

**ALMA MATER STUDIORUM  
UNIVERSITA' DI BOLOGNA**

SCUOLA DI INGEGNERIA E ARCHITETTURA

- Sede di Forlì -

*CORSO DI LAUREA MAGISTRALE*

in INGEGNERIA AEROSPAZIALE

Classe LM-20

TESI DI LAUREA

In Elaborazione dati per la navigazione

Ricostruzione istantanea delle traiettorie dei velivoli mediante  
filtraggio *Unscented* dei dati ADS-B

CANDIDATO

Viola Menini

RELATORE

Prof. Matteo Zanzi

Anno Accademico 2012/2013

Sessione I



# Indice

<b>1</b>	<b>Introduzione</b>	<b>11</b>
<b>2</b>	<b>Progetto T-Recs</b>	<b>13</b>
<b>3</b>	<b>Filtraggio ricorsivo non lineare</b>	<b>21</b>
3.1	Filtro di Kalman per sistemi lineari . . . . .	24
3.2	Stima ottima ricorsiva . . . . .	28
3.3	<i>Extended Kalman Filter</i> (EKF) . . . . .	30
3.3.1	Algoritmo EKF . . . . .	32
3.3.2	Algoritmo EKF specializzato per i modelli con rumori additivi e privo di ingressi . . . . .	35
3.4	<i>Scaled Unscented Kalman Filter</i> (SUKF) . . . . .	37
3.4.1	<i>Unscented Trasformation</i> e <i>Scaled Unscented Trasformation</i> . . .	37
3.4.2	Algoritmo SUKF . . . . .	43
3.4.3	Algoritmo SUKF specializzato per i modelli con rumori additivi e privo di ingressi . . . . .	48
3.5	Confronto fra le prestazioni dei filtri non lineari . . . . .	51
<b>4</b>	<b>Validazione dello SUKF attraverso i dati simulati</b>	<b>57</b>
4.1	Modello dinamico della quota . . . . .	59
4.1.1	Simulatore del modello della quota . . . . .	61
4.1.2	Applicazione dello SUKF al modello della quota . . . . .	62
4.2	Modello dinamico del velivolo in volo . . . . .	67
4.2.1	Simulatore del modello del velivolo in volo . . . . .	70
4.2.2	Applicazione dello SUKF al modello del velivolo in volo . . . . .	72

4.2.3	Utilizzo delle misure di velocità per la stima SUKF dello stato del velivolo in volo . . . . .	77
4.3	Modello dinamico del velivolo a terra . . . . .	78
4.3.1	Simulatore del modello del velivolo a terra . . . . .	81
4.3.2	Applicazione dello SUKF al modello del velivolo a terra . . . . .	82
4.3.3	Utilizzo delle misure di velocità per la stima SUKF dello stato del velivolo a terra . . . . .	86
<b>5</b>	<b>Validazione dello SUKF attraverso i dati ADS-B</b>	<b>89</b>
5.1	Applicazione di SUKF ed EKF al modello della quota . . . . .	91
5.2	Applicazione di SUKF ed EKF al modello del velivolo in volo . . . . .	94
5.3	Applicazione di SUKF ed EKF al modello del velivolo a terra . . . . .	104
<b>6</b>	<b>Conclusioni e sviluppi futuri</b>	<b>115</b>
<b>A</b>	<b>Il parametro di scala <math>p</math> e la regolazione degli ordini più elevati</b>	<b>119</b>
<b>B</b>	<b>Accuratezza della SUT</b>	<b>121</b>
<b>C</b>	<b>L'Elissoide WGS84 e i sistemi di riferimento utilizzati</b>	<b>125</b>
<b>D</b>	<b>Tabelle dei dati simulati e sperimentali</b>	<b>131</b>
<b>E</b>	<b>Grafici dei dati simulati e sperimentali</b>	<b>137</b>

# Elenco delle figure

2.1	Schema della <i>Ground Station</i> T-Recs . . . . .	14
2.2	Geometria del problema in volo rettilineo uniforme (a) e in virata (b) [1] . . . . .	17
2.3	Architettura generale SW T-Recs [1] . . . . .	19
3.1	Schema del problema del filtraggio risolto con il KF . . . . .	27
3.2	Schema di funzionamento dell' <i>Extended Kalman Filter</i> . . . . .	34
3.3	Trasformazione <i>Unscented</i> . . . . .	42
3.4	Schema di funzionamento dello <i>Scaled Unscented Kalman Filter</i> . . . . .	47
3.5	Moto di un veicolo lungo una traiettoria curva . . . . .	52
3.6	Confronto degli approcci <i>sigma-point</i> e EKF in un caso 2D . . . . .	54
3.7	Analisi delle prestazioni dell'SUKF al variare del parametro $\beta$ . . . . .	56
4.1	Modello lineare discreto della quota . . . . .	61
4.2	Valori stimati di quota nel caso di $\sigma_{V_z}^2 = 0,004$ e $flag = 1$ . . . . .	64
4.3	Valori stimati di velocità verticale nel caso di $\sigma_{V_z}^2 = 0,004$ e $flag = 1$ . . . . .	64
4.4	Errori di quota e velocità verticale nel caso di $\sigma_{V_z}^2 = 0,004$ e $flag = 1$ . . . . .	65
4.5	Errori di velocità verticale nel caso di $\sigma_{V_z}^2 = 0,004$ e $flag = 1$ . . . . .	65
4.6	Valori stimati di quota nel caso di $\sigma_{V_z}^2 = 0,004$ e $flag = 101$ . . . . .	66
4.7	Valori stimati di velocità verticale nel caso di $\sigma_{V_z}^2 = 0,004$ e $flag = 101$ . . . . .	66
4.8	Modello non lineare discreto della dinamica del velivolo in volo . . . . .	70
4.9	Valori stimati di traiettoria nel caso di $\sigma_V^2 = 2,5 * 10^{-4}$ , $\sigma_\Omega^2 = 10^{-7}$ e $flag = 1$ . . . . .	74
4.10	Valori stimati di $\varphi$ nel caso di $\sigma_V^2 = 2,5 * 10^{-4}$ , $\sigma_\Omega^2 = 10^{-7}$ e $flag = 1$ . . . . .	74
4.11	Errori di traiettoria nel caso di $\sigma_V^2 = 2,5 * 10^{-4}$ , $\sigma_\Omega^2 = 10^{-7}$ e $flag = 1$ . . . . .	75
4.12	Errori di $\varphi$ nel caso di $\sigma_V^2 = 2,5 * 10^{-4}$ , $\sigma_\Omega^2 = 10^{-7}$ e $flag = 1$ . . . . .	75
4.13	Valori stimati di traiettoria nel caso di $\sigma_V^2 = 2,5 * 10^{-4}$ , $\sigma_\Omega^2 = 10^{-7}$ e $flag = 101$ . . . . .	76

4.14	Valori stimati di traiettoria nel caso di $\sigma_V^2 = 2,5 * 10^{-4}$ , $\sigma_\Omega^2 = 10^{-7}$ e $flag = 101$	76
4.15	Modello non lineare discreto della dinamica del velivolo a terra . . . . .	80
4.16	Valori stimati di traiettoria nel caso di $\sigma_{V_N}^2 = \sigma_{V_E}^2 = 0,625$ e $flag = 1$ . . . . .	83
4.17	Valori stimati della velocità <i>Nord</i> nel caso di $\sigma_{V_N}^2 = \sigma_{V_E}^2 = 0,625$ e $flag = 1$ . . . . .	84
4.18	Errore di traiettoria nel caso di $\sigma_{V_N}^2 = \sigma_{V_E}^2 = 0,625$ e $flag = 1$ . . . . .	84
4.19	Errore di velocità <i>Nord</i> nel caso di $\sigma_{V_N}^2 = \sigma_{V_E}^2 = 0,625$ e $flag = 1$ . . . . .	85
4.20	Valori stimati di traiettoria nel caso di $\sigma_{V_N}^2 = \sigma_{V_E}^2 = 0,625$ e $flag = 101$ . . . . .	85
4.21	Valori stimati della velocità <i>Nord</i> nel caso di $\sigma_{V_N}^2 = \sigma_{V_E}^2 = 0,625$ e $flag = 101$ . . . . .	86
5.1	Schema di flusso dell' algoritmo implementato . . . . .	90
5.2	Valori stimati di quota nel caso di $\sigma_{V_z}^2 = 4$ . . . . .	92
5.3	Valori stimati di velocità verticale nel caso di $\sigma_{V_z}^2 = 4$ . . . . .	93
5.4	Confronto fra gli errori di stima di quota dei filtri nel caso di $\sigma_{V_z}^2 = 4$ . . . . .	93
5.5	Valori stimati di traiettoria nel caso di $\sigma_V^2 = 0,25$ e $\sigma_\Omega^2 = 10^{-4}$ . . . . .	97
5.6	Valori stimati di $\varphi$ nel caso di $\sigma_V^2 = 0,25$ e $\sigma_\Omega^2 = 10^{-4}$ . . . . .	97
5.7	Confronto fra gli errori di stima di traiettoria nel caso di $\sigma_V^2 = 0,25$ e $\sigma_\Omega^2 = 10^{-4}$ . . . . .	98
5.8	Differenze fra i valori di $\varphi$ stimati dai due filtri nel caso di $\sigma_V^2 = 0,25$ e $\sigma_\Omega^2 = 10^{-4}$ . . . . .	98
5.9	Valori stimati di traiettoria scelte $\sigma_V^2 = 250$ e $\sigma_\Omega^2 = 0,1$ per la virata . . . . .	100
5.10	Valori stimati di $\varphi$ scelte $\sigma_V^2 = 250$ e $\sigma_\Omega^2 = 0,1$ per la virata . . . . .	101
5.11	Confronto fra gli errori di stima della traiettoria scelte $\sigma_V^2 = 250$ e $\sigma_\Omega^2 = 0,1$ per la virata . . . . .	101
5.12	Differenza fra i valori stimati di $\varphi$ scelte $\sigma_V^2 = 250$ e $\sigma_\Omega^2 = 0,1$ per la virata . . . . .	102
5.13	Valori stimati di $\varphi$ ottenuti con i filtri a quattro misure, scelta $\sigma_V^2 = 250$ e $\sigma_\Omega^2 = 0,1$ per la virata . . . . .	103
5.14	Valori stimati di traiettoria caso di $\sigma_{V_N}^2 = \sigma_{V_E}^2 = 0,625$ . . . . .	108
5.15	Valori stimati di traiettoria nel caso di $\sigma_{V_N}^2 = \sigma_{V_E}^2 = 12,5$ . . . . .	108
5.16	Valori stimati della velocità in direzione <i>Nord</i> nel caso di $\sigma_{V_N}^2 = \sigma_{V_E}^2 = 0,625$ . . . . .	109
5.17	Valori stimati della velocità in direzione <i>Nord</i> nel caso di $\sigma_{V_N}^2 = \sigma_{V_E}^2 = 12,5$ . . . . .	109
5.18	Valori stimati della velocità in direzione <i>Est</i> nel caso di $\sigma_{V_N}^2 = \sigma_{V_E}^2 = 0,625$ . . . . .	110
5.19	Valori stimati della velocità in direzione <i>Est</i> nel caso di $\sigma_{V_N}^2 = \sigma_{V_E}^2 = 12,5$ . . . . .	110
5.20	Traiettorie stimate dai filtri a quattro misure nei casi di $\sigma_{V_N}^2 = \sigma_{V_E}^2 = 0,625$ . . . . .	113
5.21	Traiettorie stimate dai filtri a quattro misure nei casi di $\sigma_{V_N}^2 = \sigma_{V_E}^2 = 625$ . . . . .	113
C.1	Parametri dell' ellissoide di rotazione . . . . .	126

C.2	Sistemi di riferimento geodetico ed ECEF . . . . .	127
C.3	Sistemi di riferimento NED e <i>Body</i> e gli angoli di Eulero . . . . .	128
E.1	Valori stimati e relativi errori di $\psi$ e $V$ in caso di $\sigma_V^2 = 2,5 * 10^{-4}$ , $\sigma_\Omega^2 = 10^{-7}$ , $flag = 1$ e dati simulati . . . . .	137
E.2	Valori stimati e relativi errori di $\Omega$ in caso di $\sigma_V^2 = 5 * 10^{-4}$ , $\sigma_\Omega^2 = 10^{-5}$ e $flag = 1$	138
E.3	Valori stimati e relativi errori della $V_E$ nel caso di $\sigma_{V_N}^2 = \sigma_{V_E}^2 = 0,625$ , $flag = 1$ e dati simulati . . . . .	138
E.4	Differenze fra i valori di quota e velocità verticali stimati dai due filtri nel caso di $\sigma_{V_z}^2 = 4$ e dati ADS-B sperimentali . . . . .	138
E.5	Valori stimati ed errori di $\psi$ e $V$ nel caso di $\sigma_V^2 = 0,25$ , $\sigma_\Omega^2 = 10^{-4}$ e dati ADS-B sperimentali . . . . .	139
E.6	Valori stimati e differenze fra i valori di $\Omega$ stimati dai due filtri nel caso di $\sigma_V^2 =$ $0,25$ , $\sigma_\Omega^2 = 10^{-4}$ e dati ADS-B sperimentali . . . . .	139
E.7	Valori stimati di $\psi$ e $V$ scelte $\sigma_V^2 = 250$ e $\sigma_\Omega^2 = 0,1$ per la virata e dati ADS-B sperimentali . . . . .	140
E.8	Differenze fra i valori di traiettoria e $\psi$ stimati dai due filtri nel caso di $\sigma_V^2 = 0,25$ , $\sigma_\Omega^2 = 10^{-4}$ e dati ADS-B sperimentali . . . . .	141
E.9	Differenze fra i valori di traiettoria e $\psi$ stimati dai due filtri nel caso di $\sigma_V^2 = 250$ , $\sigma_\Omega^2 = 0,1$ e dati ADS-B sperimentali . . . . .	141
E.10	Valori stimati di traiettoria nel tratto di virata scelte $\sigma_V^2 = 1250$ , $\sigma_\Omega^2 = 0,5$ e $\sigma_V^2 =$ $2,5 * 10^3$ , $\sigma_\Omega^2 = 1$ per la virata e dati ADS-B sperimentali . . . . .	141
E.11	Confronto fra gli errori di stima di traiettoria e $V_N$ nel caso di $\sigma_{V_N}^2 = \sigma_{V_E}^2 = 0,625$ e di $\sigma_{V_N}^2 = \sigma_{V_E}^2 = 12,5$ e dati ADS-B sperimentali . . . . .	142
E.12	Differenze fra i valori di traiettoria e velocità stimati dai due filtri nel caso di $\sigma_{V_N}^2 = \sigma_{V_E}^2 = 0,625$ e di $\sigma_{V_N}^2 = \sigma_{V_E}^2 = 12,5$ e dati ADS-B sperimentali . . . . .	143



# Elenco delle tabelle

4.1	Condizioni iniziali di simulazione del modello dinamico del velivolo in volo . . .	71
4.2	Condizioni iniziali di simulazione del modello dinamico del velivolo a terra . . .	81
5.1	Condizioni iniziali di filtraggio dello stato del velivolo in volo . . . . .	95
5.2	Errori di stima dei filtri nel caso di <i>tuning</i> differenziato delle due fasi di volo . .	99
5.3	Confronto fra le stime dei filtri nel caso di <i>tuning</i> differenziato delle due fasi di volo	100
5.4	Errori di stima della velocità ottenute con i filtri a quattro misure e con <i>tuning</i> differenziato . . . . .	103
5.5	Condizioni iniziali di filtraggio dello stato del velivolo a terra . . . . .	105
5.6	Errori di stima dei filtri nel caso di $\sigma_{V_N}^2 = \sigma_{V_E}^2 = 0,625$ . . . . .	107
5.7	Errori di stima dei filtri nel caso di $\sigma_{V_N}^2 = \sigma_{V_E}^2 = 12,5$ . . . . .	107
5.8	Confronto fra le stime dei filtri nei casi di $\sigma_{V_N}^2 = \sigma_{V_E}^2 = 0,625$ e di $\sigma_{V_N}^2 = \sigma_{V_E}^2 = 12,5$	107
5.9	Errori di stima dei filtri a quattro misure nel caso di $\sigma_{V_N}^2 = \sigma_{V_E}^2 = 0,625$ . . . .	111
5.10	Confronto fra le stime dei filtri a quattro misure nei casi di $\sigma_{V_N}^2 = \sigma_{V_E}^2 = 0,625$ e di $\sigma_{V_N}^2 = \sigma_{V_E}^2 = 625$ . . . . .	112
D.1	<i>Tuning</i> dello SUKF per la dinamica della quota testato con i dati simulati . . . .	131
D.2	Scelta dei parametri di scala dello SUKF per la dinamica del velivolo in volo testato con i dati simulati . . . . .	132
D.3	<i>Tuning</i> dello SUKF per la dinamica del velivolo in volo testato con i dati simulati	132
D.4	Scelta dei parametri di scala dello SUKF per la dinamica del velivolo a terra testato con i dati simulati . . . . .	133
D.5	<i>Tuning</i> dello SUKF per la dinamica del velivolo a terra testato con i dati simulati	133
D.6	<i>Tuning</i> dei filtri per la dinamica della quota testati con le misure ADS-B . . . .	133

D.7	<i>Tuning</i> dei filtri per la dinamica del velivolo in volo testati con le misure ADS-B sperimentali . . . . .	134
D.8	<i>Tuning</i> dei filtri per la dinamica del velivolo a terra testati con le misure ADS-B sperimentali . . . . .	135
D.9	<i>Tuning</i> dei filtri a quattro misure per la dinamica del velivolo a terra testati con le misure ADS-B sperimentali . . . . .	136

# Capitolo 1

## Introduzione

Gli algoritmi sviluppati in questa tesi si inseriscono nell'ambito del progetto T-Recs, *Trac Report with Enhanced Control of Airport Surface*, che il Laboratorio LASIM ha finalizzato alla ricostruzione in tempo reale delle traiettorie dei velivoli mediante la tecnologia ADS-B (*Automatic Dependent Surveillance -Broadcast*).

Lo scopo è quello di fornire istantaneamente ai controllori ATC (*Air Traffic Control*) la corretta conoscenza del traffico aeroportuale, necessaria per garantire le separazioni di sicurezza fra gli aeromobili e l'ottimizzazione delle operazioni di gate. E' stata per questo realizzata una *Ground Station* che, elaborando i dati di posizione ADS-B modo-S provenienti dai trasponder dei velivoli in fase di avvicinamento mediante un *software* chiamato Merlino, è in grado di stimare e predire lo stato del sistema e l'angolo di banco assunto da questi in virata.

L'oggetto della tesi è il progetto del filtro per la ricostruzione della traiettoria presente in Merlino. Questo algoritmo risolve i problemi legati alla ricostruzione della traiettoria, ovvero alla discontinuità con la quale vengono forniti i dati su cui si basa la ricostruzione e all'imprecisione di questi. Tra gli errori di cui sono affetti i dati ADS-B vi sono quelli atmosferici che vengono rimossi, una volta stimati a partire dall'angolo di banco calcolato e dalle informazioni provenienti da una stazione GPS di terra.

In sintesi il problema della ricostruzione della traiettoria si riconduce a un problema di filtraggio dei modelli non lineari del moto del velivolo in volo e a terra. Risulta per questo necessario usare all'interno di Merlino uno stimatore in grado di approcciarsi alla non linearità come l'*Extended Kalman Filter* (EKF), già testato dal Laboratorio LASIM, e

l'*Unscented Kalman Filter* di cui nella tesi è stata sviluppata la versione *Scaled* e il cui acronimo è SUKF. L'obiettivo è quello di verificare un miglioramento della precisione della stima, dimostrato a livello teorico, anche in presenza di variabili *random* con distribuzione di probabilità non gaussiana, ma solo approssimata a tale. Inoltre, attraverso un accurato confronto fra i filtri, si vuole poter scegliere quello più performante anche in termini computazionali.

In una prima fase d'analisi sono stati simulati, utilizzando l'ambiente *Simulink* di *Matlab*, i modelli dinamici del velivolo che, una volta impostate le condizioni iniziali e le varianze dei rumori, hanno fornito i dati rumorosi con cui testare il filtro e quelli corretti con cui confrontare le stime da esso prodotte. Dapprima quindi si è verificato che effettivamente, noti gli errori simulati e scelti i corretti parametri di scala e i coefficienti moltiplicativi di *tuning*, lo SUKF fosse performante nello stimare lo stato di entrambi i modelli. Successivamente lo si è adattato all'elaborazione delle misure ADS-B, relative sia alla fase di volo che di terra, registrate durante sperimentazioni effettuate all'Aeroporto L. Ridolfi di Forlì. In questa fase la scelta dei parametri di *tuning* è stata più complessa a causa dell'entità sconosciuta dei reali rumori in ingresso e delle inesattezze del modello nel rispecchiare il reale comportamento del velivolo. Un ulteriore problema è stata la diversificazione del tipo di moto che, nel caso del velivolo in volo, ha reso necessario differenziare le varianze dei rumori di processo. Diversamente dai *tests* con i dati simulati, nel caso reale non si è in possesso di un riferimento corretto con cui confrontare le stime e valutare le prestazioni del filtro attraverso l'errore che produce; per questo i risultati sono stati confrontati con quelli ottenuti applicando un EKF. Questa analisi ha permesso di verificare che le stime dei due filtri non discostassero eccessivamente, oltre che dalle misure ADS-B, anche le une dalle altre e di paragonare le forme delle traiettorie prodotte alla luce delle dinamiche reali dei velivoli.

# Capitolo 2

## Progetto T-Recs

Il progetto T-Recs, *Trac Report with Enhanced Control of Airport Surface*, per la ricostruzione a terra e in tempo reale delle traiettorie dei velivoli, si inserisce nell'ambito della sorveglianza del traffico aereo. Infatti la corretta conoscenza della posizione dei velivoli è necessaria per garantire, soprattutto nella zona del sedime aeroportuale, le separazioni di sicurezza fra gli aeromobili e l'efficienza in termini di ottimizzazione delle operazioni di *gate*. A tale scopo il Laboratorio LASIM ha costruito una *Ground Station* in grado di ricevere da un'antenna ADS-B i dati di posizione dei velivoli con cui, dopo opportune correzioni, è possibile ricostruire le traiettorie.

Secondo la definizione dell'*International Civil Aviation Organization* (ICAO), l'ADS-B (*Automatic Dependent Surveillance -Broadcast*) è:

*“a surveillance application transmitting parameters, such as position, track and ground speed, via a broadcast mode data link, and at specified intervals, for utilization by any air and/or ground users requiring it”*

Questa tecnologia di sorveglianza è *dipendente*, perchè i dati inviati a terra provengono dall'integrazione di quelli GPS (*Global Positioning System*) e quelli ottenuti con i sistemi inerziali di bordo; *automatica*, ovvero avviene senza intervento dei piloti o dei controllori a terra; mentre il termine *broadcast* indica che i messaggi vengono trasmessi a qualsiasi stazione di terra ADS-B in grado di riceverli. Questa tecnologia necessita di un *transponder* di bordo *Extender Squitter* (ES) che possa inviare, alla frequenza adibita alle comunicazioni bordo-terra (*1090 MHz*), i dati identificativi e cinematici del velivolo sotto forma

di messaggi *Modo-S*<sup>1</sup>; inoltre deve avere una *Ground Station*, quale quella *T-Recs*, che oltre alla ricezione provveda alla loro correzione ed elaborazione. L'intento è quello di visualizzare la traiettoria dei velivoli sulla postazione di controllo ATM (*Air Traffic Management*) in modo da aumentare la *situation awarness* del controllore e, così facendo, apportare benefici alla *safety* del sistema ATC (*Air Traffic Control*) [2].

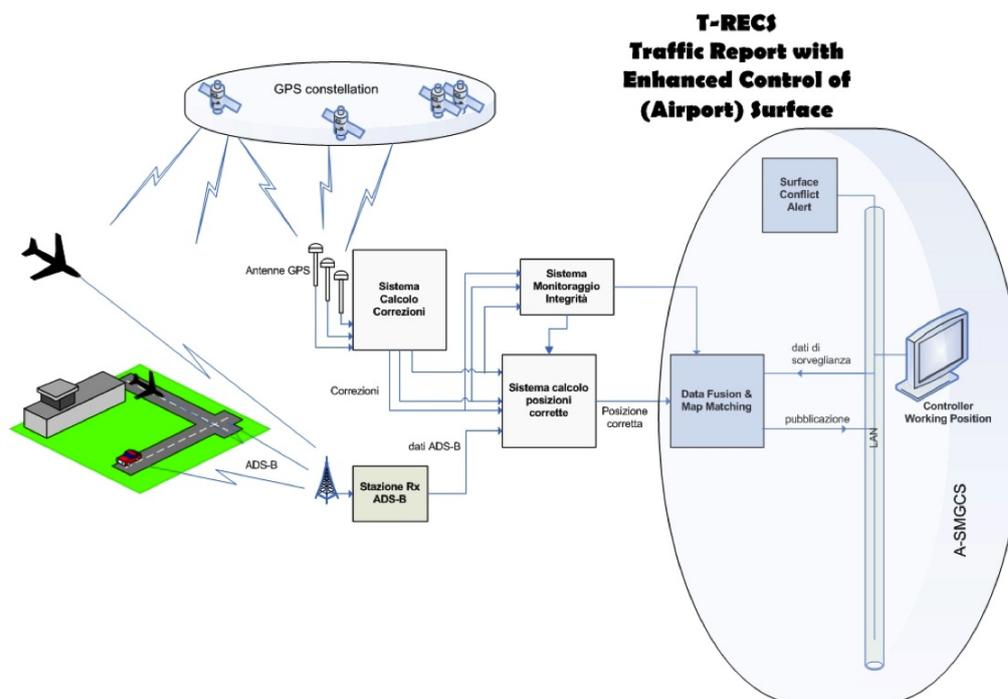


Figura 2.1: Schema della Ground Station T-Recs

I problemi nella ricostruzione della traiettoria dei velivoli derivano dall'utilizzo di dati ADS-B che sono discontinui (ovvero sono presenti frequenti "buchi di segnale") e affetti da rilevanti errori tra cui quelli atmosferici, ionosferici e troposferici. Nella ionosfera sono presenti ioni liberi, frutto della ionizzazione dei gas atmosferici da parte della radiazione solare, che incurvano il cammino e rallentano la propagazione delle onde elettromagnetiche. Il fenomeno di rifrazione considerato non è stimabile in modo definitivo perchè varia in funzione della latitudine, della posizione ricevitore-satellite, del ciclo solare, stagionale

<sup>1</sup> Il *Modo-S* (dove S indica *Selective*) è quel modo operativo del sistema radar di terra che instaura un collegamento selettivo con gli aeromobili dotati di *transponder*. La selettività permette di instaurare un vero e proprio collegamento dati tra l'aeromobile e la stazione di terra; ciò consente la comunicazione di una maggiore quantità di informazioni utili e riduce l'affollamento del canale.

e giornaliero. Per questo motivo una stazione GPS di terra quantifica i disturbi atmosferici di volta in volta sulla base di modelli empirici esistenti in letteratura (i parametri necessari vengono trasmessi dal satellite nel messaggio di navigazione). Anche la troposfera introduce errori di rifrazione indipendenti dalla frequenza e di piccola entità; ancora una volta per correggerli vengono utilizzati modelli che elaborano i dati meteorologici di temperatura, pressione e umidità misurati a terra e l'angolo di elevazione del satellite [3]. La stima di entrambi i disturbi atmosferici viene fatta su ogni singola pseudodistanza utente-satellite, tuttavia l'influenza degli errori delle pseudo-distanze sull'errore di posizione dell'utente è in funzione della geometria e del numero dei satelliti utilizzati per determinarla. Per questo motivo è necessario individuare i soli satelliti visibili dal ricevitore di bordo che, se il velivolo è in virata, possono non coincidere con quelli visti dalla stazione GPS. A dimostrazione di ciò si consideri dapprima il caso in cui il velivolo sia in volo rettilineo uniforme nell'area di avvicinamento aeroportuale; questa ha un'estensione di circa 30km e la quota assunta dai velivoli non supera i 10km. La condizione è quella rappresentata in Figura 2.2(a) dove:

- $D_A$  e  $D_B$  sono le distanze del satellite  $i$ -esimo rispettivamente dal velivolo e dalla stazione di terra
- $L$  è la distanza orizzontale fra il velivolo e la GBAS (*Ground Station*)
- $h$  è la quota dell'aeromobile
- $\alpha$  e  $\beta$  sono gli angoli di vista fra la stazione di terra e il satellite  $i$ -esimo

La geometria del problema porta alla seguente relazione:

$$D_A \cos(\beta) = L + D_B \cos(\alpha) \tag{2.1}$$

$$\cos(\alpha) = \frac{D_A}{D_B} \cos(\beta) - \frac{L}{D_B}$$

Poichè la distanza  $L$  è molto minore rispetto alla quota del satellite (circa 20190km) i rapporti presenti nella (2.1) si possono approssimare con

$$\frac{D_A}{D_B} \approx 1 \quad \frac{L}{D_B} \approx 0 \tag{2.2}$$

Sotto queste ipotesi le elevazioni dei satelliti visti dall'aeromobile risultano le stesse della stazione di terra poichè:

$$\cos(\alpha) \approx \cos(\beta) \quad (2.3)$$

Da ciò ne consegue che i satelliti in vista al velivolo, in prossimità dell'aeroporto e in volo rettilineo uniforme, sono gli stessi visti dalla GBAS; questa relazione, facendo considerazioni simili, vale anche per l'angolo di *azimuth*.

Al contrario in virata coordinata, come si può vedere in Figura 2.2(b), l'aeromobile può vedere un numero minore di satelliti a causa dell'angolo di banco che assume per la manovra:

$$\varphi = \arctan\left(\frac{V \cdot \Omega}{g}\right) \quad (2.4)$$

Per determinare i satelliti in vista al velivolo bisogna quindi stimare la velocità angolare d'imbardata  $\Omega = \dot{\psi}$ , la velocità  $V$  e da queste l'angolo di banco. Una volta noti  $\varphi$  e  $\psi$  è poi possibile individuare il versore perpendicolare agli assi longitudinale e trasversale del velivolo. Le sue espressioni rispetto al sistema di riferimento assi-corpo dell'aeromobile<sup>2</sup> e al sistema *Nord-Est-Down* sono:

$$\hat{n}_B = [0, 0, -1]^T \quad \hat{n}_{NED} = C_B^{NED} \hat{n}_B \quad (2.5)$$

La matrice  $C_B^{NED}$  (specificata in Appendice C) è la matrice di rotazione tra il sistema *Body* e NED che consente di esprimere il versore perpendicolare  $\hat{n}$ , in funzione degli angoli di elevazione  $\theta$ , banco  $\varphi$  e direzione  $\psi$  come:

$$\hat{n}_{NED} = \begin{bmatrix} -\cos(\psi)\sin(\theta)\cos(\varphi) - \sin(\psi)\sin(\varphi) \\ -\sin(\psi)\sin(\theta)\cos(\varphi) + \cos(\psi)\sin(\varphi) \\ -\cos(\theta)\cos(\varphi) \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

Gli angoli d'assetto  $\varphi$  e  $\psi$  da inserire nella matrice di rotazione vengono stimati attraverso un filtro stimatore dello stato, mentre in prima approssimazione l'elevazione  $\theta$  è nulla.

---

<sup>2</sup>L'asse di imbardata  $z_B$  è rivolto verso il basso, per questo il versore  $\hat{n}_B$  è negativo se espresso nel sistema di riferimento *Body*.

La (2.6) quindi si semplifica e diviene

$$\hat{n}_{NED} = \begin{bmatrix} -\sin(\psi)\sin(\varphi) \\ \cos(\psi)\sin(\varphi) \\ -\cos(\varphi) \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

I satelliti per essere comuni alla stazione di terra e al velivolo

*“devono essere contemporaneamente nel semipiano superiore al piano individuato dall’asse longitudinale e trasversale del sistema assi corpo del velivolo (azzurro in Figura 2.2(b)), nonchè nel semispazio superiore al piano orizzontale individuato dagli assi Nord ed Est del NED (giallo in Figura 2.2(b)).” [1]*

L’intersezione di questi due semipiani è rappresentata dallo spazio verde in Figura 2.2(b).

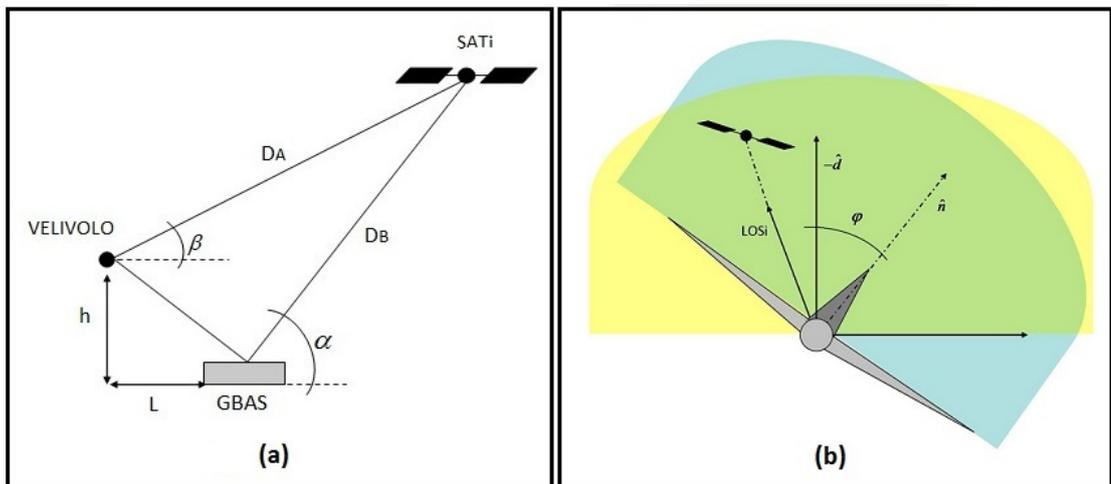


Figura 2.2: Geometria del problema in volo rettilineo uniforme (a) e in virata (b) [1]

Matematicamente queste condizioni vengono tradotte nelle disuguaglianze (2.8): nella prima compare il prodotto vettoriale fra  $LOS_i$  e il versore della linea di vista velivolo-satellite  $i$ -esimo espresso in assi NED<sup>3</sup>; nella seconda fra il versore  $LOS_i$  e  $-\hat{d} = [0, 0, -1]^T$  che punta verso l’alto opposto all’asse *Down* del NED. In particolare il satellite  $i$ -esimo per

<sup>3</sup> Viste le dimensioni ridotte dell’area considerata, il versore della linea di vista velivolo-satellite  $i$ -esimo coincide con quello della linea di vista stazione GBAS-satellite

poter essere visto sia dall'aeromobile che dalla stazione di terra deve soddisfare contemporaneamente le condizioni:

$$\begin{cases} LOS_i \cdot \hat{n}_{NED} \geq 0 \\ LOS_i \cdot (-\hat{d}) \geq 0 \end{cases} \quad (2.8)$$

In sintesi, alla luce di queste problematiche, la *Ground Station* deve essere dotata di un filtro che stimi e predica, in assenza delle misure, sia la posizione e la velocità dei velivoli che gli angoli di banco e di prua. Questi, come prima dimostrato, sono necessari per la determinazione dei satelliti in vista e, di conseguenza, degli errori atmosferici con cui correggere i dati ADS-B e stimare con precisione la posizione dei velivoli.

Questa tesi si inserisce nell'ambito del progetto degli algoritmi Merlino, il cui schema è riportato in Figura 2.3, che eseguono ricorsivamente per ogni aereo le seguenti fasi.

1. Stima dell'errore di posizione del dato ADS-B che viene effettuata una volta noti i satelliti in vista e le correzioni differenziali fornite dalla *Ground Station* GPS;
2. Correzione del dato ADS-B attraverso la stima dell'errore di posizione;
3. Stima e previsione della posizione, della velocità e dell'assetto del singolo velivolo mediante il filtro stimatore che elabora le misure ADS-B corrette. Questa stima deve essere continua e precisa nei termini sopradetti;
4. Selezione dei satelliti in vista al velivolo in base alla stima degli angoli di assetto e ai satelliti visibili dalla *Ground Station*.

Nella tesi è stato sviluppato il filtro stimatore basato sui modelli dei moti dei velivoli in volo e a terra. Poiché entrambe le dinamiche presentano un modello non lineare, è stato necessario utilizzare algoritmi in grado di approcciarsi a questo problema quali l'*Extended Kalman Filter* e l'*Unscented Kalman Filter*, quest'ultimo utilizzato nella sua versione *Scaled* (SUKF).

