

ALMA Mater Studiorum  
Università degli Studi di Bologna

---

---

SCUOLA DI SCIENZE

Corso di Laurea in Astronomia

Dipartimento di Fisica e Astronomia

Effetto Doppler e applicazioni astrofisiche

Elaborato Finale

Candidato:  
Giovanni Giannella

Relatore:  
Daniele Dallacasa

---

---

Sessione I estiva  
Anno Accademico 2013/2014

# Indice

Introduzione .....	2
L'effetto Doppler .....	3
1.1 Alcuni brevi cenni storici .....	3
1.2 Caso non relativistico: Effetto Doppler acustico.....	4
1.3 Effetto Doppler relativistico .....	6
Effetto Doppler in astrofisica.....	9
2.1 Il redshift.....	9
2.1.1 Redshift cosmologico .....	10
2.1.2 Redshift gravitazionale .....	12
2.2 Il blueshift.....	13
2.3 Allargamento Doppler delle righe spettrali .....	13
Altri Esempi .....	15
3.1 Binarie Spettroscopiche.....	15
3.2 Effetto Sunyaev – Zel'dovich.....	15
Bibliografia.....	17
Sitografia .....	17

# Introduzione

Nel 1842, a Vienna, Christian Doppler (1803–1853) scoprì un effetto fisico che porta il suo nome e che ha un'importanza straordinaria in astrofisica e cosmologia. L'effetto Doppler si verifica quando una sorgente di suoni o di luce ed un osservatore sono dotati di moto relativo di avvicinamento o di allontanamento lungo la loro congiungente ed è chiamato, per questo, anche effetto Doppler radiale. Esso si manifesta con un cambiamento apparente della frequenza o della lunghezza d'onda del segnale percepito dall'osservatore, che si traduce in variazione della tonalità del suono o del colore della luce. E' importante notare che la frequenza del segnale emesso dalla sorgente non subisce variazioni e che l'effetto Doppler si verifica soltanto nella percezione del segnale luminoso o sonoro da parte dell'osservatore.

Nella vita quotidiana ci possiamo rendere conto dell'influenza dell'effetto Doppler sui fenomeni sonori. Un osservatore che si trova sulla banchina di una stazione attraversata da un treno di passaggio percepisce un cambiamento nel suono associato alla sirena del treno mentre questo dapprima si avvicina, passa e successivamente si allontana. Oltre all'ovvio cambiamento nell'intensità del suono, che aumenta quando il treno è in avvicinamento e diminuisce quando il treno si allontana, vi è anche una variazione della frequenza percepita. Il suono infatti ha un tono più alto mentre il treno si avvicina e più basso nel caso opposto.

In astronomia, interpretandolo come dovuto ad un effettivo moto della sorgente, è stato usato per misurare la velocità con cui stelle e galassie si stanno avvicinando o allontanando da noi, per scoprire che una stella apparentemente singola è, in realtà, una stella binaria con componenti molto vicine tra loro, e anche per misurare la velocità di rotazione di stelle e galassie. Analizzando la posizione di alcune caratteristiche dello spettro elettromagnetico, ad esempio le righe di assorbimento di certi elementi chimici, si può determinare se un corpo celeste si sta avvicinando o allontanando dalla Terra, e a che velocità.

Poiché i colori posti ai due estremi dello spettro visibile sono il blu (per lunghezze d'onda più corte) e il rosso (per lunghezze d'onda più lunghe), l'effetto Doppler è spesso chiamato in astronomia spostamento verso il rosso (redshift) se diminuisce la frequenza della luce, e spostamento verso il blu se l'aumenta (blueshift).

# Capitolo 1

## L'effetto Doppler

L'effetto Doppler è un fenomeno fisico che consiste nel cambiamento, rispetto al valore originario, della frequenza e della lunghezza d'onda percepita da un osservatore raggiunto da un'onda emessa da una sorgente che si trova in movimento rispetto all'osservatore stesso o viceversa. Solo le componenti della velocità nella direzione sorgente – osservatore (velocità radiale) portano a tale effetto. Infatti un osservatore che si muove perpendicolarmente alla congiungente sorgente – osservatore non percepisce alcun cambiamento (nel caso non relativistico). È importante notare che la frequenza del segnale emesso dalla sorgente non subisce variazioni e che l'effetto Doppler si verifica soltanto nella percezione del segnale luminoso o sonoro da parte dell'osservatore.

### 1.1 Alcuni brevi cenni storici

Il 25 Maggio del 1842 Christian Andreas Doppler (Salisburgo, 29 novembre 1803 – Venezia, 17 marzo 1853), matematico e fisico Austriaco, presentò alla Royal Bohemian Society di Praga il documento contenente la sua più famosa e brillante idea, la scoperta di quel fenomeno fisico che in seguito sarebbe stato chiamato Effetto Doppler.



