ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

Scuola di scienze
Corso di laurea triennale in fisica

Principi di simmetria nella formulazione del Modello Standard. Riflessioni per una proposta didattica sulla fisica dei primi anni '60

Relatore:
Dott.ssa Olivia Levrini

Correlatore:
Dott. Eugenio Bertozzi

Presentata da:
Giovanni Ravaioli

Sessione I I
Anno Accademico 2012/2013

Abstract

Obiettivo della tesi è sviluppare riflessioni per una proposta d'insegnamento inerente episodi significativi nella formulazione del Modello Standard e rivolta principalmente a studenti universitari del corso magistrale di "Storia della fisica".
Il lavoro di tesi è incentrato su un'analisi di articoli originali degli anni '60, mirata a evidenziare il significato assunto dalla simmetria nella fisica del XX e XXI secolo, ovvero quello di *principio* alla base della formulazione di teorie fisiche; nello specifico, ci si è focalizzati sull'analisi di un episodio di particolare interesse culturale nella storia della fisica: la formulazione dell' *Eightfold Way* ("Via dell'Ottetto") sulla base del gruppo di simmetria SU(3) e la conseguente ipotesi sull'esistenza dei *quark*.

Indice

Introduzione

Il concetto di simmetria, nei suoi tratti generali, è da sempre familiare alla mente e all'esperienza umana. Questa familiarità, seppur non ne tocchi apparentemente la profondità concettuale e matematica, è una solida base intuitiva su cui costruire un ragionamento e introdurre concetti matematici e fisici più astratti. La simmetria si candida quindi a prezioso strumento didattico per affrontare la fisica moderna e contemporanea; queste si possono infatti considerare vere e proprie *teorie di simmetria*, cioè teorie fondate su principi di simmetria e formulate sulla base della teoria dei gruppi.

Nel lavoro di tesi si vuole in particolare evidenziare il significato assunto dalla simmetria nella fisica del XX e XXI secolo, ovvero quello di *principio* alla base della formulazione di teorie fisiche.

Il lavoro si focalizza sull'analisi di un episodio particolare della fisica dei primi anni '60, che portò la comunità scientifica ad accettare l'*Eightfold Way* come modello fisico per le interazioni forti, e si pone come obiettivo lo sviluppo di riflessioni atte a una proposta didattica dell'episodio stesso.

La "Via dell'Ottetto" venne proposta in modo indipendente, nel 1961, dai due fisici Murray Gell-Mann e Yuval Ne'eman. Tale risultato permetteva di classificare i barioni sulla base delle proprietà di simmetria del gruppo SU(3), ma la sua portata superò di molto la dimensione della sola *classificazione*: spinse i fisici coinvolti a fare previsioni sia sull'esistenza di particelle ancora ignote, sia sulla struttura intima della materia, con l'ipotesi dell'esistenza dei quark.

Ciò che viene proposto nella tesi non è un'analisi storica *tout court* degli avvenimenti che hanno portato a tali risultati; ciò che si propone è invece la ricostruzione del percorso personale che portò uno dei due scienziati, Yuval Ne'eman, all'elaborazione dell'articolo del 61' (Ne'eman, 1961), percorso che lo stesso fisico descrive in una serie di articoli e libri pubblicati negli anni seguenti. In particolare se ne citeranno alcuni pubblicati tra il 1964 e il 1990 (Ne'eman, 1964; *id.*, 1989; *id.*, 1990; Kirsh, Ne'eman, 1986). Come si argomenterà, tale scelta è motivata dagli obiettivi culturali e didattici della tesi.

Il Capitolo 1 contiene uno stato dell'arte sul concetto di simmetria nella storia della fisica, illustrando i diversi significati che la simmetria ha assunto nel pensiero scientifico, dalle origini al XX secolo.

Nel Capitolo 2 si inquadra il lavoro nell'ambito della ricerca in didattica della fisica e si illustrano obiettivi specifici e metodologia di analisi seguita.

Il Capitolo 3 è interamente dedicato a presentare i risultati dell'analisi effettuata sui documenti originali considerati.

Nelle conclusioni sono evidenziati gli aspetti di maggiore originalità dell'analisi.

In appendice sono riportati cenni alla teoria dei gruppi e all'invarianza di isospin SU(2).

Capitolo 1

Simmetria nella storia della fisica

"*Symmetry, as wide or as narrow as you may define its meaning, is one idea by which man through the ages has tried to comprehend and create order, beauty, and perfection*".

H. Weyl (1952)

Come anticipato nell'introduzione, questa tesi mira ad evidenziare il particolare significato che la simmetria ha assunto nella fisica del XX e XXI secolo: quello di principio posto alla base della formulazione delle teorie fisiche. Tuttavia, la simmetria, nel corso della storia della scienza, non ha avuto sempre questo ruolo così peculiare. Per secoli, essa è stata, e per certi versi è ancora, un concetto 'familiare' e facilmente relazionabile a innumerevoli riscontri nell'esperienza e nell'osservazione della realtà; basti pensare alle svariate forme in natura geometricamente simmetriche, o alla più vaga percezione di armonia o bellezza 'artistica' come proporzione delle varie parti con il tutto.

In questo capitolo si ripercorre brevemente l'evoluzione dei significati che il concetto di simmetria ha assunto nella storia della fisica.

1.1 Simmetria “degli antichi”

La lettura storica universalmente più riconosciuta per quanto riguarda la simmetria è probabilmente quella proposta da Hermann Weyl in una monografia del 1952 (Weyl, 1952), in opera una distinzione tra due principali accezioni di simmetria. La prima è una nozione più “vaga”, attribuita a Greci e Latini, e che il medico e architetto francese Claude Perrault definisce “simmetria degli antichi” (Perrault, 1683): questa vede il concetto di *simmetrico* genericamente associato a “ben proporzionato”. Secondo questa nozione, *simmetria* sta ad indicare “quella specie di concordanza tra le varie parti per cui esse si integrano in un tutto”. Ad essa attingono opere come il *Timeo* di Platone, la cui descrizione cosmogonica associa agli elementi costituenti del mondo corporeo le forme di poliedri regolari, e il *Mysterium Cosmographicum* di Keplero, che individua una soluzione al problema planetario attraverso le proporzioni tra figure regolari. Questo modo di intendere la simmetria è piuttosto impreciso da un punto di vista matematico ed è andato decisamente perdendosi negli anni.

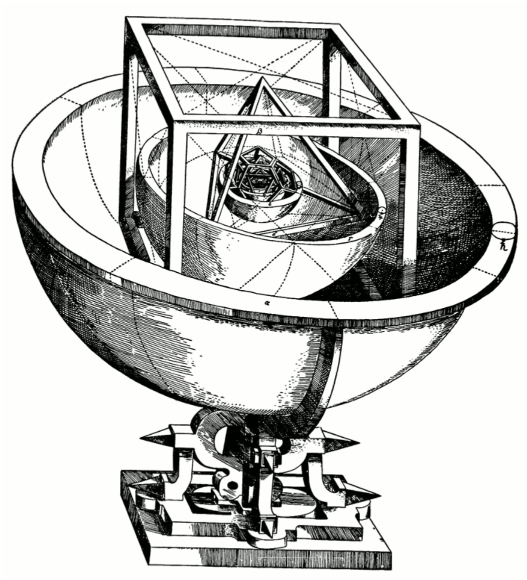


Figura 1.1: Rappresentazione del cosmo secondo il *Mysterium Cosmographicum* di Keplero

1.2 Simmetria “dei moderni”

Una seconda nozione di simmetria nel “senso più preciso” (per Perrault: “simmetria dei moderni”) è andata definendosi a partire dal concetto di *simmetria tra destra e sinistra* o anche *simmetria bilaterale*.

In termini più generali, questa seconda definizione apre all’idea per cui *simmetrico* significa “invariante rispetto ad un gruppo di trasformazioni".

Quest’ultima accezione di simmetria è quella che di fatto è rimasta di uso comune e richiama generalmente a simmetrie geometriche, cioè generate da trasformazioni spaziali; tuttavia il suo significato è ben più profondo e, con il supporto della teoria dei gruppi, ha potuto incontrare gli spazi astratti delle *variabili interne* della fisica delle particelle.

Questa è la nozione di simmetria che interessa più gli scopi di questa tesi e su cui si focalizzano i prossimi paragrafi.

1.2.1 Simmetria: *Invarianza per trasformazione*

Tenendoci ancora un poco a distanza dalla formalizzazione matematica della definizione di simmetria più moderna, analizziamo alcuni dei passi logici che ne hanno delineato la formulazione. A questo scopo seguiamo a grandi linee gli snodi concettuali individuati da Elena Castellani in “*Simmetria e natura*” (Castellani, 2000).

In questa accezione, la simmetria arriva ad avere i tratti di una vera e propria *operazione*; si passa dall’*armonia* (più propria appunto di una simmetria ‘antica’) degli elementi rispetto ad un tutto, alla loro *intercambiabilità* reciproca. Il legame con il tutto si può ritrovare nel fatto che, pur scambiandosi le parti, il tutto si preserva.

Soffermiamoci su tre passi fondamentali:

- **Uguaglianza delle parti:** la ‘nuova’ simmetria si fonda su una certa nozione di *uguaglianza delle parti*. Un’*uguaglianza* può essere esplicitata come ‘comunanza di proprietà’ [1], o come ‘possibilità di sostituzione’ di una parte con l’altra quando si abbia una totale comunanza delle proprietà suddette. L’evoluzione della concezione di simmetria è determinata dal passaggio alla sostituibilità, cioè dall’uguaglianza delle parti intesa come inter-sostituibilità delle stesse. Simmetriche si dicono dunque quelle particolari ripetizioni di parti per cui, sotto l’azione di certe operazioni di scambio tra l’una e l’altra, la figura non subisce variazioni. Nell’individuazione di *operazioni* attraverso le quali le parti possano essere sostituite le une alle altre, si pongono di fatto le basi per cui il problema possa essere affrontato da un punto di vista matematico.

- **Operazioni di simmetria:** le *operazioni di simmetria* sono dunque operazioni che scambiano tra loro parti uguali, o legate da una relazione di uguaglianza.

  Una relazione è detta di uguaglianza quando soddisfa tre proprietà fondamentali: *proprietà riflessiva*, *proprietà simmetrica* e *proprietà transitiva*. In termini più precisi una relazione che soddisfa queste tre condizioni è detta relazione di *equivalenza*, di cui l’uguaglianza è caso particolare ed esempio per eccellenza.

  Queste proprietà hanno delle conseguenze sul tipo di operazioni di scambio. Rispettivamente:

  1) Dalla riflessività dell’uguaglianza segue che la famiglia delle operazioni di simmetria deve possedere un’operazione che scambia ogni parte con sé stessa. Deve cioè esistere l’*operazione identità*.
  2) Per la proprietà simmetrica dell’uguaglianza, se esiste un’operazione che trasforma una generica parte A in una generica parte B, deve

anche esistere l'operazione che trasforma la B in A. Deve quindi esistere l'*operazione inversa*.

3) Per la proprietà transitiva dell'uguaglianza dall'esistenza di due operazioni che rispettivamente scambino A con B e B con C, deve seguire l'esistenza di un'*operazione prodotto* (o *combinazione*) delle prime due, che scambi direttamente la parte A con la parte C.

Queste in effetti sono esattamente le proprietà che le operazioni devono soddisfare per costituire un *gruppo*. Abbiamo così definito un ***gruppo di simmetria***, cioè un gruppo formato da operazioni di scambio tra parti uguali (o più in generale legate da una relazione di equivalenza che può in casi specifici assumere i connotati di uguaglianza).
La caratterizzazione della simmetria in termini moderni si basa infatti non più sui rapporti numerici, ma su uno strumento matematico ben preciso: introdotto nei primi decenni dell'Ottocento dal geniale e precoce matematico francese Evariste Galois (1811-1832): il *gruppo*. "*Come è noto la teoria dei gruppi ha un'origine di natura algebrica legata alla risoluzione delle equazioni algebriche di grado superiore al quarto e ai decisivi contributi del matematico Evariste Galois*" (Castellani, 2000).
Il fatto che le operazioni di simmetria di una figura formino gruppo è stato dimostrato nella seconda metà dell'800. Questa è una prima formalizzazione della nozione 'moderna' di simmetria, che vede la simmetria appunto come *invarianza rispetto ad un gruppo di trasformazioni*.

- **Classi di equivalenza:** come abbiamo visto, sono legati da una relazione di equivalenza quegli elementi che sono sostituibili l'uno con l'altro attraverso le operazioni di un gruppo di simmetria. Si può anche dire che le operazioni di simmetria lasciano invariate quelle proprietà che sono comuni a tutti gli elementi che appartengono alla corrispondente classe di equivalenza.

Dunque, le proprietà che rimangono invariate sono riconducibili non tanto a uno degli elementi che compongono la classe, quanto alla classe stessa. Questo dà un carattere di più ampia generalità al concetto di simmetria ed è una delle probabili ragioni per cui ha avuto così successo nelle teorie scientifiche moderne; queste ultime infatti trattano per lo più il comportamento di classi di oggetti, quanto di oggetti specifici [2].

1.2.2 *Classificazione* e *semplificazione*

- **Classificazione e cristallografia**

  La *classificazione* una delle più note e indagate funzioni della simmetria; strettamente legata al nesso appena accennato tra simmetria, equivalenza e classe, ha dato inizio al vero interesse del mondo scientifico per la simmetria a partire della seconda metà dell'800, con la classificazione sistematica di configurazioni con evidenti proprietà di regolarità, come le strutture cristalline. È proprio grazie allo studio di queste ultime che si comincerà a parlare di *teoria* della simmetria.

  Naturalmente il primo approccio alla classificazione di oggetti si fonda su proprietà percepibili, cioè su caratteristiche proprie dell'aspetto esteriore dei classificandi, come il contorno o il profilo. Le *rappresentazioni* di un gruppo (come vedremo più formalmente nel paragrafo 1.3) sono le classi di oggetti che sono portati l'uno nell'altro mediante le trasformazioni del gruppo. Quindi, ad esempio, una sfera o un cerchio possono essere pensati come la rappresentazione della simmetria rotazionale che li caratterizza. La cristallografia, come affermava Pierre Curie nel 1894, "*non è altro che la teoria generale della simmetria in un mezzo illimitato con costituzione periodica*" (Curie, 1894).

Sulla base di queste proprietà i cristalli vennero classificati in *32 classi di simmetria*, ottenute per la prima volta nel 1830. La morfologia dei cristalli non è d'altra parte indipendente dal modo in cui essi sono costituiti internamente. I cristalli sono formati da atomi, o ioni, disposti in reticoli spaziali: le simmetrie morfologiche che hanno esternamente sono le simmetrie di rotazione e di riflessione (e combinazioni di queste due) che lasciano invariata tale struttura reticolare. La struttura reticolare possiede a sua volta una propria simmetria, la simmetria traslazionale. Con questa ulteriore proprietà di simmetria risulta possibile arrivare ad una suddivisione dei tipi dei cristalli in 230 classi di simmetria, risultato ottenuto nel 1890.

È sorprendente la quantità di riscontri che hanno in natura i gruppi ottenuti da questi studi, basta pensare anche solo ad oggetti con simmetrie *discrete* (i.e. gruppi *ciclici* e *diedrici*), come i fiori o cristalli di neve, o con simmetrie per *dilatazioni*, come la *spira mirabilis*.

- **Semplificazione e Meccanica Analitica**

  Uno dei lavori di Pierre Curie (Curie, 1894), considerato come il suo contributo più importante e completo sull'argomento della simmetria, inizia con questa affermazione: "*Penso che ci sia motivo d'interesse per introdurre nello studio dei fenomeni fisici le considerazioni sulla simmetria familiari ai cristallografi*".

  Curie si interrogò molto sulle proprietà fisiche dei mezzi cristallini, che risultavano direttamente collegate con le caratteristiche strutturali di simmetria. Le sue conclusioni portarono ad un principio fondamentale, il ***principio di Curie***, che può essere sintetizzato nella forma: "*Le simmetrie delle cause si devono ritrovare negli effetti*". Letto in termini di 'problemi' e 'soluzioni' (i.e. "*Le simmetrie dei problemi si ritrovano nelle soluzioni*"), questo principio sottolinea una importante funzione metodologica delle considerazioni di simmetria nella fisica: la ***semplificazione*** dei problemi stessi. L'idea di sfruttare le simmetrie di un problema per trasformarlo in un problema equivalente ma di più facile risoluzione è alla base dei cosiddetti *metodi trasformazionali*.

La nascita dei metodi trasformazionali trova le sue origini nell'ambito della meccanica analitica alla fine del 1700 con L.G Lagrange, che nella sua *Mécanique Analytique* (Lagrange, 1788) poneva le fondamenta della trattazione analitica della meccanica classica; si tratta in questo ambita della simmetria delle equazioni dinamiche di un sistema, cioè delle trasformazioni che lasciano invariate queste equazioni.
Le procedure sviluppate a partire dai fondamentali contributi di W.R. Hamilton e C.G. Jacobi per la risoluzione del problema dinamico, cioè per arrivare alla completa integrazione delle equazioni del moto, si basa sulla *teoria delle trasformazioni canoniche*, cioè trasformazioni delle variabili che lasciano invariate nella forma le equazioni di partenza, alle quali aveva aperto la strada appunto Lagrange introducendo una formulazione del problema dinamico svincolata dalla scelta di un particolare sistema di variabili.