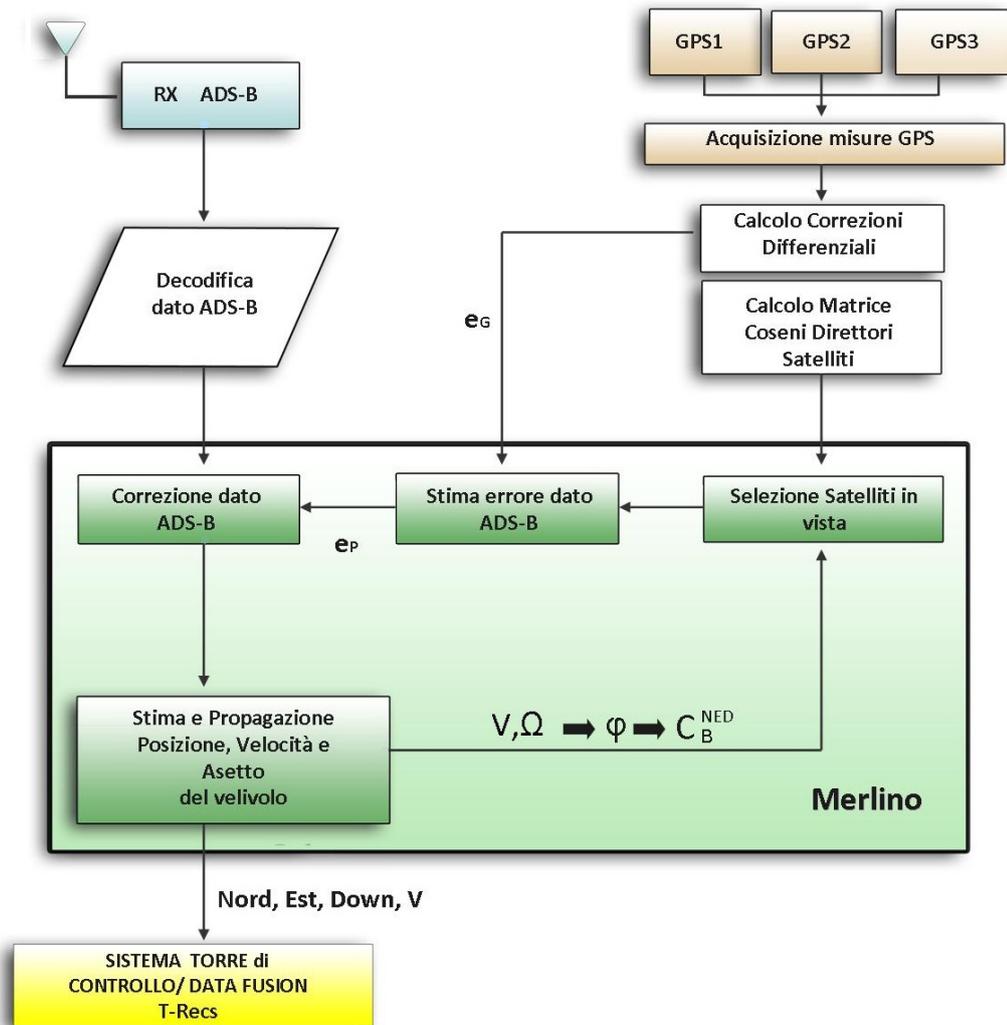


Figura 2.3: Architettura generale SW T-Recs [1]



## Capitolo 3

# Filtraggio ricorsivo non lineare

Come accennato nel precedente capitolo, la determinazione della traiettoria e dell'angolo di banco si riconduce a un problema di filtraggio del sistema dinamico discreto che descrive il moto del velivolo. Per far questo si ha bisogno di un osservatore (detto filtro), ovvero di un operatore in grado di determinare la stima attendibile dello stato attraverso l'elaborazione delle misure rumorose ADS-B inviate dal velivolo, in ogni istante e in maniera ricorsiva. Questo tipo di approccio al problema richiede che il *modello stocastico tempo continuo* del processo in esame (3.1), venga discretizzato in modo da stimarlo istantaneamente. Si consideri quindi il modello:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t), w(t)) \\ z(t) = h(t, x(t), v(t)) \end{cases} \quad (3.1)$$

dove:

- $x(t)_{(nx1)}$  è il *vettore di stato* del processo
- $u(t)_{(rx1)}$  è il *vettore degli ingressi* del processo
- $z(t)_{(mx1)}$  è il *vettore delle misure* le cui componenti non sono necessariamente degli elementi dello stato, ma possono essere qualsiasi loro combinazione lineare
- $f(\cdot)$  è il *modello del processo* che definisce l'evoluzione dello stato
- $h(\cdot)$  è il *modello delle misure* che definisce la relazione fra lo stato e le osservazioni

- $w(t)_{(qx1)}$  è il *rumore di processo*, ovvero è la variabile aleatoria che esprime l'incertezza nella conoscenza delle relazioni che legano le variabili di stato
- $v(t)_{(mx1)}$  è il *rumore di misura*, ovvero è la variabile aleatoria che esprime l'incertezza dovuta sia all'imperfetta conoscenza del modello del sensore, sia agli errori casuali e sistematici degli strumenti (questi sono dovuti al mezzo fisico utilizzato nell'acquisizione e trasmissione del segnale di misura)

A causa di questi due rumori anche le variabili di stato e le misure diventano variabili aleatorie. Per discretizzare il sistema (3.1) si approssima la derivata con il suo rapporto incrementale ovvero si pone:

$$\dot{x}(k) \approx \frac{x(k) - x(k-1)}{T} \quad (3.2)$$

dove  $T = t_k - t_{k-1}$  è il tempo di campionamento (*simple time*), scelto sufficientemente piccolo in maniera da approssimare al meglio la derivata, e  $x(k)$  è il vettore di stato del processo all'istante  $k$ -esimo. Inserendo la (3.2) nella (3.1) si ottiene

$$x(k) - x(k-1) = T \cdot f(k-1, x(k-1), u(k-1), w(k-1)) \quad (3.3)$$

da cui si ottiene il modello stocastico discreto valido per ogni istante  $k$ -esimo:

$$\begin{cases} x(k) = f_d(k-1, x(k-1), u(k-1), w(k-1)) \\ z(k) = h_d(k, x(k), v(k)) \end{cases} \quad (3.4)$$

dove

$$f_d(k-1, x(k-1), u(k-1), w(k-1)) = x(k-1) + T \cdot f(k-1, x(k-1), u(k-1), w(k-1)) \quad (3.5)$$

$$h_d(k, x(k), v(k)) = h(t, x(t), v(t)) \quad (3.6)$$

In questo capitolo sono delineati i principi di funzionamento del *Kalman filter* (KF)<sup>1</sup> utilizzato, come suggerisce il nome, se il sistema dinamico in oggetto è lineare. In generale tutti i filtri di Kalman producono, date misurazioni incomplete e rumorose, una stima ottima attraverso un algoritmo ricorsivo; questo approccio implica che il filtro non abbia bisogno di fare riferimento a tutte le misure precedenti per mantenere l'accuratezza delle

---

<sup>1</sup>Il *Kalman filter* viene anche detto *Linear or Simple Kalman filter*

stime. Assumendo che i rumori in ingresso alle funzioni lineari  $f_d(\cdot)$  e  $h_d(\cdot)$  siano sequenze bianche gaussiane, e che di conseguenza lo sia anche la variabile di stato sia una *gaussian random variable* (GRV), il KF permette di mappare distribuzioni gaussiane in distribuzioni gaussiane. Quando però i problemi sono non lineari (come nel caso dei sistemi dinamici trigonometrici che descrivono il moto del velivolo), anche in presenza di rumori gaussiani, la *random variable* (RV) non è gaussiana e il KF non riesce a mappare le distribuzioni come prima. Per questo di seguito vengono descritti e confrontati due metodi che risolvono il problema non lineare e che differiscono per il tipo di rappresentazione delle RV: l'*Extended Kalman Esteso* (EKF) e l'*Unscented Kalman Filter* (UKF) nella sua versione *Scaled*. Nell'EKF, una volta che si è approssimata la distribuzione dello stato con una GRV, essa viene propagata attraverso la linearizzazione del modello nell'intorno della stima corrente utilizzando lo sviluppo in serie di Taylor troncato al primo ordine. Questo può introdurre errori rilevanti nel computo della media e della covarianza della GRV trasformata e, di conseguenza, può condurre a risultati non ottimali e talvolta alla divergenza del filtro. L'UKF risolve questo problema usando un campionamento deterministico, ovvero la distribuzione, approssimata nuovamente da una GRV [18], è rappresentata con un set minimo di punti, detti *sigma point*, scelti in modo da catturare la vera media e covarianza della variabile di stato. Propagandoli attraverso il sistema, è possibile catturare la media e covarianza "a posteriori" con una precisione almeno fino al secondo ordine in presenza di qualsiasi non linearità (se l'ipotesi di gaussianità della variabile di stato è attendibile, la precisione sale al terzo ordine). Entrambi i filtri sono quindi applicabili a sistemi non lineari la cui RV viene approssimata con una gaussiana; tuttavia in presenza di forti non linearità e/o rumori non gaussiani l'EKF può fornire prestazioni non adeguate dovute alle approssimazioni fatte. In alcuni casi risulta quindi sensato ricorrere al filtro *Unscented* che inoltre non necessita del calcolo di Jacobiani o di Hessiani, non implica il rischio di divergenza e la cui complessità computazionale è dello stesso ordine di quella dell'EKF. Dell'*Unscented* filtro è stata implementata la versione *Scaled*, più frequentemente utilizzata, che assicura un corretto funzionamento nel caso di forti non linearità all'aumentare della dimensione dello stato e permette di incorporare informazioni di ordine elevato nelle stime. Tuttavia tra queste due metodologie di filtraggio non ne esiste una in assoluto superiore rispetto all'altra, ma a seconda dell'applicazione, bisogna scegliere quella migliore secondo un *trade-off* di caratteristiche come accuratezza della stima, facilità di implementazione del filtro, robustezza numerica e peso computazionale [10].

### 3.1 Filtro di Kalman per sistemi lineari

Come già accennato il filtro di Kalman rientra nell'insieme delle metodologie stocastiche di analisi dei dati dinamici (*Dynamic Bayesian Network, DBN*) che risolvono il problema del filtraggio nel caso lineare. Il suo creatore, Rudolph Emil Kalman, ha pubblicato il primo articolo su questo filtro [5] nel 1960, ma solo dopo diversi anni i suoi studi hanno trovato l'attenzione che meritavano. Ciò avvenne quando Stanley Schmidt al *NASA Ames Research Center* fece uso del filtro per risolvere il problema della stima della traiettoria utilizzato successivamente nel programma Apollo. Il KF si è poi evoluto in varie forme ed è stato utilizzato per un'ampia varietà di applicazioni tra cui i sistemi di navigazione, di guida e di monitoraggio, di elaborazione sismica, di modellazione metereologica, per la strumentazione dei reattori nucleari, per il *motion capturing*, per la ricostruzione di tracce audio e, più recentemente, anche per la *structure-from-motion modelling*.

Le condizioni che si devono soddisfare per utilizzare questo filtro sono le seguenti:

1. il sistema deve essere lineare, ovvero lo devono essere le funzioni  $f_d(\cdot)$  e  $h_d(\cdot)$
2. le variabili stocastiche che rappresentano i rumori devono essere sequenze di segnali:
  - (a) *white noise gaussiane* per cui

$$\begin{aligned} E [w^{(k)}w^{(i)T}] &= \delta_{ki}Q^{(k)} \\ E [v^{(k)}v^{(i)T}] &= \delta_{ki}R^{(k)} \end{aligned} \quad (3.7)$$

dove  $\delta_{ki}$  è il delta di Kronecker tale che se  $k = i$  assume il valore unitario. Le matrici diagonali di covarianza del rumore di processo  $Q^{(k)}_{(qxq)}$  e di misura  $R^{(k)}_{(mxm)}$  potenzialmente cambiano a ogni step o ad ogni nuova misura acquisita; i loro elementi sono le varianze

$$\begin{aligned} \sigma_{w_j}^2 &= E[(w_j(k) - E[w_j(k)])^2] = E[(w_j(k))^2] \\ \sigma_{v_j}^2 &= E[(v_j(k) - E[v_j(k)])^2] = E[(v_j(k))^2] \end{aligned} \quad (3.8)$$

Queste danno un'indicazione dell'errore medio prodotto poichè misurano le dispersioni delle componenti del rumore dal valore atteso nullo.

- (b) a *valore medio nullo* per cui  $E [w^{(k)}] = E [v^{(k)}] = 0 \forall k$

(c) *scorrelate* fra di loro per cui  $E [w(k)v(i)^T] = 0 \forall k, i$

La densità di probabilità di questi rumori può essere scritta sinteticamente come:

$$\begin{aligned} w(k) &\sim p(w(k)) \sim N(0, Q(k)) \forall k \\ v(k) &\sim p(v(k)) \sim N(0, R(k)) \forall k \end{aligned} \quad (3.9)$$

Non viene per ora analizzato l'effetto della gaussianità della *pdf* (*probability density function*) dello stato che verrà analizzato nel paragrafo 3.2.

Il filtro di Kalman è essenzialmente un set di equazioni che, combinando le misure disponibili acquisite in singoli istanti e la conoscenza a priori di  $f_d(\cdot)$  e di  $h_d(\cdot)$ , stima le variabili di stato del sistema in modo da minimizzare statisticamente l'errore commesso. Questo algoritmo di elaborazione

1. *fornisce una stima ottima* poichè il guadagno di Kalman utilizzato per la correzione della stima  $\hat{x}(k|k)$  viene determinato in modo da minimizzare la matrice di covarianza "a posteriori" dell'errore  $e(k) = x(k) - \hat{x}(k|k)$ :

$$P(k|k) = E [e(k)e(k)^T] = E [(x(k) - \hat{x}(k|k))(x(k) - \hat{x}(k|k))^T] \quad (3.10)$$

Con  $E$  viene indicato l'operatore per il computo del valore medio e quindi  $P(k|k)$ , essendo la media dell'errore, rappresenta l'incertezza associata alla stima  $\hat{x}(k|k)$ . Minimizzare questa matrice significa ottimizzare il risultato e la sua dipendenza dal tempo svela l'intrinseca non stazionarietà del processo ricorsivo. L'attendibilità delle stime fornite dal filtro è assicurata dalla loro *consistenza* e *non polarizzazione*, oltre che dall'*efficienza* e la *robustezza* dell'osservatore. Dato un numero sufficiente di campioni e passato un transitorio in cui l'errore può essere rilevante, la  $\hat{x}(k|k)$  converge al valore atteso soddisfacendo la relazione di asintoticità:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} e(k) = 0 \quad \lim_{k \rightarrow \infty} x(k) = \hat{x}(k|k) \quad (3.11)$$

Il filtro è poco sensibile agli errori, sia di modello che di misura, ed è efficiente nel senso che possiede la più piccola matrice di covarianza tra tutti gli stimatori non polarizzati.

2. è *ricorsivo* ovvero fornisce la stima corrente dello stato del sistema basandosi sui valori calcolati negli istanti precedenti; per questo motivo di seguito verrà usata la notazione  $\hat{x}(k|k-1)$  per indicare la stima, detta “a priori”, della generica variabile  $x$  all’istante  $k$  ottenuta dalle misure fino all’istante precedente. Grazie a questa sua proprietà il filtro non richiede la memorizzazione e la rielaborazione di tutta la storia dei dati ogni volta che ne è disponibile uno nuovo; in questa maniera si evita un crescente dispendio di memoria e di difficoltà computazionale in cui si incorre inevitabilmente memorizzando ogni singola misura.
3. ha una “*linear predictor-corrector structure*” [8] ovvero, come si può vedere dalla Figura 3.1, il filtro ripete iterativamente un set di *predictor equations* e di *corrector equations*. Le prime compiono un aggiornamento temporale per ottenere la stima “a priori” dell’istante successivo nella quale le *corrector equations*, tramite un *feedback control*, incorporano l’informazione apportata dalla nuova misura ottenendo così la stima corretta “a posteriori”  $\hat{x}(k|k)$ . Oltre a conoscere le funzioni  $f_d(\cdot)$ ,  $h_d(\cdot)$  e le matrici di covarianza di  $w(k)$  e  $v(k)$ , l’algoritmo deve essere inizializzato con la stima “a priori” dello stato all’istante iniziale  $\hat{x}(0)$  (gaussiana, a media e covarianza nota e scorrelata da  $w(k)$  e  $v(k)$ ) e con la matrice di covarianza dell’errore di stima “a priori” dello stato  $e(0) = x(0) - \hat{x}(0)$ :

$$P(0) = E [e(0)e(0)^T] = E [(x(0) - \hat{x}(0))(x(0) - \hat{x}(0))^T] \quad (3.12)$$

Dal ciclo precedente sono note le stime  $\hat{x}(k-1|k-1)$  e  $P(k-1|k-1)$  e usando il sistema lineare nella forma discreta

$$\begin{cases} x(k) = f_d(k-1, x(k-1), u(k-1), w(k-1)) \\ z(k) = h_d(k, x(k), v(k)) \end{cases} \quad (3.13)$$

l’algoritmo esegue, per determinare la stima del ciclo  $k$ -esimo, i seguenti *steps*:

**Previsione (aggiornamento temporale).** A questo passo vengono generate le stime “a priori”  $\hat{x}(k|k-1)$ ,  $P(k|k-1)$  e la previsione delle uscite osservabili  $\hat{z}(k|k-1)$ .

**Aggiornamento della misura.** A questo passo viene calcolato l’errore di aggiornamento  $v(k) = z(k) - \hat{z}(k|k-1)$ , anche detto innovazione, e il guadagno locale del filtro  $K(k)$  in funzione di  $P(k|k-1)$  e della matrice di covarianza degli errori di misura.

**Correzione.** A questo passo viene calcolata la stima aggiornata, detta “a posteriori”, di  $P(k|k)$  e dello stato  $\hat{x}(k|k)$ ; quest’ultima è ottenuta correggendo linearmente  $\hat{x}(k|k-1)$  con l’innovazione pesata da  $K(k)$ . In particolare il guadagno pesa meno  $v(k)$  all’aumentare della matrice di covarianza dell’errore di misura e al diminuire della matrice di covarianza dell’errore di stima “a priori” ovvero:

$$\lim_{R(k) \rightarrow \infty} K(k) = 0 \quad \lim_{P(k|k-1) \rightarrow 0} K(k) = 0 \quad (3.14)$$

Infatti, se  $R(k)$  cresce o  $P(k|k-1)$  tende a zero, le misure  $z(k)$  diventano sempre più precise mentre le misure  $\hat{z}(k|k-1) = h(x(k|k-1))$  perdono attendibilità [6].

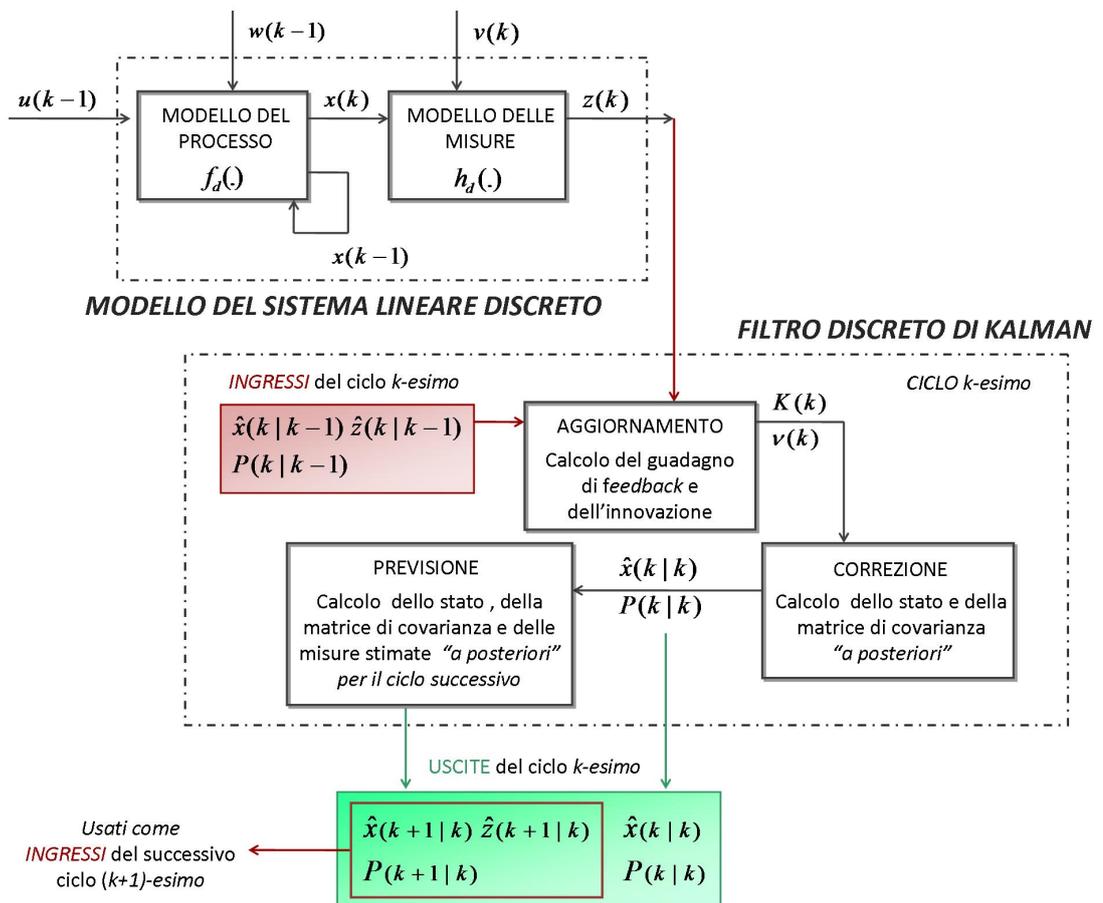


Figura 3.1: Schema del problema del filtraggio risolto con il KF

Dopo questa fase il filtro genera, a partire dalle stime  $\hat{x}(k|k)$  e  $P(k|k)$ , le nuove previsioni  $\hat{x}(k+1|k)$  e  $P(k+1|k)$  relative all'istante  $k+1$  che diventano l'*input* del nuovo ciclo. Alla fase d'implementazione dell'algoritmo ne segue poi una di *tuning* dei parametri per minimizzare l'errore di stima dello stato. A tal fine la matrice di covarianza dei rumori di modello  $Q$ , i cui valori di riferimento sono le deviazioni standard ottenute da prove e verifiche sperimentali con i dati reali, viene moltiplicata per un coefficiente di *tuning* "q" in modo da minimizzare la *root mean square* delle varie componenti dello stato. In particolare aumentare il valore di  $Q$  vuol dire aumentare l'errore commesso dal processo e fare in modo che il filtro si affidi soprattutto all'informazione fornita dalle misure. Potenzialmente, mandando la matrice di covarianza all'infinito, lo stimatore ripropone le misure senza filtrarle.

## 3.2 Stima ottima ricorsiva

Fino a questo punto della trattazione non sono state fatte ipotesi sulla natura del sistema dinamico di cui si vuole stimare e predire lo stato; l'intento ora è quello di specializzare la stima al caso di distribuzioni gaussiane. Come già introdotto, si ottiene una stima ottima se essa minimizza il *mean-square error* (MMSE):

$$P(k|k) = E [e(k)e(k)^T] = E [(x(k) - \hat{x}(k|k))(x(k) - \hat{x}(k|k))^T] \quad (3.15)$$

Secondo il teorema dello "stimatore media condizionata" [5, 18] la stima ottima nel senso della *MMSE* è

$$\hat{x}(k|k) = E[x(k)|z(k)] \quad (3.16)$$

dove  $z(k)$  sono le osservazioni fino all'istante *k-esimo*. La sua matrice di covarianza è quindi

$$P(k|k) = E [(x(k) - \hat{x}(k|k-1))(x(k) - \hat{x}(k|k-1))^T | z(k)] \quad (3.17)$$

La determinazione della (3.16) richiede la conoscenza della densità di probabilità condizionata "a posteriori"  $p(x(k)|z(k))$ <sup>2</sup> la quale contiene una sintesi completa di tutte le informazioni passate fornite dalle misure. Questa funzione infatti descrive la probabilità che lo stato all'istante  $k$  assuma un particolare valore, condizionata alla conoscenza dei valori assunti dalle misure fino all'istante *k-esimo*. Secondo questo approccio probabi-

---

<sup>2</sup>Si noti che non è stata aggiunta la dipendenza dall'ingresso non considerandolo una variabile aleatoria.

listico il problema del filtraggio si riconduce alla stima di  $p(x(k)|z(k))$ ; questa si ottiene ripetendo ciclicamente le fasi di previsione della  $p(x(k)|z(k-1))$  nota  $p(x(k-1)|z(k-1))$ , e di aggiornamento della densità di probabilità “a priori” tramite il *teorema di Bayes* per cui:

$$p(x(k)|z(k)) = \frac{p(x(k)|z(k-1)) \cdot p(z(k)|x(k))}{p(z(k)|z(k-1))} \quad (3.18)$$

dove

$$p(x(k)|z(k-1)) = \int p(x(k)|x(k-1)) \cdot p(x(k-1)|z(k-1)) dx(k-1) \quad (3.19)$$

$$p(z(k)|z(k-1)) = \int p(x(k)|z(k-1)) \cdot p(z(k)|x(k)) dx(k) \quad (3.20)$$

Le densità di probabilità  $p(x(k)|x(k-1))$  e  $p(z(k)|x(k))$  vengono determinate, una volta determinate  $p(w(k))$  e  $p(v(k))$ , attraverso le equazioni del modello e delle misure (3.13). Questo algoritmo ricorsivo, note le distribuzioni iniziali dei rumori e  $p(x(0)|z(0))$ , esprime in ogni istante la densità dello stato corrente in funzione della densità “a priori” e delle ultime osservazioni. Sfortunatamente per molti sistemi non esiste una soluzione in forma chiusa degli integrali (3.18 - 3.19 - 3.20). Se si assume per ipotesi che il sistema sia gaussiano la *pdf* dello stato diventa:

$$p(x(k)) \sim N(\hat{x}(k|k-1), P(k|k-1)) \quad (3.21)$$

completamente caratterizzata dai suoi primi due momenti. Essendo poi le misure legate linearmente allo stato, sono gaussiane anche le  $z(k)$  e la distribuzione  $p(z(k)|x(k))$  e così a cascata pure  $p(z(k)|z(k-1))$  e  $p(x(k)|z(k))$ . Da ciò ne consegue che il problema di stima dello stato si risolve determinando la stima della media  $\hat{x}(k|k) = E[x(k)|z(k)]$  e della covarianza  $P(k|k)$  della densità di probabilità condizionata “a posteriori” gaussiana e che le *performance* del filtro dipendano dall’accuratezza con la quale esse vengono calcolate [4]. Lo stato stimato ricorsivamente in funzione del guadagno di Kalman è espresso dalla relazione lineare

$$\hat{x}(k|k) = \hat{x}(k|k-1) + K(k)[z(k) - z(k|k-1)] \quad (3.22)$$

La (3.22) è stata ottenuta senza dover assumere una relazione lineare tra la stima e le misurazioni perchè è una diretta conseguenza dell’ipotesi di gaussianità del sistema e della scelta della media condizionata come stima. Il filtro di Kalman nel caso lineare calcola tutti i termini delle equazioni ed è quindi il metodo più efficiente per propagare le GRV nei sistemi dinamici lineari.

Nel caso in cui il sistema in oggetto sia non lineare, ovvero lo siano  $f_d(\cdot)$  e  $h_d(\cdot)$ , il valore preciso della (3.16) e della (3.17) possono essere calcolati solo se è nota la distribuzione  $p(x(k)|z(k))$  che oltretutto non ha necessariamente una forma gaussiana (ciò implica che sia necessario un numero potenzialmente illimitato di parametri per caratterizzarla). Il filtro di Kalman in tal caso è inutilizzabile, per questo molto spesso è necessario ricorrere a soluzioni approssimate subottime che usano la medesima struttura, ma impiegano assunzioni differenti per determinare media e covarianza.

### 3.3 *Extended Kalman Filter (EKF)*

L'*Extended Kalman Filter* (EKF), la cui prima formulazione si deve a Stanley Schmidt [7], è un'estensione del KF nel caso di funzioni  $f_d(\cdot)$  e  $h_d(\cdot)$  non lineari. Queste vengono approssimate mediante lo sviluppo in serie di Taylor nell'intorno della stima corrente fino al primo ordine (ovviamente per ottenere una maggiore precisione bisogna troncare lo sviluppo ad ordini superiori). Si consideri il generico modello di processo discretizzato

$$\begin{cases} x(k) = f_d(k-1, x(k-1), u(k-1), w(k-1)) \\ z(k) = h_d(k, x(k), v(k)) \end{cases} \quad (3.23)$$

dove appunto  $f_d(\cdot)$  e  $h_d(\cdot)$  sono non lineari e non necessariamente continue,  $x(k)_{(nx1)}$  è il vettore di stato,  $u(k)_{(rx1)}$  è il vettore degli ingressi. I rumori di processo  $w(k)_{(qx1)}$  e di misura  $v(k)_{(mx1)}$ , le cui matrici di covarianza sono rispettivamente  $Q(k)_{(q \times q)} = [w(k)w(k)^T]$  ed  $R(k)_{(m \times m)} = [v(k)v(k)^T]$ , vengono ancora una volta approssimati a sequenze bianche gaussiane a valore medio nullo<sup>3</sup> e scorrelate fra loro per cui:

$$\begin{aligned} p(w(k)) &\sim N(0, Q(k)_{(q \times q)}) \\ p(v(k)) &\sim N(0, R(k)_{(m \times m)}) \end{aligned} \quad (3.24)$$

La matrice di covarianza dello stato è nuovamente  $P(k)_{(n \times n)} = E[(x(k) - \hat{x}(k))(x(k) - \hat{x}(k))^T]$ . A seguito della linearizzazione, e assunto che la densità di probabilità condizionata sia la gaussiana (3.21), l'algoritmo propaga attraverso le equazioni del filtro di Kalman la media,

<sup>3</sup>Nella presentazione dei passi dell'algoritmo i valori medi dei rumori  $\bar{w} = E[w]$  e  $\bar{v} = E[v]$  vengono esplicitati per completezza di formulazione nonostante, per ipotesi, vengano considerati nulli.

con la quale viene approssimata la stima, e la covarianza della distribuzione. Infatti gli sviluppi di Taylor di  $f_d(\cdot)$  e  $h_d(\cdot)$  in un generico istante  $k$ -esimo, troncati al primo ordine sono:

$$\begin{aligned} x(k) &= f_d(\cdot) = \bar{x}(k|k-1) + F_x[x(k-1) - \hat{x}(k-1|k-1)] + G_w[w(k-1) - \bar{w}] \\ z(k) &= h_d(\cdot) = \bar{z}(k|k-1) + H_x[x(k) - \hat{x}(k|k-1)] + D_v[v(k) - \bar{v}] \end{aligned} \quad (3.25)$$

dove i valori medi sono le stime dello stato e le misure:

$$\begin{aligned} \hat{x}(k|k-1) &= \bar{x}(k|k-1) = f_d(k, \hat{x}(k-1|k-1), u(k), \bar{w}) \\ \hat{z}(k|k-1) &= \bar{z}(k|k-1) = h_d(k, \hat{x}(k|k-1), \bar{v}) \end{aligned} \quad (3.26)$$

$F_x$  e  $G_w$  sono gli Jacobiani della funzione  $f_d(\cdot)$  nell'intorno di  $\hat{x}(k-1|k-1)$  rispetto allo stato e nell'intorno di  $\bar{w}$  rispetto al rumore di modello;  $H_x$  e  $D_v$  sono gli Jacobiani della funzione  $h_d(\cdot)$  nell'intorno di  $\hat{x}(k|k-1)$  rispetto allo stato e nell'intorno di  $\bar{v}$  rispetto al rumore di misura. La covarianza dello stato invece viene calcolata come

$$P(k|k-1) = F_x P(k-1|k-1) F_x^T + G_w Q(k-1) G_w^T \quad (3.27)$$

In altre parole nell'EKF della distribuzione dello stato gaussiana viene propagata attraverso la linearizzazione troncata di  $f_d(\cdot)$  che porta ad approssimazioni al primo ordine delle stime ottime (3.26); per questo il filtro è anche detto *First order Extended Kalman Filter*. Questo spiega perchè troncando al primo ordine la serie di Taylor, comporta rilevanti errori nella stima del valore medio e della covarianza della GRV trasformata che conducono a performance subottime e alla divergenza del filtro.<sup>4</sup>

---

<sup>4</sup>Esistono versioni della EKF in cui la linearizzazione viene troncata al secondo ordine rendendo la stima più precisa, tuttavia sono di difficile implementazione e la complessità computazionale tende ad aumentare notevolmente.

### 3.3.1 Algoritmo EKF

L'algoritmo EKF, come si vede in Figura.3.2, si sviluppa nei seguenti passi:

**Inizializzazione all'istante  $k = 0$**

$$\hat{x}(0) = \bar{x}(0) = E[x(0)]$$

$$P(0) = E[(x(0) - \hat{x}(0))(x(0) - \hat{x}(0))^T]$$

$$Q(0) = E[(w(0) - \bar{w}(0))(w(0) - \bar{w}(0))^T]$$

$$R(0) = E[(v(0) - \bar{v}(0))(v(0) - \bar{v}(0))^T]$$

**Per  $k \geq 1$**

1. **Previsione.** A questo passo, note le stime "aggiornate"  $\hat{x}(k-1|k-1)$  e  $P(k-1|k-1)$  dal ciclo precedente, vengono calcolati relativamente all'istante  $k$ -esimo:

(a) gli Jacobiani della funzione  $f_d(\cdot)$  nell'intorno di  $\hat{x}(k-1|k-1)$

$$F_x = \nabla_x f_d(x, u(k-1), \bar{w})|_{x=\hat{x}(k-1|k-1)}$$

$$G_w = \nabla_w f_d(\hat{x}(k-1|k-1), u(k-1), w)|_{w=\bar{w}}$$

(b) le stime "a priori" del valore medio dello stato e della covarianza

$$\hat{x}(k|k-1) = \bar{x}(k|k-1) = f_d(\hat{x}(k-1|k-1), u(k-1), \bar{w})$$

$$P(k|k-1) = F_x P(k-1|k-1) F_x^T + G_w Q(k-1) G_w^T$$

(c) la previsione delle uscite osservabili:

$$\hat{z}(k|k-1) = \bar{z}(k|k-1) = h_d(\hat{x}(k|k-1), \bar{v})$$

2. **Aggiornamento della misura.** A questo passo vengono calcolati:

(a) l'innovazione  $v(k) = z(k) - \hat{z}(k|k-1)$

(b) gli Jacobiani della funzione  $h_d(\cdot)$  nell'intorno di  $\hat{x}(k|k-1)$

$$H_x = \nabla_x h_d(x, u(k), \bar{v})|_{x=\hat{x}(k|k-1)}$$

$$D_v = \nabla_v h_d(\hat{x}(k|k-1), u(k), v)|_{v=\bar{v}}$$

(c) il guadagno del filtro

$$K(k) = P(k|k-1) H_x^T (H_x P(k|k-1) H_x^T + D_v R(k) D_v^T)^{-1}$$

3. **Correzione.** A questo passo vengono calcolate le stime “a posteriori” dello stato e della covarianza:

(a) se sono note le  $z(k)$  come:

$$\hat{x}(k|k) = \hat{x}(k|k-1) + K(k)v(k)$$

$$P(k|k) = (I - K(k)H_x)P(k|k-1)$$

(b) se non sono note le  $z(k)$  come propagazione delle stime precedenti:

$$\hat{x}(k|k) = \hat{x}(k|k-1)$$

$$P(k|k) = P(k|k-1)$$

Questi due casi sono gestiti nel programma d’implementazione dell’algoritmo attraverso un ciclo *if* e una variabile *flag*; questa in presenza delle misure assume il valore unitario, in assenza quello nullo.