Nel documento presentato veniva espresso, per la prima volta, il principio fisico che mette in relazione la frequenza di un segnale sonoro o luminoso emesso da una sorgente con la velocità

relativa ad un osservatore. Egli trattò il segnale sonoro e luminoso come onde longitudinali che si propagano rispettivamente nella materia e nell'etere<sup>1</sup>.

Nonostante Fresnel avesse pubblicato poco tempo prima la sua teoria sulla luce come onde trasversali (già nota a Doppler che però non la accettava), la teoria di Doppler sulle onde luminose come onde longitudinali non confutava tuttavia la validità dell'effetto.

Doppler sperimentò il fenomeno con i segnali sonori (per i mezzi di allora non gli fu possibile sperimentarlo con la luce delle stelle) predicendo che in un futuro questo avrebbe offerto agli astronomi un modo per determinare i movimenti e le distanze delle stelle. Nel 1845 furono eseguiti i primi esperimenti sonori con la sorgente in movimento verso l'osservatore. Un gruppo di musicisti posti su un treno suonavano degli strumenti mentre questo si avvicinava e si allontanava ad un altro gruppo fermo vicino ai binari che prendeva nota della variazione della tonalità delle note. Il risultato era conforme a quanto predetto. Nel 1846 Doppler pubblicò una trattazione più completa di questo fenomeno considerando l'effetto risultante dal movimento contemporaneo della sorgente e dell'osservatore.

---

<sup>1</sup> In fisica l'etere era l'ipotetico mezzo in cui, fino XIX secolo, si pensava si propagassero le onde

## 1.2 Caso non relativistico: Effetto Doppler acustico

Consideriamo prima l'effetto Doppler dal punto di vista non relativistico.

Nel caso di onde meccaniche, come quelle acustiche, il mezzo ( in caso di onde acustiche è l'aria ) in cui le onde si propagano individua un sistema di riferimento privilegiato, quindi un sistema rispetto al quale tale mezzo risulti fisso. C'è perciò una differenza fisica tra il caso in cui l'osservatore è fermo e la sorgente in moto, e quello in cui la sorgente è a riposo e l'osservatore in moto. Iniziamo a distinguere i vari casi.

I) **Sorgente ed osservatore fissi.** E' ovvio che ad O arriverà, ogni secondo, un numero di onde pari alla frequenza  $\nu$  della sorgente S. La stessa cosa accadrebbe ad un osservatore O' sistemato in posizione diametralmente opposta ad O: le onde emesse da S hanno tutte la stessa lunghezza d'onda  $\lambda$  e si propagano in tutte le direzioni con la stessa velocità  $V$ . Se la sorgente vibra ad una frequenza  $\nu_s$  la frequenza delle onde emesse è  $\nu_s$ . Queste onde, che si propagano con una velocità  $V$ , hanno una lunghezza d'onda  $\lambda = V/\nu_s$ . La frequenza  $\nu_o$  dell'onda che arriva all'osservatore fermo è uguale alla frequenza  $\nu_s$  dell'onda emessa dalla sorgente:

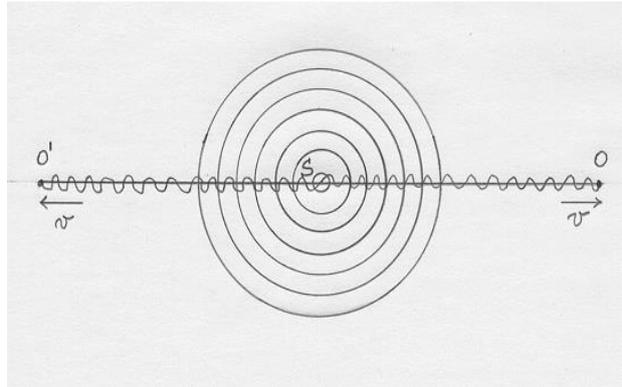


Figura 1: Sorgente e osservatore fermi

$$\nu_o = \frac{V}{\lambda} = \nu_s$$

II) **Sorgente fissa, osservatore in moto rispetto alla sorgente.** Consideriamo l'osservatore che si avvicina alla sorgente con velocità  $V_o$ . In questo caso la frequenza percepita da O è dovuta, oltre alle  $\nu_s$  onde che vedrebbe nel caso della quiete relativa, anche dalle  $V_o/\lambda$  onde supplementari che si trovano lungo il suo percorso nell'unità di tempo. L'osservatore, per questo motivo, percepisce una frequenza superiore a quella emessa dalla sorgente:

