

ALMA MATER STUDIORUM - UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

SCUOLA DI INGEGNERIA E ARCHITETTURA

CORSO DI LAUREA
in INGEGNERIA AEROSPAZIALE

Sede di Forlì

ELABORATO FINALE DI LAUREA
in Tecnologia delle Costruzioni Aeronautiche

**MODELLI DI PREDIZIONE NUMERICA
DI EVOLUZIONE DI DIFETTI
IN MATERIALI METALLICI
SOTTO CARICHI CICLICI**

Candidato:
Federico Rossi

Relatore:
Prof. Enrico Troiani

**Anno Accademico 2013-2014
Sessione II^a**

*Alla mia famiglia, a cui devo tutto.
A Francesca, luce incrollabile nei momenti bui.*

Indice

1	Introduzione	1
1.1	Controllo della Frattura	1
1.2	Meccanica della frattura	3
1.3	Importanza dell'analisi	3
2	Linear Elastic Fracture Mechanics	5
2.1	Visione	5
2.2	Concentrazione degli sforzi sul fronte di cricca	5
2.3	Stress intensity factor	7
2.4	Plane stress fracture toughness	9
3	Crack growth analysis	11
3.1	Visione	11
3.2	Crack growth	11
3.3	Regioni di crescita	13
4	Modelli matematici	17
4.1	Visione	17
4.2	Caso di studio	17
4.3	Modello di Irwin	18
4.4	Modello di Newman-Raju	19
4.5	Modello per la previsione del <i>crack shape</i>	20
4.6	Modello NASGRO	21
4.7	Modelli di Paris e Walker	23
5	Implementazione dei modelli	25
5.1	Visione	25
5.2	Carico applicato	25
5.3	Modello di Irwin	26
5.4	Modello di Newman-Raju	28
5.5	Modello per la previsione del <i>crack shape</i>	29

5.6	Modello NASGRO	30
5.7	Procedura per stimare la vita a fatica	30
5.8	Confronto tra alcuni materiali	36
	Conclusioni	39
	Codice MATLAB	41

Elenco delle figure

1.1	Resistenza residua in funzione della dimensione di cricca . . .	2
1.2	Curva di crescita della cricca	2
1.3	Mode I: Opening Mode; Mode II: Shear Mode; Mode III: Tearing Mode	4
1.4	La SS Schenectady spezzata in due da una rottura fragile . . .	4
2.1	Corpo generico soggetto a trazione	6
2.2	Parametri presenti nell'equazione generale del K	7
2.3	Embedded crack	8
2.4	Edge crack	8
2.5	Elliptical surface crack	9
3.1	Limite di fatica qualitativo	12
3.2	Diversi tipi di cricca nucleati da un foro	13
3.3	Le tre regioni del <i>crack growth</i>	14
4.1	Cricca ellittica considerata nel caso di studio	18
5.1	Carico ciclico	26
5.2	Variazione del K al variare della forma e dell'angolo di cricca secondo Irwin	27
5.3	K in funzione dell'angolo di cricca secondo Newman-Raju . .	28
5.4	K in funzione della profondità di cricca secondo Newman-Raju	29
5.5	Variazione della forma della cricca durante la propagazione . .	30
5.6	Curva NASGRO, Paris e Walker per la predizione della vita a fatica	31
5.7	Correlazione tra NASGRO, Paris e Walker	32
5.8	Andamento del <i>crack shape nel caso in esame</i>	33
5.9	Evoluzione dello <i>stress intensity factor</i> durante la propagazione della cricca nel caso in esame	34
5.10	Propagazione della cricca ellittica in profondità	34
5.11	Andamento del ΔK durante la propagazione della <i>through crack</i>	35

5.12	Propagazione della <i>through crack</i> lungo la larghezza della lastra	36
5.13	Modello NASGRO per i materiali considerati	37
5.14	Propagazione della cricca ellittica nei vari materiali	38
5.15	Propagazione della <i>through crack</i> nei vari materiali	38

Capitolo 1

Introduzione

1.1 Controllo della Frattura

La frattura è solo una delle tante modalità di cedimento di una struttura, raramente essa è dovuta ad un carico imprevisto applicato al componente meccanico intonso. Più spesso è causata da un difetto intrinseco nel pezzo o da una cricca: quest'ultima può svilupparsi (iniziando dalla zona di concentrazione delle tensioni che si genera in sua prossimità) a causa dei ripetuti 'normali' carichi di servizio, e accrescere lentamente le sue dimensioni.

Le cricche e i difetti indeboliscono la resistenza del materiale, durante il loro continuo sviluppo la sezione resistente residua diminuisce, fino al punto in cui la struttura non riesce più a sopportare i carichi di servizio e si genera la frattura.

In questo contesto il controllo della frattura si inserisce come disciplina in grado di prevenire la rottura fragile causata da difetti e cricche quando applichiamo i (massimi) carichi a cui il componente andrà incontro nel corso della sua vita operativa. Per prevenire la frattura, la resistenza residua non può scendere al di sotto di un dato valore di soglia, quindi bisogna evitare che la cricca cresca abbastanza da indurre il suddetto fenomeno: dobbiamo essere in grado di modellizzare le relazioni che intercorrono tra le dimensioni del difetto e la resistenza residua del materiale, e per determinare la vita operativa dobbiamo stimare il tempo occorrente affinché si raggiunga una dimensione di cricca critica.

In sintesi ci interessa che l'analisi fornisca indicazioni sul tempo di accrescimento e sulla resistenza strutturale in funzione della dimensione di cricca. Questo tipo di analisi prende il nome di *damage tolerance*. Di seguito sono riportati gli andamenti qualitativi delle due quantità appena citate:

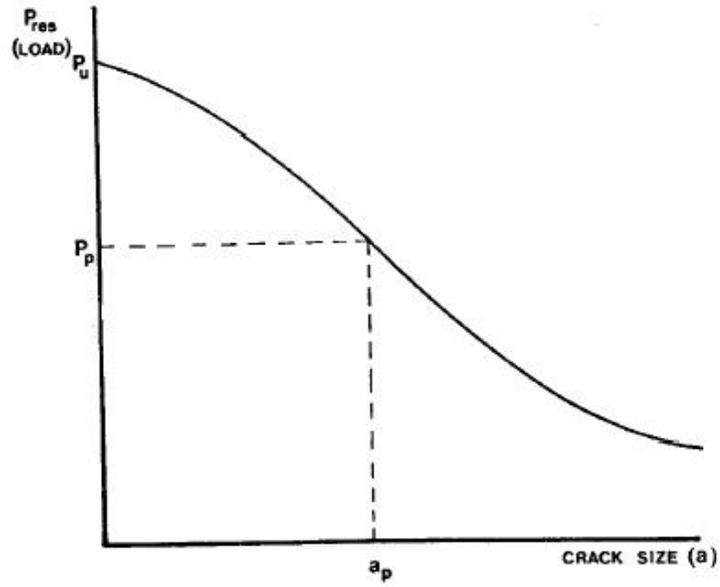


Figura 1.1: Resistenza residua in funzione della dimensione di cricca

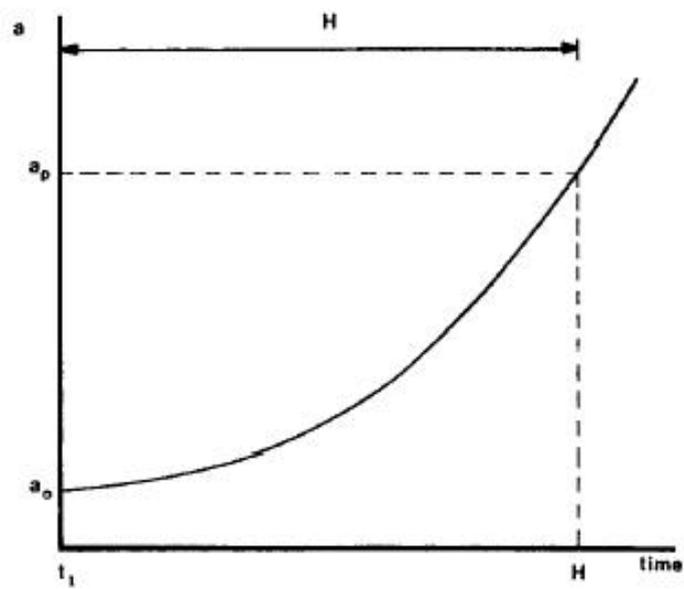


Figura 1.2: Curva di crescita della cricca

1.2 Meccanica della frattura

La disciplina nota come *meccanica della frattura* è stata sviluppata a partire dagli anni '70 per cercare di manifestare gli (allora) sconosciuti fenomeni che portavano al collasso prematuro di strutture di ogni tipo. La chiave di Volta sta nell'analisi delle relazioni tra i carichi applicati e i fenomeni che avvengono alle estremità della cricca: questi sono governati dagli sforzi locali che ivi si concentrano, dunque viene richiesto che in qualche modo le tensioni concentrate in prossimità del difetto vengano espresse in funzione delle tensioni generate dai carichi esterni.

A questo scopo, per semplificare e modellizzare il problema, le modalità di carico vengono innanzitutto classificate in tre categorie, come mostrato in figura 1.3. Noi ci occuperemo della prima, che è quella di gran lunga più frequente, inoltre le altre due si manifestano insieme con la prima e dopo una breve fase iniziale confluiscono in essa.

Infine va precisato che la meccanica della frattura, tra le varie tipologie di *crack growth*, si occupa esclusivamente del *fatigue cracking*, ovvero l'accrescimento della cricca dovuto all'applicazione di carichi ciclici. Per completezza diciamo che i difetti possono espandersi anche in seguito a *stress corrosion* (carico costante sostenuto per lunghi periodi) o *creep* (deformazione permanente dovuta alla combinazione di elevate tensioni e temperature).

1.3 Importanza dell'analisi

Durante la prima metà dell'era industriale le rotture per fatica non si contavano, incidenti ferroviari, di ascensori, esplosioni di caldaie erano all'ordine del giorno. Un esempio su tutti è la rottura dell'albero dell'elica che costrinse i fratelli Wright a rimandare di due settimane il primo volo della storia.

Il miglioramento dei processi di lavorazione dei materiali ed i fattori di sicurezza più severi per le strutture hanno portato oggi ad una drastica diminuzione delle rotture fragili, tuttavia dalla Seconda Guerra Mondiale si sono avuti più di 200 disastri aerei dovuti a cedimenti di questo tipo e molte cricche sono state scoperte ispezionando le centrali nucleari operative.

Sebbene meno frequenti, oggi i collassi strutturali 'fragili' hanno conseguenze molto più serie che in passato, perciò l'utilizzo della meccanica della frattura e del *damage tolerance* come discipline per la previsione di questi fenomeni è diventato imperativo.

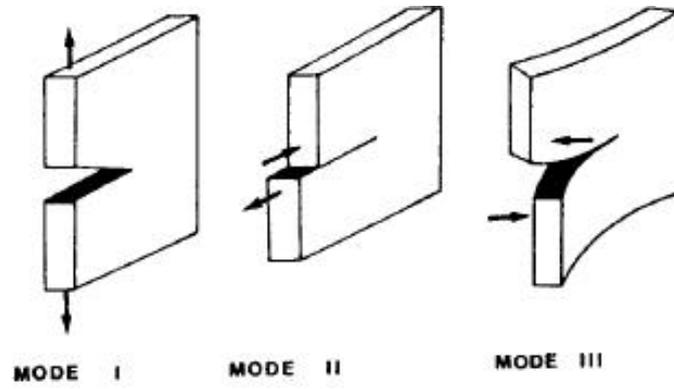


Figura 1.3: Mode I: Opening Mode; Mode II: Shear Mode; Mode III: Tearing Mode

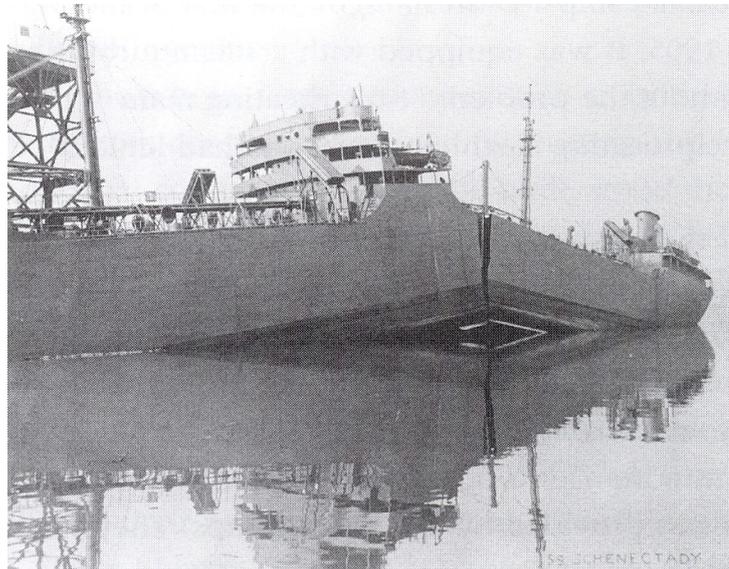


Figura 1.4: La SS Schenectady spezzata in due da una rottura fragile

Capitolo 2

Linear Elastic Fracture Mechanics

2.1 Visione

In questa sezione discuteremo i concetti necessari alla comprensione del fenomeno della rottura fragile, quali sono le grandezze in gioco e come ricavarle. I materiali che presentano una resistenza alla frattura relativamente bassa arrivano a rottura prima del raggiungimento della loro resistenza ultima, ciò può essere spiegato tramite la teoria nota come *linear elastic fracture mechanics*. Tali materiali sono (tra gli altri) tutti quelli applicati in ambito aeronautico.

