

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI
BOLOGNA

SCUOLA DI SCIENZE
Corso di Laurea in Matematica

UN'INTERPRETAZIONE DEL
MODELLO CLASSICO DI
RETINEX SULLA BASE
DELLA FUNZIONALITÀ DEL LGN

Tesi di Laurea in Analisi Matematica

Relatore:
Chiar.ma Prof.ssa
GIOVANNA CITTI

Presentata da:
ROSANNA TURRISI

Sessione I
Anno Accademico 2013/2014

*Così si persero persin le ossa di Malpelo,
e i ragazzi della cava abbassano la voce
quando parlano di lui nel sotterraneo,
'ché hanno paura di vederselo comparire dinanzi,
coi capelli rossi e gli occhiacci grigi.*

(Giovanni Verga, "Rosso Malpelo" da "Vita dei campi", 1980)

Introduzione

L'attività percettiva non è una registrazione accurata di ciò che è presente nel mondo osservato, non è un ottuso meccanismo di registrazione di dati ma piuttosto un complesso e sofisticato meccanismo al cui funzionamento concorre quasi una metà della corteccia.

La percezione, in particolare quella visiva, è dunque un processo cognitivo considerato come il concatenarsi del processo di raccolta ed elaborazione delle sensazioni attraverso le quali percepiamo il mondo istantaneo, di trasformazione e organizzazione delle informazioni che vengono, infine, inviate al sistema motorio e cognitivo. Ne consegue che il mondo fenomenico, cioè l'insieme dei percetti, ed il mondo reale non sempre coincidono.

Analizziamo in particolare il fenomeno di completamento percettivo. Ci sono due tipi di completamento che il cervello umano mette in atto: il completamento modale, che avviene quando le parti interpolate dell'immagine sono percepite come unità e con la stessa modalità della visione (come la creazione di contorni illusori), ed il completamento amodale in cui vengono ricostruiti mentalmente i contorni o la configurazione di oggetti parzialmente occlusi. Un classico esempio è il triangolo di Kanizsa rappresentato in figura 1.

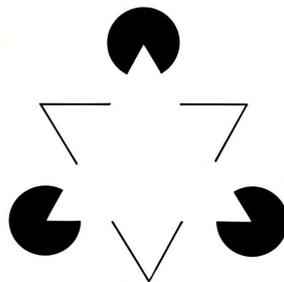


Figura 1: Triangolo di Kanizsa [10]

Qui sono presenti entrambi i tipi di completamento. Più precisamente, la comparsa del triangolo centrale bianco rappresenta un esempio di completamento modale mentre i tre dischi pieni ed il triangolo nascosto da quello precedentemente preso in considerazione, sono dei casi di completamento amodale.

Max Wertheimer, caposcuola della Gestalt, nel 1923 pubblicò un lavoro col quale affermava che il nostro sistema nervoso è predisposto ad accorpate elementi, in base a dei meccanismi innati, secondo delle regole ben precise dette “principi dell’organizzazione percettiva”. Secondo lo stesso Wertheimer, oltre a tali meccanismi innati, concorre all’attività percettiva l’esperienza passata. Questa influenza soprattutto la percezione del colore e della luce.

Le dimensioni fisiche della luce sono la *luminanza*, che specifica la quantità di luce che colpisce una determinata superficie, e la *riflettanza*, che riguarda la proprietà che una superficie ha di riflettere più o meno luce. Le dimensioni fenomeniche della luce sono invece:

- la *chiarezza* (luminanza apparente): si riferisce all’impressione che l’osservatore ha dell’intensità e dei mutamenti nella luce che colpisce gli oggetti;
- la *bianchezza* (riflettanza apparente): si riferisce all’impressione che l’osservatore ha del diverso colore degli oggetti a parità di illuminazione.

Il nostro sistema percettivo è sensibile al contrasto ed opera mantenendo costante la bianchezza nonostante cambino i valori di luminanza della immagine retinica.

Hans Wallach, nel 1948, aveva posto in una stanza completamente buia quattro proiettori, a intensità variabile, ognuno dei quali proiettava un fascio di luce che si distribuiva su di uno schermo. Precisamente, due di questi formavano dei dischi e gli altri due degli anelli che circondavano i dischi, come in fig. 2, in alto. Prima di iniziare l’esperimento veniva fissata la luminanza di uno dei due anelli e quella dei due dischi, e veniva chiesto a degli osservatori di regolare la luminanza dell’altro anello in modo tale che la bianchezza dei dischi fosse la medesima.

I risultati ottenuti mostravano che i due grigi apparivano uguali agli osservo-

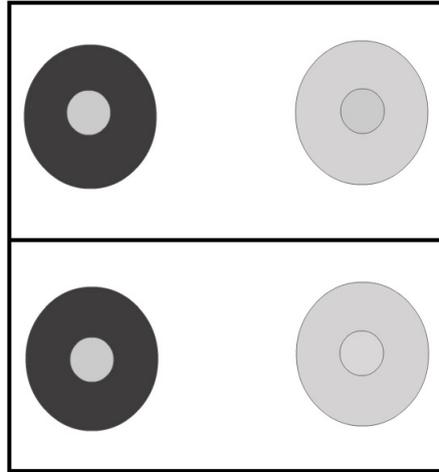


Figura 2: Nell'immagine in alto due dischi del medesimo colore di grigio sono circondati da anelli di colore diverso, e appaiono diversi all'osservatore. Nell'immagine in basso, due dischi di colore grigio diverso fra loro appaiono ugali all'osservatore perché uguale è il loro rapporto con lo sfondo.

ri quando uguali erano i rapporti fra la luminanza del disco e quella dell'anello. Il fenomeno percettivo che ci prefiggiamo di studiare è proprio quello del contrasto di colore. In particolare, lo scopo di questa tesi è quello di interpretare un classico modello di percezione del contrasto, ovvero il Retinex, in termini della funzionalità del LGN.



Figura 3: Il valore dei pixels nel rettangolo centrale è costante ma viene percepito dall'osservatore come di colore che cresce linearmente.

Un'immagine emblematica del comportamento del sistema visivo, è rappresentata in fig. 3. In questa immagine vediamo una striscia di colore costante, su uno sfondo il cui tono di grigio cresce linearmente. La percezione che ne abbiamo è invece di un rettangolo di intensità di colore che cala al crescere di quella dello sfondo.

Se $I : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ è l'immagine assegnata, un modello classico che spiega questo meccanismo è il Retinex, proposto da Horn [7] e studiato poi anche da altri autori. L'immagine I è fattorizzata in un prodotto $I = f \cdot L$ dove L è l'illuminazione, mentre f codifica l'immagine percepita.

Nel modello che analizzeremo, questa si può ottenere risolvendo l'equazione

$$\Delta \log f = \Delta \log I. \quad (1)$$

In particolare, f e I non coincidono necessariamente ma

$$\log f - \log I$$

è armonica. Noi considereremo i modelli variazionali di Morel, Petro, Sbert [11], e di Georgiev, [6], che ha avanzato un'interpretazione in termini di derivazione covariante.

D'altro canto è possibile interpretare questo fenomeno percettivo alla luce della funzionalità della corteccia, e in particolare del Nucleo Genucolato Laterale, nel seguito sempre indicato con LGN. Infatti, recenti studi di neuroimaging permettono di determinare la forma dei profili recettori delle cellule di questa area (si veda [7] e [5]). La forma viene ottenuta stimolando la retina con un impulso visivo puntiforme. Questo si può descrivere come una distribuzione delta di Dirac. Inoltre Petitot e Tondut hanno proposto di modellare l'architettura funzionale della corteccia visiva con strumenti di geometria differenziale, e questo approccio è stato ulteriormente sviluppato da alcuni lavori di Citti e Sarti. Seguiremo in parte la presentazione di questi lavori [3].

Le principali strutture della corteccia sono i profili recettori delle cellule, la retinotopia che descrive la loro disposizione nella corteccia, e la connettività laterale, che descrive la connettività fra le cellule. Si tratta di cellule isotrope, e la connettività che le lega è ancora isotropa, e può essere descritta come soluzione fondamentale del Laplaciano. Dimostreremo quindi che l'azione con-

giunta delle cellule del LGN e della connettività su un input visivo si può scrivere come

$$\Phi(x, y) = \frac{1}{2} \left(\Gamma(x, y) * \Delta \log I(x, y) \right). \quad (2)$$

Confrontando le due formule (1) e (2), ne concluderemo che l'azione del LGN è quella di percepire le immagini, in modo indipendente dall'illuminazione.

Gli strumenti matematici che ci serviranno per descrivere il modello sono la derivata covariante, la nozione di distribuzione e di soluzione fondamentale di Laplace.

Indice

Introduzione	i
1 Il modello Retinex	1
1.1 Spazi fibrati e derivate covarianti	1
1.1.1 Spazio fibrato	2
1.1.2 Connessioni	3
1.2 Retinex	6
2 L'occhio e la corteccia visiva	9
2.1 Il bulbo oculare	9
2.2 La retina	10
2.3 LGN	13
2.4 Descrizione qualitativa dei profili recettori	14
2.5 La corteccia visiva	16
3 LGN e soluzione fondamentale	19
3.1 Teoria delle distribuzioni	20
3.1.1 Definizioni fondamentali	20
3.1.2 Convoluzione di distribuzioni	22
3.1.3 Delta di Dirac	26
3.2 Soluzione fondamentale di Poisson	30
3.3 La retinotopia e le coordinate log-polari	34
3.4 I profili recettori	36
3.5 Risposta delle cellule e connettività orizzontale del LGN	37
Conclusioni	39

Elenco delle figure

1	Triangolo di Kanizsa	i
2	Esperimento di Wallach	iii
3	Il contrasto di colore	iii
1.1	Spazio fibrato	2
1.2	Sezione in uno spazio fibrato	3
2.1	Occhio	10
2.2	Retina	11
2.3	Sezione traversa della retina	12
2.4	Via visive del cervello umano	13
2.5	Campi recettivi delle cellule gangliari	15
2.6	Campi recettivi centro-on e centro-off	15
2.7	Sovrapposizione dei campi recettivi	16
2.8	Struttura ipercolonnare delle cellule del LGN	17
3.1	Struttura retinotopica	35
3.2	Cellula LGN	36

Capitolo 1

IL MODELLO RETINEX

Nel seguente capitolo parleremo del modello Retinex e in particolare, di quello proposto da Horn. Ne daremo poi una interpretazione in termini di spazi fibrati e derivate covarianti. Per questo motivo occorre introdurre le nozioni di

- spazi fibrati e sezioni;
- connessioni o derivate covarianti.

1.1 Spazi fibrati e derivate covarianti

Un'immagine di scala di grigi non è una collezione di pixel bensì una collezione di “fibre”. Invece della luminosità di ogni pixel, consideriamo un “valore” su ogni fibra.

