

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

Scuola di Scienze
Corso di Laurea in Fisica

CONDENSAZIONE DI BOSE-EINSTEIN IN TRAPPOLE OTTICHE

Relatore:
Prof. Fabio Ortolani

Presentata da:
Elena Redaelli

Sessione I
Anno Accademico 2013/2014

A coloro che mi hanno sostenuto
ed a Tanne, come promesso

Sommario

Questo lavoro di tesi si occupa dello studio del fenomeno di condensazione di Bose-Einstein sia da un punto di vista teorico che, in maniera più accennata, da quello pratico-sperimentale; risulta pertanto strutturato in due parti.

La prima è incentrata sull'analisi prettamente teorico-matematica dell'argomento, e si apre con l'introduzione dell'opportuno apparato formale atto alla trattazione della statistica quantistica; a tal proposito vengono definiti gli operatori di densità. Quindi viene affrontato il problema dell'indistinguibilità degli enti quantistici e del conseguente carattere di simmetria delle funzioni d'onda, individuando così la differenza tra particelle fermioniche e bosoniche. Di queste ultime vengono largamente studiate la statistica cui esse rispondono e le loro principali caratteristiche termodinamiche. Infine, viene analizzato il caso specifico del gas ideale di Bose, trattato nei limiti del continuo e termodinamico; è nel corso di questa trattazione che emerge il fenomeno di transizione chiamato condensazione di Bose-Einstein, di cui vengono ampiamente studiate le proprietà.

La seconda parte, invece, è volta all'analisi delle tecniche sperimentali utilizzate per la realizzazione della condensazione, in particolare le trappole ottiche di dipolo; dopo averne studiato le caratteristiche, vengono illustrate alcune tecniche di raffreddamento di atomi intrappolati. Il lavoro si conclude con la trattazione delle principali tecniche diagnostiche e di riconoscimento del condensato.

Indice

Introduzione	vii
1 Gli operatori di densità	1
1.1 Definizione di $\hat{\rho}$	1
1.2 Proprietà dell'operatore densità	3
1.3 Applicazioni di $\hat{\rho}$ in termodinamica statistica	3
2 La simmetria delle funzioni d'onda	7
2.1 Parità delle funzioni d'onda	7
2.2 Sistemi di particelle non interagenti	8
3 La statistica dei sistemi bosonici	11
3.1 La statistica di Bose-Einstein	11
3.2 Principali funzioni termodinamiche	15
4 Il gas ideale bosonico	19
4.1 Gas di bosoni nel limite del continuo	19
4.2 La condensazione di Bose-Einstein	22
4.3 L'equazione di stato	25
5 Realizzazione del BEC in trappole ottiche	29
5.1 Trappole ottiche di dipolo	30
5.2 Tecniche di raffreddamento	35
5.3 Analisi e riconoscimento del condensato	37
6 Conclusioni	41
Bibliografia	43

Introduzione

Il fenomeno di condensazione di Bose-Einstein, ovvero la realizzazione di un particolare stato della materia nel quale si manifestano comportamenti quantistici macroscopici, fu predetto per la prima volta da Bose ed Einstein tra gli anni 1924-'25. La meccanica quantistica stava allora muovendo i suoi primi passi, ed i concetti di spin, particelle bosoniche o fermioniche erano ancora in fase di elaborazione. Quando i calcoli stessi portarono alla predizione di un fenomeno così particolare e totalmente inaspettato, Einstein stesso se ne stupì fortemente.

Nonostante il forte interesse che immediatamente sorse nel trovare conferme sperimentali di quanto la teoria prevedeva, dovettero passare numerosi decenni prima che si riuscisse ad osservarne qualcuna. Le estreme condizioni di densità e temperatura necessarie, infatti, richiedevano uno sviluppo tecnologico nelle tecniche di raffreddamento ed intrappolamento di atomi che non fu disponibile fino agli anni '90. Fu solo allora che, grazie alle prime trappole magneto-ottiche, vennero osservati i primi BEC (*Bose-Einstein condensate*). Da allora, gli apparati sperimentali hanno subito un ulteriore decisivo sviluppo e i laboratori che oggi realizzano e studiano la condensazione sono numerosissimi. Nonostante siano passati ormai diversi anni e molte informazioni siano state acquisite, proprio per i suoi peculiari comportamenti quantistici macroscopici, difficilmente riscontrabili in altri sistemi, il BEC è tutt'oggi oggetto di numerose ricerche.

Questo lavoro ha come scopo illustrare la teoria fisico-matematica da cui emerge il fenomeno di condensazione e descrivere, almeno in termini qualitativi, le principali tecniche sperimentali adottate in questo campo.

Capitolo 1

Gli operatori di densità

Per uno studio esaustivo della statistica dei sistemi quantistici appare opportuno introdurre una famiglia di operatori, definiti di densità, strumento molto efficace in questo campo.

1.1 Definizione di $\hat{\rho}$

Sia dato un sistema isolato ad N componenti; questo risulta descritto dalla funzione d'onda totale $\Psi(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N, t) = \langle \vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N | \Psi(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N, t) \rangle$, che deve soddisfare la ben nota equazione di Schrödinger:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\Psi(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N, t)\rangle = \hat{H} |\Psi(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N, t)\rangle \quad (1.1)$$

La funzione d'onda può essere riscritta in forma separata:

$$\Psi(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N, t) = \Psi_E(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N) \exp\left(-\frac{i}{\hbar} E t\right) \quad (1.2)$$

dove la parte spaziale Ψ_E rappresenta un'autofunzione dell'operatore hamiltoniano \hat{H} con autovalore E, energia del sistema. Sia ora un qualsiasi osservabile f , rappresentato dall'operatore quantomeccanico \hat{f} ; il suo valore di aspettazione relativo al microstato $\Psi_E^{(i)}$ è definito da:

$$\langle \Psi_E^{(i)} | \hat{f} | \Psi_E^{(i)} \rangle = \int d^3r_1 \dots d^3r_N \Psi_E^{*(i)} \hat{f} \Psi_E^{(i)} \quad (1.3)$$

E' ora possibile definire la media dei valori di aspettazione, cioè ciò che si ottiene iterando la procedura di misura su un set di sistemi identici:

$$\langle \hat{f} \rangle = \sum_i \rho_i \langle \Psi_E^{(i)} | \hat{f} | \Psi_E^{(i)} \rangle \quad (1.4)$$

dove ρ_i rappresenta la probabilità relativa all' i -esimo microstato.

La formula precedente contiene però soltanto i valori di aspettazione diagonali e pertanto non rappresenta il caso più generale possibile; in meccanica quantistica infatti sono ammesse situazioni in cui il valor medio si ottiene computando la sommatoria anche sugli elementi non diagonali:

$$\langle \hat{f} \rangle = \sum_{i,k} \rho_{ki} \langle \Psi_E^{(i)} | \hat{f} | \Psi_E^{(k)} \rangle \quad (1.5)$$

Quest'espressione segue naturalmente dalla precedente se si espande il microstato $\Psi_E^{(i)}$ su un set ortonormale completo ϕ_k :

$$| \Psi_E^{(i)} \rangle = \sum_k c_k^{(i)} | \phi_k \rangle \quad (1.6)$$

Inserendo ora l'equazione (1.6) in (1.4), si ottiene:

$$\begin{aligned} \langle \hat{f} \rangle &= \sum_i \rho_i \sum_{j,k} c_j^{*(i)} c_k^{(i)} \langle \phi_j | \hat{f} | \phi_k \rangle = \sum_{j,k} \left(\sum_i \rho_i c_j^{*(i)} c_k^{(i)} \right) \langle \phi_j | \hat{f} | \phi_k \rangle = \\ & \sum_{j,k} \rho_{kj} \langle \phi_j | \hat{f} | \phi_k \rangle \end{aligned} \quad (1.7)$$

I numeri ρ_{kj} possono essere visti come elementi di matrice di un operatore $\hat{\rho}$, chiamato operatore densità, nella base ϕ_k :

$$\rho_{kj} = \rho_i c_j^{*(i)} c_k^{(i)} = \langle \phi_k | \hat{\rho} | \phi_j \rangle \quad (1.8)$$

Tali coefficienti rappresentano, per $j = k$, la probabilità che il sistema si trovi nello stato $|\phi_k\rangle$ oppure, in caso contrario, la probabilità di una transizione spontanea da $|\phi_k\rangle$ a $|\phi_j\rangle$.

L'equazione (1.7) diventa dunque:

$$\begin{aligned} \langle \hat{f} \rangle &= \sum_{j,k} \rho_{kj} \langle \phi_j | \hat{f} | \phi_k \rangle = \sum_{j,k} \langle \phi_k | \hat{\rho} | \phi_j \rangle \langle \phi_j | \hat{f} | \phi_k \rangle \\ &= \sum_j \langle \phi_k | \hat{\rho} \hat{f} | \phi_k \rangle = Tr \left(\hat{\rho} \hat{f} \right) \end{aligned} \quad (1.9)$$

ove si è fatto uso della relazione di completezza per la base scelta. Siccome la traccia di un operatore è indipendente dalla base in cui la si calcola, anche la quantità $\langle \hat{f} \rangle$ risulta godere di tale proprietà.

L'espressione (1.9) si riduce alla (1.4) se, naturalmente, si sceglie come base quella costituita dagli autostati di \hat{f} o di $\hat{\rho}$.

1.2 Proprietà dell'operatore densità

Vengono di seguito elencate le principali proprietà dell'operatore densità. Esso risulta hermitiano, cioè soddisfa $\hat{\rho}^\dagger = \hat{\rho}$, caratteristica che discende direttamente dalla sua definizione (eq.(1.7), (1.8)), ricordando che $\rho_i \in \mathbb{R}$:

$$\rho_{kj} = \rho_i c_j^{*(i)} c_k^{(i)} \quad \longrightarrow \quad \rho_{jk}^* = \rho_{kj} \quad (1.10)$$

Ha inoltre traccia unitaria:

$$\text{Tr}(\hat{\rho}) = \sum_k \rho_{kk} = \sum_i \rho_i \left(\sum_k |a_k^{(i)}|^2 \right) = \sum_i \rho_i = 1 \quad (1.11)$$

in virtù della normalizzazione ad 1 dei coefficienti ρ_i .

Infine, l'operatore densità risponde all'equazione di von Neumann, che ne descrive l'evoluzione nel tempo:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \hat{\rho} = [\hat{H}; \hat{\rho}] \quad (1.12)$$

Nel caso in cui $\hat{\rho}$ commuti con l'hamiltoniano, quindi, la sua derivata temporale è nulla: si parla in tal caso di operatore stazionario.

1.3 Applicazioni di $\hat{\rho}$ in termodinamica statistica

Grazie alle premesse fatte nelle sezioni precedenti, è ora possibile formulare la descrizione dell'ensemble statistico con il formalismo introdotto.

Dato un ensemble stazionario (per il quale dunque la relazione (1.12) deve eguagliare a zero), risulta utile utilizzare come base il set completo $|\Phi_k\rangle$ di autostati dell'hamiltoniana:

$$\hat{H} |\Phi_k\rangle = |\Phi_k\rangle E_k \quad (1.13)$$

In tale base, infatti, l'operatore densità deve risultare diagonale e, quindi, i suoi elementi di matrice devono avere la forma $\rho_{kj} = \rho_k \delta_{k,j}$. Tale ρ_k rappresenta chiaramente la probabilità di trovare il sistema nello stato energetico $|\Phi_k\rangle$ e, di conseguenza, la probabilità di trovare, all'interno di un ensemble di sistemi identici, che uno di essi abbia energia pari ad E_k . Studiando il caso

microcanonico, si fissi ad E l'energia di un sistema isolato, conosciuta con incertezza ΔE ; in tale situazione la proprietà di equiprobabilità dei microstati porta alla seguente relazione:

$$\rho_k = \begin{cases} \frac{1}{\Omega} & \text{se } E \leq E_k \leq E + \Delta E \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad (1.14)$$

Con Ω pari al numero di stati contenuti nel livello energetico indicato. Queste probabilità sono identiche a quelle calcolate tramite l'approccio classico e permettono, tramite un parallelismo con quest'ultimo, di scrivere l'operatore densità microcanonico come:

$$\hat{\rho} = \frac{\delta(\hat{H} - E \cdot \hat{1})}{Tr(\delta(\hat{H} - E \cdot \hat{1}))} \quad (1.15)$$

Nel caso canonico, invece, L'operatore di densità ha la forma:

$$\hat{\rho} = \frac{\exp\{-\beta\hat{H}\}}{Tr(\exp\{-\beta\hat{H}\})} \quad (1.16)$$

espressione in cui l'esponenziale si computa secondo la serie di Taylor e β vale $1/kT$, con k la costante di Boltzmann.

L'equazione (1.16) si semplifica nel caso in cui si scelga la rappresentazione di Heisenberg come base, in quanto l'operatore $\hat{\rho}$ diventa diagonale:

$$\rho_k = \frac{\exp\{-\beta E_k\}}{\sum_k \exp\{-\beta E_k\}} \quad (1.17)$$

In tutte le equazioni (1.15), (1.16) e (1.17) il denominatore assicura la normalizzazione ad 1 della traccia di $\hat{\rho}$, e nelle ultime due rappresenta la funzione di partizione canonica $Z_C(T, V, N)$ del sistema.