Dopo questa fase il filtro genera nuovamente, a partire da  $\hat{x}(k|k)$  e  $P(k|k)$ , gli Jacobiani della funzione  $f_d(\cdot)$  nell’intorno di  $\hat{x}(k|k)$  e le stime “a priori” relative all’istante  $k+1$ :

$$F_x = \nabla_x f_d(x, u(k), \bar{w})|_{x=\hat{x}(k|k)}$$

$$G_w = \nabla_w f_d(\hat{x}(k|k), u(k), w)|_{w=\bar{w}}$$

$$\hat{x}(k+1|k) = f_d(\hat{x}(k|k), u(k+1), \bar{w})$$

$$P(k+1|k) = F_x P(k|k) F_x^T + G_w Q(k) G_w^T$$

$$\hat{z}(k+1|k) = h_d(\hat{x}(k+1|k), \bar{v})$$

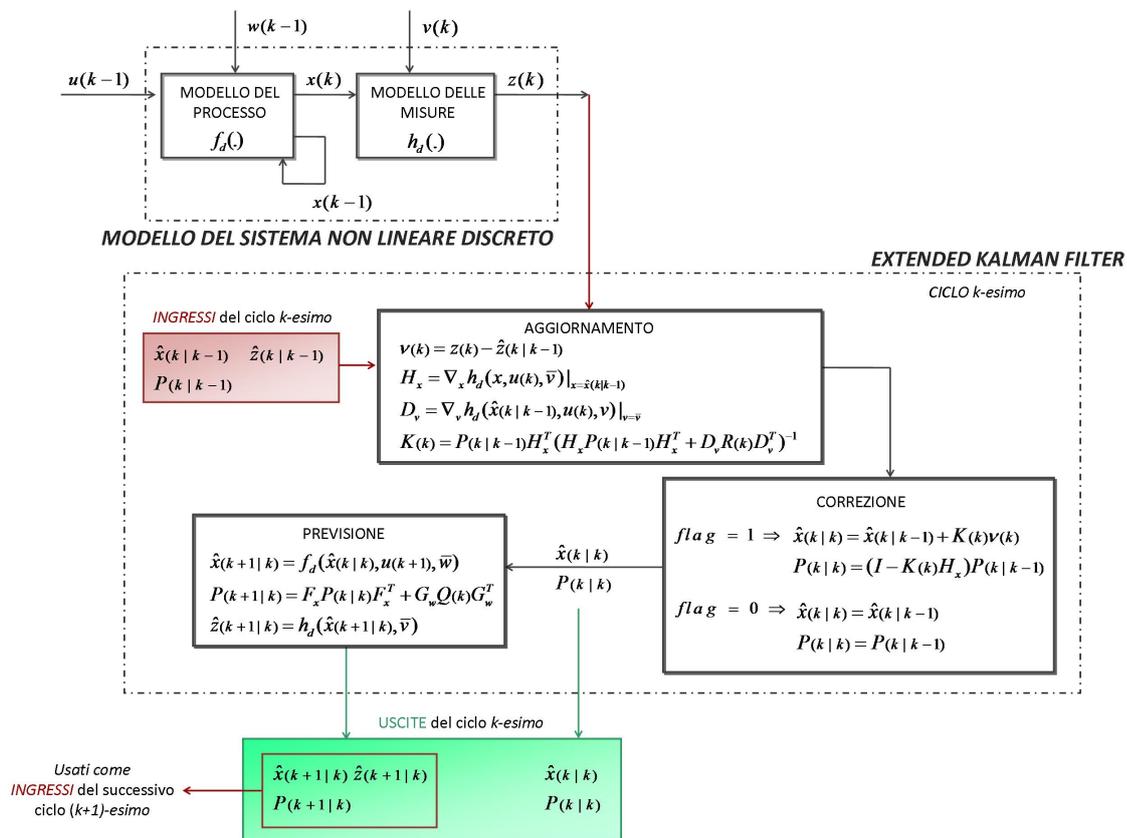


Figura 3.2: Schema di funzionamento dell'Extended Kalman Filter

### 3.3.2 Algoritmo EKF specializzato per i modelli con rumori additivi e privo di ingressi

Viene preso in considerazione ora un modello non lineare ottenuto specificando le condizioni di quelli elaborati in seguito, in cui:

- i rumori *white noise* sono gaussiani a valore medio nullo, correlazione nulla fra istanti temporali differenti, scorrelati fra di loro e additivi
- non sono presenti ingressi
- la funzione  $h(\cdot)$  è lineare per cui le uscite, tramite la matrice  $C$ , sono alcune delle componenti dello stato a cui si sovrappongono i rumori di misura

Il sistema continuo che lo descrive assume la forma:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t)) + Bw(t) \\ z(t) = Cx(t) + v(t) \end{cases} \quad (3.28)$$

dove la matrice  $B$  esprime il legame fra l'evoluzione dello stato e i rumori di processo, mentre la matrice  $C$  definisce le componenti dello stato che vengono osservate. Approssimando la derivata con la (3.2) si ottiene:

$$\begin{aligned} x(k) - x(k-1) &= T \cdot f(x(k-1)) + T \cdot Bw(k-1) \\ x(k) &= x(k-1) + T \cdot f(x(k-1)) + T \cdot Bw(k-1) \end{aligned} \quad (3.29)$$

Posto  $B_k = T \cdot B$ ,  $C_k = C$  e  $f_d(x(k-1)) = x(k-1) + T \cdot f(x(k-1))$ , il modello in forma discreta diventa:

$$\begin{cases} x(k) = f_d(x(k-1)) + B_k w(k-1) \\ z(k) = C_k x(k) + v(k) \end{cases} \quad (3.30)$$

Nell'algoritmo EKF si devono sostituire le matrici

$$G_w = B_k \quad H_x = C_k, \quad D_v = I \quad (3.31)$$

(dove  $I$  è la matrice identità) mentre lo Jacobiano della funzione  $f_d(\cdot)$  nell'intorno di  $\hat{x}(k-1|k-1)$  diventa

$$F_x = \nabla_x f_d|_{x=\hat{x}(k-1|k-1)} = I + T \cdot F \quad (3.32)$$

essendo  $F = \nabla_x f|_{x=\hat{x}(k-1|k-1)}$ . Posto che le relazioni d'inizializzazione rimangano quelle presentate prima, le equazioni dell'algoritmo si trasformano nelle seguenti:

**1. Previsione.**

$$F = \nabla_x f|_{x=\hat{x}(k-1|k-1)}$$

$$F_x = I + T \cdot F$$

$$\hat{x}(k|k-1) = \bar{x}(k|k-1) = f_d(\hat{x}(k-1|k-1))$$

$$P(k|k-1) = F_x P(k-1|k-1) F_x^T + B_k Q B_k^T$$

$$\hat{z}(k|k-1) = \bar{z}(k|k-1) = C_k \hat{x}(k|k-1)$$

**2. Aggiornamento della misura.**

$$\mathbf{v}(k) = z(k) - \hat{z}(k|k-1)$$

$$K(k) = P(k|k-1) C_k^T (C_k P(k|k-1) C_k^T + R)^{-1}$$

**3. Correzione.**

(a) se sono note le  $z(k)$  attraverso:

$$\hat{x}(k|k) = \hat{x}(k|k-1) + K(k) \mathbf{v}(k)$$

$$P(k|k) = (I - K(k) C_k) P(k|k-1)$$

(b) se non sono note le  $z(k)$  vengono semplicemente propagate le stime precedenti:

$$\hat{x}(k|k) = \hat{x}(k|k-1)$$

$$P(k|k) = P(k|k-1)$$

Dopo si avrà nuovamente all'istante  $k + 1$ :

$$F = \nabla_x f|_{x=\hat{x}(k|k)}$$

$$F_x = I + T \cdot F$$

$$\hat{x}(k+1|k) = \bar{x}(k+1|k) = f_d(\hat{x}(k|k))$$

$$P(k+1|k) = F_x P(k|k) F_x^T + B_k Q B_k^T$$

$$\hat{z}(k+1|k) = \bar{z}(k+1|k) = C_k \hat{x}(k+1|k)$$

### 3.4 Scaled Unscented Kalman Filter (SUKF)

Sono già stati sottolineati i limiti della linearizzazione adottata dall'EKF e la difficoltà, nel caso in cui  $f_d(\cdot)$  e  $h_d(\cdot)$  siano non lineari, di predire la generica  $p(x(k)|z(k))$  per la cui caratterizzazione sono necessari un numero potenzialmente illimitato di parametri. Per superare le approssimazioni introdotte e assicurare una precisione almeno fino al secondo ordine, si è approfondito lo studio dello *Scaled Unscented Kalman Filter* (SUKF), estensione dell'*Unscented Kalman Filter* (UKF) di Simon Julier e Jeffrey Uhlmann [8], che appartiene alla classe dei *Sigma-Point Kalman Filters* o anche detti *Linear Regression Kalman Filters*. Questo stimatore si serve della trasformazione *Unscented* basata sull'intuizione che:

*“dovrebbe essere più semplice approssimare una distribuzione gaussiana con un numero fisso di parametri piuttosto che approssimare una funzione/trasformazione arbitraria non lineare”*[8]

Questo filtro infatti non approssima il sistema lineare, bensì la distribuzione di probabilità “a posteriori”  $p(x(k))$  assunta per ipotesi gaussiana. Ciò viene fatto campionando  $2n + 1$  punti dello stato in modo deterministico, ovvero in modo da catturare completamente la media e la covarianza della GRV di stato. Una volta propagati attraverso il sistema non lineare  $f_d(\cdot)$ , i *sigma point* permettono di calcolare, con una precisione fino almeno al secondo ordine, le statistiche della variabile aleatoria “a posteriori”  $\hat{x}(k-1|k-1)$  e i primi due momenti di  $\hat{x}(k|k-1)$  necessari per l'aggiornamento della misura prevista dall'algoritmo di Kalman. Per spiegare il funzionamento di questo filtro si comincia dalla trasformazione su cui si basa.

#### 3.4.1 Unscented Transformation e Scaled Unscented Transformation

La trasformazione *Unscented* (UT) e la sua variante *Scaled* (SUT) sono metodi per calcolare le statistiche delle variabili aleatorie che sono soggette a una trasformazione non lineare. Per illustrare il problema in termini generali si consideri una generica variabile casuale  $x$  con media  $\bar{x}$  e covarianza  $P_x$  la cui *pdf* sia gaussiana ovvero  $p(x(k)) \sim N(\bar{x}, P_x)$  (o approssimata a tale). L'intento è quello di predire la media  $\bar{y}$  e la covarianza  $P_y$  di una variabile casuale  $y$ , approssimata poi con una gaussiana (ovvero  $p(y(k)) \sim N(\bar{y}, P_y)$ ), legata

alla prima da una relazione non lineare

$$y = g(x) \quad (3.33)$$

Secondo l'intuizione prima illustrata, si deve determinare una parametrizzazione che, oltre a catturare la media e la covarianza volute, permetta la propagazione dell'informazione all'interno di un set di equazioni arbitrarie non lineari. Questo è possibile generando una distribuzione discreta, caratterizzata dagli stessi momenti statistici di  $x$  (in questo caso, primo e secondo, ma eventualmente anche ordini maggiori), dove ogni campione della distribuzione possa essere direttamente trasformato tramite l'applicazione della funzione non lineare  $g(x)$ . I punti così trasformati divengono una parametrizzazione della distribuzione di probabilità della variabile di uscita  $y$ , la cui media e varianza a questo punto possono essere calcolate come la stima campionaria sul set di punti trasformati. La trasformazione *Unscented* si sviluppa quindi nei seguenti passi:

### 1. *Generazione dei punti sigma*

A questo passo vengono scelti  $l = 2n + 1$  campioni nello spazio degli stati in modo che consentano di cogliere le proprietà statistiche più importanti della variabile aleatoria  $x$  generica, ovvero la media e covarianza  $\bar{x}$  e  $P_x$ . Potenzialmente catturando  $n$ -momenti di  $x$  ci si assicura una precisione di  $\bar{y}$  e  $P_y$  fino al termine  $n$ -esimo dello sviluppo di Taylor. A ogni campione viene poi associato un peso  $W_i$  e quindi l'insieme dei punti *sigma* è genericamente:

$$\sigma = \{\chi_i, W_i : i = 0, 1, \dots, l - 1\} \quad (3.34)$$

In particolare, se si assume che la variabile aleatoria  $n$ -dimensionale  $x$  sia gaussiana, la sua distribuzione di probabilità risulta simmetrica rispetto al valore medio. Una parametrizzazione<sup>5</sup> possibile, che mantiene la covarianza e la media della distribuzione gaussiana, è generata con un set di campioni anch'esso simmetrico rispetto al

---

<sup>5</sup>Un campionamento non deterministico dei punti produce sigma point con un valore corretto di media e covarianza, ma generalmente introduce modi spuri nella distribuzione trasformata; questi comportano rumori ad alta frequenza che oscurano i segnali.[8]

valore medio di  $x$  e la si può sempre esprimere come:

$$\begin{aligned}\chi_0 &= \bar{x} \\ \chi_i &= \bar{x} + \sqrt{n} \cdot \sigma_i \\ \chi_{i+n} &= \bar{x} - \sqrt{n} \cdot \sigma_i\end{aligned}\tag{3.35}$$

dove, per  $i = 1, 2, \dots, n$ ,  $\sigma_i$  sono le covarianze delle righe (o equivalentemente delle colonne) della matrice  $\sqrt{P_x}$  (in Figura 3.3 rappresentata dal vettore rosso). Aggiungere  $\bar{x}$  ai punti ha reso il set simmetrico, i suoi momenti centrali dispari sono per questo nulli e i primi tre momenti sono gli stessi della distribuzione gaussiana originale; questo risultato si ottiene solo a condizione di garantire un numero minimo di campioni pari a  $2n + 1$ . Questa formulazione non impone quale, tra le infinite matrici radice quadrata, utilizzare per la determinazione dei punti poichè ognuna di esse può essere ricavata da un'altra matrice radice applicando una trasformazione ortonormale. La scomposizione scelta, essendo stabile ed efficiente, è quella di Cholensky per  $i = 1, 2, \dots, 2n$  si ottiene:

$$\begin{aligned}LL^T &= P_x \\ \sigma_i &= L_i\end{aligned}\tag{3.36}$$

dove  $L_i$  indica la  $i$ -esima colonna della matrice  $L$ . Tuttavia il filtro *Unscented* presenta, all'aumentare della dimensione del vettore di stato, difficoltà legate ai *simplex set of sigma point*; questi formano il minimo insieme chiuso e convesso di uno spazio euclideo che consente di definire i corretti valori di media e covarianza di una variabile  $n$ -dimensionale. Infatti all'aumentare di  $n$ , poichè la distanza dell' $i$ -esimo punto dalla media è una funzione di  $2^{(n-1/2)}$ , aumenta anche il raggio della sfera che racchiude i *sigma point*; questa espansione rende gli effetti di ordine più elevato, come l'orientamento, più significativi all'aumentare della dimensione dello stato. Sebbene i valori della media e della varianza campionate rimangano corretti, si incorre in significative difficoltà soprattutto in presenza di forti non linearità (come in presenza di esponenziali e funzioni trigonometriche) [17]. Per ovviare a questo problema è quindi necessario scalare i campioni di un fattore  $\alpha' > 0$  che:

- preservi il secondo ordine d'accuratezza del valore medio e della covarianza;
- mantenga le covarianze semidefinite positive in modo da poterne calcolare la

radice quadrata e quindi, tramite Cholensky, la matrice  $L$ ;

- possa essere reso arbitrariamente positivo in modo da minimizzare gli effetti di ordine elevato.

Una prima generalizzazione del filtro prevede che i punti vengano scalati di un fattore pari a  $\sqrt{(n+p)}$  scelto in modo da assicurare che la media e la varianza campionaria dei *sigma point* sia pari a  $\bar{x}$  e  $P_x$ . In particolare il grado di libertà extra della trasformazione  $p$  serve a regolare i momenti di ordine elevato dell'approssimazione e a ridurre gli errori di previsione [9]. Nel caso di  $x$  con distribuzione gaussiana conviene scegliere  $p+n=3$  poichè questo valore permette di minimizzare la differenza tra il quarto momento di  $x$  e quello calcolato tramite i punti sigma (per la dimostrazione si veda l'Appendice A). A ogni punto così determinato viene poi attribuito un peso scelto in modo da garantire un'accuratezza, almeno fino al secondo ordine, ai momenti della variabile  $x$ . Per tali pesi vale la condizione di normalizzazione

$$\sum_{i=0}^{l-1} W_i = 1 \quad (3.37)$$

e vengono scelti e assegnati ai relativi *sigma point* come segue.

$$\begin{aligned} \chi_0 &= \bar{x} & W_0 &= \frac{p}{n+p} \quad i=0 \\ \chi_i &= \bar{x} + \sqrt{n+p} \cdot L_i & W_i &= \frac{1}{2(n+p)} \quad i=1,2,\dots,n \\ \chi_{i+n} &= \bar{x} - \sqrt{n+p} \cdot L_i & W_{i+n} &= \frac{1}{2(n+p)} \quad i=1,2,\dots,n \end{aligned} \quad (3.38)$$

Il peso relativo al campione centrale risulta compreso fra  $-1 \leq W_0 \leq 1$  e determina la posizione dei *sigma point*: se è positivo i punti tendono ad allontanarsi dall'origine, al contrario ad avvicinarsi.

## 2. Generazione dei punti trasformati

A questo passo viene applicata ai *sigma point* la funzione non lineare  $g(x)$  in modo da ottenere i punti trasformati  $\gamma_i = g(\chi_i)$ ; in questo risiede il principio dell'*Unscented transformation*.

### 3. Calcolo delle statistiche dei campioni trasformati

A questo passo vengono calcolate la media e la covarianza dei campioni trasformati pesati come:

$$\begin{aligned}\bar{y} &= \sum_{i=0}^{l-1} W_i \gamma_i \\ P_y &= \sum_{i=0}^{l-1} W_i (y_i - \bar{y})(y_i - \bar{y})^T\end{aligned}\tag{3.39}$$

Inoltre l'aumentare di  $n$  fa diventare il parametro  $p = 3 - n$  negativo e, di conseguenza, lo diventano anche le matrici di covarianza per cui è impossibile calcolare le radici quadrate. Per risolvere questo problema Julier ha modificato ulteriormente la trasformazione scalando i campioni di fattore arbitrario  $\alpha$ , aggiuntivo rispetto al già mezionato fattore di scala  $\sqrt{(n+p)}$ , che modelli la distribuzione dei punti intorno al valore medio e consenta di catturare i primi due momenti della media e della covarianza. Questa nuova *Scaled Unscented Transformation* (SUT) non comporta costi computazionali e di memorizzazione aggiuntivi e permette di reintegrare nella stima della matrice di covarianza trasformata, tramite il parametro  $\beta$ , le informazioni di ordine più elevato. Nel caso di  $x$  gaussiana gli *scaled sigma point*, per  $i = 1, 2, \dots, n$ , diventano:

$$\begin{aligned}x_0 &= \bar{x} \\ \chi_i &= \bar{x} + \alpha \cdot \sqrt{n+p} \cdot L_i \\ &= \bar{x} + \sqrt{\alpha^2(n+p)} \cdot L_i \\ &= \bar{x} + \sqrt{\lambda+n} \cdot L_i \\ \chi_{i+n} &= \bar{x} - \alpha \cdot \sqrt{n+p} \cdot L_i \\ &= \bar{x} - \sqrt{\alpha^2(n+p)} \cdot L_i \\ &= \bar{x} - \sqrt{\lambda+n} \cdot L_i\end{aligned}\tag{3.40}$$

dove  $\lambda = \alpha^2(n+p) - n$  è uno dei parametri di scala ( $\alpha' = \alpha \cdot \sqrt{n+p} = \sqrt{\lambda+n}$ ). I pesi diventano:

$$\begin{aligned}W_0^m &= \frac{\lambda}{n+\lambda} \quad i = 0 \\ W_0^c &= \frac{\lambda}{(n+\lambda)} + (1 - \alpha^2 + \beta) \quad i = 0 \\ W_i^m = W_i^c &= \frac{1}{2(n+\lambda)} \quad i = 1, 2, \dots, 2n\end{aligned}\tag{3.41}$$

dove gli apici  $m$  e  $c$  indicano quali utilizzare nell'algoritmo per il computo rispettivamente delle medie e delle covarianze [18]. I parametri di scala che permettono la manipolazione dei *sigma point* sono quindi tre:

- $\alpha$  : controlla la distribuzione dei punti intorno a quello medio; può assumere valori compresi fra  $10^{-4} \leq \alpha \leq 1$  e deve rimanere un numero piccolo per non distanziare eccessivamente i campioni gli uni dagli altri. Il suo valore di *default* è  $\alpha = 1$  per cui la SUT coincide con la UT, questo valore viene diminuito se si è in presenza di forti non linearità.
- $p$  : garantisce che la matrice di covarianza sia semi-definita positiva se il suo valore è  $p \geq 0$ ; una scelta possibile è  $p = 3/\alpha^2 - n$  [16].
- $\beta$  : incorpora le informazioni "a priori" della distribuzione di  $x$  aumentando o diminuendo il peso del punto centrale nel calcolo della matrice di covarianza; può assumere solo valori positivi e si usa  $\beta = 2$  se la distribuzione di  $x$  è gaussiana.

Nella fase iniziale d'implementazione dell'algoritmo sarà necessario determinare i valori dei parametri di scala e in particolare, posto  $p = 3/\alpha^2 - n$ , di  $\alpha$  e  $\beta$  che ottimizzano il filtro. Il semplice approccio della SUT porta ad approssimazioni accurate fino al terzo ordine per le GRV e almeno fino al secondo ordine per variabili non gaussiane, comunque approssimate a normali nell'applicazione dell'algoritmo. Come sopra specificato, per aumentare l'ordine d'accuratezza, bisogna regolare il parametro  $\beta$  (per la dimostrazione di questo si veda l'Appendice B).

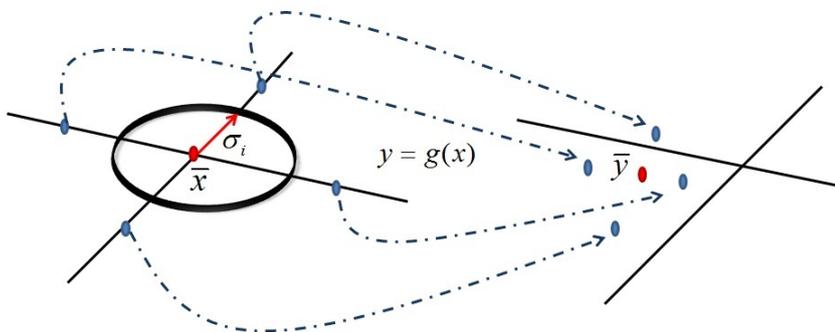


Figura 3.3: Trasformazione *Unscented*

### 3.4.2 Algoritmo SUKF

Lo *Scaled Unscented Kalman Filter* è una semplice estensione della SUT al problema della stima ricorsiva a minimo errore quadratico medio. Data la dipendenza delle funzioni non lineari  $f_d(\cdot)$  e  $h_d(\cdot)$  dai rumori di processo e di misura, lo SUKF approssima la  $x$  con una GRV e poi applica la trasformazione, non più allo stato, ma allo stato esteso e ai modelli del processo e di misura estesi:

$$x^a(k) = \begin{bmatrix} x(k) \\ w(k) \\ v(k) \end{bmatrix} \quad (3.42)$$

$$\begin{cases} x(k) = f_d(k-1, x^a(k-1), u(k-1)) \\ z(k) = h_d(k, x^a(k), v(k)) \end{cases} \quad (3.43)$$

Lo stato avrà la nuova dimensione<sup>6</sup>  $n_a = n + q + m$  data dalla somma delle dimensioni del vettore di stato originario, del rumore di processo e di misura. La covarianza aumentata, costruita dalle matrici di covarianza dello stato  $P^{(k)}_{(n \times n)}$  e dei rumori, risulta:

$$P^a_{(k|k)} = \begin{bmatrix} P^{(k|k)}_{(n \times n)} & 0 & 0 \\ 0 & Q^{(k)}_{(q \times q)} & 0 \\ 0 & 0 & R^{(k)}_{(m \times m)} \end{bmatrix}_{(n_a \times n_a)} \quad (3.44)$$

Questa matrice, essendo  $P^a_{(k|k)} = E[e^a(k)e^{aT}(k)] = E[(x^a(k) - \hat{x}^a(k|k))(x^a(k) - \hat{x}^a(k|k))^T]$ , rappresenta l'incertezza associata alla  $\hat{x}^a(k|k)$  e deve essere minimizzata per ottimizzare la stima. Il filtro, come si può vedere dalla Figura 3.4, si sviluppa nei seguenti passi:

#### **Inizializzazione all'istante $k = 0$**

1. dello stato, della sua matrice di covarianza e di quelle dei rumori:

$$\hat{x}(0) = \bar{x}(0) = E[x(0)]$$

$$P(0) = E[(x(0) - \bar{x}(0))(x(0) - \bar{x}(0))^T]$$

<sup>6</sup>Nel caso in cui i rumori di misura siano additivi, ovvero  $z(k) = h(k, x(k), u(k)) + v(k)$ , il vettore dello stato esteso diventa  $x^a(k) = [x(k), w(k)]^T$  e le sue dimensioni saranno  $n_a = n + q$ . Nel paragrafo successivo verrà trattato il caso in cui entrambi i rumori di misura sono additivi.

$$Q(0) = E[(w(0) - \bar{w}(0))(w(0) - \bar{w}(0))^T]$$

$$R(0) = E[(v(0) - \bar{v}(0))(v(0) - \bar{v}(0))^T]$$

2. dello stato aumentato e della sua matrice di covarianza:

$$\hat{x}^a(0) = \bar{x}^a(0) = E[x^a(0)] = \begin{bmatrix} \bar{x}(0) & 0_{q \times 1} & 0_{m \times 1} \end{bmatrix}^T$$

$$P^a(0) = E[(x^a(0) - \bar{x}^a(0))(x^a(0) - \bar{x}^a(0))^T]$$

$$L^a(0) \text{ t.c. } L^a(0)L^{aT}(0) = P_0^a$$

3. dei  $2n_a + 1$  *sigma point*, generati dalla matrice di covarianza all'istante  $k = 0$ , e dei relativi pesi:

$$\chi_0^a(0) = \bar{x}^a(0)$$

$$W_0^m = \frac{\lambda}{n_a + \lambda} \quad i=0$$

$$\chi_i^a(0) = \bar{x}^a(0) + \sqrt{\lambda + n_a} \cdot L_i^a(0) \quad \text{per } i=1,2,\dots,n_a$$

$$W_0^c = \frac{\lambda}{(n_a + \lambda)} + (1 - \alpha^2 + \beta) \quad i=0$$

$$\chi_{i+n_a}^a(0) = \bar{x}^a(0) - \sqrt{\lambda + n_a} \cdot L_i^a(0) \quad \text{per } i=1,2,\dots,n_a$$

$$W_i^m = W_i^c = \frac{1}{2(n_a + \lambda)} \quad i=1,2,\dots,2n_a$$

ogni campione è formato dalle tre componenti  $\chi_i^a(0) = [\chi_i^x(0), \chi_i^w(0), \chi_i^y(0)]^T$

**Per  $k \geq 1$**

1. **Previsione.** A questo passo, noti i *sigma point*  $\chi_i^a(k)$  e i relativi pesi, vengono calcolati relativamente all'istante  $k$ -esimo:

(a) i punti trasformati e le loro statistiche applicando ai *sigma punti* la funzione non lineare  $f_d(\cdot)$

$$\tilde{\chi}_i^x(k|k-1) = f_d(k-1, u(k-1), \chi_i^x(k-1), \chi_i^w(k-1)) \quad \text{per } i = 0, 1, \dots, 2n_a$$

$$\hat{x}(k|k-1) = \bar{x}(k|k-1) = \sum_{i=0}^{2n_a} W_i^m \tilde{\chi}_i^x(k|k-1)$$

$$P(k|k-1) = \sum_{i=0}^{2n_a} W_i^c [\tilde{\chi}_i^x(k|k-1) - \bar{x}(k|k-1)][\tilde{\chi}_i^x(k|k-1) - \bar{x}(k|k-1)]^T$$

dove la media è lo stato stimato.

- (b) le misure trasformate e le loro statistiche applicando a queste la funzione non lineare  $h_d(\cdot)$

$$\tilde{Z}_i(k|k-1) = h_d(k-1, \mathbf{u}(k-1), \tilde{\chi}_i^x(k|k-1), \tilde{\chi}_i^v(k|k-1)) \text{ per } i = 0, 1, 2, \dots, 2n_a$$

$$\hat{z}(k|k-1) = \bar{z}(k|k-1) = \sum_{i=0}^{2n_a} W_i^m \tilde{Z}_i(k|k-1)$$

$$P_{zz}(k|k-1) = \sum_{i=0}^{2n_a} W_i^c [\tilde{Z}_i(k|k-1) - \bar{z}(k|k-1)] [\tilde{Z}_i(k|k-1) - \bar{z}(k|k-1)]^T$$

$$P_{xz}(k|k-1) = \sum_{i=0}^{2n_a} W_i^c [\tilde{\chi}_i^x(k|k-1) - \bar{x}(k|k-1)] [\tilde{Z}_i(k|k-1) - \bar{z}(k|k-1)]^T$$

dove  $P_{zz}(k|k-1)$  è la matrice di covarianza dell'innovazione e  $P_{xz}(k|k-1)$  è la matrice di cross-correlazione.

2. **Aggiornamento della misura.** A questo passo vengono calcolati:

- (a) l'innovazione  $\mathbf{v}(k) = z(k) - \hat{z}(k|k-1)$   
 (b) il guadagno del filtro

$$\mathbf{K}(k) = P_{xz}(k|k-1) P_{zz}(k|k-1)^{-1}$$

3. **Correzione.** A questo passo vengono calcolate le stime “a posteriori” dello stato e di quello aumentato con le relative covarianze, i nuovi *sigma point* e i nuovi pesi. Se non sono note le  $z(k)$  (per cui, come per l'EKF, la variabile *flag* assume il valore nullo) vengono semplicemente propagate le stime precedenti (ovvero  $\hat{x}(k|k) = \bar{x}(k|k) = \hat{x}(k|k-1)$  e  $P(k|k) = P(k|k-1)$ ). Se invece lo sono (la variabile *flag* diventa unitaria) si determinano:

- (a) le stime “a posteriori” dello stato e della sua covarianza

$$\hat{x}(k|k) = \bar{x}(k|k) = \bar{x}(k|k-1) + \mathbf{K}(k) \mathbf{v}(k)$$

$$P(k|k) = P(k|k-1) - \mathbf{K}(k) P_{zz}(k|k-1) \mathbf{K}(k)^T$$

- (b) le stime “a posteriori” dello stato aumentato e della sua covarianza

$$\hat{x}^a(k|k) = \bar{x}^a(k|k) = E[x^a(k|k)] = [\bar{x}(k|k), \mathbf{0}_{q \times 1}, \mathbf{0}_{m \times 1}]^T$$

$$P^a(k|k) = E[(x^a(k) - \bar{x}^a(k|k))(x^a(k) - \bar{x}^a(k|k))^T]$$

$$L^a(k) \text{ t.c. } L^a(k) L^{aT}(k) = P^a(k)$$

(c) i nuovi *sigma point* e i nuovi pesi relativi all'istante  $k$

$$\chi_0^a(k) = \bar{x}^a(k)$$

$$\chi_i^a(k) = \bar{x}^a(k) + \sqrt{\lambda + n_a} \cdot L_i^a(k) \text{ per } i=1,2,\dots,n_a$$

$$\chi_{i+n_a}^a(k) = \bar{x}^a(k) - \sqrt{\lambda + n_a} \cdot L_i^a(k) \text{ per } i=1,2,\dots,n_a$$

$$W_0^m = \frac{\lambda}{n_a + \lambda} \quad i=0$$

$$W_0^c = \frac{\lambda}{(n_a + \lambda)} + (1 - \alpha^2 + \beta) \quad i=0$$

$$W_i^m = W_i^c = \frac{1}{2(n_a + \lambda)} \quad i=1,2,\dots,2n_a$$

ogni campione è formato dalle tre componenti  $\chi_i^a(0) = [\chi_i^x(0), \chi_i^w(0), \chi_i^y(0)]^T$

Dopo questa fase il filtro genera nuovamente, noti i *sigma point*  $\chi_i^a(k)$  e i relativi pesi, i punti e le misure trasformate e le loro statistiche relativi all'istante  $k+1$ :

$$\tilde{\chi}_i^x(k+1|k) = f_d(k, u(k), \chi_i^x(k), \chi_i^w(k)) \text{ per } i = 0, 1, \dots, 2n_a$$

$$\hat{x}(k+1|k) = \bar{x}(k+1|k) = \sum_{i=0}^{2n_a} W_i^m \tilde{\chi}_i^x(k+1|k)$$

$$P(k+1|k) = \sum_{i=0}^{2n_a} W_i^c [\tilde{\chi}_i^x(k+1|k) - \bar{x}(k+1|k)] [\tilde{\chi}_i^x(k+1|k) - \bar{x}(k+1|k)]^T$$

$$\tilde{Z}_i(k+1|k) = h_d(k, u(k), \tilde{\chi}_i^x(k+1|k), \tilde{\chi}_i^y(k+1|k)) \text{ per } i = 0, 1, 2, \dots, 2n_a$$

$$\hat{z}(k+1|k) = \bar{z}(k+1|k) = \sum_{i=0}^{2n_a} W_i^m \tilde{Z}_i(k+1|k)$$

$$P_{zz}(k+1|k) = \sum_{i=0}^{2n_a} W_i^c [\tilde{Z}_i(k+1|k) - \bar{z}(k+1|k)] [\tilde{Z}_i(k+1|k) - \bar{z}(k+1|k)]^T$$

$$P_{xz}(k+1|k) = \sum_{i=0}^{2n_a} W_i^c [\tilde{\chi}_i^x(k+1|k) - \bar{x}(k+1|k)] [\tilde{Z}_i(k+1|k) - \bar{z}(k+1|k)]^T$$

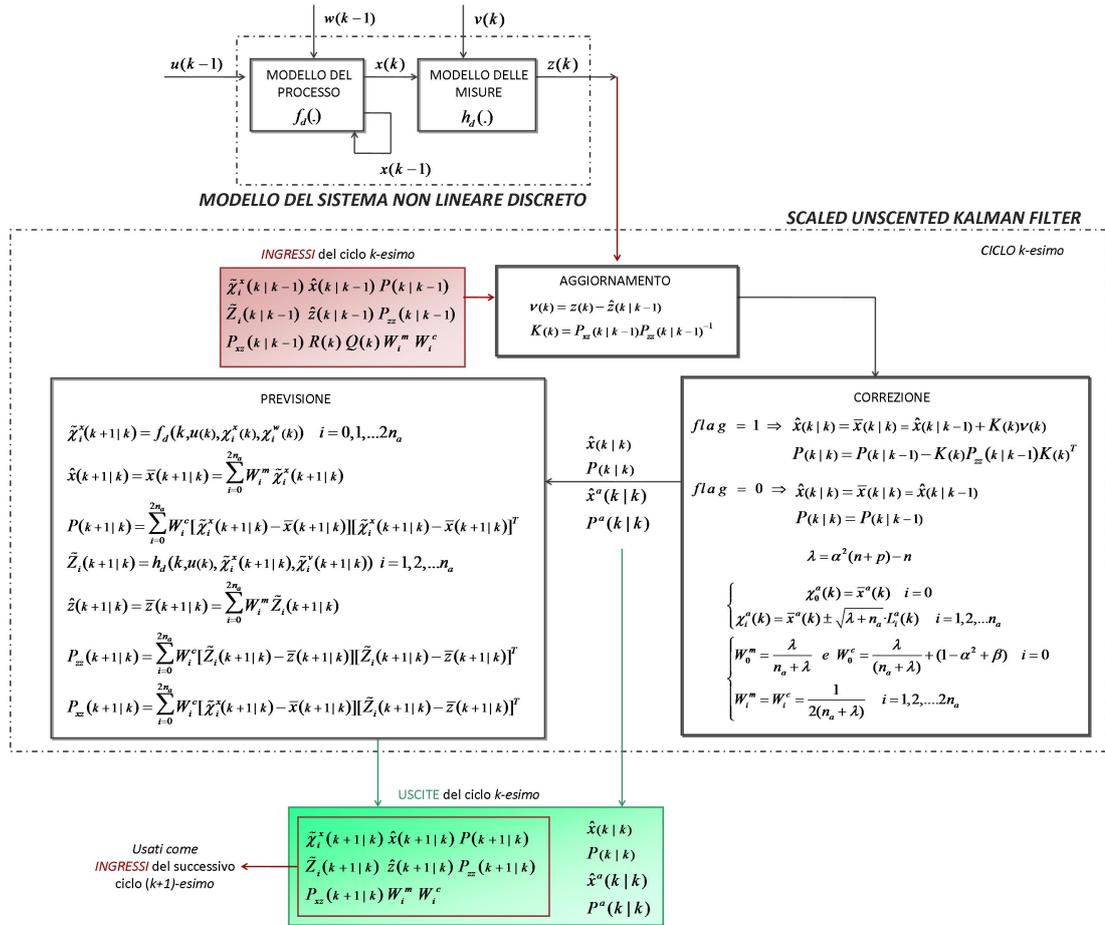


Figura 3.4: Schema di funzionamento dello Scaled Unscented Kalman Filter

### 3.4.3 Algoritmo SUKF specializzato per i modelli con rumori additivi e privo di ingressi

Come è stato fatto nel caso dell'*Extended Kalman Filter* nel paragrafo 2.2, viene preso ora in considerazione un modello non lineare specificato con le stesse condizioni di quelli elaborati in seguito, in cui:

- i rumori *white noise* sono gaussiani a valore medio nullo, correlazione nulla fra istanti temporali differenti, scorrelati fra di loro e additivi
- le matrici di covarianza dei rumori di processo  $Q$  e misura  $R$  sono tempo invarianti
- non sono presenti ingressi
- la funzione  $h(\cdot)$  è lineare le cui uscite, tramite la matrice  $C$ , sono alcune componenti dello stato a cui si sovrappongono i rumori di misura

Il sistema continuo che lo descrive assume quindi la forma:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t)) + Bw(t) \\ z(t) = Cx(t) + v(t) \end{cases} \quad (3.45)$$

la cui versione discretizzata, come si è visto in precedenza è:

$$\begin{cases} x(k) = f_d(x(k-1)) + B_k w(k-1) \\ z(k) = C_k x(k) + v(k) \end{cases} \quad (3.46)$$

dove  $B_k = T \cdot B$ ,  $C_k = C$  e  $f_d(x(k-1)) = x(k-1) + T \cdot f(x(k-1))$ . Le equazioni del filtro si semplificano poichè non è necessario introdurre lo stato esteso, ovvero si ha:

$$\begin{aligned} x^a(k) &= x(k) & n_a &= n \\ \hat{x}^a(k) &= \hat{x}(k) = \bar{x}(k) \end{aligned} \quad (3.47)$$

$$P^a(k|k) = E [(x(k) - \bar{x}(k|k))(x(k) - \bar{x}(k|k))^T] = P(k|k)_{(n \times n)}$$

Il filtro in caso di rumori additivi si sviluppa nei passi:

**Inizializzazione all'istante  $k = 0$**

1. dello stato, della sua matrice di covarianza e di quelle dei rumori:

$$\hat{x}(0) = \bar{x}(0) = E[x(0)]$$

$$P(0) = E[(x(0) - \bar{x}(0))(x(0) - \bar{x}(0))^T]$$

$$Q(0) = E[(w(0) - \bar{w}(0))(w(0) - \bar{w}(0))^T] = Q$$

$$R(0) = E[(v(0) - \bar{v}(0))(v(0) - \bar{v}(0))^T] = R$$

2. dello stato aumentato e della sua matrice di covarianza:

$$\hat{x}^a(0) = \bar{x}(0) = E[x(0)]$$

$$P^a(0) = E[(x(0) - \bar{x}(0))(x(0) - \bar{x}(0))^T] = P(0)_{(n \times n)}$$

$$L^a(0) = L(0) \text{ t.c. } L(0)L^T(0) = P_0$$

3. dei  $2n_a + 1$  sigma point, generati dalla matrice di covarianza all'istante  $k = 0$ , e dei relativi pesi:

$$\chi_0(0) = \bar{x}(0) \qquad W_0^m = \frac{\lambda}{n_a + \lambda} \quad i=0$$

$$\chi_i(0) = \bar{x}(0) + \sqrt{\lambda + n} \cdot L_i(0) \quad \text{per } i=1,2,\dots,n \qquad W_0^c = \frac{\lambda}{(n+\lambda)} + (1-\alpha^2+\beta) \quad i=0$$

$$\chi_{i+n}(0) = \bar{x}(0) - \sqrt{\lambda + n} \cdot L_i(0) \quad \text{per } i=1,2,\dots,n \qquad W_i^m = W_i^c = \frac{1}{2(n_a + \lambda)} \quad i=1,2,\dots,2n$$

ogni campione ha una componente  $\chi_i^a(0) = \chi_i(0) = [\chi_i^x(0)]$ .