Il fascio di fibre è dinamico, cioè possiamo liberamente spostare le fibre rispetto alle altre. In tal modo, il valore sulla fibra rimane lo stesso ma la sua relazione con le altre fibre muta.

Questo produce la percezione di diversa luminanza.

Per questo motivo, verrà introdotto il concetto di fascio di fibre. Viene assunto che a priori non vi sia alcuna relazione tra le fibre. La relazione tra queste verrà aggiunta in seguito, con l'introduzione delle connessioni.

1.1.1 Spazio fibrato

Definizione 1. Un *fibrato vettoriale* differenziale di rango n $(\mathbf{E}, \pi, \mathbf{B})$ è dato da due spazi differenziabili: lo spazio totale \mathbf{E} e lo spazio base \mathbf{B} e da una mappa differenziabile π detta proiezione tale che

$$\pi : E \longrightarrow B.$$

Ogni **fibra** $E_x := \pi^{-1}(x)$, per $x \in \mathbf{B}$, forma uno spazio vettoriale n -dimensionale e $\forall x \in \mathbf{B}$ esistono un intorno U e un diffeomorfismo

$$\varphi : \pi^{-1}(U) \longrightarrow U \times \mathbb{R}^n$$

con la proprietà che per ogni $y \in U$

$$\varphi_y := \varphi|_{E_y} \longrightarrow \{y\} \times \mathbb{R}^n$$

è un isomorfismo di spazi vettoriali, cioè una mappa lineare biettiva.

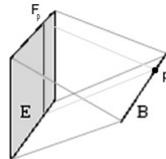


Figura 1.1: Spazio fibrato $(\mathbf{E}, \pi, \mathbf{B})$ [6]

Nel modello che utilizzeremo avremo $\mathbf{E} = \mathbb{R}^3$, \mathbf{B} sarà il piano dell'immagine incluso in \mathbb{R}^2 e π la mappa che ci dà la posizione di ogni pixel nel piano dell'immagine.

Definizione 2. Una *sezione* in uno Spazio Fibrato è una mappa differenziabile $f : B \longrightarrow E$ tale che $\pi(f(p)) = p \quad \forall p \in \mathbf{B}$.

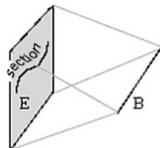


Figura 1.2: Sezione in uno spazio fibrato $(\mathbf{E}, \pi, \mathbf{B})$ [6]

Indicheremo con $\Gamma(\mathbf{E})$ lo spazio delle sezioni.

La proiezione definisce una funzione che ad ogni punto in \mathbf{E} associa un unico punto in \mathbf{B} . Viceversa, una sezione in uno spazio fibrato seleziona solo uno dei punti in ogni fibra.

Un'immagine di scala di grigi è una sezione in uno spazio fibrato $(\mathbb{R}^3, \pi, \mathbb{R}^2)$. Inoltre, non esiste una mappa che ci permette di mettere in relazione la luminosità di due punti appartenenti a fibre diverse. Ogni fibra ha la sua luminosità associata ma luminosità in fibre diverse non sono in relazione tra loro.

Come risultato, il cambiamento di luminosità dell'immagine e di derivata direzionale in un punto dello spazio immagine non sono definiti. La luminosità o il valore del pixel è solamente una coordinata dal significato percettivo.

1.1.2 Connessioni

In un fibrato i cambiamenti nella sezione sono misurati dalla *connessione* o *derivata covariante*.

Come suggerisce il nome, le connessioni mostrano come le fibre sono legate fra loro. Le connessioni sono usate come derivate per confrontare valori di pixel appartenenti a fibre diverse.

Al fine di introdurre la definizione di connessione in modo naturale, consideriamo prima il gradiente quando l'immagine è definita classicamente come una funzione $f(x, y)$ nel piano dell'immagine.

Il gradiente è un vettore $(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y})$ con due componenti che sono funzioni di x, y . In questo caso non è possibile più utilizzare questa definizione perché nello spazio fibrato non c'è il concetto di derivata o di comparazione fra fibre diverse. Per poter confrontare i pixels abbiamo bisogno di un'ulteriore struttura.

Tale struttura è proprio la connessione. Se $f = f(x, y)$ e $s = s(x, y)$ sono due funzioni in \mathbf{B} allora la derivata del prodotto lungo x sarà

$$\frac{\partial}{\partial x}(fs) = \left(\frac{\partial}{\partial x}f\right)s + f\left(\frac{\partial}{\partial x}s\right)$$

che è nota come regola di Leibiniz. Una espressione analoga è valida per la derivata del prodotto lungo y . Il concetto di connessione è una generalizzazione della regola di Leibiniz al caso di sezioni.

Infatti vale la definizione:

Definizione 3. Data \mathbf{B} varietà differenziabile, una **connessione** è una mappa

$$D : \Gamma(T\mathbf{B}) \otimes \Gamma(\mathbf{E}) \longrightarrow \Gamma(\mathbf{E}) \quad (1.1)$$

dove $T\mathbf{B}$ è lo spazio tangente a \mathbf{B} . Dati $\sigma \in \Gamma(\mathbf{E})$ e $V \in T_x\mathbf{B}$, si scrive

$$D_\sigma(V) =: D_V(\sigma).$$

Tale funzione gode delle seguenti proprietà:

$$1. \quad D_{V+W}\sigma = D_V\sigma + D_W\sigma \quad \forall V, W \in T_x\mathbf{B} \quad e \quad \forall \sigma \in \Gamma(\mathbf{E})$$

$$D_{fV}\sigma = fD_V\sigma \quad \forall f \in C^\infty(\mathbf{B}, \mathbb{R}) \quad e \quad \forall V \in \Gamma(T\mathbf{B}).$$

2. D è \mathbb{R} -lineare in σ :

$$D_V(\sigma + \tau) = D_V\sigma + D_V\tau \quad \forall V \in T_x\mathbf{B} \quad e \quad \forall \sigma, \tau \in \Gamma(\mathbf{E}).$$

3. soddisfa il seguente prodotto

$$D_V(f\sigma) = V(f) \cdot \sigma + fD_V\sigma \quad \forall f \in C^\infty(\mathbf{B}, \mathbb{R}). \quad (1.2)$$

In particolare, per la (1.2), se D è una connessione vale allora:

$$D_x(f\sigma) = \left(\frac{\partial}{\partial x}f\right)\sigma + fD_x\sigma. \quad (1.3)$$

La derivata $\frac{\partial}{\partial x}$ agisce su una funzione mentre la “derivata ” che agisce sulla sezione è D_x .

Ogni sezione può essere rappresentata da una combinazione lineare di un set di sezioni σ_i detto *base*:

$\forall \sigma$ esistono f^i funzioni tali che $\sigma = \sum_{i=1}^3 f^i \sigma_i$.

Quindi la (1.3) di connessione diventa:

$$D_x \sigma = D_x \sum_{i=1}^3 (f^i \sigma_i) = \sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial f^i}{\partial x} \cdot \sigma_i + f^i \cdot D_x \sigma_i \right)$$

$$D_y \sigma = D_y \sum_{i=1}^3 (f^i \sigma_i) = \sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial f^i}{\partial y} \cdot \sigma_i + f^i \cdot D_y \sigma_i \right).$$

Essendo $D_x \sigma_i$ una sezione, dovrà ancora essere rappresentabile in base σ_i . Da cui segue:

$$D_x \sigma_i = \sum_{j=1}^3 A_{ix}^j \cdot \sigma_j$$

dove A_{ix}^j è una matrice funzione di x e y che prende il nome di *simbolo di Christoffel*.

Le formule diventano:

$$D_x \sigma = \sum_{i=1}^3 (f^i \sigma_i) = D_x \sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial f^i}{\partial x} \cdot \sigma_i + \sum_{j=1}^3 f^i \cdot A_{ix}^j \cdot \sigma_j \right)$$

$$D_y \sigma = \sum_{i=1}^3 (f^i \sigma_i) = D_y \sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial f^i}{\partial y} \cdot \sigma_i + \sum_{j=1}^3 f^i \cdot A_{iy}^j \cdot \sigma_j \right).$$

Per semplicità di notazione, spesso la base σ_i viene omessa. L'azione della connessione su f^i è

$$D_x f^i = \frac{\partial}{\partial x} f^i + \sum_{j=1}^3 A_{jx}^i f^j$$

$$D_y f^i = \frac{\partial}{\partial y} f^i + \sum_{j=1}^3 A_{jy}^i f^j.$$

La regola generale è che una connessione D_x, D_y sostituisce il gradiente $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}$ secondo la cosiddetta “minima sostituzione”:

$$\frac{\partial}{\partial x} \longrightarrow D_x = \frac{\partial}{\partial x} + A_x$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \longrightarrow D_y = \frac{\partial}{\partial y} + A_y.$$

L'espressione $\frac{\partial}{\partial y} + A_y$ e la analoga per la x viene chiamata *derivata covariante*.

Nel caso di immagini a colori A_x e A_y sono matrici dipendenti da x, y mentre nel caso di immagini in bianco e nero sono delle funzioni.

Stanti le definizioni precedenti, diremo che una sezione $g(x, y)$ ha derivata covariante nulla quando

$$\begin{cases} (\frac{\partial}{\partial x} + A_x)g = 0 \\ (\frac{\partial}{\partial y} + A_y)g = 0. \end{cases}$$

La soluzione del sistema è

$$\begin{cases} A_x = \frac{1}{g} \frac{\partial g}{\partial x} \\ A_y = \frac{1}{g} \frac{\partial g}{\partial y}. \end{cases}$$

Quindi $\log(g)$ non è costante ma la sua derivata ordinaria è (A_x, A_y) .

1.2 Retinex

La versione del modello Retinex [11] proposto da Horn [7] si basa sulla traduzione in una forma più fisica dei principi del Retinex. Il lavoro di Horn è il primo di una serie di articoli, [2]-[13], in cui gli autori propongono di decomporre l'intensità dell'immagine I come prodotto della riflettanza f e dell'intensità di illuminazione incidente L in modo che $I = f \cdot L$.

In particolare, Horn separa riflettanza e illuminazione considerando il logaritmo dell'intensità dell'immagine: $\log I = \log f + \log L$.

Come in Retinex, l'ipotesi principale è che l'illuminazione varia uniformemente sopra l'immagine, mentre le discontinuità sono presenti solo dove varia la riflettanza.

Applicando il Laplaciano si ottiene:

$$\Delta \log I = \Delta \log f + \Delta \log L.$$

Poiché L varia uniformemente, la seconda componente sarà limitata e molto piccola. Perciò l'equazione di Horn diventa

$$\Delta \log I = \Delta \log f. \quad (1.4)$$

Inoltre, l'equazione (1.4) può essere interpretata in termini di derivate covarianti e spazi fibrati.