La conoscenza dell'operatore densità rende possibile la determinazione di qualunque osservabile del sistema; ricordando infatti (1.9) si può scrivere:

$$\langle \hat{f} \rangle = Tr(\hat{\rho} \hat{f}) = \frac{Tr(\exp\{-\beta\hat{H}\} \hat{f})}{Tr(\exp\{-\beta\hat{H}\})} \quad (1.18)$$

Se si studia come caso particolare l'operatore hamiltoniano si ottiene dalla precedente equazione:

$$\begin{aligned}
E = \langle \hat{H} \rangle &= Tr \left(\hat{\rho} \hat{H} \right) = \frac{Tr \left(\exp \left\{ -\beta \hat{H} \right\} \hat{H} \right)}{Tr \left(\exp \left\{ -\beta \hat{H} \right\} \right)} \\
&= -\frac{\partial}{\partial \beta} \ln \left(Tr \left(\exp \left\{ -\beta \hat{H} \right\} \right) \right) = -\frac{\partial}{\partial \beta} \ln Z_C(T, V, N) \quad (1.19)
\end{aligned}$$

Si noti che la formula ottenuta è assolutamente identica a quella derivata dallo studio classico dell'ensemble statistico.

Parimenti possono essere derivate le espressioni per le altre principali funzioni termodinamiche. Per quanto riguarda l'entropia, facendo uso di (1.16):

$$\begin{aligned}
S = \langle -k \ln(\hat{\rho}) \rangle &= -k Tr \left(\hat{\rho} \ln(\hat{\rho}) \right) \\
&= -k Tr \left(\hat{\rho} \left(-\beta \hat{H} - \ln Z_C \right) \right) = k\beta \langle \hat{H} \rangle + k \ln(Z_C) \quad (1.20)
\end{aligned}$$

Oppure si può computare l'energia libera di Helmholtz:

$$F = E - TS = \langle \hat{H} \rangle - T \left[k\beta \langle \hat{H} \rangle + k \ln(Z_C) \right] = -kT \ln(Z_C) \quad (1.21)$$

Rimane infine da studiare il caso grancanonico, per il quale è opportuno introdurre il potenziale chimico μ ed il parametro di fugacità $x = \exp \{ \beta \mu \}$, grazie ai quali si può scrivere:

$$\hat{\rho} = \frac{\exp \left\{ -\beta(\hat{H} - \mu \hat{N}) \right\}}{Tr \left(\exp \left\{ -\beta(\hat{H} - \mu \hat{N}) \right\} \right)} \quad (1.22)$$

in cui si è introdotto l'operatore numero \hat{N} , di cui il numero N di particelle costituenti il sistema è autovalore. Solo nel caso in cui N sia costante l'operatore può essere sostituito con il corrispettivo autovalore. Nel caso invece più generale in cui avviene creazione e distruzione di particelle ciò non è possibile; in queste condizioni l'operatore densità agisce su uno spazio di Hilbert generalizzato (chiamato spazio di Fock), somma diretta di spazi di Hilbert con N fissato.

Come illustrato in precedenza anche la formula (1.22) si semplifica nel caso si scelga la rappresentazione energia, in cui come già detto l'operatore densità ha forma diagonale:

$$\rho_n = \frac{\exp \{ -\beta(E_n - \mu N) \}}{\sum_{n,N} \exp \{ -\beta(E_n - \mu N) \}} \quad (1.23)$$

Si può notare immediatamente che la funzione di partizione grancanonica $Z(T, V, \mu)$ può essere scritta come la somma su tutte le funzioni di partizione canoniche con N costante, pesate tramite la fugacità:

$$\begin{aligned} Z(T, V, \mu) &= \sum_{n, N} \exp \{-\beta(E_n - \mu N)\} = \sum_{N=0}^{\infty} \exp \{-\beta\mu\}^N \sum_n \exp \{-\beta E_n\} \\ &= \sum_{N=0}^{\infty} x^N Z_C(T, V, N) \end{aligned} \quad (1.24)$$

Se ora si ricalcolano le funzioni termodinamiche, si trova per l'entropia:

$$S = \langle -k \ln(\hat{\rho}) \rangle = k\beta \langle \hat{H} \rangle + k \ln(Z) - k\beta\mu \langle \hat{N} \rangle \quad (1.25)$$

Infine, al posto dell'energia libera F è opportuno introdurre il potenziale grancanonico, definito da:

$$\Phi = E - TS - \mu N = -kT \ln(Z) \quad (1.26)$$

Capitolo 2

La simmetria delle funzioni d'onda

Nel corso di questo capitolo verrà affrontato il problema della parità delle funzioni d'onda per sistemi a molte componenti; in particolare verrà trattato il collegamento con il principio di indistinguibilità tra particelle identiche, proprietà fondamentale degli enti quantomeccanici.

L'indistinguibilità è una caratteristica pregnante della meccanica quantistica che non ha una controparte nella teoria classica, in quanto per quest'ultima è sempre possibile seguire la traiettoria di una particella; per distinguere più enti è dunque sufficiente etichettarli con le loro condizioni iniziali. In fisica quantistica invece, venendo meno il concetto stesso di traiettoria, non è più possibile assegnare un'individualità alla singola particella.

Questo fatto ha, come verrà in seguito illustrato, notevoli conseguenze sulla funzione d'onda dei sistemi a più componenti.

2.1 Parità delle funzioni d'onda

Richiedere che un sistema tenga conto dell'indistinguibilità delle sue componenti equivale a rendere qualsiasi suo osservabile (ed in particolare l'hamiltoniana \hat{H}) indipendente da ogni modificazione nella numerazione delle particelle stesse.

E' noto che ad ogni proprietà di simmetria di \hat{H} corrisponde un operatore che commuta con quest'ultima. Nel caso in esame, gli operatori da tenere in considerazione sono i cosiddetti operatori di scambio \hat{P}_{ik} , così definiti in quanto operano una trasposizione di indici sulla funzione d'onda:

$$\hat{P}_{ik} |\Psi(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_i, \dots, \vec{r}_k, \dots, \vec{r}_N)\rangle = |\Psi(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_k, \dots, \vec{r}_i, \dots, \vec{r}_N)\rangle \quad (2.1)$$

Si può facilmente dimostrare, applicando due volte \hat{P}_{ik} a $|\Psi\rangle$, che gli autovalori λ di tale operatore devono soddisfare $\lambda^2 = 1$; sono quindi presenti due possibilità: $\lambda = 1$, ed in tal caso la funzione viene definita pari, oppure $\lambda = -1$, in corrispondenza del quale la funzione risulta dispari.

Più in generale è possibile introdurre l'operatore di permutazione \hat{P} , il quale opera appunto una permutazione sul set di numeri $(1, 2, \dots, N)$, trasformandolo nella N-upla (P_1, P_2, \dots, P_N) :

$$\hat{P} |\Psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N)\rangle = |\Psi(\vec{r}_{P_1}, \vec{r}_{P_2}, \dots, \vec{r}_{P_N})\rangle \quad (2.2)$$

La teoria afferma che una qualsiasi permutazione della N-upla $(1, 2, \dots, N)$ è scomponibile in semplici trasposizioni; tale scomposizione non è univoca, ma la parità del numero di scambi necessari lo è: in base a ciò le permutazioni vengono divise in pari o dispari.

Applicando la teoria appena illustrata, è dunque possibile affermare che partendo da una generica funzione d'onda $\Psi(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N)$, ne si può ottenere la f.d.o. totalmente simmetrica e totalmente antisimmetrica eseguendo la somma con opportuni coefficienti su tutte le permutazioni P possibili:

$$|\Psi(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N)\rangle^S = C_S \sum_P \hat{P} |\Psi(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N)\rangle \quad (2.3)$$

$$|\Psi(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N)\rangle^A = C_A \sum_P (-1)^P \hat{P} |\Psi(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N)\rangle \quad (2.4)$$

C_S e C_A implementano la normalizzazione, mentre il coefficiente presente in (2.4) vale:

$$(-1)^P = \begin{cases} +1 & \text{per permutazione pari} \\ -1 & \text{per permutazione dispari} \end{cases}$$

Le particelle esistenti si classificano dunque in due gruppi: i bosoni, rappresentati da f.d.o. pari, ed i fermioni, le cui f.d.o. sono dispari; da qui in poi verranno analizzati, in base agli scopi di questo lavoro, solo i primi.

2.2 Sistemi di particelle non interagenti

Si prenda in esame un sistema di N bosoni non interagenti, la cui hamiltoniana totale risulta dunque separabile in operatori di singola particella:

$$\hat{H}(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N, \vec{p}_1, \dots, \vec{p}_N) = \sum_{i_1}^N \hat{h}(\vec{r}_i, \vec{p}_i) \quad (2.5)$$

Per ciascun operatore \hat{h}_i , corrispondente all' i -esima componente, l'equazione agli autovalori, che si suppone essere risolta, si scrive:

$$\hat{h}_i |\phi_{k_i}(\vec{r}_i)\rangle = |\phi_{k_i}(\vec{r}_i)\rangle \epsilon_{k_i} \quad (2.6)$$

Per semplicità, si adotta la convenzione $|\phi_{k_i}(\vec{r}_i)\rangle = |k_i\rangle$.

A questo punto è possibile costruire la funzione d'onda totale, autofunzione di \hat{H} , come prodotto diretto delle N f.d.o di singola particella; questa apparterrà allo spazio di Hilbert \mathcal{H} dato dalla somma diretta degli spazi di singola particella \mathcal{H}_i .

$$\Psi_{k_1, \dots, k_N}^{TOT} = \prod_{i=1}^N \phi_{k_i} \quad \Leftrightarrow \quad |k_1, \dots, k_N\rangle = |k_1\rangle |k_2\rangle \dots |k_N\rangle \quad (2.7)$$

dove si è sfruttato $\langle \vec{r}_i | k_i \rangle = \phi_{k_i}(\vec{r}_i)$. L'insieme $|k_1, \dots, k_N\rangle$ forma una base ortonormale generalizzata completa per \mathcal{H} ; la dimostrazione si basa sul fatto che i $|k_i\rangle$ lo sono per lo spazio \mathcal{H}_i . Si possono dunque enunciare le seguenti proprietà di ortonormalità generalizzata e completezza:

$$\langle k'_1, \dots, k'_N | k_1, \dots, k_N \rangle = \delta(k'_1 - k_1) \dots \delta(k'_N - k_N) \quad (2.8a)$$

$$\hat{1} = \sum_{k_1, \dots, k_N} |k_1, \dots, k_N\rangle \langle k_1, \dots, k_N| \quad (2.8b)$$

La f.d.o. costruita in (2.7) non ha però parità definita, come invece richiesto dalla teoria per un sistema di particelle bosoniche; occorre dunque simmetrizzarla, ricorrendo alla procedura (2.3):

$$|k_1, \dots, k_N\rangle^S = \frac{1}{\sqrt{N!C_S}} \sum_P \hat{P} |k_1, \dots, k_N\rangle \quad (2.9)$$

Il fattore di normalizzazione C_S è stato aggiunto per correggere la normalizzazione a $(N!)^{-\frac{1}{2}}$, che risulta esatta solo nel caso in cui tutte le particelle si trovino in stati quantici diversi. Il calcolo combinatorio prevede che se in ciascuno stato k_i si trovano n_i particelle, il fattore di normalizzazione diventa:

$$\frac{1}{\sqrt{N!C_S}} = \frac{1}{\sqrt{N!n_1!n_2! \dots}} \quad (2.10)$$

in quanto il semplice $\sqrt{N!}$ terrebbe in tal caso conto anche degli scambi tra particelle nello stesso stato, cosa che anche dal punto di vista classico (senza cioè prevedere l'indistinguibilità) non porta a nessun cambiamento del

sistema. Bisogna ora provare che l'insieme di funzioni d'onda così costruito è ortonormale e completo, sfruttando le relazioni (2.8):

$$\begin{aligned} {}^S \langle k'_1, \dots, k'_N | k_1, \dots, k_N \rangle^S &= \frac{1}{N! \sqrt{C'_S C_S}} \sum_{P, P'} \langle k'_{P'_1}, \dots, k'_{P'_N} | k_{P_1}, \dots, k_{P_N} \rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{C'_S C_S}} \sum_P \langle k'_1, \dots, k'_N | k_{P_1}, \dots, k_{P_N} \rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{C'_S C_S}} \sum_P \delta(k'_1 - k_{P_1}) \dots \delta(k'_N - k_{P_N}) \quad (2.11a) \end{aligned}$$

$$\hat{1}^S = \frac{1}{N!} \sum_{k_1, \dots, k_N} {}^S |k_1, \dots, k_N\rangle \langle k_1, \dots, k_N|^S \quad (2.11b)$$

Nella relazione (2.11a) si è sfruttato il fatto che una doppia somma su tutte le permutazioni possibili equivale ad una somma singola dello stesso tipo, moltiplicata per $N!$; si noti la presenza del termine di normalizzazione $(C'_S C_S)^{-\frac{1}{2}}$ che tiene di nuovo conto delle possibilità di molteplici indici k_i ripetuti.