2.2 Concentrazione degli sforzi sul fronte di cricca

Per generalizzare il problema consideriamo (figura 2.1) un corpo qualsiasi che presenta una generica cricca ed è soggetto a trazione secondo la modalità di carico I descritta in precedenza. Il materiale sarà considerato elastico e quindi descritto dalla legge di Hooke, in questo modo siamo in grado di calcolare il campo delle tensioni al suo interno. Riportiamo soltanto i principali risultati dato che i metodi di soluzione del campo delle tensioni esulano dai nostri obiettivi. Si ha:

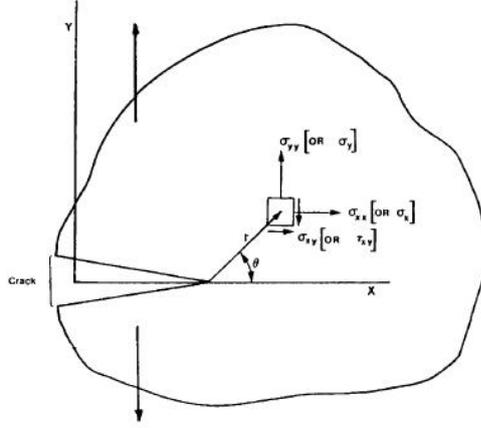


Figura 2.1: Corpo generico soggetto a trazione

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{K}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin 3\frac{\theta}{2}\right) \\ \sigma_y &= \frac{K}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin 3\frac{\theta}{2}\right) \\ \tau_{xy} &= \frac{K}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} \cos 3\frac{\theta}{2} \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

A questo punto è conveniente considerare il piano di equazione $y = 0$ (piano di cricca), in questo modo i termini goniometrici saranno nulli o unitari dato che $\theta = 0$, otteniamo:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{K}{\sqrt{2\pi r}} \\ \sigma_y &= \frac{K}{\sqrt{2\pi r}} \end{aligned} \right\} \quad (2.2)$$

Lungo il piano di cricca gli sforzi trasversali e longitudinali hanno la stessa intensità, notiamo anche come questi diminuiscano all'aumentare della distanza dal fronte di cricca, come è intuitivo pensare.

Le (2.2) sono ricavate considerando un caso arbitrario, quindi la loro validità è universale, possono descrivere il campo delle tensioni per ogni tipo di cricca all'interno di ogni corpo elastico. Non deve stupire allora che presentino al loro interno il termine incognito K . Questo è un parametro fondamentale per la nostra analisi, in quanto mette in relazione i carichi esterni applicati con gli sforzi concentrati intorno alla cricca, in letteratura è chiamato *stress intensity factor*.

2.3 Stress intensity factor

Come già detto è il parametro fondamentale per lo studio della LEM. Ci consente, una volta noto, di disinteressarci dei complessi fenomeni che avvengono intorno alla cricca perché possiamo descriverli conoscendo i carichi esterni applicati. Il problema sta ovviamente nella sua determinazione, si dimostra che la sua forma più generale è la seguente:

$$K = \beta \left(\frac{a}{L} \right) \sigma \sqrt{\pi a} \quad (2.3)$$

I parametri che compaiono nella (2.3) sono mostrati in figura (2.2). β è chiamato *geometry factor* proprio perché dipende dalla geometria del difetto, ciò implica che anche lo *stress intensity factor* sarà diverso per ogni tipo di cricca.

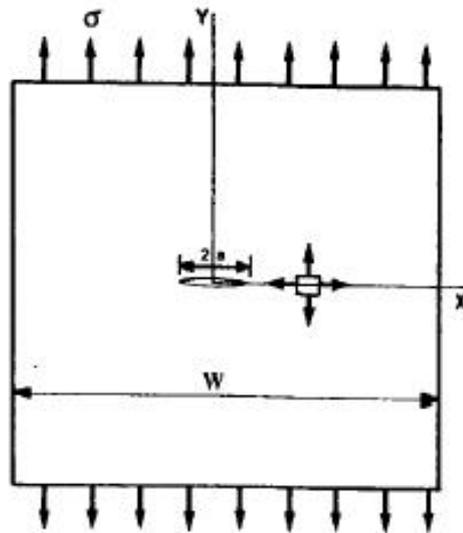


Figura 2.2: Parametri presenti nell'equazione generale del K

A questo punto è interessante stilare un sintetico elenco che racchiuda le principali tipologie di cricca con le relative espressioni per β e di conseguenza per K :

- **embedded crack:**

$$\beta = \sqrt{\sec \frac{\pi a}{W}} \quad (2.4)$$

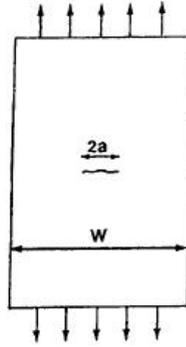


Figura 2.3: Embedded crack

- edge crack:

$$\beta = 1.12 - 0.23\frac{a}{W} + 10.56\left(\frac{a}{W}\right)^2 - 21.74\left(\frac{a}{W}\right)^3 \quad (2.5)$$

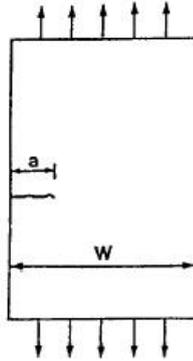


Figura 2.4: Edge crack

- elliptical surface crack

$$\beta = F\left(\frac{a}{b}, \frac{a}{r}, \frac{a}{W}, \frac{b}{t}, \varphi\right) \quad (2.6)$$

Per quest'ultima geometria la letteratura fornisce risultati discordanti, dunque si è preferito lasciare la generica espressione 2.6. Diciamo subito che questo lavoro si incentra proprio sulla cricca ellittica quindi in seguito vedremo meglio come calcolare β per questa configurazione.

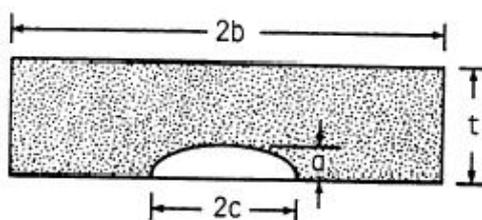


Figura 2.5: Elliptical surface crack

2.4 Plane stress fracture toughness

La frattura si verifica quando gli sforzi concentrati sul fronte di cricca diventano troppo elevati ed il materiale non riesce più a sostenerli. Dato che lo stress intensity factor descrive l'intero campo degli sforzi attorno al difetto, potremmo anche dire che la struttura collassa quando K supera una certa soglia: questo valore prende il nome di *plane stress fracture toughness* e spesso si indica con K_{cr} .

Ciò che si fa in pratica per calcolarlo è prendere un componente di materiale X (i.e. una lastra di larghezza $W = 762$ mm e di spessore $t = 5.08$ mm) con una cricca centrale (embedded crack, $2a = 101.6$ mm). La lastra è sottoposta a trazione in una macchina apposita. Supponiamo che la frattura si verifichi con un carico di 800 kN, allora lo sforzo nominale nella sezione residua è $800\,000 / (5.08 \times 762) = 207$ MPa. Questa informazione ci permette di calcolare la *toughness* (resistenza) del materiale, infatti segue dalla (2.3) che:

$$K_{cr} = 1 \times 207 \times \sqrt{\pi \times 0.00508} = 83 \text{ MPa}\sqrt{\text{m}}$$

si noti che $\beta \approx 1$ perchè a/W è molto piccolo.

Quindi la resistenza di un materiale è il più alto *stress intensity factor* che può essere sopportato da un componente difettoso costituito di quello stesso materiale.

Capitolo 3

Crack growth analysis

3.1 Visione

In questo capitolo vengono analizzati i concetti che stanno alla base dell'accrescimento della cricca in un componente metallico e i metodi per la previsione della vita a fatica del materiale difettoso.

Ancora, consideriamo soltanto la crescita dovuta alla fatica, questo per due motivi:

- le rotture causate da *stress corrosion* si possono evitare esclusivamente con accorgimenti preventivi, mentre un'analisi della struttura è indispensabile per controllare (e non prevenire) una rottura a fatica;
- la fatica è quasi sempre la principale responsabile dell'accrescimento del difetto.

3.2 Crack growth

Il *crack growth* è la branca della meccanica della frattura che studia la propagazione dei difetti e si occupa di prevedere la vita a fatica di un componente basandosi appunto sulla loro velocità di accrescimento. Come abbiamo evidenziato in precedenza, la resistenza residua di un materiale diminuisce al crescere della (o delle) cricca al suo interno, dunque il *crack growth* si presenta come un metodo di controllo per evitare il raggiungimento di una dimensione critica di cricca per cui si può avere il collasso fragile della struttura.

La vita a fatica di un materiale può essere divisa in due fasi:

- nucleazione della cricca;

- crescita della cricca.

La nucleazione e la crescita della microcricca nella prima fase sono in genere fenomeni di superficie.

La seconda fase inizia quando il difetto penetra all'interno del componente, lontano dalla sua superficie, qui la sua crescita è principalmente legata alla resistenza a fatica del materiale.

L'esperienza ci mostra che la vita a fatica di un pezzo meccanico è quasi interamente coperta dal periodo di nucleazione, la fase di crescita spesso può essere trascurata. Allora sotto quali condizioni vale la pena di considerare la seconda fase del *crack growth*? Innanzitutto lo spettro di carico (il diagramma che contiene i vari cicli di tensione a cui è sottoposto il campione) deve contenere dei picchi che siano più elevati del limite di fatica del materiale¹. In secondo luogo alcune cricche devono poter essere sopportate dal materiale e deve essere possibile conoscere la loro velocità di propagazione.

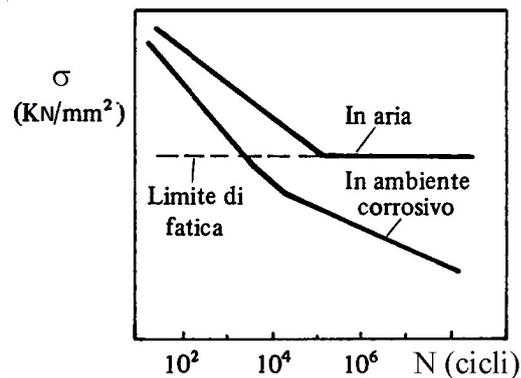


Figura 3.1: Limite di fatica qualitativo

Due sono le categorie di difetti più importanti considerate nel *crack growth*:

- **part-through crack**: è una cricca che si è nucleata in superficie e si sta espandendo in profondità nel materiale, tuttavia non ha ancora influenzato tutto lo spessore del campione. E' del tipo di quella vista in figura 2.5;
- **through crack**: è una cricca che ha raggiunto lo spessore del materiale e sta iniziando a propagarsi in direzione della larghezza del campione.

¹I materiali metallici presentano sempre un limite di fatica, cioè, dopo un elevato numero di cicli, la loro resistenza non diminuisce più sensibilmente al crescere della cricca.

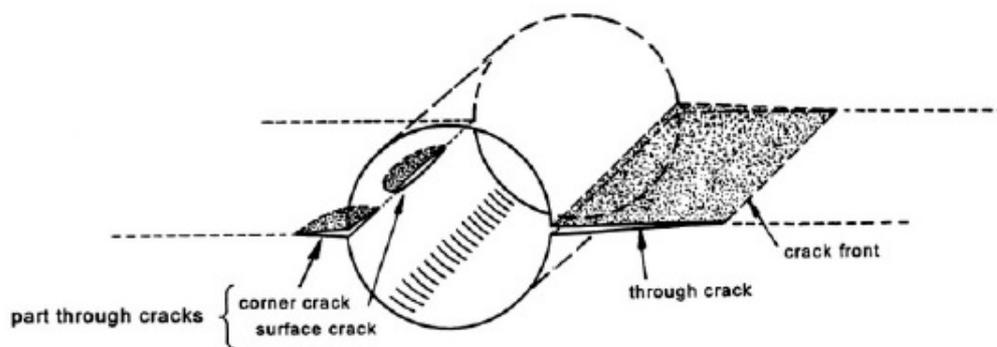


Figura 3.2: Diversi tipi di cricca nucleati da un foro

Una cricca può essere tollerata per diversi motivi, ad esempio se la sua presenza non arreca danni alla struttura in termini di sicurezza o perdite economiche. Se invece uno dei due, o entrambi, sono minacciati dalla crescita del difetto, l'ispezione e la manutenzione si rendono necessari. Questo è il caso ad esempio di una microfessura in un recipiente pressurizzato, che può causare un'esplosione. Altri problemi sono legati ai componenti che vengono ispezionati periodicamente: lo scopo dell'ispezione è quello di rilevare i difetti prima che diventino pericolosi, dunque è necessario conoscere a che velocità si stanno propagando per programmare, ad esempio, l'ispezione successiva.

3.3 Regioni di crescita

Il grafico alla base di tutto il crack growth è quello presentato in figura 3.3. Viene tracciato in scala bilogarithmica perchè le variazioni delle grandezze lungo gli assi coordinati sono molto grandi, dunque si ricorre a questo espediente per considerare con il giusto dettaglio anche i piccoli valori.

Il grafico mostra l'evoluzione della cricca in funzione dei carichi applicati, vediamo come interpretarlo.

Sulle ordinate da/dN rappresenta la crescita del difetto ad ogni ciclo (qui è espressa in μm), mentre sulle ascisse ΔK merita una breve spiegazione. Condizione necessaria affinché si abbia *fatigue crack growth* è l'applicazione di carichi ciclici. Abbiamo visto in precedenza che ad ogni carico esterno applicato corrisponde un determinato valore dello *stress intensity factor*, allora ΔK non è altro che la differenza tra K_{max} e K_{min} , che corrispondono rispettivamente al massimo e minimo carico applicato.