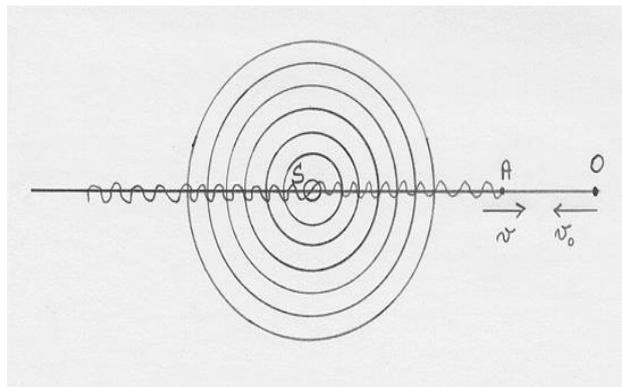


Figura 2: Osservatore O che si muove verso la sorgente S

$$\nu_o = \nu_s + \frac{V_o}{\lambda} = \nu_s \left( 1 + \frac{V_o}{V} \right)$$

Nel caso in cui O si allontani da S, basta sostituire, nella relazione trovata, alla quantità  $V$  la quantità  $-V$ . Si ottiene così:

$$v_o = v_s \left( 1 - \frac{V_o}{V} \right)$$

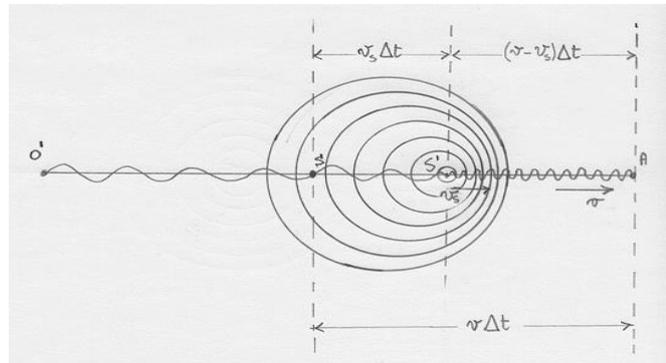
ed in questo caso la frequenza  $v_o$  delle onde percepite da O risulterà minore della frequenza  $v_s$  delle onde emesse da S.

In conclusione, quando la sorgente è a riposo rispetto al mezzo di trasmissione e l'osservatore si muove con velocità  $V_o$ , la frequenza ricevuta è:

$$v_o = v_s \left( 1 \pm \frac{V_o}{V} \right)$$

### III) *Sorgente in moto rispetto all'osservatore, osservatore fermo.*

Supponiamo che O sia in quiete ed S si avvicini ad O con velocità  $V_s$ . Dal momento che la sorgente segue il moto dei fronti d'onda, questi risultano più vicini di quanto sarebbero se la sorgente fosse ferma; quindi la lunghezza d'onda dell'onda ricevuta risulta minore di quella dell'onda emessa. Il numero di vibrazioni  $v_s$  emesse dalla sorgente



**Figura 3 Sorgenti in moto e osservatore fermo. I fronti d'onda si spostano in direzione del moto con velocità pari a quella della sorgente: si addensano nel senso del moto e si diradano in senso opposto**

nel percorrere lo spazio  $(V - V_s)\Delta t$  sono viste dall'osservatore nello spazio  $V\Delta t$ , e quindi si avrà:

$$v_o = v_s \left( \frac{V}{V - V_s} \right)$$

La frequenza, quindi, risulta maggiore della frequenza emessa dalla sorgente. Se la sorgente si allontana dall'osservatore, occorre cambiare il segno della  $V_s$

$$v_o = v_s \left( \frac{V}{V + V_s} \right)$$

Si può quindi concludere dicendo che quando l'osservatore è a riposo rispetto al mezzo di trasmissione e la sorgente si muove con velocità  $V_s$ , la frequenza ricevuta è:

$$v_o = v_s \left( \frac{V}{V \pm V_s} \right)$$

con il segno - se la sorgente si muove verso l'osservatore e quello + se si allontana.  
 Nel caso in cui  $V_S \ll V$ , è possibile sviluppare in serie la formula per la frequenza ricevuta:

$$v_o = v_s \left( \frac{1}{1 \pm \frac{V_S}{V}} \right) = v_s \left( 1 \pm \frac{V_S}{V} \right)^{-1} = v_s \left( 1 \mp \frac{V_S}{V} + \dots \right)$$

Quindi, per velocità della sorgente o dell'osservatore molto piccoli rispetto alla velocità dell'onda, è impossibile, distinguere se è la sorgente a muoversi o l'osservatore.