Analizzando l'equazione (2.11b), rimane da dimostrare che l'operatore $\hat{1}^S$ è effettivamente l'identità nello spazio di Hilbert \mathcal{H}_S delle f.d.o. simmetriche:

$$\begin{aligned} \hat{1}^S |k_1, \dots, k_N\rangle^S &= \frac{1}{N!} \sum_{k'_1, \dots, k'_N} |k'_1, \dots, k'_N\rangle^S {}^S \langle k'_1, \dots, k'_N | k_1, \dots, k_N \rangle^S \\ &= \frac{1}{N!} \sum_{k'_1, \dots, k'_N} |k'_1, \dots, k'_N\rangle^S \frac{1}{\sqrt{C'_S C_S}} \sum_P \delta(k'_1 - k_{P_1}) \dots \delta(k'_N - k_{P_N}) \\ &= \frac{1}{N!} \sum_P |k_{P_1}, \dots, k_{P_N}\rangle^S = \frac{1}{N!} \sum_P |k_1, \dots, k_N\rangle^S = |k_1, \dots, k_N\rangle^S \quad (2.12) \end{aligned}$$

Le conseguenze del carattere di simmetria della funzione d'onda per un sistema di bosoni sono notevoli. Per esempio, perde di significato cercare di calcolare valori di aspettazione per osservabili che in qualche modo identifichino le singole particelle. Nel formalismo operatoriale ciò significa che ogni osservabile \hat{f} deve commutare con l'operatore di permutazione:

$$[\hat{f}; \hat{P}] = 0 \quad (2.13)$$

Altre notevoli conseguenze si riflettono poi sulle proprietà statistiche e termodinamiche del sistema; sono proprio queste che saranno studiate nel capitolo successivo.

Capitolo 3

La statistica dei sistemi bosonici

Grazie al formalismo introdotto nei capitoli precedenti è ora possibile trattare in maniera esaustiva la termodinamica statistica relativa a sistemi ideali di particelle bosoniche, assunte in prima approssimazione non interagenti.

3.1 La statistica di Bose-Einstein

Scopo di questo paragrafo è l'individuazione della statistica di Bose-Einstein, che descrive il comportamento del sistema bosonico oggetto di studio.

Come primo passo è necessario scrivere la funzione di partizione canonica del sistema in esame, cosa che risulta immediata ricordando quanto esposto nel paragrafo 1.3:

$$\begin{aligned} Z_C(T, V, N) &= \text{Tr} \left(\exp \left\{ -\beta \hat{H} \right\} \right) \\ &= \frac{1}{N!} \sum_{k_1, \dots, k_N} {}^S \langle k_1, \dots, k_N | \exp \left\{ -\beta \hat{H} \right\} | k_1, \dots, k_N \rangle^S \end{aligned} \quad (3.1)$$

Come in precedenza esposto, la traccia potrebbe essere calcolata in una base qualsiasi; per comodità e semplicità di calcoli si sceglie la rappresentazione dell'energia, che soddisfa le condizioni:

$$\hat{H} |k_1, \dots, k_N\rangle^S = |k_1, \dots, k_N\rangle^S E, \quad \text{con} \quad E = \sum_{i=1}^N \epsilon_{k_i} \quad (3.2)$$

Per procedere ulteriormente nei calcoli, è utile notare che per determinare lo stato totale del sistema non è necessario conoscere esattamente in quale stato

si trovano le N particelle, ma solo in numero di quelle che occupano ciascun $|k_i\rangle$; è quindi possibile introdurre un nuovo set di numeri quantici (n_1, n_2, \dots) , chiamati numeri di occupazione o popolazioni, così definiti: n_i rappresenta il numero di sottosistemi che occupano lo stato $|k_i\rangle$. Le popolazioni devono chiaramente soddisfare:

$$n_i \in N, \quad \text{con} \quad \sum_{k=1}^{\infty} n_k = N \quad (3.3)$$

Il vincolo posto nell'equazione (3.2) diventa quindi:

$$\sum_{k=1}^{\infty} n_k \epsilon_k = E \quad (3.4)$$

ove la sommatoria deve ora essere computata su tutti gli stati accessibili, come verrà da qui in seguito sottointeso.

Si possono ora riscrivere i vettori di base precedentemente introdotti con i nuovi numeri quantici, congiuntamente alle equazioni che essi soddisfano:

$$|k_1, \dots, k_N\rangle^S \equiv |n_1, n_2, \dots\rangle^S \quad (3.5a)$$

$$\hat{H} |n_1, n_2, \dots\rangle^S = |n_1, n_2, \dots\rangle^S E, \quad \text{con} \quad E = \sum_k \epsilon_k n_k \quad (3.5b)$$

L'operatore numero \hat{N} applicato a questi autostati dell'energia restituisce ancora il numero totale di bosoni presenti nel sistema; oltre a questo, in virtù del fatto che le popolazioni sono esse stesse degli osservabili, possono essere poi introdotti gli operatori \hat{n}_k , che rispondono alla seguente equazione agli autovalori:

$$\hat{n}_k |n_1, n_2, \dots, n_k, \dots\rangle^S = |n_1, n_2, \dots, n_k, \dots\rangle^S n_k \quad (3.6)$$

Si supponga ora di voler procedere al calcolo degli elementi di matrice dell'operatore $\hat{\rho}$, secondo la formula (1.16): grazie all'equazione (3.5b) ed alla proprietà di ortonormalità dei vettori di base, risulta

$$\begin{aligned} & {}^S \langle n'_1, n'_2, \dots | \hat{\rho} | n_1, n_2, \dots \rangle^S \\ &= \frac{1}{Z_C(T, V, N)} {}^S \langle n'_1, n'_2, \dots | \exp \left\{ -\beta \hat{H} \right\} | n_1, n_2, \dots \rangle^S \\ &= \frac{1}{Z_C(T, V, N)} \exp \left\{ -\beta \sum_k n_k \epsilon_k \right\} \delta_{n'_1, n_1} \delta_{n'_2, n_2} \dots \end{aligned} \quad (3.7)$$

In questa rappresentazione, gli elementi di matrice calcolati hanno una notevole interpretazione; quelli diagonali, in particolare, rappresentano la probabilità di trovare il set (n_1, n_2, \dots) all'interno del sistema:

$${}^S \langle n_1, n_2, \dots | \hat{\rho} | n_1, n_2, \dots \rangle^S = \frac{1}{Z_C(T, V, N)} \exp \left\{ -\beta \sum_k n_k \epsilon_k \right\} = P\{n_k\} \quad (3.8)$$

Le espressioni trovate sono valide nel caso canonico; per passare a quelle riguardanti il caso gran canonico, è sufficiente ricordare l'equazione (1.22):

$$\hat{\rho} = \frac{\exp \left\{ -\beta (\hat{H} - \mu \hat{N}) \right\}}{\text{Tr} \left(\exp \left\{ -\beta (\hat{H} - \mu \hat{N}) \right\} \right)} = \frac{\exp \left\{ -\beta (\hat{H} - \mu \hat{N}) \right\}}{Z(T, V, \mu)} \quad (3.9)$$

Risulta allora immediato computare

$$\begin{aligned} & {}^S \langle n'_1, n'_2, \dots | \hat{\rho} | n_1, n_2, \dots \rangle^S \\ &= \frac{1}{Z} {}^S \langle n'_1, n'_2, \dots | \exp \left(-\beta (\hat{H} - \mu \hat{N}) \right) | n_1, n_2, \dots \rangle^S \\ &= \frac{1}{Z} \exp \left\{ -\beta \sum_k n_k (\epsilon_k - \mu) \right\} \delta_{n'_1, n_1} \delta_{n'_2, n_2} \dots \end{aligned} \quad (3.10)$$

Esiste però tra le due situazioni una fondamentale differenza, che riguarda il calcolo delle funzioni di partizione canonica:

$$Z_C(T, V, N) = \sum_{\{n_k\}}^* \exp \left\{ -\beta \sum_k n_k \epsilon_k \right\} \quad (3.11a)$$

$$Z(T, V, \mu) = \sum_{\{n_k\}} \exp \left\{ -\beta \sum_k n_k (\epsilon_k - \mu) \right\} \quad (3.11b)$$

Nel primo caso, infatti, la sommatoria si estende su tutti i set permessi di numeri di occupazione, che devono rispondere al vincolo $\sum_k n_k = N$; per la funzione di partizione grancanonica invece ciò non è più richiesto, in quanto il numero N di componenti del sistema non è fissato. Si è introdotto il simbolo * per segnalare questa distinzione.

Nel primo capitolo era stata individuata la relazione (1.24) che lega le due

funzioni di partizione; essa è chiaramente ancora valida:

$$\begin{aligned}
Z(T, V, \mu) &= \sum_{N=0}^{\infty} x^N Z_C(T, V, N) \\
&= \sum_{N=0}^{\infty} x^N \sum_{\{n_k\}^*} \exp \left\{ -\beta \sum_k n_k \epsilon_k \right\} \\
&= \sum_{N=0}^{\infty} \sum_{\{n_k\}^*} \exp \left\{ -\beta \sum_k n_k (\epsilon_k - \mu) \right\} \quad (3.12)
\end{aligned}$$

Le due scritte (equazioni (3.11b) e (3.12)) chiaramente sono equivalenti, in quanto sommare su tutti i set di popolazioni con N fissato e poi su tutti gli N naturale porta al medesimo risultato che eseguire la prima sommatoria senza vincolo.

Quanto fatto finora permette di riformulare l'equazione iniziale (3.1), senza però introdurre una reale semplificazione nella computazione. In verità, questo obiettivo è difficilmente raggiungibile per quanto riguarda la funzione di partizione canonica, a causa del vincolo appena discusso sui set di popolazione su cui viene eseguita la sommatoria; siccome tal restrizione non appare nel caso grancanonico, quest'ultimo si presta ad un'ulteriore semplificazione. Per esplicitarla, si riscrive l'equazione (3.11b) nel seguente modo:

$$\begin{aligned}
Z(T, V, \mu) &= \sum_{n_1, n_2, \dots = 0}^{\infty} (\exp\{-\beta(\epsilon_1 - \mu)\})^{n_1} \cdot (\exp\{-\beta(\epsilon_2 - \mu)\})^{n_2} \dots \\
&= \prod_{i=1}^{\infty} \sum_{n_i=0}^{\infty} (\exp\{-\beta(\epsilon_i - \mu)\})^{n_i} \quad (3.13)
\end{aligned}$$

E' a questo punto immediato riconoscere nella sommatoria che appare in questa equazione un serie geometrica, il cui risultato è noto:

$$\sum_{N=0}^{\infty} q^N = \frac{1}{1-q}, \quad \text{se } q < 1 \quad (3.14)$$

La richiesta contenuta nell'equazione (3.14) è soddisfatta se, per convenzione, le energie ϵ_i vengono ordinate in maniera crescente a partire da $\epsilon_0 = 0$ ed assumendo che per sistemi bosonici risulti $\mu \leq 0$, affermazione che verrà giustificata in seguito.

Fatte queste ipotesi, l'equazione (3.13) si semplifica ulteriormente in:

$$Z(T, V, \mu) = \prod_{i=1}^{\infty} \frac{1}{1 - \exp\{-\beta(\epsilon_i - \mu)\}} = \prod_{i=1}^{\infty} \frac{1}{1 - x \exp\{-\beta\epsilon_i\}} \quad (3.15)$$

In linea di principio, l'equazione (3.12) consentirebbe di ricavare da quest'ultima espressione trovata anche la funzione di partizione canonica; i calcoli necessari sono però piuttosto complessi, e comunque non necessari se si ricorda che la natura del vincolo cui è sottoposto il sistema non ne modifica le proprietà termodinamiche.