**Per  $k \geq 1$**

1. **Previsione.**

$$\tilde{\chi}_i^x(k|k-1) = f_d(k-1, u(k-1), \chi_i^x(k-1), \dots) \quad \text{per } i = 0, 1, \dots, 2n$$

$$\hat{x}(k|k-1) = \bar{x}(k|k-1) = \sum_{i=0}^{2n} W_i^m \tilde{\chi}_i^x(k|k-1)$$

$$P(k|k-1) = \sum_{i=0}^{2n} W_i^c [\tilde{\chi}_i^x(k|k-1) - \bar{x}(k|k-1)][\tilde{\chi}_i^x(k|k-1) - \bar{x}(k|k-1)]^T + Q$$

$$\tilde{Z}_i(k|k-1) = C_k \cdot \tilde{\chi}_i^x(k|k-1) \text{ per } i = 0, 1, 2, \dots, 2n$$

$$\hat{z}(k|k-1) = \bar{z}(k|k-1) = \sum_{i=0}^{2n} W_i^m \tilde{Z}_i(k|k-1)$$

$$P_{zz}(k|k-1) = \sum_{i=0}^{2n} W_i^c [\tilde{Z}_i(k|k-1) - \bar{z}(k|k-1)] [\tilde{Z}_i(k|k-1) - \bar{z}(k|k-1)]^T + R$$

$$P_{xz}(k|k-1) = \sum_{i=0}^{2n} W_i^c [\tilde{\chi}_i^x(k|k-1) - \bar{x}(k|k-1)] [\tilde{Z}_i(k|k-1) - \bar{z}(k|k-1)]^T$$

2. **Aggiornamento della misura.** In questa fase vengono calcolati:

$$\mathbf{v}(k) = z(k) - \hat{z}(k|k-1)$$

$$\mathbf{K}(k) = P_{xz}(k|k-1) P_{zz}(k|k-1)^{-1}$$

3. **Correzione.** In questa fase vengono calcolate le stime “a posteriori” dello stato e di quello aumentato con le relative covarianze, i nuovi *sigma point* e i nuovi pesi. Se non sono note le  $z(k)$  (per cui la variabile *flag* assume il valore nullo) vengono semplicemente propagate le stime precedenti ( $\hat{x}(k|k) = \hat{x}(k|k-1)$  e  $P(k|k) = P(k|k-1)$ ); se invece lo sono (la variabile *flag* diventa unitaria) si determinano:

$$\hat{x}(k|k) = \bar{x}(k|k) = \bar{x}(k|k-1) + \mathbf{K}(k) \mathbf{v}(k)$$

$$P(k|k) = P(k|k-1) - \mathbf{K}(k) P_{zz}(k|k-1) \mathbf{K}(k)^T$$

$$\hat{x}^a(k|k) = \bar{x}(k|k) = E[x(k|k)]$$

$$P^a(k|k) = E[(x(k) - \bar{x}(k|k))(x(k) - \bar{x}(k|k))^T] = P(k)_{(n \times n)}$$

$$L^a(k) = L(k) \text{ tc. } L(k) L^T(k) = P^a(k)$$

$$\chi_0(k) = \bar{x}(k)$$

$$W_0^m = \frac{\lambda}{n_a + \lambda} \quad i=0$$

$$\chi_i(k) = \bar{x}(k) + \sqrt{\lambda + n} \cdot L_i(k) \text{ per } i=1, 2, \dots, n$$

$$W_0^c = \frac{\lambda}{(n+\lambda)} + (1 - \alpha^2 + \beta) \quad i=0$$

$$\chi_{i+n}(k) = \bar{x}(k) - \sqrt{\lambda + n} \cdot L_i(k) \text{ per } i=1, 2, \dots, n$$

$$W_i^m = W_i^c = \frac{1}{2(n_a + \lambda)} \quad i=1, 2, \dots, 2n$$

ogni campione ha la componente  $\chi_i^a(k) = \chi_i(k) = [\chi_i^x(k)]$ .

Dopo questa fase il filtro genera nuovamente, noti i *sigma point*  $\chi_i^{(k)}$  e i relativi pesi, i punti e le misure trasformate e le loro statistiche relativi all'istante  $k + 1$ :

$$\tilde{\chi}_i^{x(k+1|k)} = f_d(k, u(k), \chi_i^{x(k)}) \text{ per } i = 0, 1, \dots, 2n$$

$$\hat{x}(k+1|k) = \bar{x}(k+1|k) = \sum_{i=0}^{2n} W_i^m \tilde{\chi}_i^{x(k+1|k)}$$

$$P(k+1|k) = \sum_{i=0}^{2n} W_i^c [\tilde{\chi}_i^{x(k+1|k)} - \bar{x}(k+1|k)] [\tilde{\chi}_i^{x(k+1|k)} - \bar{x}(k+1|k)]^T + Q$$

$$\tilde{Z}_i^{(k+1|k)} = h_d(k, u(k), \tilde{\chi}_i^{x(k+1|k)}, \tilde{\chi}_i^{v(k+1|k)}) \text{ per } i = 0, 1, 2, \dots, 2n$$

$$\hat{z}(k+1|k) = \bar{z}(k+1|k) = \sum_{i=0}^{2n} W_i^m \tilde{Z}_i^{(k+1|k)}$$

$$P_{zz}(k+1|k) = \sum_{i=0}^{2n} W_i^c [\tilde{Z}_i^{(k+1|k)} - \bar{z}(k+1|k)] [\tilde{Z}_i^{(k+1|k)} - \bar{z}(k+1|k)]^T + R$$

$$P_{xz}(k+1|k) = \sum_{i=0}^{2n} W_i^c [\tilde{\chi}_i^{x(k+1|k)} - \bar{x}(k+1|k)] [\tilde{Z}_i^{(k+1|k)} - \bar{z}(k+1|k)]^T$$

### 3.5 Confronto fra le prestazioni dei filtri non lineari

L'EKF permette di ottenere una stima polarizzata e inconsistente e, nonostante sia ampiamente utilizzato, può risultare inappropriato se applicato ad alcuni sistemi fortemente non lineari per i seguenti motivi.

1. E' molto sensibile alle condizioni iniziali, all'approssimazione fatta con la linearizzazione e quella di gaussianità della *pdf* dello stato.
2. La fase di *tuning* risulta complicata e affidabile solo per quei sistemi che risultano quasi lineari nella scala temporale dell'intervallo di aggiornamento [8].
3. Per linearizzare le funzioni è necessario il calcolo delle matrici Jacobiane che, oltre alle già complicate inversioni, comporta notevoli difficoltà d'implementazione e computazionali specialmente in sistemi di ordine superiore.
4. Non può essere applicato a funzioni con punti di discontinuità per i quali non è possibile calcolare gli Jacobiani. Se viene meno l'ipotesi di linearizzazione locale

il filtro può diventare altamente instabile in quanto errori nello stato lo portano a divergere.

5. Come già introdotto, nello sviluppo in serie di Taylor i termini di ordine inferiore sono quelli più influenti; per questo vengono trascurati quelli superiori al secondo ottenendo:

$$\begin{aligned} y &= g(\bar{x}) + \nabla f \delta x \\ \bar{y} &= g(\bar{x}) \\ P_{yy} &= (\nabla f)P_{xx}(\nabla f)^T \end{aligned} \quad (3.48)$$

Se però i termini superiori al primo sono significativi, questa linearizzazione può portare a un'approssimazione insufficiente della media e della covarianza; in particolare introduce errori al secondo ordine nel computo del valore medio e al quarto nel computo della covarianza, rendendo la stima dell'EKF *polarizzata e inconsistente*.

Lo SUKF non presenta questi problemi perchè la SUT genera errori di quarto ordine che, oltre ad essere di minore entità, possono essere ridotti attraverso la scelta di opportuni fattori di scala. Per meglio comprendere l'effetto del troncamento della linearizzazione al primo ordine e confrontarlo con i risultati ottenuti con l'UKF, si consideri ora, come esempio di trasformazione non lineare, il moto di un veicolo che compie una traiettoria curva. Il suo stato è ovviamente composto dalle coordinate sul piano del moto e l'orientamento del veicolo.

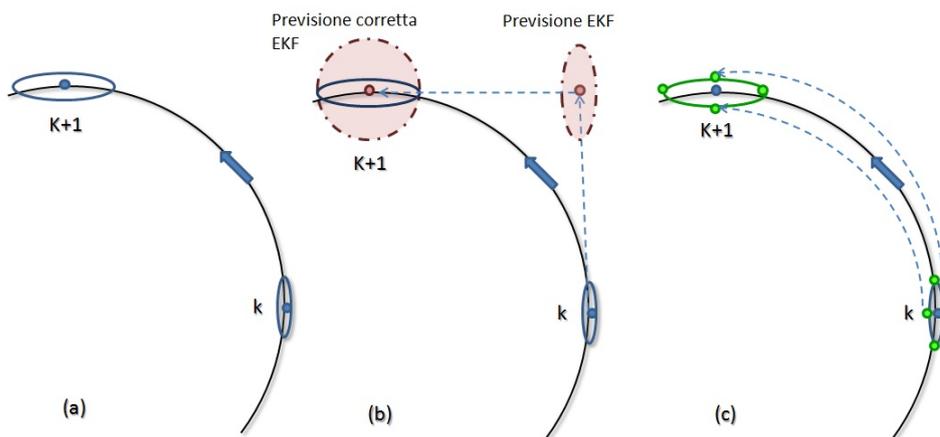


Figura 3.5: Moto di un veicolo lungo una traiettoria curva

Come si può vedere dalla Figura 3.5(a) in cui è riportata la traiettoria vera del veicolo, l'ellisse che indica la covarianza all'istante  $k + 1$  è espansa e ruotata rispetto a quella iniziale. Questa deformazione si verifica perchè le incertezze sulla posizione iniziale vengono aumentate dalle incertezze sul moto stesso lungo l'arco e sulla rotazione del veicolo. L'EKF come si può vedere dalla Figura 3.5(b), predice la stima della posizione media utilizzando il modello del moto circolare, mentre la covarianza viene proiettata lungo la direzione iniziale del moto (ovvero lungo la tangente alla curva). Questo crea un errore nell'informazione di direzione poichè la covarianza "a priori" così calcolata riflette l'incertezza del veicolo nell'istante precedente piuttosto che nell'istante corrente. Per compensarlo si aggiunge alla dinamica dello stato l'effetto dell'errore di modello tramite la matrice  $Q(k)$ ; questa espande l'ellisse di covarianza in modo che il vero ellisse giaccia al suo interno. L'UKF agisce diversamente infatti, piuttosto che proiettare il valore medio e la covarianza in equazioni separate, approssima l'ellisse all'istante  $k$  col set di *sigma point* che poi vengono proiettati separatamente lungo la traiettoria circolare, come si può vedere in Figura 3.5(c); in questo modo l'ellisse all'istante  $k + 1$  risulta ruotato e scalato correttamente [8]. I vantaggi apportati dall'UKF che lo rendono più adatto alle forti non linearità sono:

1. Una minore sensibilità alle condizioni iniziali e all'approssimazione di gaussianità della *pdf* dello stato.
2. La forma vettoriale con cui viene costruito l'algoritmo lo rende adatto *per ogni* scelta del *modello del processo*, anche perchè non è necessario il computo di Jacobiani e di Hessiani
3. La trasformazione assicura la corretta cattura dei momenti di  $x$  fino al secondo ordine e, di conseguenza, anche di quelli di  $y$ . L'*approssimazione* che si ottiene è per questo *migliore* di quella ottenibile tramite la linearizzazione, in particolare la media è di un ordine superiore di accuratezza rispetto all'EKF e la covarianza del medesimo. Essendo poi approssimata la distribuzione di  $x$ , piuttosto che la funzione non lineare, il suo sviluppo in serie non viene troncato in un ordine particolare. Si può perciò dimostrare che l'algoritmo è in grado di incorporare anche informazioni da parte degli ordini superiori, portando a una precisione ancora maggiore. In conclusione la stima ottenuta *non è polarizzata* e, scegliendo un opportuno valore di  $p$  e  $\beta$ , è anche *consistente* ed *efficiente*. La dimostrazione analitica del come sia possibile raggiungere questo grado di precisione viene data nell'Appendice B.

4. I punti sigma catturano la stessa media e covarianza indipendentemente dalla scelta della matrice  $L$ , quindi per calcolarla si può utilizzare il metodo di decomposizione di Cholesky che è stabile.

Si vuole ora confrontare l'UKF con le tecniche di campionamento generico quale l'integrazione Monte Carlo (utilizzata nel *Particle Filter*) che richiede un numero maggiore di punti per propagare la distribuzione dello stato, anche non gaussiana, visto che converte gli integrali (3.20) in somme finite. Anche con questo metodo i *sigma point* vengono trasformati utilizzando la funzione non lineare  $y_i = g(x_i)$  e la media e la covarianza vengono calcolate come:

$$\begin{aligned}\bar{y} &= \frac{1}{n} \sum_i y_i \\ P_y &= \frac{1}{n} \sum_i (y_i - \bar{y})(y_i - \bar{y})^T\end{aligned}\quad (3.49)$$

Poichè non c'è bisogno di imporre l'ipotesi di gaussianità della *pdf* e poichè vengono usati un numero molto maggiore di *sigma point*, è possibile raggiungere con questa tecnica una precisione maggiore; tuttavia bisogna implementare un centinaio di punti per ottenere una buona stima. Per questo talvolta è preferibile utilizzare al suo posto l'UKF che richiede solo  $l = 2n + 1$  campioni che permettono di catturare i primi due momenti di  $x$  attraverso una scelta deterministica dei punti.

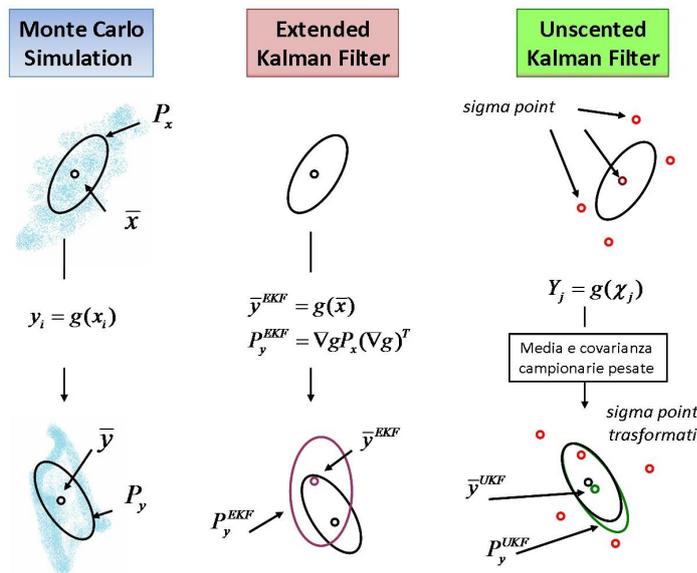


Figura 3.6: Confronto degli approcci *sigma-point* e EKF in un caso 2D

Un semplice esempio comparativo dell'approccio *sigma-point* è mostrato in Figura 3.6 per un sistema a due dimensioni: il grafico di sinistra mostra la vera media e covarianza ottenute con la propagazione mediante il metodo Monte Carlo; gli altri grafici mostrano i risultati ottenuti con l'EKF e con l'UKF (si noti come solo 5 punti siano necessari per il caso 2D). Da ciò è evidente come le prestazioni dell'approccio *sigma-point* siano migliori [21, 18]. Inoltre, come già illustrato, è stato scelto di utilizzare la versione *Scaled* dell'UKF poichè, oltre ad assicurare un corretto funzionamento del filtro in caso di forti non linearità all'aumentare della dimensione dello stato, permette di incorporare informazioni di ordine elevato nelle stime. Per confrontare il comportamento dello SUKF al variare dei parametri di scala con quello del filtro EKF e Monte Carlo, si analizza ora il caso della trasformazione non lineare da coordinate polari a cartesiane:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} r \cos \theta \\ r \sin \theta \end{pmatrix} \\ \nabla f &= \begin{bmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.50)$$

Si consideri un sensore che rilevi la posizione in coordinate polari  $(r, \theta)$  e si supponga che queste debbano essere convertite in coordinate cartesiane. In Figura 3.7 sono riportate le ellissi generate dalla simulazione *Monte Carlo* di  $3,5 \times 10^6$  punti che, data la precisione che può raggiungere, rappresenta le statistiche vere, quella ottenuta dalla linearizzazione e quella dell'SUKF per  $\beta = 0$  e  $\beta = 2$ . Queste curve sono centrate rispettivamente in  $\bar{y}_{MC}$ ,  $\bar{y}_{EKF}$ ,  $\bar{y}_{\beta=0}$  e  $\bar{y}_{\beta=2}$  e sono i luoghi dei punti  $\{y : (y - \bar{y})P_y^{-1}(y - \bar{y}) = 1\}$  che rappresentano l'entità e l'orientamento di  $P_{yy}$ . L'errore prodotto dalla linearizzazione, detto *bias* =  $\bar{y}_{MC} - \bar{y}_{EKF}$ , comporta una traslazione dell'ellisse in direzione  $x$  (in questo caso verso valori maggiori) che invece non si verifica con l'SUKF per cui si ha infatti  $\bar{y}_{\beta=0} = \bar{y}_{\beta=2} = \bar{y}_{MC}$ . Ogni volta che il filtro EKF aggiorna la stima, introduce *biases* non modellati e correlazioni che possono portare all'instabilità del filtro. Poiché questo tipo di errore deriva dal processo di trasformazione stesso, si ripete con lo stesso segno ogni volta che si compie una trasformazione delle coordinate. Inoltre, a causa dell'inconsistenza della stima di EKF, l'ellisse risulta fortemente schiacciato come nel caso dell'SUKF per cui  $\beta = 0$ . Questo accade perchè il campionamento cattura correttamente solo i primi due momenti della media e della covarianza. Le *performance* possono essere migliorate

incorporando nella stima le informazioni di più alto ordine ponendo  $\beta = 2$  (posto che si sia nel caso gaussiano); come si può vedere dalla Figura 3.7 l'ellisse risulta molto meno schiacciata.

In conclusione, nonostante l'UKF e la sua versione *Scaled* sia una tecnica di stima dello stato molto efficace e superiore in molti casi (quale la navigazione di vetture) all'EKF, tra queste due metodologie non ne esiste una in assoluto superiore rispetto all'altra. Come già accennato a seconda dell'applicazione, bisogna scegliere quella migliore in base a un *trade-off* di caratteristiche come accuratezza della stima, facilità di implementazione del filtro, robustezza numerica e peso computazionale. In particolare nel caso di sistemi quasi-stazionari l'EKF può risultare egualmente efficace e meno dispendioso dal punto di vista computazionale in quanto anche gli Jacobiani sono di facile determinazione. Lo SUKF fornisce misure molto più accurate solo se sono significativi gli effetti dell'indice di kurtosi (si veda l'Appendice A) e dei momenti di ordine elevato; al contrario le covarianze assumono valori molto minori dell'unità (nell'ordine di  $10^{-4}$  -  $10^{-6}$ ) e si osserva uno scarso miglioramento delle prestazioni al variare dei parametri  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $p$  [20]. Inoltre si è scelto di utilizzare lo SUKF e non un filtro basato sulla tecnica Monte Carlo per verificare sui sistemi in oggetto l'effettivo aumento di precisione rispetto all'EKF senza dover eccedere nel calcolo dei *sigma point*.

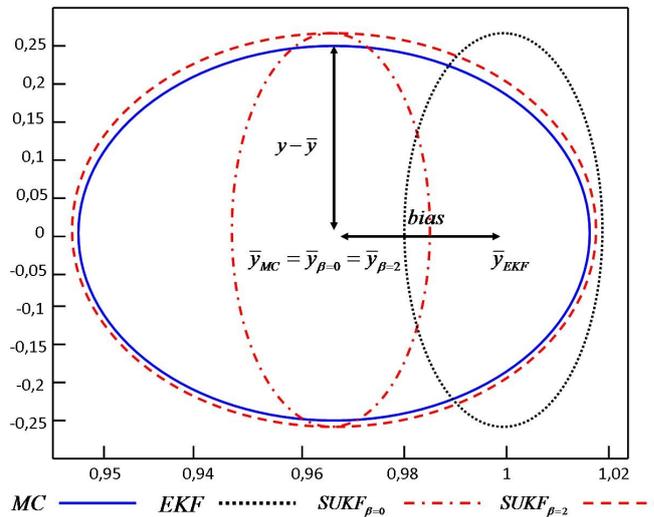


Figura 3.7: Analisi delle prestazioni dell'SUKF al variare del parametro  $\beta$

## Capitolo 4

# Validazione dello SUKF attraverso i dati simulati

Come è già stato detto, lo scopo del filtro implementato è quello di rielaborare le misure ADS-B, provenienti in maniera asincrona dal velivolo, per ricostruirne la traiettoria anche in loro assenza con la maggior precisione possibile. Per poter verificare il funzionamento del filtro e settarne i parametri per ottimizzarne le prestazioni, si ha bisogno di un riferimento corretto e noto con cui confrontare i risultati. Non possedendolo e non potendo ricostruirlo dai dati rumorosi, lo si è generato simulando nell'ambiente *Matlab* di *Simulink* i tre modelli tempo continui, di processo e misura, necessari a descrivere le diverse dinamiche dei velivoli. Questi infatti, ipotizzando che si comportino come punti materiali in moto in uno spazio tridimensionale, in fase di volo hanno una dinamica 3D mentre in fase di atterraggio e rullaggio a terra, a pari dei veicoli, hanno un moto 2D. La differenza principale fra le due dinamiche, oltre alla presenza/assenza delle variabili quota e assetto, risiede nell'entità della velocità dell'aeromobile, continuamente elevata in volo e potenzialmente anche nulla a terra. Conseguentemente i modelli di processo relativi alle due situazioni sono intrinsecamente differenti e quello che descrive il moto 2D non può essere costruito semplificando il caso 3D. All'interno del filtro è stato necessario creare uno *switch*, comandato dal valore della quota, per passare dall'uno all'altro permettendo continuità nella stima delle variabili di stato. Per questo motivo, e perchè il valore della quota è un necessario ingresso per la dinamica del velivolo in volo, è stato creato uno filtro anche per la quota con un relativo modello di processo. Le misure provenienti in maniera asincrona dai

velivoli, e registrate dall'ADS-B Ground Station, forniscono i dati<sup>1</sup> di heading  $\psi$ , posizione (latitudine  $\phi$ , longitudine  $\lambda$ ), quota  $h$ , modulo della velocità rispetto al suolo  $V$  in fase di volo e moduli delle velocità in direzione nord  $V_N$  ed est  $V_E$ , rispetto al sistema di riferimento NED (si veda l'Appendice C) centrato nel punto di inizio registrazione, nella fase a terra. A questi dati è poi associato l'istante relativo, rispetto all'inizio della rilevazione, in cui vengono raccolti. Il modello delle misure mette in relazione lo stato con i dati ADS-B tra cui, a fronte di una validazione sperimentale [1], sono stati considerati attendibili, e quindi utilizzabili dal filtro, solo la posizione, la quota e l'*heading* della velocità nel caso del velivolo in volo. Nel caso del velivolo a terra non si è tenuto conto dell'*heading* a causa della sua incertezza dovuta ai bassi valori di  $V$ . La simulazione di questi modelli oltre a generare, come detto in precedenza, riferimenti di velocità corretti con i quali confrontare i risultati del filtro, permette di valutare l'errore commesso nel non poter processare questa variabile.

Nei paragrafi 3.2.2 e 3.3.3, sono stati specializzati i filtri per i modelli non lineari che ripresentano le medesime condizioni dei due moti. Nei suddetti modelli

- i rumori sono *white noise* gaussiani a valore medio nullo, correlazione nulla fra istanti temporali differenti, scorrelati fra di loro e additivi
- le matrici di covarianza dei rumori di processo  $Q$  e misura  $R$  sono tempo invarianti
- non sono presenti ingressi (gli unici ingressi al sistema sono i rumori di processo  $w(k)$ )
- le funzioni  $h(\cdot)$  sono lineari, ovvero le cui uscite, tramite la matrice  $C$ , sono alcune componenti dello stato a cui si sovrappongono i rumori di misura

Il sistema continuo che lo descrive ha quindi la forma:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t)) + Bw(t) \\ z(t) = Cx(t) + v(t) \end{cases} \quad (4.1)$$

la cui versione discretizzata, come si è visto in precedenza è:

$$\begin{cases} x(k) = f_d(x(k-1)) + B_k w(k-1) \\ z(k) = C_k x(k) + v(k) \end{cases} \quad (4.2)$$

---

<sup>1</sup>Le misure angolari sono espresse in *rad* mentre la quota e le velocità in *m* e *m/s*.

dove  $B_k = T \cdot B$ ,  $C_k = C$  e  $f_d(x(k-1)) = x(k-1) + T \cdot f(x(k-1))$  e il tempo di campionamento (*simple time*) è stato scelto pari a  $T = 0,1$  secondi.

Vengono presentati di seguito i modelli di processo e misure utilizzati dal progetto T-Recs [1], frutto di simulazioni *software* tra diverse tipologie. Di questi sono stati costruiti i simulatori di quota, dinamica del velivolo 2D e 3D; inoltre per ciascuno sono state specializzate le matrici  $B_k$ ,  $C_k$ , le covarianze  $Q$  ed  $R$  e la  $f_d$ . I simulatori, come già accennato forniscono sia le misure “corrette” che fungono da riferimento per l’analisi delle prestazioni, sia quelle sporcate con un rumore di misura attendibile che fungono da ingresso al filtro. Sulla base di ogni modello è stato poi implementato un filtro SUKF che, tramite un ciclo *for*, genera la stima dello stato elaborando le misure rumorose. L’algoritmo inoltre, attraverso un ciclo *if* regolato dalla variabile *flag*, gestisce l’assenza di misure propagando le stime precedenti. Di seguito verranno riportati i risultati confrontando la stima, ottenuta dopo una opportuna fase di *tuning* del filtro tramite il coefficiente moltiplicativo “q”, con i valori “corretti”.

## 4.1 Modello dinamico della quota

Come già accennato la stima della quota, e di conseguenza il suo modello dinamico, è necessaria per lo *switch* tra i filtri e come dato nel calcolo dei vettori di stato degli altri modelli. Le misure utilizzate sono quote pista, che sono quelle correntemente utilizzate per le procedure di atterraggio e decollo.

Il modello del processo continuo lineare, dove per semplificare la notazione è stata omessa la dipendenza dal tempo, è:

$$\begin{cases} \dot{h} = V_z \\ \dot{V}_z = w_{V_z} \end{cases} \quad (4.3)$$

il cui vettore di stato  $x = [h, V_z]^T$  ha come componenti la quota, in  $m$ , e la velocità verticale, in  $m/s$ . Il rumore di processo  $w = w_{V_z}$ , composto dall’accelerazione verticale, esprime l’incertezza nella conoscenza del sistema reale ed è l’unico ingresso al modello; la sua matrice di covarianza, considerata tempo invariante, è

$$Q = E[ww^T] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{V_z}^2 \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

dove la relativa deviazione standard, per  $T = 0,1$ , è quindi  $\sigma_{V_z} = 2 [m/s]$ . Questa è stata

determinata tenendo conto del valore suggerito,  $\sigma_{V_z} = 0,2 [m/s]$  per  $T = 0,01 [1]$ , attraverso una semplice proporzione. Per implementare nel simulatore il rumore è stato necessario calcolare la relativa *Power Spectral Density* (PSD),  $PSD_{V_z} = 0,4$ , attraverso la formula:

$$PSD = \sigma^2 \cdot T \quad (4.5)$$

Le matrici che descrivono il sistema continuo sono quindi:

$$f(x) = \begin{bmatrix} V_z \\ 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

Le misure sono rappresentate questa volta dalla sola misura di quota, quindi la matrice che definisce gli stati osservati è  $C = [1 \ 0]$ . Il relativo il modello delle misure tempo continuo è

$$z = h + v_h \quad (4.7)$$

Il rumore di misura è  $v = v_h$  e la sua matrice di covarianza, considerata tempo invariante, è  $R = E[v_h^2] = [\sigma_h^2]$  dove la deviazione standard utilizzata è  $\sigma_h = 10 [m]$  a cui corrisponde un  $PSD_h = 100$ ; questo valore si trova indicato in [1] ed è frutto di prove e verifiche sperimentali con i dati reali. Utilizzando l'espressione della derivata (3.2), si ottengono i modelli discreti del processo e delle misure

$$\begin{cases} h(k) = h(k-1) + T \cdot V_z(k-1) \\ V_z(k) = V_z(k-1) + T \cdot w_{V_z(k-1)} \end{cases} \quad (4.8)$$

$$z(k) = h(k) + v_h(k) \quad (4.9)$$

Le matrici che descrivono il sistema discreto sono:

$$f_d(x^{(k-1)}) = \begin{bmatrix} h(k-1) + T \cdot V_z(k-1) \\ V_z(k-1) \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

$$B_k = \begin{bmatrix} 0 \\ T \end{bmatrix} \quad C_k = C$$

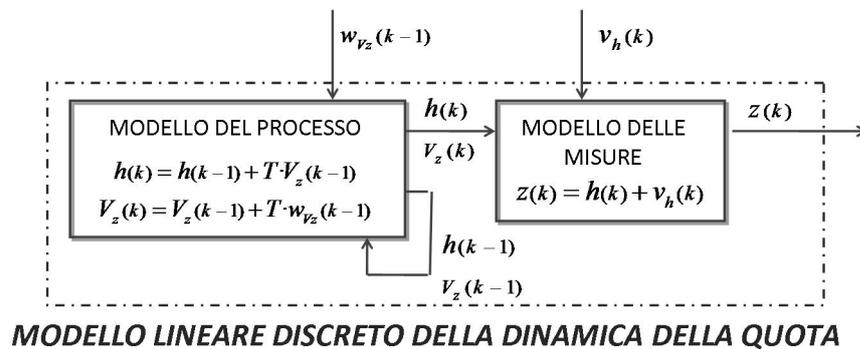


Figura 4.1: Modello lineare discreto della quota

### 4.1.1 Simulatore del modello della quota

Lo scopo di questo simulatore è quello di generare, ogni  $T = 0, 1$ , le matrici:

- $H$  delle misure di quota “pulite” ottenute come naturale evoluzione dello stato dalle condizioni iniziali imposte
- $H_{wv}$  delle misure di quota sporcate da entrambi i rumori, usata poi come ingresso del filtro da cui generare la stima dello stato
- $H_v$  delle misure di quota sporcate dai soli errori di misura, usata per valutare l’errore generato dai rumori di misura della quota
- $H_w$  delle misure di quota sporcate dai soli errori di processo, usata per valutare l’errore generato dai rumori di processo sulla quota
- $V_z$  delle velocità verticali “pulite” ottenute come naturale evoluzione dello stato dalle condizioni iniziali imposte
- $V_{zw}$  delle velocità verticali sporcate dai soli errori di processo, usata per valutare l’errore generato dai rumori di processo sulla velocità verticale

Sono stati creati sia il simulatore del modello discreto (4.8 - 4.9) che di quello continuo (4.3 - 4.7), ciò ha permesso di verificare il corretto funzionamento di quest’ultimo di cui poi sono stati utilizzati i dati. Nel simulatore i blocchi *Band Limited White Noise*, inizializzati con la  $PSD_{V_z}$  e la  $PSD_h$ , hanno permesso di generare i rumori bianchi di processo e misura

(con media nulla e spettro di potenza costante in una banda di frequenze limitata); uno *switch* ha poi consentito di escluderli per produrre le quote di riferimento. Le simulazioni, di durata  $100\text{sec}$ , sono state inizializzate a  $h = 1000\text{m}$  e  $V_z = 2\text{m/s}$ , in modo da verificare una variazione di quota anche in assenza di rumore di processo. Gli errori di quota e velocità verticale prodotti dai rumori, come conseguenza delle deviazioni  $\sigma_{V_z}$  e  $\sigma_h$  scelte, sono stati calcolati attraverso le *root mean square*<sup>2</sup> rispetto valori forniti dalle matrici  $H$  e  $V_z$ . I valori ottenuti sono:

$$\begin{aligned} RMS_{h(v)} &= \sqrt{E[(H_v - H)^2]} = 31,87\text{m} \\ RMS_{V_z(w)} &= \sqrt{E[(V_{z_w} - V_z)^2]} = 3,56\text{m/s} \end{aligned} \quad (4.11)$$

#### 4.1.2 Applicazione dello SUKF al modello della quota

Nonostante questo sistema sia lineare si è provato ad applicare i filtri SUKF ed EKF per valutarne le prestazioni anche in questa situazione. Come detto in precedenza, essendo i rumori additivi, le equazioni del filtro si semplificano e si ha:

$$\begin{aligned} x^a(k) &= x(k) = [h(k), V_z(k)]^T \quad n_a = n = 2 \\ \hat{x}^a(k) &= \hat{x}(k) = \bar{x}(k) = [\bar{h}(k), \bar{V}_z(k)]^T \\ P^a(k|k) &= E[(x(k) - \bar{x}(k|k))(x(k) - \bar{x}(k|k))^T] = P(k|k)_{(2 \times 2)} \end{aligned} \quad (4.12)$$

Per entrambi i filtri sono state usate le stesse matrici di covarianza  $Q$  ed  $R$  utilizzate per il simulatore, le matrici che descrivono il sistema discreto (4.10) e, come misure  $z(k)$ , i valori di quota sporcati dai rumori ottenuti con la simulazione. Lo stato è stato inizializzato nelle medesime condizioni del simulatore, ovvero a  $1000\text{m}$  di quota, con una velocità verticale di  $2\text{m/s}$  e con covarianza  $P(0) = I_{(2 \times 2)}$ . L'algoritmo dello SUKF genera a ogni ciclo cinque *sigma point* a due componenti che assumono la forma (3.40); i pesi invece,

---

<sup>2</sup>Il momento del secondo ordine di una variabile aleatoria, ovvero la varianza, è un indice della dispersione della variabile determinata come la media del quadrato degli scostamenti della variabile dal suo valore atteso. La *root mean square*, detta deviazione standard, è la radice quadrata della varianza e ha un significato analogo, ma serve nella pratica a riportarsi ad unità di misura consone.

posto  $\lambda = \alpha^2(2 + p) - 2$ , sono

$$\begin{aligned} W_0^m &= \frac{\lambda}{2+\lambda} & W_0^c &= \frac{\lambda}{(2+\lambda)} + (1-\alpha^2+\beta) \\ W_i^m &= W_i^c = \frac{1}{2(2+\lambda)} \quad i=1,2,3,4 \end{aligned} \quad (4.13)$$

