}(T_{m2}) \quad (4.60)$$

essendo

$$T_{m1} = T_1 + \frac{T^*}{2}, \quad T_{m2} = T_2 + \frac{T^*}{2} \quad (4.61)$$

Dal sistema (4.59) segue

$$\dot{M}_{m1} = \frac{\omega M_0}{2(\beta + 1)}, \quad \dot{M}_{m2} = \frac{\beta \omega M_0}{2(\beta + 1)} = \beta \dot{M}_{m1} \quad (4.62)$$

da cui, nel caso in esame,

$$\dot{M}_{m1} \simeq 0.28 \omega M_0, \quad \dot{M}_{m2} \simeq 0.21 \omega M_0 \quad (4.63)$$

Al fine di convertire queste quantità in grandezze dimensionate, si ricordi che l'equivalente adimensionale del tempo t^* osservato per la durata degli scorrimenti è dato da

$$T^* = \frac{\pi}{\omega} \simeq 2.99 \quad (4.64)$$

avendo impiegato $\omega = \sqrt{1 + \alpha} \simeq 1.05$. Di conseguenza, la durata totale dell'evento sismico può essere stimata come

$$T_e = \frac{t_e T^*}{t^*} \simeq 14.4 \quad (4.65)$$

Si possono pertanto determinare i massimi di *moment rate* dimensionale moltiplicando le (4.63) per il rapporto $T_e/t_e \simeq 0.06 \text{ s}^{-1}$: con $M_0 \simeq 6.12 \cdot 10^{22} \text{ Nm}$ si ottiene

$$\dot{M}_{m1} \simeq 1.08 \cdot 10^{21} \text{ Nm} \cdot \text{s}^{-1}, \quad \dot{M}_{m2} \simeq 8.10 \cdot 10^{20} \text{ Nm} \cdot \text{s}^{-1} \quad (4.66)$$

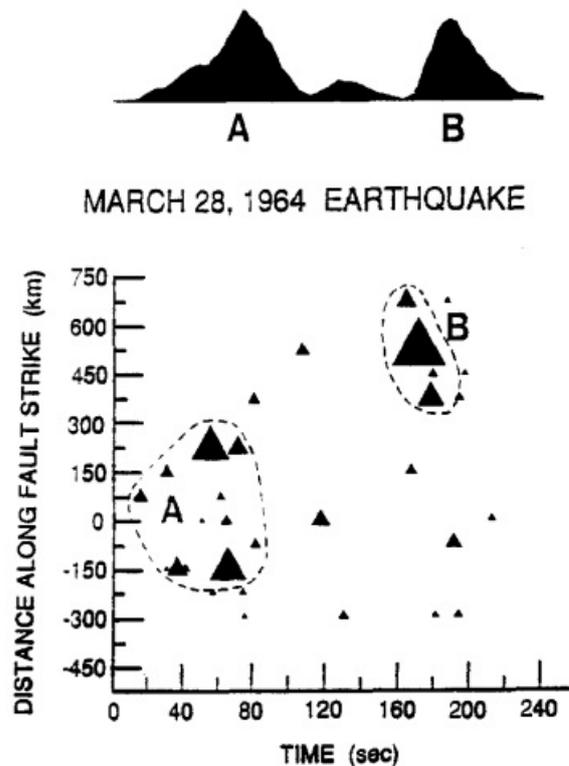


Figura 4.6: Plot spazio-temporale della distribuzione degli impulsi di momento sismico lungo la direzione di *strike*, come riportato in [Christensen & Beck 1994].

4.3 Evoluzione successiva

Al fine di determinare le possibili evoluzioni successive all'evento del Marzo 1964, è anzitutto necessario fissare le coordinate del punto P_3 in cui il sistema viene a trovarsi al termine dello scorrimento dell'asperità 2.

Dalle equazioni del moto relative al modo 01, si ha

$$\begin{cases} X_3 = X_2 = \alpha Z_1 + 1 - U \\ Y_3 = Y_2 - \beta U = \beta(1 - U) - \alpha(Z_1 + U) \\ Z_3 = Z_2 - \beta U = Z_1 + U(1 - \beta) \end{cases} \quad (4.67)$$

Al variare di $Z_1 \in [-4.6, 2.91]$, i punti P_3 definiscono un segmento S_3 di estremi

$$P_3^{inf} = (0, 0.75, -4.46), \quad P_3^{sup} = (0.74, 0, 3.04) \quad (4.68)$$

parallelo a S_1 e S_2 (vedi Figura 4.7).

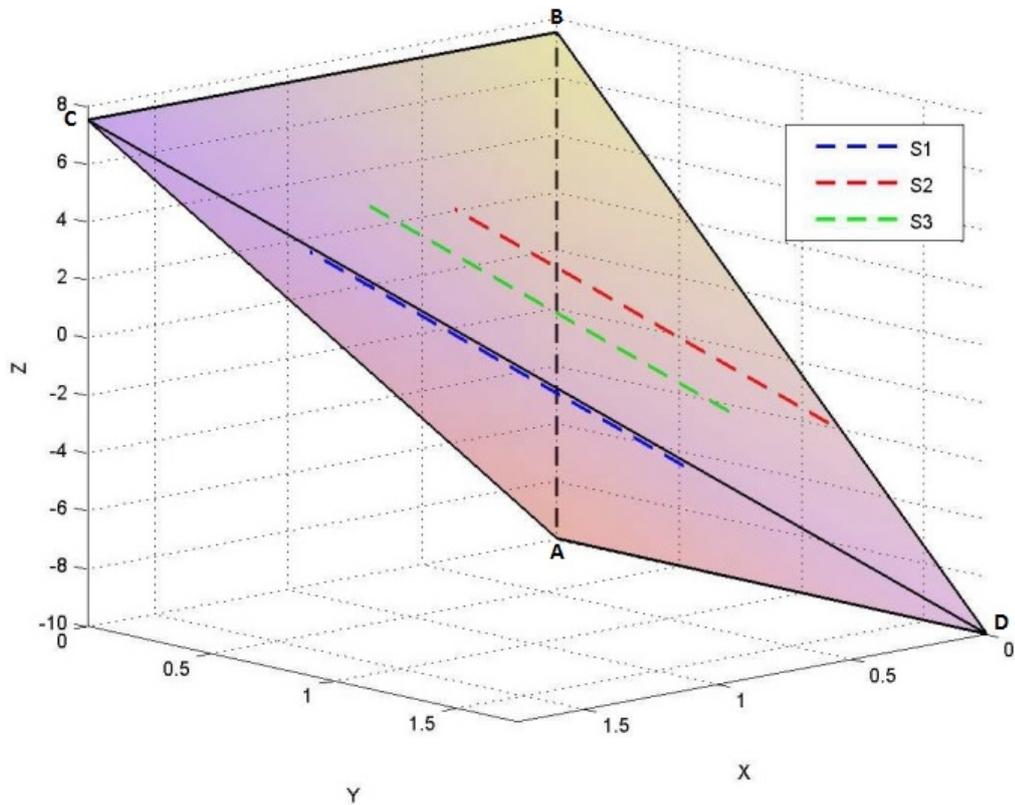


Figura 4.7: Segmenti S_1 , S_2 e S_3 .

Una volta giunto su S_3 , il sistema rientra nel modo 00: lo stato di sforzo sulle asperità riprende ad evolvere nel tempo a partire dal rapporto

$$\frac{F_2}{F_1} = \frac{\beta[U(\alpha + 1) - 1]}{U[\alpha(1 - \beta) + 1] - 1} \simeq 0.68 \quad (4.69)$$

calcolato inserendo le (4.67) nelle (4.35). Questo risultato mostra che, al termine dell'evento sismico, la trazione sull'asperità 2 risulta essere pari a poco più della metà della trazione sull'asperità 1, rapporto confrontabile con quello (4.38) esistente all'inizio della sequenza sismica, all'innescò del modo 10.

Evidentemente, lo stato del sistema dopo l'evento sismico e la sua evoluzione successiva dipende, attraverso Z_1 , dal particolare punto P_1 del segmento S_1 da cui è scaturita la sequenza del Marzo 1964:

- $-4.6 \leq Z_1 \leq 0.3 \rightarrow$ il punto P_3 si trova nel sottoinsieme \mathbf{T}_2 della *sticking region*: la nuova orbita di modo 00 che da esso si diparte termina pertanto in un punto P_4 posto sul piano Π_2 e il sistema entra nel modo 01 dopo un intervallo di tempo $\Delta T/\Theta \in [1.9, 12.7]$, crescente al crescere di Z_1 (vedi Figura 4.8);
- $0.4 \leq Z_1 \leq 2.91 \rightarrow$ il punto P_3 si trova nel sottoinsieme \mathbf{T}_1 della *sticking region*: la nuova orbita di modo 00 che da esso si diparte termina pertanto in un punto P_4 posto sul piano Π_1 e il sistema entra nel modo 10 dopo un intervallo di tempo $\Delta T/\Theta \in [6.6, 13]$, crescente al diminuire di Z_1 (vedi Figura 4.9);

Tutte le durate $\Delta T/\Theta$ del modo 00 sono state calcolate dalle (3.90)-(3.91) una volta note le coordinate di P_3 .