Dallo studio di questi metodi per la meccanica, atti prettamente alla risoluzione del problema del moto, si generarono studi e risultati di valenza per l'intera scienza fisica; tuttavia la *semplificazione* è una funzione che tocca marginalmente, almeno da un punto di vista storico, la simmetria in quanto tale.

1.2.3 Simmetria come ‘principio’: ruolo *normativo* e *predizione*

> “*L’assunto che il tempo e la posizione assoluti non siano mai condizioni iniziali essenziali è il primo e forse il più importante teorema di invarianza in fisica. Se non fosse così, ci sarebbe stato probabilmente impossibile scoprire le leggi della natura*”.
>
> E. P. Wigner (1967)

La ‘postulazione’ delle simmetrie di un sistema è forse la svolta di tipo metodologico più importante per quanto riguarda l’uso delle simmetrie nella fisica.

Per la prima ‘imposizione’ esplicita di un principio di invarianza bisogna attendere il 1905, anno in cui Albert Einstein introduce il *principio di relatività*, con il quale postula l’invarianza delle leggi fisiche per ogni sistema di riferimento nello spazio-tempo. Questo rappresenta il punto di arrivo di una lunga discussione nata dalle riflessioni degli stessi Galileo, Newton e Leibniz sul carattere relativo dello spazio: si stabilisce che non esista un sistema di riferimento ‘privilegiato’ (assoluto) per la formulazione delle leggi fisiche. Questa equivalenza si traduce di fatto nell’invarianza delle leggi rispetto alle trasformazioni che operano il passaggio da un sistema ad un altro, i.e. *trasformazioni di Lorentz*; queste furono poi completate per quanto riguarda le trasformazioni di velocità da H. Poincaré, il quale le trascrisse in una lettera a Lorentz nel 1905, ponendole nella moderna forma simmetrica a noi nota.

Spiega Weyl, “*Cosa fece Einstein: raccolse senza preconcetti tutte le prove fisiche esistenti sulla struttura del continuo quadrimensionale spazio temporale e ne derivò così il vero gruppo degli automorfismi*, […] *il gruppo di Lorentz*” (Weyl, 1952).

Se fino a quel momento le simmetrie di un sistema venivano ‘riconosciute’ a partire dall’analisi delle proprietà del sistema rispetto alle leggi della fisica, Einstein fa qualcosa di profondamente diverso: impone che quelle che dovranno essere le leggi fisiche debbano mantenersi invarianti per trasformazioni tra sistemi di riferimento inerziali.

Per usare le parole di Wigner, “*gli scritti di Einstein sulla relatività speciale sottolineano un’**inversione di tendenza**: prima di allora, i principi di invarianza erano derivati dalle leggi del moto. Il lavoro di Einstein postulò i vecchi principi di invarianza così decisamente che tendiamo quasi a dimenticarci che sono basati solo sull’esperienza. E’ per noi ormai naturale provare a derivare le leggi della natura e testare la loro validità con gli strumenti delle leggi d’invarianza, piuttosto che derivare le leggi di invarianza da quelle che crediamo essere le leggi della natura*” (Wigner, 1967).

Questa postulazione permise effettivamente di derivare alcune proprietà dello spazio stesso. Ciascuna delle trasformazioni di ‘passaggio’ da un sistema all’altro (*traslazioni spaziali*, *rotazioni spaziali*, *traslazioni temporali* e *trasformazioni di velocità*) costituisce infatti un gruppo ed ha l’importante caratteristica di essere interpretabile in termini ‘geometrici’ (Wigner le definisce ‘invarianze geometriche’), cioè come simmetria dello spazio-temporale del mondo fisico.
Questa corrispondenza è di facile intuizione per le prime tre trasformazioni (cioè le due spaziali e quella puramente temporale): l’invarianza per traslazione nello spazio esprime l’equivalenza di tutti i punti, conferisce cioè allo spazio stesso la proprietà di *omogeneità*, l’invarianza per rotazione corrisponde all’equivalenza di tutte le direzioni, cioè all’*isotropia* dello spazio, e infine l’invarianza per traslazione sull’asse dei tempi all’equivalenza di tutti gli istanti, vale a dire all’*uniformità* del tempo. E’ meno immediata l’interpretazione geometrica

dell'invarianza per trasformazioni di velocità, che trova il suo riscontro in operazioni di rotazione nello spazio quadrimensionale introdotto nel 1908 da Hermann Minkowski. Questo spazio comprende sia variabili spaziali che temporali e introduce la nozione appunto di *spazio-tempo*.

Le motivazioni dell'eventuale assunzione di una determinata simmetria possono essere di diversa natura. Possono nascere da riscontri sperimentali di 'indifferenza', 'indistinguibilità' (come vedremo per la *simmetria di scambio*) o 'equivalenza' (come per la relatività l'equivalenza di ogni sistema di riferimento inerziale), o da particolari sviluppi teorici. In ogni caso queste 'considerazioni di simmetria' postulano un'impossibilità di verificare una condizione asimmetrica senza una ragione valida, cioè senza una legge fisica che la preveda. In questo sta il carattere *normativo* della simmetria nella fisica moderna.
In questo modo si introduce anche la possibilità di predire eventi coerenti alle leggi derivate da una simmetria. Come vedremo questo carattere *predittivo* emerge in modo evidente nella fisica delle particelle; spesso infatti la ricerca sperimentale di oggetti sconosciuti è cominciata con lo scopo di dare conferma alla ragionevole postulazione di una simmetria. Come afferma Weyl: "*Per quanto ne so, ogni affermazione a priori si fonda sulla simmetria*" (Weyl, 1952).

1.2.4 Simmetrie *interne*

Le simmetrie d'invarianza relativistiche appena descritte sono di carattere decisamente generale per la loro validità su tutte le leggi naturali. Non possiedono invece questa generalità le simmetrie che sono state successivamente postulate nella storia della fisica. Sono per la maggior parte simmetrie che valgono unicamente per specifiche forme d'interazione fisica (da qui la denominazione 'wigneriana' di *invarianze dinamiche*) e sono strettamente legate

a determinate caratteristiche degli enti microscopici.
Un primo passo nell'introduzione di questo nuovo tipo di simmetrie è segnato dalla *simmetria di scambio* formulata da Heisenberg nel 1926 (Heisenberg, 1926) in cui cerca un'espressione quantistica adeguata dell'*indistinguibilità* degli enti microscopici. Il modulo quadro di una funzione d'onda (che esprime la densità di probabilità spaziale degli oggetti descritti), per tener conto di questa indistinguibilità, deve risultare invariante sotto lo scambio delle particelle del sistema; dalla postulazione di questa simmetria (ipotizzata a partire dall'indistinguibilità degli elettroni) si derivano le adeguate funzioni d'onda. È questa la prima forma di simmetria non 'geometrica', ed è anche la prima vera applicazione della teoria dei gruppi in ambito quantistico.

Il formalismo quantistico, in seguito agli sviluppi portati avanti in particolare da Wigner e Weyl nella seconda metà degli anni '20, si è rivelato essere un 'terreno' piuttosto fertile per l'applicazione della teoria dei gruppi. Questo è dovuto soprattutto alle sue caratteristiche peculiari, dalle quali segue, ad esempio, che gli operatori quantistici (che rappresentano grandezze fisiche misurabili) corrispondano alle stesse operazioni di simmetria, e che gli stati di un sistema fisico siano riconducibili a sovrapposizioni di stati-base che si trasformano l'uno nell'altro sotto l'azione di questi operatori. Inoltre il *teorema di Noether*, che associa ad ogni simmetria continua di una sistema una carica conservata, assume in ambito quantistico la sua vera importanza. Tutto questo ha concorso, da una parte, a riscoprire alcune simmetrie classiche come la parità e l'inversione temporale, dall'altra allo sviluppo di simmetrie senza precedenti, dette simmetrie *interne*.

In appendice si dà qualche definizione di base di *teoria dei gruppi* e ne si discute l'applicazione alla simmetria SU(2) di *isospin*, che costituisce la base formale e concettuale per le considerazioni sviluppate in questa tesi.

Capitolo 2

Contesto di ricerca, obiettivi specifici della proposta e metodologia d'analisi

2.1 Contesto di ricerca

2.1.1 Simmetrie e ricerca internazionale sul curriculum di fisica

Nell'ambito delle ricerche internazionali sulla didattica della fisica, una certa attenzione è rivolta all'ipotesi secondo cui impostare il curriculum di fisica enfatizzando il ruolo 'fondativo' che la simmetria ha avuto nello sviluppo della disciplina possa essere uno dei modi di rendere la fisica più accessibile e più rilevanti per studenti di scuola secondaria superiore e dell'Università.
E' questa la prospettiva discussa, ad esempio, da Christopher T. Hill e Leon M. Lederman nella proposta didattica ove si propongono, con un modulo della

durata di una settimana, di mostrare a studenti di scuola secondaria superiore o dei primi anni di università che, attraverso principi di simmetria, "*the subject of physics is as lively and contemporary as molecular biology, and as beautiful as the arts*" (Hill, Lederman, 2000).

Negli articoli "*Draw your physics homework? Art as a path to understanding in Physics Teaching*" e "*Symmetry as Thematic Approach to Physics Education*" (Van der Veen, 2012; 2013) Jatila Van der Veen, ricercatrice in didattica della fisica e dell'astronomia dell'Università della California (Santa Barbara) e Project Manager, Education & Public Outreach della missione "Planck" (*NASA*), descrive i risultati di 6 anni di sperimentazione del corso *Symmetry and Aesthetics in Contemporary Physics*, svoltosi all'interno di college americani.
Il corso nasce dal presupposto che "*symmetry and asymmetry are central to our aesthetic experiences in the arts, and thus provide a natural foundation for an interdisciplinary physics course that incorporates arts-based teaching strategies*". Chiarendo che gli sviluppi della fisica moderna procedono quando viene riconosciuta la rottura di una simmetria e un'altra più ampia viene ipotizzata, il percorso parte dalla simmetria Galileiana, attraversa la Relatività ristretta, poi generale, fino a toccare la cosmologia e la teoria delle Stringhe. Viene quindi richiesto agli studenti di concepire e dealizzare disegni che rappresentino i concetti assimilati, "*to introduce students to the idea of using drawing for understanding in physics, and to reflect on their own visualization strategies*".

Tali recenti ricerche riprendono, attualizzano ed estendono una tradizione piuttosto nota che considera le simmetrie come strumento particolarmente efficace per la didattica della fisica (Feynman, 1965; Bernardini, 1983; Weyl, 1952).

2.1.2 Il gruppo di Bologna: aspetto *fondativo* e 'ruoli' della simmetria nella fisica del XX e XXI secolo

All'interno di questo scenario, il gruppo di didattica della fisica del Dipartimento di Fisica e Astronomia dell'Università di Bologna è impegnato da alcuni anni in ricerche finalizzate allo sviluppo di materiali e proposte per l'insegnamento della fisica a livello scolastico (scuola secondaria superiore) e universitario. Queste ricerche si caratterizzano per le seguenti convinzioni:

1. l'aspetto 'fondativo' della simmetria è particolarmente valorizzato l punto di vista didattico se è affrontato e declinato nei differenti 'ruoli' che ha giocato nel corso del secolo scorso: ricerche condotte nell'ambito della filosofia della fisica (Brading, Castellani, 2003) hanno infatti mostrato che la simmetria, quando assunta come 'principio', ha svolto essenzialmente i 4 ruoli riportati di seguito:

   I. "*classificatory*": a partire da proprietà di simmetria, si possono classificare oggetti di diversa natura; in particolare nella fisica moderna una particella è associata ad una rappresentazione irriducibile del gruppo di simmetria che la caratterizza. Questo introduce anche una capacità *definitoria* della simmetria, in quanto si può definire un'entità sulla base delle sue proprietà di trasformazione;

   II. "*normative*": la postulazione di una simmetria impone severe restrizioni alla forma che una teoria può assumere; se prima la simmetria di un sistema veniva derivata da leggi già conosciute, questo 'nuovo' approccio delinea le leggi a partire dalla simmetria ipotizzata;

   III. "*unifying*": la teoria dei gruppi permette di unire diversi tipi di simmetrie dall'unione dei gruppi che le caratterizzano; questo ha portato un grande incentivo alla ricerca dell'unificazione teorica di tutte le forze fondamentali (gravitazionale, debole, elettromagnetica e forte) tramite la ‘localizzazione' dei gruppi;

IV. “*explanatory*”: il principio di Curie, dove il verificarsi di certi fenomeni è direttamente collegato (e quindi 'spiegato dalla') alla presenza di certe simmetrie, è uno degli esempi più immediati del ruolo esplicativo delle simmetrie. Nel Modello Standard, esempi dell'uso esplicativo delle simmetrie in relazione al verificarsi o meno di certi fenomeni sono il principio di gauge e il meccanismo di rottura spontanea di simmetria.

Porre enfasi su questi ruoli significa poter caratterizzare la 'capacità predittiva' dei principi di simmetria come realizzazione (o diretta conseguenza) di uno o più di essi, trovando allo stesso tempo una chiave di lettura efficace per episodi paradigmatici nella storia della fisica: nel presente lavoro si mostrerà infatti come, negli anni '60, la predizione di Ω^- e dei *quark* sarà 'innescata' dalla classificazione dei barioni (‘posti’ vacanti nel primo caso e proprietà della rappresentazione nel secondo). Altri casi (qui non affrontati) riguardano: 1. la predizione, via *unifying role*, dei bosoni vettori W e Z nel contesto della teoria di Weinberg Salam del '67 per l'unificazione delle interazioni elettromagnetiche e deboli (sperimentalmente rivelati al CERN da Carlo Rubbia nel 1983); 2. la predizione del bosone di Higgs come evidenza sperimentale del meccanismo di rottura spontanea di simmetria (explanatory role) e rivelato dagli esperimenti ATLAS e CMS nell’acceleratore LHC (CERN, Ginevra).

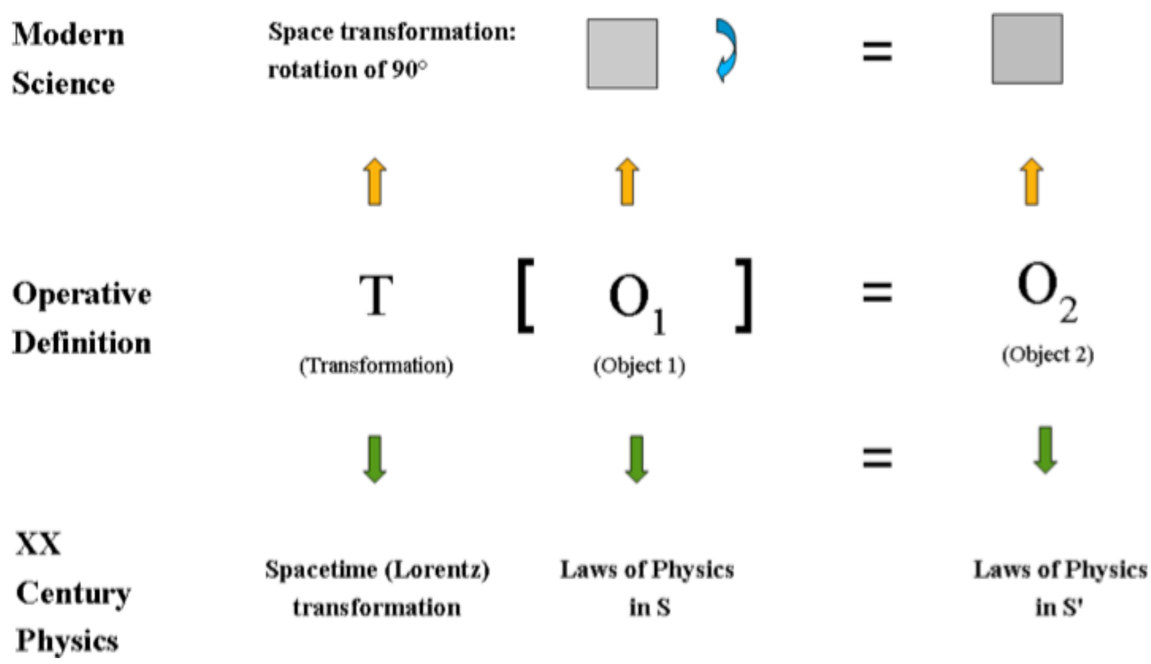
2. il concetto di simmetria permette di dare organicità alla ricostruzione delle teorie della relatività ma anche della teoria quantistica dei campi e il Modello Standard.

   Al fine di dare esempi e collocare il presente lavoro, nel seguito si discute brevemente, il contenuto di due articoli recenti.

Nel lavoro "*Symmetry as conceptual core of the Standard Model of Physics: actions for science education*" (Bertozzi, Levrini; 2013) gli autori propongono una ricostruzione disciplinare finalizzata ad evidenziare il ruolo 'normativo' della simmetria nel Modello Standard (MS) della Fisica.
Obiettivo finale del progetto, che si articola in sperimentazioni in classe e produzione di materiali quali una mostra virtuale, è quello di fornire agli studenti strumenti che permettano di vedere il MS come "*a gigantic formal attempt to characterize the fundamental blocks of the Universe and their laws in terms of their symmetry properties*".
Il percorso si sviluppa attraverso le seguenti domande:

- "*How are the 'laws of physics' normed (shaped) by symmetry?*"
- "*How are the 'fundamental blocks of the Universe' normed (defined) by symmetry?*"

La figura riportata di seguito è utile per illustrare il filo di ragionamento che gli autori propongono in relazione al primo punto.