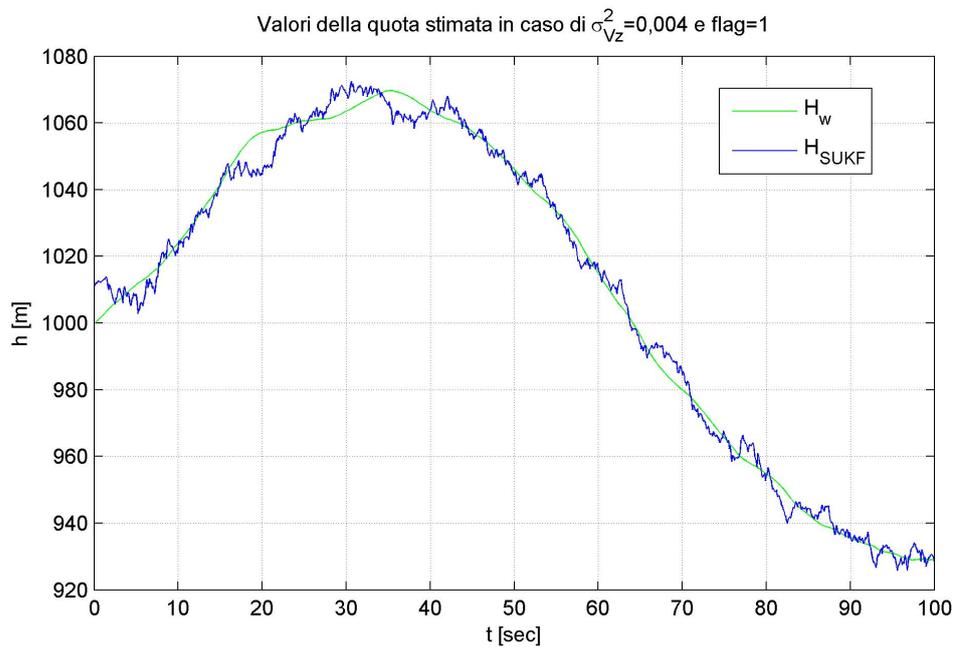
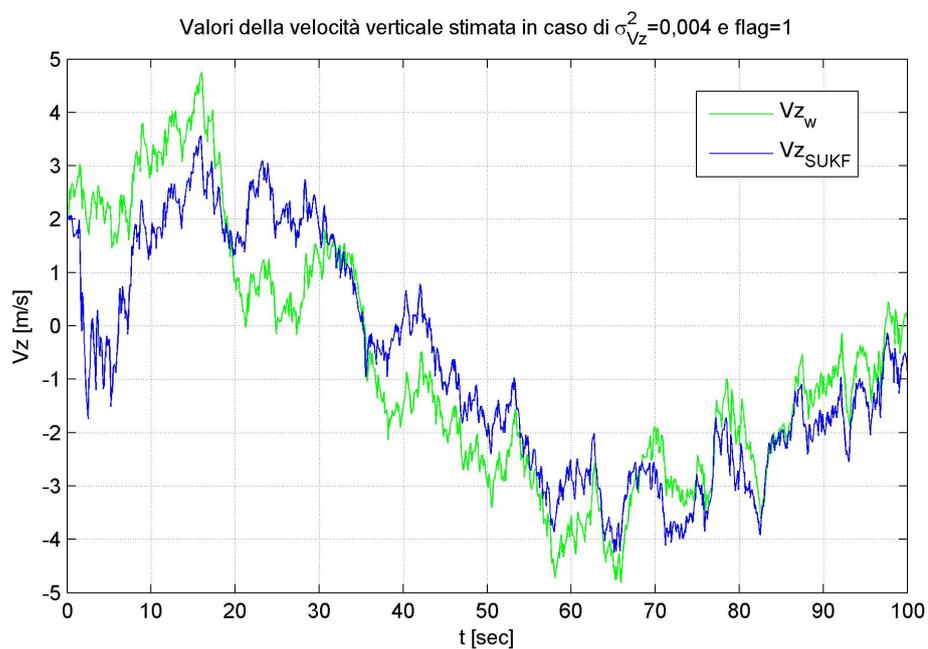
Essendo questi in funzione dei parametri di scala, posto di conoscere le stime in ognuno degli istanti di simulazione ( $flag = 1$ ), sono state testate diverse combinazioni dei loro valori per cercare di ottimizzare il funzionamento del filtro. Tra queste tuttavia, essendo il sistema lineare, non se ne è trovata una migliore poichè tutte hanno portato alle medesime deviazioni *standard* calcolate come:

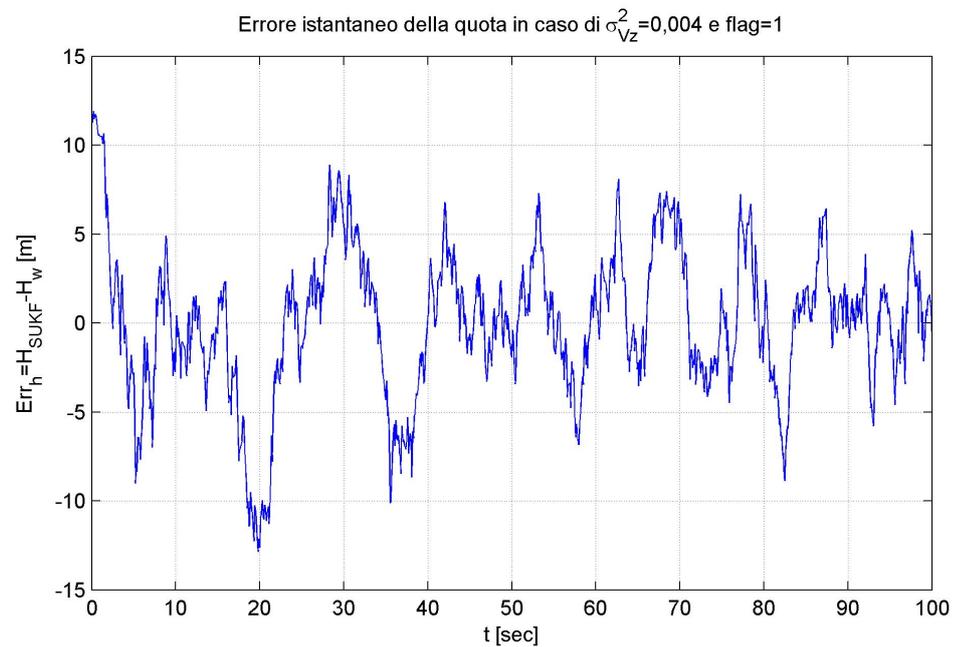
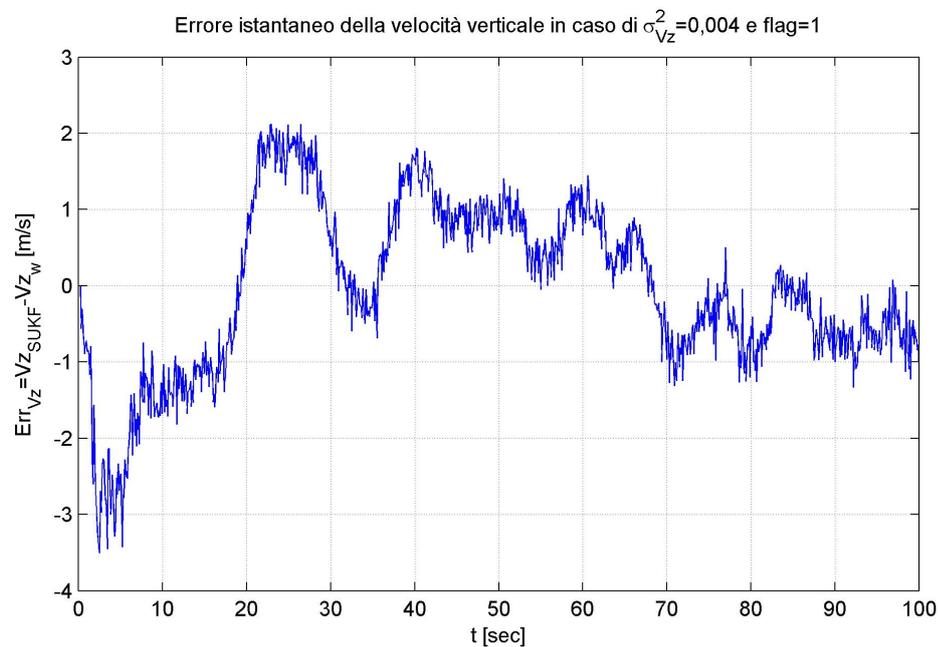
$$\begin{aligned} RMS_h &= \sqrt{E[(H_{SUKF} - H_w)^2]} = 11,08 m \\ RMS_{V_z} &= \sqrt{E[(V_{zSUKF} - V_{z_w})^2]} = 9,34 m/s \end{aligned} \quad (4.14)$$

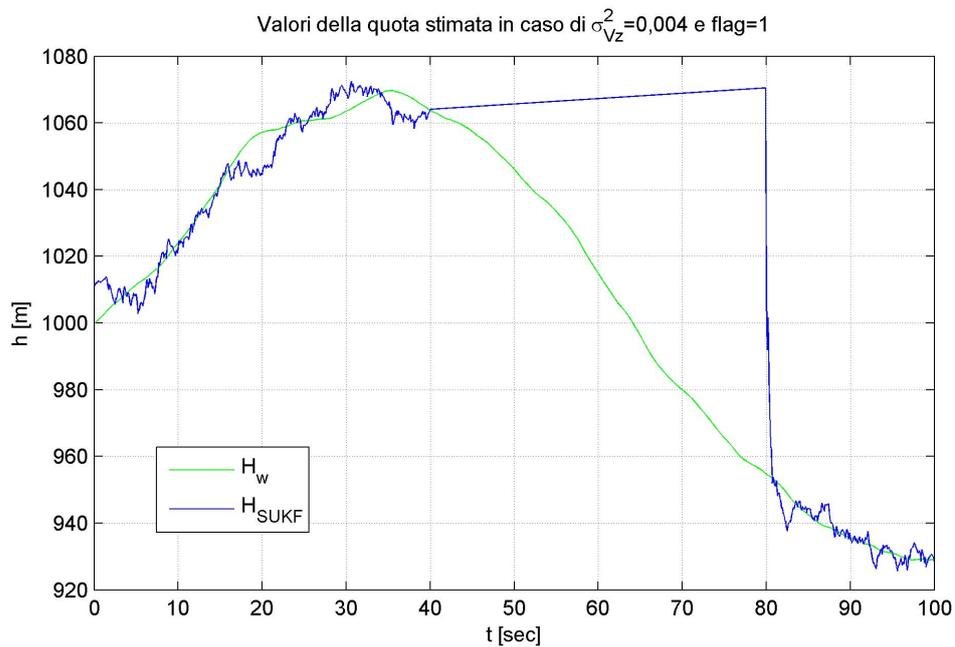
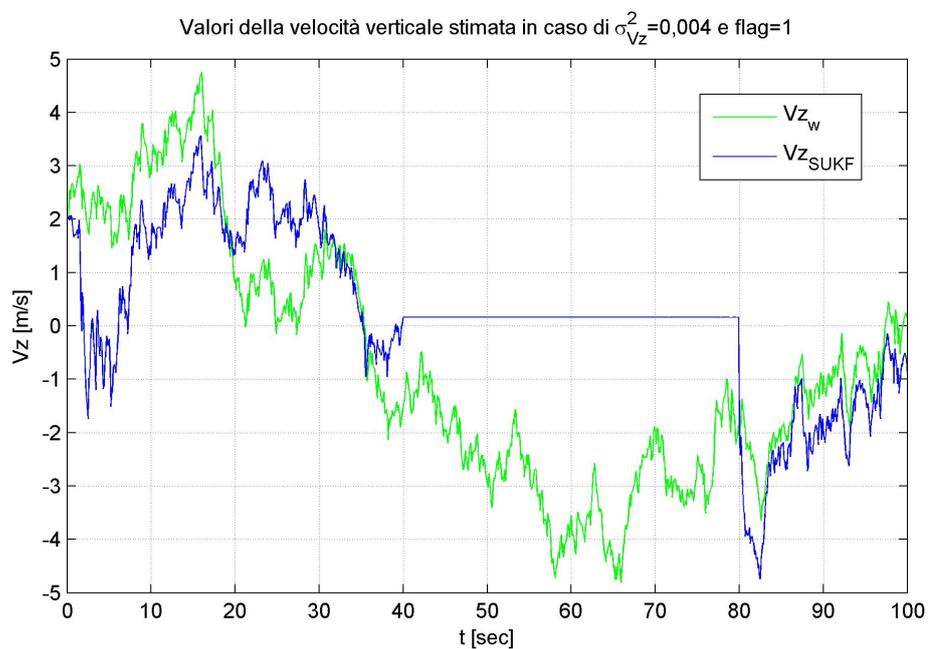
Come si può vedere dalla (4.14) le RMS vengono calcolate mediante lo scostamento fra le matrici  $H_{SUKF}$  e  $V_{zSUKF}$  e i valori attesi  $H_w$  e  $V_{z_w}$ , che tengono conto dell'incertezza intrinseca del modello matematico. All'implementazione è seguita la fase di *tuning* in cui la varianza dell'errore di processo  $\sigma_{V_z}^2$  viene moltiplicata per opportuni coefficienti "q", ciò permette di massimizzare le prestazioni ovvero minimizzare i valori delle RMS (4.14). I valori ottenuti e riportati nella Tabella D.1 nell'Appendice E (posto  $flag = 1$  e  $\alpha = 1$ ,  $\beta = 2$  e  $p = 0$ ), mostrano come al diminuire della deviazione *standard* del rumore di processo diminuisca anche l'errore di stima delle variabili di stato. Le RMS che assestano il loro valore, per  $\sigma_{V_z}^2 = 0,004$  (per cui  $q_h = 1/1000$ ), a

$$\begin{aligned} RMS_h &= \sqrt{E[(H_{SUKF} - H_w)^2]} = 4,16 m \\ RMS_{V_z} &= \sqrt{E[(V_{zSUKF} - V_{z_w})^2]} = 1,11 m/s \end{aligned} \quad (4.15)$$

Le stime prodotte in questo caso, successivamente utilizzate nel filtro della dinamica del velivolo in volo, e gli errori commessi sono mostrati nelle Figure 4.2 - 4.3 - 4.4 - 4.5. Le Figure 4.6 - 4.7 mostrano invece come il filtro propaga linearmente le stime in caso di assenza di misure ( $flag = 0$ ) dall'istante 400 all'800; ovviamente le RMS delle due variabili di stato aumentano, ma non sono indicative poichè l'assenza di segnale nella situazione reale non perdura per intervalli così prolungati.

Figura 4.2: Valori stimati di quota nel caso di  $\sigma_{V_z}^2 = 0,004$  e  $flag = 1$ Figura 4.3: Valori stimati di velocità verticale nel caso di  $\sigma_{V_z}^2 = 0,004$  e  $flag = 1$

Figura 4.4: Errori di quota e velocità verticale nel caso di  $\sigma_{V_z}^2 = 0,004$  e  $flag = 1$ Figura 4.5: Errori di velocità verticale nel caso di  $\sigma_{V_z}^2 = 0,004$  e  $flag = 1$

Figura 4.6: Valori stimati di quota nel caso di  $\sigma_{V_z}^2 = 0,004$  e  $flag = 101$ Figura 4.7: Valori stimati di velocità verticale nel caso di  $\sigma_{V_z}^2 = 0,004$  e  $flag = 101$

## 4.2 Modello dinamico del velivolo in volo

Il modello del processo continuo non lineare nel caso del velivolo in volo è rappresentato dal seguente sistema dove, al solito, è stata omessa la dipendenza dal tempo:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\phi} = \frac{V \cdot \cos(\psi)}{\rho + h} \\ \dot{\lambda} = \frac{V \cdot \sin(\psi)}{(N + h)\cos(\phi)} \\ \dot{\psi} = \Omega \\ \dot{V} = w_V \\ \dot{\Omega} = w_\Omega \end{array} \right. \quad (4.16)$$

Il vettore di stato  $x = [\phi, \lambda, \psi, V, \Omega]^T$  ha come componenti in ordine la latitudine, la longitudine e la direzione della velocità in *rad*, il modulo della velocità e il rateo di virata in *m/s* e *rad/s*. Nella (4.16) sono presenti ulteriori parametri che definiscono l'ellissoide di riferimento WGS84 (*World Geodetic System 1984* su cui si basano le misure GPS) utilizzato per approssimare la forma reale della Terra con i dati raccolti nel 1984 (si veda l'Appendice C); questi sono:

$h$ : la quota del velivolo rispetto all'ellissoide che deve essere fornita come ulteriore ingresso al sistema [*m*]

$a = 6378137$ : il semiasse maggiore dell'ellissoide (raggio equatoriale) [*m*]

$b = 6356752.3142$ : il semiasse minore dell'ellissoide (raggio equatoriale) [*m*]

$\rho = \frac{a(1 - e^2)}{(1 - e^2 \sin^2(\phi))^{3/2}}$ : il raggio di curvatura locale [*m*]

$N = \frac{a}{(1 - e^2 \sin^2(\phi))^{1/2}}$ : gran normale [*m*]

$e = \frac{a^2 - b^2}{a^2}$ : l'eccentricità dell'ellissoide WGS84

Il vettore  $w = [0, 0, 0, w_V, w_\Omega]^T$  è il rumore di processo composto dalle accelerazioni aleatorie introdotte per tener conto delle incertezze del modello. La sua matrice di covarianza,

considerata anch'essa tempo invariante, è

$$Q = E[ww^T] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_V^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_\Omega^2 \end{bmatrix} \quad (4.17)$$

dove le relative deviazioni standard, per  $T = 0, 1$ , sono  $\sigma_V = 0,5 [m/s]$  e  $\sigma_\Omega = 0,01 [rad/s]$  i cui relativi valori di densità spettrale sono  $PSD_V = 0,025$  e  $PSD_\Omega = 10^{-5}$ . Queste sono state determinate ancora una volta tenendo conto dei valori suggeriti nella [1], ovvero di  $\sigma_V = 0,05 [m/s]$  e  $\sigma_\Omega = 0,001 [rad/s]$  per  $T = 0,01 [1]$ , attraverso una semplice proporzione con i tempi. Le matrici che descrivono il sistema tempo continuo sono poi:

$$f(x) = \begin{bmatrix} \frac{V \cdot \cos(\psi)}{\rho + h} \\ \frac{V \cdot \sin(\psi)}{(N+h)\cos(\phi)} \\ \Omega \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.18)$$

Le misure da far elaborare al filtro sono questa volta la posizione e la direzione della velocità; per questo la matrice che identifica le componenti dello stato da osservare è

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.19)$$

Di conseguenza il modello delle misure che definisce il vettore  $z = [z_1, z_2, z_3]^T$  è:

$$\begin{aligned} z_1 &= \phi + v_\phi \\ z_2 &= \lambda + v_\lambda \\ z_3 &= \psi + v_\psi \end{aligned} \quad (4.20)$$

dove  $v = [v_\phi v_\lambda v_\psi]^T$  è il rumore di misura e la sua matrice di covarianza è:

$$R = E[vv^T] = \begin{bmatrix} \sigma_\phi^2 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_\lambda^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_\psi^2 \end{bmatrix} \quad (4.21)$$

Le deviazioni *standard* utilizzate, anche queste frutto di prove e verifiche sperimentali con i dati reali, sono quelle indicate in [1] e sono, supponendo che i dati ADS-B siano corretti,  $\sigma_\phi = \sigma_\lambda = 5/6378137 [rad]$  e  $\sigma_\psi = \pi/180 [rad]$ ; ad esse corrispondono  $PSD_\phi = PSD_\lambda = 6,14 \cdot 10^{-13}$  e  $PSD_\psi = 3,05 \cdot 10^{-4}$ . Utilizzando nuovamente l'espressione della derivata (3.2), si ottengono i modelli discreti del processo e delle misure

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi(k) = \phi(k-1) + T \cdot \frac{V(k-1) \cdot \cos(\psi(k-1))}{\rho(k-1) + h(k-1)} \\ \lambda(k) = \lambda(k-1) + T \cdot \frac{V(k-1) \cdot \sin(\psi(k-1))}{(N(k-1) + h(k-1)) \cdot \cos(\phi(k-1))} \\ \psi(k) = \psi(k-1) + T \cdot \Omega(k-1) \\ V(k) = V(k-1) + T \cdot w_V \\ \Omega(k) = \Omega(k-1) + T \cdot w_\Omega \end{array} \right. \quad (4.22)$$

$$\begin{array}{l} z_1(k) = \phi(k) + v_\phi(k) \\ z_2(k) = \lambda(k) + v_\lambda(k) \\ z_3(k) = \psi(k) + v_\psi(k) \end{array} \quad (4.23)$$

a cui corrispondono le matrici:

$$f_d(x(k-1)) = \begin{bmatrix} \phi(k-1) + T \cdot \frac{V(k-1) \cdot \cos(\psi(k-1))}{\rho(k-1) + h(k-1)} \\ \lambda(k-1) + T \cdot \frac{V(k-1) \cdot \sin(\psi(k-1))}{(N(k-1) + h(k-1)) \cdot \cos(\phi(k-1))} \\ \psi(k-1) + T \cdot \Omega(k-1) \\ V(k-1) \\ \Omega(k-1) \end{bmatrix} \quad (4.24)$$

$$B_k = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & T & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & T \end{bmatrix}^T \quad C_k = C \quad (4.25)$$

Inoltre il modello discreto che permette di determinare l'angolo di banco è dato da:

$$\varphi(k) = \arctan\left(\frac{V(k)\Omega(k)}{g(k)}\right) \quad (4.26)$$

L'accelerazione di gravità  $g$ , in  $m/s^2$ , viene calcolata come:

$$g(k) = 9,7803184(1 + A\text{sen}^2(\phi(k)) - B\text{sen}^2(2\phi(k))) - 3,086 \times 10^{-6}h(k) \quad (4.27)$$

dove  $A = 0,0053024$ ,  $B = 0,0000059$  e l'ultimo termine è una correzione di quota.

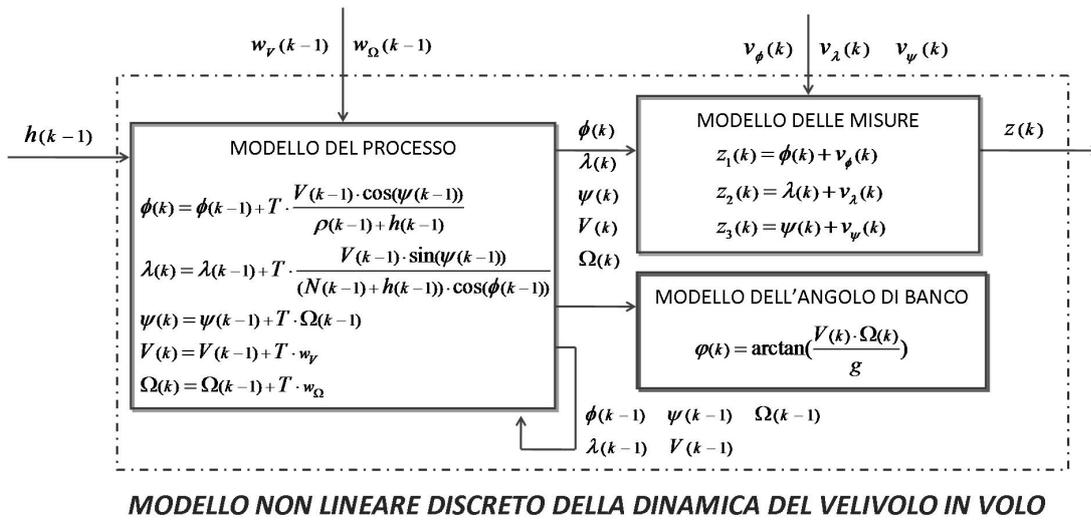


Figura 4.8: Modello non lineare discreto della dinamica del velivolo in volo

#### 4.2.1 Simulatore del modello del velivolo in volo

Si è creato il simulatore continuo del modello dinamico del velivolo in volo per poter generare, in presenza e assenza dei diversi rumori e con passo  $T = 0,1$  secondi, le matrici

delle misure e quelle necessarie per la determinazione degli errori. I dati vengono registrati istantaneamente nelle matrici:

- $S$  delle misure dello stato che ha come colonne la latitudine e la longitudine, la direzione della velocità e il rateo di virata
- $PHI$  dei valori dell'angolo di banco calcolti tramite la (4.26)
- $NED$  delle coordinate rispetto al sistema *Nord Est Down*, determinate tramite trasformazione (si veda Appendice C) dalle misure di latitudine e longitudine.

Come nel simulatore della dinamica della quota, i blocchi *Band Limited White Noise* hanno permesso di generare i rumori bianchi di processo e misura in funzione delle PSD scelte; la durata delle simulazioni è stata ancora una volta di 100sec e le condizioni iniziali impostate sono riportate nella tabella seguente.

<i>Latitudine iniziale</i>	$\phi(0) = 44,21^\circ$
<i>Longitudine iniziale</i>	$\lambda(0) = 12,05^\circ$
<i>Prua</i>	$\psi(0) = 210^\circ$
<i>Modulo della velocità</i>	$V(0) = 155 m/s$
<i>Rateo di virata</i>	$\Omega(0) = 0^\circ/s$
<i>Quota</i>	$h(0) = 1000 m$

Tabella 4.1: Condizioni iniziali di simulazione del modello dinamico del velivolo in volo

E' stato inoltre necessario fornire al simulatore di volo i valori delle quote generate istantaneamente dal simulatore di quota per la determinazione dei valori di latitudine e longitudine. Gli errori prodotti dai rumori, come conseguenza delle deviazioni scelte, sono stati calcolati attraverso le *root mean square* mediante lo scostamento rispetto ai dati forniti dalle matrici  $S$  e  $NED$ . I valori ottenuti a causa del rumore di misura ( pedice  $v$ ) e dei rumori di processo ( pedice  $w$ ) sono:

$$\begin{aligned}
 RMS_{TR(v)} &= \sqrt{E[d^2]} = 20,86 m \\
 RMS_{\psi(v)} &= \sqrt{E[(\psi_v - \psi)^2]} = 3,19^\circ \\
 RMS_{V(w)} &= \sqrt{E[(V_w - V)^2]} = 0,89 m/s \\
 RMS_{\Omega(w)} &= \sqrt{E[(\Omega_w - \Omega)^2]} = 1,02^\circ/s
 \end{aligned}
 \tag{4.28}$$

dove la *root mean square* relativa alla traiettoria (TR) viene calcolata attraverso la distanza tra la posizione in assenza di rumori e quella affetta dagli errori di misura

$$d = \|P_v - P\| = \left\| \begin{pmatrix} N_v \\ E_v \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} N \\ E \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} diffN \\ diffE \end{matrix} \right\| = \sqrt{(diffN - diffE)} \quad (4.29)$$

#### 4.2.2 Applicazione dello SUKF al modello del velivolo in volo

Essendo ancora una volta in presenza di rumori additivi lo stato, la sua media e la sua matrice di covarianza sono:

$$\begin{aligned} x^a(k) = x(k) &= [\phi(k), \lambda(k), \psi(k), V(k), \Omega(k)]^T \quad n_a = n = 5 \\ \hat{x}^a(k) = \hat{x}(k) = \bar{x}(k) &= [\bar{\phi}(k), \bar{\lambda}(k), \bar{\psi}(k), \bar{V}(k), \bar{\Omega}(k)]^T \\ P^a(k|k) = E \left[ (x(k) - \bar{x}(k|k))(x(k) - \bar{x}(k|k))^T \right] &= P(k|k)_{(5 \times 5)} \end{aligned} \quad (4.30)$$

Sono state inoltre fornite al filtro:

- le matrici di covarianza  $Q$  ed  $R$  utilizzate anche dal simulatore
- le matrici che descrivono il sistema discreto (4.24 - 4.25)
- le misure simulate  $z(k)$ , in *rad*, di latitudine, longitudine e prua sporcate dai rumori
- le stime della quota ottenute dal simulatore contenute nella matrice  $H_{SUKF}$ <sup>3</sup>
- le condizioni di inizializzazione utilizzate per il simulatore e la  $P(0) = I_{(5 \times 5)}$

I *sigma point* generati a ogni ciclo sono undici e hanno cinque componenti, mentre i pesi, posto  $\lambda = \alpha^2(5 + p) - 5$ , sono

$$\begin{aligned} W_0^m &= \frac{\lambda}{5 + \lambda} & W_0^c &= \frac{\lambda}{(5 + \lambda)} + (1 - \alpha^2 + \beta) \\ W_i^m &= W_i^c = \frac{1}{2(5 + \lambda)} \quad i=1,2,\dots,10 \end{aligned} \quad (4.31)$$

<sup>3</sup>Sono state fatte le simulazioni con i valori di quota corretti ottenuti dal simulatore e si è verificato che utilizzare quelle stimate, dato che vengono sommate con il raggio terrestre, non comporta errori aggiuntivi nelle stime.

Posto di conoscere le stime in ognuno degli istanti di simulazione ( $flag = 1$ ), la combinazione dei parametri di scala ottima è  $\beta = 2$ ,  $\alpha = 0,5$  e quindi  $p = 3/\alpha^2 - n = 7$ . Le relative deviazioni *standard*, posto che le matrici con il pedice SUKF siano ancora una volta quelle che contengono i valori stimati, sono:

$$\begin{aligned}
 RMS_{TR} &= \sqrt{E[d^2]} = 9,04m \\
 RMS_{\psi} &= \sqrt{E[(\psi_{SUKF} - \psi_w)^2]} = 1,28^\circ \\
 RMS_V &= \sqrt{E[(V_{SUKF} - V_w)^2]} = 3,03m/s \\
 RMS_{\Omega} &= \sqrt{E[(\Omega_{SUKF} - \Omega_w)^2]} = 2,09^\circ/s \\
 RMS_{\varphi} &= \sqrt{E[(\varphi_{SUKF} - \varphi_w)^2]} = 26,48^\circ
 \end{aligned} \tag{4.32}$$

dove

$$d = \|P_{SUKF} - P_w\| = \left\| \begin{pmatrix} N_{SUKF} \\ E_{SUKF} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} N_w \\ E_w \end{pmatrix} \right\| \tag{4.33}$$

A questa fase è seguita quella di *tuning* in cui le varianze dell'errore di processo  $\sigma_V^2$  e  $\sigma_{\Omega}^2$  di *default* [1] sono state moltiplicate per opportuni coefficienti "q" in modo da minimizzare i valori delle *RMS*. I valori ottenuti e riportati in Tabella D.3, posto  $flag = 1$  e i parametri di scala scelti, mostrano ancora una volta come al diminuire dell'errore di processo diminuisca anche l'errore di stima delle variabili di stato. In particolare al diminuire di  $\sigma_V^2$  diminuiscono gli errori di velocità e traiettoria, mentre al diminuire di  $\sigma_{\Omega}^2$  quelli sul rateo e sugli angoli. L'errore minimo ottenibile si ha per  $q_V = q_{\Omega} = 1/1000$  per cui le varianze diventano  $\sigma_V^2 = 2,5 \cdot 10^{-4}$  e  $\sigma_{\Omega}^2 = 10^{-7}$  e le *RMS* si assestano a:

$$\begin{aligned}
 RMS_{TR} &= \sqrt{E[d^2]} = 8,10m \\
 RMS_{\psi} &= \sqrt{E[(\psi_{SUKF} - \psi_w)^2]} = 0,22^\circ \\
 RMS_V &= \sqrt{E[(V_{SUKF} - V_w)^2]} = 0,86m/s \\
 RMS_{\Omega} &= \sqrt{E[(\Omega_{SUKF} - \Omega_w)^2]} = 0,18^\circ/s \\
 RMS_{\varphi} &= \sqrt{E[(\varphi_{SUKF} - \varphi_w)^2]} = 2,61^\circ
 \end{aligned} \tag{4.34}$$

Le Figure 4.9 - 4.10 - 4.11 - 4.12 riportano i valori stimati e gli errori di traiettoria e angolo di banco ottenuti con la fase di tuning; i grafici relativi alle altre variabili e ai loro errori sono riportati nelle Figure E.1 - E.2 nell'Appendice E.

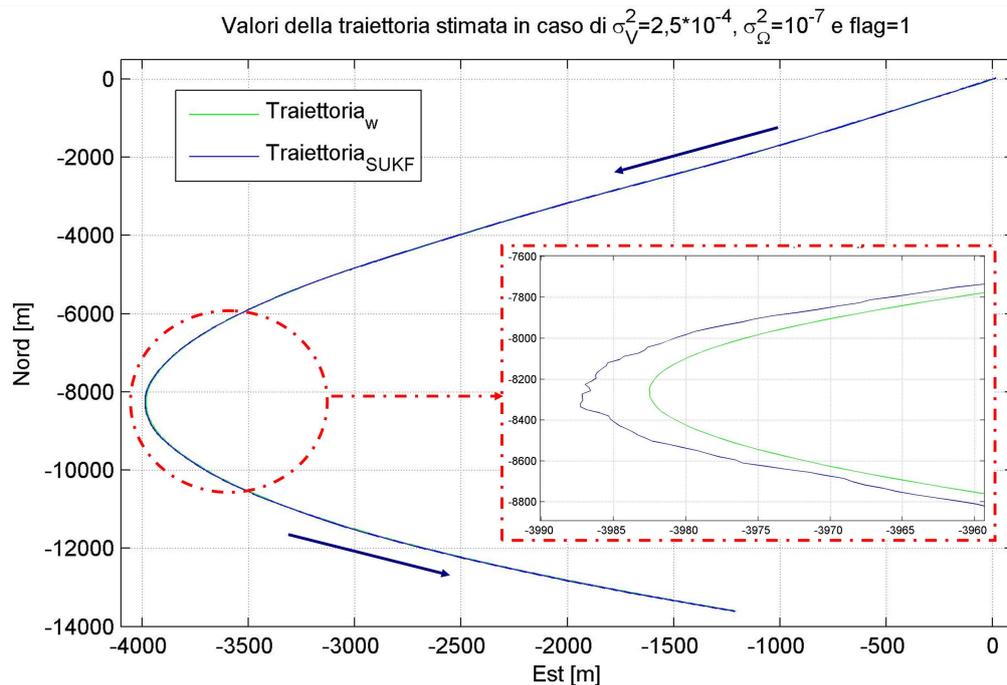


Figura 4.9: Valori stimati di traiettoria nel caso di  $\sigma_V^2 = 2,5 * 10^{-4}$ ,  $\sigma_\Omega^2 = 10^{-7}$  e  $flag = 1$

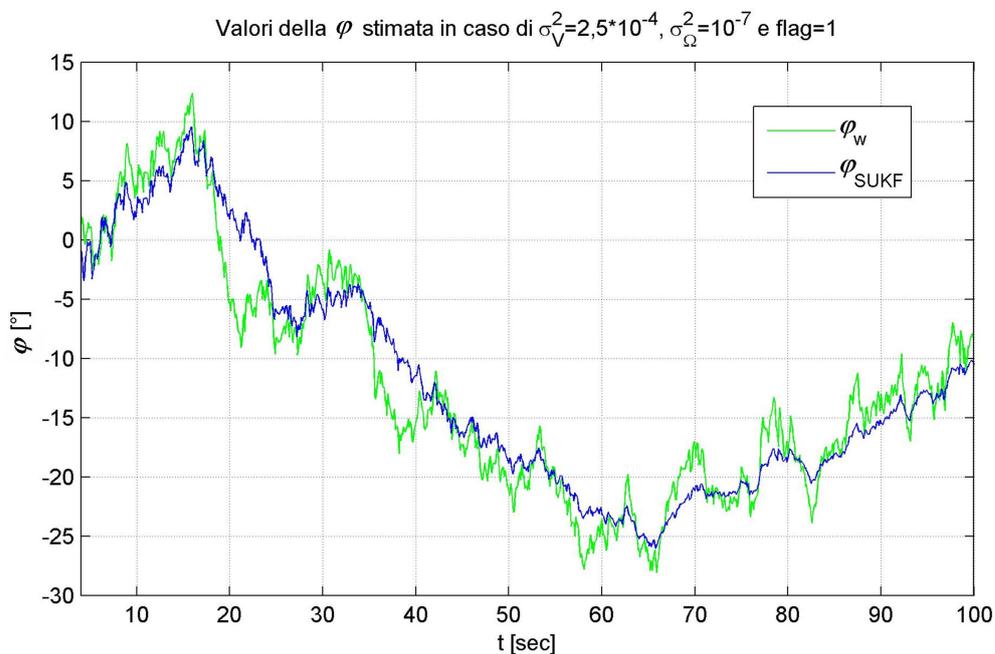


Figura 4.10: Valori stimati di  $\varphi$  nel caso di  $\sigma_V^2 = 2,5 * 10^{-4}$ ,  $\sigma_\Omega^2 = 10^{-7}$  e  $flag = 1$

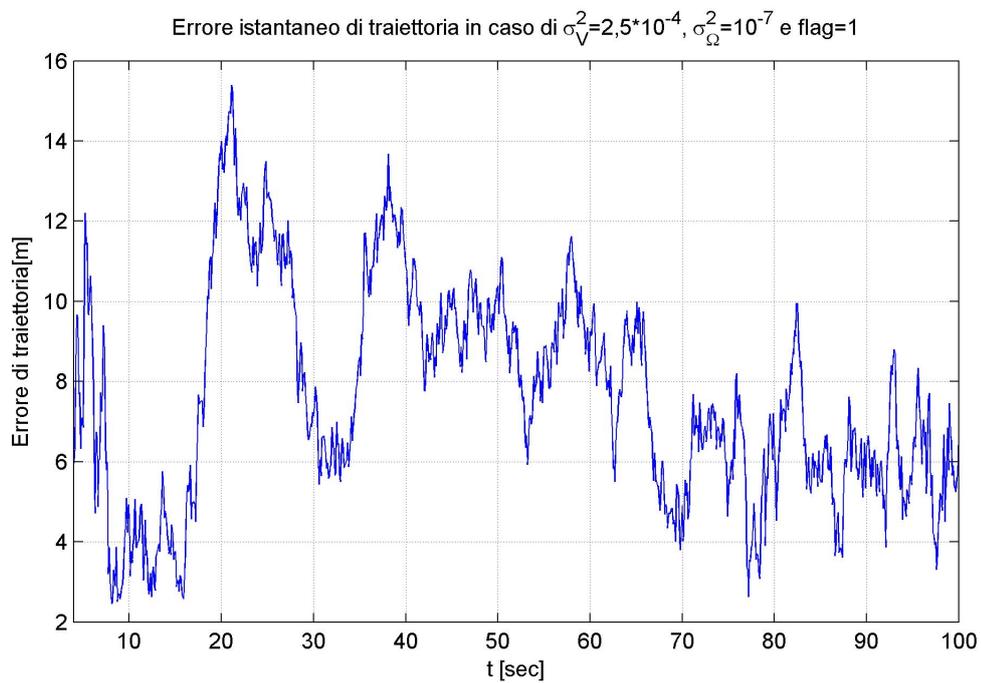


Figura 4.11: Errori di traiettoria nel caso di  $\sigma_V^2 = 2,5 * 10^{-4}$ ,  $\sigma_\Omega^2 = 10^{-7}$  e  $flag = 1$

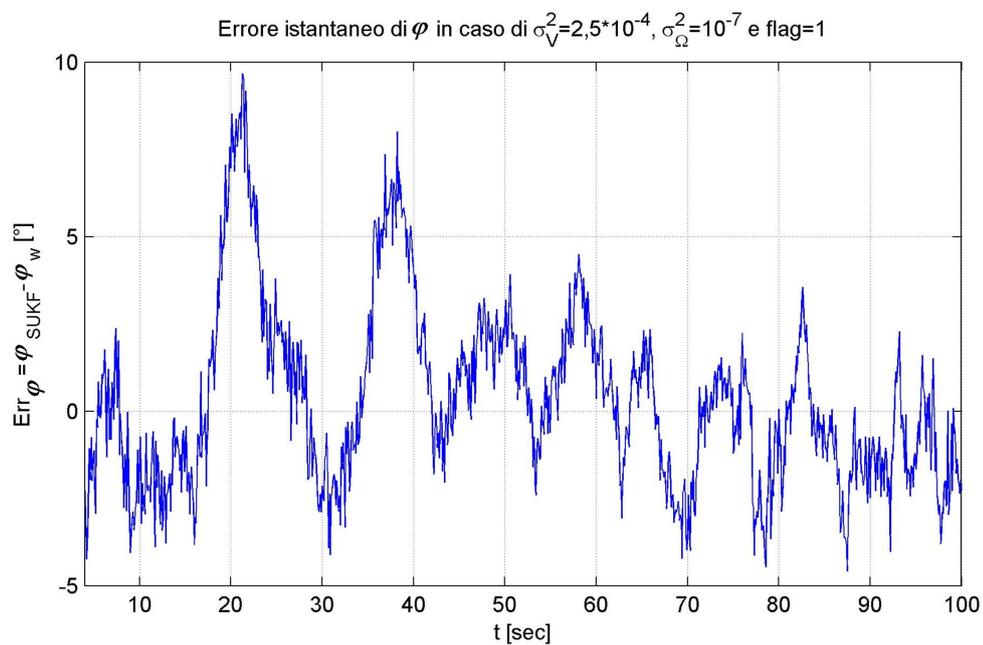


Figura 4.12: Errori di  $\varphi$  nel caso di  $\sigma_V^2 = 2,5 * 10^{-4}$ ,  $\sigma_\Omega^2 = 10^{-7}$  e  $flag = 1$

Le Figure 4.13 - 4.14 mostrano come il filtro propaga le stime in caso di assenza delle misure ( $flag = 0$ ) dall'istante 400 all'800; ovviamente le  $RMS$  delle due variabili di stato aumentano, ma non sono indicative poichè nelle trasmissioni reali l'assenza di segnale non perdura per intervalli così prolungati.