Nel caso particolare in cui $0.2 \leq Z_1 \leq 0.6$, si trova una sequenza più complessa che coinvolge lo scorrimento simultaneo delle due asperità: il sistema entra pertanto nel modo 11 dopo una fase iniziale di modo 00/10/01, a seconda del valore di Z_1 . La particolare sequenza che scaturisce dal modo 11 dipende da quale delle due asperità si arresta per prima: così, dal modo 11 il sistema può passare al modo 10/01/00 a seconda che ad arrestarsi siano, rispettivamente, la seconda, la prima o entrambe le asperità.

I tre casi sono esemplificati in Figura 4.10.

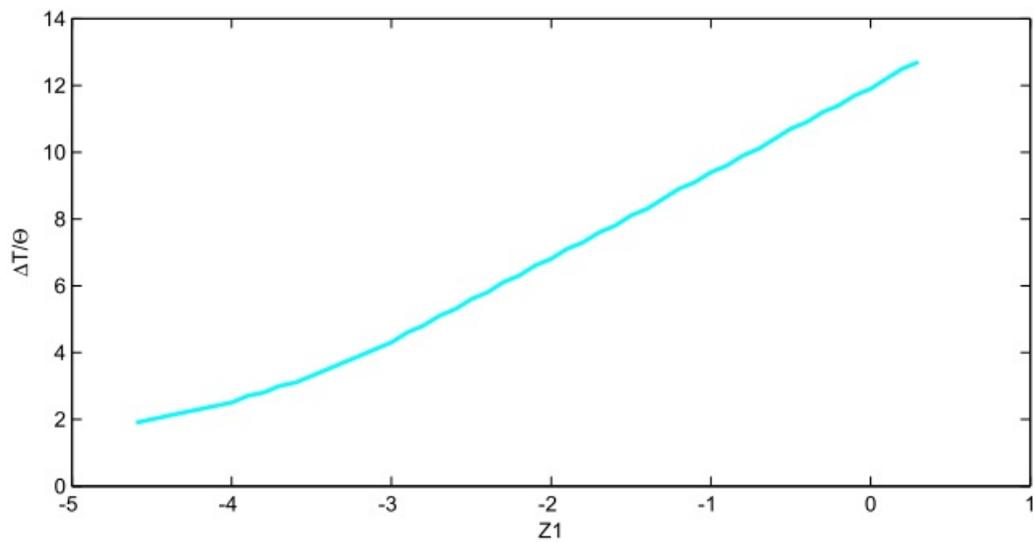


Figura 4.8: Andamento dell'intervallo di tempo $\Delta T/\Theta$ per $-4.6 \leq Z_1 \leq 0.3$ (passaggio dal modo 00 al modo 01).

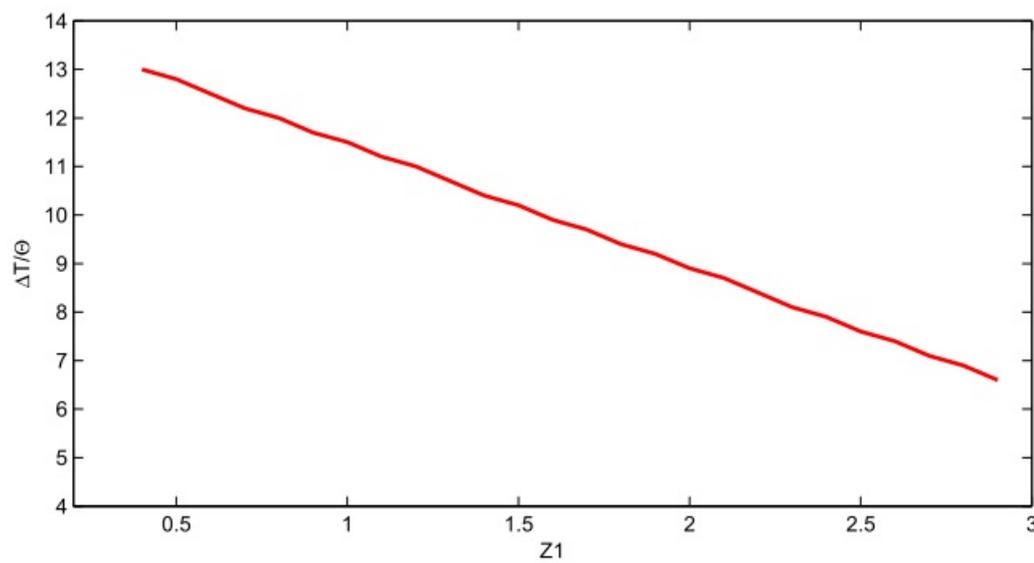
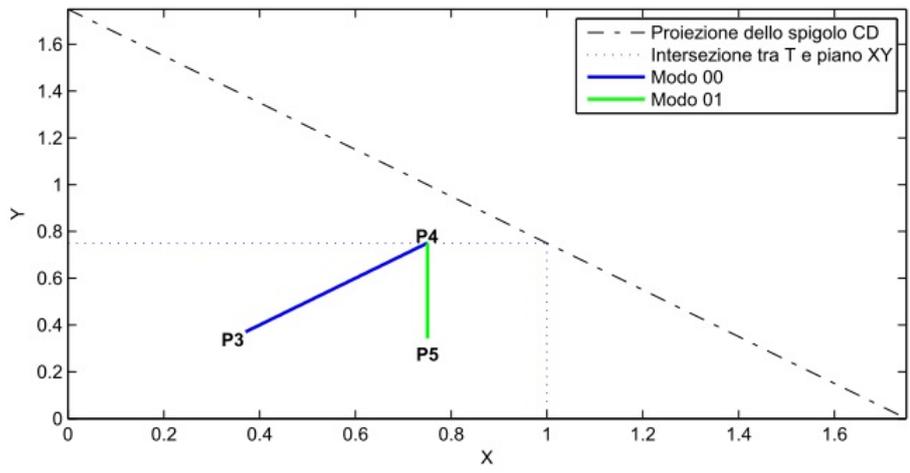
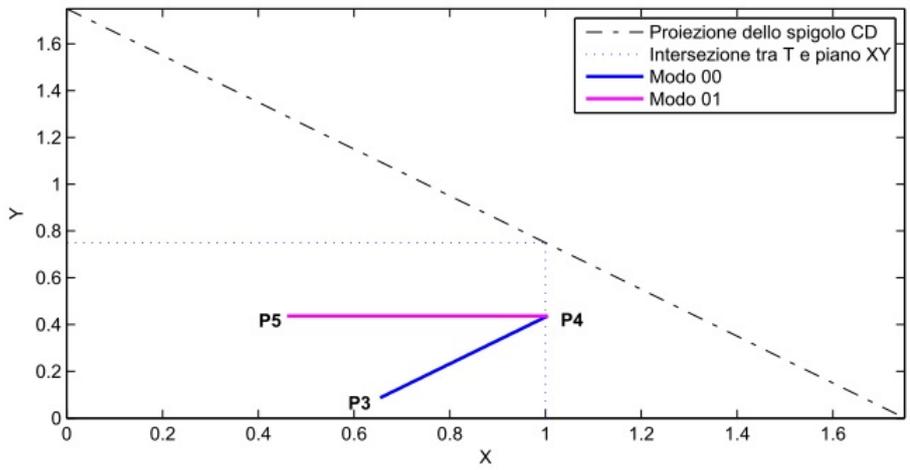


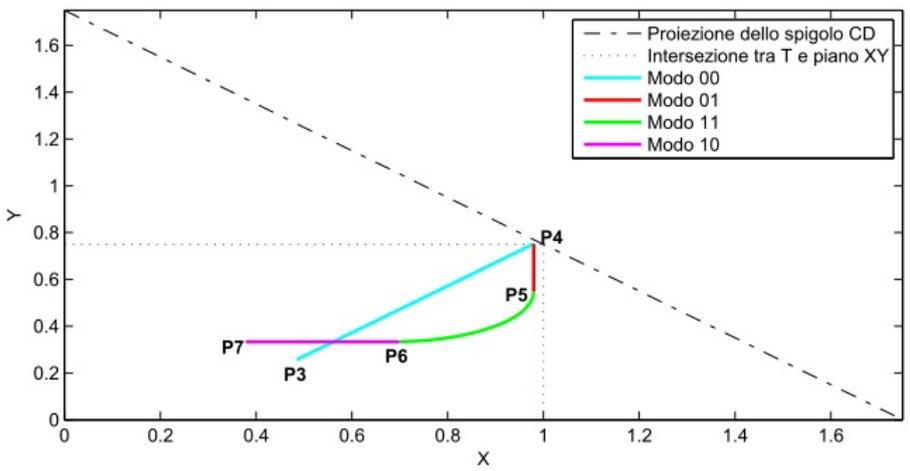
Figura 4.9: Andamento dell'intervallo di tempo $\Delta T/\Theta$ per $0.4 \leq Z_1 \leq 2.91$ (passaggio dal modo 00 al modo 10).