3.2 Principali funzioni termodinamiche

In questo paragrafo verranno computate le principali funzioni termodinamiche, a partire dal potenziale grancanonico che è pari a (cfr. equazione (1.26))

$$\Phi = -kT \ln(Z) = kT \sum_K \ln(1 - x \exp\{-\beta\epsilon_i\}) \quad (3.16)$$

Siccome, in virtù del primo principio della termodinamica, vale che

$$\Phi = E - TS - \mu N = -pV$$

si possono ricavare le seguenti relazioni:

$$S(T, V, \mu) = - \left. \frac{\partial \Phi}{\partial T} \right|_{V, \mu} \quad (3.17a)$$

$$p(T, V, \mu) = - \left. \frac{\partial \Phi}{\partial V} \right|_{T, \mu} \quad (3.17b)$$

$$N(T, V, \mu) = - \left. \frac{\partial \Phi}{\partial \mu} \right|_{V, T} = kT \left. \frac{\partial \ln Z}{\partial \mu} \right|_{T, V} = \sum_k \frac{1}{x^{-1} \exp\{\beta\epsilon_k\} - 1} \quad (3.17c)$$

A queste si aggiunge poi l'equazione per l'energia del sistema

$$E(T, V, \mu) = - \left. \frac{\partial \ln(Z)}{\partial \beta} \right|_{V, x} = \sum_k \frac{\epsilon_k}{x^{-1} \exp\{\beta\epsilon_k\} - 1} \quad (3.17d)$$

E' interessante notare che le formule (3.17c) e (3.17d) corrispondono rispettivamente a $\langle \hat{N} \rangle$ e $\langle \hat{H} \rangle$, come si può dimostrare computando queste due medie statistiche. Dato un generico osservabile \hat{f} , infatti, sulla base della teoria

precedentemente esposta deve essere:

$$\begin{aligned}
\langle \hat{f} \rangle &= Tr \left(\hat{\rho} \hat{f} \right) = \frac{Tr \left(\exp \left\{ -\beta \left(\hat{H} - \mu \hat{N} \right) \right\} \hat{f} \right)}{Tr \left(\exp \left\{ -\beta \left(\hat{H} - \mu \hat{N} \right) \right\} \right)} \\
&= \frac{1}{Z} \sum_{\{n_k\}}^S \langle n_1, n_2, \dots | \exp \left\{ -\beta \left(\hat{H} - \mu \hat{N} \right) \right\} \hat{f} | n_1, n_2, \dots \rangle^S \\
&= \frac{1}{Z} \sum_{\{n_k\}} \exp \left\{ -\beta \sum_k n_k (\epsilon_k - \mu) \right\}^S \langle n_1, n_2, \dots | \hat{f} | n_1, n_2, \dots \rangle^S \\
&= \frac{1}{Z} \sum_{\{n_k\}} \exp \left\{ -\beta \sum_k n_k (\epsilon_k - \mu) \right\} f(n_1, n_2, \dots) \tag{3.18}
\end{aligned}$$

dove si è usata la notazione $f(n_1, n_2, \dots)$ per designare il valore di aspettazione dell'osservabile sullo stato $|n_1, n_2, \dots\rangle^S$.

A questo punto per quanto riguarda l'operatore numero e l'hamiltoniano, risulta:

$$\begin{aligned}
\langle \hat{N} \rangle &= \frac{1}{Z} \sum_{\{n_k\}} \exp \left\{ -\beta \sum_k n_k (\epsilon_k - \mu) \right\} \sum_k n_k \\
&= -\frac{1}{Z\beta} \frac{\partial}{\partial \mu} \left[\sum_{\{n_k\}} \exp \left\{ -\beta \sum_k n_k (\epsilon_k - \mu) \right\} \right]_{T,V} \\
&= -\frac{1}{Z\beta} \frac{\partial Z}{\partial \mu} \Big|_{T,V} = kT \frac{\partial \ln Z}{\partial \mu} \Big|_{T,V} \tag{3.19a}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle \hat{H} \rangle &= \frac{1}{Z} \sum_{\{n_k\}} \exp \left\{ -\beta \sum_k n_k (\epsilon_k - \mu) \right\} \sum_k n_k \epsilon_k \\
&= -\frac{1}{Z} \frac{\partial}{\partial \beta} \left[\sum_{\{n_k\}} \exp \left\{ -\beta \sum_k n_k (\epsilon_k - \mu) \right\} \right]_{x,V} \\
&= -\frac{1}{Z} \frac{\partial Z}{\partial \beta} \Big|_{x,V} = -\frac{\partial \ln Z}{\partial \beta} \Big|_{x,V} \tag{3.19b}
\end{aligned}$$

Questi due risultati sono, come si voleva dimostrare, i medesimi delle equazioni (3.17c) ed (3.17d).

Per completare la trattazione, si possono individuare i valori medi dei numeri

di occupazione n_k , sfruttando le relazioni

$$\langle \hat{N} \rangle = \left\langle \sum_k n_k \right\rangle = \sum_k \langle \hat{n}_k \rangle, \quad \langle \hat{H} \rangle = \left\langle \sum_k n_k \epsilon_k \right\rangle = \sum_k \langle \hat{n}_k \rangle \epsilon_k \quad (3.20)$$

Queste consentono di scrivere

$$\langle \hat{n}_k \rangle = \frac{1}{\exp \{ \beta (\epsilon_k - \mu) \} - 1} \quad (3.21)$$

L'equazione appena scritta merita alcune considerazioni. Prima di tutto, essa giustifica l'affermazione precedentemente fatta riguardo al potenziale chimico μ : se infatti esso fosse positivo, ricordando la convenzione che ha fissato $\epsilon_0 = 0$, risulterebbe $\langle \hat{n}_0 \rangle < 0$ il che è ovviamente un assurdo, essendo le popolazioni numeri interi positivi o al più nulli.

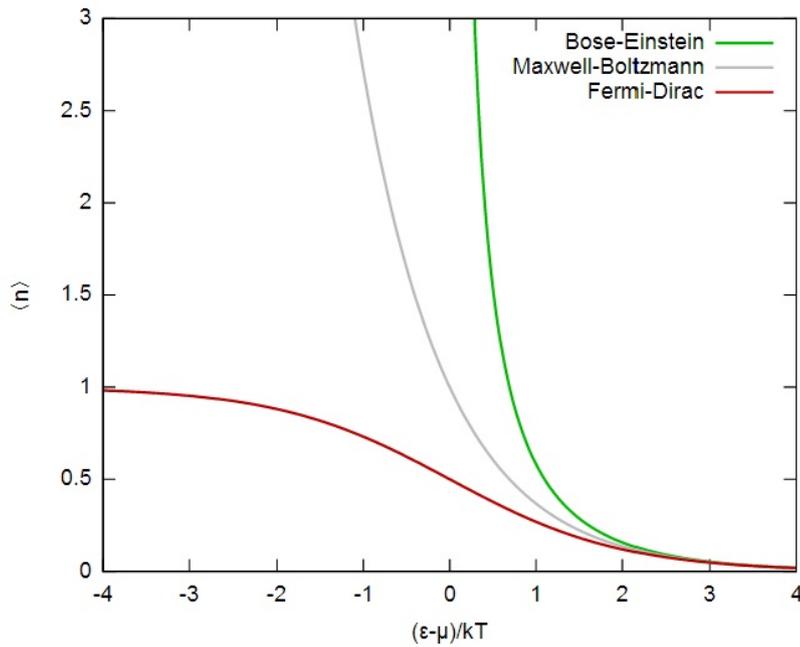


Figura 3.1: Valori medi dei numeri di occupazione per diverse statistiche

La figura 3.1 rappresenta l'andamento di $\langle \hat{n}_k \rangle$ in funzione dell'energia, in confronto con la medesima quantità calcolata però secondo la statistica di Fermi-Dirac, che si occupa delle particelle fermioniche, e quella classica di Maxwell-Boltzmann. Si nota che, per grandi valori di ϵ , le tre statistiche producono sostanzialmente i medesimi risultati. Per quanto riguarda in particolare il caso in esame in questo lavoro, cioè quello bosonico, la curva diverge nel limite $\epsilon_k \rightarrow \mu$; siccome questa situazione non ha senso fisico, questo prova che deve essere $\mu < \epsilon_k$, a conferma di quanto prima affermato.

Un ultimo parametro utile da calcolare è la fluttuazione dei valori di $\langle \hat{n}_k \rangle$, misurata dalla varianza $\sigma_{n_k}^2 = \langle \hat{n}_k^2 \rangle - \langle \hat{n}_k \rangle^2$; tramite alcuni passaggi che si basano sull'equazione (3.18), si giunge a trovare:

$$\sigma_{n_k}^2 = \frac{\exp \{ \beta (\epsilon_k - \mu) \}}{(\exp \{ \beta (\epsilon_k - \mu) \} - 1)^2} \quad \longrightarrow \quad \frac{\sigma_{n_k}^2}{\langle \hat{n}_k \rangle^2} = \frac{1}{\langle \hat{n}_k \rangle} + 1 \quad (3.22)$$

Questo risultato è di notevole importanza: le fluttuazioni relative dei numeri di occupazione sono inversamente proporzionali alle popolazioni stesse; nel limite termodinamico $N \rightarrow \infty$, dunque, esse tendono a stabilizzarsi.

Capitolo 4

Il gas ideale bosonico

Nel corso di questo capitolo, la statistica precedentemente elaborata verrà applicata nel caso particolare di un gas ideale di bosoni non relativistici. In particolare, si arriverà a trattare il particolare fenomeno della condensazione di Bose-Einstein, descrivendone le caratteristiche principali.

4.1 Gas di bosoni nel limite del continuo

Nel capitolo precedente si è ricavata la distribuzione delle popolazioni \hat{n}_k , che può essere utilizzata ora per descrivere alcune caratteristiche del gas ideale di Bose.

In tale sistema, il numero N di particelle presenti risulta fissato, mentre resta da determinare il potenziale chimico μ o, in maniera equivalente, la fugacità; sulla base di quanto detto l'equazione che consente di computare questo parametro è:

$$N = \sum_k \langle \hat{n}_k \rangle = \sum_k \frac{1}{x^{-1} \exp \{ \beta \epsilon_k \} - 1} \quad (4.1)$$

Per procedere nei calcoli, si effettua il passaggio al continuo; in queste condizioni, le sommatorie sul numero quantico k possono essere sostituite da integrali su tutto lo spazio delle fasi (\vec{q}, \vec{p}) , “normalizzati” con un fattore h^{-3} che tiene conto del principio di indeterminazione di Heisenberg:

$$\sum_k \rightarrow \frac{1}{h^3} \int d^3 \vec{q} d^3 \vec{p} = \frac{4\pi V}{h^3} \int p^2 dp = \frac{2\pi V (2m)^{\frac{3}{2}}}{h^3} \int \epsilon^{\frac{1}{2}} d\epsilon \quad (4.2)$$

Per svolgere questi passaggi si è sfruttato:

- l'integrale sullo spazio delle configurazioni apporta solo il fattore moltiplicativo V
- l'utilizzo delle coordinate sferiche consente di integrare solo sul modulo della quantità di moto p
- per particelle non relativistiche è valida l'equazione $\epsilon = p^2/2m$

Il risultato dell'integrale nell'equazione (4.2) deve essere interpretato come il numero di stati nello spazio delle fasi della singola particella; l'integrando

$$g(\epsilon) = \frac{2\pi V(2m)^{\frac{3}{2}}}{h^3} \epsilon^{\frac{1}{2}} \quad (4.3)$$

viene perciò chiamato densità degli stati in energia.

Il passaggio al continuo, quindi, consiste di fatto nel sostituire alla sommatoria su livelli di energia discreti ϵ_k l'integrale $\int g(\epsilon) d\epsilon$.

L'equazione (4.1) diventa quindi:

$$N(T, V, x) = \frac{2\pi V(2m)^{\frac{3}{2}}}{h^3} \int_0^\infty \frac{\epsilon^{\frac{1}{2}}}{x^{-1} \exp\{\beta\epsilon\} - 1} d\epsilon \quad (4.4)$$

Sfortunatamente, l'integrale che ivi compare non è computabile esattamente; lo si può trasformare, col cambio di variabile $y = \beta\epsilon$ ed introducendo il parametro $\lambda = h/\sqrt{2\pi mKT}$, in

$$\begin{aligned} N &= \frac{2\pi V(2m)^{\frac{3}{2}}}{h^3} \int_0^\infty \frac{\epsilon^{\frac{1}{2}}}{x^{-1} \exp\{\beta\epsilon\} - 1} d\epsilon \\ &= \frac{V(2\pi m)^{\frac{3}{2}}}{h^3} \beta^{-\frac{3}{2}} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{y^{\frac{1}{2}}}{x^{-1} \exp\{y\} - 1} dy \\ &= \frac{V}{\lambda^3} g_{3/2}(x) \end{aligned} \quad (4.5)$$

dove è stata introdotta la funzione $g_n(x)$

$$g_n(x) = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^\infty \frac{y^{n-1}}{x^{-1} \exp\{y\} - 1} dy$$

con $\Gamma(n)$ la funzione gamma di Eulero, che nel caso studiato ($n = 3/2$) vale $\sqrt{\pi}/2$. Una possibile semplificazione per rendere l'equazione per N più

esplicita deriva dall'espansione in serie di Taylor dell'integrando, secondo i passaggi:

$$\begin{aligned}
N &\propto \int_0^\infty \frac{y^{\frac{1}{2}}}{x^{-1}\{y\} - 1} dy \\
&= x \int_0^\infty \frac{y^{\frac{1}{2}} \exp\{-y\}}{1 - x \exp\{-y\}} dy \\
&= x \int_0^\infty y^{\frac{1}{2}} \exp\{-y\} \sum_{j=0}^\infty (x \exp\{-y\})^j dy \\
&= \sum_{j=1}^\infty x^j \int_0^\infty y^{\frac{1}{2}} \exp\{-jy\} dy \\
&= \sum_{j=1}^\infty \frac{x^j}{j^{\frac{3}{2}}} \int_0^\infty z^{\frac{1}{2}} \exp\{-z\} dz \quad (jy = z) \quad (4.6)
\end{aligned}$$

Si nota che lo sviluppo è possibile nell'ipotesi fondamentale che

$$x \exp\{-y\} = \exp\{-\beta(\epsilon - \mu)\} < 1$$

come assicurato da quanto dimostrato nel capitolo precedente, e cioè che $\mu < \epsilon$.