L'idea di fondo è quella di far riflettere gli studenti su come e perchè la definizione moderna di simmetria "*sameness within change*" (van der Veen, 2013) si applichi a casi di natura molto diversa: l'invarianza della forma del quadrato sotto rotazioni spaziali (prima riga) è infatti posta in relazione all'invarianza delle leggi della fisica sotto trasformazioni di Lorenz (terza riga). I 'limiti' di questa analogia vengono poi presi come elemento fondamentale per indagare le differenze fra i due casi e sottolineare gli elementi di passaggio alla fisica contemporanea (da trasformazioni spaziali e spaziotemporali; da oggetti geometrici a relazioni formali).

In relazione alla seconda domanda ("*How are the 'fundamental blocks of the Universe' normed (defined) by symmetry?*"), sempre utilizzando come punto di partenza le trasformazioni spaziali su figure geometriche, gli autori mostrano come le proprietà di simmetria possano essere utilizzate per 'definire' gli oggetti stessi: "*Indeed, the two statements 'the square is invariant under rotations of 90° degrees' and 'the square is what is invariant under 90° degrees rotations' are significantly not equivalent:* [...] *in the second, symmetry properties are used to 'define' the object itself*".
In questa prospettiva, adottata dalla fisica contemporanea, il teorema di Noether è presentato come elemento di raccordo tra le quantità misurate sperimentalmente in laboratorio e le proprietà formali di simmetria.
Scopo di questa seconda parte è quello di permettere agli studenti di 'dare senso' all'espressione usata da Giuliano Toraldo di Francia: "*particle are knots of invariants (properties) prescribed by physical laws*" (Toraldo di Francia, 1978).

Nel lavoro "*Words and formulas in quantum field theory: Disentangling and reassembling the basic concepts for teaching*" (Bertozzi, Ercolessi, Levrini, 2013), gli autori propongono un approccio ai concetti base della teoria quantistica dei campi, rivolto a studenti universitari, in cui emerge il carattere unificante della simmetria. La proposta mostra come, a partire da una struttura formale contenente un numero minimo di simmetrie e senza nessun significato fisico, si possa procedere, aggiungendo proprietà simmetria alla lagrangiana, verso livelli di complessificazione via via maggiori che permettono di descrivere le particelle attualmente conosciute (come l'elettrone, il fotone etc.).

Molte delle ricerche riportate in questo paragrafo sono state discusse al recente Festival della Simmetria ("Symmetry Festival 2013", Delft 2-7 August, 2013) all'interno della sessione dedicata alle simmetrie nell'educazione scientifica e i cui atti sono in corso di pubblicazione.

2.2 Obiettivi specifici e metodologia di analisi

La riflessioni sviluppate nel presente lavoro di tesi si inseriscono nel quadro delle attività di ricerca sviluppate dal gruppo di Bologna e descritte nel paragrafo precedente: tuttavia, rispetto alle proposte descritte in precedenza tali riflessioni si caratterizzano per essere mirate ad evidenziare un ruolo che non è stato ancora esplicitamente affrontato, ovvero quello della simmetria come 'strumento di classificazione'.

L'esplorazione di questo ruolo della simmetria porterà ad evidenziare una delle ragioni di maggior successo della simmetria nel secolo scorso: la possibilità di predire l'esistenza di nuove particelle. Nel caso della "Via dell'Ottetto" tale predizione si concretizzerà con l'ipotesi sull'esistenza dei quark [1].

A livello metodologico, il tipo di analisi che sarà riportata nel Capitolo 3 intende essere una 'ri-costruzione storica di un percorso personale': quello che portò uno dei due scienziati, Yuval Ne'eman, all'elaborazione dell'articolo "*Derivation of Strong Interactions from a gauge Invariance*" del 1961 (Ne'eman, 1961), percorso che lo stesso fisico descrive in una serie di articoli e libri pubblicati negli anni seguenti. In particolare se ne citeranno alcuni pubblicati tra il 1964 e il 1990 (Ne'eman, 1964; *id.*, 1989; *id.*, 1990; Kirsh, Ne'eman, 1986).

Riprendendo le parole del filosofo della scienza Karl Popper (Popper, 1970), l'analisi si basa sull'assunto che possa essere importante distinguere due momenti nel progresso della conoscenza scientifica, ovvero: il cosiddetto contesto della scoperta che sta ad indicare "il processo che consiste nel concepire una nuova idea" e il cosiddetto contesto della giustificazione che riguarda il lavoro, "i metodi e i risultati dell'esaminare la scoperta logicamente".
Se, secondo Popper, il secondo momento rientra a pieno titolo nel campo di indagine della "logica della scienza" (costringendo ad "investigare i metodi impiegati", imponendo i "controlli sistematici ai quali dev'essere sottoposta ogni nuova idea che si debba prendere seriamente in considerazione"), di fronte al primo non si può che ammettere che "non esiste nessun metodo logico per aver nuove idee", in quanto "ogni scoperta contiene un 'elemento irrazionale' o 'un'intuizione creativa'".

La scelta di porre l'attenzione sul caso particolare e personale di Ne'eman è dovuta anche al fatto che, mediante questa strada, diventasse possibile fare luce su alcuni aspetti specifici nel ruolo svolto dalla simmetria nella classificazione e predizione di nuove particelle; aspetti che, si sperava, avrebbero connotato di modernità un modo di guardare al mondo e di procedere nella ricerca dal sapore ottocentesco.
Nel riportare i risultati dell'analisi, si mostrerà infatti come, nel caso di Ne'eman, l'intuizione, o lo slancio creativo, si sia generato dalla lettura di un catalogo ottocentesco per concretizzarsi nella risoluzione, in un colpo solo, di due

problematiche aperte e dibattute nella fisica teorica degli anni ’60 del secolo scorso (legate al piano della dinamica e a quello dell'algebra).
Si argomenterà come sia tale caratteristica di sintesi, pur nell'articolazione fra i diversi piani della ricerca, a rendere potente e innovativo il lavoro di Ne'eman e a motivare la nostra convinzione che una proposta di insegnamento incentrata sul suo contributo possa avere grande rilevanza culturale.

Su un piano metodologico più specifico, il lavoro di analisi è stato articolato in diverse fasi:

1) ricerca di articoli con una visuale più o meno complessiva e generale dell’episodio storico e del contesto nel quale si inserisce. In particolare, il punto di partenza è stato l’articolo *The classification and structure of hadrons*, in “Pions to Quarks” (Ne’eman, 1989). Data la particolare chiarezza esplicativa dei testi di Ne’eman, si è proceduto affidandosi alla sua ricostruzione;
2) selezione di una serie di articoli più specifici, scelti per contestualizzare scientificamente l’episodio analizzato;
3) confronto delle nozioni tratte dagli articoli con ricostruzioni delineate da alcuni storici e didatti della fisica (Bergia, Pickering, Castellani);
4) contestualizzazione concettuale della simmetria nella storia della scienza e del pensiero attraverso diversi lavori storici, epistemologici e didattici (Bergia, Bertozzi, Castellani, Feynman, Levrini, van der Veen, Weyl, Wigner). Se all’inizio del lavoro si erano seguiti i passi di Ne’eman per una maggior chiarezza esplicativa dei testi, una volta maturate la conoscenza dell’episodio e del contesto storico e concettuale, ci si è resi conto della portata metodologica e culturale dell’approccio del fisico israeliano, visto a maggior ragione il tema di ricerca nel quale si inserisce la tesi;
5) analisi a posteriori del lavoro: conferma della capacità didattica della

simmetria e osservazione personale di alcuni snodi concettuali di tale approccio scientifico.

In relazione al punto 2, riportiamo di seguito, in forma di scaletta e insieme ad un breve commento, la sequenza cronologica degli articoli originali scelti al fine di circoscrivere, almeno temporalmente, l'episodio che si andrà a discutere.

- 1954; nell'articolo "*Conservation of Isotopic Spin and Isotopic Gauge Invariance*", pubblicato in *Physical Review*, Yang e Mills propongono una teoria per le interazioni forti basata sul principio di gauge locale (Mills, Yang, 1954);
- 1957; Gell-Mann e Schwinger propongono la cosiddetta simmetria "globale" (Gell-Mann, 1957; Schwinger, 1957), la cui fallacia viene però mostrata da Abdus Salam nel 1959 alla conferenza di Kiev e da J. J. Sakurai nel suo lavoro "*Theory of Strong Interactions*" (Sakurai, 1960). La simmetria "globale" portava tra le altre cose anche ad una formula di massa per le particelle barioniche;
- 1961; dopo il lavoro di Sakurai del '60, che proponeva una trattazione delle interazioni forti basata su tre *gauge* indipendenti, Salam e Ward propongono un unico *gauge* unificato a 8 dimensioni (Salam, Ward, 1961), che combina isospin e ipercarica mediante la rappresentazione di Tiomno (Tiomno, 1957);
- 1961 (Febbraio); Ne'eman pubblica l'articolo "*Derivation of Strong Interactions from a gauge Invariance*" (Ne'eman, 1961), pubblicato in *Nuclear Physics*, in cui propone una classificazione dei barioni sulla base dell'algebra di Lie delle matrici tridimensionali a traccia nulla. La cosiddetta *Simmetria Unitaria* permette anche di derivare le interazioni forti da un principio di invarianza di *gauge*, con l'inclusione di 8 bosoni vettori;

- 1961 (Marzo); Gell mann redige il report "*Eightfold Way: A Theory of Strong Interaction Symmetry*", che rimane impubblicato fino al 1964 (Gell-Mann, Ne'eman, 1964, p. 11-58), in cui arriva indipendentemente le stesse conclusioni di Ne'eman in riguardo alla valorizzazione del gruppo SU(3) per la classificazione di barioni, mesoni pseudoscalari e, tramite invarianza di *gauge*, mesoni vettori. Propone anche una formula di massa per le particelle barioniche, in sostituzione di quella introdotta con la simmetria "globale" nel '59;
- 1961 (Dicembre); Okubo trae dal modello dell'*Eightfold Way* alcune conseguenze, tra cui la generalizzazione della formula di massa e il confronto di quest'ultima con i dati sperimentali (Okubo, 1962);
- 1962 (Febbraio); Gell-Mann pubblica i risultati già introdotti nel report del '61 con nell'articolo "*Symmetries of Baryons and Mesons*" (Gell-Mann, 1962), pubblicato in *Physical Review*. L'articolo risulta ricevuto in prima bozza il 27 marzo 1961, poi rivisto e rispedito il 20 settembre dello stesso anno.
- 1962 (Conferenza di Ginevra); Gell-Mann predice l'esistenza di W^-, particella con stranezza S = -3, appartenente al decupletto barionico. A questo risultato predittivo arriva indipendentemente anche Ne'eman nel corso della stessa conferenza;
- 1964 (Gennaio); nell'articolo *A Schematic Model of Baryons and Mesons* (Gell-Mann, 1964), pubblicato in *Physical Letters*, Gell-Mann, assumendo la validità dello schema basato sull'*Eightfold Way*, introduce i *quark*, per i quali costruisce un modello matematico formale in analogia con quanto fatto precedentemente per il set di Sakata;
- 1964 (Febbraio); al Brookhaven National Laboratory viene osservata l'esistenza di una particella con caratteristiche riconducibili a quelle di W^- (Barnes *et al.*, 1964). Questo risulta essere un test cruciale per la validità della *Simmetria Unitaria*.

Capitolo 3

Eightfold way e scoperta dei quark

3.1 *Zoologia megalomorfa* e la scommessa della “nuova fisica”: tentativi sulla via dell’ottetto

La distinzione fra "old" and "new" physics venne proposta da Andrew Pickering nel 1984 (Pickering, 1984) ad indicare due diverse modalità di ricerca che si sono susseguite nello sviluppo della fisica delle particelle elementari. In questo quadro:

“La ‘nuova’ fisica si caratterizza, fin dall’inizio, per la scommessa – che risulterà poi vincente – che vi sia sotto il disordine apparente, un ordine intrinseco della natura. In una prima fase, non si trattò di cercare di dar corpo all’idea che le molteplici nuove particelle fossero in effetti composte, quanto piuttosto di prendere atto della somiglianza fra loro di particelle aventi un insieme di proprietà in comune: questo

mentre non riduceva, almeno per il momento, il numero di costituenti "elementari" della materia, per lo meno li raggruppava in un piccolo numero di famiglie" (Bergia, 2009, p. 153)

Se infatti nel '47 le particelle conosciute erano otto, già a metà degli anni '50, anche grazie ai notevoli sviluppi delle camere a nebbia e ad emulsione, se ne contavano centinaia; per di più tali nuove particelle mostravano comportamenti fino a quel momento sconosciuti e inspiegabili con i modelli teorici del tempo.
A fronte di questa "zoologia megalomorfa" (Russo, 2000), la "scommessa" della nuova fisica consisteva non solo nell'assumere che in natura esistesse un ordine intrinseco, ma anche che tale ordine fosse raggiungibile attraverso principi di simmetria. Come sottolineato da Bergia questa "scommessa" si rivelerà vincente e la metodologia seguita porterà ad elaborare potenti strumenti non solo di classificazione, ma anche di predizione dell'esistenza di particelle non ancora rivelate.

Un problema molto specifico nel quale, a metà degli anni '50, si concretizza la "ricerca dell'ordine" è quello dello spettro di massa degli adroni (Ne'eman, 1964): in quegli anni infatti, oltre alla scoperta di mesoni come K (Kaone) o η (eta), emerse in modo abbastanza chiaro l'esistenza di alcune particelle con masse confrontabili a quelle dei nucleoni, di poco maggiori della massa del neutrone, e capaci di interagire fortemente: esse vennero battezzate *iperoni*, in seguito alla proposta di Leprince-Riguet alla celebre conferenza di Bagnères de Bigorre nel 1953, dove uno degli scopi principali fu proprio quello di mettere ordine alla complessa nomenclatura delle centinaia di particelle emerse in quei pochi anni (Russo, 2000, p. 274-6) [1].
In totale gli iperoni risultavano essere sei: un singoletto Λ, un tripletto Σ e un doppietto Ξ. Dalle misure essi apparivano essere simili per masse (come neutrone e protone), e distribuiti in multipletti (tripletto di Σ e doppietto di Ξ); all'interno

di ogni multipletto le differenze risultavano essere dell'ordine di grandezza di quelle tra i due nucleoni. Fra un multipletto e l'altro invece presentavano discrepanze di massa molto più spiccate.

Nel 1954 nucleoni e iperoni sono stati inclusi nella classe dei *barioni*, termine tuttora in uso. Questi, coi mesoni, formano la classe più generale degli *adroni*.
Nel 1983 Ne'eman, nel libro di divulgazione scientifica "Particle hunters" (Kirsh, Ne'eman, 1996, p. 131), evidenzia come negli anni '50 la classificazione basata sulla distinzione tra fermioni e bosoni cominciava a rivelarsi insufficiente: una divisione più efficace si ottenne nell'applicare come ulteriore criterio di classificazione la sensibilità delle particelle alle interazioni forti. Da qui i *barioni* (fermioni capaci di interazioni forti), i *mesoni* (bosoni capaci di interazioni forti), i *leptoni* (fermioni indifferenti a interazioni forti) e i *bosoni intermedi* (o *bosoni di gauge*, bosoni mediatori delle principali interazioni).

L'idea di fondo era quella di interpretare la situazione relativa allo spettro di massa di nucleoni e iperoni in analogia a quanto fatto per la differenza di massa tra neutrone e protone, ovvero come la rottura di una simmetria, in questo caso più ampia di quella di isospin (vedi Appendice B). A rompere la simmetria che avrebbe reso i vari barioni stati indistinguibili per il corrispondente gruppo di trasformazioni, non sarebbe più dovuta essere l'interazione elettromagnetica (come nel caso dei due nucleoni), ma un'interazione decisamente più forte.
"*Sotto questa simmetria più 'alta' gli otto barioni familiari sarebbero degenerati e avrebbero formato un supermultipletto. Non appena la simmetria fosse stata rotta, le Ξ, Λ, Σ e N si sarebbero divise, lasciando inviolate soltanto le conservazioni dello spin isotopico, della stranezza e del numero barionico*" (Gell-Mann, 1961). [2]

Il problema di ricerca pertanto diventava quindi l'individuazione di tale simmetria. In un articolo del 1990, pubblicato su "Symmetry: culture and science", Ne'eman, riguardo a questo episodio, sottolinea il risvolto metodologico peculiare alla fisica delle particelle:

"*Un aspetto particolarmente importante delle simmetrie applicate a livello particellare è che* [...] *provvedono una classificazione. Gli stati di particelle o i campi devono formare i multipletti del rispettivo gruppo di simmetria. Spesso nella fisica delle particelle la sequenza è invertita: è tramite l'identificazione dei multipletti che si può ipotizzare la simmetria che li caratterizza*" (Ne'eman, 1990, p. 235).

Oltre all'ottetto barionico, ulteriori evidenze sperimentali concorrevano a dare plausibilità a tale linea di ricerca. Come sottolinea Bergia, "*era decisamente confortante che anche i mesoni pseudoscalari e vettoriali si raggruppassero in analoghi ottetti*" (Bergia, 2009, p. 154).

Tutto lo sforzo scientifico si focalizzò quindi nella ricerca di una simmetria 'più' fondamentale che, una volta rotta, avrebbe lasciato invariate le conservazioni di quantità dovute a simmetrie di 'ordine minore' (come, ad esempio, quella di isospin). Il primo tentativo descritto nel prossimo paragrafo venne denominato dagli stessi addetti ai lavori "Simmetria Globale".