Si vede come all'aumentare della dimensione di cricca, ΔK aumenti, si nota anche come la curva possa essere divisa in tre regioni distinte: in letteratura

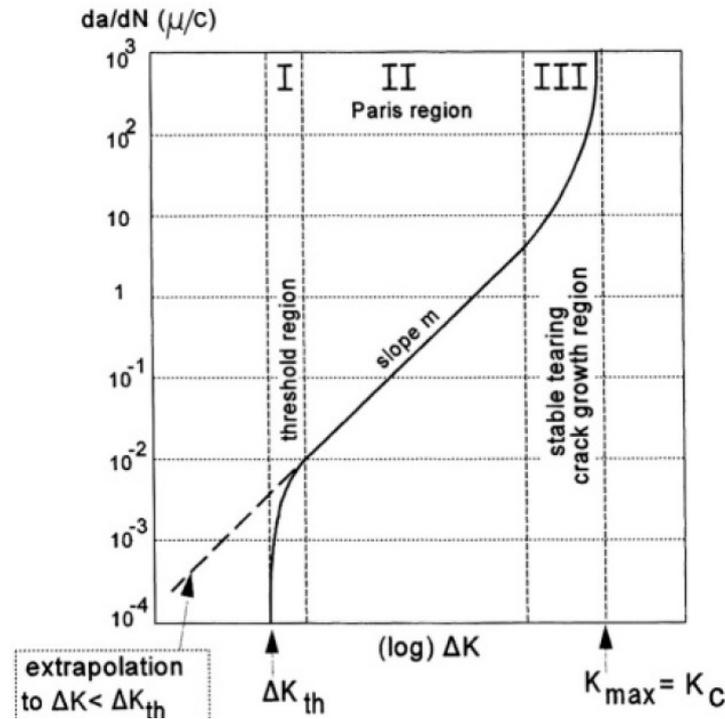


Figura 3.3: Le tre regioni del *crack growth*

queste si chiamano *fatigue crack growth regions* ed ora andiamo ad indicarne le principali caratteristiche:

- I. **threshold region:** questa regione è caratterizzata dalla relazione $\Delta K < \Delta K_{th}$, significa che gli sforzi sul fronte di cricca sono inferiori ad un certo valore di soglia (caratteristica dei diversi materiali) per cui si ha una crescita quasi nulla del difetto. Attenzione a non confondere questa regione con la fase di nucleazione della cricca descritta in precedenza, infatti questi risultati si applicano a macrocricche che però non riescono a propagarsi a causa dei piccoli sforzi agenti alle loro estremità. Lo Standard prevede che la propagazione possa essere considerata trascurabile per valori di da/dN dell'ordine di $10^{-10} m/cycle$;
- II. **Paris region:** è la regione che si presenta lineare in scala logaritmica. Secondo Paris la curva in questa zona può essere descritta dalla seguente relazione:

$$\frac{da}{dN} = C \Delta K^m \quad \text{Relazione di Paris} \quad (3.1)$$

in cui C è una costante del materiale così come lo è m , che inoltre fornisce la pendenza della retta nel grafico;

- III. **stable-tearing crack growth region:** in quest'ultima zona riconosciamo un asintoto, dovuto al fatto che K_{\max} si sta avvicinando al valore critico K_{cr} . Il rateo di crescita della cricca è molto elevato (dell'ordine di $0.01mm/cycle$). Per questo motivo il periodo in cui la cricca si trova in questa fase è relativamente breve, e poco interessante dal punto di vista ingegneristico e del controllo della frattura. La cosa interessante è che possiamo riconoscere in K_{cr} la *plain stress fracture toughness* descritta nel paragrafo 2.4, infatti il materiale arriva a rottura proprio quando la massima concentrazione degli sforzi sul fronte di cricca raggiunge tale valore.

Capitolo 4

Modelli matematici

4.1 Visione

In questa sezione vedremo più da vicino il caso di studio che questo lavoro si propone di esaminare.

Innanzitutto descriveremo più in dettaglio la tipologia di cricca ellittica, poi ci soffermeremo sui vari modelli matematici utilizzati per descrivere l'andamento delle tensioni e la crescita a fatica della cricca stessa.

4.2 Caso di studio

Per questo lavoro abbiamo considerato un campione di alluminio Al 2024-T351 utilizzato in ambito aeronautico. Il materiale è inoltre stato sottoposto a pallinatura: una tecnica che consiste nel bombardare il componente con una grana fine in modo da creare tensioni residue superficiali di compressione, benefiche dal punto di vista della resistenza a fatica. Nel campione è stata considerata una cricca ellittica del tipo mostrato in figura 4.1.

Nella tabella 4.1 sono riportate le dimensioni caratteristiche del campione e della cricca.

Oggetto	Spessore (t) [mm]	Larghezza (W) [mm]
Campione	2	160
Oggetto	Semiassse minore (a) [mm]	Semiassse maggiore (c) [mm]
Cricca	1.5	5

Tabella 4.1: dimensioni del campione e della cricca

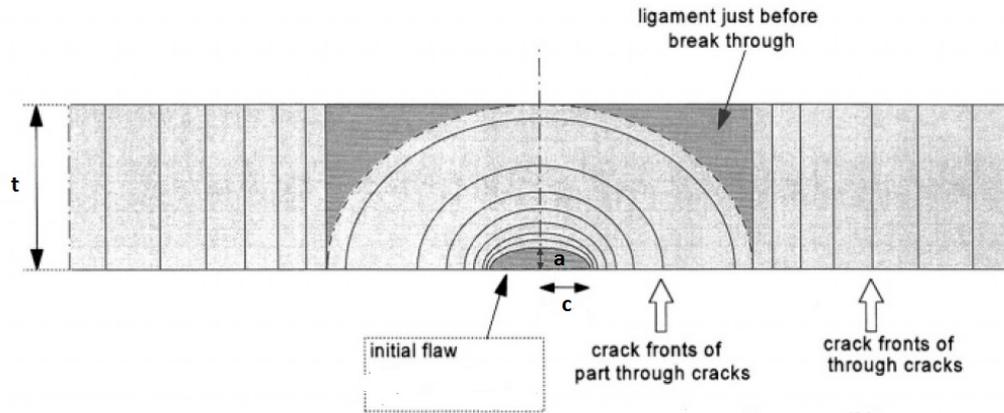


Figura 4.1: Cricca ellittica considerata nel caso di studio

Per la descrizione geometrica della cricca (semi) ellittica vengono considerati i due semiassi, la posizione sul fronte è parametrizzata con un angolo $\varphi = 0$ in superficie e $\varphi = \pi/2$ nel punto di massima profondità. Per il campione siamo invece interessati a spessore e larghezza.

In figura 4.1 è schematizzata anche la modalità di crescita di questo difetto: la nucleazione genera una semiellisse sulla superficie del materiale, dopodichè, man mano che la propagazione avviene attraverso lo spessore del campione, la cricca tende ad assumere una forma circolare. Dopo questa prima fase in cui abbiamo una *part-through crack*, la cricca affiora sul lato opposto del componente trasformandosi in *through crack*, e comincia ad espandersi nella rimanente dimensione (W).

La sezione residua diminuisce all'avanzare del fronte di cricca fino al raggiungimento di rottura fragile, questo è fondamentalmente il fenomeno che ci proponiamo di analizzare.

4.3 Modello di Irwin

Irwin è stato il primo, nel 1962, a fornire risultati per la variazione dello *stress intensity factor* lungo il fronte di una cricca ellittica. La sua soluzione tiene conto anche del *crack aspect ratio* (a/c) che come vedremo è un parametro molto importante.

L'equazione di Irwin è stata ricavata in forma chiusa, quindi molte semplificazioni sono state adottate per il raggiungimento della forma finale. Questa semplicità purtroppo va a discapito dell'accuratezza, ma il suo modello va

comunque considerato perché contiene le idee giuste per la descrizione del fenomeno:

$$K = \frac{S\sqrt{\pi a}}{\Phi} \left(\frac{a^2}{c^2} \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi \right)^{1/4} \quad \text{Equazione di Irwin} \quad (4.1)$$

dove Φ è l'integrale ellittico del secondo tipo. Nella letteratura spesso Φ viene rimpiazzato con il fattore di forma $Q = \Phi^2$ che è stato calcolato da Irwin in questa forma:

$$\left. \begin{aligned} Q &= 1 + 1.464 \left(\frac{a}{c} \right)^{1.65} && \text{per } a/c \leq 1 \\ Q &= 1 + 1.464 \left(\frac{c}{a} \right)^{1.65} && \text{per } a/c > 1 \end{aligned} \right\} \quad (4.2)$$

Nei moderni test di previsione di vita a fatica questo modello non viene più utilizzato, ve ne sono altri più sofisticati che si basano sull'analisi agli elementi finiti, come quello che adesso andiamo a vedere.

4.4 Modello di Newman-Raju

Questa è la soluzione oggi più usata per la descrizione del campo delle tensioni intorno ad una cricca ellittica.

Newman e Raju sono stati in grado di ricavarla studiando gli sforzi che si generano sul fronte della cricca tramite un'analisi agli elementi finiti. L'andamento del K è stato ricavato in forma grafica, poi si è trovata un'equazione che potesse approssimare bene l'andamento della curva: il termine $K = S\sqrt{\frac{\pi a}{Q}}$ già visto nell'equazione di Irwin viene moltiplicato per un fattore di correzione $F(\frac{a}{t}, \frac{a}{c}, \varphi)$ chiamato *magnification factor* che presenta questa forma:

$$F = [M_1 + M_2 \frac{a^2}{t} + M_3 \frac{a^4}{t}] g f_{\varphi} f_w \quad (4.3)$$

dove i termini che compaiono all'interno hanno diverse espressioni a seconda del *crack aspect ratio*:

$$\left. \begin{aligned}
 M_1 &= 1.13 - 0.09(a/c) \\
 M_2 &= -0.54 + 0.89/[0.2 + (a/c)] \\
 M_3 &= 0.5 - [1/(0.65 + a/c)] + 14(1 - a/c)^{24} \\
 g &= 1 + [0.1 + 0.35(a/t)^2](1 - \sin \varphi)^2 \\
 f_\varphi &= [(a/c)^2 \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi]^{0.25} \\
 f_w &= [\sec(\pi c/2W \sqrt{a/t})]^{0.5}
 \end{aligned} \right\} \text{ per } a/c \leq 1 \quad (4.4)$$

$$\left. \begin{aligned}
 M_1 &= \sqrt{c/a}(1 + 0.04c/a) \\
 M_2 &= 0.2(c/a)^4 \\
 M_3 &= -0.11(c/a)^4 \\
 g &= 1 + [0.1 + 0.35(c/a)(a/t)^2](1 - \sin \varphi)^2 \\
 f_\varphi &= [(a/c)^2 \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi]^{0.25} \\
 f_w &= [\sec(\pi c/2W \sqrt{a/t})]^{0.5}
 \end{aligned} \right\} \text{ per } a/c > 1 \quad (4.5)$$

È evidente come questo modello sia molto più accurato del precedente: sia per la sua maggiore complessità, sia per il fatto che tiene conto anche dello spessore della cricca (t) e della larghezza del campione (W).

4.5 Modello per la previsione del *crack shape*

In entrambi i modelli precedenti abbiamo visto che a/c rappresenta uno dei parametri più ricorrenti. La sua importanza è legata al fatto che, durante il suo sviluppo, la cricca ellittica tende sempre ad assumere una forma circolare, dunque il *crack aspect ratio* (o *crack shape*) tende asintoticamente ad un valore prossimo all'unità, dato che il cerchio non è altro che un'ellisse avente i semiassi di uguali dimensioni. La forma della cricca è molto importante per la determinazione del campo delle tensioni, inoltre, man mano che questa si propaga in profondità, si avrà anche un'espansione lungo la larghezza del campione che noi possiamo conoscere nel momento in cui conosciamo a/c . Finalmente, nel momento in cui si forma la *through crack*, la sua dimensione iniziale sarà proprio la dimensione di c nella fase finale della *part-through crack*, che noi conosciamo grazie ai risultati che adesso riportiamo:

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{dc} &= \left[0.9 \sqrt{\frac{a}{c}} \left(1.1 + 0.35 \frac{a^2}{t} \right) \right]^{-m} && \text{per } a/c \leq 1 \\ \frac{da}{dc} &= \left[0.9 \sqrt{\frac{a}{c}} \left(1.1 + 0.35 \frac{a^2 a}{t c} \right) \right]^{-m} && \text{per } a/c > 1 \end{aligned} \right\} \quad (4.6)$$

dove m è l'esponente di Paris ed è caratteristico di ciascun materiale. Una volta risolte, le 4.6 vanno integrate per ottenere a/c e quindi la variazione di forma della cricca.

4.6 Modello NASGRO

Il modello NASGRO rappresenta sicuramente il principale risultato di questo lavoro. È stato sviluppato da Forman e Newman presso NASA, de Koning presso NLR e Henriksen presso ESA. Gli sviluppatori hanno quindi avuto a disposizione innumerevoli prove sperimentali effettuate su campioni di uso aeronautico e, basandosi su queste, hanno elaborato un'equazione di notevole complessità e accuratezza che si propone di stimare la vita a fatica di qualsiasi componente, fatto di qualsiasi materiale, soggetto a qualsiasi cricca. Il modello NASGRO fornisce il grafico visto in figura 3.3 specifico per ogni situazione, qui di seguito mostriamo l'equazione completa insieme ad un elenco delle principali variabili coinvolte:

$$\frac{da}{dN} = C \left[\left(\frac{1-f}{1-R} \right) \Delta K \right]^m \frac{\left(1 - \frac{\Delta K_{th}}{\Delta K} \right)^p}{\left(1 - \frac{K_{max}}{K_{cr}} \right)^q} \quad \text{Equazione NASGRO} \quad (4.7)$$

dove C (costante di Paris), m (esponente di Paris), p , q sono tutti empiricamente determinati e come al solito caratteristici di ciascun materiale, mentre:

$$f = \begin{cases} \max(R, A_0 + A_1 R + A_2 R^2 + A_3 R^3) & \text{se } R \geq 0 \\ A_0 + A_1 R & \text{se } -2 \leq R < 0 \\ A_0 - 2A_1 & \text{se } R < -2 \end{cases} \quad (4.8)$$

e i coefficienti sono:

$$\left. \begin{aligned}
 A_0 &= (0.825 - 0.34\alpha + 0.05\alpha^2) \left[\cos\left(\pi/2 \frac{S_{\max}}{\sigma_0}\right) \right]^{1/\alpha} \\
 A_1 &= (0.415 - 0.071\alpha) \frac{S_{\max}}{\sigma_0} \\
 A_2 &= 1 - A_0 - A_1 - A_3 \\
 A_3 &= 2A_0 + A_1 - 1
 \end{aligned} \right\} \quad (4.9)$$

Il valore di soglia ΔK_{th} per il quale non si ha una propagazione significativa della cricca è calcolato come segue:

$$\Delta K_{\text{th}} = \Delta K_0 \frac{\sqrt{\frac{a}{a+a_0}}}{\left(\frac{1-f}{(1-A_0)(1-R)}\right)^{1+C_{\text{th}}R}} \quad (4.10)$$

siccome molti di questi parametri (tutti ricavati empiricamente) non sono stati finora affrontati, ne forniamo qui una breve spiegazione:

- α : *plane stress constraint factor*;
- S_{\max}/σ_0 : è il rapporto tra il massimo sforzo (e quindi carico) applicato e lo sforzo per cui si raggiunge deformazione plastica nel materiale;
- R : è un parametro molto importante che non abbiamo ancora affrontato, rappresenta il rapporto tra il minimo e il massimo del carico ciclico applicato e prende il nome di *stress ratio*;
- ΔK_0 : è il valore di soglia quando $R = 0$;
- a_0 : per una *part-through crack* rappresenta la profondità intrinseca di cricca, mentre per una *through crack* è la larghezza intrinseca, in entrambi i casi vale $3.81 \cdot 10^{-5}m$;
- C_{th} : è un coefficiente di soglia;
- K_{\max} : è il massimo valore di K che raggiungiamo, avrà un valore diverso ad ogni ciclo.