IV) *Sorgente in moto con velocità  $V_S$  e osservatore in moto con velocità  $V_O$* . In questo caso i due tipi di effetto Doppler precedenti avvengono simultaneamente e indipendentemente. Combinando le due equazioni, la frequenza ricevuta vale:

$$v_o = v_s \left( \frac{V \pm V_O}{V} \right) \left( \frac{V}{V \pm V_S} \right) = v_s \left( \frac{V \pm V_O}{V \pm V_S} \right)$$

V) *Moto della sorgente, del mezzo e dell'osservatore lunga la stessa direzione*. Nel caso del suono si può pensare ad un moto dell'aria con velocità  $V_M$ . In questo caso avremo:

$$v_o = v_s \frac{V \pm V_M \pm V_O}{V \pm V_M \pm V_S}$$

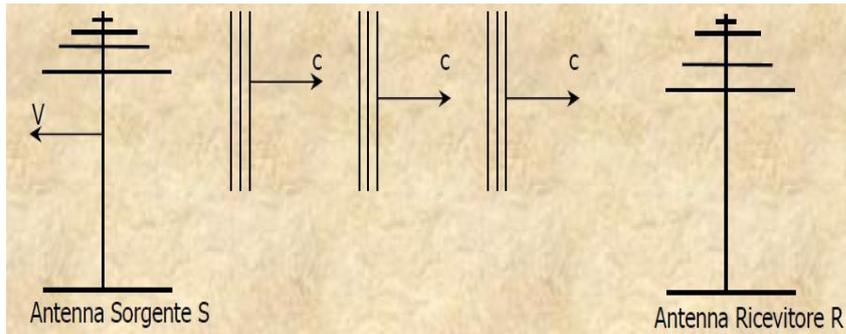
Da notare che  $V_M$  ha lo stesso segno sia al numeratore che al denominatore. Quindi nel caso in cui  $V_O = V_S$  si ha che  $v_o = v_s$ . Quindi la velocità del mezzo ( in questo caso dell'aria ) da solo non produce nessun effetto.

### 1.3 Effetto Doppler relativistico

Sottolineiamo subito una radicale differenza tra il fenomeno che qui vogliamo analizzare e l'effetto Doppler per le onde acustiche. Poiché le onde acustiche necessitano di un mezzo in cui propagarsi, il caso della sorgente ferma nel mezzo e quello della sorgente in moto non sono equivalenti.

Con le onde elettromagnetiche questo non succede: la velocità delle onde è indipendente sia dal moto della sorgente che da quello dell'osservatore. D'altro canto, non essendoci mezzo di propagazione, non c'è alcun modo per distinguere se a muoversi sia la sorgente oppure l'osservatore ( si parla di velocità relativa sorgente – osservatore ).

Consideriamo un antenna sorgente di onde elettromagnetiche che si allontana con una velocità  $V$  rispetto al ricevitore.



**Figura 4 Effetto Doppler longitudinale (esempio di sorgente S in allontanamento da R con velocità V**

Nella trattazione relativistica dell'effetto Doppler occorre considerare l'effetto della dilatazione del tempo dovuta al movimento.

L'antenna sorgente invia a quella ricevente segnali elettromagnetici di periodo  $T_S$ . Per il fenomeno della dilatazione del tempo<sup>2</sup> l'antenna ricevente li riceverà con un periodo  $T'_S$  tale che

$$T'_S = \frac{T_S}{\sqrt{(1 - \beta^2)}}$$

inoltre, l'allontanamento di S determinerà un  $\Delta T'_S$  tra un fronte d'onda e l'altro pari a:

$$\Delta T'_S = V \frac{T'_S}{c} = \beta \frac{T_S}{\sqrt{(1 - \beta^2)}}$$

dunque, si avrà in totale per  $T_R$ :

$$T_R = T_S \sqrt{\frac{(1 + \beta)}{(1 - \beta)}}$$

( S ed R in allontanamento ) lo stesso vale se è il ricevitore ad allontanarsi. Se poi S ed R sono in avvicinamento, per gli stessi ragionamenti, vale la seguente:

$$T_R = T_S \sqrt{\frac{(1 - \beta)}{(1 + \beta)}}$$

Essendo la frequenza  $\nu = 1/T$ , nel caso in cui S e R sono in allontanamento si ha:

$$\nu_R = \nu_S \sqrt{\frac{(1 - \beta)}{(1 + \beta)}}$$

<sup>2</sup> Dato un evento solidale con un sistema di riferimento fisso, l'osservatore di un sistema che si muove di moto rettilineo uniforme misura un intervallo di tempo dilatato di un fattore  $\gamma$  e viceversa.

nel caso in cui sono in avvicinamento, si ha:

$$v_R = v_S \sqrt{\frac{(1 + \beta)}{(1 - \beta)}}$$

In generale, dato un osservatore fermo e una sorgente che si muove lungo una direzione che forma un angolo  $\theta$  con la congiungente sorgente – osservatore, la formula relativistica dell'effetto Doppler si ottiene dalla formula classica sostituendo  $v_S$  con  $v_S/\gamma$ :

$$v_O = v_S \frac{\sqrt{1 - \beta_S^2}}{1 - \beta_S \cos \theta}$$

La legge dell'effetto Doppler longitudinale si ottiene per  $\cos \theta = \pm 1$ , con + che indica un avvicinamento relativo sorgente – osservatore e – che indica un'allontanamento:

$$v_O = v_S \frac{\sqrt{1 - \beta_R^2}}{1 \pm \beta_R}$$

Con  $\beta_R = V_R/c$ , dove  $V_R$  è la velocità relativa sorgente – osservatore.