3.1.1 "Simmetria Globale"

La "simmetria globale" fu proposta da Murray Gell-Mann e Julian Schwinger nel 1957 (Gell-Mann, 1957; Schwinger, 1957). Essi partirono dalla descrizione più generale possibile, e condivisa, di un'interazione forte 'a la Yukawa' in termini degli 8 barioni e 7 mesoni noti:

$$
\begin{aligned}
L_{strong} \;=\; & g_1\, \overline{\mathrm{N}}\, \boldsymbol{\tau}\, \mathrm{N} \cdot \boldsymbol{\pi} + g_2\, \overline{\boldsymbol{\Sigma}}\, \Lambda \cdot \boldsymbol{\pi} + hc + g_3\, \overline{\boldsymbol{\Sigma}}\, \Lambda\, \overline{\boldsymbol{\Sigma}} \cdot \boldsymbol{\pi} \\
& + g_4\, \overline{\Xi}\, \boldsymbol{\tau}\, \Xi \cdot \boldsymbol{\pi} + g_5\, \overline{\mathrm{N}}\, \mathrm{K}\, \Lambda + hc + g_6\, \overline{\mathrm{N}}\, \boldsymbol{\tau}\, \mathrm{K} \cdot \boldsymbol{\Sigma} + hc \\
& + g_7\, \overline{\Xi}\, \overline{\mathrm{K}}\, \Lambda + hc + g_8\, \overline{\Xi}\, \boldsymbol{\tau}\, \mathrm{K} \cdot \boldsymbol{\Sigma} + hc
\end{aligned}
$$

Oltre alla risposta rispetto al tema centrale *("poteva lo spettro di massa degli adroni essere visto come un altro caso di rottura di simmetria?"* (Ne'eman, 1964) ciò che ci si aspettava dalla "simmetria globale" era:

I. l'identificazione di una relazione fra gli 8 accoppiamenti che, nel modello generale, risultavano indipendenti ($g_{1},......,g_{8}$);
II. suggerimenti relativi alla parità delle particelle coinvolte, formalmente descritta dai "Dirac bilinears" e, all'epoca, non ancora note;
III. eventuali termini mancanti.

Il modello proposto dai due fisici si basava sulla distinzione tra interazioni altamente simmetriche mediate da π e interazioni non simmetriche mediate da K. In particolare: "*the higher symmetry was valid for the interactions of the π meson, but broken by those of the K. The mass differences of the baryons were thus attributed to the K couplings*" (Gell-Mann, 1961).
La proposta di questo schema portava ad una *formula di massa* del primo ordine:

$$2(m_N + m_\Xi) = 3m_\Sigma + m_\Lambda$$

Gell Mann stesso, nel report del 1961, individua la debolezza di tale modello in due punti principali:

- la non specificazione della simmetria dei K;
- la scelta arbitraria delle costanti di accoppiamento dei K, molto più deboli di quelle dei π (cosa che portava ad introdurre una serie di constanti "ad hoc").

Ulteriori critiche alla simmetria globale vennero mosse da:

- Abdus Salam, che, nel 1959 alla conferenza di Kiev, fece notare come gli spostamenti di fase delle S-wave dedotti dagli esperimenti erano considerevolmente diversi tra scattering $\pi - N$ e scattering $\pi - iperone$, contrariamente a quanto affermato nella teoria (Ne'eman, 1964).

- Jun John Sakurai, che mostra "*no direct connection between physical couplings and the currents of the conserved symmetry operators*" (Sakurai, 1960).

Smentita la proposta dei Gell-Mann e Schwinger, Ne'eman riconosce come già in atto alla fine degli anni '50 due approcci differenti al problema. Uno di tipo più "modellistico", cominciato con Fermi e Yang e poi proseguito da vari fisici, e un altro basato sulle invarianze di Gauge, portato avanti da Yang e Mills.

3.1.2 Approccio 'modellistico'

Le basi di tale approccio sono state poste da Fermi e Yang nel 1959. Nell'introduzione al libro *Eightfold way* Ne'eman definisce questa linea di ricerca come "*la più recente incarnazione della concezione atomica di Democrito*" (Ne'eman, 1964), perché fondato su una domanda basilare: esiste un set fondamentale di particelle o campi dalle quali possano essere costruite tutte le altre?

Punto di partenza era la lagrangiana simmetrica di Kemmer, introdotta per dare un riscontro matematico dell'indipendenza dalla carica elettrica delle forze nucleari osservata sperimentalmente (tale lagrangiana era costruita infatti a partire dal fatto che le forze tra n-n, n-p e p-p fossero approssimativamente uguali), e scritta in seguito come

$$L = \mathrm{ig}\,\overline{N}\,\gamma_5\,\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{\pi}\,\mathrm{N}$$

L'osservazione determinante fu che, rendendo questa lagrangiana scalare, si potesse reinterpretare la particella π come particella composita.
A questo scopo bisognava infatti prendere dalla riduzione del tensore $N\overline{N}$ un determinato vettore, le cui proprietà di trasformazione risultavano essere identiche a quelle del tripletto di π, includendo lo spin, la parità e la parità di carica. Dal punto di vista formale quindi π risultava equivalente al prodotto tensoriale di particelle del tipo N e $\overline{N}$:

$$\overline{N}g_5N \sim \pi$$

Sulla base di questa osservazione di natura formale Fermi e Yang tentarono di introdurre un modello fisico in cui il pione fosse considerato come stato legato di nucleoni e antinucleoni. Con l'introduzione della stranezza, Gerson Goldhaber e F.R. Christy aggiunsero il Kaone alla lista dei mattoni fondamentali; Sakata propose poi il tripletto (*p,n,Λ*) come set di particelle costituenti.
La costruzione di questo modello fisico dette un grande impulso alla ricerca di una formalizzazione appropriata dei suoi aspetti di simmetria, fino a quando nel 1959-60, Ikeda Ogawa e Ohnuki in Giappone e Thirring, Wess e Yamaguchi in Europa delinearono una struttura basata sul gruppo SU(3), con un'algebra a 8 parametri, le cui rappresentazioni sarebbero corrisposte alle strutture permesse dal modello di Sakata.
Questo assumeva l'invarianza del processo di costruzione delle particelle in riferimento alle trasformazioni unitarie unimodulari dei tre 'fondamentali' campi complessi, identificati con il set di Sakata (*p,n,Λ*).
Riguardo alla questione degli spettri di massa, il modello assumeva che derivassero dalla propagazione della differenza di massa tra *Λ* e *N*; l'assunto era cioè che ci fosse una propagazione della differenza di massa delle particelle costituenti nelle particelle costituite.

3.1.3 Teoria di Yang-Mills

La linea seguita da Yang e Mills, a partire dal 1945, si fondava su un'analogia con la simmetria locale U(1) di carica elettrica. Si trattava di fatto di costruire questa analogia per il formalismo riguardante l'isospin, basandosi sul principio di invarianza di Gauge.
Il ragionamento nasce da una domanda: per quali condizioni una teoria fisica è invariante sotto trasformazione locale di fase? Si può mostrare che una tale invarianza non è possibile per una teoria libera, ma richiede una teoria interagente. Vediamolo prima nel caso di invarianze U(1).

Invarianza U(1)

H. Weyl, nel 1918, aveva intrapreso un tentativo, rivelatosi poi di unificazione delle teorie gravitazionale ed elettromagnetica sfruttando un principio di invarianza locale, cui diede il nome di *Eichinvarianz* (invarianza di scala), ma che è più comunemente conosciuta come invarianza di *gauge* (calibro in inglese). Dopo lo sviluppo della meccanica quantistica, London, Fock, Weyl ed altri si resero conto che la teoria originaria di Weyl poteva essere opportunamente riformulata.

Data infatti l'equazione di Schröedinger per una particella carica in un campo elettromagnetico,

$$\left[\frac{1}{2m}\left(-i\hbar\nabla - e\vec{A}\right)^2 + eV\right]\psi \;=\; i\hbar\frac{\partial\hbar}{\partial t}$$

si trova che il potenziale vettore $(\overrightarrow{A})$ e il potenziale scalare (V) sono legati al tensore elettromagnetico $F_{\mu\nu}$ (e quindi a $\vec{E}$ e $\vec{B}$) da relazioni non univoche: il tensore $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ rimane infatti invariato (invarianza di gauge) in seguito alla sostituzione

$$A_\mu \rightarrow A_\mu - \partial_\mu \lambda$$

dove λ è una funzione del punto.

Esisteranno quindi $\vec{A}'$ e V' per cui il tensore F rimane invariato. Analogamente l'equazione di Schrödinger, scritta in termini dei nuovi $\vec{A}'$ e V', dovrebbe risultare identica a quella riportata sopra in termini di $\vec{A}$ e V. Ciò avviene solo se si suppone che anche la funzione d'onda ψ si possa trasformare, sotto la seguente trasformazione di fase

$$\psi(x) \rightarrow e^{i\theta(x)}\,\psi(x)$$

Quindi negli anni '50 era chiaro che, affinchè non ci fosse contraddizione tra Meccanica Quantistica ed Elettromagnetismo, la funzione d'onda doveva essere soggetta anch'essa ad una libertà di gauge.

Weyl nel 1950 scrive:

"*Oggi, credo, dopo l'introduzione della ψ attraverso la teoria quantistica, possiamo indicare in modo più preciso dove la mia teoria andò fuori strada: l'invarianza di gauge non connette il potenziale elettromagnetico con quello gravitazionale [...] ma con la ψ del campo di materia. Non potevo certamente saperlo nel 1918!*" (Weyl, 1950, p. 73)

Le trasformazioni globali di fase del tipo riportato sono trasformazioni di fase locali ad un parametro (esse si differenziano dalle trasformazioni globali per la dipendenza della fase dai punti dello spazio tempo); in relazione al discorso sopra

riportato sono dette anche 'trasformazioni di gauge' (locali, ad un parametro).
Come sottilineato da Bergia (Bergia, 2005) rovesciando l'argomentazione si passa da una 'constatazione' ad un 'principio', appunto, il principio di gauge. Ciò avviene chiedendosi: sotto quali condizioni una teoria è invariante sotto trasformazioni locali di fase?

Il caso discusso sopra mostra che una tale invarianza non è possibile per una teoria libera, ma richiede una teoria interagente che, nel caso dell'equazione di Schrodinger comporta l'introduzione di un campo vettoriale, soggetto corrispondentemente a libertà di gauge, la cui interazione con la materia carica è determinata e in cui si 'riconosce' il campo elettromagnetico.
Inoltre, poichè le trasformazioni coinvolte dipendono in maniera continua e differenziabile da un numero infinito di parametri (punti dello spazio tempo), lo studio dell'interazione fra campo e materia rientra nel campo di applicazione del secondo teorema di Noether (Bertozzi, 2013).

Il tentativo di Yang e Mills, discusso nel prossimo paragrafo, fu quello di introdurre l'interazione forte rendendo locale il gruppo dell'isospin SU(2).

Invarianza SU(2)

La congettura di Yang-Mills (Mills, Yang, 1954), in analogia con quanto riscontrato per l'invarianza U(1) può essere illustrata chiedendosi, a partire dalla Lagrangiana di Dirac, che tipo di interazione verrà fuori rendendo locale il gruppo di invarianza SU(2). [3]
Si prevedeva che rendendo locale quest'ultima sarebbe emerso nella lagrangiana totale un termine di interazione associabile all'interazione forte tra protone e neutrone. Senza questo termine la lagrangiana non avrebbe preservato l'invarianza locale. [4]

Dal momento che SU(2) non è commutativo, l'invarianza di gauge dell'elettromagnetismo andava estesa al caso di un gruppo *non abeliano*. Essendo gli stati delle particelle descritte da isospinori, la trasformazione della funzione d'onda sarebbe stata quindi del tipo

$$\psi^{1/2}(x) \ \rightarrow \ e^{\tau \cdot \alpha(x)/2} \psi^{1/2}(x)$$

dove $\tau \cdot \alpha(x)$ indica il prodotto scalare dell'isospin per il 'vettore' che ha per componenti tre fasi funzioni delle coordinate spazio-temporali; l'indice ½ serve a ricordare che si sta parlando di nucleoni, cioè particelle con isospin ½.
Il passaggio da SU(2) globale a locale porta nella lagrangiana totale l'aggiunta del termine previsto

SU(2) globale $$L = \bar{\psi}\left(i\gamma^{\mu}\partial_{\mu} - m\right)\psi \ = 0$$

SU(2) locale $$L = \bar{\psi}\left(i\gamma^{\mu}\partial_{\mu} - m\right)\psi + g\bar{\psi}\gamma^{\mu}\frac{\vec{\tau}}{2}\vec{b}_{\mu}\psi = 0$$

Le particelle corrispondenti ai tre campi vettoriali introdotti dalla richiesta di invarianza, avrebbero dovuto formare un tripletto di isospin con massa nulla e a differenza dei fotoni per il campo elettromagnetico, avrebbero dovuto aver una forma di autointerazione. Questa teoria contrastava con il modello per le interazioni forti proposto da Yukawa (Yukawa, 1935).

Osserva Ne'eman: "*L'omologo dell'isospin sarebbe stato dato da un isotripletto di campi vettoriali. Per il fatto però che questo non era mai stato osservato e che l'idea* *locale di gauge in forma pura portava a campi vettoriali non massivi* [...], *questo approccio rimase 'dormiente' per qualche anno*". (Ne'eman, 1964)

Poichè lo sviluppo dell'analogia fra U(1) e SU(2) portava ad introdurre interazioni "long range" (mediate da campi a massa nulla) laddove era evidente che le interazioni nucleari fossero "short range" (Yukawa, 1935) il modello venne temporaneamente abbandonato anche se, come ricorda Pickering: "*Yang, nel '56, espresse l'opinione che la teoria avrebbe potuto dimostrare la non necessità della condizione di massa nulla*" (Bergia, 2005; Pickering, 1984, p.164).
Il lavoro di Yang-Mills venne rivalutato nel '59 quando si capì che le interazioni deboli erano del tipo vettoriale-pseudovettoriale, probabilmente mediate da un campo intermedio con spin=1 che somigliava proprio al potenziale vettore A, introdotto da Yang-Mills. [5]

Tuttavia, come si vedrà nel prossimo paragrafo, già a metà degli anni '50 la teoria di Yang-Mills possedeva un potere evocativo sufficiente per aprire la strada a successivi e determinanti sviluppi nell'ambito della ricerca teorica sulle interazioni forti.

3.2 Eightfold way

“I read the 1954 Yang-Mills paper a short time after I had settled at Imperial College. I liked the aesthetic purity of this approach; it evoked in me feelings similar to what I had experienced when first exposed to Albert Einstein’s general relativity. I used to think it was the geometrization that had captivated me over there, but I could now see that it was really a covariance, a local gauge simmetry, that gave the theory its beauty”

(Ne’eman, 1989).

Dalla ricostruzione che Ne'eman stesso propone del percorso che lo portò all'articolo del '61, sembra di poter affermare che egli colse, per poi "mettere insieme", due tipi di problematiche ben distinte (e dibattute) nella fisica teorica dell'epoca: una relativa al piano della dinamica, l'altra relativa al piano dell'algebra.

Sul piano della dinamica:

- il lavoro di Sakurai “*A vector theory of the Strong Interactions*” (Sakurai, 1959), che all'epoca di questi eventi era solo un ‘pre-print’ in circolazione fra gli addetti ai lavori dell’articolo pubblicato nel ’60 (Sakurai, 1960), non fece solo emergere, come già riportato, la mancanza di connessioni tra le costanti d’accoppiamento e le correnti degli operatori conservati della “Simmetria Globale”; esso "*suggeriva anche*", a detta di Ne'eman, che la “*vera interazione forte poteva benissimo essere una teoria di Yang-Mills*” (Ne'eman, 1989). La trattazione di Sakurai in particolare proponeva tre *gauges* separati – isospin, ipercarica e numero barionico – scorrelati dal punto di vista della teoria dei gruppi;

- i lavori di Marshak e Sudarshan da una parte (Marshak, Sudarshan, 1957), e di Feynman e Gell-Mann dall'altra (Feynman, Gell-Mann, 1958), sembravano indicare che anche nelle interazioni deboli dovesse avere luogo un meccanismo alla Yang-Mills ("V-A" nature of weak interactions).

Sul piano dell'algebra:

- Ne'eman evidenzia che, al momento della proposta della "Simmetria Globale", la riflessione sui gruppi di Lie e sulle algebre in generale non riscuoteva molta attenzione. La teoria stessa era stata formulata in termini di assunzioni sulla relazione fra le costanti di accoppiamento (g1, g2, ...) che, come detto nel paragrafo 2, era "ciò che ci si aspettava" dalla proposta.
  Fu J. Tiomno che, nel '59, dimostrò che l'*Ansatz* di Gell Mann e Schwinger era del tutto equivalente all'introduzione di una simmetria globale SO(7) (Tiomno, 1957); a questo seguirono ulteriori sviluppi di Salam e Ward sulle simmetrie SO(8) e SO(9) locali (Salam, Ward, 1961), i quali proposero per le interazioni forti un *gauge* unificato che combinava isospin e ipercarica, a differenza dei tre *gauges* di Sakurai (Sakurai, 1960), scorrelati dal punto di vista algebrico. In più, nel lavoro di Utiyama di qualche anno prima (Utiyama, 1956), il 'principio di gauge' veniva generalizzato a qualsiasi gruppo di Lie astratto e si mostrava che la stessa relatività può essere considerata come una teoria di gauge locale del gruppo di Poincarè.