Questo modello rappresenta un efficace strumento per la previsione della vita a fatica, ancora una volta i risultati ottenuti andranno integrati per valutare la durata utile del componente.

4.7 Modelli di Paris e Walker

Questi ultimi due modelli che consideriamo, proprio come il NASGRO, forniscono informazioni sulla velocità di propagazione della cricca. Rispetto a quest'ultimo però, sono molto semplificati, li inseriamo dunque per completezza e per un confronto.

L'equazione di Paris, già vista nella 3.1 descrive l'andamento della curva nella regione di crescita logaritmica, l'equazione di Walker fornisce informazioni analoghe:

$$\frac{da}{dN} = \frac{C\Delta K^m}{(1-R)^{n(1-\lambda)}} \quad \text{Equazione di Walker} \quad (4.11)$$

dove λ al solito è una costante del materiale ricavata empiricamente ed il suo valore varia tra 0.3 e 0.9.

Come abbiamo detto, questi modelli si comportano bene nel tratto logaritmico della curva, il loro principale difetto è quello di non tenere conto degli asintoti a sinistra e a destra di questa regione.

Capitolo 5

Implementazione dei modelli

5.1 Visione

Siamo giunti alla sezione principale del lavoro: i modelli matematici descritti nel capitolo precedente sono stati implementati sul software MATLAB per essere risolti numericamente.

Nei prossimi paragrafi i grafici ottenuti sono riportati e commentati, inizieremo con la distribuzione degli sforzi sul fronte di cricca per arrivare, infine, alla previsione della vita a fatica del componente.

5.2 Carico applicato

In figura 5.1 è mostrato semplicemente il carico ciclico applicato: è di pura tensione, si ripete una volta ogni ciclo, ha ampiezza massima e minima rispettivamente uguali a 70 e 7 MPa, e dunque uno *stress ratio* $R = 0.1$.

In questo lavoro ci si è limitati all'analisi del cosiddetto *constant amplitude loading* (carico ad ampiezza costante), in realtà un componente aeronautico è soggetto a determinati cicli di carico che saranno diversi, ad esempio, nella fase di crociera e in quella di atterraggio e decollo. Fin qui nessun problema, basterebbe suddividere lo spettro di carico in tre *subspectra* corrispondenti alle fasi sopracitate, il problema si ha quando abbiamo dei picchi di carico localizzati: infatti in questo caso, nella regione superficiale vicino al fronte di propagazione, si generano delle zone di deformazione plastica eccessive che portano ad una chiusura della cricca, conseguentemente si ha un arresto di crescita in superficie ma dopo qualche ciclo la propagazione ricomincia più veloce di prima.

Dunque il *variable amplitude loading* con picchi concentrati è un argomento

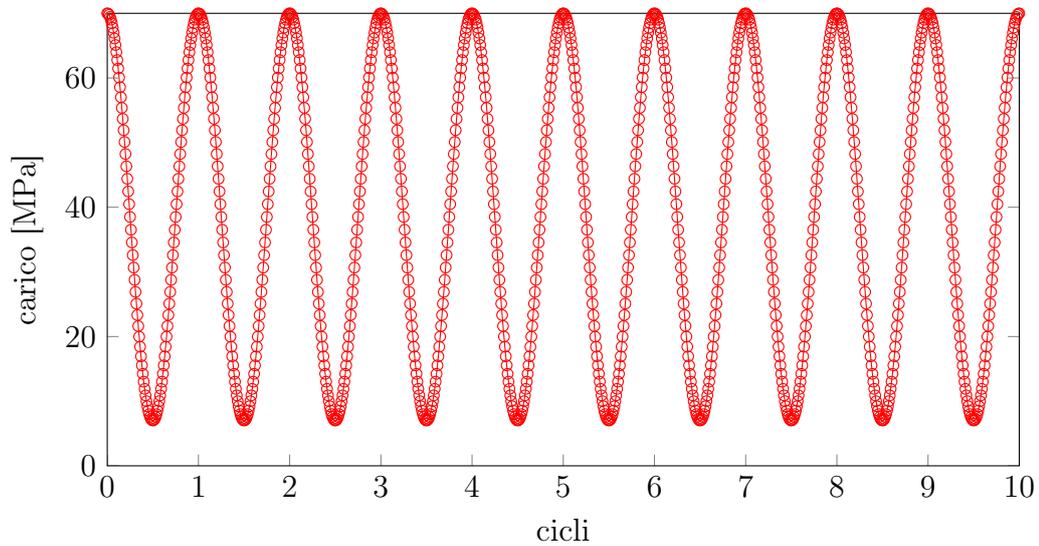


Figura 5.1: Carico ciclico

più complesso che non può essere descritto totalmente con la meccanica della frattura elastica.

5.3 Modello di Irwin

In figura 5.2 è mostrato l'andamento dello *stress intensity factor* al variare dell'angolo e della forma di cricca.

Stiamo considerando una cricca superficiale ellittica, tuttavia quello mostrato non è il grafico relativo al nostro caso di studio, si tratta invece di un'analisi più generale per studiare qualitativamente la dipendenza del K dalle altre grandezze. Abbiamo fatto questa scelta perchè il modello di Irwin descrive qualitativamente molto bene il problema, però come abbiamo già detto i valori non sono esatti, infatti qui non si tiene conto nè dello spessore nè della profondità del campione, dunque i risultati quantitativi accettabili sono stati ricavati col modello di Newman-Raju.

Vediamo innanzitutto che in superficie ($\varphi = 0$) il K diminuisce insieme al *crack aspect ratio* (a/c), mentre in profondità ($\varphi = \pi/2$) il comportamento è opposto. Si ha un massimo nel punto di massima profondità, ciò è dovuto alla diversa finitura del materiale: infatti solitamente il componente subisce lavorazioni atte ad aumentare la resistenza a fatica sulla sua superficie (i.e pallinatura), mentre al suo interno la grana non ha subito alcuna modifica, dunque è naturale pensare che gli sforzi si concentrino maggiormente nel punto più profondo del fronte di cricca.

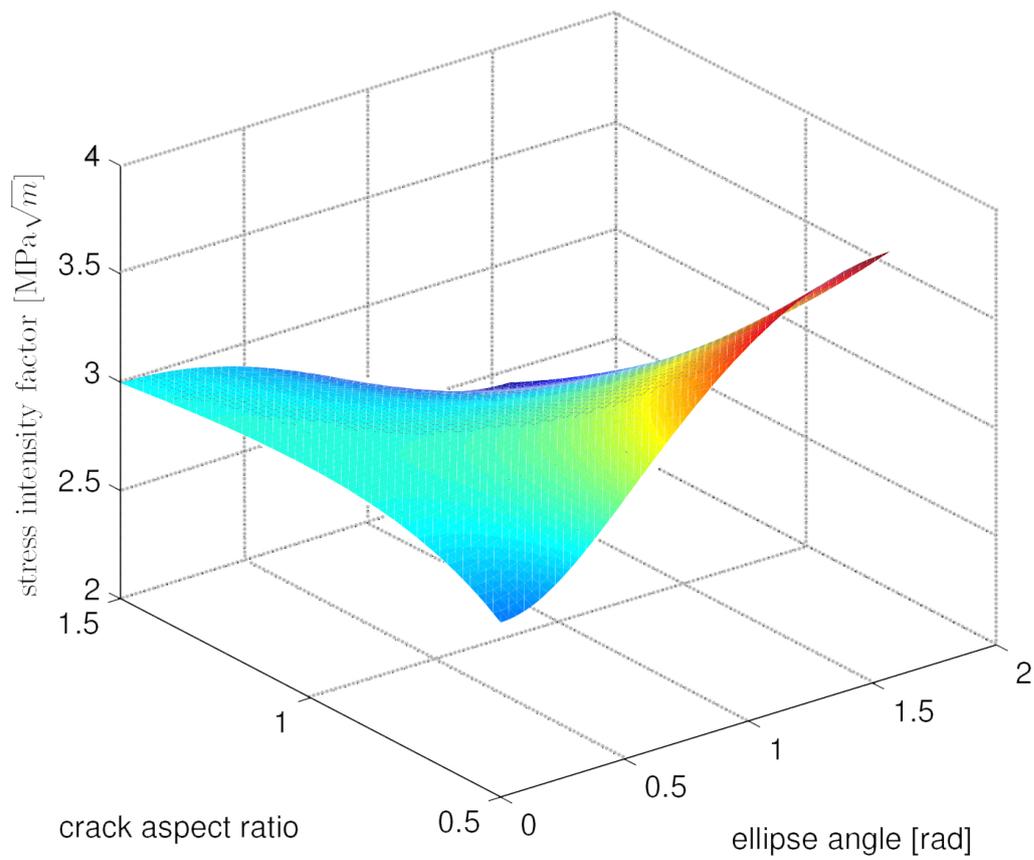


Figura 5.2: Variazione del K al variare della forma e dell'angolo di cricca secondo Irwin

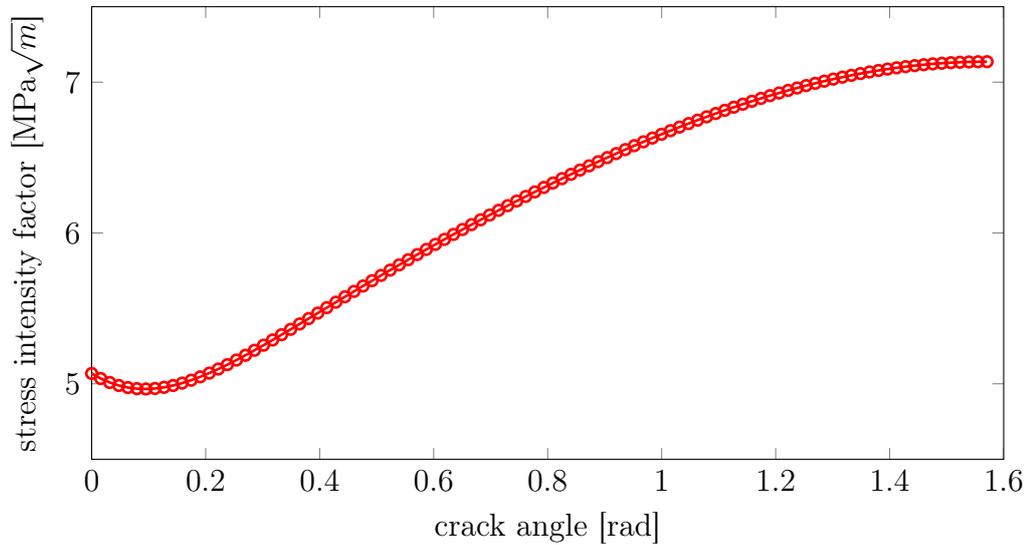


Figura 5.3: K in funzione dell'angolo di cricca secondo Newman-Raju

5.4 Modello di Newman-Raju

Questo è il modello più accurato per la descrizione degli sforzi intorno ad una cricca ellittica superficiale. In figura 5.3 è mostrato l'andamento del K in funzione dell'angolo di cricca. Analogamente al precedente modello si nota un aumento monotono, tuttavia i valori sono diversi, ci rendiamo conto che Irwin fornisce una sottostima dell'ampiezza degli sforzi, le ragioni le abbiamo discusse in precedenza.

Il modello Newman-Raju fornisce anche informazioni sull'effetto della profondità di cricca. In figura 5.4 è mostrato l'incremento del K all'aumentare del *crack depth* (a/c), tuttavia ciò avviene solo se assumiamo che la cricca mantenga la sua forma ellittica durante la propagazione, qualora (come in realtà avviene) essa tenda ad assumere una forma circolare, gli sforzi diminuiscono in pieno accordo con quanto previsto da Irwin.

Per stimare l'andamento del K nella curva rossa si è fatto ricorso al modello per la previsione del *crack shape*: con una procedura numerica si fa variare a di un certo valore ad ogni ciclo, dopodichè si vede come varia c e si è in grado di graficare la curva della forma di cricca a/t vs a/c , nota la variazione della forma si inseriscono i risultati nella Newman-Raju e si ottiene quella curva decrescente valida per una cricca che tende alla forma circolare. Ora andiamo a vedere come ricavare la variazione di forma della cricca.