Poiché l'integrale che appare nell'ultimo passaggio dell'equazione (4.6) è la definizione di $\Gamma(3/2)$, ne consegue che:

$$g_{3/2}(x) = \sum_{j=1}^\infty \frac{x^j}{j^{\frac{3}{2}}} \quad \rightarrow \quad N = \frac{V}{\lambda^3} \sum_{j=1}^\infty \frac{x^j}{j^{\frac{3}{2}}} \quad (4.7)$$

Quest'ultima relazione presenta un caso notevole in occasione di $x = 1$, che si verifica per $\mu = 0$; in tale situazione infatti

$$N = \frac{V}{\lambda^3} \sum_{j=1}^\infty \frac{1}{j^{\frac{3}{2}}} = \frac{V}{\lambda^3} \zeta(3/2) \quad \rightarrow \quad \rho = \frac{N}{V\lambda^3} \approx \frac{2.612}{\lambda^3} \quad (4.8)$$

Per questi passaggi si è sfruttata la funzione zeta di Riemann, definita da

$$\zeta(n) = \sum_{j=1}^\infty \frac{1}{j^n} < \infty \quad \text{se} \quad n > 1$$

i cui valori sono tabulati.

4.2 La condensazione di Bose-Einstein

Si vuole ora studiare il limite termodinamico delle espressioni appena trovate, ottenuto formalmente secondo

$$V \rightarrow \infty, \quad N \rightarrow \infty, \quad \text{ma} \quad \rho = \frac{N}{V} = \text{costante} \quad (4.9)$$

In particolare, si vuole studiare cosa succede per $T \rightarrow 0$ (che equivale a $\beta \rightarrow \infty$).

Il passaggio è in verità molto delicato, per i motivi che vengono ora illustrati. Si supponga di voler individuare la densità ρ_E di particelle con energia $\epsilon \leq E$; l'equazione (4.4) porterebbe a scrivere:

$$\rho_E = \frac{N_E}{V} = \frac{2\pi(2m)^{\frac{3}{2}}}{h^3} \int_0^E \frac{\epsilon^{\frac{1}{2}}}{x^{-1} \exp\{\beta\epsilon\} - 1} d\epsilon \quad (4.10)$$

Se si applica ora $T \rightarrow 0$, il denominatore dell'integrando diverge e quindi $\rho_E \rightarrow 0$. Ciò non ha chiaramente senso, in quanto ci si aspetta che alle basse temperature i bosoni occupino tutti gli stati meno eccitati. La spiegazione di questa anomalia risiede nel fatto che il limite del continuo "elimina" le informazioni sullo stato fondamentale. Per poter dunque raggiungere i corretti risultati è opportuno aggiungere manualmente il contributo di questo stato, esplicitando $\langle \hat{n}_0 \rangle$ a partire dall'equazione (4.1):

$$\langle \hat{n}_0 \rangle = \frac{1}{x^{-1} - 1} = \frac{x}{1 - x} \quad (4.11)$$

A questo punto, svolgendo nuovamente i passaggi già fatti, l'equazione (4.4) diventa:

$$\begin{aligned} N &= \frac{2\pi V(2m)^{\frac{3}{2}}}{h^3} \int_0^\infty \frac{\epsilon^{\frac{1}{2}}}{x^{-1} \exp\{\beta\epsilon\} - 1} d\epsilon + \frac{x}{1 - x} \\ &= \frac{V}{\lambda^3} g_{3/2}(x) + \frac{x}{1 - x} = N_{ecc} + N_0 \end{aligned} \quad (4.12)$$

dove vengono separati i bosoni dello stato fondamentale N_0 e quelli negli stati eccitati N_{ecc} .

Si possono adesso applicare i limiti descritti in (4.9). Bisogna però distinguere due situazioni: $\mu < 0$ e $\mu = 0$; questi due casi fanno chiaramente riferimento a due diverse condizioni di temperatura, essendo $\mu = \mu(T)$.

Se $\mu < 0$, la popolazione dello stato fondamentale è finita; riscrivendo quindi l'equazione (4.12) come

$$1 = \frac{N_{ecc}}{N} + \frac{N_0}{N} \quad (4.13)$$

ed operando il limite $N \rightarrow \infty$ si trova che

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N_0}{N} = 0 \quad \longrightarrow \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N_{ecc}}{N} = 1 \quad (4.14)$$

In questa situazione, dunque, i bosoni popolano in maniera preponderante gli stati eccitati. Ciò non vuol dire che lo stato fondamentale sia vuoto: esso contiene infatti un numero di particelle finito, che quindi è trascurabile per grandi valori di N .

Rimane da studiare il caso $\mu = 0$, valore per cui N_0 diverge; la popolazione dello stato fondamentale deve quindi essere calcolata come $N - N_{ecc}$, cioè risolvendo:

$$N_0 = N - \frac{2\pi V(2m)^{\frac{3}{2}}}{h^3} \int_0^\infty \frac{\epsilon^{\frac{1}{2}}}{\exp\{\beta\epsilon\} - 1} d\epsilon \quad (4.15)$$

Per commentare questo risultato, è opportuno riscriverlo in termini delle densità:

$$\rho_0 = 1 - \frac{2\pi V(2m)^{\frac{3}{2}}}{Nh^3} \int_0^\infty \frac{\epsilon^{\frac{1}{2}}}{\exp\{\beta\epsilon\} - 1} d\epsilon \quad (4.16)$$

Poiché la densità N/V del gas rimane costante nel limite termodinamico, ora ρ_0 non si annulla più come prima, ma rimane definito. Ciò significa che in questa situazione lo stato fondamentale si popola significativamente rispetto al numero totale di particelle presenti nel sistema. Questo fenomeno è conosciuto come condensazione di Bose-Einstein, dal nome dei fisici che per primi lo descrissero durante gli anni '20.

La transizione tra i due regimi avviene ad una determinata temperatura T_B , detta temperatura di Bose o critica, che è quella per la quale il potenziale chimico da negativo si annulla. Dalla trattazione appena fatta si deduce che in prossimità di tale valore la densità dello stato fondamentale deve annullarsi anch'essa; pertanto l'equazione che determina T_B è (cfr eq. (4.16)):

$$1 = \frac{2\pi V(2m)^{\frac{3}{2}}}{Nh^3} \int_0^\infty \frac{\epsilon^{\frac{1}{2}}}{\exp\{\beta\epsilon\} - 1} d\epsilon \quad (4.17)$$

Si può a questo punto sfruttare l'elaborazione matematica elaborata nel paragrafo 4.1, nel quale si era calcolato l'integrale che appare sopra:

$$1 = \frac{V}{N\lambda^3} \zeta(3/2) \quad \longrightarrow \quad T_B = \frac{1}{k} \left(\frac{N}{V} \right)^{\frac{2}{3}} \frac{h^2}{2\pi m (\zeta(3/2))^{\frac{2}{3}}} \quad (4.18)$$

Sostituendo quest'espressione appena trovata per la temperatura critica nell'equazione che fornisce le popolazioni del ground state e degli stati eccitati

(eq (4.15) e (4.16)) nel limite termodinamico, si ottiene:

$$\frac{N_{ecc}}{N} = \begin{cases} 1, & \text{se } T \geq T_B, \\ \left(\frac{T}{T_B}\right), & \text{se } T < T_B. \end{cases} \quad (4.19)$$

$$\frac{N_0}{N} = \begin{cases} 0, & \text{se } T \geq T_B, \\ 1 - \left(\frac{T}{T_B}\right), & \text{se } T < T_B. \end{cases} \quad (4.20)$$

Ciò conferma quanto precedentemente detto: nel limite in cui il numero di particelle è arbitrariamente grande, al di sopra della temperatura critica esse occupano gli stati eccitati; al di sotto di essa, invece, il ground state inizia a popolarsi in maniera estensiva a mano a mano che la temperatura diminuisce.

Il grafico 4.1 vuole rappresentare l'andamento qualitativo del potenziale chimico in funzione della temperatura; in particolare mette in evidenza la popolazione dello stato fondamentale nel limite termodinamico.

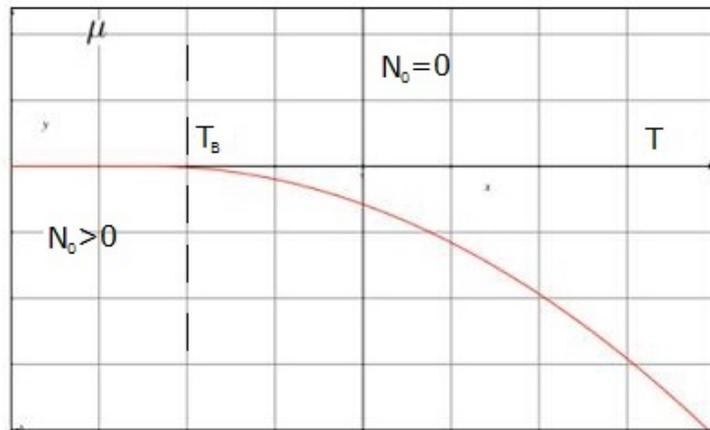


Figura 4.1: Potenziale chimico in funzione della temperatura

L'equazione che consente il calcolo della temperatura di Bose per una data densità del gas (eq (4.18)) può essere interpretata anche come risolvente per la densità critica ad una data temperatura:

$$1 = \frac{V}{N\lambda^3} \zeta(3/2) \quad \longrightarrow \quad \left(\frac{N}{V} \right)_C = \frac{\zeta(3/2)}{N\lambda^3} \quad (4.21)$$

Oppure, se è fissato il numero di particelle, essa può fornire il volume critico V_C al di sotto del quale si instaura il BEC.

In tabella 4.1 vengono riportati i valori di temperatura critica per alcune specie chimiche, data la loro densità.

Elemento	Densità (cm^{-3})	T_B (μK)
Rb	$2,11 \cdot 10^{12}$	0,03
Li	$3,31 \cdot 10^{12}$	0,49
Na	$4,89 \cdot 10^{12}$	0,20
H	$5,57 \cdot 10^{14}$	105

Tabella 4.1: Alcuni valori per la temperatura di Bose

4.3 L'equazione di stato

A completamento dello studio del gas ideale bosonico, si vuole ricavare l'equazione di stato per tale sistema ed esaminarne il comportamento al di sotto della temperatura critica.

A tale scopo si sfruttano le equazioni (3.17b) ed (3.15):

$$p = - \left. \frac{\partial \Phi}{\partial V} \right|_{T,\mu} = kT \left. \frac{\partial \ln(Z)}{\partial V} \right|_{T,\mu} \quad (4.22)$$

$$\ln(Z(T, V, \mu)) = - \sum_{i=1}^{\infty} \ln(1 - x \exp\{-\beta\epsilon_i\}) \quad (4.23)$$

L'ultima relazione, parimenti a quanto fatto per N nel limite del continuo, diventa:

$$\begin{aligned} \ln(Z(T, V, \mu)) &= - \frac{2\pi V}{h^3} (2m)^{\frac{3}{2}} \int_0^{\infty} \epsilon^{\frac{1}{2}} \ln(1 - x \exp\{-\beta\epsilon\}) d\epsilon \\ &= - \frac{2\pi V}{h^3} (2m)^{\frac{3}{2}} \frac{2}{3} \left[\ln(1 - x \exp\{-\beta\epsilon\}) \epsilon^{\frac{3}{2}} \Big|_0^{\infty} - \beta \int_0^{\infty} \frac{\epsilon^{\frac{3}{2}}}{x^{-1} \exp\{\beta\epsilon\} - 1} d\epsilon \right] \\ &= \frac{2\pi V}{h^3} (2m)^{\frac{3}{2}} \frac{2}{3} \beta \int_0^{\infty} \frac{\epsilon^{\frac{3}{2}}}{x^{-1} \exp\{\beta\epsilon\} - 1} d\epsilon \end{aligned} \quad (4.24)$$

ove è stata effettuata un'integrazione per parti del primo termine. Confrontando con quanto fatto nel paragrafo 4.1, è immediato riconoscere nell'equazione precedente la funzione $g_{5/2}(x)$, grazie alla quale è possibile scrivere in maniera compatta:

$$\ln(Z(T, V, \mu)) = \frac{V}{\lambda^3} g_{5/2}(x) \quad (4.25)$$

Questo consente di trovare l'espressione per la pressione:

$$p = kT \left. \frac{\partial \ln(Z)}{\partial V} \right|_{T, \mu} = \frac{kT}{\lambda^3} g_{5/2}(x) \quad (4.26)$$

Per commentare il risultato trovato è necessario distinguere i due range di temperatura divisi da T_B .