(a)



(b)



(c)

Figura 4.10: Evoluzione successiva all'evento del Marzo 1964: (a) $Z_1 = -0.84$: transizione dal modo 00 al modo 01; (b) $Z_1 = 2$: transizione dal modo 00 al modo 10; (c) $Z_1 = 0.3$: successione di modi 00→01→11→10.

4.3.1 Rilascio di momento sismico

Per ciascuna delle tre possibili evoluzioni successive all'evento del Marzo 1964, verrà ora calcolato il rilascio di momento sismico e la corrispondente funzione sorgente.

Innesco modo 01

Si è evidenziato che, per $Z_1 \in [-4.6, 0.2)$, si verificano le condizioni per lo scorrimento della sola asperità 2: a esso è associato un rilascio di momento sismico

$$M(T) = \frac{M_1}{U} \Delta Y(T - T_1) \quad T_1 \leq T \leq T_1 + T^* \quad (4.70)$$

dove M_1 rappresenta nuovamente il momento sismico associato al cedimento dell'asperità 1 durante la sequenza del Marzo 1964 e T_1 il tempo finito che intercorre tra l'avvio dell'evento e l'effettivo scorrimento dell'asperità 2; si ricorda poi che T^* è la durata dello scorrimento, pari a π/ω . Inserendo l'espressione di $\Delta Y(T)$ nel caso della successione 00 \rightarrow 01, si ha

$$M(T) = \frac{\beta M_1}{2} [1 - \cos \omega(T - T_1)] \quad T_1 \leq T \leq T_1 + T^* \quad (4.71)$$

Pertanto, il momento sismico complessivamente rilasciato risulta pari a

$$M_0 = M(T_1 + T^*) = \beta M_1 \simeq 2.62 \cdot 10^{22} \text{ Nm} \quad (4.72)$$

dove si è utilizzato il già citato valore $M_1 \simeq 3.5 \cdot 10^{22} \text{ Nm}$.

Per quanto riguarda il *moment rate*, si ha (Figura 4.11)

$$\dot{M}(T) = \frac{\beta \omega M_1}{2} \sin \omega(T - T_1) = \frac{\omega M_0}{2} \sin \omega(T - T_1) \quad T_1 \leq T \leq T_1 + T^* \quad (4.73)$$

Esso presenta valore massimo al tempo $T = T_1 + T^*/2$ pari a

$$\dot{M}_m = \frac{\omega M_0}{2} \quad (4.74)$$

che, in modo analogo a quanto visto precedentemente in §4.2.4, può essere dimensionalizzato tramite moltiplicazione per il rapporto $T_e/t_e \simeq 0.06 \text{ s}^{-1}$:

$$\dot{M}_m \simeq 8.25 \cdot 10^{20} \text{ Nm} \cdot \text{s}^{-1} \quad (4.75)$$

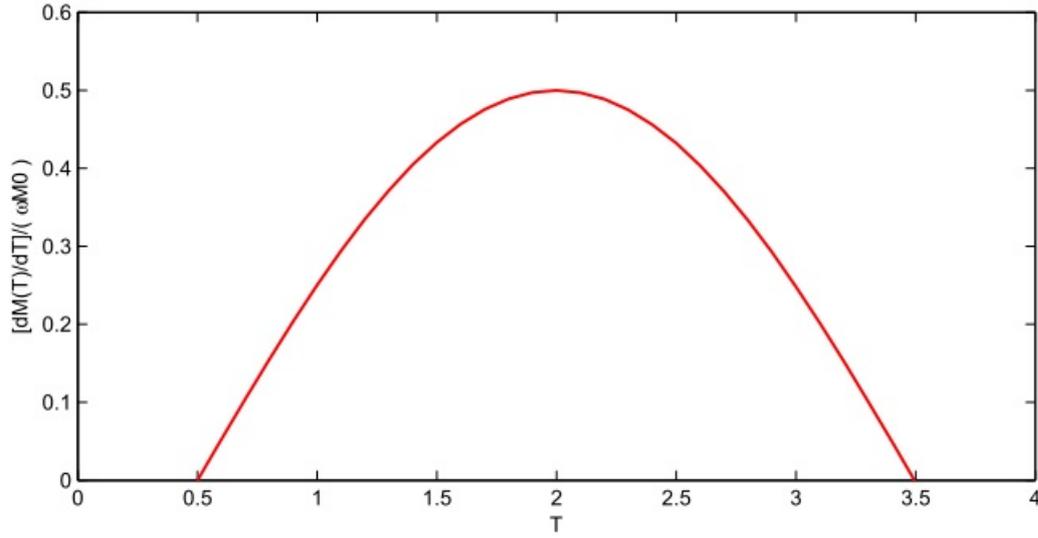


Figura 4.11: Moment rate associato al modo 01 per $T_1 = 0.5$; in ordinata è riportata la quantità $\dot{M}(T)/(\omega M_0)$.

Innesco modo 10

Laddove $Z_1 \in (0.6, 2.91]$, vengono realizzate le condizioni per lo scorrimento della sola asperità 1: a esso è associato un rilascio di momento sismico

$$M(T) = \frac{M_1}{U} \Delta X(T - T_1) \quad T_1 \leq T \leq T_1 + T^* \quad (4.76)$$

dove T_1 rappresenta il tempo finito che intercorre tra l'avvio dell'evento e l'effettivo scorrimento dell'asperità 1.

Inserendo l'espressione di $\Delta X(T)$ nel caso della successione $00 \rightarrow 10$, si ha

$$M(T) = \frac{M_1}{2} [1 - \cos \omega(T - T_1)] \quad T_1 \leq T \leq T_1 + T^* \quad (4.77)$$

Pertanto, il momento sismico complessivamente rilasciato risulta pari a

$$M_0 = M(T_1 + T^*) = M_1 \simeq 3.5 \cdot 10^{22} \text{ Nm} \quad (4.78)$$

Per quanto riguarda il *moment rate*, si ha (Figura 4.12)

$$\dot{M}(T) = \frac{\omega M_1}{2} \sin \omega(T - T_1) = \frac{\omega M_0}{2} \sin \omega(T - T_1) \quad T_1 \leq T \leq T_1 + T^* \quad (4.79)$$

Esso presenta valore massimo al tempo $T = T_1 + T^*/2$ pari a

$$\dot{M}_m = \frac{\omega M_0}{2} \quad (4.80)$$

con corrispondente valore dimensionato

$$\dot{M}_m \simeq 1.10 \cdot 10^{21} \text{ Nm} \cdot \text{s}^{-1} \quad (4.81)$$

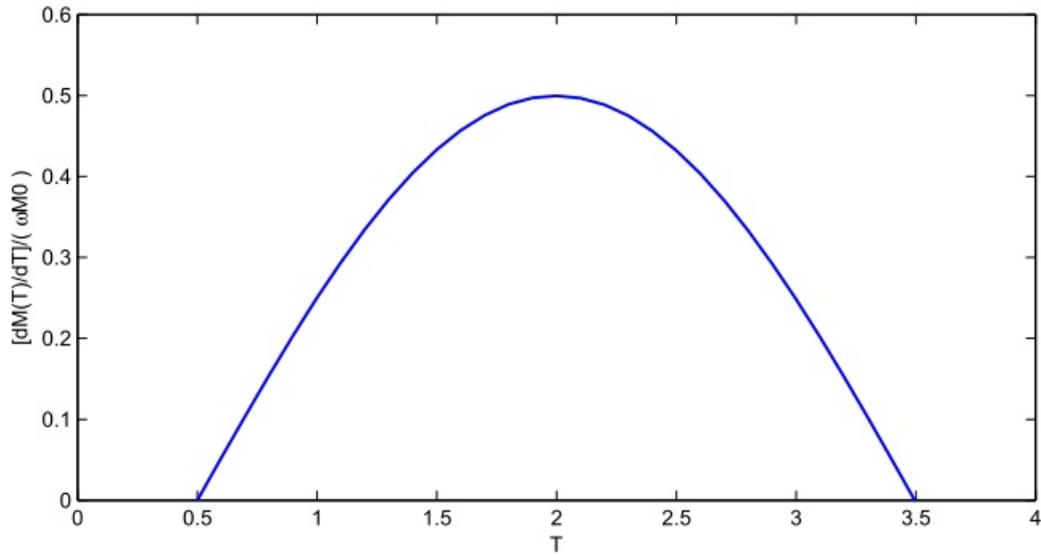


Figura 4.12: Moment rate associato al modo 10 per $T_1 = 0.5$; in ordinata è riportata la quantità $\dot{M}(T)/(\omega M_0)$.