Come sottolinea Ne'eman:
"La strada per la ricerca di una nuova simmetria era aperta, questa volta sistemata dal punto di vista algebrico, e non più legata ad un modello del tipo di Fermi-Yang" (Ne'eman, 1964).

Su suggerimento di Salam (suo mentore all'Imperial College di Londra) Ne'eman si concentrò sullo studio delle algebre e dei gruppi di Lie. A sua detta fu molto utile il lavoro di Dynkin (Dynkin, 1957), il quale proponeva una ri-edizione del lavoro svolto da Elie Cartan a fine '800 sulla classificazione delle algebre di Lie semisemplici e finito-dimensionali, introducendo un metodo grafico per descrivere tali algebre e le corrispondenti rappresentazioni.

Il compito che Ne'eman si diede fu quello di selezionare, all'interno del catalogo di Cartan ri-proposto da Dynkin, un gruppo di simmetria *G* candidato al caso dell'interazione forte.

"*It is intersting to note how useful classification can be. Here was a classification in mathematics that was immediately applicable to physics, producing yet another classification there. I realized that my task consisted in selecting a candidate symmetry G out of the Cartan catalogue, as presented by Dynkin*" (Ne'eman, 1989).

Le rappresentazioni irriducibili di *G* avrebbero dovuto caratterizzare i multipletti di particelle, fornendo la classificazione cercata; il *gauge* locale associato a tale gruppo, ora G(x), avrebbe dovuto fornire una dinamica del tipo di Yang-Mills per le interazioni forti, insieme a un multipletto di mesoni vettori mediatori di tale interazione. [6]

I dati sperimentali sembravano confermare che, in natura, tutti i processi con conservazione di isospin e stranezza fossero leciti, e ciò portò il fisico israeliano a concentrarsi sulle algebre di rango 2. Il catalogo di Cartan ne proponeva 5 [7].

- A_2 (che genera il gruppo SU(3))
- B_2 (che genera SO(5))
- C_2 (che genera Sp(4))
- D_2 (che genera SO(4) o SU(2)xSU(2), un'algebra semi-semplice)
- G_2

Ne'eman, uomo di profonde radici ebraiche, sottolinea come inizialmente la sua attenzione fosse stata catturata dall'algebra G_2, poichè il diagramma corrispondente ricalcava proprio la stella di David. Fu invece la possibilità di una coincidenza con quanto previsto da Sakurai circa il rapporto fra le costanti di accoppiamento di isospin e ipercarica (1/3) a farlo propendere per l'algebra di tipo A_2, generatrice del gruppo SU(3).

Il fatto che tale scelta permettesse di raggruppare i barioni in un "ottetto" e quindi di ottenere un ottimo accordo con i dati sperimentali era tuttavia accompagnato dalla consapevolezza che i barioni stessi non erano associati alla rappresentazione fondamentale del gruppo. Ciò poteva significare due cose:

1. che la ricerca di "quale gruppo" non fosse ancora terminata: questa era la prospettiva matematicamente più elegante, tuttavia le proposte alternative non preservavano l'indipendenza dalla fase tipica delle probabilità quanto-meccaniche;
2. che i barioni fossero particelle composite: questa era una prospettiva decisamente rivoluzionaria.

Nonostante la sospensione rispetto a questi importanti interrogativi, la pubblicazione da parte di Ne'eman dell'articolo "*Derivation of strong interactions from a gauge invariance*" nel Febbraio del '61, (Ne'eman, 1961), avviene in un clima decisamente confortante per quanto riguarda l'identificazione fra SU(3) e l'ottetto barionico, come già accennato nel paragrafo 2.3: i mesoni potevano essere raggruppati in un altro ottetto con la previsione, e successiva scoperta a metà dell'anno, di un altro mesone (η^0, 550 MeV). In questo lavoro, dove viene presentata ciò che lo stesso scienziato chiamerà "Simmetria Unitaria" o di "Spin Unitario", Ne'eman dà compimento al programma che si era prefissato fornendo una rappresentazione dei barioni basata sull'algebra di Lie delle matrici complesse hermitiane tridimensionali a traccia nulla e derivando l'interazione forte, mediata da 8 bosoni vettori, a partire da un principio di invarianza di *gauge*. Si può notare che questo stesso gruppo era stato usato nella formulazione del modello di Sakata; a tal proposito Ne'eman sottolinea che "*il presente uso di questo gruppo è in un contesto completamente differente, come le nostre assunzioni rispetto alle rappresentazioni dei fermioni non seguono le prescrizioni del modello*" (Ne'eman, 1961).

L'1 febbraio del '62 (sebbene il lavoro fosse stato inviato già nel marzo del '61) Murray Gell-Mann pubblica in *Physical review* l'articolo "*Symmetries of Baryons and Mesons*" (Gell-Mann, 1962). In questo lavoro lo stesso risultato è derivato utilizzando ciò che poi verrà chiamata "algebra delle correnti": ispirandosi all'algebra delle matrici, l'idea di fondo è quella di utilizzare le relazioni di commutazione fra cariche (della simmetria 'unitaria'), cariche e correnti e correnti stesse. In questo lavoro inoltre, il fisico conia la dicitura "Eightfold way" in riferimento al "Nobile ottuplice Sentiero" verso il Nirvana, proposto della religione Buddhista.

3.2.1 Classificazione

In questo paragrafo, si entrerà nel merito della capacità classificatoria della rappresentazione 8-dimensionale di SU(3) in relazione alla fisica delle particelle: poiché tali contenuti non hanno più a che fare con i differenti percorsi che hanno portato gli scienziati agli articoli del '61, si utilizzerà principalmente il testo "Eightfold way", scritto a due mani da Ne'eman e Gell-Mann (Gell-Mann, Ne'eman, 1964) (che comprende diversi articoli di quegli anni commentati dai due fisici), e ci si riferirà genericamente alla 'proposta' per indicare i risultati conseguiti da entrambi.

1) Nuovi operatori conservati

La proposta prevede che, nelle interazioni forti, oltre alla conservazione delle tre componenti dello spin isotopico (I_1,I_2,I_3) e dell'ipercarica Y, si conservino altri quattro operatori F_4, F_5, F_6, F_7 (chiamati da Gell-Mann "*strangeness-changing operators*"). [8]

Si propone quindi che tale sistema algebrico di otto operatori F_1 … F_8, soddisfi le relazioni di commutazione di modo che gli operatori introdotti siano gli otto generatori dell'algebra di SU(3), in analogia al fatto che gli operatori F_1, F_2, F_3 costituiscono i tre generatori dell'algebra di SU(2). Le seguenti matrici sono i generatori infinitesimali di SU(3), chiamate in seguito *matrici di Gell-Mann*:

$$\lambda_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_8 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

I nuovi operatori F_4 … F_7 obbediscono alle regole di selezione $|\Delta I| = ½$, $|\Delta Y| = 1$. Essi raggruppano tra loro multipletti di particelle interagenti fortemente con differenti valori di I e di Y (ma con stesso spin e parità) in multipletti più ampi approssimativamente degeneri.

Commenti (analogia con SU(2)):

- la nuova simmetria è di fatto la più semplice generalizzazione della simmetria di spin isotopico: Il gruppo dello spin isotopico è il gruppo di tutte le matrici unitarie 2x2 con determinante unitario (speciali).

Ciascuna di queste matrici può essere scritta come exp(iA), dove A è una matrice hermitiana 2x2. Essendo tre le matrici hermitiane 2x2 indipendenti (matrici di Pauli), esisteranno tre componenti dello spin isotopico. Allo stesso modo la nuova simmetria è di fatto il gruppo di tutte le matrici unitarie speciali 3x3. Essendoci otto matrici, il nuovo 'spin unitario' avrà otto componenti;

- i 'supermultipletti' corrispondono alle rappresentazioni irriducibili di SU(3), proprio come i multipletti di spin isotopico corrispondono alle rappresentazioni irriducibili di SU(2) (vedi punto successivo).

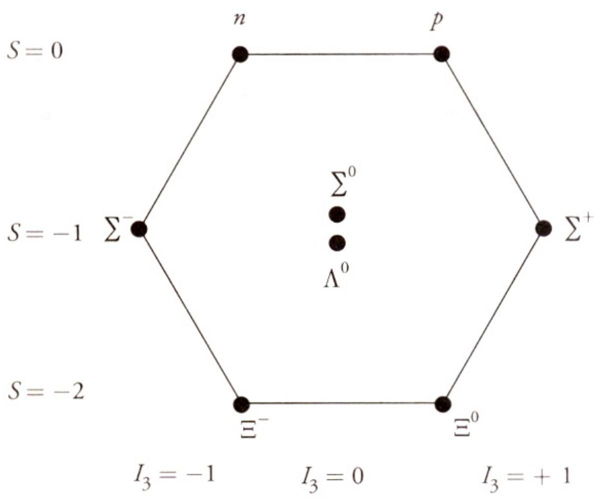
2) Assegnazione particelle

La proposta iniziale dell'*Eightfold Way* non prevedeva nessuna assegnazione di particelle, né dà parte di Gell-Mann né di Ne'eman, alla rappresentazione fondamentale di SU(3), che è appunto tridimensionale. Le particelle sono da assegnare alle *rappresentazioni tensoriali*, che sono:

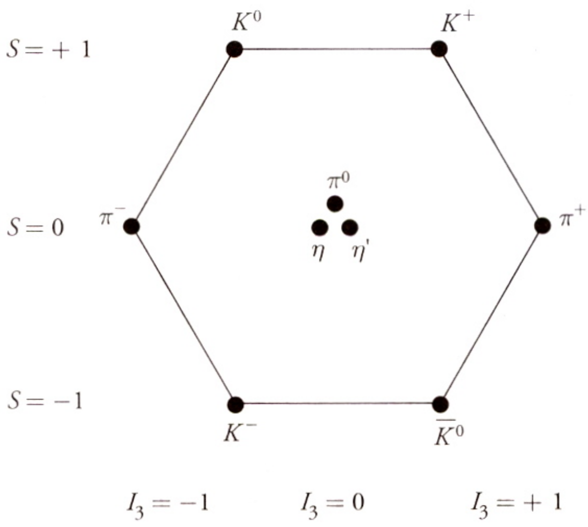
I. quella banale unidimensionale (che Gell-Mann per semplicità indica con **1**) e alla quale corrisponde un singoletto neutro con I=0 e Y=0;
II. la rappresentazione 'aggiunta' (o 'regolare') a otto dimensioni, indicata con **8**, i cui stati possibili avranno I = 0, ½, 1 e Y = -1, 0, 1. Questa rappresentazione occorre due volte (corrisponderà cioè a due ottetti di particelle) e consiste di fatto di due doppietti rispettivamente con I=1/2, Y=1 e I=1/2, Y=-1, un singoletto con I=0, Y=0, e un tripletto con I=1, Y=0;
III. altre rappresentazioni a dimensioni più alte ($\mathbf{10}$, $\overline{\mathbf{10}}$, e $\mathbf{27}$).

Sulla base di tali rappresentazioni, molte delle particelle della 'zoologia megalomorfa' venivano raggruppate in:

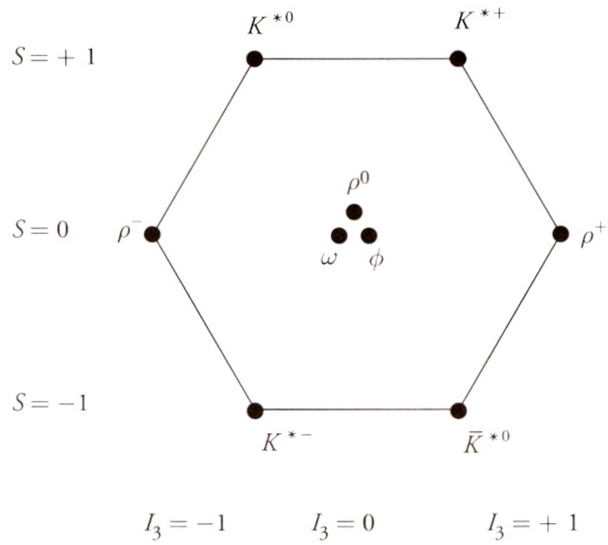
Ottetto barionico: lo schema prevede la classificazione dei multipletti barionici Ξ, Λ, Σ e N in un ottetto assegnato alla rappresentazione **8** (con J = ½⁺):



Ottetto mesoni pseudoscalari: allo stesso modo i mesoni pseudoscalari K, $\overline{K}$, η e π formeranno un ottetto equivalente. È prevista l'esistenza del mesone η con I=0 (chiamato χ da Gell-Mann e π^0 da Ne'eman), proposta che verrà confermata sperimentalmente nel 1962:

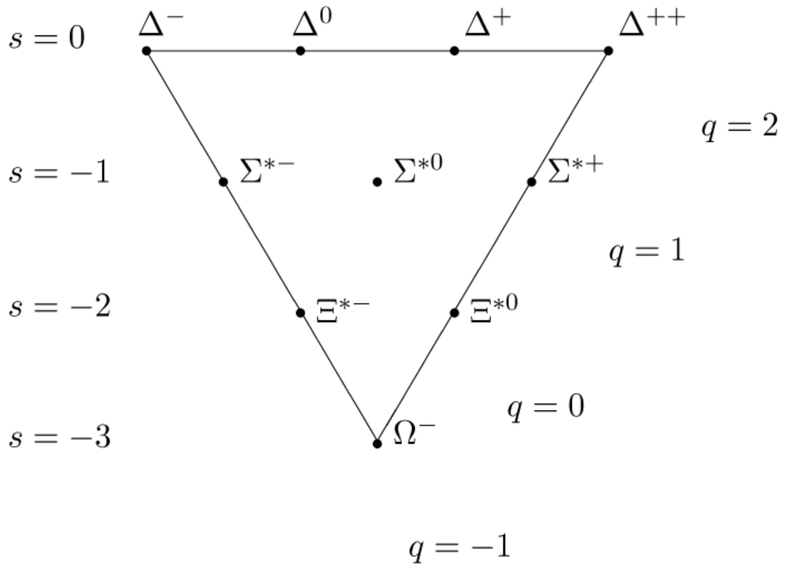


Ottetto mesoni vettori: è anche prevista l'esistenza di un similare ottetto di mesoni vettori (chiamati al tempo M, $\bar{M}$, ω e ρ da Gell-Mann, e Z, $\bar{Z}$, X e V da Ne'eman) e di un singoletto B:



L'esistenza di tutte queste particelle, chiamate ora comunemente K*, ϕ, ρ e ω, verrà confermata sperimentalmente entro la fine del 1964. Questa previsione viene da un'estensione del principio di *gauge* di Yang-Mills. Le sorgenti dei mesoni vettori sono le correnti conservate degli otto componenti dello spin unitario. Come precisa Gell-Mann (Gell-Mann, 1961), nel limite della simmetria unitaria e quando le masse di questi mesoni vettori sono 'spente' – cioè quando i multipletti mesonici sono indistinguibili per massa – si ha una teoria di gauge invariante e minimale, come l'elettromagnetismo. Quando la massa è 'accesa', l'invarianza locale di gauge è ridotta (perde cioè il suo carattere locale) ma la conservazione dello spin unitario rimane esatta. [9]

Decupletto barionico: la rappresentazione **10** ospita un quartetto Δ con ipercarica Y = +1, un tripletto Σ con Y = 0, un doppietto Ξ con Y = -1, e un singoletto Ω, della cui predizione parleremo nel paragrafo 2.3.2, con Y = -2.



3) Formula di massa

E' di Murray Gell-Mann la proposta di una formula per le masse dei multipletti barionici che si generano dalla rottura della simmetria unitaria,

$$\frac{N + \Xi}{2} = \frac{3\Lambda + \Sigma}{4}$$

(nella formula, le lettere corrispondenti alle particelle, indicano in realtà le loro masse) [10]. Con questa formula Gell Mann si riallaccia al problema dello spettro di massa, da cui era partita l'esplorazione di SU(3), e riprende l'idea che le differenze di massa possano essere l'effetto della violazione di una simmetria di ordine maggiore: tale simmetria è ora la 'simmetria unitaria' e la violazione è attribuita a un'interazione di tipo *medium-strong* [11]. Se infatti la simmetria non fosse violata, come sottolinea Okubo (Okubo, 1962), tutte le particelle appartenenti alla stessa rappresentazione irriducibile dovrebbero avere la stessa massa, lo stesso spin e la stessa parità. Quindi dovremmo avere la stessa massa ad esempio per il pione e per il Kaone, il che non è vero.

Gell-Mann indica nel report del 1961 che il lavoro da compiere sta proprio nel "delicato problema di trovare metodi con i quali questi effetti della rottura di simmetria possano essere esplorati sperimentalmente".

La formula di massa proposta permette ad esempio di predire (al primo ordine di perturbazione) le masse di alcune particelle ancora non scoperte sulla base delle masse di alcune altre, come avvenne ad esempio per il mesone pseudoscalare η a partire dalle masse di K e π.

Okubo, sempre nel 1961, generalizza la formula di massa per gli ottetti di Gell-Mann al caso generale, ottenendo la seguente formula:

$$M = a_0 + a_1 S + a_2 \left[I(I+1) - \frac{1}{4}S^2\right]$$

(dove a_0, a_1 e a_2 sono parametri liberi), che per qualsiasi supermultipletto ottiene le masse dei multipletti isotopici contenuti in esso.