Sia $T \geq T_B$; in questa situazione, $x < 1$ e per $g_{5/2}(x)$ vale lo sviluppo in serie analogo a $g_{3/2}(x)$:

$$g_{5/2}(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{x^j}{j^{5/2}} \quad (4.27)$$

Piuttosto che studiare la convergenza dell'intera serie, è interessante esaminare il caso $x \ll 1$, situazione che consente di troncare l'espressione al termine di secondo ordine:

$$\frac{p\lambda^3}{kT} \approx x + \frac{x}{2^{5/2}} \quad (4.28)$$

Bisogna ora trovare tramite uno sviluppo perturbativo il parametro di fugacità x , il cui valore è determinato dall'equazione (cfr eq. (4.7)):

$$\frac{N\lambda^3}{V} = \eta = g_{3/2}(x) \quad (4.29)$$

Il parametro η è stato introdotto per comodità.

Sviluppando questa espressione in serie di potenze, e tenendo solo gli ordini più bassi, si ottiene:

$$x \approx \eta \quad \text{ordine 1,} \quad (4.30a)$$

$$x \approx \eta - \frac{\eta^2}{2^{3/2}} \quad \text{ordine 2} \quad (4.30b)$$

Inserendo infine (4.30b) in (4.28), fermandosi ancora al secondo ordine, si arriva a:

$$\frac{PV}{NkT} \eta \approx \eta - \frac{\eta^2}{2^{5/2}} \quad \longrightarrow \quad \frac{PV}{NkT} \approx 1 - \frac{\eta}{2^{5/2}} \quad (4.31)$$

Già a quest'ordine di sviluppo è possibile apprezzare una deviazione dall'espressione classica $PV = NkT$: la pressione del gas bosonico tende ad essere minore di quello classico.

Si supponga di essere ora al di sotto della temperatura critica, per cui vale $\mu = 0$ e di conseguenza $g_{5/2}(x) = \zeta(5/2)$; in queste condizioni allora

$$p = \frac{kT}{\lambda^3} \zeta(5/2) \quad (4.32)$$

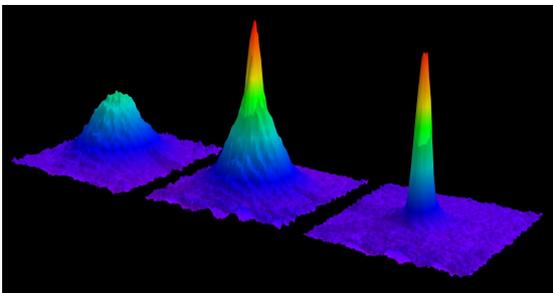
In questa situazione la pressione è indipendente dal volume ed è funzione della sola temperatura. In tali condizioni, infatti, la maggioranza delle particelle (escluso un numero finito e quindi subestensivo rispetto ad N) si trova nello stato fondamentale, che essendo caratterizzato da $\epsilon = 0$ non contribuisce alla pressione del sistema. Se dunque si aggiungessero nuovi bosoni (incrementando quindi il volume), questi andrebbero ad aggiungersi al condensato, senza però provocare alcuna variazione di p .

Capitolo 5

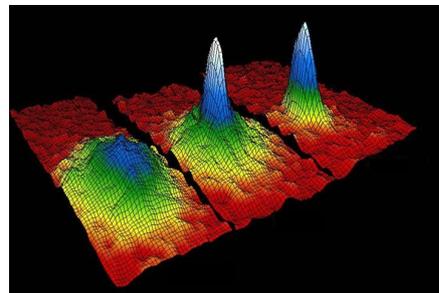
Realizzazione del BEC in trappole ottiche

Sebbene la teoria del fenomeno di condensazione di Bose-Einstein sia stata sviluppata ormai quasi un secolo fa, i primi risultati sperimentali in tale campo vennero raggiunti solo a partire dagli anni '90, quando cioè le tecniche di intrappolamento e raffreddamento di atomi furono sufficientemente sviluppate.

I primi ad osservare il BEC nel 1995 furono, in maniera indipendente, Wolfgang Ketterle nel gruppo di ricerca al MIT ed Eric Allin Cornell e Carl Wieman presso l'università del Colorado (JILA Boulder). Tutti e tre vennero poi, nel 2001, insigniti del premio nobel per tali successi sperimentali.



(a) *Atomi di Na, MIT*



(b) *Atomi di Rb, JILA*

Figura 5.1: Le prime immagini di un BEC ottenute nel 1995

5.1 Trappole ottiche di dipolo

L'intrappolamento di atomi neutri si basa essenzialmente su tre diverse interazioni:

- Trappole a pressione di radiazione;
- Trappole magnetiche, che operano grazie alla forza di dipolo magnetico in un campo disomogeneo;
- Trappole ottiche di dipolo, che basano il loro funzionamento sull'interazione tra il gradiente d'intensità della luce laser ed il dipolo elettrico indotto negli atomi.

Questo paragrafo si focalizza sullo studio delle trappole ottiche, che risultano molto versatili per numerose applicazioni, tra cui la condensazione di Bose. In questo caso, le forze in gioco hanno carattere conservativo e possono perciò essere derivate da un potenziale, come viene di seguito illustrato.

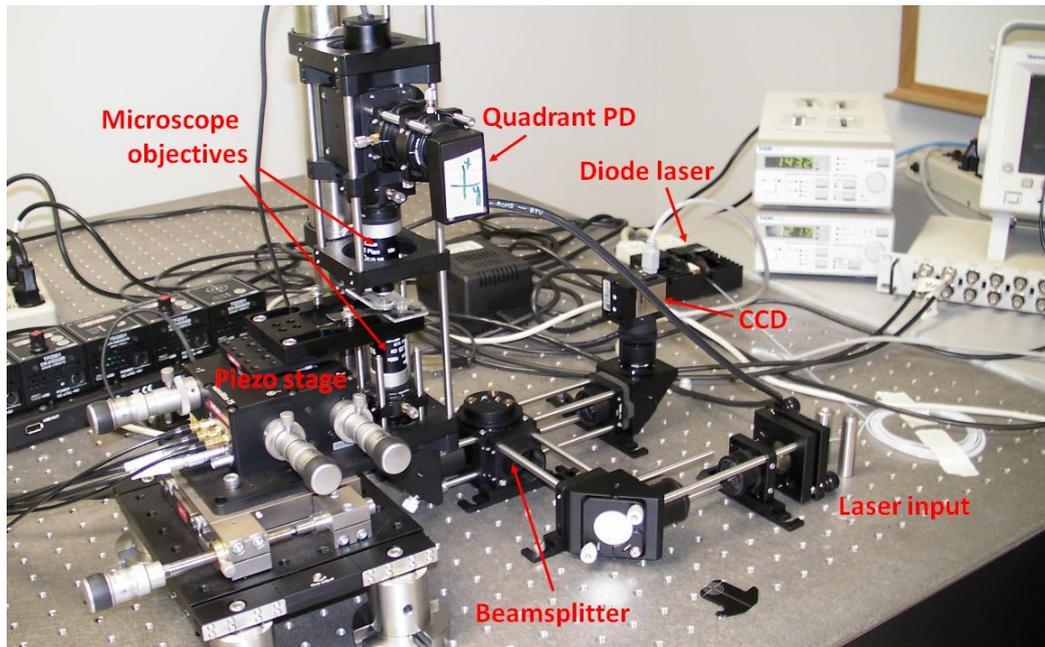


Figura 5.2: Una trappola ottica

Quando un atomo viene posto in un fascio di luce laser, il campo elettrico $\vec{E}(\vec{r}, t)$ induce un momento di dipolo $\vec{p}(\vec{r}, t)$, il quale oscilla con la stessa frequenza del campo. In notazione esponenziale, introducendo il versore di polarizzazione \hat{u} si può scrivere:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = E(\vec{r}) \exp \{-i\omega t\} \hat{u} \quad (5.1a)$$

$$\vec{p}(\vec{r}, t) = p(\vec{r}) \exp \{-i\omega t\} \hat{u} \quad (5.1b)$$

Le ampiezze E e p dei due vettori sono legate da una relazione di proporzionalità tramite la costante di polarizzabilità complessa α , che dipende dalla frequenza ω :

$$p(\vec{r}) = \alpha E(\vec{r}) \quad (5.2)$$

Ciò consente di calcolare il potenziale di interazione U , dato dalla formula:

$$U(\vec{r}) = -\frac{1}{2} \langle \vec{p} \vec{E} \rangle = -\Re(\alpha) |E|^2 = -\frac{1}{2\epsilon_0 c} \Re(\alpha) I(\vec{r}) \quad (5.3)$$

ove è stata utilizzata la relazione $I = 2\epsilon_0 c |E|^2$ che lega l'intensità della luce al modulo del campo elettrico. La forza di dipolo risultante deriva dal gradiente del potenziale:

$$F(\vec{r}) = -\nabla U(\vec{r}) = \frac{1}{2\epsilon_0 c} \Re(\alpha) \nabla I(\vec{r}) \quad (5.4)$$

L'assorbimento di energia, poi riemessa come radiazione di dipolo, da parte dell'oscillatore viene descritto dalla potenza assorbita P :

$$P(\vec{r}) = \langle \dot{\vec{p}} \vec{E} \rangle = 2\omega \Im(pE^*) = \frac{\omega}{\epsilon_0 c} \Im(\alpha) I(\vec{r}) \quad (5.5)$$

Il processo di assorbimento può essere visto come scattering dei fotoni che compongono la luce incidente, i quali vengono assorbiti e poi successivamente riemessi. Poiché ciascuno di essi trasporta un'energia pari a $\hbar\omega$, il rate di scattering risulta essere

$$\Gamma_{sc}(\vec{r}) = \frac{P}{\hbar\omega} = \frac{1}{\hbar\epsilon_0 c} \Im(\alpha) I(\vec{r}) \quad (5.6)$$

Nel campo classico, la polarizzabilità può essere ricavata dal semplice modello di Lorentz dell'oscillatore classico. Una soluzione più corretta può essere ricavata dal calcolo quantistico degli elementi di matrice di dipolo su un sistema a due stati, secondo la formula:

$$\Gamma = \frac{\omega_0^3}{3\pi\epsilon_0 \hbar c^3} |\langle e | \hat{p} | g \rangle|^2 \quad (5.7)$$

ove $|g\rangle$ e $|e\rangle$ identificano rispettivamente lo stato fondamentale ed lo stato eccitato e \hat{p} è l'operatore di dipolo elettrico.

In molti casi, però, l'approccio classico fornisce risultati che si discostano di pochi punti percentuali da quelli ottenuti tramite quello semi-classico e che possono dunque essere benissimo utilizzati.

Nel modello di Lorentz, l'elettrone di massa m e carica e è considerato legato elasticamente al nucleo con una frequenza propria di oscillazione ω_0 e sottoposto all'accelerazione da parte del campo esterno ed allo smorzamento dovuto all'emissione di radiazione di dipolo. L'equazione del moto di tale sistema è:

$$\ddot{x} + \Gamma_\omega \dot{x} + \omega_0^2 x = -\frac{eE(t)}{m} \quad (5.8)$$

Il coefficiente di frenamento Γ_ω è dato dall'equazione di Larmor:

$$\Gamma_\omega = \frac{e^2 \omega^2}{6\pi\epsilon_0 m c^3} \quad (5.9)$$

L'integrazione di (5.8) porta a determinare per il coefficiente di polarizzabilità il valore:

$$\alpha = \frac{e^2}{m} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\Gamma_\omega} = 6\pi\epsilon_0 c^3 \frac{\Gamma/\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2 - i(\omega^3/\omega_0^2)\Gamma} \quad (5.10)$$

Nell'ultimo passaggio sono state fatte le seguenti sostituzioni:

- $e^2/m = 6\pi\epsilon_0 c^3 \Gamma_\omega/\omega^2$ (in seguito a (5.9));
- $\Gamma = (\omega_0/\omega)^2 \Gamma_\omega$

Sostituendo (5.10) in (5.3) ed in (5.6) si possono trovare le espressioni esplicite per U e Γ_{sc} .

E' utile introdurre a questo punto il parametro di *detuning* $\Delta = \omega - \omega_0$. Nella maggior parte degli esperimenti, il laser utilizzato opera nella condizione chiamata di *far detuning*, cioè con una frequenza sufficientemente lontana dalla condizione di risonanza in modo tale da rendere trascurabile il termine di smorzamento; in questa situazione il calcolo fornisce:

$$U(\vec{r}) = -\frac{3\pi c^3}{2\omega_0^3} \left(\frac{\Gamma}{\omega_0 - \omega} + \frac{\Gamma}{\omega_0 + \omega} \right) I(\vec{r}) \quad (5.11a)$$

$$\Gamma_{sc}(\vec{r}) = \frac{3\pi c^3}{2\hbar\omega_0^3} \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^3 \left(\frac{\Gamma}{\omega_0 - \omega} + \frac{\Gamma}{\omega_0 + \omega} \right)^2 I(\vec{r}) \quad (5.11b)$$

Queste espressioni contengono oltre all'usuale termine di risonanza $\omega = \omega_0$ anche il termine contro-rotante $\omega = -\omega_0$; quest'ultimo risulta però trascurabile nell'approssimazione cosiddetta di onda rotante, secondo cui

$$|\Delta| \ll \omega_0 \quad (5.12)$$

In tal modo le espressioni per le quantità cercate risultano:

$$U(\vec{r}) = \frac{3\pi c^3}{2\omega_0^3} \frac{\Gamma}{\Delta} I(\vec{r}) \quad (5.13a)$$

$$\Gamma_{sc}(\vec{r}) = \frac{3\pi c^3}{2\hbar\omega_0^3} \left(\frac{\Gamma}{\Delta}\right)^2 I(\vec{r}) \quad (5.13b)$$

A livello pratico, la frequenza dell'onda laser deve essere tale da poter soddisfare entrambe le approssimazioni appena fatte, discostandosi quindi non eccessivamente dalla frequenza propria del sistema oscillante.