Innesco modo 11

Nel caso particolare in cui $Z_1 \in [0.2, 0.6]$, si creano le condizioni necessarie allo scorrimento simultaneo delle due asperità. Questo può avvenire sia a partire dal modo 00 che dopo una fase iniziale di modo 01/10: verranno pertanto discusse queste tre situazioni.

Si ricordi che la durata del modo 11 deve essere sempre valutata per via numerica.

Caso I: sequenza 00 → 11 → 10 → 00

Si consideri anzitutto la sequenza di tipo 00 → 11 → 10 → 00 ottenibile in corrispondenza di $Z_1 = 0.4$: l'orbita di modo 00 che si diparte dal punto iniziale P_3 interseca il segmento CD del tetraedro \mathbf{T} , con conseguente innesco del modo 11. Il sistema vi permane per il tempo T_{11} necessario all'esaurirsi del moto dell'asperità 2, quindi prosegue nel modo 10 fino a rientrare nel modo 00 dopo un tempo T_{10} .

Il rilascio di momento sismico può essere valutato in termini della funzione

$$M(T) = \frac{M_1}{U} \begin{cases} \Delta Y_{11}(T - T_1) + \Delta X_{11}(T - T_1) & T_1 \leq T \leq T_2 \\ U_{11} + \Delta X_{10}(T - T_2) & T_2 \leq T \leq T_3 \end{cases} \quad (4.82)$$

dove si sono introdotti i tempi

$$T_2 \equiv T_1 + T_{11} \quad (4.83)$$

$$T_3 \equiv T_2 + T_{10} \quad (4.84)$$

Nello specifico, T_1 rappresenta il tempo finito che intercorre tra l'avvio dell'evento e l'effettivo scorrimento delle due asperità; U_{11} è lo scorrimento complessivo associato alla fase di modo 11; infine,

$$T_{10} = \frac{1}{\omega} \left(\pi + \arctan \frac{2\bar{V}}{\omega U_1} \right) \quad (4.85)$$

essendo

$$U_1 = \frac{2(X_5 - \alpha Z_5 - \epsilon)}{\omega^2} \quad (4.86)$$

Le coordinate X_5, Z_5 sono riferite al punto P_5 che segna la transizione dal modo 11 al modo 10, mentre $\bar{V} = \dot{X}_{11}(T_2)$ è la velocità dell'asperità 1 nella medesima posizione (al termine del modo 11).

Si osservi dunque che, benché il tempo T_{10} sia una quantità valutabile per via analitica, esso dipende dal tempo T_{11} tramite \bar{V} .

Introducendo le espressioni di $\Delta Y_{11}(T)$, $\Delta X_{11}(T)$ nel caso della successione 00 \rightarrow 11 e $\Delta X_{10}(T)$ nel caso 11 \rightarrow 10, si ottiene

$$M(T) = \frac{M_1}{U} \begin{cases} [Y_4 + X_4 - \epsilon(X_P + Y_P)][1 - \cos(T - T_1)] & T_1 \leq T \leq T_2 \\ U_{11} + \frac{U_1}{2}[1 - \cos \omega(T - T_2)] - \frac{\bar{V}}{\omega} \sin \omega(T - T_2) & T_2 \leq T \leq T_3 \end{cases} \quad (4.87)$$

Definendo $U_{10} = \Delta X_{10}(T_3)$ l'ampiezza finale dello scorrimento associato al modo 10, il momento sismico complessivamente rilasciato risulta pari a

$$M_0 = M(T_3) = \frac{M_1}{U} (U_{11} + U_{10}) \simeq 1.05 \cdot 10^{23} \text{ Nm} \quad (4.88)$$

In virtù dello scorrimento simultaneo di entrambe le asperità, questo terremoto costituisce (in base ai risultati di quest'analisi) l'evento sismico di maggiore entità che l'evoluzione successiva del sistema potrà generare.

Per quanto riguarda il *moment rate*, si ha (Figura 4.13)

$$\dot{M}(T) = \frac{M_1}{U} \begin{cases} [Y_4 + X_4 - \epsilon(X_P + Y_P)] \sin \omega(T - T_1) & T_1 \leq T \leq T_2 \\ \frac{\omega U_1}{2} \sin \omega(T - T_2) - \bar{V} \cos \omega(T - T_2) & T_2 \leq T \leq T_3 \end{cases} \quad (4.89)$$

Esso presenta valore massimo al tempo $T = T_1 + 1.6$ pari a

$$\dot{M}_m \simeq 0.91 M_1 \quad (4.90)$$

con corrispondente valore dimensionato

$$\dot{M}_m \simeq 1.91 \cdot 10^{21} \text{ Nm} \cdot \text{s}^{-1} \quad (4.91)$$

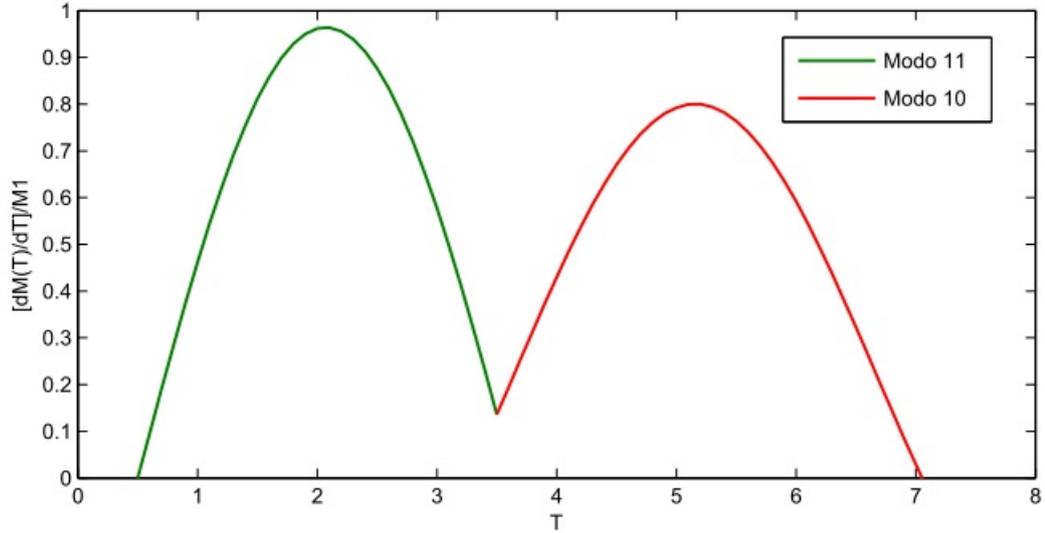


Figura 4.13: Moment rate associato alla sequenza $00 \rightarrow 11 \rightarrow 10 \rightarrow 00$ per $T_1 = 0.5$; in ordinata è riportata la quantità $\dot{M}(T)/M_1$.

Caso II: sequenza $00 \rightarrow 01 \rightarrow 11 \rightarrow 10 \rightarrow 00$

Si consideri ora una sequenza di tipo $00 \rightarrow 01 \rightarrow 11 \rightarrow 10 \rightarrow 00$ come quella graficata in Figura 4.10 ($Z_1 = 0.3$): in seguito all'intersezione con il piano Π_2 e al conseguente avvio del modo 01, l'orbita che si diparte dal punto iniziale P_3 incontra il piano Π_1 dopo un tempo $T_{01} < T^*$, ovvero si realizzano le condizioni necessarie al contemporaneo scorrimento dell'asperità 1.

Il sistema permane nel conseguente modo 11 per il tempo T_{11} necessario all'esaurirsi del moto dell'asperità 2, quindi prosegue nel modo 10 fino a rientrare nel modo 00 dopo un tempo T_{10} .

Il rilascio di momento sismico può essere valutato in termini della funzione

$$M(T) = \frac{M_1}{U} \begin{cases} \Delta Y_{01}(T - T_1) & T_1 \leq T \leq T_2 \\ U_{01} + \Delta Y_{11}(T - T_2) + \Delta X_{11}(T - T_2) & T_2 \leq T \leq T_3 \\ U_{01} + U_{11} + \Delta X_{10}(T - T_3) & T_3 \leq T \leq T_4 \end{cases} \quad (4.92)$$

dove

$$T_2 \equiv T_1 + T_{01} \quad (4.93)$$

$$T_3 \equiv T_2 + T_{11} \quad (4.94)$$

$$T_4 \equiv T_3 + T_{10} \quad (4.95)$$

Nello specifico, T_1 rappresenta il tempo finito che intercorre tra l'avvio dell'evento e l'effettivo scorrimento dell'asperità 2; U_{01} e U_{11} sono gli scorrimenti complessivi associati alle fasi di modo 01 e 11 rispettivamente; infine,

$$T_{10} = \frac{1}{\omega} \left(\pi + \arctan \frac{2\bar{V}}{\omega U_1} \right) \quad (4.96)$$

essendo

$$U_1 = \frac{2(X_6 - \alpha Z_6 - \epsilon)}{\omega^2} \quad (4.97)$$

Le coordinate X_6, Z_6 sono riferite al punto P_6 che segna la transizione dal modo 11 al modo 10, mentre $\bar{V} = \dot{X}_{11}(T_3)$ è la velocità dell'asperità 1 nella medesima posizione (al termine del modo 11).