Sia data $A(x, y) = \frac{\nabla I(x, y)}{I(x, y)}$, l'equazione (1.4) può essere considerata come l'equazione di Eulero-Lagrange del funzionale

$$F(x, y) = \iint \frac{|\nabla f(x, y) - A(x, y)f(x, y)|^2}{f(x, y)^2} dx dy. \quad (1.5)$$

Questo funzionale è invariante rispetto alle trasformazioni

$$f \longrightarrow fI \quad A \longrightarrow A + \frac{\nabla I}{I}$$

così che la scelta di $A(x, y) = \frac{\nabla I(x, y)}{I(x, y)}$ risulta compatibile con le trasformazioni che lasciano il funzionale invariato.

La quantità $\nabla f - Af$ può essere interpretata come la derivata covariante.

Inoltre, possiamo osservare che, ponendo

$$\Phi(x, y) = \log f(x, y) \quad e \quad h(x, y) = \log I(x, y)$$

per l'equazione (1.4) vale

$$\Delta \Phi(x, y) = \Delta \log f(x, y) = \Delta \log I(x, y) = \Delta h(x, y),$$

e data

$$A(x, y) = \frac{\nabla I(x, y)}{I(x, y)} = \nabla h(x, y),$$

il funzionale diventa

$$F(x, y) = \iint |\nabla\Phi(x, y) - A(x, y)|^2 dx dy = \iint |\Phi(x, y) - \nabla h(x, y)|^2 dx dy, \quad (1.6)$$

dove le trasformazioni che lo lasciano invariato sono

$$\Phi \longrightarrow \Phi + h \quad e \quad A \longrightarrow A + \nabla h.$$

Capitolo 2

L'OCCHIO E LA CORTECCIA VISIVA

David Hunter Hubel, vincitore del premio Nobel per la medicina, scriveva “L’occhio è stato spesso paragonato a una macchina fotografica. Sarebbe più appropriato il paragone con una telecamera fissata a un cavalletto che insegue automaticamente le immagini: un sistema che si metta a fuoco da solo, si regoli automaticamente per l’intensità luminosa, abbia un obiettivo autopulente e sia collegato a un computer con capacità di analisi parallela così avanzate, che solo da poco gli ingegneri elettronici stanno considerando la possibilità di progettare un hardware con simili strategie. L’enorme difficoltà del compito di afferrare la luce che colpisce le retine e di trasformarla in una scena visiva che abbia senso è spesso stranamente sottovalutata.”

In questo capitolo considereremo principalmente la parte nervosa dell’occhio - la retina - e il corpo genicolato laterale per indagare il processo di estrazione dall’ambiente di ciò che è utile e di soppressione di ciò che è ridondante.

2.1 Il bulbo oculare

L’occhio, o bulbo oculare, è l’organo di senso principale dell’apparato visivo, che ha il compito di ricavare informazioni sull’ambiente circostante attraverso la luce. L’occhio umano raccoglie la luce che gli proviene dall’ambiente e ne regola l’intensità attraverso un diaframma (l’*iride*) che modifica il diametro della pupilla.

La *cornea* è una membrana trasparente convessa anteriormente che insieme al

cristallino forma il *diottro oculare*, l'equivalente dell'obiettivo della macchina fotografica. La rifrazione dei raggi luminosi, necessaria per la messa a fuoco, si verifica per circa due terzi a livello dell'interfaccia aria-cornea, dove la luce entra nell'occhio. Il cristallino fornisce il terzo rimanente del potere diottrico, ma il suo compito principale è di compiere gli aggiustamenti necessari a mettere a fuoco oggetti a distanze diverse.

Mentre in una macchina fotografica ciò avviene variando la distanza tra la lente e la pellicola, noi mettiamo a fuoco cambiano la forma del cristallino.

Esso è infatti una lente convergente biconvessa di consistenza gommosa, in grado di dare la percezione della distanza modificando la sua curvatura. Più precisamente, mette in tensione i tendini che lo fissano alla periferia per assumere una forma più sferica e vedere gli oggetti vicini, mentre li rilascia per diventare più appiattito e vedere gli oggetti lontani.

Queste variazioni di forma sono determinate da un insieme di muscoli radiali detti *muscoli ciliari*.

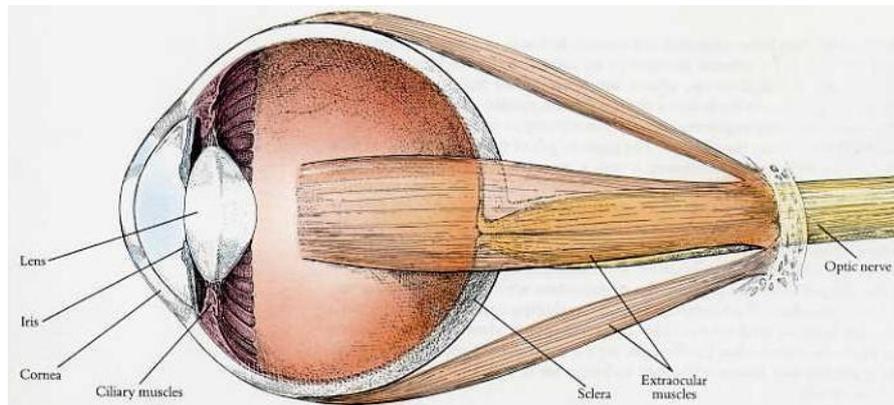


Figura 2.1: Il bulbo oculare e i muscoli che ne controllano la posizione. La cornea e il cristallino mettono a fuoco i raggi di luce sulla parte posteriore dell'occhio. Il cristallino regola la messa a fuoco di oggetti vicini o lontani assumendo una forma più o meno sferica[8].

2.2 La retina

La superficie interna del globo oculare è rivestita dalla retina, una sottile membrana trasparente. La retina ha la forma di una lamina, dello spessore di circa un quarto di millimetro. È costituita da tre strati di neuroni, separati da

due strati che contengono le sinapsi fatte dagli assoni e dai dendriti di queste cellule.

La fila di cellule nella parte posteriore della retina è costituita dai fotorecettori: i *bastoncelli* e i *coni*. I primi, di forma più allungata, sono più numerosi e responsabili della visione in condizioni di scarsa illuminazione e non funzionano in luce piena. I coni, al contrario, non rispondono alle basse intensità luminose e permettono di distinguere i colori. Le quantità relative di coni e bastoncelli variano nelle diverse parti della retina. I coni sono presenti su tutta la retina ma sono più densamente stipati al centro, in un'area priva di bastoncelli detta *fovea*.

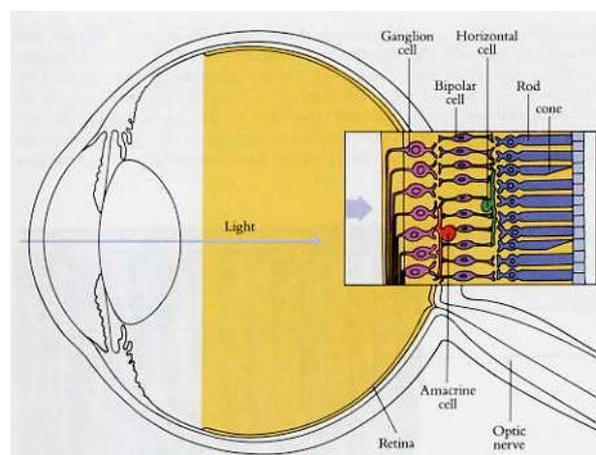


Figura 2.2: L'ingrandimento della retina sulla destra mostra le posizioni relative dei tre strati retinici. La luce deve attraversare gli strati delle cellule gangliari e delle cellule bipolari prima di giungere ai cono e ai bastoncelli[8].

Spostandosi verso la parte anteriore dell'occhio, troviamo lo strato intermedio della retina, posto tra coni e bastoncelli e le cellule gangliari. Tale strato contiene tre tipi di cellule nervose: le *cellule bipolari*, le *cellule orizzontali* e le *cellule amacrine*. Le prime ricevono l'input dai recettori e molte di esse si connettono direttamente con le cellule gangliari tramite una via diretta altamente specifica. Le seconde collegano i recettori e le cellule bipolari tramite connessioni parallele agli strati della retina e, in modo analogo, le cellule amacrine collegano le cellule bipolari e le cellule gangliari. In questo caso l'informazione giunge alle cellule gangliari attraverso una via indiretta, che è la più diffusa. Lo strato di cellule della superficie anteriore della retina contiene le cellule gangliari, i cui assoni attraverso la retina, si raccolgono in un fascio a livello del disco ottico e lasciano l'occhio formando il *nervo ottico*.

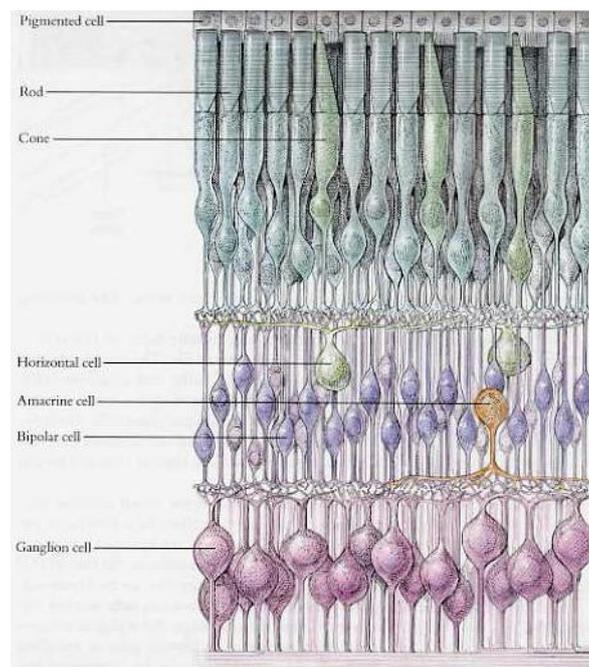


Figura 2.3: Sezione trasversale della retina, circa a metà fra fovea e l'estrema periferia, in cui i bastoncelli sono più numerosi dei coni[8].

L'informazione sensoriale, elaborata e codificata, viene così trasmessa al *nucleo genicolato laterale*.

2.3 LGN

Il *nucleo genicolato laterale* (LGN) è una stazione talamica preposta allo smistamento delle informazioni visive provenienti dal tratto ottico, una continuazione del nervo ottico.

Attraverso il nucleo genicolato laterale passano quasi tutti gli input sensoriali verso la corteccia, ad eccezione di quelli olfattivi. Nella proiezione dalla retina al LGN vengono preservate le caratteristiche topografiche dello stimolo (ordine retinotopico): gli assoni provenienti dalla retina si connettono con i neuroni del LGN secondo un ordine preciso, in base alla posizione dei relativi neuroni sulla retina.