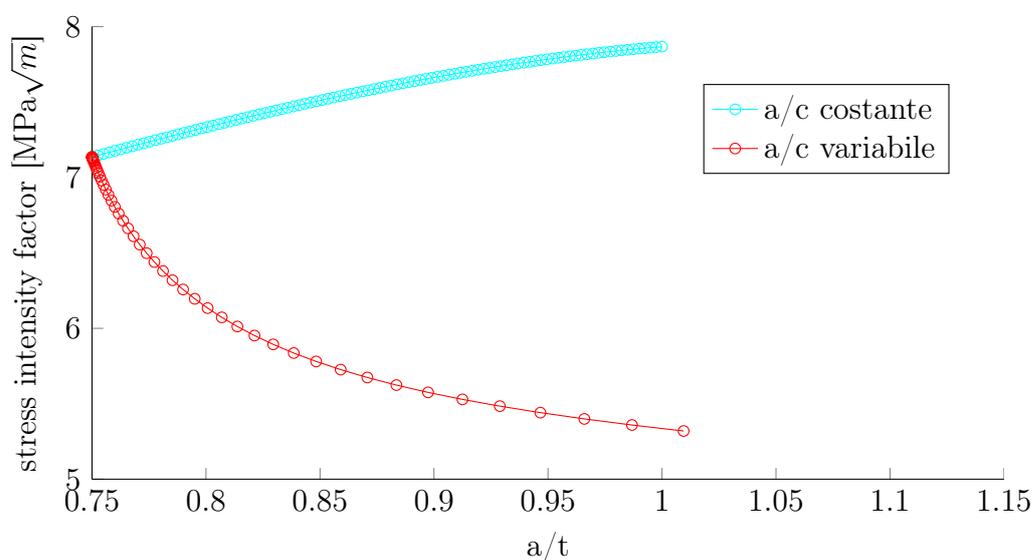


Figura 5.4: K in funzione della profondità di cricca secondo Newman-Raju

5.5 Modello per la previsione del *crack shape*

Come abbiamo visto è importante conoscere come varia la forma della nostra ellisse durante la sua propagazione in profondità: infatti dai modelli appena visti si evince che il campo degli sforzi è legato strettamente a questo fattore. Abbiamo già detto che una *elliptical surface crack* tende sempre ad assumere una forma circolare, ora lo vediamo meglio in figura 5.5. Per ogni forma iniziale, sia essa un'ellisse allungata lungo a o lungo c , il loro rapporto tende ad un valore prossimo all'unità all'avanzare della propagazione. Ciò è spiegato perfettamente dal modello di Irwin:

- se $a/c < 1$ abbiamo già visto come la cricca cresca più velocemente in profondità a causa della diversa finitura del materiale;
- se $a/c > 1$ vediamo in figura 5.2 che il K in profondità è minore di quello in superficie, dunque la propagazione avviene più velocemente lungo la larghezza del campione.

Questo grafico ha valore pedagogico, non si riferisce al caso di studio in esame che tratteremo in seguito.

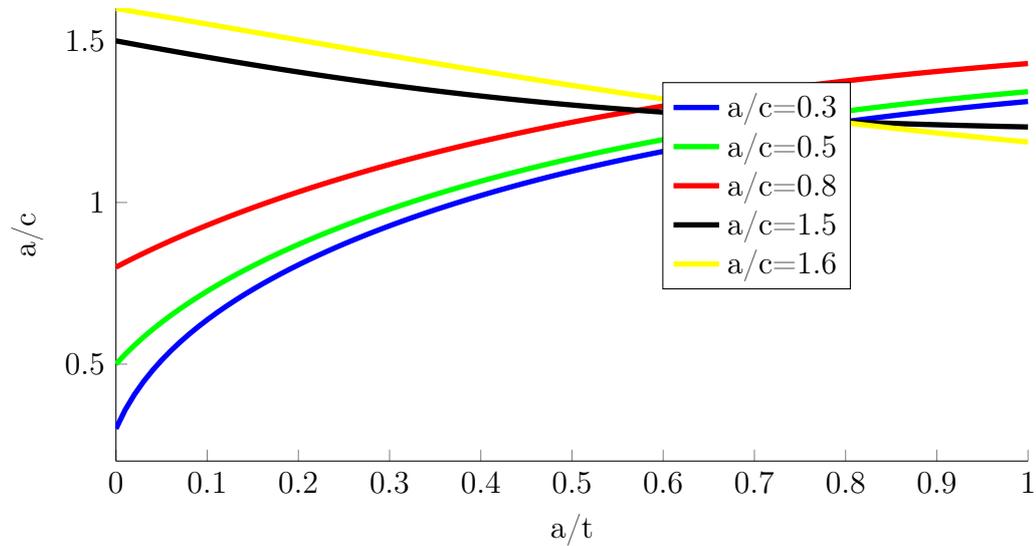


Figura 5.5: Variazione della forma della cricca durante la propagazione

5.6 Modello NASGRO

Ci consente di prevedere la vita a fatica di qualsiasi combinazione materiale-campione-cricca. In figura 5.6 la vediamo in particolare per il tipo di alluminio di cui è composto il nostro campione, insieme alle equazioni di Paris e Walker. È evidente come la NASGRO sia molto più completa delle altre: descrive perfettamente tutte le fasi della vita a fatica.

In figura 5.7 si è cercato di confrontare i tre modelli attraverso l'indice di correlazione statistico. Paris e Walker sono praticamente equivalenti, mentre NASGRO si discosta dai primi due per la sua capacità di descrivere anche gli asintoti della sigmoide.

Dalla curva NASGRO si possono già evincere alcune caratteristiche del materiale in esame, ad esempio la sua *plain stress fracture toughness* si aggira intorno ai $70MPa\sqrt{m}$, la soglia per cui abbiamo propagazione nulla è bassa $\approx 5MPa\sqrt{m}$, la pendenza della regione logaritmica è maggiore rispetto a quella degli altri modelli.

5.7 Procedura per stimare la vita a fatica

Fin qui abbiamo descritto tutti i modelli utilizzati per la nostra previsione, inoltre abbiamo mostrato gli effetti della loro implementazione su software, in quest'ultima sezione evidenziamo i passi principali secondo i quali, attraverso

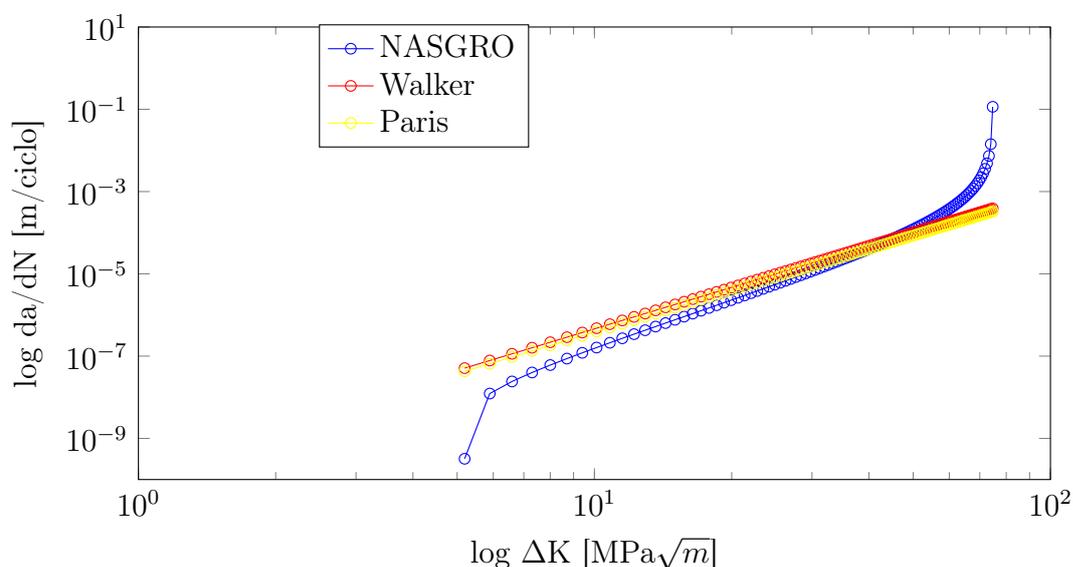


Figura 5.6: Curva NASGRO, Paris e Walker per la predizione della vita a fatica

le equazioni considerate, riusciamo ad elaborare una stima della vita a fatica del componente in esame che approssimi bene i risultati sperimentali.

Fintanto che la cricca non raggiunge lo spessore del campione, cioè possiamo classificarla come *part-through crack*:

1. consideriamo una variazione di 0.1% della profondità di cricca;
2. prendiamo il modello per la predizione del *crack shape*, inseriamo la variazione di a e ricaviamo la corrispondente variazione di c ;
3. inseriamo le nuove dimensioni della cricca all'interno della Newman-Raju e valutiamo:
 - il nuovo valore di ΔK che raggiungiamo;
 - il nuovo valore di K_{\max} , cioè il più alto valore che si raggiunge quando il carico ciclico è al massimo e la cricca presenta la geometria ricavata al punto 2;
4. nel modello NASGRO consideriamo $R = 0.1$, inseriamo i valori trovati al punto 3 e valutiamo il da/dN che si ottiene per l'attuale valore di ΔK ;
5. adesso conosciamo da/dN , conosciamo da (lo abbiamo definito al punto 1), dunque è possibile conoscere dN , cioè il numero di cicli necessario affinché si abbia una variazione della profondità di cricca dello 0.1%;

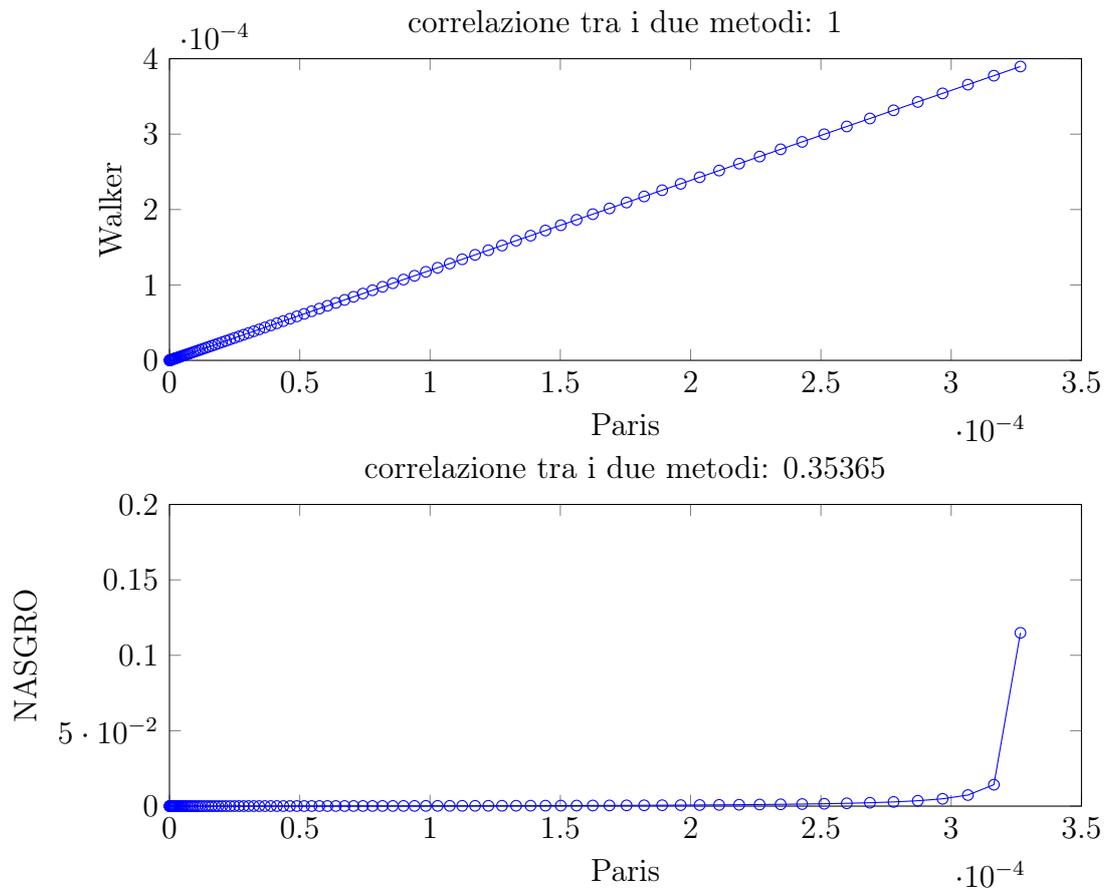


Figura 5.7: Correlazione tra NASGRO, Paris e Walker

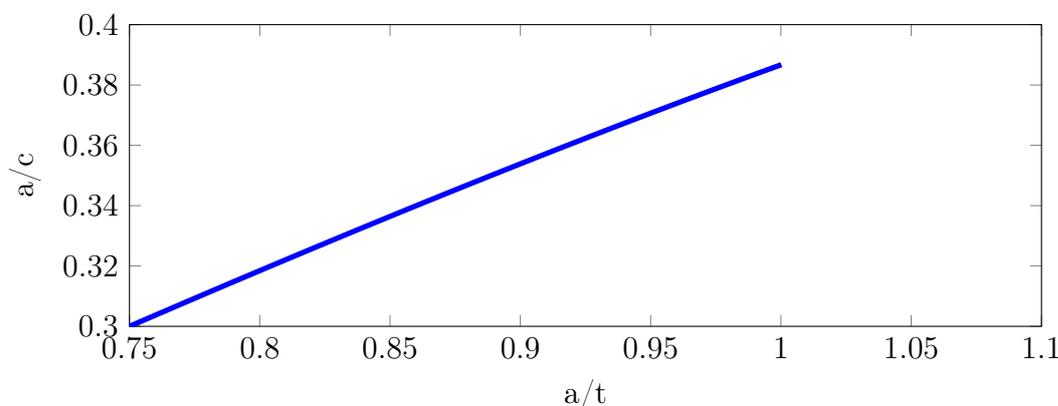


Figura 5.8: Andamento del *crack shape* nel caso in esame

- aggiungiamo gli incrementi ricavati di a , c , N ai loro valori iniziali in modo da iniziare un'altra iterazione.