Introducendo le espressioni di $\Delta Y_{01}(T)$ nel caso della successione $00 \rightarrow 01$, $\Delta Y_{11}(T), \Delta X_{11}(T)$ nel caso $01 \rightarrow 11$ e $\Delta X_{10}(T)$ nel caso $11 \rightarrow 10$, si ottiene

$$M(T) = \frac{M_1}{U} \begin{cases} \frac{\beta U}{2} [1 - \cos \omega(T - T_1)] & T_1 \leq T \leq T_2 \\ U_{01} + Y_5 - X_5 - \bar{V} \sin(T - T_2) - E \cos(T - T_2) & T_2 \leq T \leq T_3 \\ U_{01} + U_{11} + \frac{U_1}{2} [1 - \cos \omega(T - T_3)] - \frac{\bar{V}}{\omega} \sin \omega(T - T_3) & T_3 \leq T \leq T_4 \end{cases} \quad (4.98)$$

dove si è introdotta la costante

$$E \equiv X_5 + Y_5 - \epsilon(X_P + Y_P) \quad (4.99)$$

Definendo $U_{10} = \Delta X_{10}(T_4)$ l'ampiezza finale dello scorrimento associato al modo 10, il momento sismico complessivamente rilasciato risulta pari a

$$M_0 = M(T_4) = \frac{M_1}{U} (U_{01} + U_{11} + U_{10}) \simeq 6.51 \cdot 10^{22} \text{ Nm} \quad (4.100)$$

Per quanto riguarda il *moment rate*, si ha (Figura 4.14)

$$\dot{M}(T) = \frac{M_1}{U} \begin{cases} \frac{\beta \omega U}{2} \sin \omega(T - T_1) & T_1 \leq T \leq T_2 \\ -\bar{V} \cos(T - T_2) + E \sin(T - T_2) & T_2 \leq T \leq T_3 \\ \frac{\omega U_1}{2} \sin \omega(T - T_3) - \bar{V} \cos \omega(T - T_3) & T_3 \leq T \leq T_4 \end{cases} \quad (4.101)$$

Esso presenta valore massimo al tempo $T = T_1 + 2.5$ pari a

$$\dot{M}_m \simeq 0.68 M_1 \quad (4.102)$$

con corrispondente valore dimensionato

$$\dot{M}_m \simeq 1.43 \cdot 10^{21} \text{ Nm} \cdot \text{s}^{-1} \quad (4.103)$$

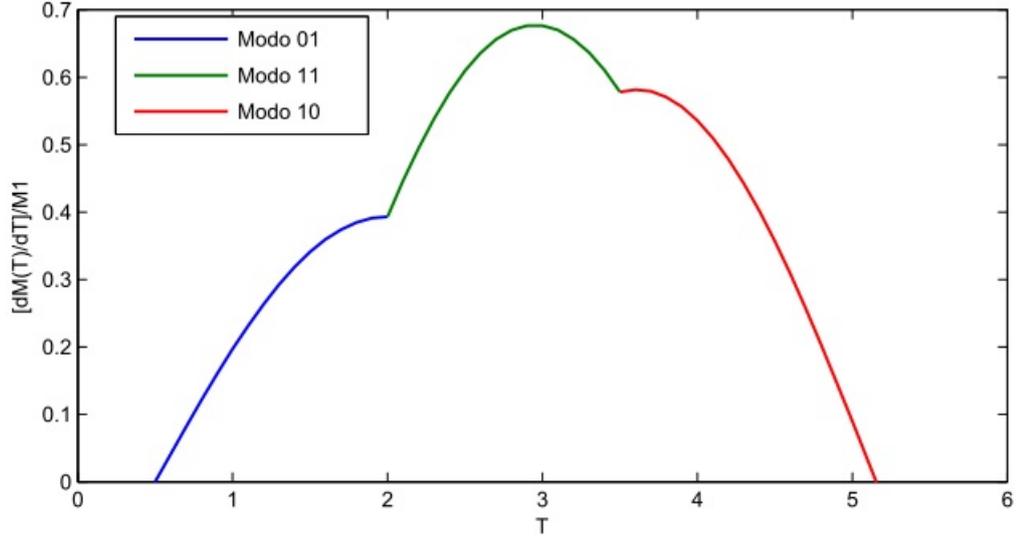


Figura 4.14: Moment rate associato alla sequenza $00 \rightarrow 01 \rightarrow 11 \rightarrow 10 \rightarrow 00$ per $T_1 = 0.5$; in ordinata è riportata la quantità $\dot{M}(T)/M_1$.

Caso III: sequenza $00 \rightarrow 10 \rightarrow 11 \rightarrow 10 \rightarrow 00$

Infine, si consideri una sequenza di tipo $00 \rightarrow 10 \rightarrow 11 \rightarrow 10 \rightarrow 00$ ottenibile per $Z_1 = 0.6$: in seguito all'intersezione con il piano Π_1 e al conseguente avvio del modo 10, l'orbita che si diparte dal punto iniziale P_3 incontra il piano Π_2 dopo un tempo $T_{10} < T^*$, ovvero si realizzano le condizioni necessarie al contemporaneo scorrimento dell'asperità 2.

Il sistema permane nel conseguente modo 11 per il tempo T_{11} necessario all'esaurirsi del moto dell'asperità 2, quindi prosegue nel modo 10 fino a rientrare nel modo 00 dopo un tempo \tilde{T}_{10} .

Il rilascio di momento sismico può essere valutato nei termini della funzione

$$M(T) = \frac{M_1}{U} \begin{cases} \Delta X_{10}(T - T_1) & T_1 \leq T \leq T_2 \\ U_{10} + \Delta Y_{11}(T - T_2) + \Delta X_{11}(T - T_2) & T_2 \leq T \leq T_3 \\ U_{10} + U_{11} + \Delta \tilde{X}_{10}(T - T_3) & T_3 \leq T \leq T_4 \end{cases} \quad (4.104)$$

dove

$$T_2 \equiv T_1 + T_{10} \quad (4.105)$$

$$T_3 \equiv T_2 + T_{11} \quad (4.106)$$

$$T_4 \equiv T_3 + \tilde{T}_{10} \quad (4.107)$$

Nello specifico, T_1 rappresenta il tempo finito che intercorre tra l'avvio dell'evento e l'effettivo scorrimento dell'asperità 1; U_{10} e U_{11} sono gli scorrimenti complessivi associati alle fasi di modo 10 e 11 rispettivamente; \tilde{T}_{10} e U_1 sono gli stessi definiti nelle (4.96) e (4.97).

Introducendo le espressioni di $\Delta X_{10}(T)$ nel caso della successione $00 \rightarrow 10$, $\Delta Y_{11}(T)$, $\Delta X_{11}(T)$ nel caso $10 \rightarrow 11$ e $\Delta \tilde{X}_{10}(T)$ nel caso $11 \rightarrow 10$, si ottiene

$$M(T) = \frac{M_1}{U} \begin{cases} \frac{U}{2}[1 - \cos \omega(T - T_1)] & T_1 \leq T \leq T_2 \\ U_{10} + Y_5 - X_5 - \bar{V} \sin(T - T_2) - E \cos(T - T_2) & T_2 \leq T \leq T_3 \\ U_{10} + U_{11} + \frac{U_1}{2}[1 - \cos \omega(T - T_3)] - \frac{\bar{V}}{\omega} \sin \omega(T - T_3) & T_3 \leq T \leq T_4 \end{cases} \quad (4.108)$$

Definendo $\tilde{U}_{10} = \Delta \tilde{X}_{10}(T_4)$ l'ampiezza finale dello scorrimento associato all'ultima fase di modo 10, il momento sismico complessivamente rilasciato risulta pari a

$$M_0 = M(T_4) = \frac{M_1}{U}(U_{10} + U_{11} + \tilde{U}_{10}) \simeq 4.54 \cdot 10^{22} \text{ Nm} \quad (4.109)$$

Per quanto riguarda il *moment rate*, si ha (Figura 4.15)

$$\dot{M}(T) = \frac{M_1}{U} \begin{cases} \frac{\omega U}{2} \sin \omega(T - T_1) & T_1 \leq T \leq T_2 \\ -\bar{V} \cos(T - T_2) + E \sin(T - T_2) & T_2 \leq T \leq T_3 \\ \frac{\omega U_1}{2} \sin \omega(T - T_3) - \bar{V} \cos \omega(T - T_3) & T_3 \leq T \leq T_4 \end{cases} \quad (4.110)$$

Esso presenta valore massimo al tempo $T = T_1 + 1.5$ pari a

$$\dot{M}_m \simeq 0.52 M_1 \quad (4.111)$$

con corrispondente valore dimensionato

$$\dot{M}_m \simeq 1.09 \cdot 10^{21} \text{ Nm} \cdot \text{s}^{-1} \quad (4.112)$$