Dai neuroni del LGN partono poi le fibre nervose dirette alle corteccia visive primarie, situate nella parte posteriore del cranio, dove l'elaborazione dei segnali visivi viene perfezionata rendendo possibile la percezione cosciente.

In particolare, le cortecce V1 e V2 sono sede dell'elaborazione di informazione di orientazione dei contorni, tramite le *cellule semplici*, e di altre caratteristiche del segnale visivo, tramite le *cellule complesse*.

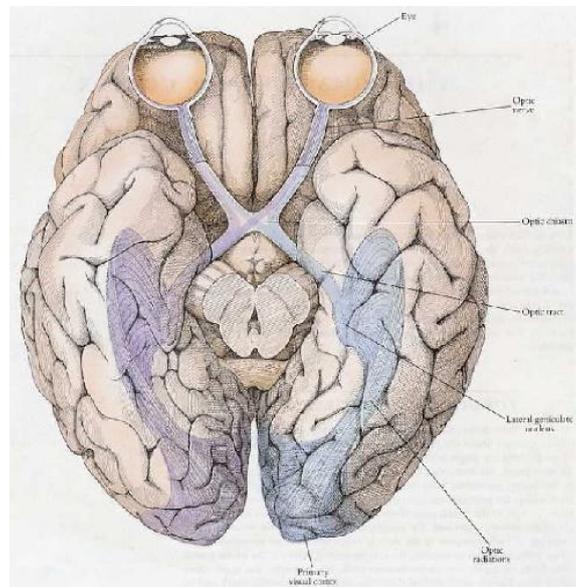


Figura 2.4: Veduta dal basso delle vie visive del cervello umano, dagli occhi alla corteccia visiva primaria.[8]

Per descrivere il comportamento della cellula e perciò il suo output, è necessario introdurre e capire il concetto di *campo recettivo*.

2.4 Descrizione qualitativa dei profili recettori

In senso proprio, il termine “campo recettivo ”(RF) si riferisce semplicemente ai recettori specifici che fanno capo a una data cellula nel sistema nervoso, con l'interposizione di una o più sinapsi. Con queste limitazioni, e nell'ambito del sistema visivo, il termine si può perciò riferire solo a una regione della retina ma il termine è stato gradualmente usato in senso più ampio. L'uso attuale del termine, tende a includere la descrizione della partizione del campo, un'indicazione di come bisogna stimolare una regione per far rispondere la cellula. Le mappe dei campi recettivi sono utili soprattutto perché ci permettono di prevedere il comportamento di una cellula.

Intorno al 1950, Stephen Kuffler fece delle registrazioni extracellulari di elettrodi inseriti attraverso la sclera (la parte bianca del bulbo oculare) direttamente nella retina. Quando la luce diffusa era di intensità costante, o anche nella completa oscurità, la maggior parte delle cellule gangliari aveva una scarica di impulsi continua e un po' irregolare. Dato che ci si poteva aspettare che le cellule fossero silenti al buio completo, questa scarica fu una sorpresa. Spostando un punto luminoso sulla retina, Kuffler riuscì a individuare una regione, la cui stimolazione influenzava - aumentava o sopprimeva - la scarica di una cellula gangliare. Questa regione era il campo recettivo della cellula gangliare. Fu subito evidente che le cellule gangliari erano di due tipi: *cellule centro-on* e *cellule centro-off*. Una cellula centro-on scaricava a una maggiore frequenza quando lo stimolo luminoso cadeva in un qualunque punto all'interno di un'area ben precisa, al centro o quasi del campo recettivo. Se si ascoltano con un altoparlante i rumori prodotti da una scarica di una cellula di questo tipo, si sente prima la scarica spontanea, qualche raro schiocco e, quando si accende lo stimolo luminoso, si sente una raffica di impulsi a mitraglia. Questo tipo di risposta è detta *risposta on*.

Nel momento in cui Kuffler provò a spostare anche minimamente lo stimolo luminoso dal centro del campo recettivo, scoprì che la luce inibiva la scarica spontanea della cellula, e che quando spegneva la luce la cellula produceva una

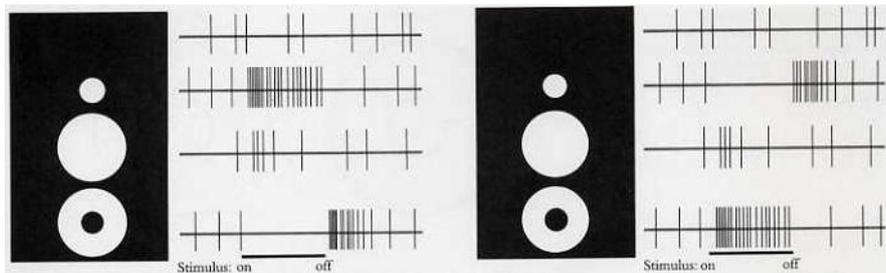


Figura 2.5: A *sinistra*: quattro registrazioni da una cellula gangliare centro-on. A sinistra sono mostrati gli stimoli. In alto, a riposo non c'è stimolazione: la cellula scarica a una bassa frequenza, in modo più o meno casuale. Le altre tre registrazioni più in basso, mostrano rispettivamente le risposte a un punto luminoso piccolo, a un fascio di luce più grande che occupa sia il centro che la periferia del campo recettivo e ad un anello che occupa solo la periferia. A *destra*: risposte di una cellula gangliare retinica centro-off alla stessa serie di stimoli mostrati a sinistra[8].

sequenza di impulsi della durata di circa un secondo. La risposta di inibizione durante l'illuminazione e scarica al suo spegnimento è detta *risposta off*.

L'esplorazione del campo recettivo dimostrò che esso era chiaramente suddiviso in una regione circolare "on" circondata da una corona circolare "off" notevolmente più ampia.

Una cellula di centro-off aveva un comportamento opposto. Il suo campo recettivo era costituito da un piccolo centro dal quale si ottenevano risposte off e da una periferia che dava risposte on.

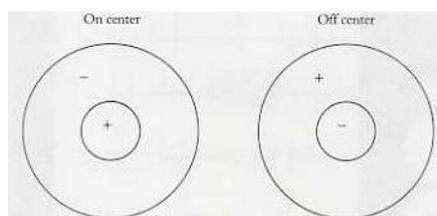


Figura 2.6: I due tipi principali di campi recettivi: centro on, con periferia inibitoria e centro-off con periferia eccitatoria. "+" sta per regione che dà risposta on, "-" sta per regione che dà risposta off[8].

Si potrebbe erroneamente pensare che i campi recettivi delle cellule gangliari costituiscano sulla retina un mosaico di cerchietti che non si sovrappongono.

Cellule gangliari contigue condividono invece gli stessi gruppi di recettori o quasi. Questo è equivalente a dire che i campi recettivi sono quasi completamente sovrapposti.

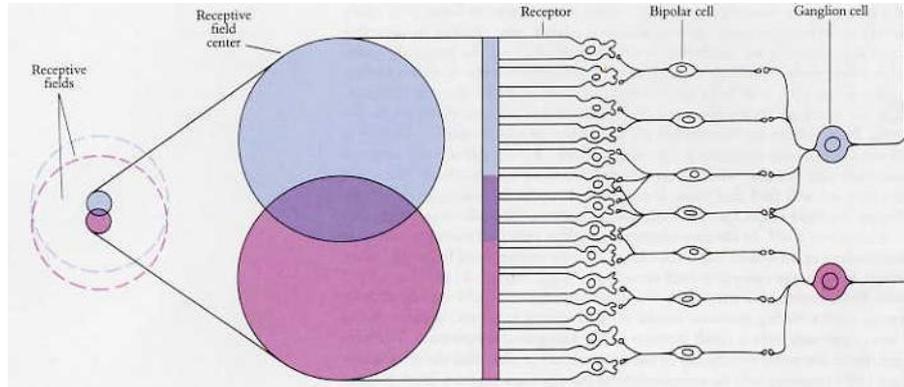


Figura 2.7: Due cellule gangliari vicine ricevono i loro input, lungo la via diretta, da due zone recettoriali che possono essere in parte sovrapposte. Le aree retiniche occupate da questi recettori costituiscono i centri dei campi recettivi delle rispettive cellule gangliari, indicati in visione frontale dai due grossi cerchi sovrapposti[8].

2.5 La corteccia visiva

Al fine di comprendere la reale elaborazione dell'immagine operata dalle cellule della corteccia visiva, occorre tener in considerazione come sono distribuiti spazialmente i profili recettori e come sono connessi fra loro.

- La **struttura retinotopica**, a cui abbiamo precedentemente accennato, è un mapping tra la retina e le cortecce visive primarie che conserva la topologia retinica. Dal punto di vista di elaborazione dell'immagine, questa caratteristica introduce una deformazione dell'immagine stimolo.
- La **struttura ipercolonnare** organizza le cellule corticali in colonne corrispondenti a parametri quali l'orientazione, la dominanza oculare, ecc. Nel caso delle cellule LGN sensibili al contrasto e alla scala, la struttura ipercolonnare significa che ad ogni posizione retinica (x, y) è associato un insieme di cellule (ipercolonna) sensibili a tutte le possibili

scale. Nel seguito , trascureremo per semplicità la variabile scala.

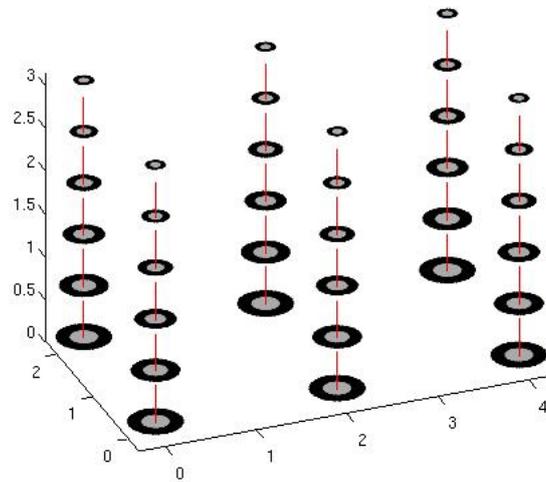


Figura 2.8: Struttura ipercolonnare delle cellule del LGN

- La **circuiteria intracorticale** è in grado di selezionare, in risposta ad uno stimolo visivo la direzione di massima risposta dell'ipercolonna ed eliminare tutte le altre.

Tale meccanismo prende il nome di *soppressione dei non massimali*.

- La **connettività orizzontale** è una fitta rete di assoni che collegano cellule appartenenti a diverse ipercolonne vicine.