Quando la cricca diventa una *through crack* la procedura si interrompe ed andiamo a vedere i risultati ottenuti.

In figura 5.8 possiamo osservare la variazione di forma della cricca durante la propagazione. A differenza di quanto rappresentato in figura 5.5 notiamo una tendenza minore verso il raggiungimento della forma circolare: questo perchè nel caso in esame la profondità di cricca è già molto elevata ($a/t = 0.75$), quindi si raggiunge la condizione di *through crack* prima di avere una variazione significativa del *crack aspect ratio*.

Ciò significa, come possiamo vedere in figura 5.9 che avremo un incremento dello *stress intensity factor* durante la propagazione, in quanto il contributo della variazione di profondità vince su quello dovuto alla variazione di forma (che tenderebbe a diminuirlo).

Finalmente, in figura 5.10 è mostrata la previsione del numero di cicli per i quali abbiamo una cricca ellittica superficiale. Il grafico ci dice che la velocità di propagazione aumenta lievemente durante la propagazione stessa, il che è una conseguenza del lieve incremento del K di cui abbiamo appena parlato. Dopo circa 18000 cicli il fronte dell'ellisse affiora sul lato opposto della lastra, da questo momento in poi dobbiamo considerare una *through crack*.

La procedura numerica implementata per descrivere questa nuova situazione è del tutto simile alla precedente, con la differenza che stavolta il campo delle tensioni non è descritto dal modello di Newman-Raju, ma dalla 2.4. Il nuovo valore in esame stavolta è la dimensione della cricca nella direzione

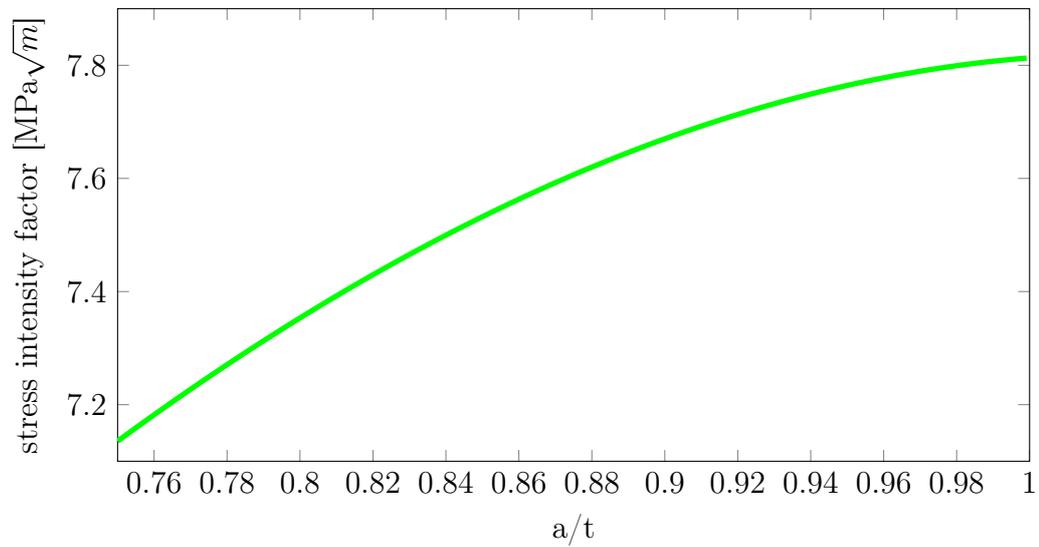


Figura 5.9: Evoluzione dello *stress intensity factor* durante la propagazione della cricca nel caso in esame

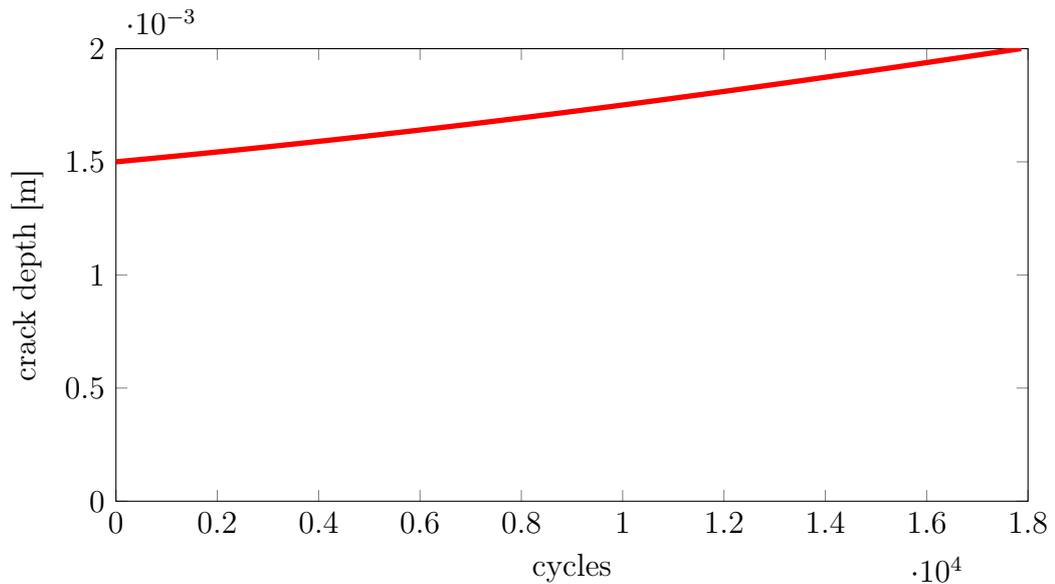


Figura 5.10: Propagazione della cricca ellittica in profondità

dello spessore della lastra: il valore finale di c per la cricca ellittica sarà il valore di partenza per la nuova analisi.

In figura 5.11 è mostrato l'incremento (significativo) di ΔK durante la propagazione della *through crack*: la crescita di quest'ultima genera una

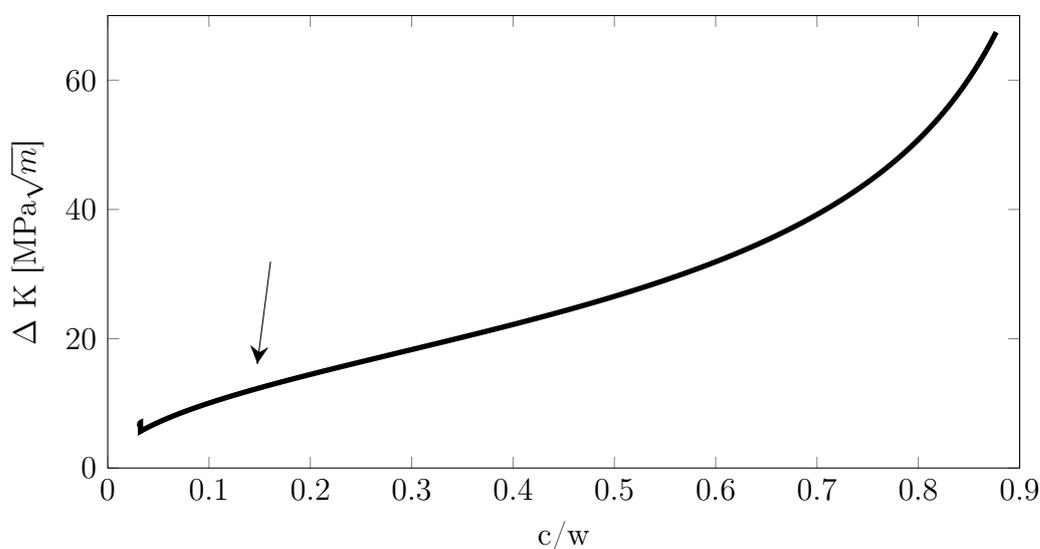


Figura 5.11: Andamento del ΔK durante la propagazione della *through crack*

diminuzione sempre maggiore della sezione resistente del materiale, perciò la concentrazione degli sforzi alle estremità di cricca cresce fino a diventare insostenibile. Il valore finale di ΔK corrisponde ad un K_{\max} che ha raggiunto la *plane stress fracture toughness* del materiale, immediatamente dopo abbiamo quindi la rottura fragile del campione. La dimensione di cricca al momento della frattura raggiunge la quasi totale larghezza della lastra, dunque sotto questa condizione di carico il materiale presenta una buona tolleranza al danno visto che la cricca al suo interno può essere facilmente individuata e monitorata proprio a causa delle elevate dimensioni che raggiunge.

Lo spigolo nel tratto iniziale della curva si genera perchè ad un certo punto passiamo ai risultati validi per una *through crack*, dunque in quel punto c'è una discontinuità nel campo delle tensioni attorno al fronte di cricca. Ciò è comunque accettabile perché nella prima situazione abbiamo sforzi concentrati soprattutto nella parte più profonda dell'ellisse, non appena questa affiora dall'altro lato i suddetti sforzi si distribuiscono uniformemente lungo un fronte più ampio, perpendicolare alla direzione di w . In questo lavoro la transizione tra cricca superficiale e passante è stata considerata istantanea, in realtà occorre un certo numero di cicli affinché ciò avvenga, ma il tempo richiesto dal fenomeno è assolutamente trascurabile.

Finalmente dalla figura 5.12 si ricava il numero di cicli necessario affinché si abbia rottura fragile nella lastra in esame. Come abbiamo già detto la larghezza della cricca, nelle fasi finali, è paragonabile a quella del campione,

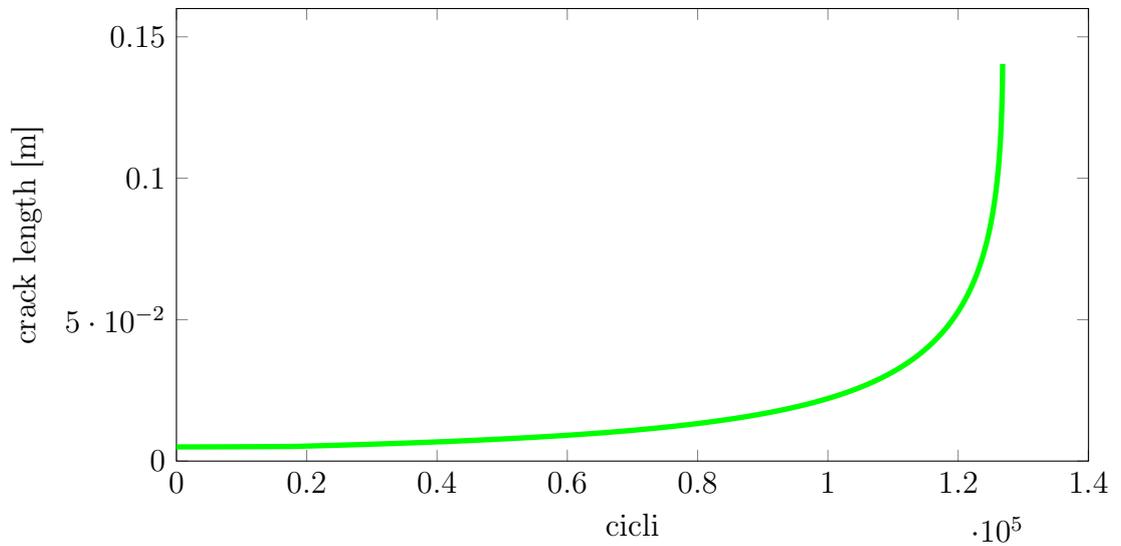


Figura 5.12: Propagazione della *through crack* lungo la larghezza della lastra

la frattura si verifica dunque dopo circa 130000 cicli. In questo caso, a differenza del precedente, l'incremento della dimensione di cricca si mantiene circa costante per un elevato numero di cicli, dopodichè si ha una crescita esponenziale. Nella regione iniziale siamo infatti vicini al valore di soglia ΔK_{th} per cui si ha crescita nulla, intorno agli 80000 cicli entriamo nella fase di crescita logaritmica descritta da Paris, quando infine il K_{max} si avvicina al valore critico, la crescita è esplosiva.

5.8 Confronto tra alcuni materiali

Per mostrare la validità generale del modello vediamo ora un confronto tra alcuni materiali che presentano caratteristiche diverse tra loro, i loro parametri costitutivi sono riassunti nella tabella 5.1.

In figura 5.13 possiamo vedere l'andamento della curva relativa al modello NASGRO per i diversi materiali. Si nota ad esempio che l'acciaio presenta un ΔK_{th} molto basso, paragonabile a quello dell'alluminio, tuttavia la pendenza della curva nella regione di Paris è la più bassa di tutte e da ciò possiamo già intuire che l'acciaio gode di ottime proprietà di resistenza a fatica come vediamo in figura 5.15.

Il caso opposto è quello del ferro: elevato valore di soglia ma elevata pendenza, ci aspettiamo che questo materiale sia molto resistente nelle prime fasi di propagazione della cricca ellittica (figura 5.14), per poi indebolirsi drasticamente a causa della riduzione della sua sezione resistente, che tra l'altro avviene

	Aluminum 2024- T351 Al L-T [Plt.]	Iron A536 Grd 80- 55-06 [as cast]	High tempera- ture steel A286 [Forg. rod. L-R]	Titanium alloy Ti- 6Al-4V (ELI) RA(1700F/4h) [Plt.]	Ni supe- ralloy In- conel 600 [Plt.]
n	3.35	2.9	2.1	3	3.3
p	0.5	0.5	0.25	0.5	0.5
q	1	0.5	0.25	0.75	0.5
$\Delta K_0 [MPa\sqrt{m}]$	2.86	8.79	3.85	6.59	5.49
α	1.5	2.5	3	2.5	2.5
$K_{cr} [MPa\sqrt{m}]$	74.72	52.74	164.83	123.62	164.82
C_{th}	1.5	2	0.2	0.15	1
C	$1.70 \cdot 10^{-10}$	$1.35 \cdot 10^{-11}$	$6.25 \cdot 10^{-11}$	$4.79 \cdot 10^{-11}$	$8.37 \cdot 10^{-12}$
S_{max}/σ_0	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3

Tabella 5.1: Caratteristiche dei materiali

molto presto data la sua bassa *plane stress fracture toughness*.