4) Generalizzazione della CVC (Conserved Vector Current Hypothesis)

Un'altra proposta, che interessa sia le interazioni forti che quelle deboli, è la generalizzazione dell'ipotesi della corrente vettoriale conservata (CVC). L'idea su cui si basa l'ipotesi di conservazione della corrente vettoriale (CVC) è che la corrente vettoriale debole DY = 0 delle particelle interagenti fortemente sia la corrente di un componente dello spin isotopico. La generalizzazione di questa idea consiste nell'assumere che l'intera corrente vettoriale debole delle particelle capaci di interazioni forti sia la corrente di una componente dello spin-F (spin unitario).

3.2.2 Predizione

Nei paragrafi precedenti si è già accennato alla capacità della simmetria unitaria di prevedere l'esistenza di particelle che è stata poi confermata sperimentalmente (come il mesone pseudoscalare η con I=0 o i mesoni vettori ω e ρ, scoperti come predetto con le proprietà loro assegnate precedentemente da Sakurai).
Ci sono due però due casi riguardanti le capacità predittive dell'Eightfold Way che meritano un'attenzione particolare: la predizione di Ω^- nel decupletto barionico e l'anticipazione matematica del modello a quark.

1) **Predizione di Ω^-**

L'episodio che portò Ne'eman (nello stesso momento di Gell-Mann) alla predizione dell'esistenza di Ω^-, è raccontato in modo singolare da Gerson Goldhaber, fisico delle particelle di origini tedesche che ebbe modo di incontrare il fisico israeliano alla conferenza di Ginevra del 1962. L'articolo (Goldhaber, 1985) è riportato in un libro scritto proprio in onore dell'ormai celebre Yuval, e regalatogli in occasione del suo sessant'esimo compleanno. Fra molte altre cose, l'episodio conferma come, nel caso di Ne'eman e Gell Mann, il raggiungimento dello stesso risultato si sia giocato, a più riprese, sul 'filo di lana'.

"*Sula and I had heard about this "Israeli Phenomenon" Yuval who had gone to London as military attache to the Israel Embassy and who in his spare time had done a Ph.D. thesis with Abdus Salam at Imperial College on unitary symmetry,* […] *in addition his thesis was on the central topic of the day. Yuval had indipendently arrived at a classification scheme for particles and resonances essentially equivalent to the one Murray Gell-Mann had arrived at and called the 'Eightfold Way'.*

[…] *We had return to Geneva to attend the 1962 "Rochester Conference" which* *was being held at CERN that year to report on our mesurements on* K^+ *interactions as well as K* Δ(1238) double resonance production. As we walked into the conference bus a young Israeli physicist entered and sat down next to us. We soon introduced ourselves and realized that we had finally met Yuval. We immediately asked him about some of the fine points in the "Eightfold Way" and Yuval was very interested to find out the details of our results on* K^+ *interactions, and in particular the fact that – to our chagrin –* K^+ *mesons did not appear to produce hyperon resonances, however hard we tried to find them! Yuval promised to write down for us the main results of the relatively new Eightfold Way, and a few days later when we met again he handed over some of his reprints* […], *but more than that, he had also incorporated our lack of positive strangeness hyperon into the unitary symmetry assignements for the Δ(1238) resonances – this left the 10 group but eliminated the 27 group an otherwise resonable alternate model – and had concluded from this that there must be a tenth member in the family Δ(1238), Y*(1385) and χ*(1530) – which is now known as the delta decouplet. Indeed on tuesday July 10, Murray Gell-Mann, who was also attending the conference and reached the same conclusion indipendently, proposed to the conference in a comment after the Rapporteur talk by George Snow on Strange Particle Physics the starling prediction that there should be a weakly decaying particle with strangeness -3, I=0, J=3/2 and mass about 1685 MeV – the* Ω^-*. This was a very fundamental prediction which sent many Bubble Chamber physicists scurrying home to look for this triply strange particle!* […] *I will however always remember our first encounter on the bus".* (Goldhaber, 1985)

L'assenza di questa risonanza nello scattering K-N fu denominata, in memoria del fatto riportato, il "Goldhaber gap". Per precisione le particelle predette dalla conoscenza della formula di massa e di questo nuovo dato sperimentale, che come accennava Goldhaber confermava l'esistenza del decupletto **10** ed escludeva la rappresentazione **27**, furono due: Ω^- di cui abbiamo parlato, con I = 0 e Y = -2 a circa 1679 MeV, e un'altra particella con I = 1/2 e Y = -1, $\Xi(1532)$. Entrambe avrebbero avuto J = $3/2^+$.

La scoperta di una risonanza con le stesse proprietà di $\Xi(1532)$ fu riportata proprio alla conferenza di Ginevra poco prima che Gell-Mann intervenisse.
Per Ω^-, la cui rivelazione sarebbe stata una grande conferma per il modello della simmetria unitaria, bisogna aspettare l'11 febbraio 1964, data in cui venne pubblicato un articolo del "Brookhaven National Laboratory" che ne annunciava la scoperta tramite l'utilizzo di una camera bolle da 80 pollici (Barnes *et al.*, 1964).

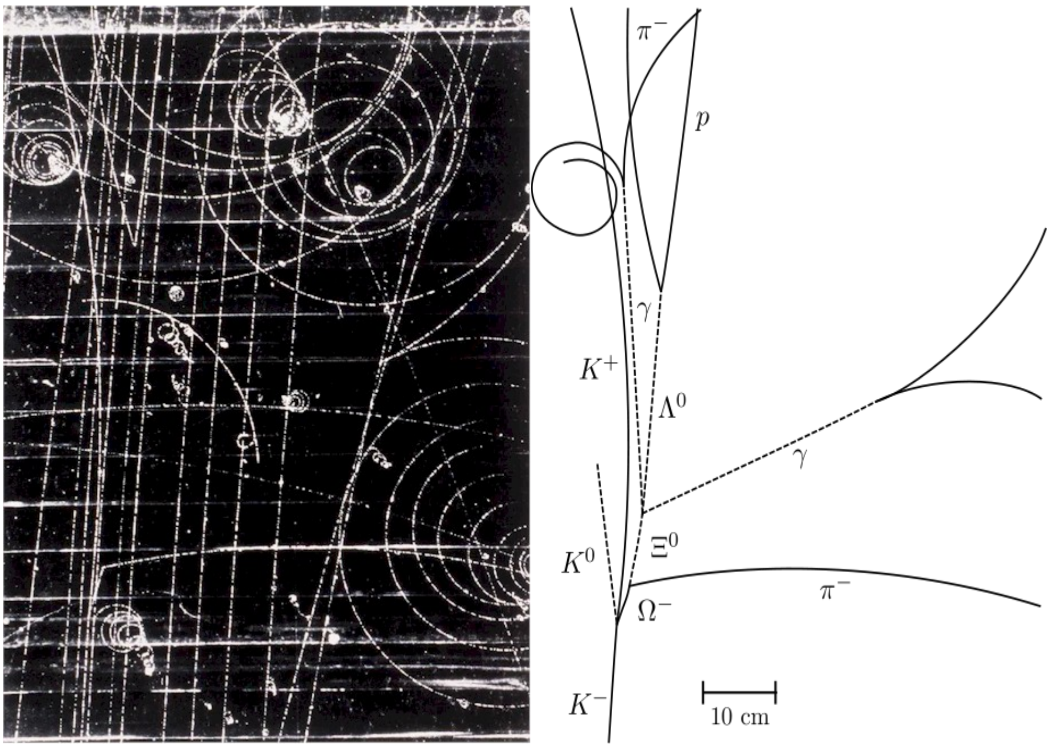


Figura 3.1: evento con proprietà riconducibili al decadimento di Ω^- rivelato al Brookahaven National Laboratory

Oltre che una forte conferma sia dell'Eightfold Way che della formula di massa di Gell-Mann – Okubo, la scoperta di Ω^- ha apportato altri chiarimenti: il primo è la verifica, grazie alla determinazione della massa, che la rottura di simmetria si dovesse imputare a interazioni *medium-strong*. Il secondo riguarda la sua stabilità, che, come afferma Gell-Mann, non può più essere preso come segno inequivocabile per l'elementarietà di una particella:

"*The confirmation of the Ω^- prediction has also laid to rest any lingering notion that there is anything sacred or "elementary" about a baryon or meson to be stable under strong interactions* [...]. *The Ω^- hyperon is metastable, but it belongs to the same supermultiplet as the very broad resonance $\Delta(1238)$, which has always been considered obviously composite. Mere stability is no more a criterion of elementary character for baryon number 0 or 1 than it is for nuclei, which are strongly interacting particles of higher baryon number*" (Gell-Mann, Ne'eman, 1964, p. 86).

2) Predizione del "modello a quark"

Fin dall'inizio della formulazione dell'Eightfold Way era evidente che rimanesse inspiegata l'appartenenza delle particelle a rappresentazioni aggiunte o comunque a dimensione maggiore di quella fondamentale, che ovviamente, parlando di SU(3), sarebbe stata tridimensionale.

Come accennato nel paragrafo 3.1.2, prima ancora delle considerazioni di Ne'eman circa la questione, Fermi e Yang miravano all'identificazione di qualcosa di 'elementare', proponendo nel 1949 che il pione non fosse una particella fondamentale, ma uno stato legato di nucleone-antinucleone. Sviluppi successivi delle idee di Fermi e Yang portavano a indentificare nel set di Sakata (p,n,Λ) i ‘mattoni costituenti’, proprio secondo le regole dettate da una simmetria SU(3).

Nel ‘64 le conferme sperimentali della *simmetria di spin unitario,* che facevano crollare la linea Fermi-Yang, riportavano in auge la questione dell'elementarietà, dato che l'ottuplice via fissava l’appartenenza delle particelle del set di Sakata ad una rappresentazione non fondamentale del gruppo.

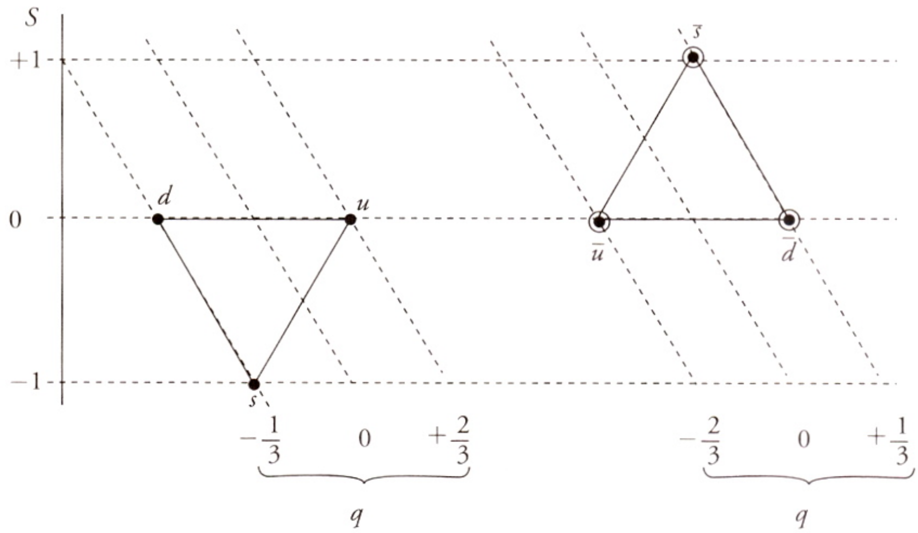
Scrive Gell-Mann, all’inizio dell’articolo in cui analizza le proprietà di quelli che lui stesso chiamò “quark”:

“*If we assume that the strong interactions of baryons and mesons are correctly described in terms of broken ‘eightfold way’, we are tempted to look for some fundamental explanation of the situation*” (Gell-Mann, 1964)

L'idea dell'articolo è che se le rappresentazioni regolari di un gruppo possono essere ottenute da quelle fondamentali tramite il prodotto tensoriale delle stesse (ovvero se “il contenuto della rappresentazione prodotto è, in un senso definito, la somma dei contenuti delle rappresentazioni fattore” (Bergia, 2009). Vedi Appendice A) , allora le proprietà delle eventuali sub-particelle potranno essere derivate dalle proprietà delle particelle 'costituite'.

Ciò era corroborato dalla constatazione che un modello matematico formale basato sulla teoria dei campi poteva essere costruito per i quark esattamente allo stesso modo in cui fu costruito per il set di Sakata.

Uno schema del tripletto e dell’antitripletto fondamentali può essere visualizzato così:



Sulla base di questo schema si può reinterpretare un ottetto mesonico come derivante dal prodotto della rappresentazione fondamentale e della sua coniugata, ottenendo le particelle da coppie *quark-antiquark* (sarebbe necessaria una trattazione formale completa, ma non rientrerebbe negli scopi di questo lavoro).

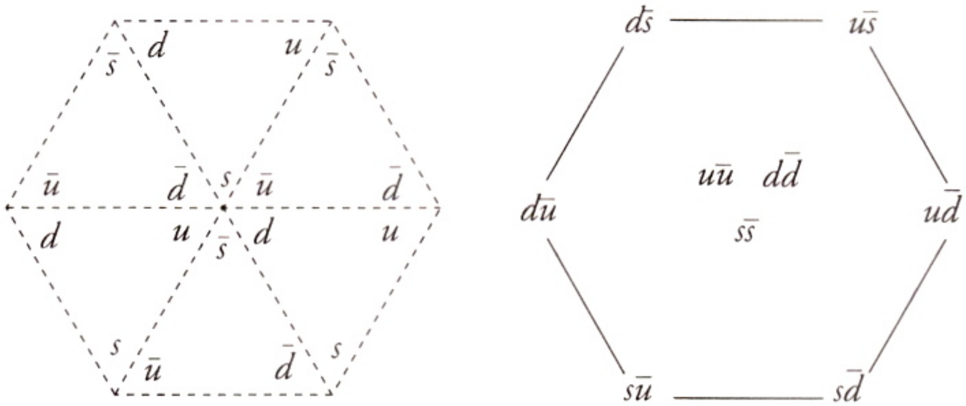


Figura 3.2: Ottetto mesonico composto di coppie di quark-antiquark

I barioni possono invece essere reinterpretati, come mostra la figura sotto, come la composizione di tre *quark*. Avendo i barioni numero barionico pari 1, ciascun *quark* possiede numero barionico pari a 1/3.

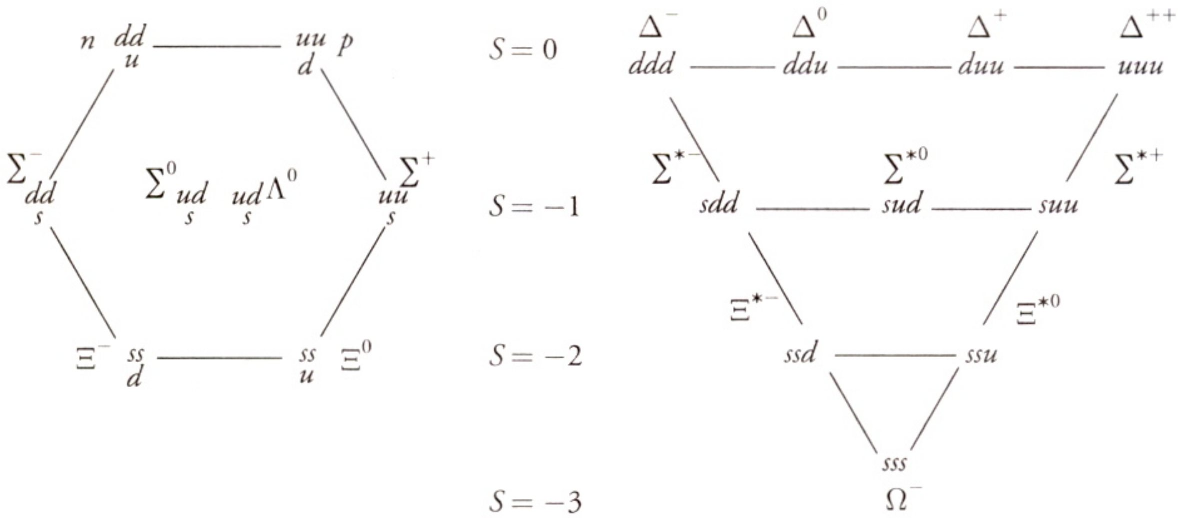


Figura 3.3: ottetto e decupletto barionici composti da quark

Contemporaneamente e indipendentemente da Gell-Mann, anche George Zweig ipotizzò l'esistenza almeno matematica di entità come i quark, che lui chiamava *aces.*

E' piuttosto chiaro che per entrambi la reale esistenza di tali, supposti, nuovi costituenti fondamentali, come particelle stabili, si poteva considerare dubbia.

Da questo punto di vista è interessante la fine del già citato articolo di Gell-Mann:

"*It is fun to speculate about the way quarks would behave if they were physical particles of finite mass (instead of purely mathematical entities as they would be* *in the limit of infinite mass).* [...] *A search for stable quarks of charge -1/3 or +2/3 and\or stable di-quarks of charge -2/3 or +1/3 or +4/3 at the highest energy accelerators would help to reassure us of the non-existence of real quarks"* (Gell-Mann, 1964).