Capitolo 3

LGN E SOLUZIONE FONDAMENTALE

In questo capitolo modelleremo matematicamente le strutture corticali che abbiamo descritto nel capitolo precedente.

Mostreremo che

- i profili recettori possono essere modellati da Laplaciani di Gaussiana, e la loro struttura può essere determinata sollecitando la retina con un input puntiforme, ovvero una delta di Dirac;
- l'output delle cellule LGN può essere modellato come una convoluzione con l'input visivo (opportunamente deformato);
- la connettività corticale che opera sull'output delle cellule può essere descritta come un'ulteriore convoluzione con un nucleo, che sarà rappresentato come la soluzione fondamentale di Laplace;

Per presentare il modello abbiamo pertanto bisogno di introdurre

- la nozione di distribuzione e in particolare di delta di Dirac;

- la nozione di soluzione fondamentale dell'operatore di Laplace.

Concluderemo il capitolo con la descrizione dettagliata del modello.

3.1 Teoria delle distribuzioni

Al fine di poter studiare la Delta di Dirac e le sue particolari proprietà, premettiamo alcune importanti nozioni di base sulla teoria delle distribuzioni.

3.1.1 Definizioni fondamentali

Si intende per spazio \mathbf{D} un sottospazio delle funzioni complesse definite su \mathbb{R}^n , di classe C^∞ e a supporto compatto. D'ora in poi indicheremo con x la variabile reale n-dimensionale (x_1, x_2, \dots, x_n) . Indichiamo poi con \mathbf{D}_0 il sottospazio di \mathbf{D} formato dalle funzioni aventi supporto in un insieme compatto.

Definizione 4. Si dice *funzionale* la corrispondenza che associa ad ogni elemento φ appartenente ad uno spazio di funzioni un elemento di un insieme di numeri reali o complessi.

Definizione 5. Un funzionale S si dice *lineare* se valgono:

1. $S(\varphi_1) + S(\varphi_2) = S(\varphi_1 + \varphi_2) \quad \forall \varphi_1, \varphi_2 \in \mathbf{D}$
2. $S(\lambda\varphi) = \lambda S(\varphi) \quad \forall \lambda \in \mathbb{C} \text{ e } \forall \varphi \in \mathbf{D}$

Definizione 6. Una *distribuzione* T è un funzionale lineare in \mathbf{D} e continuo su ogni $\mathbf{D}_0 \subset \mathbf{D}$.

Indicheremo una distribuzione T con $\langle T, \varphi \rangle$ e lo spazio delle distribuzioni con \mathbf{D}' .

Un caso particolare di funzionale è quello di *funzionale di tipo integrale* generato da una funzione integrabile.

Fissata una funzione integrabile f , è possibile definire un funzionale del tipo

$$\varphi \mapsto \int f \cdot \varphi.$$

In questo caso, indicheremo il funzionale con T_f .

Definizione 7. Diciamo che T si annulla in Ω se $\langle T, \varphi \rangle = 0 \quad \forall \varphi \in \mathbf{D}$. In tal caso si avrà che $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$ è il *supporto* di T .

Proprieta' 3.1.1.

1. La somma di due distribuzioni T e S è data da:

$$\langle T + S, \varphi \rangle = \langle T, \varphi \rangle + \langle S, \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in \mathbf{D}.$$

2. Il prodotto per uno scalare dello spazio \mathbf{D}' è dato da:

$$\langle \lambda T, \varphi \rangle = \lambda \langle T, \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in \mathbf{D}.$$

3. La derivata di una distribuzione T è una distribuzione T' tale che

$$\langle T', \varphi \rangle = - \langle T, \varphi' \rangle \quad \forall \varphi \in \mathbf{D}.$$

4. Più in generale si ha che $\forall k \in \mathbb{Z}$ vale:

$$\langle T^{(k)}, \varphi \rangle = (-1)^k \langle T, \varphi^{(k)} \rangle \quad \forall \varphi \in \mathbf{D}.$$

5. Se $f \in \mathbf{D}$ allora $f\varphi \in \mathbf{D}$ e vale: $\langle fT, \varphi \rangle = \langle T, f\varphi \rangle \quad \forall \varphi \in \mathbf{D}$.

È facile verificare la validità di queste affermazioni nel caso in cui la distribuzione sia un funzionale integrale.

Inoltre, utilizzando le proprietà precedenti possiamo osservare che

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left(\langle fT, \varphi \rangle \right) &= - \langle fT, \frac{d\varphi}{dx} \rangle \\ &= - \langle T, f \frac{d\varphi}{dx} \rangle \\ \langle f \frac{dT}{dx} + \frac{df}{dx} T, \varphi \rangle &= \langle f \frac{dT}{dx}, \varphi \rangle + \langle \frac{df}{dx} T, \varphi \rangle = \langle \frac{dT}{dx}, f\varphi \rangle + \langle T, \frac{df}{dx} \varphi \rangle = \\ &= - \langle T, \frac{df\varphi}{dx} \rangle + \langle T, \frac{df}{dx} \varphi \rangle = \\ &= - \langle T, \frac{df}{dx} \varphi + \frac{d\varphi}{dx} f \rangle + \langle T, \frac{df}{dx} \varphi \rangle = \\ &= \langle T, \frac{df}{dx} \varphi - \frac{df}{dx} \varphi - \frac{d\varphi}{dx} f \rangle = \\ &= - \langle T, f \frac{d\varphi}{dx} \rangle . \end{aligned}$$

Da cui si ricava la relazione:

$$\frac{d}{dx} \left(\langle fT, \varphi \rangle \right) = \left\langle f \frac{dT}{dx} + \frac{df}{dx} T, \varphi \right\rangle .$$

Possiamo anche notare che se T_n è una successione in \mathbf{D}' tale che

$$\langle T_n, \varphi \rangle \longrightarrow \langle T, \varphi \rangle$$

allora $\forall k \in \mathbb{Z}$:

$$\langle T_n^{(k)}, \varphi \rangle \longrightarrow \langle T^{(k)}, \varphi \rangle .$$

Infatti:

$$\langle T_n^{(k)}, \varphi \rangle = (-1)^k \langle T_n, \varphi^{(k)} \rangle \longrightarrow (-1)^k \langle T, \varphi^{(k)} \rangle = \langle T^{(k)}, \varphi \rangle .$$

3.1.2 Convoluzione di distribuzioni

Definizione 8. Se $f(x)$ e $g(y)$ sono due funzioni reali (o complesse) definite rispettivamente su due spazi euclidei X, Y , di dimensione n, m , si definisce *prodotto tensoriale di $f(x)$ per $g(y)$* la funzione $f(x)g(y)$ definita su $X \times Y$ e si indica con $f(x) \otimes g(y)$.

Di seguito verrà usata la seguente notazione:

\mathbf{D}_X è l'insieme delle funzioni di variabile x di classe C^∞ a supporto compatto.

Definizione 9. Date due distribuzioni S_X e T_Y , se $\exists W_{X,Y}$ distribuzione t.c. $\forall \varphi(x, y)$ nella forma $\varphi(x, y) = u(x)v(y)$ risulta

$$\langle W_{X,Y}, u(x)v(y) \rangle = \langle S_X, u(x) \rangle \langle T_Y, v(y) \rangle ,$$

allora $W_{X,Y}$ si dice *prodotto tensoriale di S e T* e si indica con $S \otimes T$.

Teorema 3.1.2 (DI ESISTENZA ED UNICITÀ). Il prodotto tensoriale di due distribuzioni ESISTE ed è UNICO. Esso è espresso, per ogni $\varphi(x, y) \in \mathbf{D}_{X,Y}$, da:

$$\langle S_X, \langle T_Y, \varphi(x, y) \rangle \rangle = \langle T_Y, \langle S_X, \varphi(x, y) \rangle \rangle .$$

Ci limiteremo a dimostrare l'esistenza del prodotto tensoriale. Occorre per tale fine premettere un lemma.

Lemma 3.1.3. Sia $x \in \mathbb{R}^n$ e $\varphi(x, \lambda)$ una funzione di x e del parametro reale λ , tale che per ogni valore di λ fissato la funzione della variabile x $\varphi_\lambda(x) = \varphi(x, \lambda)$ appartenga a \mathbf{D}_X . Se T è una distribuzione su \mathbb{R}^n , $\langle T, \varphi \rangle$ è ben definita per ogni valore del parametro λ . Essa quindi definisce, al variare di λ la funzione

$$I(\lambda) = \langle T_X, \varphi(x, \lambda) \rangle$$

Se quando il parametro λ reale o complesso varia in un intorno opportuno di λ_0 si ha

- $\text{supp} \varphi_\lambda \subset K$ dove K è un compatto di \mathbb{R}^n
- $\frac{d\varphi}{d\lambda} \in C$

allora la funzione risulta derivabile rispetto a λ in λ_0 e vale:

$$\frac{dI}{d\lambda} = \langle T_X, \frac{d\varphi}{d\lambda}(x, \lambda) \rangle .$$

Dimostrazione Lemma. La funzione $\frac{d}{d\lambda}\varphi(x, \lambda)$ ha supporto contenuto in $\text{supp} \varphi$ e per continuità vale l'uguaglianza

$$\frac{d}{d\lambda} \left(D^p \varphi(x, \lambda) \right) = D^p \left(\frac{d\varphi}{d\lambda}(x, \lambda) \right)$$

Poiché

$$\frac{dI}{d\lambda} = \lim_{\Delta\lambda \rightarrow 0} \frac{I(\lambda_0 + \Delta\lambda) - I(\lambda_0)}{\Delta\lambda},$$

per dimostrare la tesi occorre mostrare che per $\Delta\lambda \rightarrow 0$ la differenza

$$\frac{I(\lambda_0 + \Delta\lambda) - I(\lambda_0)}{\Delta\lambda} - \langle T_X, \frac{d\varphi}{d\lambda}(x, \lambda) \rangle \quad (3.1)$$

tende a zero. Data la definizione di I è evidente che

$$\frac{I(\lambda_0 + \Delta\lambda) - I(\lambda_0)}{\Delta\lambda} = \langle T_X, \frac{\varphi(x, \lambda_0 + \Delta\lambda) - \varphi(x, \lambda_0)}{\Delta\lambda} \rangle .$$

Per la linearità di T_X si trova che la differenza (3.1) è equivalente a

$$\langle T_X, \frac{\varphi(x, \lambda_0 + \Delta\lambda) - \varphi(x, \lambda_0)}{\Delta\lambda} - \frac{d}{d\lambda}\varphi(x, \lambda) \rangle =: \langle T_X, s \rangle .$$

L'ipotesi di continuità di $\frac{d}{d\lambda}\varphi(x, \lambda)$ garantisce che, per $\Delta\lambda \rightarrow 0$, $s \rightarrow 0$ e per continuità della distribuzione T_X si ha la tesi. □

Il Lemma si può facilmente estendere al caso di un parametro vettore $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m)$ a m dimensioni.