Per bassi valori  $V_R$ , e quindi di  $\beta_R$ , si ha:

$$\frac{\sqrt{1 - \beta_R^2}}{1 - \beta_R} = \sqrt{\frac{(1 - \beta_R)(1 + \beta_R)}{(1 - \beta_R)^2}} = \sqrt{\frac{1 + \beta_R}{1 - \beta_R}} \approx \sqrt{1 + 2\beta_R} \approx 1 + \beta_R$$

per avvicinamento relativo sorgente – osservatore. Per allontanamento relativo, invece:

$$\frac{\sqrt{1 - \beta_R^2}}{1 + \beta_R} \approx 1 - \beta_R$$

Per bassi valori di  $\beta_R$  la legge relativistica dell'effetto Doppler longitudinale si scrive nella forma:

$$v_O = v_S(1 \mp \beta_R)$$

Nel caso in cui la sorgente si muove perpendicolarmente alla congiungente sorgente – osservatore, il  $\cos \theta = 0$  e quindi si ha:

$$v_O = v_S \sqrt{1 - \beta_R^2} \approx v_S \left(1 - \frac{1}{2} \beta_R^2 + \dots\right)$$

Questa formula costituisce la legge dell'effetto Doppler trasversale; in tal caso non si ha allontanamento o avvicinamento, ma l'effetto è dovuto alla sola dilatazione del tempo.

## Capitolo 2

### Effetto Doppler in astrofisica

L'effetto Doppler, in astronomia, riveste un ruolo della massima importanza perché è uno dei pochi mezzi che gli astronomi hanno a disposizione per estrarre alcune informazioni e riguardanti i corpi celesti. Viene usato per misurare la velocità con cui stelle e galassie si stanno avvicinando o allontanando da noi, per scoprire che una stella apparentemente singola è, in realtà, una stella binaria con componenti molto vicine tra loro, e anche per misurare la velocità di rotazione di stelle e galassie.

L'uso dell'effetto Doppler in astronomia si basa sul fatto che lo spettro elettromagnetico emesso dagli oggetti celesti non è continuo, ma mostra delle linee spettrali a frequenze / lunghezze d'onda ben definite. L'effetto Doppler è riconoscibile quando le linee spettrali non si trovano alle frequenze / lunghezze d'onda ottenute in laboratorio, utilizzando una sorgente stazionaria. Poiché i due colori agli estremi dello spettro visibile sono il blu (per lunghezze d'onda più corte) e il rosso (per lunghezze d'onda più

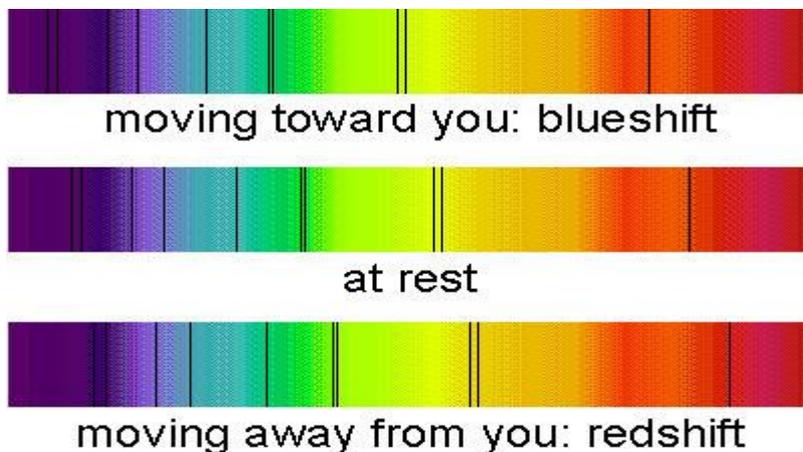


Figura 5 Esempio di spostamento verso il rosso / blu. Si può notare come le righe di assorbimento sono ad una lunghezza d'onda diversa rispetto allo spettro della sorgente stazionaria

lunghe), l'effetto Doppler è spesso chiamato in astronomia spostamento verso il rosso se lo spettro appare spostato su lunghezze d'onda maggiori ( quindi su frequenze minori ), e spostamento verso il blu se appare spostato su lunghezze d'onda ( su frequenze maggiori ).

In astronomia l'effetto Doppler si riscontra non soltanto per qualsiasi movimento relativo fra sorgente ed osservatore, ma anche per due altri importanti fenomeni:

Espansione Cosmologica dell' Universo per cui si parla di Redshift Cosmologico;

Attrazione Gravitazionale per cui si parla di Redshift Gravitazionale.