Se era stata proprio una fiducia ritrovata nel 'potere fondante della matematica' a sbloccare la situazione dopo le scoperte degli anni '50, questa stessa veniva in un certo senso inizialmente meno su una questione talmente radicale e sconvolgente come l'esistenza fisica di tali entità fondamentali.
Ma spesso la corrispondenza tra realtà sperimentale e modelli teorici smentisce anche la comprensione degli stessi fisici che ne tracciano le proprietà: fu infatti alla conferenza di Vienna nel 1968 che vennero presentati risultati sperimentali, a nome della Stanford University, che sottolineavano, anche se ancora non in modo chiaro, una struttura sottostante ai protoni (Panofsky, 1968). Si trattava di un fascio di elettroni fino a 50 GeV su protoni, lanciati in un acceleratore lungo circa due miglia; l'esperimento verificava le cosiddette proprietà di *scaling,* per cui a energie basse gli elettroni sono diffusi elasticamente, poco più in profondità anelasticamente e ad energie ancora più alte si torna ad avere una diffusione elastica, questa volta da parte di oggetti contenuti nel protone. Come sottolinea Bergia (Bergia, 2009, p. 179), fu determinante l'intervento di Feynman nella spiegazione del fenomeno, che propose di considerare i protoni come una 'nuvola' di oggetti, che egli stesso definì "partoni", ma che vennero quasi immediatamente identificati con i quark di Gell-Mann.

Conclusioni

Il lavoro di tesi svolto ha portato a interessanti risultati, anche su un piano personale.

L'analisi dettagliata dell'episodio storico di cui la teoria dell'*Eightfold way* è stata l'epifenomeno ha permesso di sviluppare alcune fondamentali riflessioni per una proposta didattica dell'episodio stesso: questa proposta si inserirebbe principalmente in un corso di "Storia della fisica" volto a guidare studenti universitari ad approfondire temi della fisica del XX e XXI secolo, inclusi episodi chiave nella formulazione del Modello Standard. L'episodio scelto è stato analizzato utilizzando come chiave di lettura il peculiare significato che la simmetria assume nella fisica moderna, ovvero quello di principio posto alla base della creazione di teorie fisiche.

La validità di un particolare 'punto di vista' sta nella capacità che ha di esplicazione, sintesi e creazione di nessi; il vero *quid* del lavoro di tesi è stata dunque la verifica della pertinenza, non scontata, della chiave di lettura proposta in riguardo all'episodio della fisica dei primi anni '60. Da un punto di vista didattico, questa lettura ha offerto la possibilità di:

1) valorizzare, e utilizzare come introduzione storica e concettuale, la 'caotica' situazione sperimentale che circoscrive la *zoologia megalomorfa*, chiarendo come il problema sia stato proprio quello della ricerca di una simmetria più ampia e generalizzante;
2) ripercorrere i passi che hanno portato alla proposta definitiva della simmetria di *Spin Unitario* tramite il carattere *normativo* della simmetria, cioè tramite il paragone delle leggi derivate dalle simmetrie proposte (come ad esempio le formule di massa) con le evidenze sperimentali;

3) leggere sinteticamente i risultati della proposta teorica in termini di *classificazione* e *predizione*, ruoli fondamentali caratteristici dell'uso della simmetria nella fisica;
4) inserire l'episodio nel contesto più generale del Modello Standard tramite il carattere *unificante* delle teorie di simmetria.

La prospettiva scelta, dunque, permette di toccare e valorizzare, pur concentrandosi su un singolo episodio, alcuni degli snodi più profondi della teoria del Modello Standard e permette di farlo in modo sintetico e pertinente, per di più appellandosi fondamentalmente a basilari concetti di logica comune.
Anche da un punto di vista personale, la generalità e trasversalità del concetto di simmetria ha portato, oltre che a diverse domande, a una maggior chiarezza su alcuni argomenti già toccati nei corsi della triennale di Fisica e su altri in fase di studio; inoltre ha suscitato anche diverse questioni di natura più filosofica.

Particolarmente illuminante è stato l'approfondimento della capacità *definitoria* della simmetria in relazione al profondo cambiamento che investe la natura dell'oggetto quantistico, le cui proprietà non risultano affatto contingenti, come invece accade negli oggetti macroscopici della meccanica classica.
La capacità della simmetria di definire un oggetto a partire dalle sue proprietà caratteristiche introduce infatti uno stravolgimento gnoseologico e metodologico che personalmente trovo piuttosto stupefacente, e con cui penso che tutti dovrebbero poter fare i conti affrontando lo studio della fisica moderna, sia in modo generale che specifico. Questo mi ha introdotto anche al legame profondo con la teoria delle rappresentazioni, che esprime tutti i modi in cui una simmetria può essere 'realizzata', e con il teorema di Noether, che connette la simmetria alle osservabili misurate sperimentalmente. Una particella può essere definita come 'rappresentazione irriducibile di un gruppo di simmetria' *(a la* Wigner) o come

"*nodo di invarianti*" (Toraldo di Francia, 1978), espressioni del tutto generali e connesse da un legame che sussiste sulla base del teorema di Noether stesso.

In conclusione ritengo che una rilettura di tutto il Modello Standard secondo la chiave descritta avrebbe un grande valore didattico, sia a livello scolastico che universitario, e porterebbe un importante cambiamento di prospettiva nell'approccio generale alla fisica contemporanea.

APPENDICE A

Cenni di Teoria dei Gruppi

Gruppi e rappresentazioni

La teoria dei Gruppi, come accennato, è il formalismo alla base dell'uso delle simmetrie in ambito matematico e fisico. Ne diamo alcune definizioni di base (Soldati, 2013; Grippo, 2008).

- Un **gruppo** è un insieme *G* munito di una *legge di composizione* che ad ogni coppia di elementi *a,* b di *G* associa un terzo elemento appartenente a *G*, e che rispetta le seguenti proprietà:

  1) se $f, g \in G$ allora $h = fg \in G$;
  2) se $f, g, h \in G$, allora $f(gh) = (fg)h \in G$ (proprietà associativa);
  3) esiste l'elemento identità *e* tale che $\forall f \in G,\ ef = fe = f$;
  4) ogni elemento $f \in G$ possiede un inverso f^{-1} tale che $ff^{-1} = f^{-1}f = e$;

Un gruppo si dice ***finito*** se possiede un numero finito di elementi, altrimenti si dice ***infinito***. Il numero di elementi di un gruppo finito *G* si chiama ***ordine*** di *G*. Un gruppo si dice ***abeliano*** se la legge di composizione è commutativa, ovvero se dati $f, g \in G$, risulta $fg = gf$.

- T si dice **rappresentazione** di un gruppo G su uno spazio lineare L, se ad ogni elemento $g \in G$ corrisponde un operatore lineare $T(g)$ che agisce su L, e soddisfa le seguenti proprietà:

  1) $D(e) = \mathbf{I}$, dove $\mathbf{I}$ è l'operatore identità nello spazio L sul quale agiscono gli operatori lineari;
  2) $\forall g_1, g_2 \in G,\ D(g_1)D(g_2) = D(g_1 g_2)$, ovvero la legge di composizione del gruppo è applicata alla legge di moltiplicazione naturale, nello spazio lineare L;
  3) Esiste l'operatore inverso D^{-1} tale che $D^{-1}(g)D(g) = D(g)D^{-1}(g) = 1$;
  4) Vale la relazione $D(g^{-1}) = D^{-1}(g)$.

La ***dimensione*** di una rappresentazione corrisponde alla dimensione dello spazio vettoriale sul quale essa agisce.
Le rappresentazioni, come definito, agiscono su spazi lineari, e si è liberi di realizzare un numero arbitrario di nuove rappresentazioni del gruppo. Preso un qualsiasi operatore lineare invertibile A, che trasformi i vettori di L in vettori di uno spazio L' di uguale dimensione d, e che associ ad ogni elemento $g \in G$ un operatore lineare

$$T_A(g) \ = \ A\, T(g)\, A^{-1} \qquad \forall g \in G,$$

si verifica facilmente che la mappa $T_A(g)$ è una rappresentazione del gruppo G. Le due rappresentazioni $T(g)$ e $T_A(g)$ si diranno dunque ***equivalenti***. Tutte le rappresentazioni equivalenti ad una data, saranno reciprocamente equivalenti. Dunque il problema di classificare tutte le rappresentazioni di un gruppo è ridotto al problema più discreto della ricerca di tutte le rappresentazioni mutuamente non equivalenti.

Rappresentazioni irriducibili

Le rappresentazioni di un gruppo di simmetria hanno un grande valore per l'applicazione a sistemi fisici; esse esprimono infatti tutti i modi di 'realizzare' una data simmetria, o in altre parole rappresentano tutti gli oggetti che soddisfano alla simmetria stessa. In particolare nella fisica microscopica, i multipletti di particelle sono associati a rappresentazioni cosiddette *irriducibili*.

Un sottospazio $L_1 \subseteq L$ si dice ***invariante*** rispetto ad un operatore lineare A se $Al_1 \in L_1, \quad \forall l_1 \in L_1$. Ovviamente L e $\varnothing$ sono essi stessi sottospazi invarianti triviali.

Una rappresentazione T di un gruppo G su uno spazio lineare L si dice ***riducibile*** se in L esiste almeno un sottospazio non triviale L_1 *invariante* sotto l'applicazione di tuti gli operatori $T(g)$ della rappresentazione, $\forall g \in G$; ovvero, se l'azione di ogni operatore $T(g)$ su un qualsiasi vettore nel sottospazio è ancora nel sottospazio.
Una rappresentazione si dice ***irriducibile*** se non è *riducibile*.

Una rappresentazione è ***completamente riducibile*** se è equivalente ad una rappresentazione i cui elementi di matrice hanno la seguente forma, ovvero la forma è una ***matrice diagonale a blocchi***:

$$\begin{pmatrix} T_1(g) & 0 & \cdots \\ 0 & T_2(g) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

in cui $T_i(g)$ è irriducibile $\forall i$.
Una rappresentazione nella forma diagonale a blocchi può esere riscritta come la ***somma diretta*** delle sotto-rappresentazioni $T_i(g)$, ovvero la rappresentazione

originaria può essere ottenuta come una somma diretta delle rappresentazioni irriducibili agenti sui sottospazi vettoriali invarianti $L_i \subseteq L$, tali che

$$L = L_1 \oplus L_2 \oplus L_3 \oplus \ \dots = \bigoplus L_i \qquad\qquad L_i \perp L_k \quad con \quad i \neq k$$

Le rappresentazioni irriducibili si dicono, appunto, ***multipletti***; le rappresentazioni dei gruppi vengono invece chiamate ***supermultipletti***.

Prodotti tensoriali

Abbiamo detto che è possibile scrivere una rappresentazione completamente riducibile come somma diretta di rappresentazioni irriducibili; un'altra possibilità è quella di unire diverse rappresentazioni per ottenerne una più grande.

Supponiamo che T_1 sia una rappresentazione di dimensione m, che agisce su uno spazio il cui vettore di base è $|j\rangle$, e T_2 una rappresentazione di dimensione n, agente su uno spazio con vettore di base $|x\rangle$. Possiamo generare uno spazio di dimensione $m{\times}n$, chiamato ***spazio del prodotto tensoriale***, il cui vettore di base è dato dalla coppia ordinata dei due vettori di base degli spazi originari, ovvero $|j, x\rangle$. Poiché j può assumere valori da 1 a m, e x da 1 a n, la coppia ordinata (j, x) può assumere valori differenti scelti tra le varie combinazioni $m{\times}n$.

La rappresentazione del nuovo spazio, detta ***rappresentazione del prodotto tensoriale***, si ottiene moltiplicando le due rappresentazioni più piccole, $T_1 \otimes T_2$. Gli elementi di matrice di $T_{T_1 \otimes T_2}(g)$ sono il prodotto di quelli di $T_1(g)$ e $T_2(g)$:

$$\langle j, x \mid T_{T_1 \otimes T_2}(g) \mid k, y\rangle \;=\; \langle j|T_1(g)|k\rangle \, \langle x|T_2(g)|y\rangle$$

dove $\langle j|T(g)|k\rangle$ è definito come prodotto scalare in cui l'operatore agisce su entrambi i vettori di base, ovvero è l'elemento di matrice di tale operatore lineare. Si osserva facilmente che essa è una rappresentazione di G e che non è, in generale, irriducibile. È inoltre possibile scomporre rappresentazioni del prodotto tensoriale riducibili in rappresentazioni irriducibili.

APPENDICE B

Spin Isotopico e SU(2)

La simmetria SU(3) di *Spin Unitario* è la diretta generalizzazione della simmetria SU(2) di spin isotopico, introdotta inizialmente da Heisenberg nel 1932 (Heisenberg, 1932). Ne diamo qui una breve trattazione da un punto di vista concettuale e formale (Bergia, 2005; *id*., 2009; Grippo, 2008).

Indipendenza dalla carica elettrica e *isospin*

Il nucleo atomico è composto di neutroni e protoni, che si distinguono tra loro per carica elettrica e per una leggera differenza di massa. Le forze che tengono legati protone e neutrone sono di carattere nucleare; oltre ad essere di intensità molto maggiore, si distinguono dalle interazioni elettromagnetiche per il *range* d'azione: date infatti le evidenze del loro sommario confinamento al raggio nucleare, si dicono essere interazioni a corto *range*. Numerose evidenze sperimentali mostrano inoltre che le forze nucleari risultano essere *indifferenti* alla carica elettrica.

Queste evidenze provengono dall'analisi dei cosidetti *nuclei speculari*, cioè quelle coppie di elementi in cui ciascun nucleo è ottenibile dallo scambio di tutti i protoni e i neutroni dell'altro, e viceversa; un esempio sono i nuclei ${}^3_1H_2$ e ${}^3_2He_2$. Si osserva sperimentalmente che le energie di legame e i livelli energetici di questi nuclei sono molto simili, e diventano identici se si correggono gli effetti coulombiani, ovvero gli effetti di interazione elettromagnetica.

L'uguaglianza dei livelli energetici è segno che le interazioni forti p-p e n-n sono identiche: i due nuclei, infatti, hanno un ugual numero di legami p-n, e differiscono solo per un legame p-p o n-n. L'indipendenza delle forze nucleari dalla carica elettrica si verifica infatti solo nel caso in cui l'interazione p-n sia identica alle altre due; da questo si può ipotizzare che esista una ***simmetria di carica*** delle forze nucleari.
Nei termini di simmetria, dati nel paragrafo 1.2, come *invarianza per trasformazione*, qui si ha un'invarianza della lagrangiana totale del nucleo sotto scambio protone-neutrone.

Fu W. Heisenberg che, nel 1932 (Heisenberg, 1932), per spiegare questa proprietà di simmetria, propose di considerare protone e neutrone come stati specifici di una singola particella degenere, il *nucleone*; i due stati si sarebbero potuti distinguere solo mediante un'interazione elettromagnetica, che è sensibile alla carica elettrica. Questa proposta portava all'introduzione di una quantità conservata nelle interazioni nucleari: lo ***spin isotopico*** (o *isospin*).

L'isospin è descritto dal gruppo di simmetria SU(2), cioè dal gruppo delle matrici unitarie speciali 2x2. Nello *spazio di spin isotopico* esso viene rappresentato da un vettore $\vec{I}$ a tre componenti I_1, I_2, I_3. Gli operatori diagonali sono $\vec{I}^2$ e I_3, con autovalori rispettivamente $I(I+1)$ e I_3; quest'ultimo può assumere i valori da $-I$ a $+I$, quindi ogni stato di isospin è $2I+1$ volte degenere, cioè esistono $2I+1$ stati fisici formanti un multipletto di isospin. Essendo degenere di due stati, il nucleone avrà $I = 1/2$, con componenti $I_3 = +1/2$ per il protone e $I_3 = -1/2$ per il neutrone. In analogia con il formalismo di *spin* i due stati si possono scrivere come vettori a due componenti: $|p\rangle = \binom{1}{0}$ e $|n\rangle = \binom{0}{1}$.
Come sottolinea Bergia (Bergia, 2009), il concetto di indipendenza dalla carica elettrica è stato trasformato, dall'indipendenza delle forze nucleari dalla carica

elettrica, nell'invarianza delle interazioni forti per rotazioni nello spazio di spin isotopico; questo, anche come conseguenza del teorema di Noether, implica la *conservazione della carica di isospin* (essendo infatti l'operatore $\vec{I}^2$ diagonale, il modulo del vettore $\vec{I}$ è invariante per rotazioni). L'aspetto sorprendente di questo cambio di prospettiva è dunque che si è giunti a qualcosa di 'tangibile', la conservazione dello spin isotopico per interazioni forti.

Rappresentazioni di SU(2)

Poiché le proprietà dell'isospin sono analoghe a quelle dello *spin,* possiamo considerare come esempio una particella di spin 1/2. Questa particella può avere il suo spin proiettato *up* o *down* lungo l'asse z. A parte un fattore di fase, questi due stati rimangono invariati sotto una rotazione intorno all'asse z; una rotazione attorno a z di un angolo ϑ trasforma gli stati come segue:

$$\begin{pmatrix} u' \\ d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cos\vartheta & sin\vartheta \\ -sin\vartheta & cos\vartheta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} = U(\vartheta) \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}$$

dove $|u\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $|d\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Perciò otteniamo $|u'\rangle = \begin{pmatrix} cos\vartheta \\ -sin\vartheta \end{pmatrix}$ e $|d'\rangle = \begin{pmatrix} sin\vartheta \\ cos\vartheta \end{pmatrix}$.