Dimostrazione teorema. Supponiamo che $\varphi(x, y) \in \mathbf{D}_{X,Y}$. Applicando il lemma si trova che, fissata la x , $I(y) = \langle S_X, \varphi(x, y) \rangle$ è infinitamente derivabile rispetto a y ed è a supporto compatto.

È dunque ben definita la quantità

$$I(x) = \langle T_Y, I(y) \rangle = \langle T_Y, \langle S_X, \varphi(x, y) \rangle \rangle .$$

In modo analogo, fissando inizialmente la y , si ottiene

$$I(y) = \langle S_X, I(x) \rangle = \langle S_X, \langle T_Y, \varphi(x, y) \rangle \rangle .$$

Occorre dimostrare che questa è una distribuzione. La linearità è banale. Per mostrare la limitatezza, basta far vedere la continuità nello zero.

Supponiamo che $\varphi \rightarrow 0$ su K compatto. Per la continuità della distribuzione S_X segue che $I(y) \rightarrow 0$. Infine, utilizzando la continuità della distribuzione T_Y possiamo concludere che $\langle S_Y, I(y) \rangle \rightarrow 0$ e quindi la tesi.

Tale dimostrazione può essere ripetuta considerando $\varphi(\lambda, y)$.

Ne discende dunque la proprietà commutativa:

$$\langle W_{XY}, \varphi(x, y) \rangle = \langle S_X, \langle T_Y, \varphi(x, y) \rangle \rangle = \langle T_Y, \langle S_X, \varphi(x, y) \rangle \rangle$$

□

Osservazione 1.

$$\begin{aligned}
\forall \varphi(x, y) \in D_{x,y} \\
& \langle U_X \otimes T_Y, \varphi(x, y) \rangle + \langle U_X \otimes S_Y, \varphi(x, y) \rangle = \\
& = \langle U_X, \langle T_Y, \varphi(x, y) \rangle \rangle + \langle U_X, \langle S_Y, \varphi(x, y) \rangle \rangle = \\
& = \langle U_X, \langle T_Y, \varphi(x, y) \rangle + \langle S_Y, \varphi(x, y) \rangle \rangle = \\
& = \langle U_X, \langle T_Y + S_Y, \varphi(x, y) \rangle \rangle = \\
& = \langle U_X \otimes (T_Y + S_Y), \varphi(x, y) \rangle .
\end{aligned}$$

Vale cioè la proprietà distributiva.

Teorema 3.1.4. Il supporto del prodotto tensoriale $W = S \otimes T$ è il prodotto $A \times B$ dei supporti di S e T .

Definizione 10. Date due distribuzioni S e T su \mathbb{R}^n , se esiste la distribuzione U definita su \mathbb{R}^n tale che

$$\langle U, \varphi(x) \rangle = \langle S_\zeta \otimes T_\eta, \varphi(\zeta + \eta) \rangle \quad \forall \varphi \in \mathbf{D}_X,$$

essa dicesi *prodotto di convoluzione di S e T* e si indica con $S * T$.

In generale, la quantità a secondo membro non è ben definita poiché la funzione $\varphi(\zeta + \eta) \notin \mathbf{D}_{\zeta, \eta}$.

Una condizione sufficiente affinché la definizione sia ben posta è che l'intersezione del supporto di $S * T$ con il supporto di $\varphi(\zeta + \eta)$ sia compatta $\forall \varphi \in \mathbf{D}_X$.

Teorema 3.1.5. Se almeno una delle due distribuzioni S, T ha supporto compatto, $S * T$ esiste.

Dimostrazione. Siano A e B rispettivamente i supporti di S e T . Supponiamo che A sia compatto. In particolare, si avrà che $\zeta \in A$ è limitato e $x = \zeta + \eta$ è limitato, quindi anche η è limitato. \square

Teorema 3.1.6. Se S e T sono generate da due funzioni $f(x)$ e $g(x)$, definite quasi dappertutto su \mathbb{R}^n e sommabili localmente, e se una delle due ha supporto compatto, allora $S * T$ è una distribuzione generata dalla funzione

$$h(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)dy = \int_{\mathbb{R}^n} g(x-y)f(y)dy$$

localmente sommabile e definita quasi dappertutto.

Dimostrazione. Per definizione si ha che

$$\begin{aligned} \langle S * T, \varphi \rangle &= \langle S_\zeta \otimes T_\eta, \varphi(\zeta + \eta) \rangle = \\ &= \iint f(\zeta)g(\eta)\varphi(\zeta + \eta)d\zeta d\eta. \end{aligned}$$

Questo integrale esiste perché la funzione integranda è localmente sommabile e ha supporto limitato.

Facciamo il seguente cambio di variabile: $x = \zeta + \eta$ e $y = \eta$. Applicando il teorema di Fubini abbiamo

$$\begin{aligned} \langle S * T, \varphi \rangle &= \iint f(x - y)g(y)\varphi(x)dx dy = \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(x - y)g(y)dy \right) \cdot \varphi(x)dx. \end{aligned}$$

Posto $h(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x - y)g(y)dy$ risulta in definitiva

$$\langle S * T, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} h(x)\varphi(x)dx.$$

D'altra parte è noto che sussiste l'identità

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x - y)g(y)dy = \int_{\mathbb{R}^n} g(x - y)f(y)dy.$$

□

3.1.3 Delta di Dirac

Definizione 11. Si dice *distribuzione di Dirac* la distribuzione definita dalla relazione

$$\langle T, \varphi \rangle = \varphi(0) \quad \forall \varphi \in \mathbf{D}$$

e si indica con $\langle \delta, \varphi \rangle$.

Possiamo osservare che tale distribuzione si annulla in ogni intervallo aperto non contenente l'origine. Questa circostanza è equivalente a dire che $\text{supp}\delta = 0$.

Inoltre, per quanto visto in precedenza, la relazione

$$\langle S, \varphi(t) \rangle = -\varphi'(0)$$

definisce una distribuzione che si identifica con $\langle \delta', \varphi \rangle$ derivata prima della distribuzione di Dirac e più in generale vale

$$\langle \delta^{(k)}, \varphi \rangle = (-1)^k \langle \delta, \varphi^{(k)} \rangle = (-1)^k \varphi^{(k)} \quad k \in \mathbb{R}.$$

Una delle più importanti proprietà riguardanti la Delta di Dirac è la seguente:

Proposizione 3.1.7. Sia $f(t)$ una funzione n volte derivabile per $t < 0$ e $t > 0$ e tale che essa e le sue derivate abbiano discontinuità di prima specie in $t = 0$. Si dicono “salti” le differenze

$$\begin{aligned} f(0^+) - f(0^-) &= \sigma_0 \\ f'(0^+) - f'(0^-) &= \sigma_1 \\ &\dots\dots\dots \\ f^{(n)}(0^+) - f^{(n)}(0^-) &= \sigma_n. \end{aligned}$$

Vale:

$$\begin{aligned} T'_f &= T_{F'} + \sigma_0 \delta \\ &\dots\dots\dots \\ T_f^{(n)} &= T_{F^{(n)}} + \sigma_0 \delta^{(n-1)} + \sigma_1 \delta^{(n-1)} + \dots + \sigma_{n-1} \delta \end{aligned}$$

dove $F^{(k)}$ è la funzione che è uguale a $f^{(k)}$ per tutte le t per le quali $f^{(k)}$ esiste ed ha valore arbitrario per $t = 0$, $\forall k \geq 0$.

Dimostrazione. Poiché $f(t)$ è localmente integrabile, essa genera una distribuzione T_f . Sia $T_{F'}$ la distribuzione generata dalla funzione F' . Si ha allora

$$\langle T'_f, \varphi \rangle = - \langle T_f, \varphi' \rangle = - \int_{-\infty}^{+\infty} f \varphi' dt = - \int_{-\infty}^0 f \varphi' dt - \int_0^{+\infty} f \varphi' dt.$$

e integrando per parti:

$$\begin{aligned} - \int_{-\infty}^0 f \varphi' dt &= - \left[f \varphi \right]_{-\infty}^0 + \int_{-\infty}^0 F' \varphi dt = f(0^+) \varphi(0) + \int_{-\infty}^0 F' \varphi dt \\ - \int_0^{+\infty} f \varphi' dt &= - \left[f \varphi \right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} F' \varphi dt = -f(0^-) \varphi(0) + \int_0^{+\infty} F' \varphi dt \end{aligned}$$

Sommando termine a termine le due precedenti relazioni si ottiene:

$$\langle T'_f, \varphi \rangle = \sigma_0 \varphi(0) + \int_{-\infty}^{+\infty} F' \varphi dt = \sigma_0 \varphi(0) + T_{F'}.$$

In modo analogo si ricavano le altre relazioni. □

Enunciamo infine la proprietà che più ci interessa per i nostri scopi:

$$\delta * T = T \quad \forall T \in \mathbf{D}.$$

Infatti:

$$\begin{aligned} \langle \delta * T, \varphi \rangle &= \langle \delta_\zeta \otimes T_\eta, \varphi(\zeta + \eta) \rangle = \langle T_\eta \otimes \delta_\zeta, \varphi(\zeta + \eta) \rangle = \\ &= \langle T_\eta, \langle \delta_\zeta, \varphi(\zeta + \eta) \rangle \rangle = \langle T_\eta, \varphi(\eta) \rangle = \\ &= \langle T, \varphi \rangle. \end{aligned}$$

Valgono anche

$$\delta^{(k)} * T = \delta * T^{(k)} = T^{(k)} \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

$$D\delta * T = DT.$$

Inoltre se T_t e δ_t sono le distribuzioni T e δ traslate di t . Allora:

$$\begin{aligned} \langle \delta_t * T, \varphi \rangle &= \langle \delta_{t,\zeta} \otimes T_\eta, \varphi(\zeta + \eta) \rangle = \langle T_\eta \otimes \delta_{t,\zeta}, \varphi(\zeta + \eta) \rangle = \\ &= \langle T_\eta, \langle \delta_{t,\zeta}, \varphi(\zeta + \eta) \rangle \rangle = \langle T_\eta, \varphi(t + \eta) \rangle = \\ &= \langle T_t, \varphi \rangle . \end{aligned}$$

ESEMPI

1. Siano $\varphi \in C_0^\infty$ e $f \in C^\infty(\mathbb{R} \setminus \{0\})$ tale che

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases} .$$

Allora:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi'(x)dx &= \int_{-\infty}^0 f(x)\varphi'(x)dx + \int_0^{+\infty} f(x)\varphi'(x)dx = \\ &= \int_{-\infty}^0 0 \cdot \varphi'(x)dx + \int_0^{+\infty} 1 \cdot \varphi'(x)dx = \int_0^{+\infty} \varphi'(x)dx = \\ &= -\varphi(0) = - \langle \delta, \varphi \rangle . \end{aligned}$$