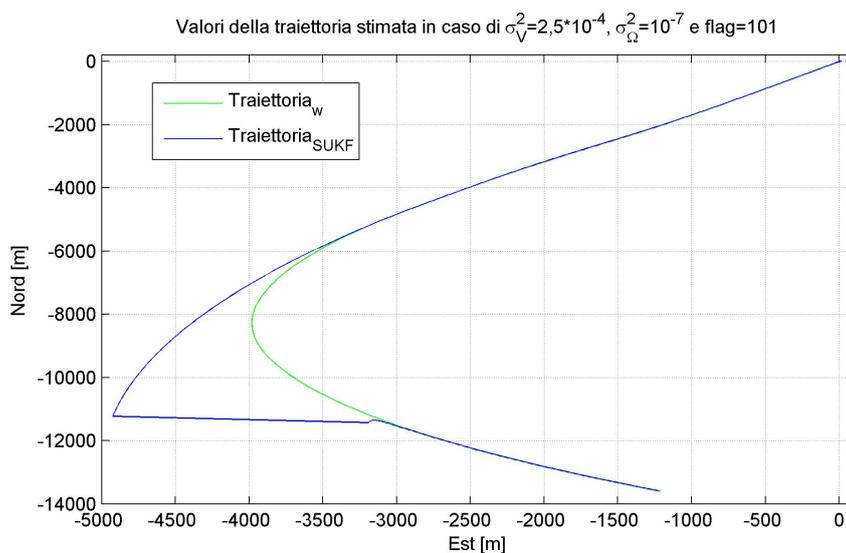


Figura 4.13: Valori stimati di traiettoria nel caso di  $\sigma_V^2 = 2,5 * 10^{-4}$ ,  $\sigma_\Omega^2 = 10^{-7}$  e  $flag = 101$

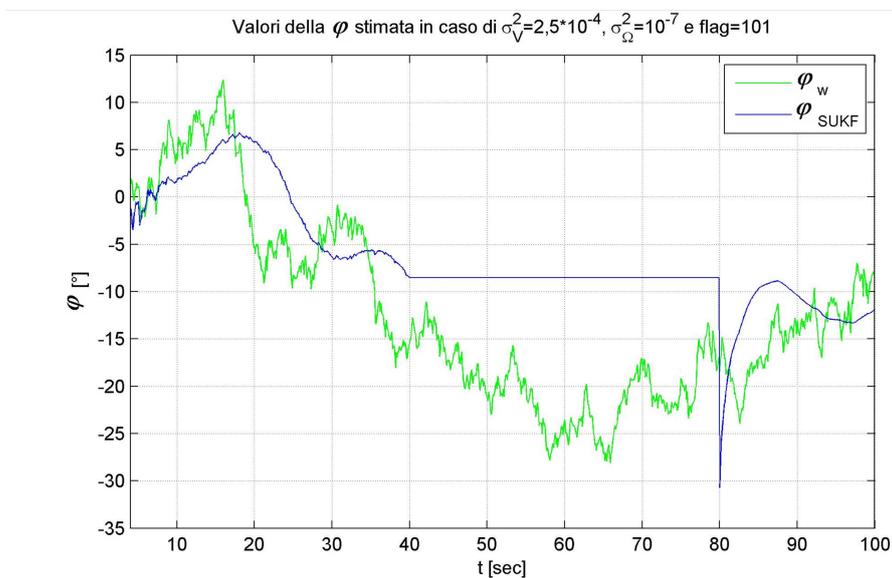


Figura 4.14: Valori stimati di traiettoria nel caso di  $\sigma_V^2 = 2,5 * 10^{-4}$ ,  $\sigma_\Omega^2 = 10^{-7}$  e  $flag = 101$

### 4.2.3 Utilizzo delle misure di velocità per la stima SUKF dello stato del velivolo in volo

Come specificato in precedenza, le misure di velocità non sono state fatte elaborare dal filtro perchè quelle reali sono inattendibili e per questo incompatibili con quelle di posizione. Per quantificare l'errore commesso nel non poterle utilizzare, è stato costruito un simulatore della dinamica di volo che genera le misure rumorose di velocità e un filtro SUKF che elabora anche questi dati. Rispetto a quello implementato nel caso a tre misure, nel nuovo simulatore è stato necessario aggiungere un blocco *Band Limited White noise* in corrispondenza dell'uscita di velocità. Si è scelto di impostarlo con una  $PSD_{V_v} = 40$  a cui corrisponde un  $\sigma_{V_v} = 20 [m/s]$  da cui si ricava un errore alquanto elevato di valore medio

$$RMS_{V(v)} = \sqrt{E[(V_v - V)^2]} = 20,15 m/s \quad (4.35)$$

Il nuovo vettore delle misure è

$$\begin{aligned} z_1(k) &= \phi(k) + v_\phi(k) \\ z_2(k) &= \lambda(k) + v_\lambda(k) \\ z_3(k) &= \psi(k) + v_\psi(k) \\ z_4(k) &= V(k) + v_V(k) \end{aligned} \quad (4.36)$$

a cui corrispondono la matrice di covarianza del rumore e quella di legame fra lo stato e le misure:

$$R = E[vv^T] = \begin{bmatrix} \sigma_\phi^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_\lambda^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_\psi^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_V^2 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.37)$$

La fase di *tuning*, mantenuti i parametri di scala scelti in precedenza, ha indicato come deviazioni ottime i valori  $\sigma_V^2 = 4000$  e  $\sigma_\Omega^2 = 10^{-5}$ , ottenuti con  $q_v = 1000$  e  $q_\Omega = 1/1000$ , a cui corrispondono:

$$\begin{aligned} RMS_{TR} &= \sqrt{E[d^2]} = 4,64 m \\ RMS_\psi &= \sqrt{E[(\psi_{SUKF} - \psi_w)^2]} = 0,23^\circ \end{aligned} \quad (4.38)$$

$$\begin{aligned}
RMS_V &= \sqrt{E[(V_{SUKF} - V_w)^2]} = 0,02 \text{ m/s} \\
RMS_\Omega &= \sqrt{E[(\Omega_{SUKF} - \Omega_w)^2]} = 0,18^\circ/\text{s} \\
RMS_\phi &= \sqrt{E[(\phi_{SUKF} - \phi_w)^2]} = 2,63^\circ/\text{s}
\end{aligned} \tag{4.39}$$

Facendo il confronto con le (4.34) si ottiene che l'informazione di velocità migliora la stima della traiettoria di circa  $3,5 \text{ m}$  (che è minore dell'errore procurato dal rumore di misura sulla posizione) e della velocità di  $0,8 \text{ m/s}$ . Quindi, data la scarsa correzione che si ottiene, il non poter considerare l'informazione di velocità non inficia in maniera rilevante le stime se il modello su cui si basa il filtro è esattamente quello che ha generato le misure.

### 4.3 Modello dinamico del velivolo a terra

Nel caso del velivolo a terra il modello del processo continuo non lineare, dove al solito è stata omessa la dipendenza dal tempo, è:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\phi} = \frac{V_N}{\rho} \\ \dot{\lambda} = \frac{V_E}{N \cdot \cos(\phi)} \\ \dot{V}_N = w_{V_N} \\ \dot{V}_E = w_{V_E} \end{array} \right. \tag{4.40}$$

Il vettore di stato  $x = [\phi, \lambda, V_N, V_E]^T$  ha come componenti in ordine la latitudine, la longitudine in *rad* e il modulo della velocità in direzione *Nord* ed *Est* in *m/s*. Il rumore di processo  $w = [0 \ 0 \ w_{V_N} \ w_{V_E}]^T$  è composto dalle accelerazioni lineari nelle due direzioni e la sua matrice di covarianza, considerata anch'essa tempo invariante, è

$$Q = E[ww^T] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{V_N}^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_{V_E}^2 \end{bmatrix} \tag{4.41}$$

Alle deviazioni *standard*  $\sigma_{V_N} = \sigma_{V_E} = 25 [m/s]$  (ottenute ancora una volta attraverso una proporzione con il valore suggerito  $\sigma_{V_N} = \sigma_{V_E} = 2,5 [m/s]$  per  $T = 0,01 [1]$ ) corrispondono  $PSD_{V_N} = PSD_{V_E} = 62,5$ . Le matrici che descrivono il sistema continuo sono quindi:

$$f(x) = \begin{bmatrix} \frac{V_N}{\rho} \\ \frac{V_E}{N \cdot \cos(\phi)} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.42)$$

Le misure questa volta sono solo la latitudine e la longitudine e quindi la matrice e il modello delle misure continuo che definisce  $z = [z_1 \ z_2]^T$  sono:

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} z_1 = \phi + v_\phi \\ z_2 = \lambda + v_\lambda \end{array} \quad (4.43)$$

dove  $v = [v_\phi \ v_\lambda]^T$  è il rumore di misura e la sua matrice di covarianza tempo invariante è:

$$R = E[vv^T] = \begin{bmatrix} \sigma_\phi^2 & 0 \\ 0 & \sigma_\lambda^2 \end{bmatrix} \quad (4.44)$$

I valori delle deviazioni *standard* utilizzate, posto di conoscere i dati ADS-B già corretti, sono  $\sigma_\phi = \sigma_\lambda = 5/6378137 [rad]$ . Utilizzando l'espressione della derivata (3.2), si ottengono i modelli discreti del processo e delle misure

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi(k) = \phi(k-1) + T \cdot \frac{V_N(k-1)}{\rho(k-1)} \\ \lambda(k) = \lambda(k-1) + T \cdot \frac{V_E(k-1)}{N(k-1) \cdot \cos(\phi(k-1))} \\ V_N(k) = V_N(k-1) + T \cdot w_{V_N} \\ V_E(k) = V_E(k-1) + T \cdot w_{V_E} \end{array} \right. \quad (4.45)$$

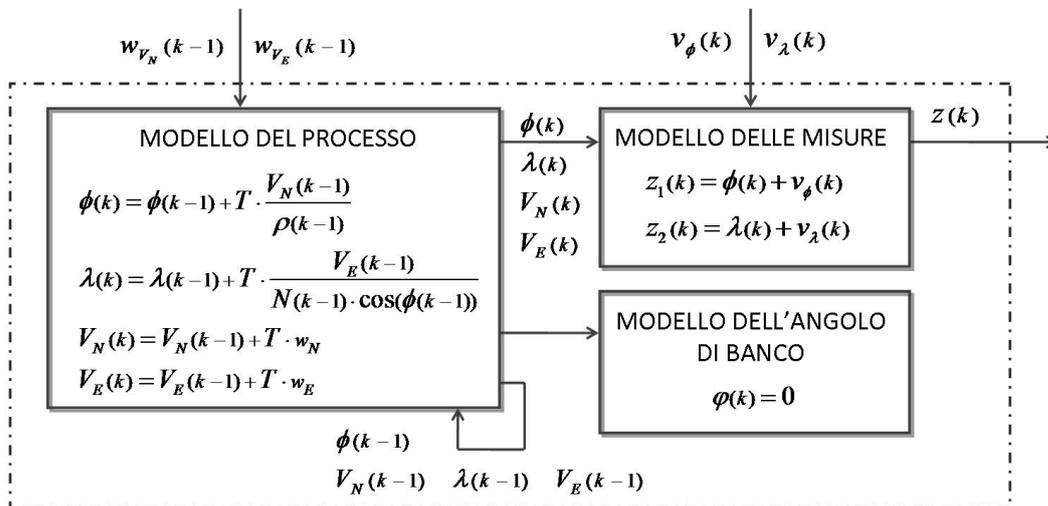
$$\begin{array}{l} z_1(k) = \phi(k) + v_\phi(k) \\ z_2(k) = \lambda(k) + v_\lambda(k) \end{array} \quad (4.46)$$

A questi corrispondono le matrici che descrivono il sistema discreto:

$$f_d(x^{(k-1)}) = \begin{bmatrix} \phi^{(k-1)} + T \cdot \frac{V_N^{(k-1)}}{\rho^{(k-1)}} \\ \lambda^{(k-1)} + T \cdot \frac{V_E^{(k-1)}}{N^{(k-1)} \cdot \cos(\phi^{(k-1)})} \\ V_N^{(k-1)} \\ V_E^{(k-1)} \end{bmatrix} \quad (4.47)$$

$$B_k = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ T & 0 \\ 0 & T \end{bmatrix} \quad C_k = C \quad (4.48)$$

A terra il velivolo è forzatamente ad ali livellate quindi il modello che fornisce la stima dell'angolo di banco del velivolo in questo caso è semplicemente  $\varphi(k) = 0$ .



**MODELLO NON LINEARE DISCRETO DELLA DINAMICA DEL VELIVOLO A TERRA**

Figura 4.15: Modello non lineare discreto della dinamica del velivolo a terra

### 4.3.1 Simulatore del modello del velivolo a terra

Ancora una volta è stato creato il simulatore continuo del modello del velivolo a terra per poter generare, in presenza e assenza dei diversi rumori e con passo  $T = 0,1$  secondi, le matrici delle misure e quelle utilizzate per calcolare gli errori. I dati simulati vengono registrati nelle matrici:

- $S$  delle misure dello stato che ha come colonne la latitudine, la longitudine e i moduli delle velocità in direzione *Nord* ed *Est*
- $NED$  delle coordinate rispetto al sistema *Nord Est Down* determinate tramite trasformazione (si veda Appendice C) dalle misure di latitudine e longitudine.

La durata delle simulazioni al solito è stata di  $100\text{sec}$  e le condizioni iniziali impostate sono riportate nella Tabella 4.2.

<i>Latitudine iniziale</i>	$\phi(0) = 44,21^\circ$
<i>Longitudine iniziale</i>	$\lambda(0) = 12,05^\circ$
<i>Modulo della velocità in direzione Nord</i>	$V_N(0) = 50\text{m/s}$
<i>Moduleo della velocità in direzione Est</i>	$V_E(0) = 20\text{m/s}$
<i>Quota</i>	$h(0) = 1000\text{m}$

Tabella 4.2: Condizioni iniziali di simulazione del modello dinamico del velivolo a terra

Gli errori prodotti dai rumori, come conseguenza delle deviazioni scelte, sono stati determinati nuovamente attraverso le *root mean square* in cui i riferimenti sono i dati simulati delle matrici  $S$  e  $NED$ . I valori ottenuti a causa del rumore di misura ( pedice  $v$ ) e dei rumori di processo ( pedice  $w$ ) sono:

$$\begin{aligned}
 RMS_{TR(v)} &= \sqrt{E[d^2]} = 20,86\text{m} \\
 RMS_{V_N(w)} &= RMS_{V_E(w)} = \sqrt{E[(V_{Nw} - V_N)^2]} = 44,48\text{m/s}
 \end{aligned}
 \tag{4.49}$$

posto che la distanza  $d$  venga calcolata con la formula (4.29).

### 4.3.2 Applicazione dello SUKF al modello del velivolo a terra

Essendo ancora una volta in presenza di rumori additivi si ha:

$$\begin{aligned}
 x^a(k) &= x(k) = [\phi(k), \lambda(k), V_N(k), V_E(k)]^T \quad n_a = n = 4 \\
 \hat{x}^a(k) &= \hat{x}(k) = \bar{x}(k) = [\bar{\phi}(k), \bar{\lambda}(k), \bar{V}_N(k), \bar{V}_E(k)]^T \\
 P^a(k|k) &= E[(x(k) - \bar{x}(k|k))(x(k) - \bar{x}(k|k))^T] = P(k|k)_{(4 \times 4)}
 \end{aligned} \tag{4.50}$$

Sono state fornite al filtro anche:

- le matrici di covarianza  $Q$  ed  $R$  utilizzate per il simulatore
- le matrici che descrivono il sistema discreto (4.47 - 4.48 )
- le misure simulate  $z(k)$ , in *rad*, di latitudine e longitudine sporcate dai rumori
- le condizioni di inizializzazione utilizzate per il simulatore e la  $P(0) = I_{(4 \times 4)}$

A ogni ciclo vengono generati nove *sigma point* a quattro componenti che assumono la forma (3.40). I pesi invece, posto  $\lambda = \alpha^2(4 + p) - 4$ , sono

$$\begin{aligned}
 W_0^m &= \frac{\lambda}{4 + \lambda} \quad W_0^c = \frac{\lambda}{(4 + \lambda)} + (1 - \alpha^2 + \beta) \\
 W_i^m &= W_i^c = \frac{1}{2(4 + \lambda)} \quad i=1,2,\dots,8
 \end{aligned} \tag{4.51}$$

Note le stime in ognuno degli istanti di simulazione ( $flag = 1$ ), la combinazione di parametri di scala scelti per ottimizzare è  $\beta = 2$ ,  $\alpha = 10^{-3}$  e quindi  $p = 3/\alpha^2 - n$ . Con queste impostazioni si ottengono:

$$\begin{aligned}
 RMS_{TR} &= \sqrt{E[d^2]} = 16,25 \text{ m} \\
 RMS_{V_N} &= \sqrt{E[(V_{NSUKF} - V_{N_w})^2]} = 55,42 \text{ m/s} \\
 RMS_{V_E} &= \sqrt{E[(V_{ESUKF} - V_{E_w})^2]} = 50,57 \text{ m/s}
 \end{aligned} \tag{4.52}$$

dove  $d$  è calcolata tramite la formula (4.33) e, al solito, le matrici con il pedice SUKF sono quelle che contengono i valori stimati. I risultati della fase di *tuning* riportati nella Tabella D.5 in Appendice D indicano che le RMS, posti  $\sigma_{V_N}^2 = \sigma_{V_E}^2 = 0,625$  (per cui  $q_{V_N} = q_{V_E} =$

1/1000), si assestano a:

$$\begin{aligned}
 RMS_{TR} &= \sqrt{E[d^2]} = 9,21 \text{ m} \\
 RMS_{V_N} &= \sqrt{E[(V_{N_{SUKF}} - V_{N_w})^2]} = 6,29 \text{ m/s} \\
 RMS_{V_E} &= \sqrt{E[(V_{E_{SUKF}} - V_{E_w})^2]} = 5,84 \text{ m/s}
 \end{aligned}
 \tag{4.53}$$

Le Figure 4.16 - 4.17 - 4.18- 4.19 riportano le stime e gli errori di traiettoria e, a titolo d'esempio, della velocità in direzione *Nord* (i grafici relativi alla velocità in direzione *Est* sono riportati in FiguraE.3 Appendice E). Le Figure 4.20 - 4.21 mostrano come il filtro propaga le stime della traiettoria e della velocità in direzione *Nord* (comportamento equivalente si ha per quella in direzione *Est*) in caso di assenza di misure ( $flag = 0$ ) dall'istante 400 all'800; ancora una volta le *RMS* delle due variabili di stato aumentano, ma non sono indicative poichè l'assenza di segnale non perdura per intervalli così prolungati.

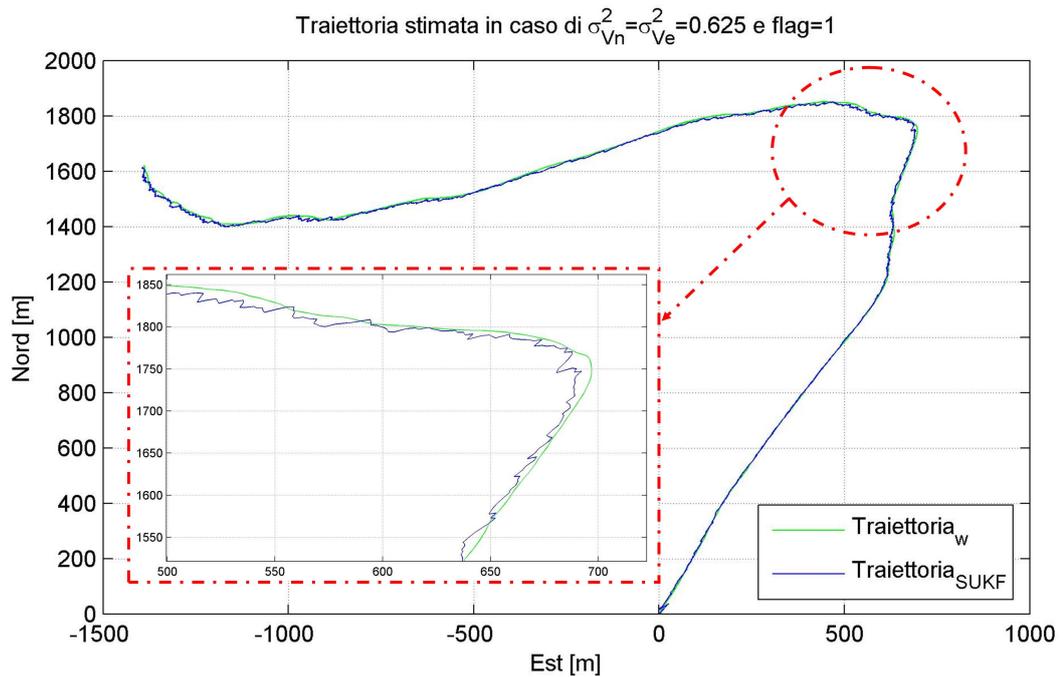


Figura 4.16: Valori stimati di traiettoria nel caso di  $\sigma_{V_N}^2 = \sigma_{V_E}^2 = 0,625$  e  $flag = 1$

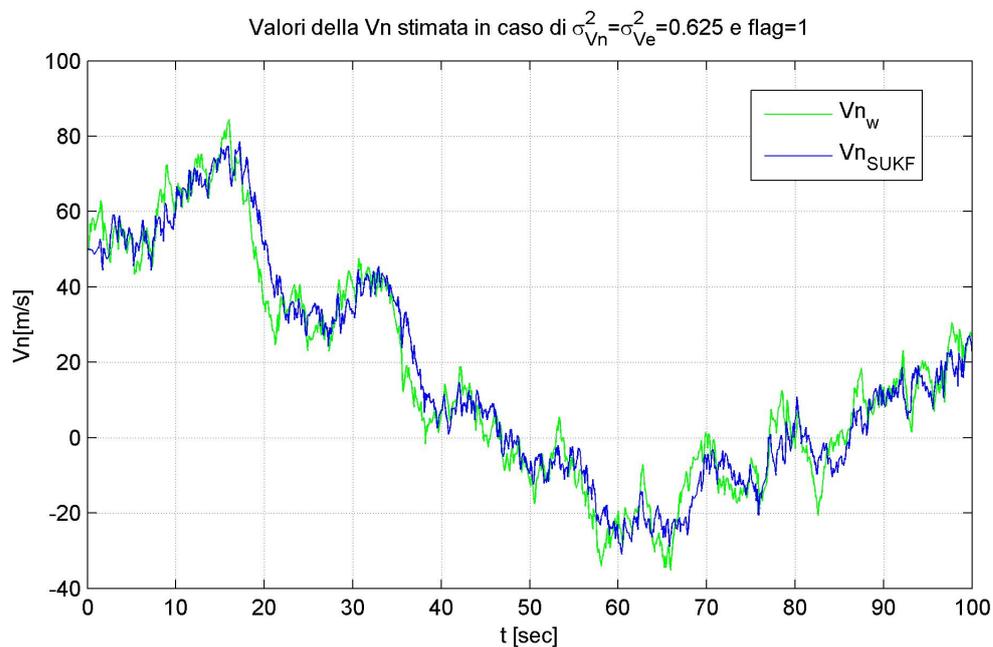


Figura 4.17: Valori stimati della velocità *Nord* nel caso di  $\sigma_{V_N}^2 = \sigma_{V_E}^2 = 0,625$  e  $flag = 1$

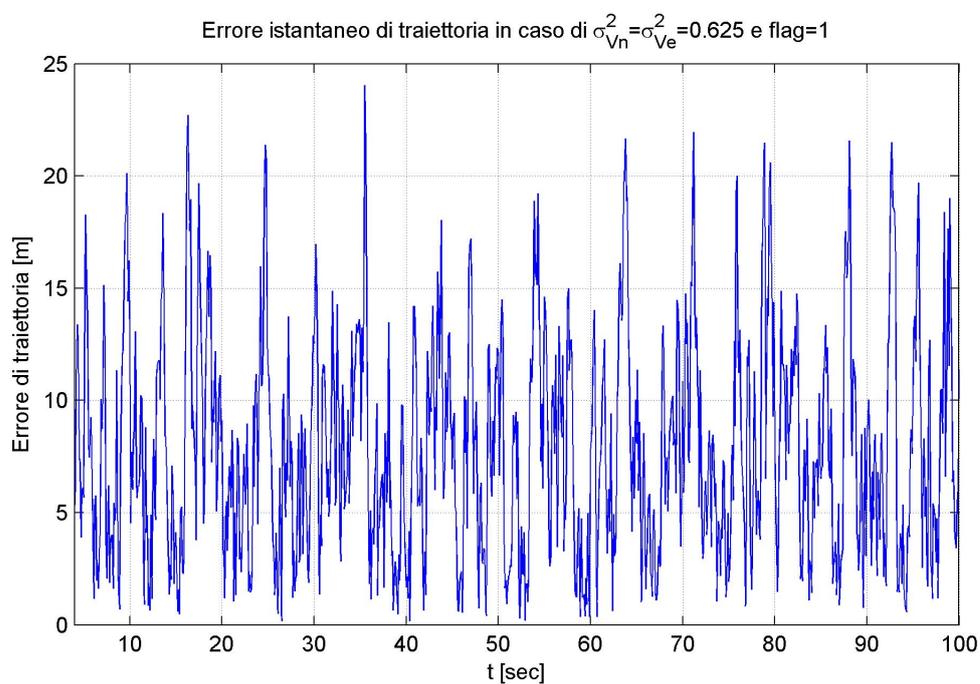


Figura 4.18: Errore di traiettoria nel caso di  $\sigma_{V_N}^2 = \sigma_{V_E}^2 = 0,625$  e  $flag = 1$

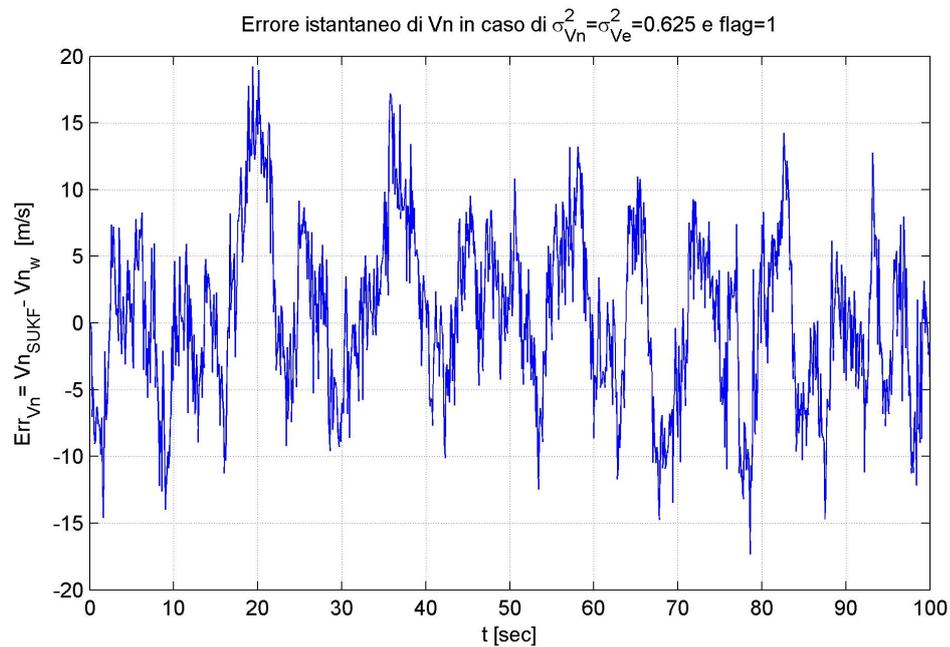


Figura 4.19: Errore di velocità *Nord* nel caso di  $\sigma_{V_N}^2 = \sigma_{V_E}^2 = 0,625$  e  $flag = 1$

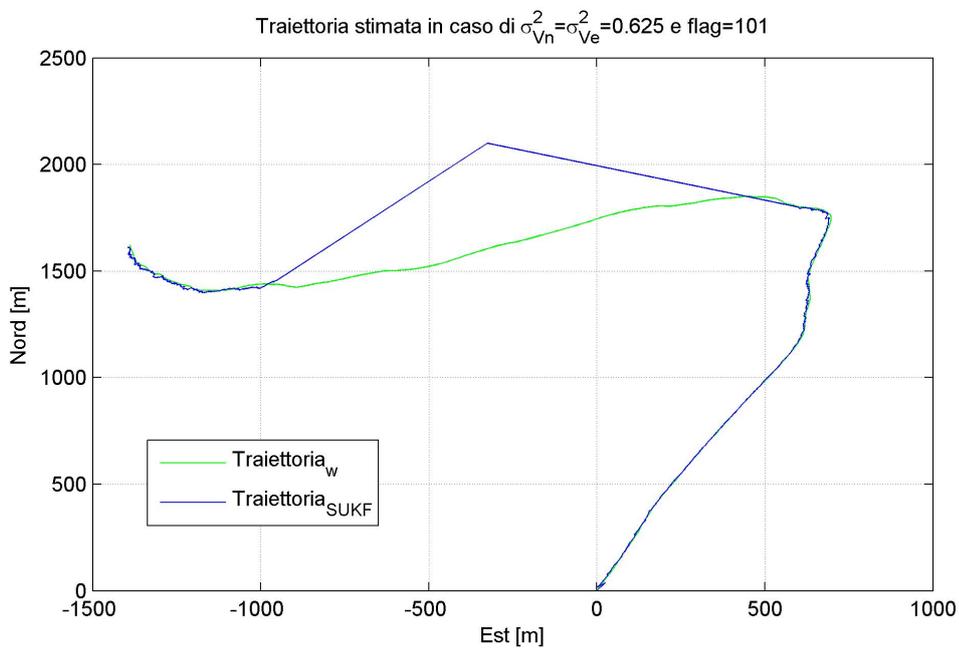


Figura 4.20: Valori stimati di traiettoria nel caso di  $\sigma_{V_N}^2 = \sigma_{V_E}^2 = 0,625$  e  $flag = 101$

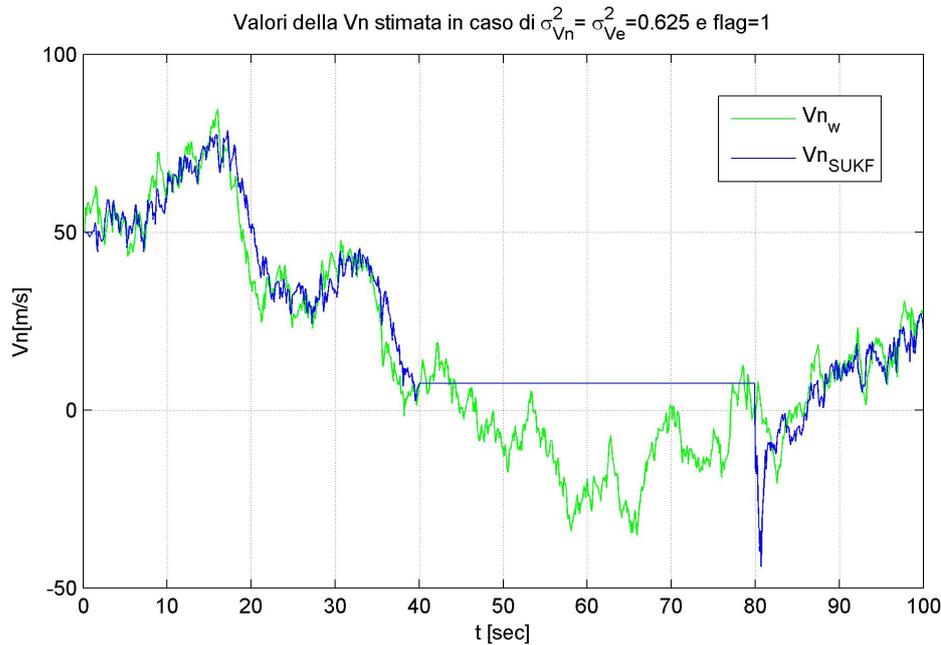


Figura 4.21: Valori stimati della velocità *Nord* nel caso di  $\sigma_{V_N}^2 = \sigma_{V_E}^2 = 0,625$  e  $flag = 101$

### 4.3.3 Utilizzo delle misure di velocità per la stima SUKF dello stato del velivolo a terra

Anche in questo caso per quantificare l'errore commesso non potendo utilizzare i dati di velocità, si è costruito un simulatore della dinamica del velivolo a terra che genera le misure rumorose di  $V_N$  e  $V_E$  ed un filtro SUKF che tiene conto di questi dati per l'elaborazione. Rispetto a quello implementato nel caso a tre misure, nel nuovo simulatore è stato necessario aggiungere due blocchi *Band Limited White noise* in corrispondenza delle uscite di velocità. Sono stati impostati i valori di *Power Spectral Density*  $PSD_{V_N} = PSD_{V_E} = 40$  a cui corrisponde un  $\sigma_{V_N} = \sigma_{V_E} = 20$  [m/s] e un errore pari a

$$RMS_{V_N(v)} = RMS_{V_E(v)} = \sqrt{E[(V_{Nv} - V_N)^2]} = 20,15 \text{ m/s} \quad (4.54)$$

In questo filtro il nuovo vettore delle misure è:

$$\begin{aligned} z_1(k) &= \phi(k) + v_\phi(k) \\ z_2(k) &= \lambda(k) + v_\lambda(k) \end{aligned} \quad (4.55)$$

$$\begin{aligned} z_3(k) &= V_N(k) + v_{V_N}(k) \\ z_4(k) &= V_E(k) + v_{V_E}(k) \end{aligned} \quad (4.56)$$

la matrice di covarianza del rumore e quella di legame fra lo stato e le misure sono

$$R = E[vv^T] = \begin{bmatrix} \sigma_\phi^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_\lambda^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{V_N}^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_{V_E}^2 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.57)$$

La fase di *tuning*, mantenuti i valori dei parametri di scala scelti in precedenza, ha indicato come deviazioni ottime i valori  $\sigma_{V_N}^2 = \sigma_{V_E}^2 = 0,625$  per cui

$$\begin{aligned} RMS_{TR} &= \sqrt{E[d^2]} = 9,15 m \\ RMS_{V_N} &= \sqrt{E[(V_{N_{SUKF}} - V_{N_w})^2]} = 5,64 m/s \\ RMS_{V_E} &= \sqrt{E[(V_{E_{SUKF}} - V_{E_w})^2]} = 5,42 m/s \end{aligned} \quad (4.58)$$

Confrontandole con le (4.53) si verifica nuovamente che la conoscenza della misura di velocità rumorosa non migliora sostanzialmente la stima quindi, ancora una volta, non considerarla non inficia in maniera rilevante le stime.