Notiamo che la matrice 2x2 $U(\vartheta)$ è unitaria (cioè soddisfa la condizione $U^\dagger U = UU^\dagger = I$), quindi la norma è conservata. Infatti

$$\chi'^\dagger \chi = \chi^\dagger U^\dagger U \chi = \chi^\dagger \chi$$

Generalizzando, consideriamo la trasformazione $\chi' = U\chi$, con U matrice 2x2 unitaria e speciale ($det = 1$). Il gruppo di queste trasformazioni è noto come il gruppo SU(2). La forma generale per U è

$$U = e^{(\frac{1}{2} i\vartheta \hat{n}\cdot\sigma)}$$

dove ϑ misura l'angolo di rotazione attorno all'asse $\hat{\boldsymbol{n}}$ e $\frac{1}{2}\sigma$ sono tre matrici 2x2 $\sigma^1, \sigma^2, \sigma^3$; queste sono i *generatori delle trasformazioni infinitesime*, o anche *generatori algebrici*.

In generale, i generatori algebrici delle trasformazioni del gruppo SU(2) soddisfano la seguente regola di commutazione:

$$[S_i, S_j] = i\,\varepsilon_{ijk}\,S_k$$

Questa è l'*algebra dei generatori di SU(2)*, dove ε_{ijk} sono le *costanti di struttura* del gruppo, definite in modo tale che con *i,j,k* (indici che possono assumere i valori 1,2,3) si intende la somma n di indici ripetuti, e

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 0 & se\ ci\ sono\ due\ indici\ uguali \\ +1 & per\ permutazioni\ pari\ degli\ indici \\ -1 & per\ permutazioni\ dispari\ degli\ indici \end{cases}$$

In generale, per le rappresentazioni N-dimensionali del gruppo, si possono trovare tre matrici NxN S_i che soddisfano all'algebra. I multipletti trasformati da queste matrici saranno le rappresentazioni N-dimensionali di SU(2).

Rappresentazione fondamentale e coniugata

La *rappresentazione fondamentale* di SU(2) è il doppietto

$$\chi = \binom{u}{d}$$

che coincide appunto con gli stati del nucleone. Per questa rappresentazione i generatori algebrici coincidono con le *matrici di Pauli*:

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Queste matrici non commutano tra loro, ma soddisfano l'algebra del gruppo:

$$\left[\frac{1}{2}\sigma_i, \frac{1}{2}\sigma_j\right] = i\ \varepsilon_{ijk}\ \left(\frac{1}{2}\sigma_k\right)$$

La matrice $\frac{1}{2}\sigma_3$ è diagonale, quindi $\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}$ sono gli autostati di questo operatore con autovalori $\begin{pmatrix} +1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}$ rispettivamente:

$$\left(\frac{1}{2}\sigma_3\right) u = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \equiv \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \equiv \frac{1}{2}u$$

$$\left(\frac{1}{2}\sigma_3\right) d = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \equiv \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \equiv -\frac{1}{2}d$$

Se scriviamo gli antinucleoni come $\bar{u}$ e $\bar{d}$, allora rispettivamente gli stati $(\bar{d}, \bar{u})$ hanno $I = \frac{1}{2}$ e $I_3 = \left(+\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$, proprio come doppietto (u, d). Questa nuova rappresentazione è nota come rappresentazione coniugata; convenzionalmente, la dimensione di queste rappresentazioni viene scritta

$$\mathbf{2} \equiv (u, d), \qquad \mathbf{2}^* \equiv (\bar{d}, \bar{u})$$

Per vedere come si trasforma il doppietto della rappresentazione coniugata, applichiamo l'operatore di coniugazione di carica agli stati trasformati. Se il doppietto $\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}$ si trasforma come:

$$u' = cos\vartheta u + sin\vartheta d,\ d' = -sin\vartheta u + cos\vartheta d;$$

applicando la coniugazione di carica si ottiene

$$\bar{u}' = cos\vartheta\bar{u} + sin\vartheta\bar{d},\ \bar{d}' = -sin\vartheta\bar{u} + cos\vartheta\bar{d},$$

quindi $\begin{pmatrix}\bar{d}' \\ \bar{u}'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}cos\vartheta & -sin\vartheta \\ sin\vartheta & cos\vartheta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\bar{d} \\ \bar{u}\end{pmatrix}$. Definendo allora il doppietto di questa rappresentazione come $\begin{pmatrix}\bar{d} \\ -\bar{u}\end{pmatrix}$, riotteniamo la matrice di rotazioni iniziale, e le antiparticelle si trasformano come le particelle della rappresentazione **2.** Per SU(2) quindi le rappresentazioni **2** e **2*** sono equivalenti; al contrario le altre rappresentazioni N e N* non lo sono.

Rappresentazione regolare

La *rappresentazione regolare* è una rappresentazione $N^2 - 1$ dimensionale, cioè con dimensione pari a quella del gruppo stesso. Per i gruppi SU(N) la rappresentazione più semplice sono le $N^2 - 1$ matrici (3 nel caso di SU(2)) NxN hermitiane a traccia nulla che soddisfano all'algebra del gruppo; per la rappresentazione fondamentale erano le matrici di Pauli, per quella regolare possiamo trovare 3 matrici del seguente tipo, scegliendo S_3 diagonale:

$$S_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}, \qquad S_2 = \frac{i}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}, \qquad S_3 = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$$

Considerando l'isospin, i tre autostati sono corrispondenti ai tre stati di carica del mesone π, ovvero π^+, π^0, π^-.

Rottura di SU(2)

L'esattezza di una simmetria è data dalla perfetta commutazione dei generatori del gruppo di simmetria con l'operatore Hamiltoniano H:

$$[H, G_i] = 0, \qquad \forall\, i;$$

se avviene questo la simmetria si può considerare proprietà esatta della natura.
Nel caso dell'isospin i generatori di SU(2) sono le componenti I_i dell'isospin. Dato che in questo caso l'Hamiltoniano dipende dai contributi dell'interazione forte ed elettromagnetica, $H = H_{forte} + H_{em}$, notiamo che

$$[H_{forte}, I_i] = 0, \quad [H_{em}, I_i] \neq 0$$

Nonostante quindi il contributo elettromagnetico sia approssimativamente trascurabile rispetto a quello dell'interazione forte, la simmetria di isospin è rotta dall'interazione elettromagnetica; questa rottura è proprio la causa della leggera differenza di massa osservabile tra protone e neutrone.

Note

CAPITOLO 1

[1] Come esplicita lo stesso Perrault in termini più architettonici, la ‘grandezza’, la ‘forma’, l’‘altezza’ e la ‘situazione’.

[2] Prendiamo per esempio la classe di equivalenza costituita da tutti i quadrati, dove la relazione di equivalenza è del tipo ‘avere la forma di’. Le operazioni di simmetria che lascino invariate le proprietà di questa classe, in breve il gruppo di simmetria del quadrato, sono le rotazioni di 90° e multipli interi di 90° intorno al centro della figura: un quadrato è trasformato da tali operazioni in altri quadrati ad esso equivalenti. Ma si può notare che le proprietà che rimangono invariate non appartengono appunto ad un quadrato specifico, ma alla classe dei quadrati, all’astrazione, al ‘concetto’ di quadrato.

CAPITOLO 2

[1] La predizione di nuove particelle non è avvenuta solo 'via-classificazione' (come in questo caso) ma anche 'via-unificazione', come nel caso della predizione di W in seguito all'unificazione dell'interazione elettromagnetica e debole.

CAPITOLO 3

[1] Inizialmente le nuove particelle furono distribuite in tre classi, a seconda della massa: i *mesoni leggeri,* o *mesoni L* (pione, muone e ogni particella di massa inferiore che fosse stata scoperta in seguito), *mesoni pesanti*, o *mesoni K* (di massa compresa fra quella del pione e quella dei protone), e

iperoni, o *particelle Y* (di massa maggiore a quella del neutrone). Una delle strade principali di Bagnères de Bigorre fu battezzata in seguito come *Avenue de l'Hyperon.*

[2] La conservazione dello spin isotopico è a sua volta violata da un'interazione elettromagnetica; la conservazione della stranezza da un'interazione debole. Solo le conservazioni di numero barionico e carica elettrica sono assolute.

[3] La lagrangiana di Dirac oltre ad un'invarianza U(1) globale, possiede appunto anche un'invarianza SU(2) globale.

[4] Se l'invarianza U(1) globale associa alle particelle una carica elettrica (carica conservata nelle interazioni), SU(2), come abbiamo visto, vi associa una carica "forte", l'isospin (anch'essa conservata, però per interazioni "forti"). Rendere U(1) locale implica la trasformazione della lagrangiana totale di partenza, nella quale compare un campo mediatore, il campo elettromagnetico. Allo stesso modo rendere SU(2) locale dovrebbe trasformare la lagrangiana aggiungendovi un termine corrispondente all'ipotetico campo mediatore delle interazioni forti.

[5] Oggi il gruppo SU(2) non è legato alle interazioni forti, ma alle interazioni deboli. Questo gruppo si compone con U(1) per formare quello che si chiamerà il gruppo elettrodebole [SU(2)xU(1)].

[6] Questo gruppo avrebbe anche provveduto un assegnamento per le cariche e le correnti deboli ed elettromagnetiche come parti di un multipletto della stessa simmetria. Infatti sia le correnti che i bosoni vettori mediatori di Yang-Mills, sarebbero stati assegnati alla rappresentazione *aggiunta* o *regolare* del gruppo G designato.

[7] Un accenno all'algebra di un gruppo, nel caso particolare di SU(2), è dato nell'appendice B.

[8] Quando la simmetria fosse ridotta gli operatori corrispondenti a I e a Y sarebbero comunque conservati, mentre gli altri quattro no.

[9] Il membro dell'ottetto con I=0 e il singoletto (anch'esso con I=0) si

confondono uno con l'altro tanto da rendere quasi impossibile distinguerli (ϕ - ω mixing).

[10] Per gli ottetti mesonici Gell-Mann osserva come sia più naturale applicare questa formula al quadrato delle masse.

[11] La teoria basata su SU(3), come accennato, è nata dal riconoscimento di una sua rottura, ascrivibile principalmente alle differenze di massa nei supermultipletti ipotizzati; è tuttavia interessante notare che la sua formulazione è proceduta fino in fondo senza che si conoscesse la natura dell'interazione colpevole della rottura (a parte quella elettromagnetica che produce differenze di massa di pochi MeV). Si dovrà aspettare il modello a quark per riconoscere nel *quark s*, e in particolare nella sua massa (decisamente più grande di quella di *u* e *d*) l'origine delle discrepanze.

Bibliografia

BARNES V. E. *et al.* (1964), *Observation of a Hyperon with Strangeness Minus Three*, in “Physical Review Letters”, Vol. 12, 204-206

BERGIA S. (2005) *Nuclei e particelle: aspetti di storia della fisica*, Scuola Invernale Associazione Italiana Insegnanti di Fisica (AIF)

ID. (2009), *Relatività e fisica delle particelle elementari*, Carocci editore, Roma.

BERNARDINI C. (1983), *Che cos'è una legge fisica*, Editori riuniti

BERTOZZI E. (2013), *La fisica delle particelle elementari: dai raggi cosmici al modello standard*, Corso di Storia della Fisica A.A. 2012/2013, Università di Bologna

BERTOZZI E, LEVRINI O. (2013), *Symmetry as Conceptual Core of the Standard Model of Physics: actions for Science Education*, sotto revisione in “Symmetry: Culture and Science”, invited talk. in “Symmetry Festival 2013”, Book of Abstracts, p. 277-280, Gyorgy Darvas, Delft, The Netherlands, 2-7 August 2013.

BERTOZZI E., ERCOLESSI E., LEVRINI O. (2013), *Words and formulas in quantum field theory: Disentangling and reassembling the basic concepts for teaching*, Physics Essays 26, 3

BRADING K., CASTELLANI E. (2003), *Symmetries in Physics*, Philosophical Reflections, Cambridge University Press

CASTELLANI E. (2000), *Simmetria e Natura*, Edizioni Laterza, collana “Bibliotaca di Cultura Moderna”

CURIE P. (1894), *Sur la symétrie dans les phénomenès physiques. Symétrie d'un champ électrique et d'un champ magnétique*, in "Journal de Physique, t. III, rist. in *Oeuvres de Pierre Curie*, Gauthier-Villars, Parigi (1908), p. 118-141

DYNKIN E. B. (1957), *Semisimple Subalgebras of Semisimple Lie Algebras*, Ann. Math. Soc. Transl. (Ser. 2), Vol. 6, 111-244

FEYNMAN R.P. (1965), *La legge Fisica*, Boringhieri

GELL-MANN M. (1957), *Model of the Strong Couplings*, in "Physical Review", Vol. 106, 1296-300

ID. (1961), *The Eightfold Way: A Theory of Strong Interaction Symmetry*, California Institute of Technology Synchrotron Laboratory report, in "Eightfold Way", Benjamin, New York (1964)

ID. (1962), *Symmetries of Baryons and Mesons*, in "Physical Review", Vol. 125, 1067-1084

ID. (1964), *A Schematic Model of Baryons and Mesons*, in "Physical letters", Vol. 4, 14-16

GELL-MANN M., NE'EMAN Y. (1964), *Eightfold way*, Benjamin, New York

GOLDHABER G. (1985), *The encounter on the Bus*, in "From SU(3) to Gravity", Cambridge University Press, Cambridge, 103-107

GRIPPO M.T. (2008), *Aspetti del modello a quark*, tesi di laurea, Universistà di Bari.

HEISENBERG W. (1926), *Mehrkörperprobleme und Resonanz in der Quantenmechanik* in "Zeitschrift für Physik", 38, p. 411-426

HEISENBERG W. (1932), *Über den Bau der Atomkerne* I-II-II, in "Zeitschrift für Physik", 77 (p.1-11), 78 (p. 3-4), 80 (9-10)

HILL C.T., LEDERMAN L.M. (2000), *Teaching Symmetry in the Introductory Physics Curriculum*, arXiv

LAGRANGE L.G. (1788), *Mécanique Analytique*, rist. in *Oeuvres de Lagrange*, Gauthiers-Villars, Parigi (1887)

NE'EMAN Y. (1961), *Derivation of Strong Interactions from a gauge Invariance*, in "Nuclear Physics", Vol. 26, 222-229

ID. (1964), *Remarks on the history of strong-interaction symmetries*, in "Eighfold way", Benjamin, New York, p. 2-6

ID. (1989), *The classification and structure of hadrons*, in "Pions to Quarks", Cambridge University Press, Cambridge, 631-638

ID. (1990), *The interplay of symmetry, order and the information in physics and the impact of gauge symmetry on algebraic topology*, in "Symmetry, Culture and Science", Vol. 1, No. 3, 229-255, Budapest

KIRSH Y., NE'EMAN Y. (1986), *Particle hunters*, Cambridge University Press, Cambridge, traduzione della versione originale (1983) Massada, Israele

MILLS R. L., YANG C.N (1954), *Conservation of Isotopic Spin and Isotopic Gauge Invariance*, in "Physical Review", Vol. 96, 191-195

OKUBO S. (1962), *Note on Unitary Symmetry in Strong Interactions*, in "Progress of Theoretical Physics", Kyoto, Vol. 27, 949-966

PANOFSKY W.K.H. (1968), *Electromagnetic interactions: low q^2 electrodynamics; elastic and inelastic electron (and muon) scattering*, International Conference of High Energy Physics, Vienna, SLAC-PUB-502

PERRAULT C. (1683), *Ordonnance des cinq espéces de Colonnes selon la Méthode des Ancien*, Parigi

PICKERING A. (1984), *Constructing Quarks – A Sciological History of Particle Physics*, University of Chicago Press, Oxford.

POPPER K. (1970), *La logica della scoperta scientifica*, Einaudi (Torino), pp. 11-12

RUSSO A. (2000), *Le reti dei fisici*, La Goliardica Pavese, Pavia

SAKURAI J. J. (1959), *A Vector Theory of Strong Interactions*, non pubblicato, citato da Gell-Mann in "Eightfold Way", Benjamin, New York (1964), p. 56, nota 4

ID. (1960), *Theory of Strong Interactions*, in "Annals of Physics", Vol. 11, 1-48

SALAM A., WARD J. C. (1961), *On a gauge Theory of Elementary Interactions*, Nuovo Cimento, Vol. 19, 165-70

SCHWINGER J. (1957), *A Theory of the Fundamental Interactions*, in "Annals of Physics" (N.Y.), Vol.2, 407-34

SOLDATI R. (2013), *Introduction to Quantum Field Theory*, dispense per il corso "Teoria dei campi 1", laurea magistrale in Fisica, Università di Bologna

TIOMNO J. (1957), *On the theory of Hyperons and K-Mesons*, Nuovo Cimento, Vol. 6, 69-83

TORALDO DI FRANCIA G. (1978), *What is a physical object?*, in "Scientia", n. 113, pp. 57-65

UTIYAMA R. (1956), *Invariant Theoretical Interpretation of Interaction*, in "Physical Review", Vol. 101, 1597-667

VAN DER VEEN J. (2012), *Draw your physics homework? Art as a path to understanding in Physics Teaching*, in "American Educational Research Journal", Vol. 49, No. 2, 356–407

ID. (2013), *Symmetry as Thematic Approach to Physics Education*, in "Symmetry: Culture and Science", Vol. 24, Nos. 1-4, 463

WEYL H. (1952), *Symmetry*, Princeton University Press

WIGNER E.P. (1967), *Symmetries And Reflections*, Indiana University Press (Bloomington & London)

YUKAWA H. (1935), *On the Interaction of Elementary Particles*, in "Progress of Theoretical Physics", Vol. 17, 48-57