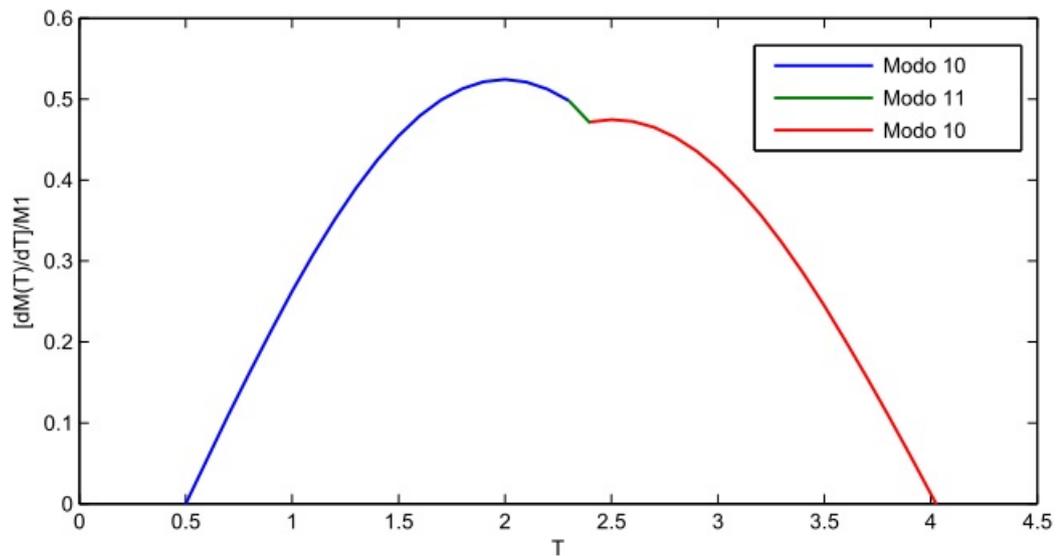


Figura 4.15: Moment rate associato alla sequenza $00 \rightarrow 10 \rightarrow 11 \rightarrow 10 \rightarrow 00$ per $T_1 = 0.5$; in ordinata è riportata la quantità $\dot{M}(T)/M_1$.

4.4 Possibili futuri terremoti

Seguendo la descrizione svolta nella precedente §4.3.1, si è potuto valutare il rilascio di momento sismico associato ai possibili futuri terremoti, in funzione del tempo ΔT richiesto (dopo l'evento del Marzo 1964) affinché si creino le corrispondenti condizioni di scorrimento delle asperità.

Come a più riprese evidenziato, il particolare prossimo evento sismico dipende dal punto iniziale P_3 della nuova orbita di modo 00, ovvero sia dallo stato di sforzo sulle due asperità in seguito al terremoto del Marzo 1964; si distinguono quindi anche in questo contesto tre possibili esiti:

Innesco modo 01

Dopo un tempo $1.9 \leq \Delta T/\Theta \leq 12.2$ può verificarsi un terremoto causato dallo scorrimento della sola asperità 2: a esso corrisponde un rilascio di momento sismico pari a circa il 43% di quello associato all'evento del Marzo 1964, $M_0 \simeq 6.12 \cdot 10^{22}$ Nm.

Innesco modo 10

Dopo un tempo $6.6 \leq \Delta T/\Theta \leq 12.2$ può verificarsi un terremoto causato dallo scorrimento della sola asperità 1: a esso corrisponde un rilascio di momento sismico pari a circa il 57% di quello associato all'evento del Marzo 1964.

Innesco modo 11

Dopo un tempo $12.5 \leq \Delta T/\Theta \leq 13$ può verificarsi un terremoto che coinvolge lo scorrimento di ambo le asperità: a esso corrisponde un rilascio di momento sismico che può assumere valori variabili, a seconda della particolare sequenza generata. Il caso in cui il sistema passa direttamente dal modo 00 al modo 11 costituisce l'evento di massima entità, con un momento sismico pari a circa il 172% di quello associato all'evento del Marzo 1964 dopo un tempo $\Delta T/\Theta \simeq 13$.

Per riassumere, si noti anzitutto che, in base alle definizioni

$$T \equiv \sqrt{\frac{K}{m}}t, \quad \Theta \equiv \sqrt{\frac{K}{m}}\tau \quad (4.113)$$

il rapporto T/Θ è uguale a t/τ : questa osservazione consente di tradurre i risultati ottenuti in termini dimensionati, ricordando che, in base alle osservazioni, $\tau \simeq 30$ a.

Fissando l'origine dei tempi al termine dell'evento sismico del Marzo 1964, l'analisi condotta mostra che il sistema composto dalle asperità di Prince William Sound e Kodiak Island potrà dare luogo a un nuovo terremoto dopo un tempo t compreso fra circa 57 e 390 anni.

A seconda che esso sia determinato dal cedimento di una o di entrambe le asperità, il momento sismico rilasciato potrà assumere valori compresi tra un minimo di $2.62 \cdot 10^{22}$ Nm e un massimo di $1.05 \cdot 10^{23}$ Nm.

4.4.1 Gli studi precedenti

Il grande terremoto verificatosi in Alaska nel Marzo 1964 è stato oggetto di applicazione anche in due lavori precedenti, che costituiscono un naturale termine di paragone per la presente tesi: [Dragoni & Santini 2012] e [Amendola & Dragoni 2013].

In [Dragoni & Santini 2012] la combinazione delle osservazioni con le già citate regole di corrispondenza ha reso possibile confinare lo stato del sistema precedente l'evento del 1964 a un ben preciso sottoinsieme della *sticking region* \mathbf{Q} (§ 2.2.1). Trascurando possibili scorrimenti asismici successivi al terremoto, perturbazioni esterne dovute all'interazione con altri sistemi di faglie e variazioni di lungo periodo nello *strain rate* tettonico, il modello prevede che il prossimo evento sismico

generato da questo sistema sarà di minore entità rispetto a quello del 1964, in quanto associato allo scorrimento della sola asperità di Kodiak Island; esso si verificherà circa 346 anni dopo il 1964.

Per quanto riguarda invece il modello studiato in [Amendola & Dragoni 2013], la presenza di accoppiamento viscoelastico si traduce in un grado di libertà aggiuntivo (espresso dalla variabile Z) rispetto al caso puramente elastico. Pertanto, a differenza di quanto ottenuto in [Dragoni & Santini 2012], non risulta possibile identificare in modo univoco lo stato del sistema da cui è scaturito l'evento del 1964 né quello raggiunto al suo termine: una discriminazione può essere fatta solo una volta scelto un particolare punto iniziale P_0 .

Dal momento che il terremoto è stato generato dall'iniziale scorrimento dell'asperità di Prince William Sound, seguito dallo scorrimento dell'asperità di Kodiak Island, gli autori hanno considerato, a titolo di esempio, uno dei punti P_0 che portano alla sequenza di modi osservata.

Anche nel caso del modello asimmetrico qui costruito è possibile circoscrivere in modo univoco le caratteristiche del futuro evento sismico solo dopo una scelta del punto iniziale P_0 .

Infatti, a seconda dello stato di sforzo presente sulle due asperità al termine della sequenza del Marzo 1964 (ovvero, a seconda della posizione del punto rappresentativo del sistema sul segmento S_3), l'evoluzione successiva del sistema potrà portare a tre distinti esiti: il prossimo terremoto potrà così essere prodotto dallo scorrimento della sola asperità di Prince William Sound, di Kodiak Island o di entrambe.

Va inoltre sottolineato che nel modello con accoppiamento viscoelastico (sia simmetrico che asimmetrico) sono possibili distribuzioni di sforzo diverse dalla particolare distribuzione che nel modello con accoppiamento elastico puro porta alla sequenza di modi considerata: tali distribuzioni producono tempi intersismici anche di soli 50 anni dopo il Marzo 1964.

Confronto con il caso elastico

Ci si può ora chiedere se il modello viscoelastico asimmetrico presenti risultati compatibili con quanto trovato in [Dragoni & Santini 2012] per quanto concerne l'analisi del sistema di asperità di Prince William Sound e Kodiak Island.

A tal fine, è anzitutto necessario ricordare che, nel modello viscoelastico, è sufficiente porre

$$Z = Y - X, \quad \Theta \longrightarrow +\infty \quad (4.114)$$

per ricondursi a una forma di accoppiamento puramente elastico tra le asperità.

Lo studio condotto in [Dragoni & Santini 2012] ha permesso di determinare la differenza $Y - X$ tra le trazioni agenti sulle due asperità all'avvio dell'evento sismico del Marzo 1964, pari a -0.253: ciò corrisponde ad affermare che, tra tutti i possibili stati del sistema appartenenti al segmento S_1 , il modello elastico assume $Z_1 = -0.253$.

Come discusso in §4.3, per tale valore di Z_1 il modello viscoelastico prevede che il prossimo terremoto sarà generato dallo scorrimento della sola asperità di Kodiak Island, dunque in perfetto accordo con quanto trovato in [Dragoni & Santini 2012].