## Capitolo 5

# Validazione dello SUKF attraverso i dati ADS-B

Una volta verificato il corretto funzionamento e la precisione degli algoritmi SUKF con i dati simulati, i filtri sono stati testati utilizzando i dati ADS-B registrati all'Aeroporto L. Ridolfi di Forlì.

A differenza dei dati generati con continuità o con assenza di segnale prolungata nel tempo, i velivoli inviano le misure in maniera discontinua producendo “buchi di segnale”. Questo implica che, ad ogni ciclo interno del filtro, sia necessario verificare la presenza del *set* di misure di posizione, modulo della velocità (in direzione *Nord* ed *Est* se il velivolo è a terra), direzione e quota. Per questo l'algoritmo implementato è stato strutturato in modo che ad ogni simulazione un *timer* richiami ciclicamente, con periodicità  $T = 0,1$  secondi, una funzione denominata *mainSUKF*. Questa opera il confronto fra l'istante di *clock time0* e l'istante di rilevazione del dato ADS-B *time1*<sup>1</sup> e, tramite un ciclo *if* regolato da una condizione sul tempo (per gestire la presenza e l'assenza dei dati) e da una sulla quota (per distinguere la fase di volo da quella di terra), sceglie a quale filtro SUKF far elaborare le misure. Dopodiché questi processano in sequenza le fasi di previsione, aggiornamento e correzione che rimandano al *mainSUKF*, e da questa funzione al *timer*, i dati stimati, i *sigma point* e altri parametri necessari al ciclo successivo. Ovviamente, prima di ottenere le stime corrette, è stato necessario inizializzare i filtri con le prime misure registrate, poi,

---

<sup>1</sup>Per operare il confronto fra gli istanti il numero della richiamata fornito dal *timer* viene moltiplicato per il periodo  $T$  e *time1*, che identifica il set di dati rispetto all'inizio della registrazione, viene troncato al primo decimale.

con diversi *test*, settare i corretti parametri di scala e infine fare il *tuning* delle varianze dei rumori di processo usando al solito i coefficienti “q”. Il problema insorto nell’analisi dei dati stimati è stato l’inesistenza di un riferimento attendibile con cui poterli confrontare, infatti l’errore commesso dai filtri SUKF poteva essere determinato solo in relazione ai dati sperimentali ADS-B comunque rumorosi. E’ stato quindi implementato un ulteriore algoritmo, strutturato come quello descritto in precedenza e fornito delle medesime misure ADS-B, in grado di generare ulteriori stime tramite gli EKF in modo da poterle confrontare con quelle ottenute dall’*Unscented*. Ovviamente anche i valori ottenuti con i filtri *Extended* sono affetti da errori, ma dalla precedente implementazione effettuata [1] sono risultati sufficientemente attendibili. I dati ADS-B raccolti all’Aeroporto L. Ridolfi non sono stati corretti prima di essere elaborati quindi, per analizzare conservativamente i risultati, è stata solo ipotizzata la loro correttezza. Tuttavia, come preannunciato, le misure di velocità sono risultate particolarmente inattendibili quindi si è dovuto tener conto di questo difetto nell’interpretazione degli errori ad esse correlati. In Figura 5.1 è riportato lo schema di flusso della struttura dei due algoritmi.

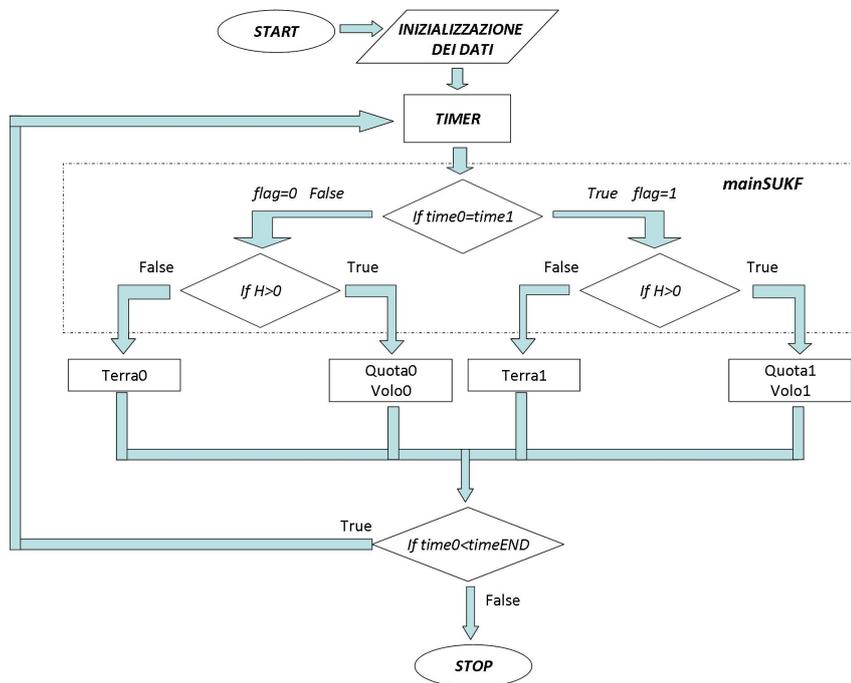


Figura 5.1: Schema di flusso dell’algoritmo implementato

## 5.1 Applicazione di SUKF ed EKF al modello della quota

Per implementare entrambi i filtri si è fatto riferimento ai modelli discreti del processo e delle misure

$$\begin{cases} h(k) = h(k-1) + T \cdot V_z(k-1) \\ V_z(k) = V_z(k-1) + T \cdot w_{V_z}(k-1) \end{cases} \quad (5.1)$$

$$z(k) = h(k) + v_h(k)$$

e alle deviazioni *standard* suggerite  $\sigma_{V_z} = 2 [m/s]$  e  $\sigma_h = 10 [m]$  [1]. Il valore iniziale dello stato scelto corrisponde al primo valore di quota fornito dai dati ADS-B, ovvero a  $11582 m$ , mentre si è ipotizzata nulla la velocità verticale; ancora una volta la covarianza iniziale utilizzata è  $P(0) = I_{(2 \times 2)}$ . Per implementare la fase di previsione dell'*EKF* è stato determinato lo Jacobiano della funzione non lineare che regola il processo:

$$F = \nabla_x f |_{x=\hat{x}(k-1|k-1)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.2)$$

in modo che

$$F_x = I + T \cdot F = \begin{bmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.3)$$

Per lo SUKF è stato necessario fornire i *sigma point* e i pesi iniziali e poi testare il comportamento al variare dei parametri di scala. La combinazione scelta è  $\alpha = 1$ ,  $\beta = 2$  e quindi  $p = 1$ , a cui corrisponde:

$$RMS_h = \sqrt{E[(H_{SUKF} - H_{ADS-B})^2]} = 0,86 m \quad (5.4)$$

Come si può vedere la (5.4) è stata calcolata facendo la differenza fra i valori stimati negli istanti in cui la misura è presente e il dato  $H_{ADS-B}$  stesso. Come al solito è stato effettuato il *tuning* di entrambi i filtri moltiplicando il  $\sigma_{V_z}^2$  suggerito per i coefficienti  $q_{V_z}$ ; quindi si è optato per mantenere il valore di deviazione iniziale per cui le *RMS* rispetto alle misure diventano:

$$\begin{aligned} RMS_{h_{SUKF}} &= \sqrt{E[(H_{SUKF} - H_{ADS-B})^2]} = 0,86 m \\ RMS_{h_{EKF}} &= \sqrt{E[(H_{EKF} - H_{ADS-B})^2]} = 1,37 m \end{aligned} \quad (5.5)$$

Come si può vedere dalla Tabella D.6 in Appendice D, i valori delle *RMS* possono diminuire ulteriormente aumentando i valori dei coefficienti moltiplicativi  $q_{V_z}$ . Tuttavia essendo le  $H$  comunque affette da errore, potrebbe non essere conveniente diminuirli ulteriormente avvicinandosi eccessivamente alla misura rumorosa. I valori di errore relativo medio fra le stime ottenute dal filtro *Unscented* e il *Kalman* calcolati rispetto agli istanti di stima sono:

$$\begin{aligned} RMS_{h_{SUKF-EKF}} &= \sqrt{E[(H_{SUKF} - H_{EKF})^2]} = 1,03 m \\ RMS_{V_{zSUKF-EKF}} &= \sqrt{E[(V_{zSUKF} - V_{zEKF})^2]} = 0,63 m/s \end{aligned} \quad (5.6)$$

Nelle Figure 5.2 - 5.3 sono riportate le stime della quota e della velocità verticale ottenute con entrambi i filtri e le relative le misure ADS-B; il grafico in Figura 5.4 mostra gli errori di stima calcolate rispetto ai dati mentre le differenze fra i valori stimati stessi sono riportate in Figura E.4 in Appendice E.

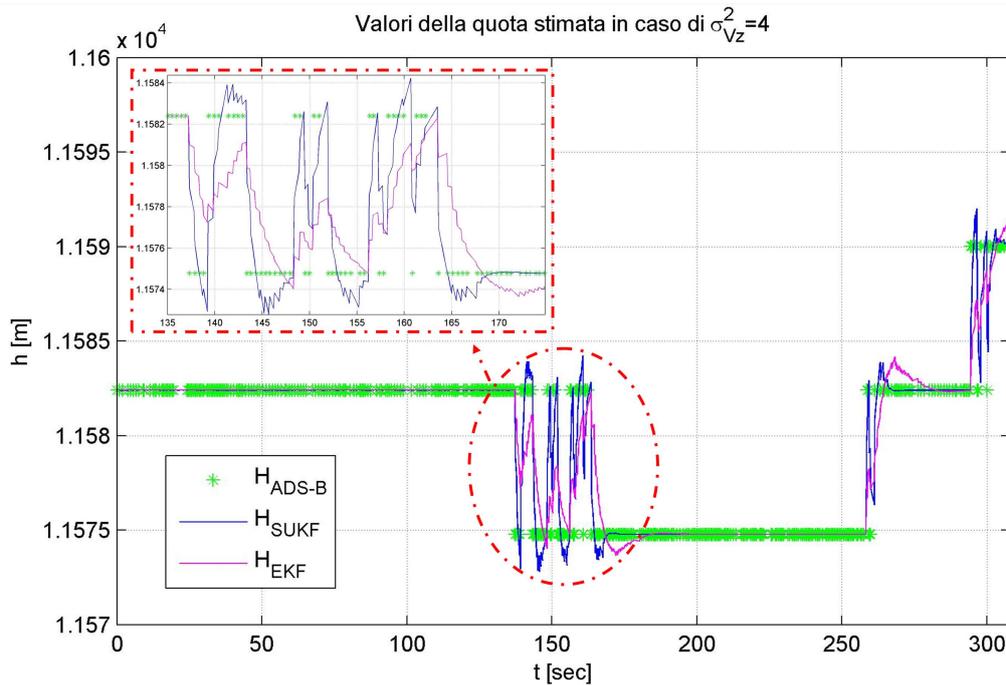


Figura 5.2: Valori stimati di quota nel caso di  $\sigma_{V_z}^2 = 4$

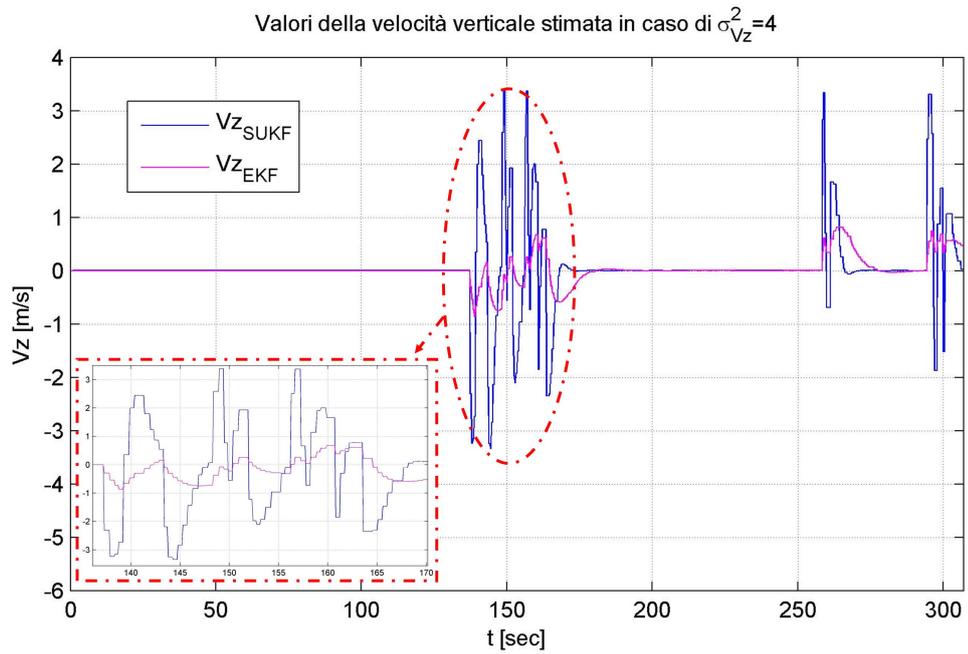


Figura 5.3: Valori stimati di velocità verticale nel caso di  $\sigma_{V_z}^2 = 4$

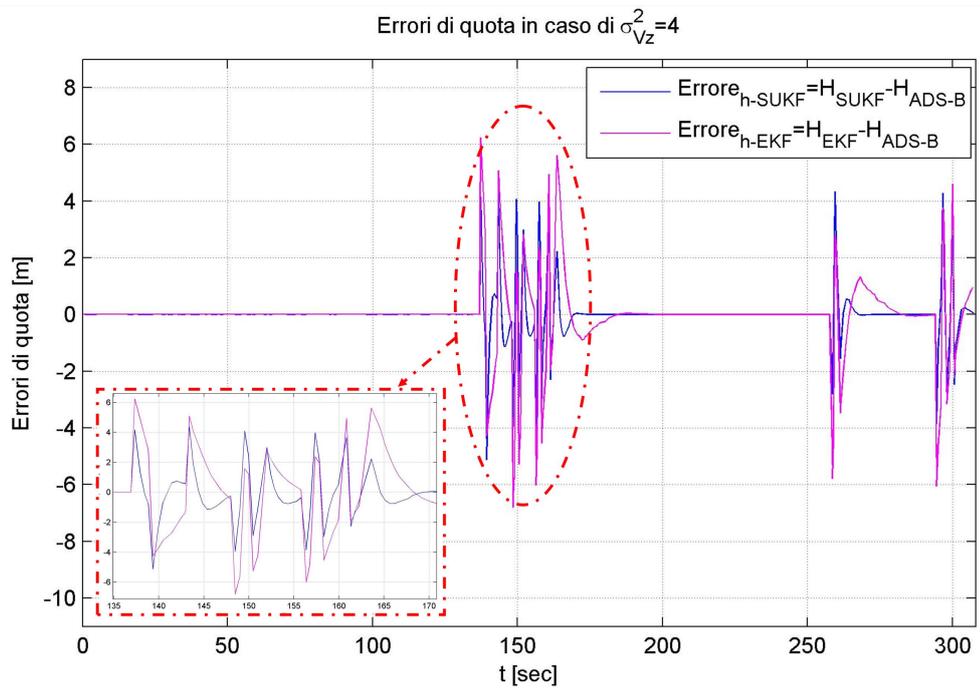


Figura 5.4: Confronto fra gli errori di stima di quota dei filtri nel caso di  $\sigma_{V_z}^2 = 4$

## 5.2 Applicazione di SUKF ed EKF al modello del velivolo in volo

Per quanto riguarda la dinamica del velivolo in volo, i modelli discreti del processo utilizzati sono:

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi(k) = \phi(k-1) + T \cdot \frac{V(k-1) \cdot \cos(\psi(k-1))}{\rho(k-1) + h(k-1)} \\ \lambda(k) = \lambda(k-1) + T \cdot \frac{V(k-1) \cdot \sin(\psi(k-1))}{(N(k-1) + h(k-1)) \cdot \cos(\phi(k-1))} \\ \psi(k) = \psi(k-1) + T \cdot \Omega(k-1) \\ V(k) = V(k-1) + T \cdot w_V \\ \Omega(k) = \Omega(k-1) + T \cdot w_\Omega \end{array} \right. \quad (5.7)$$

$$\begin{aligned} z_1(k) &= \phi(k) + v_\phi(k) \\ z_2(k) &= \lambda(k) + v_\lambda(k) \\ z_3(k) &= \psi(k) + v_\psi(k) \end{aligned} \quad (5.8)$$

Le deviazioni *standard* dei rumori di processo suggeriti sono  $\sigma_V = 0,5 [m/s]$ ,  $\sigma_\Omega = 0,01 [rad/s]$  e di misura  $\sigma_\phi = \sigma_\lambda = 5/6378137 [rad]$ ,  $\sigma_\psi = \pi/180 [rad]$  [1]. Nuovamente per implementare la fase di previsione dell'EKF è stato calcolato lo Jacobiano della funzione non lineare che regola il processo:

$$F = \begin{bmatrix} -\frac{V \cos(\psi) d\rho d\phi}{(\rho+h)^2} & 0 & -\frac{V \sin(\psi)}{\rho+h} & \frac{\cos(\psi)}{\rho+h} & 0 \\ -\frac{V \sin(\psi) (dN d\phi \cos(\phi) - (N+h) \sin(\phi))}{(N+h)^2 \cos^2(\phi)} & 0 & \frac{V \cos(\psi)}{(N+h) \cos(\phi)} & \frac{\sin(\psi)}{(N+h) \cos(\phi)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.9)$$

dove

$$\begin{aligned} d\rho d\phi &= \frac{1,5e^2 N^2 \rho \sin(2\phi)}{a^2} \\ dN d\phi &= \frac{e^2 \rho \sin(2\phi)}{2(1-e^2)} \end{aligned} \quad (5.10)$$

in modo che

$$F_x = \begin{bmatrix} 1 - T \cdot \frac{V \cos(\psi) d\rho d\phi}{(\rho+h)^2} & 0 & -T \cdot \frac{V \sin(\psi)}{\rho+h} & T \cdot \frac{\cos(\psi)}{\rho+h} & 0 \\ -T \cdot \frac{V \sin(\psi) (dN d\phi \cos(\phi) - (N+h) \sin(\phi))}{(N+h)^2 \cos^2(\phi)} & 1 & T \cdot \frac{V \cos(\psi)}{(N+h) \cos(\phi)} & T \cdot \frac{\sin(\psi)}{(N+h) \cos(\phi)} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & T \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.11)$$

I primi valori forniti dai dati ADS-B riportati in Tabella 5.1 sono stati utilizzati per inizializzare lo stato; inoltre la covarianza iniziale adottata è nuovamente  $P(0) = I_{(5 \times 5)}$ .

Latitudine iniziale	$\phi(0) = 44,30^\circ$
Longitudine iniziale	$\lambda(0) = 11,77^\circ$
Prua	$\psi(0) = 354,77^\circ$
Modulo della velocità	$V(0) = 231,5 \text{ m/s}$
Rateo di virata	$\Omega(0) = 0^\circ/\text{s}$
Quota	$h(0) = 11582 \text{ m}$

Tabella 5.1: Condizioni iniziali di filtraggio dello stato del velivolo in volo

Una volta forniti i *sigma point* iniziali, il filtro SUKF è stato ottimizzato scegliendo  $\beta = 2$ ,  $\alpha = 1$  e  $p = -2$ . Le deviazioni *standard*, calcolate facendo la differenza fra i valori stimati negli istanti in cui la misura è presente e il dato misurato stesso, sono risultate:

$$\begin{aligned} RMS_{TR} &= \sqrt{E[d^2]} = 25,84 \text{ m} \\ RMS_{\psi} &= \sqrt{E[(\psi_{SUKF} - \psi_{ADS-B})^2]} = 8^\circ \\ RMS_V &= \sqrt{E[(V_{SUKF} - V_{ADS-B})^2]} = 11,85 \text{ m/s} \\ RMS_{\phi} &= \sqrt{E[(\phi_{SUKF} - \phi_{ADS-B})^2]} = 12,56^\circ \end{aligned} \quad (5.12)$$

dove

$$d = \|P_{SUKF} - P\| = \left\| \begin{pmatrix} N_{SUKF} \\ E_{SUKF} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} N_{ADS-B} \\ E_{ADS-B} \end{pmatrix} \right\| \quad (5.13)$$

Come si può vedere dalla Figura 5.5 il moto del velivolo in volo si sviluppa in due fasi: dapprima il velivolo compie una virata per allinearsi alla *center line*, poi una discesa

rettilenea quasi stazionaria e livellata fino alla fase richiamata (*flare*). La prima manovra, che si conclude attorno al 50-esimo secondo, avviene a quota pressoché costante (e quindi velocità verticale nulla come si può vedere dalle Figure 5.2 - 5.3 ) e, supponendo che sia una virata corretta, attraverso le stime si dovrebbe verificare che la velocità si mantiene costante, così come l'angolo di banco e il rateo, e che l'*heading* varia fino a coincidere con quello della pista. Come si vedrà in seguito, a causa dell'inattendibilità delle misure di velocità, degli errori di stima e della virata non esattamente corretta del velivolo, solo la prua ha l'andamento descritto. In discesa rettilinea la quota e la velocità verticale variano, la velocità tangenziale e l'*heading* rimangono circa costanti mentre l'angolo di banco e il rateo di virata sono pressoché nulli.

Per poter interpretare correttamente le *performance* dei filtri su i due tratti, sono state determinate le *RMS* parziali, frutto del confronto fra le misure e le stime nelle singole fasi; è stato poi valutato separatamente l'effetto sulle *RMS* parziali delle variazioni di  $\sigma_V^2$  e  $\sigma_\Omega^2$ . Inoltre, poichè i velivoli non forniscono dati ADS-B relativi all'angolo di banco e al rateo di virata, le relative *RMS* sono state calcolate solo nel secondo tratto di moto considerando come riferimenti i valori nulli di  $\varphi$  e  $\Omega$ . In Tabella D.7 in Appendice D, sono riportati a titolo di esempio i valori delle deviazioni *standard* che si ottengono aumentando e diminuendo i valori delle varianze dei rumori di processo suggeriti come riferimento [1]. Come si può vedere anche dalle Figure 5.5 - 5.6 - 5.7 - 5.8, considerando i valori suggeriti di  $\sigma_V^2$  e  $\sigma_\Omega^2$ , la precisione della stima che si ottiene con entrambi i filtri risulta alquanto differente nelle due fasi di volo. In virata infatti sono presenti rilevanti fluttuazioni sia nella stima della traiettoria (rappresentate dalle "frange" del tratto di manovra) che in quella dell'angolo di banco, comunque di minore durata ed entità nello SUKF. Questi errori sono legati all'eccessiva generalità del modello implementato e quindi possono essere migliorati o utilizzando un modello più sofisticato, o differenziando le matrici di covarianza dell'errore di processo, in modo da dare più affidamento alle misure in virata e meno nella fase di volo rettilineo. I grafici nelle Figure E.5 - E.6 - E.8 in Appendice E sono riportate le stime e i relativi errori di prua, modulo della velocità e rateo di virata.

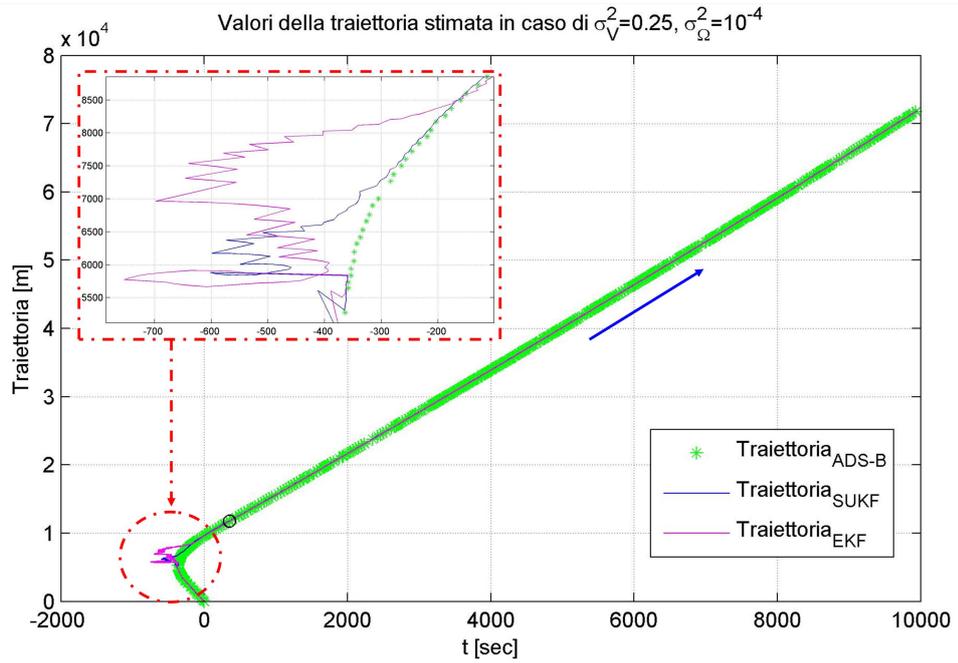


Figura 5.5: Valori stimati di traiettoria nel caso di  $\sigma_V^2 = 0,25$  e  $\sigma_\Omega^2 = 10^{-4}$

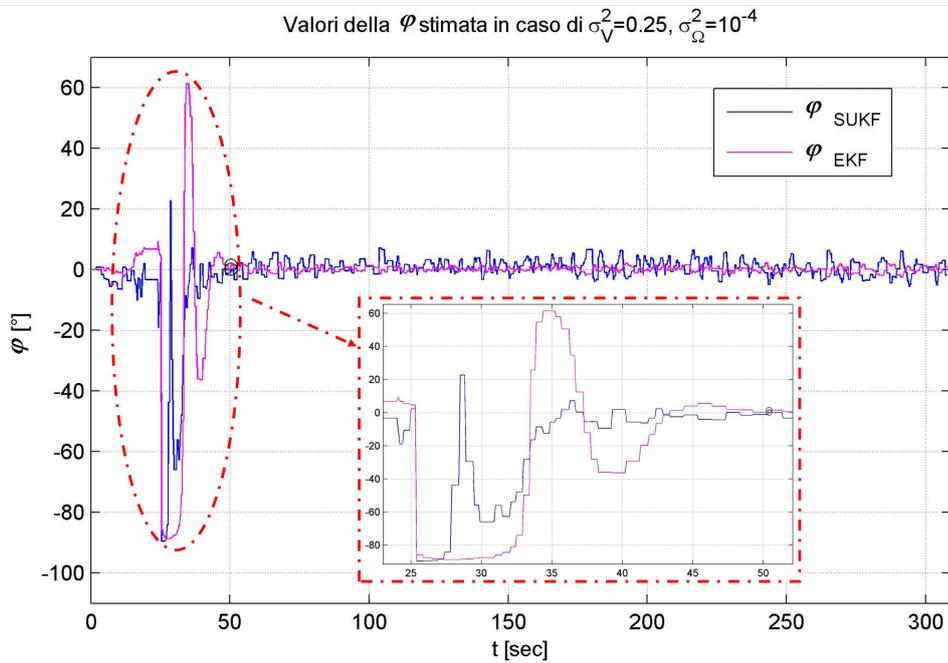


Figura 5.6: Valori stimati di  $\varphi$  nel caso di  $\sigma_V^2 = 0,25$  e  $\sigma_\Omega^2 = 10^{-4}$

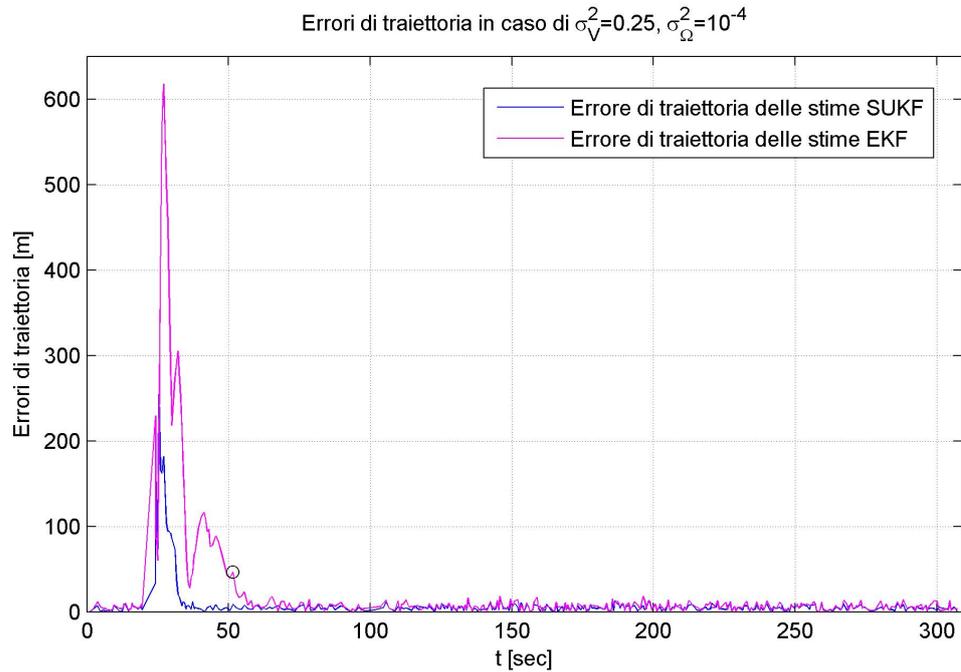


Figura 5.7: Confronto fra gli errori di stima di traiettoria nel caso di  $\sigma_V^2 = 0,25$  e  $\sigma_\Omega^2 = 10^{-4}$

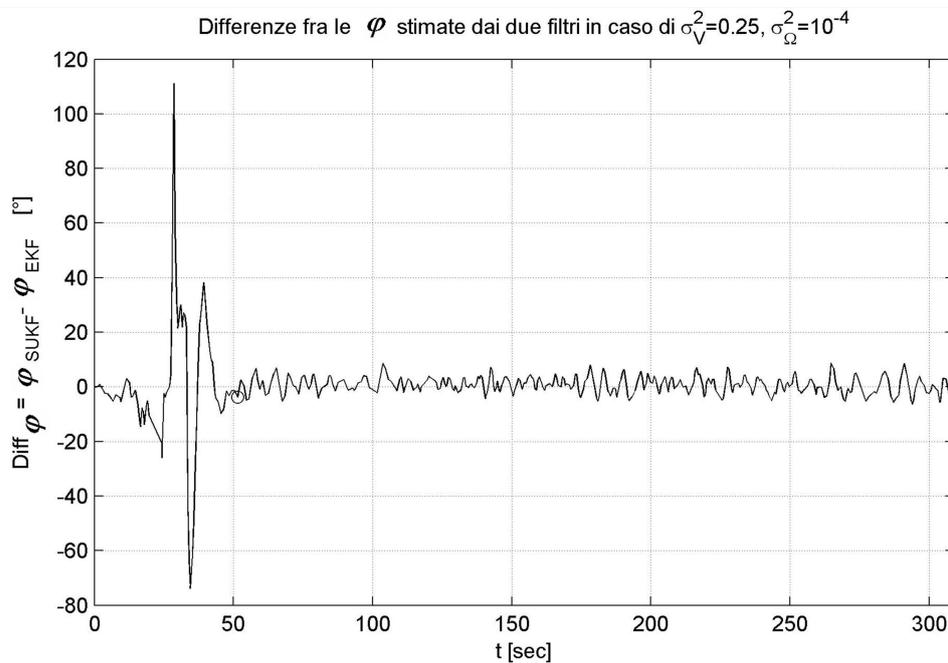


Figura 5.8: Differenze fra i valori di  $\varphi$  stimati dai due filtri nel caso di  $\sigma_V^2 = 0,25$  e  $\sigma_\Omega^2 = 10^{-4}$

Come si può vedere dalla Tabella D.7 aumentando la varianza relativa al rumore di velocità, ovvero ammettendo l'imprecisione del processo legata a questa variabile, e diminuendo quella legata al rateo di virata si riescono a minimizzare gli errori ottenuti nella fase di volo rettilinea. Non vale la stessa relazione per la fase di virata in cui il *tuning* dei valori risulta più delicato perchè a un miglioramento della precisione su  $\psi$  e sulla traiettoria, aumentando entrambe le varianze dei rumori di processo, corrisponde un aumento delle fluttuazioni dell'angolo di banco. In Tabella 5.2 sono riportati i valori delle *RMS* ottenute con entrambi i filtri, scegliendo come varianze dei rumori di processo:

- nel tratto in virata  $\sigma_V^2 = 250$  (a cui corrisponde un errore di processo  $\sigma_V = 15m$  e  $q_V = 1000$ ) e  $\sigma_\Omega^2 = 0,1$  (a cui corrisponde un errore di processo  $\sigma_\Omega = 18^\circ/s$  e  $q_\Omega = 1000$ )
- nel tratto rettilineo  $\sigma_V^2 = 12,5$  e  $\sigma_\Omega^2 = 2 * 10^{-6}$  ( a cui corrispondono i coefficienti moltiplicativi di *tuning*  $q_V = 50$  e  $q_\Omega = 1/50$ )

Con queste scelte si è voluto privilegiare la precisione sulla traiettoria, accettando l'inattendibilità della velocità e dell'angolo di banco ottenuto in virata.

	<i>SUKF</i>	<i>EKF</i>
<i>RMS<sub>TR</sub> in virata [m]</i>	19,63	96,8
<i>RMS<sub>TR</sub> in traiettoria rettilinea [m]</i>	3,15	5,77
<i>RMS<sub>ψ</sub> in virata [°]</i>	0,9	12,09
<i>RMS<sub>ψ</sub> in traiettoria rettilinea [°]</i>	0,13	0,11
<i>RMS<sub>V</sub> in virata [m/s]</i>	247,03	101,22
<i>RMS<sub>V</sub> in traiettoria rettilinea [m/s]</i>	7,8	2,4
<i>RMS<sub>φ</sub> in traiettoria rettilinea [°]</i>	1,04	0,45

Tabella 5.2: Errori di stima dei filtri nel caso di *tuning* differenziato delle due fasi di volo

I valori stimati e i relativi errori di prua, modulo della velocità e rateo di virata sono riportati nelle Figure E.7 - E.9 in Appendice E. L'errore di traiettoria può diminuire ulteriormente, fino ad eliminare le "frange", se si incrementa ancora l'errore commesso dal processo (si veda la Tabella D.7 e le traiettorie in fase di virata in Figura E.10 in Appendice E). Se si considerano tutti gli istanti di filtraggio e non solo quelli in cui è presente la misura, le differenze medie di stima fra i filtri che si ottengono sono quelle riportate in Tabella 5.3.