Una trappola ottica efficace deve limitare il più possibile i fenomeni di assorbimento e quindi il rate di scattering, favorendo invece l'interazione di dipolo; siccome Γ_{sc} dipende da I/Δ^2 , mentre il potenziale di dipolo è proporzionale a I/Δ , la soluzione ottimale è tenere un'alta intensità e grandi valori di Δ (*large detunings*).

Esistono due regioni di utilizzo di queste trappole:

- *blue detuning*: la frequenza incidente è superiore a quella di risonanza e di conseguenza $\Delta > 0$; l'energia potenziale è positiva e tende dunque a respingere gli atomi.
- *red detuning*: situazione opposta a quella precedente, con $\omega < \omega_0$ e quindi $U < 0$; l'interazione attira gli atomi all'interno del campo ed i minimi del potenziale occorrono in corrispondenza dei massimi d'intensità.

Per le applicazioni sperimentali di interesse per questo lavoro, verrà studiato solo il secondo tipo di trappole.

Si vogliono ora aggiungere alcune considerazioni riguardo al caso, più complesso di quello fino ad ora trattato, in cui gli atomi in esame possiedono una struttura interna a più livelli. Questa è la tipica situazione dei metalli alcalini, tra i primi utilizzati per gli studi sulla condensazione di Bose-Einstein soprattutto all'inizio.

L'idea di base è quella di considerare gli effetti della luce laser come una perturbazione al secondo ordine nel campo E , e quindi di primo ordine nell'intensità I . L'hamiltoniana di interazione si scrive in questo caso $\hat{H}_{pert} = -\hat{p}\vec{E}$.

34CAPITOLO 5. REALIZZAZIONE DEL BEC IN TRAPPOLE OTTICHE

La teoria perturbativa indipendente dal tempo predice, per lo stato i -esimo $|i\rangle$ con energia ϵ_i , uno shift pari a:

$$\Delta E_i = \sum_{j \neq i} \frac{|\langle j | \hat{H}_{pert} | i \rangle|^2}{\epsilon_i - \epsilon_j} \quad (5.14)$$

Nel caso semplice di un atomo a due livelli, sfruttando l'equazione (5.7), si arriva a scrivere:

$$\Delta E = \pm \frac{|\langle e | \hat{p} | g \rangle|^2}{\hbar \Delta} |E|^2 = \pm \frac{3\pi c^2 \Gamma}{2\omega_0^3 \Delta} I \quad (5.15)$$

Nel caso più generale bisogna invece conoscere gli elementi di matrice di dipolo $\langle j | \hat{p} | i \rangle$.

Gli atomi alcalini (come il litio, Li; sodio, Na; rubidio, Rb; potassio, K) sono tra i più utilizzati nelle trappole ottiche. Essi sono modellizzabili come sistemi a due stati, in cui però i livelli energetici fondamentale ed eccitato subiscono uno shift a seguito di due fenomeni fondamentali: l'interazione spin-orbita, che riguarda solo lo stato eccitato, e produce il cosiddetto splitting di struttura fine, e l'accoppiamento con lo spin nucleare, responsabile della struttura iperfine.

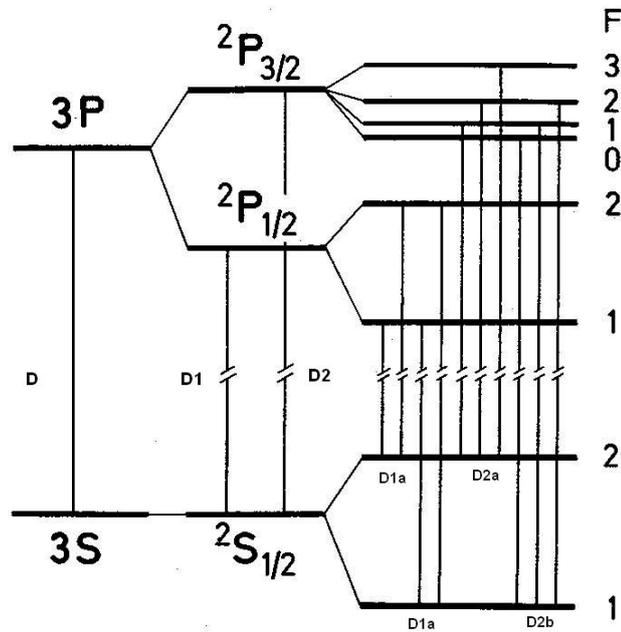


Figura 5.3: Livelli energetici per l'atomo di sodio

5.2 Tecniche di raffreddamento

Una tipica trappola ottica ha una profondità inferiore ad 1 mK , e richiede dunque che il campione sia già sufficientemente raffreddato per poter essere usata. La prassi standard prevede quindi di iniziare il raffreddamento in una trappola magneto-ottica (MOT) e quindi di caricare gli atomi nella trappola ottica. Si illustrano ora le principali procedure sperimentali per il raffreddamento.

- **Raffreddamento Doppler.** E' basato su cicli di assorbimento e successiva emissione spontanea di fotoni. Le minime temperature raggiungibili sono in genere dell'ordine dei $100\ \mu\text{K}$ e sono determinate dai fenomeni di riscaldamento in seguito al rinculo dei fotoni emessi.
- **Raffreddamento per gradiente di polarizzazione.** Questa tecnica rappresenta un miglioramento della precedente per atomi con una struttura energetica complessa, per i quali il raffreddamento Doppler si rivela piuttosto inefficace, e richiede la presenza di un'onda stazionaria. Può sfruttare due diversi meccanismi: lo squilibrio nella pressione di radiazione oppure la redistribuzione tra i fotoni nell'onda stazionaria. Quest'ultimo caso viene descritto dall'effetto Sisifo: l'atomo perde energia risalendo una cima del potenziale di dipolo, da cui viene fatto ricadere sul fondo della buca successiva, e così via (cfr figura 5.4).

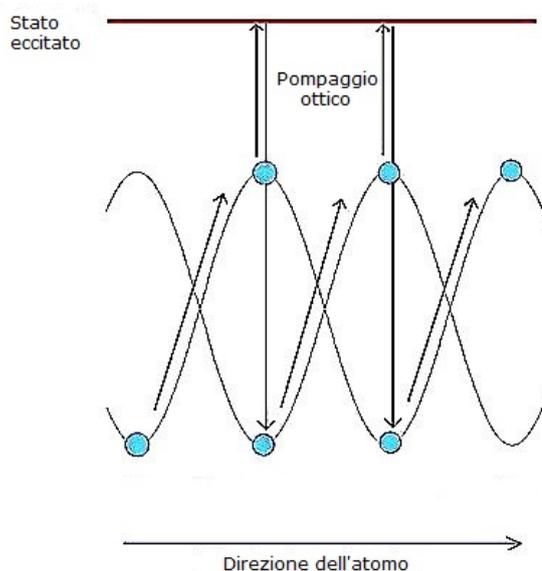


Figura 5.4: Rappresentazione grafica dell'effetto Sisifo

Le temperature raggiungibili con questa tecnica sono dell'ordine delle decine di μK .

- **Raffreddamento Raman.** I metodi sperimentali illustrati fino ad ora vedono il loro limite nei fenomeni di rinculo dei fotoni spontaneamente riemessi; tecniche più efficaci si basano sul disaccoppiamento degli atomi freddi dall'eccitazione laser una volta che essi hanno raggiunto basse energie cinetiche; Per raggiungere questo obiettivo si sfruttano transizioni estremamente selettive nella velocità. Nel raffreddamento Raman, per esempio, si sfruttano impulsi di due laser contro-propaganti che trasferiscono gli atomi da un sottolivello dello stato fondamentale ad un altro; questi impulsi sono variati in frequenza, *detuning* e direzione di propagazione in modo tale da eccitare tutti gli atomi tranne quelli con velocità quasi nulle. Infine, il ciclo viene completato con un nuovo impulso che pompa gli atomi nuovamente nel primo stato attraverso emissione spontanea, che randomizza la distribuzione delle velocità. In seguito a numerosi cicli di questo tipo, gli atomi si accumulano in un intervallo molto stretto attorno a $v = 0$.
- **Raffreddamento per evaporazione.** Questa tecnica, basata sulla rimozione selettiva degli atomi a più alta energia seguita da un'immediata ritermalizzazione dei rimanenti, è stata quella originariamente utilizzata per ottenere la condensazione di Bose-Einstein. L'idea di base è quella di abbassare la buca di potenziale che intrappola le particelle, permettendo a quelle più energetiche di allontanarsi ed a quelle rimaste di ritermalizzare grazie alle collisioni elastiche. Affinché il processo sia performante due sono i principali requisiti da soddisfare: il rapporto tra le collisioni elastiche e quelle inelastiche, che causano riscaldamento, deve essere piccolo ed il numero di atomi inizialmente presenti deve essere grande, vista la consistente frazione che finisce persa. Per quest'ultimo motivo il raffreddamento per evaporazione non è il più adatto per le trappole ottiche, in cui non si riescono ad ottenere grandi volumi e quindi grandi campioni.
- **Espansione adiabatica.** Consiste nell'espandere adiabaticamente un potenziale lasciandone al tempo stesso invariata la forma, con il risultato di raffreddare gli atomi senza però modificare la densità nello spazio delle fasi.

5.3 Analisi e riconoscimento del condensato

Una volta che il campione è caricato nella trappola di dipolo, sono diverse le proprietà che lo caratterizzano, come per esempio il numero di atomi presenti e la loro temperatura.

Per quanto riguarda il primo parametro, un possibile metodo per determinarlo è ricattare gli atomi nuovamente in una MOT e studiare con una camera CCD o un fotodiodo la potenza della luce fluorescente emessa. Questa tecnica, con i dovuti apparati sperimentali, è piuttosto sensibile, ma ha il difetto di essere completamente distruttiva. Se si vuole preservare il campione è opportuno utilizzare altri metodi, come per esempio osservare la fluorescenza emessa in seguito all'illuminazione con un breve impulso laser risonante di intensità moderata.

A proposito invece della rilevazione della temperatura, una tecnica efficace si basa sulla relazione della distribuzione termica della densità ed il potenziale intrappolante $U(\vec{r})$, ovvero:

$$\rho(\vec{r}) = \rho_0 \exp \left\{ -\frac{U(\vec{r})}{kT} \right\} \quad (5.16)$$

Dalla conoscenza del potenziale e dall'osservazione della distribuzione di densità tramite diverse tecniche di imaging è possibile risalire alla temperatura. Un caso particolarmente semplice è quello della trappola tridimensionale armonica, descritta dalla funzione

$$U(\vec{r}) = \frac{1}{2}m (\omega_x^2 x^2 + \omega_y^2 y^2 + \omega_z^2 z^2) \quad (5.17)$$

La distribuzione risultante è gaussiana nelle tre direzioni:

$$\rho(x, y, z) = \rho_0 \exp \left\{ -\frac{x^2}{2\sigma_x^2} \right\} \exp \left\{ -\frac{y^2}{2\sigma_y^2} \right\} \exp \left\{ -\frac{z^2}{2\sigma_z^2} \right\} \quad (5.18)$$

con $\sigma_i^2 = \omega_i^2 kT/m$. Se sono note le frequenze della trappola con buona precisione, la temperatura viene ricavata da:

$$T = \frac{m}{k} \sigma_i^2 \omega_i^2 \quad (5.19)$$

Un'altra possibilità, questa volta però totalmente distruttiva, è rappresentata dal metodo del tempo di volo. Tale tecnica prevede lo spegnimento della trappola per consentire agli atomi un'espansione balistica libera. Dopo un certo tempo viene registrata la distribuzione spaziale delle particelle, che riflette chiaramente la distribuzione di velocità prima dell'espansione.

Una volta raggiunte le temperature in prossimità delle quali ci si aspetta che avvenga la transizione, esistono diverse possibili osservazioni che consentono di identificare la formazione del BEC; alcune di queste sono:

- l'improvviso incremento della densità del campione;
- la comparsa di una nube, formata da una componente normale diffusa e da un core molto denso (il condensato stesso);
- un'anisotropia nella distribuzione delle velocità (normalmente essa dovrebbe risultare isotropa).