L'alluminio rimane comunque il meno resistente di tutti, mentre le altre due leghe sono molto simili e rappresentano una via di mezzo tra il ferro e l'acciaio.

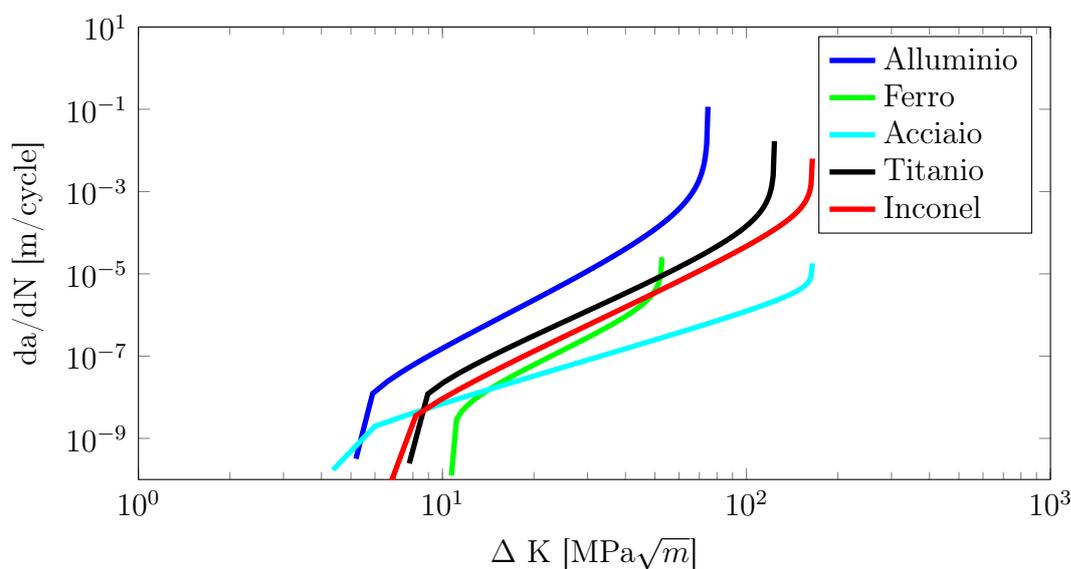


Figura 5.13: Modello NASGRO per i materiali considerati

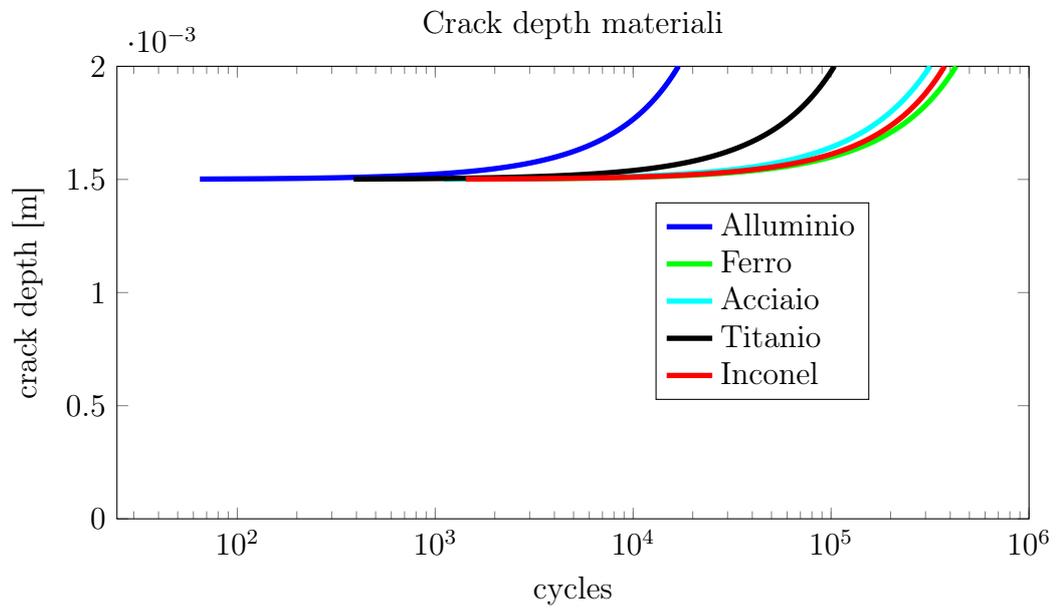
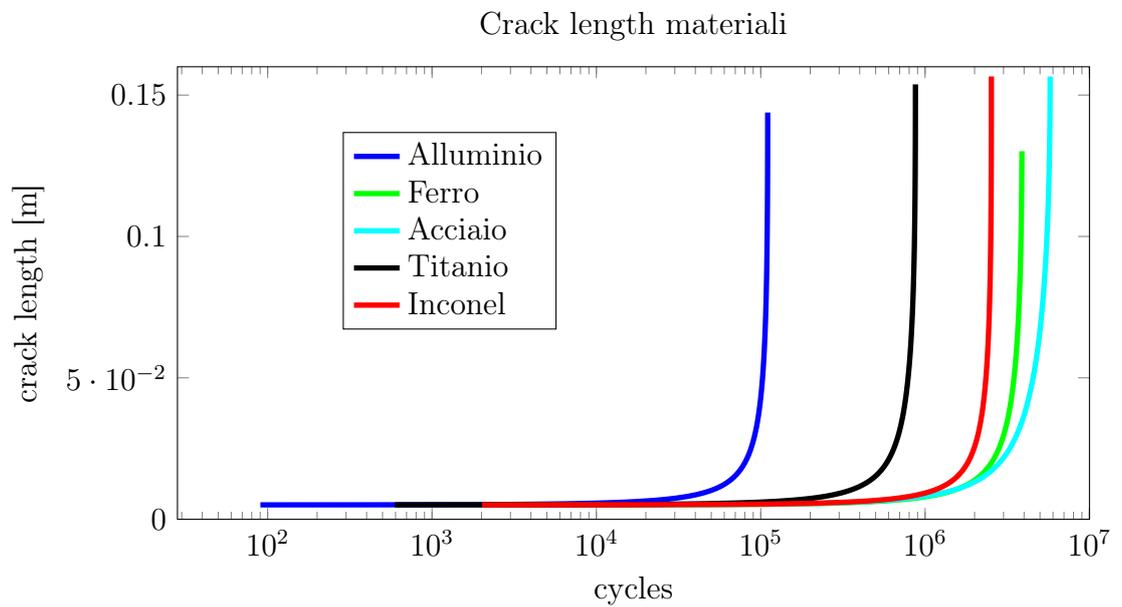


Figura 5.14: Propagazione della cricca ellittica nei vari materiali

Figura 5.15: Propagazione della *through crack* nei vari materiali

Conclusioni

Questo lavoro si propone di prevedere la vita a fatica di un generico componente difettoso, con risultati che approssimano bene i dati sperimentali. Le equazioni considerate sono state prese dalla letteratura e implementate su software, offrendo risultati di grande precisione dato che quelli riportati sono i modelli più recenti per la descrizione del fenomeno.

Quest'analisi è fondamentale per la sicurezza delle strutture moderne, nel momento in cui un difetto viene diagnosticato, la sua crescita può essere prevista semplicemente con l'uso di questi modelli, con notevole risparmio di tempo e risorse economiche. Ovviamente i controlli non distruttivi non possono essere del tutto eliminati, ma tramite i nostri risultati l'analisi sul campo può essere pianificata in maniera più efficiente, ne facciamo ricorso solo quando i modelli la richiedono.

D'altra parte nel lavoro non è stata considerata la condizione di *variable amplitude loading* perché, nel caso di picchi di carico concentrati, questa induce nel materiale deformazioni plastiche non trascurabili che non possono essere descritte con la LEFM, dovremmo ricorrere invece ai risultati della *elastic-plastic fracture mechanics*, inoltre le previsioni sono valide soltanto per materiali metallici, non valgono ad esempio per i compositi. Sarebbe interessante allora prendere spunto da questo lavoro per espandere la previsione anche alle condizioni di carico 'non nominali' e ai materiali compositi, che sempre più stanno sostituendo quelli metallici nelle applicazioni aeronautiche.

Codice MATLAB

```
clear all
clc
close all

figure(1)
set(1,'position',[0 550 250 150])
N=(0:0.01:10);
S=38.5+31.5*cos(+2*pi*N);
plot(N,S,'or-')
xlabel('cicli')
ylabel('carico [Mpa]')
title('carico ciclico applicato')

S=70;
t=0.002;
ratio=linspace(0.5,1.5);
phi=linspace(0,pi/2);
a=0.0015;
c=0.005;

if ratio>1
    Q=1+1.464*(1/ratio).^1.65;
else
    Q=1+1.464*ratio.^1.65;
end

for i=1:100
    for j=1:100
        K(i,j)=S*sqrt(pi*a./Q(i))*(ratio(i)^2*(cos(phi(j))).^2+(sin(phi(j))).^2).^0.25;
    end
end
```

```
end
```

```
figure(2)
set(2,'position',[250 550 250 150])
plot(ratio,K(:,1),'*g-')
xlabel('crack aspect ratio')
ylabel('stress intensity factor [Mpa*sqrt(m)]')
title('Irwin')
figure(3)
set(3,'position',[500 550 250 150])
plot(phi,K(1,:),'*r-')
xlabel('ellipse angle [rad]')
ylabel('stress intensity factor [Mpa*sqrt(m)]')
title('Irwin')
figure(4)
set(4,'position',[750 550 250 150])
surf(phi,ratio,K)
shading interp
colormap('jet')
ylabel('crack aspect ratio')
xlabel('ellipse angle [rad]')
zlabel('stress intensity factor [MPa*sqrt(m)]')
title('Irwin mesh')
```

```
b=0.16;
S=[70 7];
depth=a/t;
ratio=a/c;
f_phi=((ratio)^2*(cos(phi)).^2+(sin(phi)).^2).^0.25;
f_w=(sec(pi*c/(2*b)*sqrt(depth)))^0.5;
```

```
if ratio>1
    Q=1+1.464*(1/ratio)^1.65;
    M1=sqrt(1/ratio)*(1+0.04*1/ratio);
    M2=0.2*(1/ratio)^4;
    M3=-0.11*(1/ratio)^4;
    g=1+(0.1+0.35/ratio*depth^2)*(1-sin(phi)).^2;
else
    Q=1+1.464*ratio^1.65;
    M1=1.13-0.09*ratio;
```

```

M2=-0.54+0.89/(0.2+ratio);
M3=0.5-(1/(0.65+ratio))+14*(1-ratio)^24;
g=1+(0.1+0.35*depth^2)*(1-sin(phi)).^2;
end

F=(M1+M2*depth^2+M3*depth^4).*g.*f_phi*f_w;
K_high=S(1)*sqrt(pi*a/Q).*F;
K_low=S(2)*sqrt(pi*a/Q).*F;

K_max=max(K_high);
K_min=max(K_low);
delta_K=K_max-K_min;
stress_ratio=K_min/K_max;

figure(5)
set(5,'position',[1000 550 250 150])
plot(phi,F,'og-', 'linewidth',1);
xlabel('crack angle [rad]')
ylabel('magnification factor')
title('Newman-Raju')
figure(6)
set(6,'position',[0 400 250 150])
plot(phi,K_high,'or-', 'linewidth',1);
xlabel('crack angle [rad]')
ylabel('stress intensity factor [Mpa*sqrt(m)]')
title('Newman-Raju')

S=70;
depth=linspace(0,0.8);
ratio=1.5/5;
phi=pi/2;
f_phi=((ratio)^2*(cos(phi))^2+(sin(phi))^2)^0.25;
f_w=(sec(pi*c/(2*b)*sqrt(depth))).^0.5;

if ratio>1
    Q=1+1.464*(1/ratio)^1.65;
    M1=sqrt(1/ratio)*(1+0.04*1/ratio);
    M2=0.2*(1/ratio)^4;
    M3=-0.11*(1/ratio)^4;
    g=1+(0.1+0.35/ratio*depth.^2)*(1-sin(phi))^2;

```

```

else
    Q=1+1.464*ratio^1.65;
    M1=1.13-0.09*ratio;
    M2=-0.54+0.89/(0.2+ratio);
    M3=0.5-(1/(0.65+ratio))+14*(1-ratio)^24;
    g=1+(0.1+0.35*depth.^2)*(1-sin(phi))^2;
end

F=(M1+M2*depth.^2+M3*depth.^4).*g*f_phi.*f_w;
K=S(1)*sqrt(pi*a/Q).*F;

figure(7)
set(7,'position',[250 400 250 150])
plot(depth,K,'*c-')
xlabel('a/t')
ylabel('stress intensity factor [Mpa*sqrt(m)]')
title('Newman-Raju')
i

col='bgrky';
for caso=1:5
    switch caso
        case 1
            ratio=1.5/5;
        case 2
            ratio=0.5;
        case 3
            ratio=0.8;
        case 4
            ratio=1.5;
        case 5
            ratio=1.6;
    end
end
t=0.002;
depth=linspace(0,1);
m=3.353;
z=zeros(1,100);

for j=1:10
    if ratio>1
        da_dc=-(0.9*ratio.^0.5.*(1.1+0.35*depth.^2.*ratio)).^-m;
    end
end