#### 2.1 Il redshift

Lo spostamento verso il rosso ( redshift ) è il fenomeno per cui la frequenza di un onda elettromagnetica è più bassa della frequenza che aveva quando è stata emessa. Ciò accade in genere quando la sorgente dell'onda si muove allontanandosi dall'osservatore (o

equivalentemente, essendo il moto relativo, quando l'osservatore si allontana dalla sorgente).

Matematicamente, lo spostamento verso il rosso è definito dalla seguente formula:

$$\frac{\lambda_{osservata} - \lambda_{teorica}}{\lambda_{teorica}} = z$$

in cui:

$\lambda_{osservata}$  è la lunghezza d'onda misurata dall'osservatore;

$\lambda_{teorica}$  è la lunghezza d'onda emessa dalla sorgente = lunghezza d'onda laboratorio;

$z$  = numero puro. Nel caso di redshift  $z > 0$ . Se la sorgente si allontana dall'osservatore con velocità  $v$ , e questa velocità è molto più piccola della velocità della luce  $c$ , allora lo spostamento verso il rosso è approssimativamente:  $z \approx v_r/c$ . In alternativa si deve considerare la relazione relativistica fra  $z$  e  $v$ :

$$1 + z = \sqrt{\frac{1 + \frac{v}{c}}{1 - \frac{v}{c}}}$$

L'incremento in lunghezza d'onda della radiazione elettromagnetica corrisponde ad una diminuzione della sua frequenza:

$$\frac{v_{emessa} - v_{osservata}}{v_{osservata}} = z$$

L'approssimazione del redshift come effetto Doppler è valida solo se  $z \ll 1$ .

Lo spostamento verso il rosso della luce emessa da una sorgente, può essere causato da tre fenomeni:

- I) L'effetto Doppler dovuto all'allontanamento relativo sorgente – osservatore;
- II) L'Espansione dell'Universo, la quale crea nuovo spazio tra sorgente ed osservatore, aumentando la lunghezza d'onda
- III) Effetti gravitazionali di corpi massicci

## 2.1.1 Redshift cosmologico

Il redshift cosmologico è lo spostamento relativo in frequenza di un'onda elettromagnetica dovuto all'espansione dell'universo. Si spiega ipotizzando che le lunghezze d'onda varino allo stesso modo delle distanze per effetto dell'espansione dell'universo. La lunghezza d'onda è proporzionale al fattore di scala dell'universo.

Dunque, dalla definizione di redshift  $\frac{\lambda_{osservata} - \lambda_{teorica}}{\lambda_{teorica}} = z$  si ottiene il caso del redshift cosmologico:

$$z = \frac{a(t_0)}{a(t)} - 1$$

con  $a(t)$  proporzionale alla lunghezza d'onda di un'onda elettromagnetica emessa al tempo  $t$ ;

$a(t_0)$  proporzionale alla lunghezza d'onda della stessa onda elettromagnetica, ricevuta al tempo  $t_0$ .

Nel 1929, Edwin Hubble trovò una relazione tra la velocità di allontanamento delle galassie e la loro distanza. La legge di Hubble<sup>3</sup> ci dice che la velocità di allontanamento delle galassie è proporzionale alla loro distanza:

$$v = Hd$$

dove la costante  $H$  è la costante di Hubble, il cui valore attualmente stimato è attorno a  $2,176 \times 10^{-18}$  Hz (67,15 km/Mpc s); mentre  $d$  è la distanza della galassia.

Una relazione che venne interpretata come indicativa del fatto che l'universo si sta espandendo.

Quindi si può notare che tanto maggiore è la distanza della galassia e tanto maggiore sarà il redshift:

$$z = \frac{Hd}{c}$$

Ai tempi di Hubble il campo delle distanze accessibili era tale che le velocità erano sempre piccole. Per  $z \ll 1$  vale l'approssimazione del redshift come effetto Doppler ( $z \approx \frac{v}{c}$ ) e quindi  $z$  è direttamente proporzionale alla velocità di allontanamento delle galassie.

Il redshift Cosmologico non deve essere inteso come dovuto al puro movimento di oggetti celesti avente una certa velocità relativa, ma è lo spazio tra la sorgente e l'osservatore che si sta espandendo. Inoltre, il nome Cosmologico è dato dal fatto che un osservatore posto in un qualunque punto nell'universo può notare con le stesse modalità questo fenomeno, in quanto non esiste un punto privilegiato.

---

<sup>3</sup>La legge empirica di Hubble è stata la prima importante conferma osservativa della soluzione cosmologica di Friedmann delle equazioni di Einstein. L'importanza storica della legge di Hubble sta nell'aver eliminato i modelli statici di universo (Einstein, de Sitter, Minkowski) che erano largamente favoriti prima della scoperta dell'espansione dell'Universo. (La conseguenza più famosa di questo pregiudizio fu, del resto, l'introduzione da parte di Einstein di una costante cosmologica nelle sue equazioni, proprio allo scopo di rendere statico l'universo che esse predicevano.)