2. Siano $\varphi \in C_0^\infty$ e $f \in C^\infty(\mathbb{R} \setminus \{0\})$ tale che

$$f(x) = \begin{cases} -1 & x < 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases} .$$

Allora:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi'(x)dx &= \int_{-\infty}^0 f(x)\varphi'(x)dx + \int_0^{+\infty} f(x)\varphi'(x)dx = \\ &= - \int_{-\infty}^0 \varphi'(x)dx + \int_0^{+\infty} \varphi'(x)dx = -\varphi(0) - \varphi(0) = \\ &= -2\varphi(0) = -2 \langle \delta, \varphi \rangle . \end{aligned}$$

3. Siano $\varphi \in C_0^\infty$ e $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ tale che

$$f_\varepsilon(x) = \frac{1}{(\pi\varepsilon)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{x^2}{\varepsilon}} .$$

Si ha:

$$\int_{\mathbb{R}^n} f_\varepsilon(x)\varphi(x)dx = \frac{1}{\pi^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{\varepsilon^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{x^2}{\varepsilon}} \varphi(x)dx$$

Applicando il cambio di variabile $y = \frac{x}{\sqrt{\varepsilon}}$ l'integrale precedente diventa

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{\varepsilon^{\frac{n}{2}}} e^{-y^2} \varphi(\sqrt{\varepsilon}y) \varepsilon^{\frac{n}{2}} dy = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-y^2} \varphi(\sqrt{\varepsilon}y) dy$$

e per $\varepsilon \rightarrow 0$, passando al limite sotto al segno di integrale, si trova:

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-y^2} \varphi(\sqrt{\varepsilon}y) dy \rightarrow \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-y^2} dy \cdot \varphi(0) = \varphi(0)$$

Possiamo perciò concludere che

$$\int_{\mathbb{R}^n} f_\varepsilon(x)\varphi(x)dx \rightarrow \langle \delta, \varphi \rangle \quad \text{per } \varepsilon \rightarrow 0.$$

3.2 Soluzione fondamentale di Poisson

La nozione di distribuzione e, in particolare, di Delta di Dirac interviene in modo essenziale nella definizione di soluzione fondamentale di un operatore. Più precisamente, vedremo che la soluzione fondamentale di Laplace soddisfa l'equazione

$$\Delta \Gamma = \delta.$$

Consideriamo la soluzione fondamentale dell'equazione di Laplace:

$$\Gamma(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2\pi} \log|x| & n = 2 \\ \frac{1}{n(n-2)w_n} |x|^{2-n} & n \geq 3 \end{cases}$$

dove con w_n indichiamo il volume della palla di centro zero e raggio unitario in \mathbb{R}^n .

Ai fini dei nostri studi, ci limiteremo a considerare il caso $n = 2$.

Si verifica immediatamente che Γ è una funzione armonica in $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, ovvero

$$\Delta \Gamma = 0.$$

Proposizione 3.2.1. Sia $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione $C_0^2(\Omega)$ con Ω aperto di \mathbb{R}^2 . La convoluzione

$$u(y) = \int_{\Omega} \Gamma(x - y) f(x) dx$$

è soluzione dell'equazione di Poisson

$$\Delta u = f.$$

Dimostrazione. Poiché Γ non è definita per $x = y$, consideriamo l'insieme $\Omega \setminus B(y, r)$ con $r > 0$, e applichiamo la seconda identità di Green:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega \setminus B(y, r)} \left(\Gamma(x - y) \Delta f(x) - \Delta \Gamma(x - y) f(x) \right) dx = \\ & \int_{\partial(\Omega \setminus B(y, r))} \left(\Gamma(x - y) \nabla f(x) \nu(x) - \nabla \Gamma(x - y) \nu(x) f(x) \right) d\sigma = \\ & \int_{\partial \Omega} \left(\Gamma(x - y) \nabla f(x) \nu(x) - \nabla \Gamma(x - y) \nu(x) f(x) \right) d\sigma + \\ & - \int_{\partial B(y, r)} \left(\Gamma(x - y) \nabla f(x) \nu(x) - \nabla \Gamma(x - y) \nu(x) f(x) \right) d\sigma \end{aligned}$$

dove ν indica la normale esterna alla superficie.

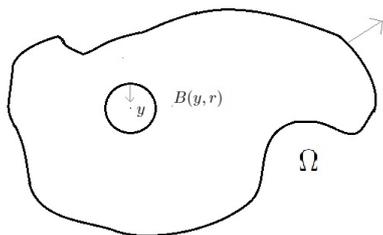
Essendo Γ una funzione armonica e f una funzione a supporto compatto, si ottiene:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega \setminus B(y,r)} \Gamma(x-y) \Delta f(x) dx = \\ &= - \int_{\partial B(y,r)} \left(\Gamma(x-y) \nabla f(x) \nu(x) - \nabla \Gamma(x-y) \nu(x) f(x) \right) d\sigma \\ &= - \int_{\partial B(y,r)} \Gamma(x-y) \nabla f(x) \nu(x) d\sigma + \int_{\partial B(y,r)} \nabla \Gamma(x-y) \nu(x) f(x) d\sigma. \end{aligned}$$

□

Indichiamo rispettivamente con I_1 e I_2 il primo ed il secondo integrale.

Osserviamo che la normale esterna a $\partial B(y,r)$ è $\nu(x) = -\frac{x-y}{|x-y|}$.



Perciò si trova che:

$$\begin{aligned} |I_1| &= \left| \int_{\partial B(y,r)} \Gamma(r) \nabla f(x) \frac{(x-y)}{|x-y|} d\sigma \right| \leq \Gamma(r) \max |\nabla f| \int_{\partial B(y,r)} \left| \frac{x-y}{|x-y|} \right| d\sigma = \\ &= \max |\nabla f| \frac{1}{2\pi} \log(r) 2\pi r = \max |\nabla f| \log(r) r \rightarrow 0, \quad \text{per } r \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Da cui segue che $I_1 \rightarrow 0$, per $r \rightarrow 0$.

Poiché

$$\nabla \Gamma(x-y) = -\frac{1}{2\pi} \frac{x-y}{|x-y|^2}$$

si ha che

$$\nabla \Gamma(x-y) \nu(x) = \frac{1}{2\pi |x-y|}.$$

Utilizziamo tale risultato per studiare il comportamento di I_2 al tendere a 0 di r .

$$\begin{aligned}
 I_2 &= \int_{\partial B(y,r)} \nabla \Gamma(x-y) \nu(x) \left(f(x) - f(y) + f(y) \right) d\sigma = \\
 &= \int_{\partial B(y,r)} \nabla \Gamma(x-y) \nu(x) \left(f(x) - f(y) \right) d\sigma + \int_{\partial B(y,r)} \nabla \Gamma(x-y) \nu(x) f(x) d\sigma = \\
 &= - \int_{\partial B(y,r)} \left(f(x) - f(y) \right) \frac{1}{2\pi r} d\sigma + f(y) \frac{1}{2\pi r} \int_{\partial B(y,r)} d\sigma = \\
 &= - \int_{\partial B(y,r)} \left(f(x) - f(y) \right) \frac{1}{2\pi r} d\sigma + f(y).
 \end{aligned}$$

Sia $\xi \in]x, y[$, applicando il teorema del valor medio, possiamo osservare che:

$$\begin{aligned}
 \left| \int_{\partial B(y,r)} \left(f(x) - f(y) \right) \frac{1}{2\pi r} d\sigma \right| &\leq \int_{\partial B(y,r)} |f(x) - f(y)| \frac{1}{2\pi r} d\sigma = \\
 &= \frac{1}{2\pi r} \int_{\partial B(y,r)} |(x-y) \nabla f(\xi)| d\sigma \leq \frac{1}{2\pi r} \max |\nabla f| \int_{\partial B(y,r)} |(x-y)| d\sigma = \\
 &= \frac{1}{2\pi r} \max |\nabla f| \int_{\partial B(y,r)} r d\sigma = \frac{1}{2\pi r} \max |\nabla f| r 2\pi r = \\
 &= \max |\nabla f| r \longrightarrow 0, \quad \text{per } r \longrightarrow 0.
 \end{aligned}$$

In definitiva, $I_2 \longrightarrow f(y)$, per $r \longrightarrow 0$. Da cui segue:

$$\int_{\Omega \setminus B(y,r)} \Gamma(x-y) \Delta f(x) dx = -I_1 + I_2 \longrightarrow f(y), \quad \text{per } r \longrightarrow 0.$$

D'altra parte

$$\int_{\Omega \setminus B(y,r)} \Gamma(x-y) \Delta f(x) dx \longrightarrow \int_{\Omega} \Gamma(x-y) \Delta f(x) dx, \quad \text{per } r \longrightarrow 0.$$

Per unicità del limite, si trova quindi l'uguaglianza:

$$\int_{\Omega} \Gamma(x-y) \Delta f(x) dx = f(y).$$

Per le proprietà della convoluzione si può concludere

$$\Delta(\Gamma * f) = f.$$

Osservazione 2.

La relazione

$$\Delta(\Gamma * f) = \Delta\Gamma * f = f$$

si può anche esprimere affermando che $\Delta\Gamma(x-y)$ si comporta come una Delta di Dirac centrata in y .

Premessi gli strumenti matematici che ci serviranno in seguito, possiamo dare ora una interpretazione matematica alle nostre conoscenze neurofisiologiche.

3.3 La retinotopia e le coordinate log-polari

Identificando la struttura retinica con un piano \mathbf{D} e il livello corticale con \mathbf{M} , la struttura retinotopica consiste in un isomorfismo

$$q : \mathbf{D} \longrightarrow \mathbf{M}.$$

Identificheremo perciò i due piani, entrambi denotati con \mathbf{M} .

Poiché la densità dei recettori nella retina è maggiore al centro, lo stimolo visivo I viene deformato. Tale deformazione risulta perciò molto meglio definita nella regione centrale che nelle regioni periferiche. Quindi il mapping retinotopico

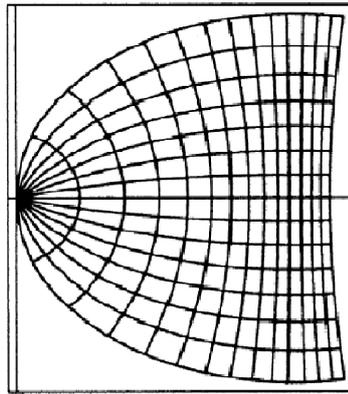


Figura 3.1: La mappa logaritmica conforme come modello di mappa retinotopica tra la retina e lo strato corticale[12].

può essere rappresentato da una trasformazione logaritmica conforme.