```

```

else
    da_dc=(0.9*ratio.^0.5.*(1.1+0.35*depth.^2)).^-m;
end

for i=1:length(depth)
    if i==1
        z(i)=ratio(i);
    else
        z(i)=z(i-1)+da_dc(i)*(depth(i)-depth(i-1));
    end
end
ratio=z;
end

figure(8)
hold on
set(8,'position',[500 400 250 150])
plot(depth,ratio,col(caso),'linewidth',2)
xlabel('a/t')
ylabel('a/c')
title('Crack growth generale')
legend('0.3','0.5','0.8','1.5','1.6','location','best')
end

w=0.160;
delta_S=63;
C=1.7073e-10;
m=3.353;
N=0;
i=0;

while a<=t
    i=i+1;
    beta(i)=sqrt(sec(pi*a(i)/w));
    delta_a=0.001*a(i);
    delta_K(i)=beta(i)*delta_S*sqrt(pi*a(i));
    da_dN(i)=C*delta_K(i)^m;
    delta_N=delta_a/da_dN(i);

```

```

        N(i+1)=N(i)+delta_N;
        a(i+1)=a(i)+delta_a;
    end

    figure(9)
    set(9,'position',[750 400 250 150])
    plot(N,a,'b','linewidth',2)
    axis([0 18000 0 0.002])
    xlabel('cycles')
    ylabel('crack depth [m]')
    title('Crack depth Broek')

    depth=a/t;
    ratio=1.5/5;

    for j=1:10
        if ratio(1)>1
            da_dc=(0.9*ratio.^0.5.*(1.1+0.35*depth.^2.*ratio)).^-m;
        else
            da_dc=(0.9*ratio.^0.5.*(1.1+0.35*depth.^2)).^-m;
        end

        for i=1:length(depth)
            if i==1
                z(i)=ratio(i);
            else
                z(i)=z(i-1)+da_dc(i)*(depth(i)-depth(i-1));
            end
        end
        ratio=z;
    end

    figure(10)
    set(10,'position',[1000 400 250 150])
    plot(depth,ratio,'k','linewidth',2)
    xlabel('a/t')
    ylabel('a/c')
    title('Crack growth Broek')

```

```

b=0.16;
c=depth./ratio*t;
S=[70 7];
phi=pi/2;
f_phi=((ratio).^2*(cos(phi))^2+(sin(phi))^2).^0.25;
f_w=(sec(pi*c./(2*b).*sqrt(depth))).^0.5;

if ratio>1
    Q=1+1.464*(1./ratio).^1.65;
    M1=sqrt(1./ratio).*(1+0.04*1./ratio);
    M2=0.2*(1./ratio).^4;
    M3=-0.11*(1./ratio).^4;
    g=1+(0.1+0.35./ratio.*depth.^2)*(1-sin(phi))^2;
else
    Q=1+1.464*ratio.^1.65;
    M1=1.13-0.09*ratio;
    M2=-0.54+0.89./(0.2+ratio);
    M3=0.5-(1./(0.65+ratio))+14*(1-ratio).^24;
    g=1+(0.1+0.35*depth.^2)*(1-sin(phi))^2;
end

F=(M1+M2.*depth.^2+M3.*depth.^4).*g.*f_phi.*f_w;
K_high=S(1)*sqrt(pi*a./Q).*F;
K_low=S(2)*sqrt(pi*a./Q).*F;
delta_K=K_high-K_low;

figure(11)
set(11,'position',[0 250 250 150])
plot(depth,K_high,'r','linewidth',2)
xlabel('a/t')
ylabel('stress intensity factor [Mpa*sqrt(m)]')
title('a/c non costante (Broek)')

a=0.007;
i=0;
N=55000;

while delta_K<=delta_K_crit
    if i<=29

```

```

        i=i+1;
        delta_a=0.01*a(i);
        da_dN(i)=C*delta_K(i)^m;
        delta_N=delta_a/da_dN(i);
        N(i+1)=N(i)+delta_N;
        a(i+1)=a(i)+delta_a;
    else
        i=i+1;
        beta(i)=sqrt(sec(pi*a(i)/w));
        delta_a=0.01*a(i);
        delta_K(i)=beta(i)*delta_S*sqrt(pi*a(i));
        da_dN(i)=C*delta_K(i)^m;
        delta_N=delta_a/da_dN(i);
        N(i+1)=N(i)+delta_N;
        a(i+1)=a(i)+delta_a;
    end
end

figure(12)
set(12,'position',[250 250 250 150])
plot(N,a,'g','linewidth',2)
xlabel('cycles')
ylabel('crack length [m]')
title('Crack length Broek')

K_crit=74.722;
A_k=1;
B_k=1;

C=1.7073e-10;
n=3.353;
p=0.5;
q=1;
delta_K_0=2.857;
C_th=1.5;
alpha=1.5;
S_max_sigma_0=0.3;
a=0.005;
a_0=0.0000381;

```

```

R=0.1;
K_max=linspace(7,K_crit-0.1);
A_0=(0.825-0.34*alpha+0.05*alpha^2)*(cos(pi/2*S_max_sigma_0))^1/alpha;
A_1=(0.415-0.071*alpha)*S_max_sigma_0;
A_3=2*A_0+A_1-1;
A_2=1-A_0-A_1-A_3;
lambda=0.5;

if R>=0
    f=max(R, A_0+A_1*R+A_2*R^2+A_3*R^3);
elseif -2<=R<0
    f=A_0+A_1*R;
else
    f=A_0-2*A_1;
end

delta_K_th=delta_K_0*sqrt(a/(a+a_0))/(1-f/((1-A_0)*(1-R)))^(1+C_th*R);
delta_K=linspace(delta_K_th+0.001,K_crit-0.001);

da_dN_nasgro=C*(((1-f)/(1-R))*delta_K).^n.*(1-delta_K_th./delta_K).^p./(1-K_max/K_crit);

figure(13)
set(13,'position',[500 250 250 150])
loglog(delta_K,da_dN_nasgro,'ob-')
axis([1 100 10^(-10) 10])
xlabel('\Delta_K [Mpa*sqrt(m)]')
ylabel('da/dN [m/cycle]')
title('Confronto equazioni')
grid on

da_dN_forman=C*(delta_K-delta_K_th).^n./((1-R)*K_crit-delta_K);

hold on
loglog(delta_K,da_dN_forman,'og-')

da_dN_walker=C*delta_K.^n/(1-R)^(n*(1-lambda));
loglog(delta_K,da_dN_walker,'or-')

```

```

da_dN_paris=C*delta_K.^n;
loglog(delta_K,da_dN_paris,'oy-')

da_dN_priddle=C*((delta_K-delta_K_th)./(K_crit-K_max)).^n;
loglog(delta_K,da_dN_priddle,'ok-')
legend('NASGRO','Forman','Walker','Paris','Priddle')
hold off

figure(14)
set(14,'position',[750 250 250 150])
subplot(221)
plot(da_dN_paris,da_dN_walker,'o-')
title(['correlazione tra i due metodi: ' num2str(corr(da_dN_paris',da_dN_walk
xlabel('Paris')
ylabel('Walker')

subplot(222)
plot(da_dN_paris,da_dN_nasgro,'o-')
title(['correlazione tra i due metodi: ' num2str(corr(da_dN_paris',da_dN_nasg
xlabel('Paris')
ylabel('NASGRO')

subplot(223)
plot(da_dN_nasgro,da_dN_forman,'o-')
title(['correlazione tra i due metodi: ' num2str(corr(da_dN_nasgro',da_dN_for
xlabel('NASGRO')
ylabel('Forman')

subplot(224)
plot(da_dN_forman,da_dN_priddle,'o-')
title(['correlazione tra i due metodi: ' num2str(corr(da_dN_forman',da_dN_pri
xlabel('Forman')
ylabel('Priddle')

col='bgckr';

for caso=1:5
    switch caso
        case 1
            load alluminio.mat

```

```

        case 2
            load ferro.mat
        case 3
            load acciaio.mat
        case 4
            load titanio.mat
        case 5
            load inconel.mat
    end

    A_0=(0.825-0.34*alpha+0.05*alpha^2)*(cos(pi/2*S_max_sigma_0))^1/alpha;
    A_1=(0.415-0.071*alpha)*S_max_sigma_0;
    A_3=2*A_0+A_1-1;
    A_2=1-A_0-A_1-A_3;
    lambda=0.5;

    if R>=0
        f=max(R, A_0+A_1*R+A_2*R^2+A_3*R^3);
    elseif -2<=R<0
        f=A_0+A_1*R;
    else
        f=A_0-2*A_1;
    end

    delta_K_th=delta_K_0*sqrt(a/(a+a_0))/(1-f/((1-A_0)*(1-R)))^(1+C_th*R);
    delta_K=linspace(delta_K_th+0.001,K_crit-0.001);

    da_dN_nasgro=C*(((1-f)/(1-R))*delta_K).^n.*(1-delta_K_th./delta_K).^p./(1-K_max/K_crit)

    figure(15)
    set(15,'position',[1000 250 250 150])
    loglog(delta_K,da_dN_nasgro,col(caso),'linewidth',2)
    hold on
    axis([1 1000 10^(-10) 10])
    xlabel('$\Delta$ K [MPa$\sqrt{m}$]','Interpreter','latex')
    ylabel('da/dN [m/cycle]')
    legend('Alluminio','Ferro','Acciaio','Titanio','Inconel')

    a=0.0015;
    w=0.160;

```

```

t=0.002;
delta_S=63;
N=0;
i=0;

while a<=t
    i=i+1;
    beta(i)=sqrt(sec(pi*a(i)/w));
    delta_a=0.001*a(i);
    delta_K(i)=beta(i)*delta_S*sqrt(pi*a(i));
    da_dN(i)=C*delta_K(i)^n;
    delta_N=delta_a/da_dN(i);
    N(i+1)=N(i)+delta_N;
    a(i+1)=a(i)+delta_a;
end

figure(16)
set(16,'position',[0 100 250 150])
semilogx(N,a,col(caso),'linewidth',2)
hold on
axis([0 1000000 0 0.002])
xlabel('cycles')
ylabel('crack depth [m]')
title('Crack depth materiali')
legend('Alluminio','Ferro','Acciaio','Titanio','Inconel')

depth=a/t;
ratio=1.5/5;

for j=1:10
    if ratio(1)>1
        da_dc=(0.9*ratio.^0.5.*(1.1+0.35*depth.^2.*ratio)).^-n;
    else
        da_dc=(0.9*ratio.^0.5.*(1.1+0.35*depth.^2)).^-n;
    end

    for i=1:length(depth)
        if i==1
            z(i)=ratio(i);
        else

```

```

        z(i)=z(i-1)+da_dc(i)*(depth(i)-depth(i-1));
    end
end
ratio=z;
end

figure(17)
set(17,'position',[250 100 250 150])
hold on
plot(depth,ratio,col(caso),'linewidth',2)
xlabel('a/t')
ylabel('a/c')
title('Crack growth materiali')
legend('Alluminio','Ferro','Acciaio','Titanio','Inconel')

b=0.16;
c=depth./ratio*t;
S=[70 7];
phi=pi/2;
f_phi=((ratio).^2*(cos(phi))^2+(sin(phi))^2).^0.25;
f_w=(sec(pi*c./(2*b).*sqrt(depth))).^0.5;

if ratio>1
    Q=1+1.464*(1./ratio).^1.65;
    M1=sqrt(1./ratio).*(1+0.04*1./ratio);
    M2=0.2*(1./ratio).^4;
    M3=-0.11*(1./ratio).^4;
    g=1+(0.1+0.35./ratio.*depth.^2)*(1-sin(phi))^2;
else
    Q=1+1.464*ratio.^1.65;
    M1=1.13-0.09*ratio;
    M2=-0.54+0.89./(0.2+ratio);
    M3=0.5-(1./(0.65+ratio))+14*(1-ratio).^24;
    g=1+(0.1+0.35*depth.^2)*(1-sin(phi))^2;
end

F=(M1+M2.*depth.^2+M3.*depth.^4).*g.*f_phi.*f_w;
K_high=S(1)*sqrt(pi*a./Q).*F;
K_low=S(2)*sqrt(pi*a./Q).*F;
delta_K=K_high-K_low;

```

```

figure(18)
set(18,'position',[500 100 250 150])
hold on
plot(depth,K_high,col(caso),'linewidth',2)
xlabel('a/t')
ylabel('stress intensity factor [Mpa*sqrt(m)]')
title('Andamento K materiali (a/c non costante)')
legend('Alluminio','Ferro','Acciaio','Titanio','Inconel')

c=0.0051;
i=0;

while delta_K<=K_crit

    i=i+1;
    beta(i)=sqrt(sec(pi*c(i)/(2*w)));
    delta_c=0.001*c(i);
    delta_K(i)=beta(i)*delta_S*sqrt(pi*c(i)/2);
    dc_dN(i)=C*delta_K(i)^n;
    delta_N=delta_c/dc_dN(i);
    N(i+1)=N(i)+delta_N;
    c(i+1)=c(i)+delta_c;
end

figure(19)
set(19,'position',[750 100 250 150])
semilogx(N(1:length(N)-1),delta_K,col(caso),'linewidth',2)
axis([55000 1e7 0 180])
hold on
xlabel('cycles')
ylabel('\Delta K [MPa*sqrt(m)]')
title('Andamento \Delta K materiali')
legend('Alluminio','Ferro','Acciaio','Titanio','Inconel')

figure(20)
set(20,'position',[1000 100 250 150])
semilogx(N,c,col(caso),'linewidth',2)
hold on

```

```
axis([0 1e7 0 0.16])  
xlabel('cycles')  
ylabel('crack length [m]')  
title('Crack length materiali')  
legend('Alluminio', 'Ferro', 'Acciaio', 'Titanio', 'Inconel')  
end
```


Bibliografia

- [1] Schijve, J., *Fatigue of Structures and Materials*, Kluwer Academic Publishers, 2004.
- [2] Broek, D., *The Practical Use of Fracture Mechanics*, Kluwer Academic Publishers, 1988.
- [3] Shukla, A., *Practical Fracture Mechanics in Design*, Marcel Dekker, 2005.
- [4] Newman, J. C., Raju, I. S., *Stress Intensity Factor Equations for Cracks in Three Dimensional Finite Bodies Subjected to Tension and Bending Loads*, Langley Research Center, 1984.
- [5] Harter, J. A., *AFGROW Users Guide and Technical Manual*, Air Force Research Laboratory, 2000.