Fatte queste premesse, è indispensabile possedere una tecnica che fornisca la distribuzione di densità del campione. Il metodo più utilizzato è quello del tempo di volo (TOF) descritto prima: si spegne il potenziale intrappolante lasciando espandere liberamente la nube per un certo intervallo di tempo (tipicamente, qualche ms) e successivamente se ne acquisiscono immagini per esempio con la tecnica di *absorption imaging*; quest'ultima consiste brevemente nello studio della quantità di radiazione assorbita dagli atomi, ricostruendo da questa informazione la densità del campione. Un esempio dei risultati di questa procedura è illustrato nella figura 5.5.

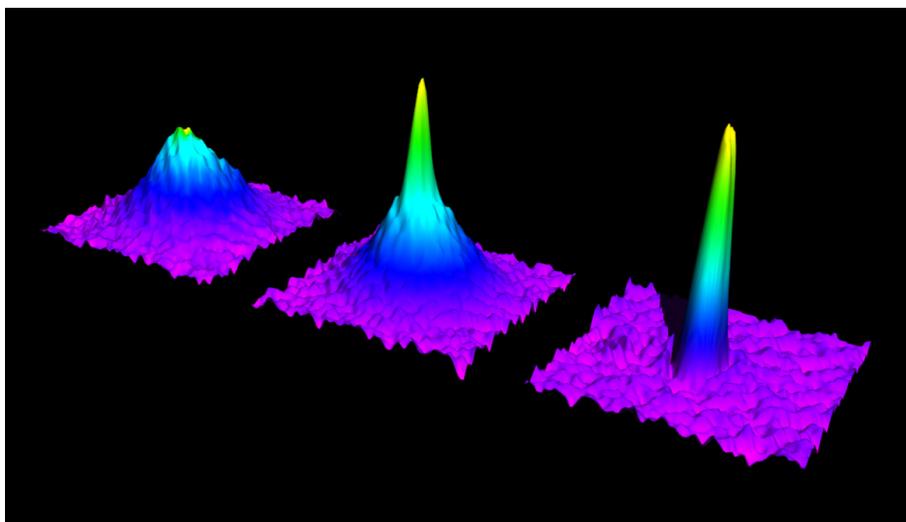


Figura 5.5: Grafico di assorbimento in funzione di due dimensioni spaziali. A sinistra: un'immagine della nube appena prima della transizione; in centro: la comparsa del BEC; a destra: dopo ulteriore raffreddamento, è rimasto quasi esclusivamente un condensato puro.

Un'altra possibilità consiste nell'acquisire direttamente immagini del condensato intrappolato, metodo tra l'altro non distruttivo. In questo caso non è però possibile utilizzare un imaging basato sull'assorbimento, in quanto le densità da rilevare sono così elevate da provocare una completa saturazione. Si utilizzano invece tecniche di *dispersive imaging*, basate sull'analisi dell'intensità della luce diffusa. La figura 5.6 ne mostra un esempio.

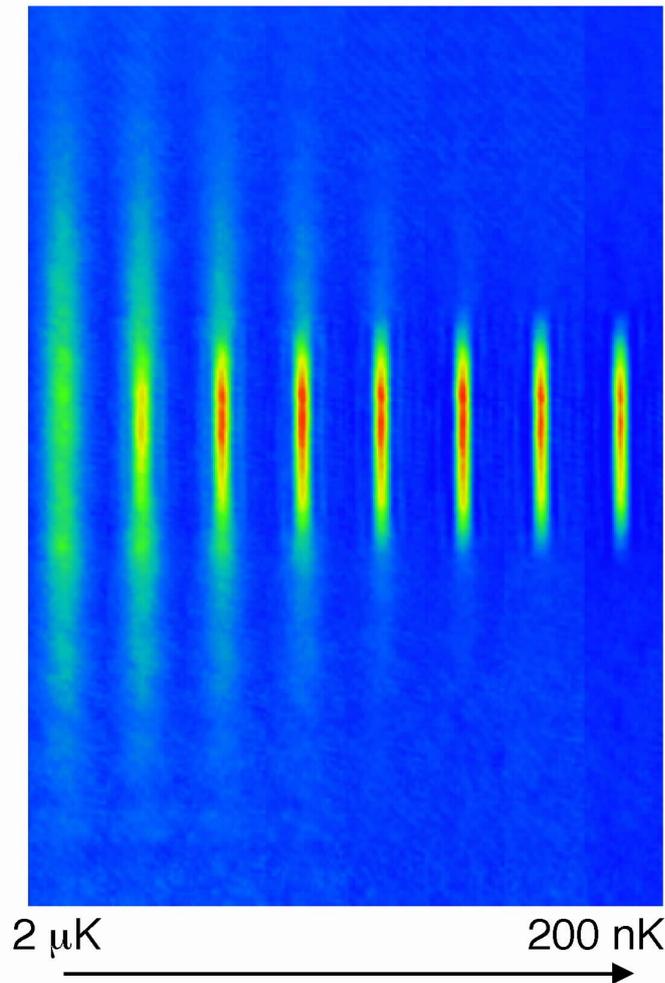


Figura 5.6: Osservazione diretta della formazione del condensato. Da sinistra a destra, si può notare la formazione di un core sempre più denso a mano a mano che il sistema viene portato alla temperatura critica.

Come anticipato, la formazione del condensato può essere rivelata anche dall'analisi della distribuzione di velocità del campione, di cui si acquisiscono

immagini durante l'espansione balistica le quali, noto il tempo di volo, permettono di ricostruire la distribuzione iniziale delle velocità degli atomi. Un gas normale in equilibrio termico presenta sempre una distribuzione isotropa, qualunque sia la forma del potenziale in cui esso è immerso. Per un condensato di Bose, invece, la situazione è completamente diversa; gli atomi che lo compongono, infatti, giacendo tutti nello stesso stato quantico, sono descritti dalla medesima funzione d'onda, le cui anisotropie riflettono quelle del potenziale confinante. La figura 5.7 fa riferimento ad un BEC ottenuto in una ormai obsoleta trappola magnetica con potenziale a simmetria assiale.

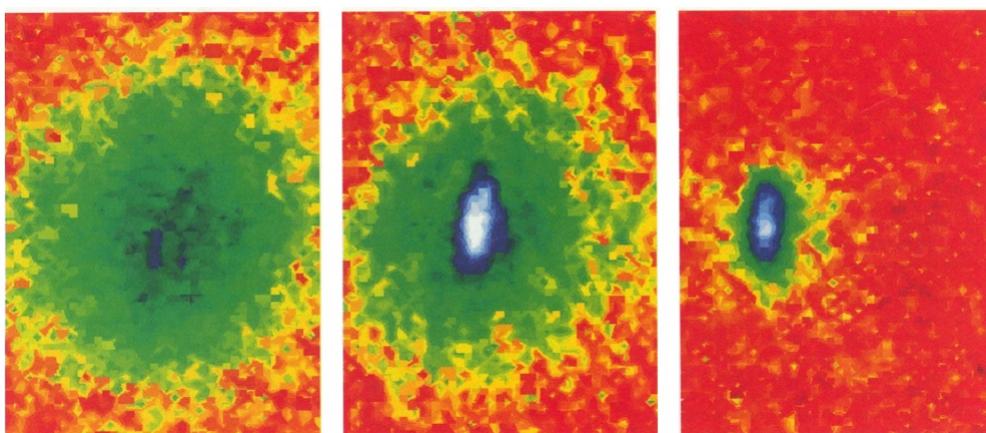


Figura 5.7: Distribuzione di velocità del campione a tre diverse temperature; da sinistra a destra si può notare la formazione del BEC (in blu-bianco) che, a differenza della nube iniziale in equilibrio termico, mostra una forma ellittica fortemente anisotropa

Capitolo 6

Conclusioni

La prima parte di questo lavoro è stata totalmente dedicata all'analisi teorico-matematica del fenomeno di condensazione di Bose-Einstein. Per ottenere una trattazione esaustiva dell'argomento, i primi capitoli sono stati incentrati sullo sviluppo di un opportuno formalismo matematico, con l'introduzione dapprima dell'operatore densità $\hat{\rho}$, di cui sono state illustrate le principali proprietà ed utilizzi. In particolare è stata studiata largamente la funzione di partizione canonica di un generico sistema, poiché da essa si possono estrapolare gran parte delle informazioni termodinamiche.

Successivamente, l'attenzione è stata spostata sul carattere particolare delle funzioni d'onda di sistemi quantistici, introducendo i concetti di indistinguibilità, simmetria e, conseguentemente, di particelle bosoniche.

Sulle basi di quanto fatto si è poi potuto procedere con l'analisi vera e propria dei sistemi bosonici, indagando la statistica cui essi rispondono e le principali funzioni termodinamiche che li descrivono.

L'analisi teorica è culminata con lo studio del gas ideale di bosoni, descritto come un sistema di N particelle bosoniche non interagenti e non relativistiche. Applicando ai risultati precedentemente raggiunti il limite del continuo ed il limite termodinamico, è sorto spontaneamente dalla trattazione fatta il fenomeno di condensazione di Bose-Einstein; dallo studio è emerso che si tratta di una transizione di fase, raggiunta per determinati valori critici di densità e temperatura, in cui lo stato fondamentale del sistema quantistico inizia ad essere significativamente occupato, accogliendo un numero estensivo di particelle rispetto agli stati eccitati. Mano a mano che la temperatura viene abbassata, una frazione sempre maggiore di atomi entra a far parte del condensato; tutti questi vengono descritti da un'unica funzione d'onda e manifestano quindi comportamenti quantistici collettivi macroscopici. A completamento di questa trattazione è stata analizzata l'equazione di stato del gas ideale di Bose, che mostra notevoli deviazioni da quella classica.

Nella seconda parte, conclusiva di questo lavoro, si è voluto dare un'idea qualitativa delle procedure sperimentali adottate per la realizzazione del condensato. In particolare l'attenzione è stata focalizzata sulle trappole ottiche di dipolo, che hanno via via sostituito le prime trappole magnetiche o magneto-ottiche.

Dopo uno studio quantitativo delle caratteristiche di una trappola ottica, è stato fatto un panorama sulle principali tecniche di raffreddamento adottate per raggiungere le bassissime temperature richieste dal BEC.

Infine, sono stati analizzati i metodi per l'analisi e soprattutto il riconoscimento del condensato, basati soprattutto sulla tecnica del *time of flight*, cioè sull'espansione balistica del campione unita all'acquisizione di immagini che rivelano le distribuzioni di densità e velocità degli atomi.

Bibliografia

- [1] Anderson M. H., Ensher J. R., Matthews M. R., Wieman C. E., Cornell E. A., Observation of Bose-Einstein condensation in a dilute atomic vapor, in “Science”, Vol. 269, Luglio 1995
- [2] Dalfovo F., Giorgini S., Pitaevskii L. P., Stringari S., Theory of Bose-Einstein condensation in trapped gas, in “Reviews of Modern Physics”, Vol. 71, No. 3, April 1999
- [3] Durfee D. S., Ketterle W., Experimental studies of Bose-Einstein condensation, in “Optics express”, Vol. 2, No. 8, April 1998
- [4] Ferrari L., Approaching Bose-Einstein condensation, Eur.J.Phys. **32** (2011) 1547-1557
- [5] Greiner W., Neise L., Stöcker H., *Thermodynamics and statistical mechanics*, Springer, 1997
- [6] Grimm R., Weidmüller, Ovchinnikov Y. B., Optical dipole traps for neutral atoms, arXiv:physics/9902072v1 [physics.atom-ph]
- [7] Jackson J. D., *Classical electrodynamics*, John Wiley & Sons, Inc., 1998
- [8] Ketterle W., When atoms behave as wave: Bose-Einstein condensation and the atom laser, Nobel Lecture, 2001
- [9] Preparata G., Del Giudice E., Bose-Einstein vs electrodynamic condensates: the question of order and coherence., arXiv:cond-mat/9812018v1 [cond-mat.stat-mech]

Ringraziamenti

Vorrei a questo punto rendere grazie a tutti coloro che mi hanno aiutato ad arrivare fin qui.

Per prima cosa vorrei ringraziare il mio relatore Fabio Ortolani, per la disponibilità che sempre ha manifestato nei miei confronti. In secondo luogo, non posso non dire grazie alla mia famiglia, e soprattutto ai miei genitori Giorgio ed Antonella, senza il cui supporto costante questo mio percorso sarebbe stato sicuramente molto più difficile.

Vorrei poi ringraziare tutti i miei compagni ed amici che hanno condiviso con me questa esperienza. In particolare mi riferisco a Paola e Francesca, lontane ma sempre presenti; Enrico, insostituibile amico; Carlo, che con grande affetto ritengo un sostegno ed un esempio; Laura, su cui posso sempre contare. Impossibile dimenticare poi il mio coinquilino Enrico, per tutti i momenti vissuti insieme in questi anni, e Cristiano ed Alessandra, che riescono a rendere il dipartimento un ambiente familiare ed accogliente.

Infine, vorrei ringraziare Luca, per tutto l'aiuto che è stato in grado di darmi anche nei giorni di maggiore difficoltà e per quanto mi ha insegnato nel tempo passato insieme.