## 2.1.2 Redshift gravitazionale

La relatività generale prevede che la luce che si muove attraverso campi gravitazionali molto intensi sperimenterà uno spostamento verso il rosso o verso il blu.

Il redshift gravitazionale (chiamato anche spostamento di Einstein) è dovuto dal fatto che un fotone, quando emerge da un campo gravitazionale, perde energia e quindi presenta uno spostamento verso il rosso che dipende dalla intensità del campo gravitazionale misurata nel punto in cui si trova il fotone. Quindi, data una radiazione elettromagnetica avente una certa lunghezza d'onda che ha origine in una sorgente in cui si ha un

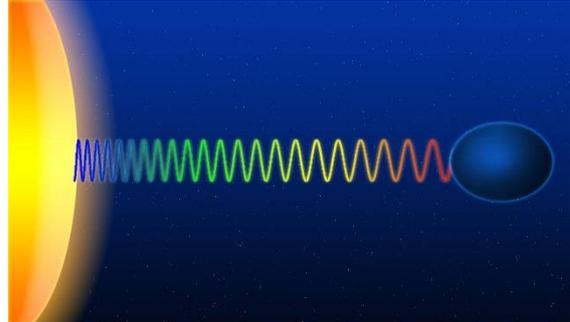


Figura 6: Rappresentazione redshift gravitazionale

intenso campo gravitazionale, non appena entra in una regione di spazio in cui l'intensità del campo gravitazionale è inferiore la sua lunghezza d'onda risulta essere superiore a quella originaria. La formula del Redshift gravitazionale si ricava partendo da quella dell'energia potenziale gravitazionale che è:

$$U(r) = \frac{GMm}{r}$$

Dalla formula dell'energia relativistica  $E = m_0\gamma c^2 = m_\gamma c^2 = hv$  si ricava la massa relativistica del fotone da cui si ricava l'espressione dell'energia di un fotone in un campo gravitazionale:

$$U_f(r) = \frac{GMhv}{rc^2}$$

Quindi, un fotone prodotto per esempio sulla superficie di una stella di massa  $M$ , che si muove ad una distanza  $r$  nel campo gravitazionale della stessa, avrà una energia pari alla differenza fra quella iniziale, poniamo  $E = hv$ , e quella dissipata nel campo gravitazionale  $U_f$ :

$$hv' = hv - U_f(r) = hv \left(1 - \frac{GM}{rc^2}\right)$$

da cui si ricava la formula per l'effetto Doppler gravitazionale

$$v' = v \left(1 - \frac{GM}{rc^2}\right)$$

Da cui trovo il redshift gravitazionale:

$$z = \frac{GM}{rc^2}$$

con  $M$  la massa del corpo gravitante,  $r$  la distanza dal centro di massa del corpo gravitante,  $G$  la costante gravitazionale e  $c$  la velocità della luce. Questa rappresenta il caso nel limite newtoniano, quando  $r$  è sufficientemente grande rispetto al raggio di Schwarzschild  $r_s$ . L'equazione esatta e più spesso usata per il redshift gravitazionale è:

$$z = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{2GM}{rc^2}\right)}} - 1$$

Con  $r_s = \frac{2GM}{c^2}$

## 2.2 Il blueshift

Il blueshift, o spostamento verso il blu, è l'opposto del redshift, quindi abbiamo  $z < 0$ . L'effetto si presenta quando un'onda elettromagnetica emessa da una sorgente in avvicinamento, viene vista da un osservatore fermo, il quale vedrà la frequenza di quest'onda spostata verso la parte blu dello spettro elettromagnetico (quindi diminuisce la lunghezza d'onda). Le cause principali del blueshift in astronomia sono quindi l'avvicinamento di un oggetto ( nel caso delle stelle ), oppure effetti gravitazionali nelle Galassie che superano l'effetto di espansione dell'universo ( solo nel Gruppo Locale<sup>4</sup> ).

Nonostante lo spettro degli oggetti distanti appare spostato verso il rosso, ci sono oggetti che presentano uno spettro verso il blu, come:

I) La Galassia di Andromeda che si sta muovendo verso la Via Lattea nel gruppo locale;

II) Le stelle vicine come la Stella di Barnard si stanno muovendo verso noi.