Fissato Z_1 , viene a essere univocamente identificato anche lo stato del sistema al termine dell'evento sismico, ovvero giacente sul segmento S_3 : utilizzando la (4.67) con $Z_1 = -0.253$, si ha infatti

$$Z_3 = Z_1 + U(1 - \beta) \simeq -0.117 \quad (4.115)$$

risultato pienamente coerente con quanto determinato in [Dragoni & Santini 2012] per la differenza tra le trazioni agenti sulle due asperità al termine dell'evento sismico.

Per valutare l'effetto dell'accoppiamento viscoelastico sul tempo di occorrenza del prossimo terremoto, è possibile basarsi su quanto sviluppato in §3.4, studiando la differenza tra il tempo di occorrenza dello scorrimento nel caso viscoelastico e nel caso elastico: nel caso particolare in cui si consideri lo scorrimento della sola asperità 2, tale differenza è stata definita come la quantità

$$\Delta\tilde{T}_2(X, Y, Z) = \tilde{T}_2 - T_2^{el} = \Theta W(\gamma_2) + \frac{\alpha(Y - X)}{V} \quad (4.116)$$

dove

$$\gamma_2 = -\frac{\alpha Z}{V\Theta} e^{(Y-\beta)/V\Theta} \quad (4.117)$$

Si ricorda che valori positivi di $\Delta\tilde{T}_2$ corrispondono alla posticipazione dell'evento sismico, mentre valori negativi indicano un'anticipazione.

Valutando la (4.116) per

$$X = X_3 = \alpha Z_1 + 1 - U \quad (4.118)$$

$$Y = Y_3 = \beta(1 - U) - \alpha(Z_1 + U) \quad (4.119)$$

$$Z = Z_3 \quad (4.120)$$

con $Z_1 = -0.253$ e $Z_3 = -0.117$, si ha

$$\Delta \tilde{T}_2 \simeq -0.3 \Theta \quad (4.121)$$

Quindi, per $Z_1 = -0.253$, dopo l'evento del 1964 il sistema si trova in un particolare stato del segmento S_3 la cui evoluzione successiva produrrà un nuovo terremoto in anticipo rispetto all'equivalente elastico.

In particolare, il tempo di occorrenza del prossimo terremoto generato dallo scorrimento dell'asperità 2, in base alla (3.82), è dato da

$$\tilde{T}_2 = \Theta W(\gamma_2) + \frac{\beta - Y_3}{V} \simeq 11.12 \Theta \quad (4.122)$$

ovvero, in termini dimensionati,

$$\tilde{t}_2 = 11.12 \tau \simeq 334 \text{ a} \quad (4.123)$$

Nel caso di accoppiamento elastico puro, il tempo di occorrenza del prossimo terremoto deve allora valere, in base alla (4.121),

$$t_2^{el} = \tilde{t}_2 + 0.3 \tau \simeq 343 \text{ a} \quad (4.124)$$

risultato in accordo con $t_2^{el} = 346 \text{ a}$, trovato in [Dragoni & Santini 2012], a meno degli errori di approssimazione.

In conclusione, la presenza dell'accoppiamento viscoelastico porta a una riduzione di circa 10 anni del tempo di occorrenza rispetto al caso puramente elastico.

Conclusioni

Scopo della presente tesi è stato quello di analizzare l'evoluzione dinamica di una faglia dotata di due asperità caratterizzate da diverso attrito, indagando in particolare l'effetto di un meccanismo di accoppiamento viscoelastico tra di esse. L'insieme delle due asperità è stato assimilato a un sistema dinamico discreto, di cui si sono studiate le principali proprietà: anzitutto, in base alle assunzioni del modello, la *sticking region* del sistema è stata identificata come un tetraedro nello spazio delle variabili di stato, con volume inversamente proporzionale al grado di accoppiamento delle asperità (circostanza, questa, già verificata anche in studi precedenti). Le condizioni per il cedimento delle asperità vengono raggiunte quando l'orbita del punto rappresentativo del sistema interseca due specifiche facce di suddetto tetraedro, segnando così la transizione da regime statico a regime dinamico, con il conseguente verificarsi di un evento sismico.

In particolare, si sono potute discriminare, all'interno della *sticking region*, due regioni cui il punto rappresentativo del sistema deve inizialmente appartenere per innescare lo scorrimento della prima o della seconda asperità.

E' stato poi possibile individuare quattro distinti modi dinamici per il sistema, corrispondenti ad asperità ferme, scorrimento di una sola asperità e scorrimento simultaneo di entrambe le asperità; per ciascuno di questi modi sono state definite le relative equazioni del moto, la cui soluzione è stata quindi fornita in forma analitica e rappresentata graficamente.

Per quanto concerne l'accoppiamento viscoelastico tra le asperità, si è evidenziato come il trasferimento di sforzo a esso associato possa provocare l'anticipo o il ritardo degli eventi sismici generati dal sistema rispetto al caso di accoppiamento puramente elastico. Il contributo alla velocità di crescita della trazione dovuto all'accoppiamento si riduce sempre in valore assoluto, come conseguenza del rilassamento viscoelastico; tuttavia, il suo segno può essere uguale od opposto a quello del contributo tettonico. Quindi la velocità può risultare maggiore o minore di

quella del caso elastico e produrre un anticipo o un ritardo dell'evento rispetto al caso elastico. Fattore determinante per quantificare quest'interazione risulta essere il prodotto tra velocità di caricamento tettonico e tempo caratteristico di rilassamento: l'effetto viscoelastico appare tanto più rilevante quanto più tale prodotto è piccolo rispetto all'unità.

Il modello è stato applicato a uno dei terremoti più grandi del XX secolo, verificatosi in Alaska nel 1964 e prodotto dallo scorrimento di due asperità.

Determinati i parametri del sistema a partire dai dati sismologici e geodetici disponibili e individuata la successione di modi dinamici corrispondente all'evento sismico osservato, è stato possibile caratterizzare lo stato di sforzo presente sulla faglia all'avvio dell'evento, identificando il sottoinsieme degli stati del sistema tale da condurre al terremoto osservato: immediatamente prima dell'evento, tutti questi stati erano caratterizzati dallo stesso valore del rapporto tra le trazioni agenti sulle asperità.

In modo analogo è stato caratterizzato lo stato di sforzo raggiunto al termine dell'evento, anch'esso contenuto in un sottoinsieme caratterizzato dallo stesso valore del rapporto tra le trazioni sulle asperità.

E' stata inoltre determinata per via analitica la funzione sorgente associata al terremoto: tenendo conto delle assunzioni del modello, essa approssima in maniera soddisfacente la funzione sorgente ricavata dalle osservazioni sismologiche.

Una volta individuato l'insieme degli stati, compatibili con la sequenza di modi dinamici associata all'evento sismico, in cui il sistema può trovarsi al termine dell'evento, è stata analizzata la possibile evoluzione futura della faglia in questione, sottolineando il fatto che essa può essere discriminata in modo univoco solo conoscendo con esattezza lo stato del sistema immediatamente dopo il terremoto del 1964.

Infine, è stato effettuato il confronto con un modello puramente elastico caratterizzato dagli stessi valori delle trazioni sulle asperità subito dopo il terremoto. Il confronto ha permesso di evidenziare l'effetto dell'accoppiamento viscoelastico sul tempo di occorrenza del prossimo terremoto prodotto dal sistema delle due asperità: la presenza di un processo di rilassamento di questo tipo porta ad anticipare di circa 10 anni il prossimo evento sismico, rispetto a quanto previsto nel caso di accoppiamento elastico puro.

Bibliografia

Amendola, A. & Dragoni, M., “Dynamics of a two-fault system with viscoelastic coupling”, *Nonlinear Processes in Geophysics*, 20, 1-10, 2013.

Belardinelli, M.E. & Belardinelli, E., “The quasi-static approximation of the spring-slider motion”, *Nonlinear Processes in Geophysics*, 3, 143-149, 1996.

Boschi, E. & Dragoni, M., “Sismologia”, *UTET edizioni*, 315 pp., 1999.

Bürgmann, R. & Dresen, G., “Rheology of the Lower Crust and Upper Mantle: Evidence from Rock Mechanics, Geodesy, and Field Observations”, *Annual Review of Earth and Planetary Sciences*, 36, 531-567, 2008.

Burridge, R. & Knopoff, L., “Model and theoretical seismicity”, *Bulletin of the Seismological Society of America*, 57, 341-371, 1967.

Byerlee, J., “Friction of Rocks”, *Pageoph*, 116, 615-626, 1978.

Carlson, J.M. & Langer, J.S., “Properties of earthquakes generated by fault dynamics”, *Physical Review Letters*, 62, 2632-2635, 1989.

Carlson, J.M. & Langer, J.S., “Mechanical model of an earthquake fault”, *Physical Review A*, 40, 6470-6484, 1989.