Nello studio dell'azione delle cellule LGN, non prenderemo in considerazione quindi lo stimolo immagine I bensì la sua deformazione $\log I$.

3.4 I profili recettori

Abbiamo visto che ogni neurone visivo è caratterizzato dal suo campo recettivo [3]. Questo è classicamente definito come il dominio \mathbf{M} della retina a cui il neurone è sensibile. Poiché il piano retinico \mathbf{M} è bidimensionale, indicheremo con $(x, y) \in \mathbf{M}$ un suo punto generico.

Il *profilo recettore* (RP) di un neurone visivo agisce come un filtro sull'immagine e si definisce come la funzione $\Psi(x, y) : \mathbf{M} \rightarrow \mathbb{R}$ che misura la risposta neurale alla stimolazione puntuale nel punto (x, y) : assumerà quindi valori positivi in corrispondenza delle regioni "ON" e negativi in corrispondenza di quelle "OFF".

Quando uno stimolo visivo $I(x, y) : \mathbf{M} \rightarrow \mathbb{R}^+$ attiva lo strato retinico, le cellule centrate nei punti $(x, y) \in \mathbf{M}$ processano in parallelo gli stimoli retinici con i loro profili recettori.

Le cellule del corpo genicolato laterale rispondono alla luce circa nello stesso modo delle cellule gangliari della retina, avendo analoghi campi recettivi centro-on e centro-off e risposte simili al colore.

È possibile modellare questi profili recettori attraverso il Laplaciano di una Gaussiana. Posto $G(x, y) = e^{-(x^2+y^2)}$, il profilo recettore di una cellula gangliare sarà:

$$\Psi_0(x, y) = \Delta G(x, y) \quad (3.2)$$

La funzione definita in (3.2) si definisce filtro madre, e sopra ogni altro punto fissato vi è una cellula analoga, che si ottiene per traslazione:

$$\Psi_{x,y}(\xi, \eta) = \Psi_0(x - \xi, y - \eta).$$

Stessi profili recettori si trovano nel Nucleo Genicolato Laterale.

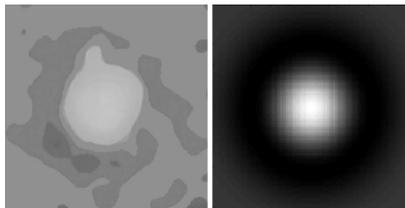
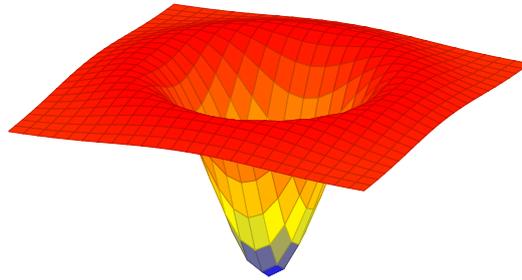


Figura 3.2: A *sinistra*: una misura del RP di una cellula LGN[5]. A *destra*: un RP di una cellula LGN modellata come Laplaciano di una Gaussiana.

Laplaciano di una Gaussiana



3.5 Risposta delle cellule e connettività orizzontale del LGN

Se la retina è sottoposta ad uno stimolo visivo puntiforme in un punto (x, y) , la risposta della cellula è descritta dalla funzione $\Psi_{x,y}$. Se invece sulla retina è proiettato uno stimolo visivo $I(x, y)$, allora la cellula corticale provvederà a integrare gli stimoli che provengono dai diversi punti, con densità dipendente dall'intensità dello stimolo visivo. L'output della cellula sarà quindi in generale descrivibile mediante un integrale:

$$\begin{aligned} O(x, y)_{LGN} &= \int \Psi_{(x,y)}(\xi, \eta) \log I(\xi, \eta) d\xi d\eta = \\ &= \int \Psi_0(x - \xi, y - \eta) \log I(\xi, \eta) d\xi d\eta = (\Psi_0 * \log I)(x, y). \end{aligned}$$

Perciò l'output delle cellule nel LGN in risposta al segnale visivo è:

$$O(x, y)_{LGN} = (\Delta G * \log I)(x, y).$$

Il modo classico per determinare la forma del profilo recettore, una volta formulata l'ipotesi di linearità dell'azione dei filtri, è quello di stimolare la retina con uno stimolo puntiforme e unitario. Questo può essere rappresentato da una delta di Dirac e quindi, per le proprietà descritte nella sezione 2.1, si trova

$$O(x, y)_{LGN} = (\Psi_0 * \delta)(x, y) = \Psi_0(x, y).$$

Si può quindi misurare la regione di attivazione che determina il profilo recettore.

L'output delle cellule del LGN si propaga attraverso la connettività orizzontale nel LGN stesso. Tale connettività è isotropa e può essere modellizzata dalla soluzione fondamentale di Poisson

$$\Gamma(x, y) = -\frac{1}{2\pi} \log \sqrt{x^2 + y^2}.$$

In modo analogo alle cellule del LGN, la connettività laterale agisce sull'output $O(x, y)_{LGN}$, con forza $\Gamma(x, y)$, dando un totale contributo pari a

$$\Phi(x, y) = \frac{1}{2} \left(\Gamma(x, y) * \Delta \log I(x, y) \right). \quad (3.3)$$

Per quanto visto precedentemente, sappiamo che per le proprietà della convoluzione, questo è equivalente a dire

$$\Phi(x, y) = \frac{1}{2} \left(\Delta \Gamma(x, y) * \log I(x, y) \right)$$

dove $\Delta \Gamma(x, y)$ si comporta come una Delta di Dirac. Perciò, omettendo la costante, si trova

$$\Phi = \Delta \Gamma * \log I = \delta * \log I = \log I.$$

Ciò vuol dire che in output viene restituito lo stimolo visivo. Si dice che l'azione è *duale* in senso differenziale.

Conclusioni

Nel modello Retinex abbiamo dunque trovato l'equazione (1.4):

$$\Delta \log f = \Delta \log I,$$

dove I è data in input.

Per la proposizione 3.2.1, questa è una equazione di Poisson con soluzione

$$\int \Gamma(\xi - x, \eta - y) \Delta \log I(x, y) dx dy.$$

Questo è equivalente ad affermare che la soluzione dell'equazione (1.4) è

$$\log f(x, y) = \Gamma(x, y) * \Delta \log I(x, y).$$

D'altra parte, nel capitolo 3 siamo giunti alla conclusione che l'azione congiunta delle cellule del LGN e della connettività laterale, dà un output descritto dalla formula (3.3)

$$\Phi(x, y) = \frac{1}{2} \left(\Gamma(x, y) * \Delta \log I(x, y) \right).$$

Dunque si trova che formalmente l'equazione (3.3) è equivalente a provare che

$$\Phi(x, y) = \log f(x, y).$$

Ricordando poi che l'equazione (1.4) rappresenta l'equazione di Eulero-Lagrange del funzionale (1.6)

$$F(x, y) = \iint \frac{|\nabla f(x, y) - A(x, y)f(x, y)|^2}{f(x, y)^2} dx dy$$

possiamo dire che il funzionale (1.6) è l'energia invariante sottostante all'equazione Retinex di Poisson (1.4) la cui soluzione è l'azione della connettività del LGN rappresentata dall'equazione (3.3).

Poiché i risultati ottenuti dal modello Retinex e dallo studio delle cellule LGN coincidono, possiamo concludere che le nostre cellule sono responsabili della nostra percezione del contrasto di colore. In particolare, operano in modo che venga soddisfatto il sistema:

$$\begin{cases} A_x = \frac{1}{g} \frac{\partial g}{\partial x} \\ A_y = \frac{1}{g} \frac{\partial g}{\partial y} \end{cases} \quad (3.4)$$

Poiché il vettore (A_x, A_y) rappresenta l'immagine di scala di grigi, e il gradiente percepito è dato dalla derivata covariante, l'equazione (3.4) equivale a dire che il sistema visivo si adatta all'immagine in una data area cioè che il colore percepito dipende dallo sfondo.

Per esempio nell'immagine sottostante lo sfondo è lineare in x :

$$S = \alpha \cdot x,$$

dove α è costante.



Osserviamo che

$$\log(I) - (\alpha \cdot x)$$

differisce dal $\log(I)$ per una funzione armonica. La funzione percepita $\log(f)$ sarà pertanto $\log(I) - (\alpha \cdot x)$. La striscia che è di colore costante c verrà quindi percepita come una funzione decrescente

$$\log(f) = c - (\alpha \cdot x).$$

In definitiva, le cellule del LGN implementano fisiologicamente il meccanismo percettivo modellato dal Retinex, e sono quindi responsabili della percezione in modo indipendente dall'illuminazione.

Bibliografia

- [1] E. Belardinelli e C. Bonivento, *Elementi di teoria delle distribuzioni*, Bologna, Patron, 1968.
- [2] A. Blake, *Boundary conditions for lightness computation in mondrian world*, Comput. Vis. Graph. Image Process. vol. 32, pp. 314 – 327, 1985.
- [3] G. Citti e A. Sarti, *Functional architecture of Lateral Geniculate Nucleus* in “Neuromathematics of Vision”, edited by G.Citti, A.Sarti, pp. 131-171, Springer, 2014.
- [4] G. Citti e A. Sarti, *Geometria differenziale per il completamento percettivo*, La Matematica nella Società e nella Cultura, vol. 1, pp. 107 – 130, 2008.
- [5] G.C. De Angelis, I. Ozhawa, R.D. Freeman, *Receptive-field dynamics in the central visual pathways*, Trends Neurosci., vol. 18, no. 10, pp. 451 – 458, 1995.
- [6] T. Georgiev, *Covariant derivatives and vision*, 2006.
- [7] B.K.P.Horn, *Determining lightness from an image*, Comput. Graph. Image Process., vol. 3, no.1, pp. 277 – 299, 1974.
- [8] D. Hubel, *Eye, brain and vision*, Scientific American Library, New York, 1988.
- [9] J. Jost, *Riemannian Geometry and Geometric Analysis*, Springer, 2008.
- [10] G. Kanizsa, *La grammatica del vedere*, il mulino, Bologna, 1980.
- [11] J.M. Morel, A.B. Petro e C. Sbert, *A PDE Formalization of Retina Theory*, IEEE Trans Image Process, vol.19, no.11, pp. 282-537 , 2010.
- [12] J. Petitot, *Neurogéométrie de la vision*, Les Editions de l’Ecole Polytechnique, Distribution Ellipses, Paris, 2008.

- [13] D. Terzepoulos, *Image analysis using multigrid relaxation methods*, IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell., vol. 8, no. 2, pp. 129 – 139, 1986.