Figura 7: Galassia di Andromeda

## 2.3 Allargamento Doppler delle righe spettrali

L'effetto Doppler gioca un ruolo anche a livello microscopico. L'allargamento Doppler delle righe spettrali deriva dal fatto che la radiazione emessa da una molecola di un gas verrà spostata in frequenza in un modo dipendente dalla velocità di avvicinamento o allontanamento della molecola, e naturalmente in un gas a qualsiasi temperatura ragionevole questa velocità

<sup>4</sup> E' il nome del gruppo di galassie di cui fa parte la Via Lattea

varia ampiamente. Uno dei problemi principali della teoria cinetica dei gas risiede nel determinare il numero di molecole con velocità compresa in un certo intervallo. In genere si considera come soluzione la distribuzione di Maxwell-Boltzmann. Essendo la velocità lunga la radiale quella che comporta l'effetto Doppler, la forma della distribuzione di Maxwell è quella applicata ai componenti delle velocità molecolari in una direzione. La distribuzione può essere espressa come:

$$N(o, u) = \int_0^u \frac{e^{-v^2/u_0^2}}{\sqrt{\pi}u_0} dv$$

dove  $N(o, u)$  rappresenta il numero di molecole avente la velocità ( la componente lungo la linea di vista ) compresa tra 0 e u. Il valore più probabile della velocità è  $u_0$  ( che non rappresenta il valore più probabile della componente della velocità lungo la linea di vista ) che è uguale:

$$u_0 = \sqrt{\frac{2KT}{M}}$$

Con K che è la costante di Boltzmann (  $K = 1,38 \times 10^{-23} JK^{-1}$  ), T la temperatura assoluta e M la massa della molecola in questione.

Sia  $\nu$  la frequenza di una riga spettrale emessa da una molecola a riposo, la frequenza vista da un osservatore quando la molecola si allontana / avvicina con velocità u è  $\nu \left( 1 \pm \frac{u}{c} \right)$ . Il profilo dell'allargamento Doppler della riga è immediatamente riconosciuto se è noto il numero di molecole che emettono in ogni particolare frequenza.

Nonostante l'effetto Doppler sia un ostacolo alla migliore risoluzione del profilo della riga, fornisce una misura della temperatura, specialmente per gas a bassa pressione, che si può trovare nelle alte regioni dell'atmosfera: il gas emette una linea di cui possiamo osservare il profilo e determinare la larghezza  $\Delta\lambda$ , a questo punto dalla formula che segue si può ricavare la temperatura:

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} = \frac{2u_0}{c} \sqrt{\log 2} = \frac{2}{c} \sqrt{\frac{2KT \log 2}{M}}$$

con  $\lambda_0$  la lunghezza d'onda a riposo. In presenza di turbolenze l'effetto aumenta e va introdotto sotto radice il termine della velocità di tale turbolenza

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} = \frac{2}{c} \sqrt{\frac{2KT \log 2}{M} + \xi}$$

Questo effetto diventa importante nelle giganti e supergiganti rosse a basse temperature, dove ci si aspetterebbe di trovare righe sottili.

# Capitolo 3

## Altri Esempi

### 3.1 Binarie Spettroscopiche



Figura 8: Rappresentazione grafica di un sistema binario

Un sistema binario spettroscopico<sup>5</sup> è un sistema binario<sup>6</sup> il cui studio è eseguito in base all'effetto Doppler: poiché le due stelle di un sistema binario ruotano l'una attorno all'altra, l'osservatore riceve luce di lunghezza d'onda variabile se la geometria di tale sistema lo permette proprio grazie all'effetto Doppler.

Nel 1889 Edward Charles Pickering scoprì il primo sistema binario spettroscopico, conosciuta col nome di Mizar, composto da Mizar A e Mizar B.

### 3.2 Effetto Sunyaev – Zel'dovich

L'effetto Sunyaev-Zel'dovich è uno dei meccanismi che generano le anisotropie secondarie della Radiazione cosmica di fondo (CMB), la traccia fossile del Big Bang.

Ci sono due tipi di effetto S-N:

---

<sup>5</sup> Una binaria spettroscopica è una stella binaria che non può essere risolta come binaria visuale, neppure con i telescopi più potenti, ma solo tramite uno spettroscopio, che è in grado di rilevare il movimento alternato delle due stelle.

<sup>6</sup> Si definisce stella binaria un sistema stellare formato da due stelle che orbitano intorno al loro comune centro di massa; la stella più luminosa viene chiamata primaria, mentre l'altra viene chiamata compagna o secondaria.

- Termico, dovuto allo scattering Compton inverso, che causa uno spostamento dello spettro, tale da apparire come un abbassamento di temperatura dei fotoni se osservato a basse frequenze o come un innalzamento se osservato alle alte frequenze;
- Cinematico, dovuto alla velocità peculiare del gas che diffonde i fotoni del CMB causando un effetto Doppler.

## **Bibliografia**

- 1) Giacomelli G., Gregorini L., *Fisica generale. Elettromagnetismo e ottica*, Carocci, 1994
- 2) Gill T.P., *The Doppler Effect: An Introduction to the Theory of the Effect*, Logos Press, 1965

## **Sitografia**

- 1) <http://archive.oapd.inaf.it/othersites/sc/starchild/questions/redshift.html>
- 2) <http://www.bo.astro.it/sait/spigolature/spigo300avanzato.html>