Carlson, J.M., Langer, J.S., Shaw, B.E. & Tang, C., “Intrinsic properties of a Burridge-Knopoff model of an earthquake fault”, *Physical Review A*, 44, 884-897, 1991.

Carter, N.L., “Steady State Flow of Rocks”, *Reviews of Geophysics and Space Physics*, 14, 301-360, 1976.

Christensen, R.M., “Theory of Viscoelasticity: An introduction”, *Academic Press*, 245 pp., 1971.

- Christensen, D.H. & Beck, S.L., “The rupture process and tectonic implications of the Great 1964 Prince William Sound earthquake”, *Pageoph*, 142, 29-53, 1994.
- DeMets, C. & Dixon, T.H., “New kinematic models for Pacific-North America motion from 3 Ma to present, I: Evidence for steady-motion and biases in the NUVEL-1A model”, *Geophysical Research Letters*, 13, 1921-1924, 1999.
- Di Bernardo, M., Budd, C.J., Champneys, A.R. & Kowalczyk, P., “Piecewise-smooth Dynamical Systems - Theory and Applications”, *Applied Mathematical Sciences*, 483 pp., 2008.
- Dieterich, J., “Time-dependent friction as a possible mechanism for aftershocks”, *Journal of Geophysical Research*, 77, 3771-3781, 1972.
- Dieterich, J., “A constitutive law for rate of earthquake production and its application to earthquake clustering”, *Journal of Geophysical Research*, 99, 2601-2618, 1994.
- Dragoni, M. & Piombo, A., “Dynamics of a seismogenic fault subject to variable strain rate”, *Nonlinear Processes in Geophysics*, 18, 431-439, 2011.
- Dragoni, M. & Santini, S., “Simulation of the long-term behaviour of a fault with two asperities”, *Nonlinear Processes in Geophysics*, 17, 777-784, 2010.
- Dragoni, M. & Santini, S., “Conditions for large earthquakes in a two-asperity fault model”, *Nonlinear Processes in Geophysics*, 18, 709-717, 2011.
- Dragoni, M. & Santini, S., “Long-term dynamics of a fault with two asperities of different strengths”, *Geophysical Journal International*, 191, 1457-1467, 2012.
- Dragoni, M. & Santini, S., “Source functions of a two-asperity fault model”, *Geophysical Journal International*, 1, 1-10, 2014.
- Dziewonski, A.M. & Anderson, D.L., “Preliminary reference Earth model”, *Physics of the Earth and Planetary Interiors*, 25, 297-356, 1981.
- Erickson, B., Birnir, B. & Lavallée, D., “A model for aperiodicity in earthquakes”, *Nonlinear Processes in Geophysics*, 15, 1-12, 2008.
- Filippov, A.F., “Differential equations with discontinuous righthand sides”, *Kluwer Academic Publishers*, 307 pp., 1988.

- Galvanetto, U., “Some discontinuous bifurcations in a two-block stick-slip system”, *Journal of Sound and Vibration*, 248, 653-669, 2001.
- Hainzl, S., Zöller, G. & Kurths, J., “Similar power laws for foreshock and aftershock sequences in a spring-block model for earthquakes ”, *Journal of Geophysical Research*, 104, 7243-7253, 1999.
- Harris, R.A., “Introduction to special section: Stress triggers, stress shadows, and implications for seismic hazard”, *Journal of Geophysical Research*, 103, 24,347-24,358, 1998.
- He, C., “Interaction between two sliders in a system with rate- and state-dependent friction”, *Science in China (Series D)*, 46, 67-74, 2003.
- Huang, J. & Turcotte, D.L., “Are earthquakes an example of deterministic chaos?”, *Geophysical Research Letters*, 17, 223-226, 1990.
- Huang, J. & Turcotte, D.L., “Evidence for chaotic fault interactions in the seismicity of the San Andreas fault and Nankai trough”, *Nature*, 348, 234-236, 1990.
- Huang, J. & Turcotte, D.L., “Chaotic seismic faulting with mass- spring model and velocity-weakening friction”, *Pure Appl. Geophys*, 138, 569–589, 1992.
- Huang, J., Narkounskaia, G. & Turcotte, D.L., “A cellular-automata, slider-block model for earthquakes II. Demonstration of self-organized criticality for a 2-D system”, *Geophysical Journal International*, 111, 259-269, 1992.
- Johnson, J.M., Holdahl, S.R., Satake, K. & Sauber, J., “The 1964 Prince William Sound earthquake: joint inversion of tsunami and geodetic data”, *Journal of Geophysical Research*, 101, 523-532, 1996.
- Kanamori, H., “The energy release in great earthquakes”, *Journal of Geophysical Research*, 82, 2981-2987, 1977.
- Kanamori, H., “Use of seismic radiation to infer source parameters”, *USGS Open File Report*, 78, 283-318, 1978.
- Kirby, S.H., “Rheology of the Lithosphere”, *Reviews of Geophysics and Space Physics*, 21, 1458-1487, 1983.
- Kirby, S.H. & Kronenberg, A.K., “Rheology of the Lithosphere: Selected Topics”, *Reviews of Geophysics*, 25, 1219-1244, 1987.

- Lay, T. & Kanamori, H., “An asperity model of large earthquake sequences”, *Earthquake Prediction*, 579-592, 1981.
- Lay, T., Kanamori, H. & Ruff, L., “The asperity model and the nature of large subduction zone earthquakes”, *Earthquake Prediction Research*, 1, 3-71, 1982.
- Lynch, J.C., Bürgmann, R., Richards, M.A. & Ferencz, R.M., “When faults communicate: Viscoelastic coupling and earthquake clustering in a simple two-fault system”, *Geophysical Research Letters*, 30, 1270, 2003.
- Nakanishi, H., “Cellular-automaton model of earthquakes with deterministic dynamics”, *Physical Review A*, 41, 7086-7089, 1990.
- Nakanishi, H., “Statistical properties of the cellular-automaton model for earthquakes”, *Physical Review A*, 43, 6613-6621, 1991.
- Nakanishi, H., “Complex behavior in earthquakes dynamics”, *International Journal of Modern Physics B*, 12, 273-284, 1998.
- Narkounskaia, G. & Turcotte, D.L., “A cellular-automata, slider-block model for earthquakes I. Demonstration of chaotic behaviour for a low-order system ”, *Geophysical Journal International*, 111, 250-258, 1992.
- Nishimura, T. & Thatcher, W., “Rheology of the lithosphere inferred from postseismic uplift following the 1959 Hebgen Lake earthquake”, *Journal of Geophysical Research*, 108, 12,1-12,12, 2003.
- Nussbaum, J. & Ruina, A., “A Two Degree-of-Freedom Earthquake Model with Static/Dynamic Friction”, *Pageoph*, 125, 629-656, 1987.
- Ott, E., “Chaos in Dynamical Systems”, *Cambridge University Press*, 385 pp., 1993.
- Pelletier, J.D., “Spring-block models of seismicity: Review and analysis of a structurally heterogeneous model coupled to a viscous asthenosphere”, *GeoComplexity and the Physics of Earthquake*, 120, 27-42, 2000.
- Ruff, L.J., “Fault asperities inferred from seismic body waves”, *Earthquakes: Observation, Theory and Interpretation*, 251-276, 1983.
- Ruina, A., “Slip Instability and State Variable Friction Laws”, *Journal of Geophysical Research*, 88, 10,359-10,370, 1983.

- Santini, S., Dragoni, M. & Spada, G., “Asperity distribution of the 1964 Great Alaska earthquake and its relation to subsequent seismicity in the region”, *Tectonophysics*, 367, 219-233, 2003.
- Scholz, C.H., “The Mechanics of Earthquakes and Faulting”, *Cambridge University Press*, 439 pp., 1990.
- Scholz, C.H. & Engelder, J.T., “The role of asperity indentation and ploughing in rock friction-I: asperity creep and stick-slip”, *Int. J. Rock. Mech. Min. Sci. & Geomech.*, 13, 149-164, 1976.
- Schubert, D.L. & Turcotte, G., “Geodynamics”, *Cambridge University Press*, 472 pp., 2002.
- Stacy, S., Gomberg, J. & Cocco, M., “Introduction to special section: Stress transfer, earthquake triggering, and time-dependent seismic hazard”, *Journal of Geophysical Research*, 110, 1-12, 2005.
- Stein, R.S., “The role of stress transfer in earthquake occurrence”, *Nature*, 402, 605-609, 1999.
- Tian, Y. & Zhao, D., “Seismic anisotropy and heterogeneity in the Alaska subduction zone”, *Geophysical Journal International*, 190, 629-649, 2012.
- Zweck, C., Cohen, S.C. & Freymueller, J.T., “The 1964 great Alaska earthquake: present day and cumulative postseismic deformation in the western Kenai Peninsula”, *Physics of the Earth and Planetary Interiors*, 132, 5-20, 2002.
- Weatherley, D. & Abe, S., “Earthquake statistics in a Block Slider Model and a fully dynamic Fault Model”, *Nonlinear Processes in Geophysics*, 11, 553-560, 2004.