Ipotizzando che le misure ADS-B utilizzate siano valori già corretti dagli errori atmosferici, dai valori riportati e guardando le Figure 5.9 - 5.10 - 5.11 - 5.12 si può concludere che l'EKF, con la scelta di covarianza fatta, fornisce nel secondo tratto stime di velocità più aderenti alle misure e minori scostamenti dell'angolo di banco dal valore nullo. Tuttavia lo SUKF ricostruisce una traiettoria molto più precisa in virata, infatti in Figura 5.9 si può notare come le "frange" di stima della posizione in manovra siano ridotte e di conseguenza lo sia anche l'angolo di heading; inoltre anche i dati che fornisce relativamente al tratto rettilineo possono considerarsi sufficientemente attendibili.

	virata	traiettoria rettilinea
$RMS_{TR_{SUKF-EKF}}$ [m]	127,12	7
$RMS_{\psi_{SUKF-EKF}}$ [°]	33,83	0,19
$RMS_{V_{SUKF-EKF}}$ [m/s]	177,02	7,14
$RMS_{\varphi_{SUKF-EKF}}$ [°]	53,7	3,25
$RMS_{\Omega_{SUKF-EKF}}$ [°/s]	104,15	0,26

Tabella 5.3: Confronto fra le stime dei filtri nel caso di *tuning* differenziato delle due fasi di volo

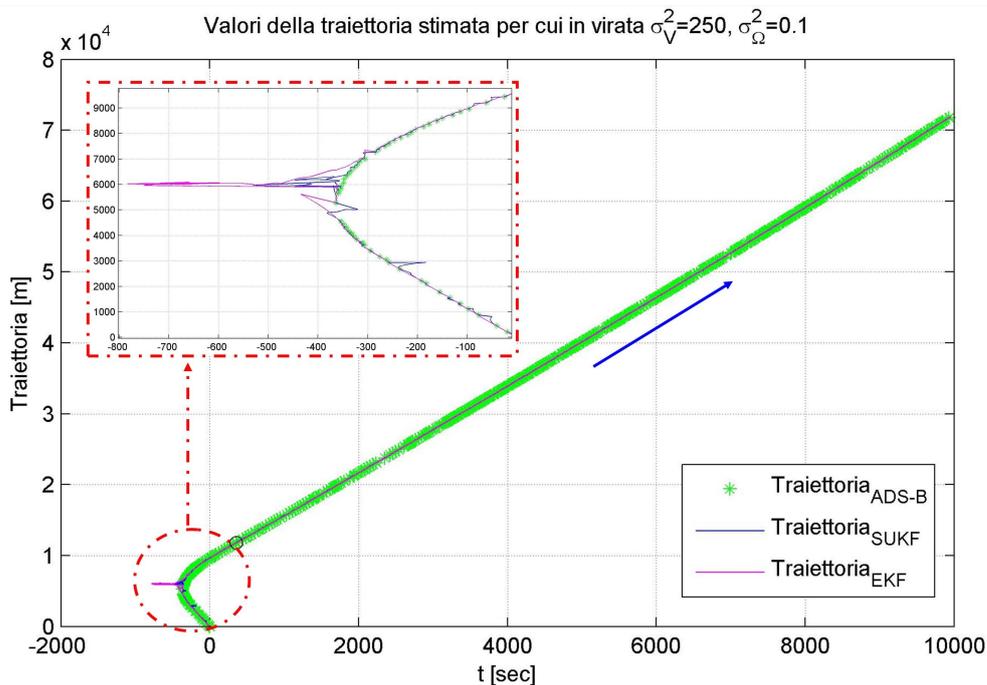


Figura 5.9: Valori stimati di traiettoria scelte  $\sigma_V^2 = 250$  e  $\sigma_\Omega^2 = 0,1$  per la virata

5.2. APPLICAZIONE DI SUKF ED EKF AL MODELLO DEL VELIVOLO IN VOLO 101

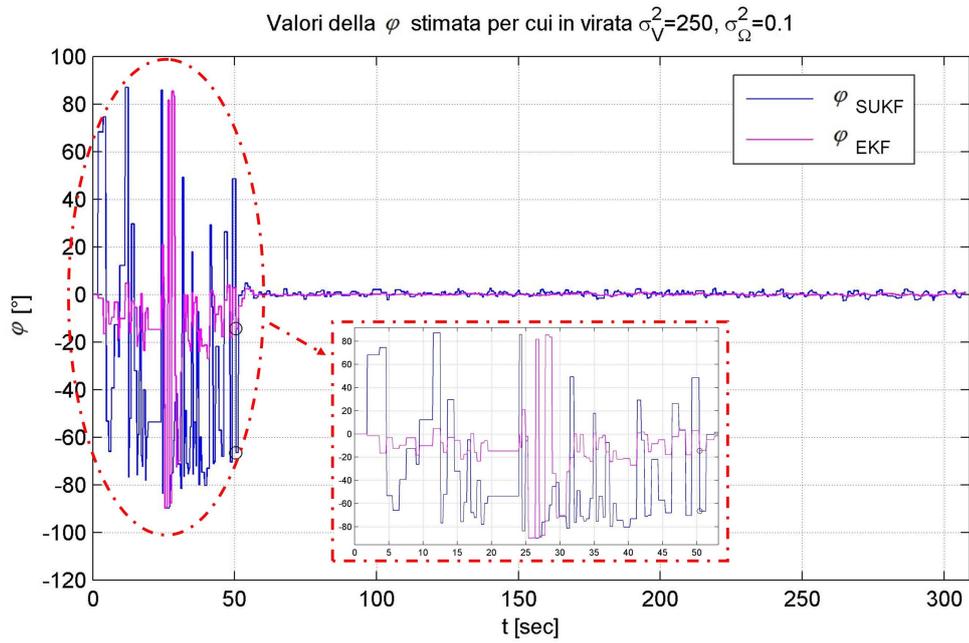


Figura 5.10: Valori stimati di  $\varphi$  scelte  $\sigma_V^2 = 250$  e  $\sigma_\Omega^2 = 0,1$  per la virata

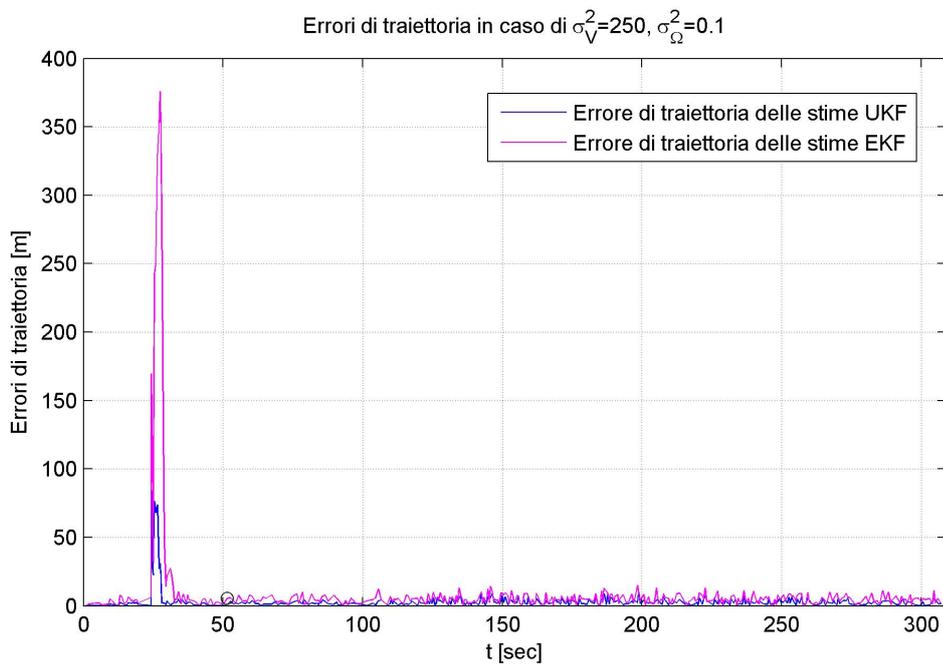


Figura 5.11: Confronto fra gli errori di stima della traiettoria scelte  $\sigma_V^2 = 250$  e  $\sigma_\Omega^2 = 0,1$  per la virata

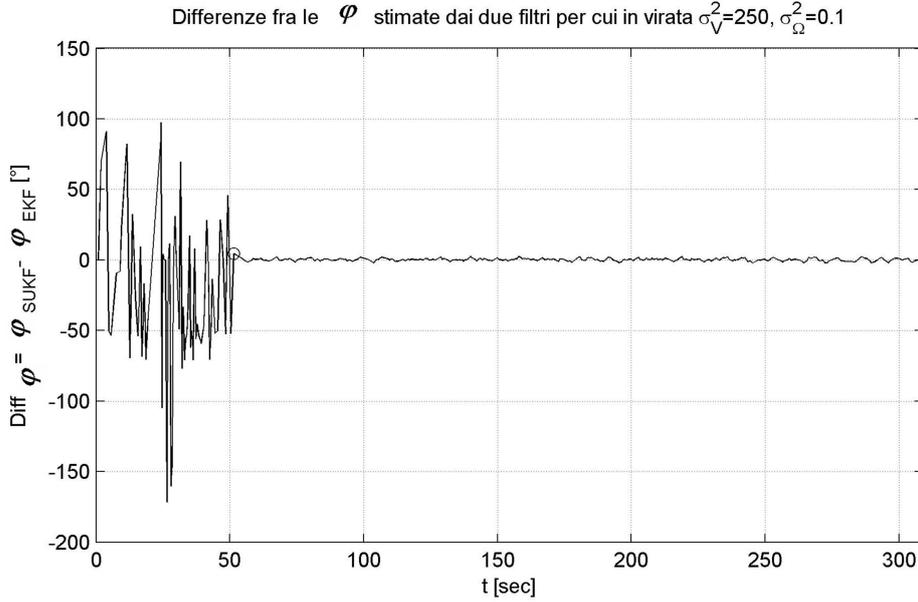


Figura 5.12: Differenza fra i valori stimati di  $\phi$  scelte  $\sigma_V^2 = 250$  e  $\sigma_\Omega^2 = 0,1$  per la virata

Le stime su cui permangono errori rilevanti sono quelle relative all'angolo di banco e alla velocità in virata; tuttavia aggiungendo al vettore delle misure anche quest'ultima variabile, si possono ottenere sensibili miglioramenti. Come fatto nel caso dei valori simulati, l'algoritmo è stato modificato utilizzando come dati in ingresso:

$$\begin{aligned}
 z_1(k) &= \phi(k) + v_\phi(k) \\
 z_2(k) &= \lambda(k) + v_\lambda(k) \\
 z_3(k) &= \psi(k) + v_\psi(k) \\
 z_4(k) &= V(k) + v_V(k)
 \end{aligned} \tag{5.14}$$

Ancora una volta la matrice di covarianza del rumore e quella di legame fra lo stato e le misure sono state trasformate in

$$R = E[vv^T] = \begin{bmatrix} \sigma_\phi^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_\lambda^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_\psi^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_V^2 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{5.15}$$

scegliendo come deviazione standard del rumore di misura sulla velocità  $\sigma_V = 3 \text{ m/s}$ . Le

## 5.2. APPLICAZIONE DI SUKF ED EKF AL MODELLO DEL VELIVOLO IN VOLO 103

nuove informazioni di velocità combinate ai valori di *tuning* differenziati prima scelti, permettono di diminuire drasticamente gli errori di stima su questa variabile come si può vedere dalla tabella sottostante.

	SUKF	EKF
$RMS_V$ in virata [m/s]	1,53	8,95
$RMS_V$ in traiettoria rettilinea [m/s]	0,77	1,30

Tabella 5.4: Errori di stima della velocità ottenute con i filtri a quattro misure e con *tuning* differenziato

Tuttavia i valori delle *RMS* relative alla traiettoria aumentano per entrambe le fasi; è quindi necessario o avvalersi dei valori ottenuti con il filtro a tre misure, o trovare una giusta combinazione dei paramtri di *tuning* in modo da ottenere la precisione voluta sulle variabili di maggiore interesse (la traiettoria nel caso dell'algorithmo Merlinò). Inoltre, l'aggiunta del dato di velocità combinata con la diminuzione della varianza del rumore di processo relativo a  $\Omega$ , comporta minori fluttuazioni dell'angolo di banco in virata specialmente utilizzando lo SUKF.

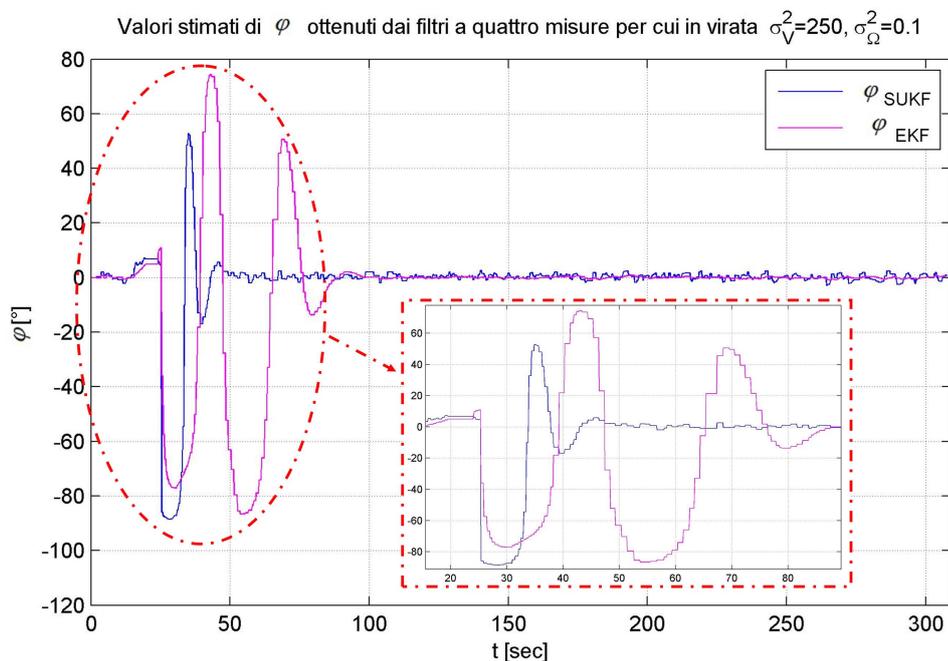


Figura 5.13: Valori stimati di  $\varphi$  ottenuti con i filtri a quattro misure, scelta  $\sigma_V^2 = 250$  e  $\sigma_\Omega^2 = 0,1$  per la virata

Un esempio è riportato in Figura 5.13 dove si è scelto di mantenere le penalizzazioni prima usate per la fase di volo rettilineo, e per la fase in virata le varianze impiegate sono  $\sigma_V^2 = 250$  e  $\sigma_\Omega^2 = 0,1$  (a cui corrisponde un errore medio di processo pari a  $\sigma_\Omega = 0,06^\circ/s$  e  $q_\Omega = 1/100$ ). Alla luce di questo risultato può essere utile, specialmente in presenza di virate lunghe e ad alto raggio di curvatura, implementare in parallelo al filtro a tre misure quello in cui viene integrata la velocità da cui ricavare un valore dell'angolo di banco più indicativo in manovra.

### 5.3 Applicazione di SUKF ed EKF al modello del velivolo a terra

Per l'implementazione dei filtri relativi alla dinamica a terra del velivolo sono stati impiegati i modelli discreti:

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi(k) = \phi(k-1) + T \cdot \frac{V_N(k-1)}{\rho(k-1)} \\ \lambda(k) = \lambda(k-1) + T \cdot \frac{V_E(k-1)}{N(k-1) \cdot \cos(\phi(k-1))} \\ V_N(k) = V_N(k-1) + T \cdot w_{V_N} \\ V_E(k) = V_E(k-1) + T \cdot w_{V_E} \end{array} \right. \quad (5.16)$$

$$z_1(k) = \phi(k) + v_\phi(k)$$

$$z_2(k) = \lambda(k) + v_\lambda(k)$$

Al solito sono state usate le deviazioni *standard* suggerite dei rumori di processo  $\sigma_{V_N} = \sigma_{V_E} = 25 [m/s]$  e di misura  $\sigma_\phi = \sigma_\lambda = 5/6378137 [rad]$  [1]. Lo Jacobiano della funzione non lineare che regola il processo è in questo caso:

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{\rho+h} & 0 \\ -\frac{V_E(dNd\phi \cos(\phi) - (N+h)\sin(\phi))}{(N+h)^2 \cos^2(\phi)} & 0 & 0 & \frac{1}{(N+h)\cos(\phi)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.17)$$

in modo che

$$F_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & T \cdot \frac{1}{\rho+h} & 0 \\ -T \cdot \frac{V_E(dNd\phi\cos(\phi)-(N+h)\sin(\phi))}{(N+h)^2\cos^2(\phi)} & 1 & 0 & T \cdot \frac{1}{(N+h)\cos(\phi)} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.18)$$

Ancora una volta per l'inizializzazione sono stati usati i primi valori forniti dai dati ADS-B riportati in Tabella 5.5 e la covarianza iniziale  $P(0) = I_{(4 \times 4)}$ .

Latitudine iniziale	$\phi(0) = 44,19^\circ$
Longitudine iniziale	$\lambda(0) = 12,05^\circ$
Modulo della velocità in direzione Nord	$V_N(0) = -30,35 \text{ m/s}$
Modulo della velocità in direzione Est	$V_E(0) = 62,25 \text{ m/s}$
Quota	$h(0) = 0 \text{ m}$

Tabella 5.5: Condizioni iniziali di filtraggio dello stato del velivolo a terra

La combinazione di parametri di scala utilizzati per lo *Scaled Unscented Kalman Filter* sono nuovamente  $\alpha = 1$ ,  $\beta = 2$  e  $p = -1$  a cui corrispondono gli errori:

$$\begin{aligned} RMS_{V_N} &= \sqrt{E[(V_{N_{SUKF}} - V_{N_{ADS-B}})^2]} = 29,37 \text{ m/s} \\ RMS_{V_E} &= \sqrt{E[(V_{E_{SUKF}} - V_{E_{ADS-B}})^2]} = 55,62 \text{ m/s} \\ RMS_{TR} &= \sqrt{E[d^2]} = 0,03 \text{ m} \end{aligned} \quad (5.19)$$

$$d = \|P_{SUKF} - P\| = \left\| \begin{pmatrix} N_{SUKF} \\ E_{SUKF} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} N_{ADS-B} \\ E_{ADS-B} \end{pmatrix} \right\| \quad (5.20)$$

Anche in questo caso sono distinguibili due fasi differenti: nella prima il velivolo decellera con traiettoria rettilinea, nella seconda, compie una curva sulla pista. Nella fase di *tuning* si è fatta quindi attenzione non tanto alle *RMS* ottenute sull'intero percorso, ma a quelle parziali e all'effetto che le variazioni di  $\sigma_{V_N}^2$  e  $\sigma_{V_E}^2$  producono separatamente su di esse; inoltre per determinare gli errori sono stati considerati solo gli istanti in cui è effettivamente presente la misura ADS-B con cui confrontare il dato stimato. Come si può notare dalle (5.20) il filtro, con i valori suggeriti di varianza del rumore di processo, produce un

errore medio nullo di traiettoria anche considerando l'intero percorso. Per assicurarsi che nello SUKF non venga dato troppo peso alle misure, a parità di  $R$ , si è optato per calare drasticamente le varianze di processo di *default* fino a  $\sigma_{V_N}^2 = \sigma_{V_E}^2 = 0,625$  usando come coefficienti di *tuning*  $q_{V_N} = q_{V_E} = 1/1000$ ; i valori delle *RMS* ottenuti sono riportate in Tabella 5.6. Come si può vedere dalla Figura 5.14, lo SUKF relativo al moto a terra permette di ricostruire una traiettoria, se pur abbozzata a causa dello scarso numero di informazioni, dando poco peso alle misure (ovvero ammettendo un errore minimo di processo pari a  $\sigma_{V_N}^2 = \sigma_{V_E}^2 = 0,8 m/s$ ) e producendo uno scostamento da esse pari o inferiore ad un metro. L'EKF invece, a parità di varianza di processo scelta, produce un errore maggiore sia nella fase rettilinea che in curva; difatti la traiettoria ricostruita non è affatto plausibile e il filtro si discosta troppo dalle misure. I valori nella Tabella D.8 in Appendice D mostrano che questo filtro ha bisogno di una matrice  $Q$  maggiore per produrre errori minori di traiettoria, ovvero ha bisogno di misure attendibili su cui fare affidamento dimostrandosi per questo meno robusto. La stima della posizione migliora se vengono utilizzate le varianze  $\sigma_{V_N}^2 = \sigma_{V_E}^2 = 12,5$  (a cui corrispondono  $q_{V_N} = q_{V_E} = 1/50$ ), ma, come si può vedere dai valori riportati in Tabella 5.7, le stime prodotte dallo SUKF risultano più simili alle misure ADS-B. Un'ulteriore conferma di ciò si ha osservando le differenze medie fra le stime dei filtri SUKF ed EKF riportate in Tabella 5.8 da cui ci può notare che lo scostamento di posizione anche nel primo tratto è elevato se pur nelle Figure 5.14 - 5.15 le posizioni sembrano sovrapporsi. Infatti ingrandendo l'immagine, si può notare che le traiettorie nel tratto rettilineo sono per lo più parallele e si distanziano di circa  $2m$  lungo quasi tutto il percorso; i valori elevati delle *RMS* in questa fase sono quindi dovuti a brevi tratti in cui l'EKF, non riuscendo a seguire le misure, crea geometrie che si discostano molto da quelle generate dallo SUKF. Il comportamento dei filtri risulta più o meno equivalente per quanto riguarda le velocità i cui errori, anche aumentando l'incertezza sul modello e affidandosi alle misure (come si può vedere dalla Tabella D.8 in Appendice D), non variano considerevolmente. Questo ancora una volta è dovuto alle rilevanti inesattezze delle misure di velocità che, come verrà dimostrato anche in seguito, sono incompatibili con quelle di posizione e, di conseguenza, con i valori stimati. Nelle Figure 5.14 - 5.15 - 5.16 sono riportati i dati ADS-B e i valori stimati della traiettoria e delle velocità  $V_N$  e  $V_E$  sia per  $\sigma_{V_N}^2 = \sigma_{V_E}^2 = 12,5$  (a cui corrispondono  $q_{V_N} = q_{V_E} = 1/50$ ) che per  $\sigma_{V_N}^2 = \sigma_{V_E}^2 = 0,625$  (a cui corrispondono  $q_{V_N} = q_{V_E} = 1/1000$ ). In questo modo si può confrontare il comportamento ottimizzato di entrambi i filtri, sia nel primo che nel secondo tratto il cui inizio è contrassegnato con

un cerchio mentre la fine con una stella. Nelle Figure E.11 - E.12 in Appendice E sono riportati invece gli errori fra i valori stimati e le misure e le differenze fra le stime dei due filtri.

	<b>SUKF</b>	<b>EKF</b>
$RMS_{TR}$ in rettilineo [m]	1,98	19,78
$RMS_{TR}$ in curva [m]	0,66	8,96
$RMS_{V_N}$ in rettilineo [m/s]	17,56	15,13
$RMS_{V_N}$ in curva [m/s]	30,22	28,96
$RMS_{V_E}$ in rettilineo [m/s]	35,98	31,89
$RMS_{V_E}$ in curva [m/s]	59,21	58,56

Tabella 5.6: Errori di stima dei filtri nel caso di  $\sigma_{V_N}^2 = \sigma_{V_E}^2 = 0,625$

	<b>SUKF</b>	<b>EKF</b>
$RMS_{TR}$ in rettilineo [m]	0,40	4,85
$RMS_{TR}$ in curva [m]	0,26	1,48
$RMS_{V_N}$ in rettilineo [m/s]	18,07	16,94
$RMS_{V_N}$ in curva [m/s]	30,31	30,02
$RMS_{V_E}$ in rettilineo [m/s]	36,64	35
$RMS_{V_E}$ in curva [m/s]	59,07	59,23

Tabella 5.7: Errori di stima dei filtri nel caso di  $\sigma_{V_N}^2 = \sigma_{V_E}^2 = 12,5$

	$\sigma_{V_N}^2 = \sigma_{V_E}^2 = 0,625$		$\sigma_{V_N}^2 = \sigma_{V_E}^2 = 12,5$	
	rettilineo	curva	rettilineo	curva
$RMS_{TR_{SUKF-EKF}}$ [m]	36,01	19,12	14,66	4,77
$RMS_{V_N_{SUKF-EKF}}$ [m/s]	3,67	2,35	2,13	0,89
$RMS_{V_E_{SUKF-EKF}}$ [m/s]	6,42	1,69	4,14	0,94

Tabella 5.8: Confronto fra le stime dei filtri nei casi di  $\sigma_{V_N}^2 = \sigma_{V_E}^2 = 0,625$  e di  $\sigma_{V_N}^2 = \sigma_{V_E}^2 = 12,5$

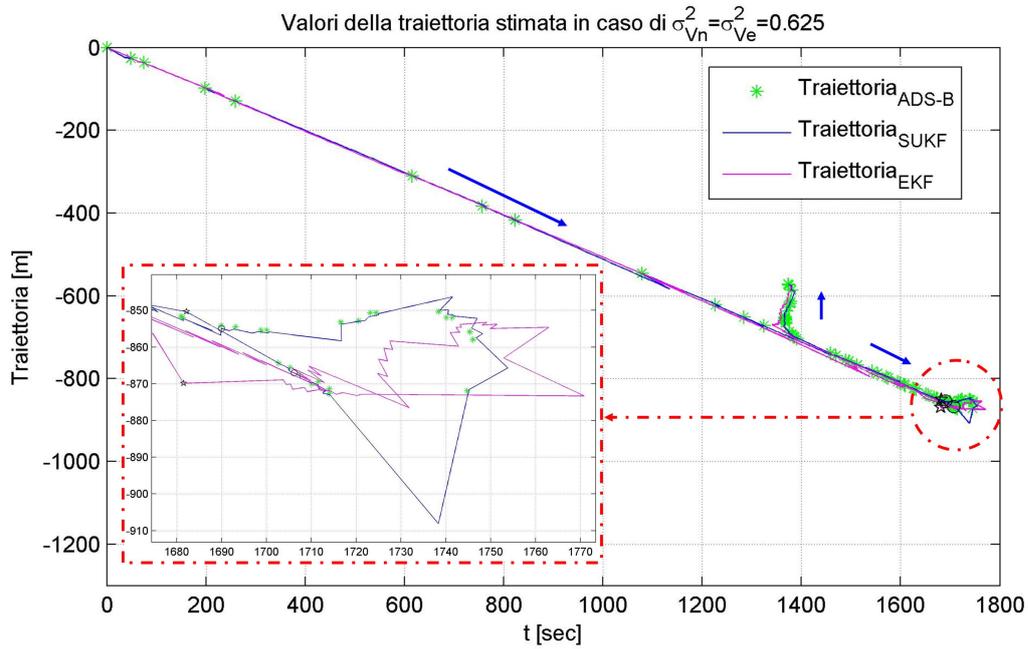


Figura 5.14: Valori stimati di traiettoria caso di  $\sigma_{V_N}^2 = \sigma_{V_E}^2 = 0,625$

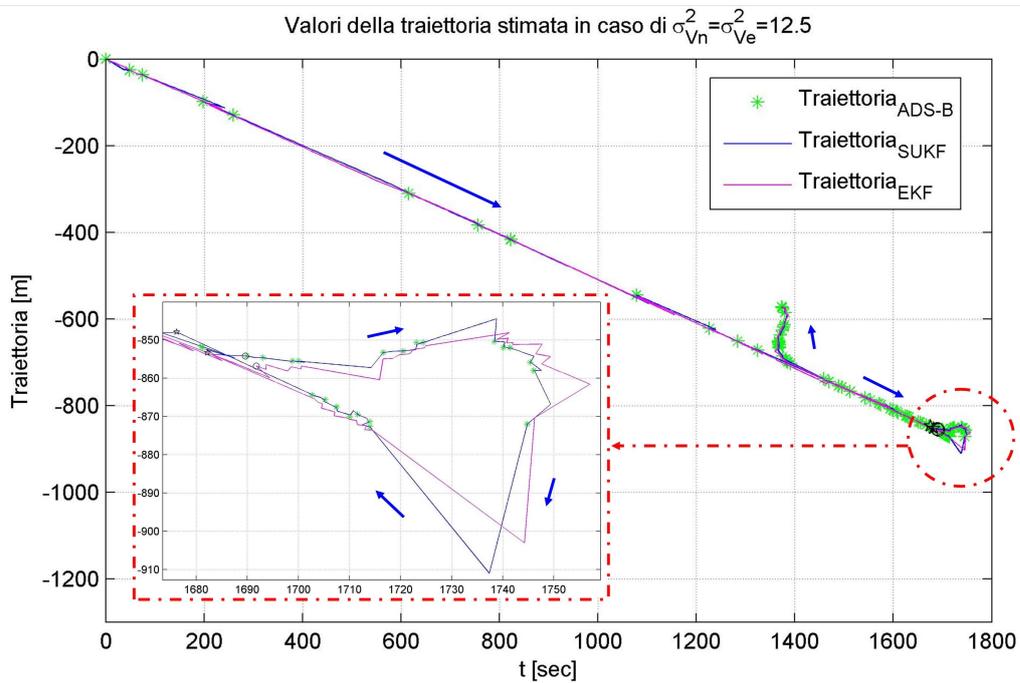


Figura 5.15: Valori stimati di traiettoria nel cao di  $\sigma_{V_N}^2 = \sigma_{V_E}^2 = 12,5$

5.3. APPLICAZIONE DI SUKF ED EKF AL MODELLO DEL VELIVOLO A TERRA 109

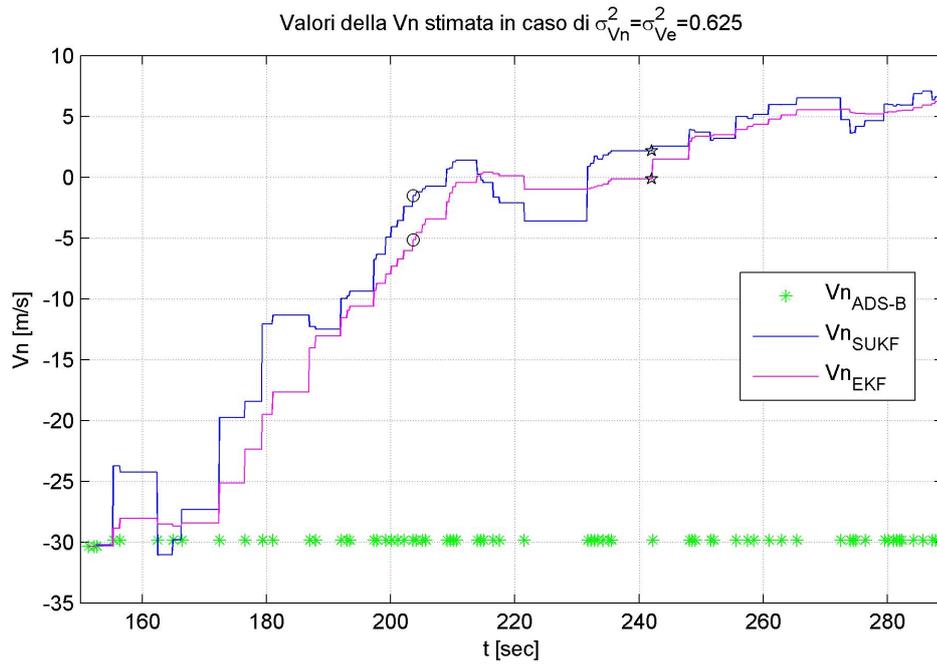


Figura 5.16: Valori stimati della velocità in direzione *Nord* nel caso di  $\sigma_{V_N}^2 = \sigma_{V_E}^2 = 0,625$

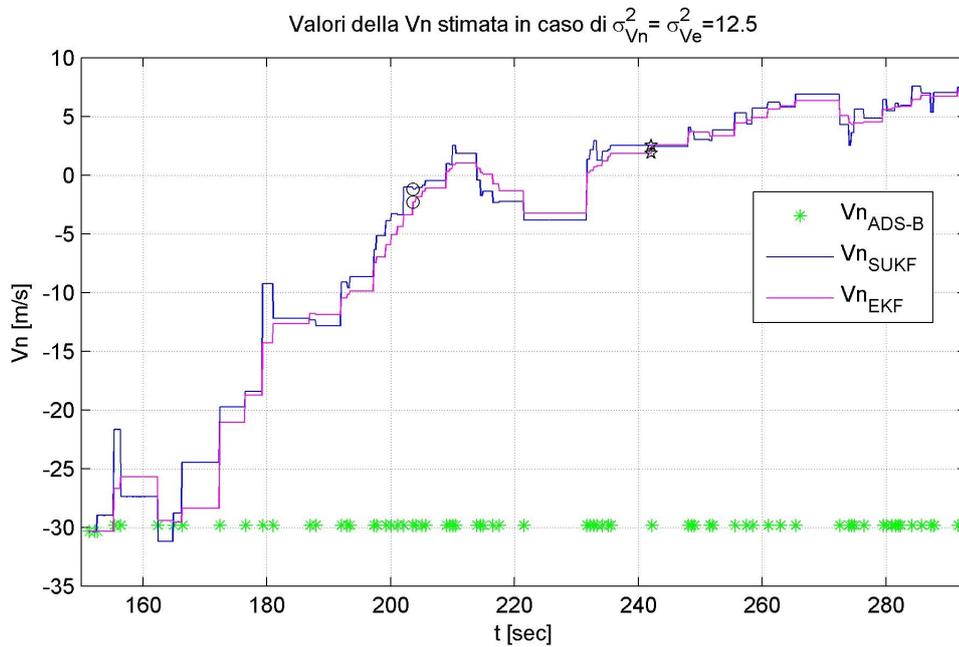


Figura 5.17: Valori stimati della velocità in direzione *Nord* nel caso di  $\sigma_{V_N}^2 = \sigma_{V_E}^2 = 12,5$

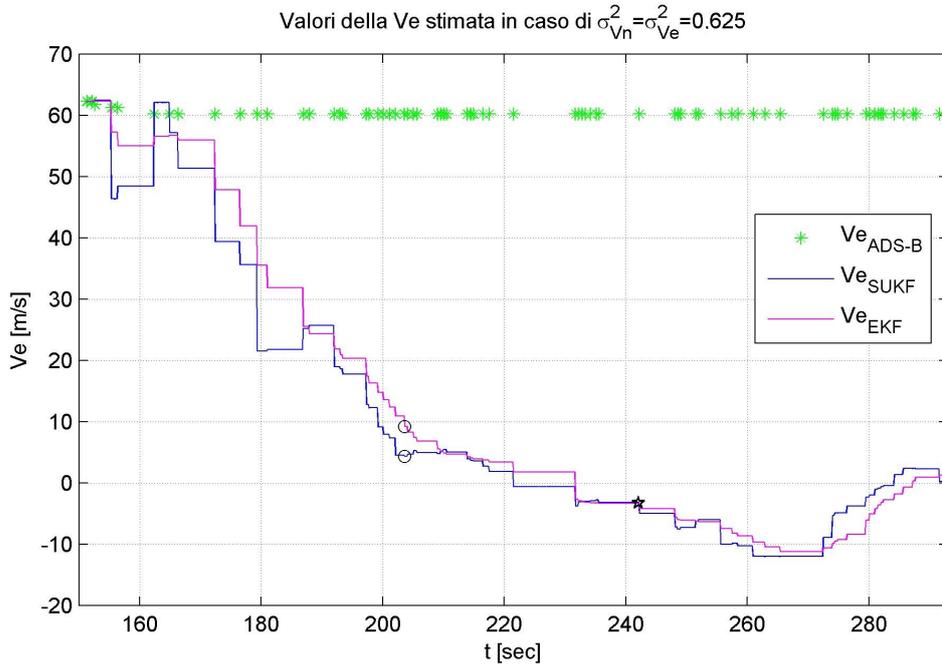


Figura 5.18: Valori stimati della velocità in direzione *Est* nel caso di  $\sigma_{V_N}^2 = \sigma_{V_E}^2 = 0,625$

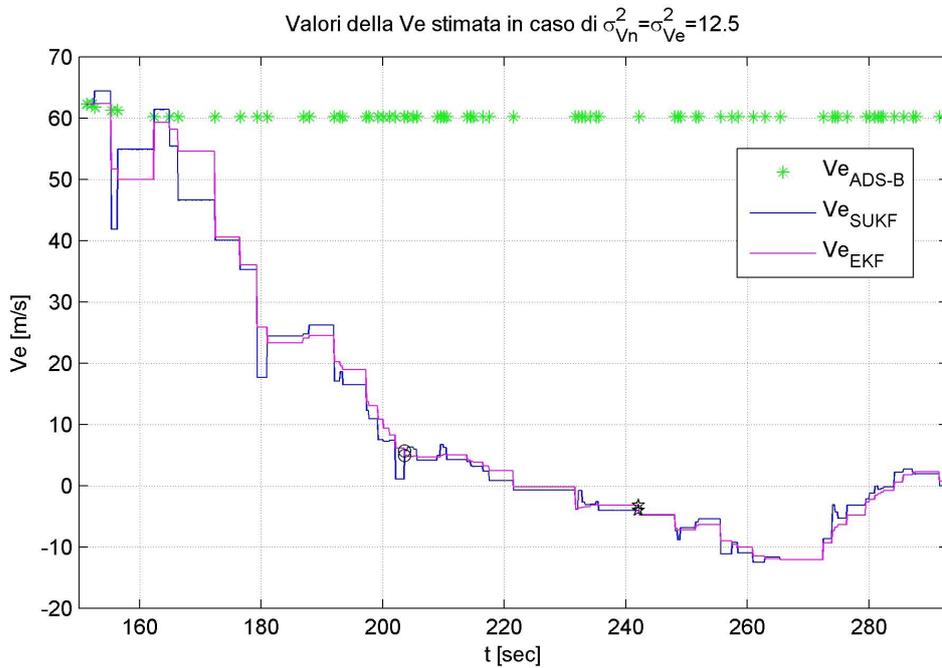


Figura 5.19: Valori stimati della velocità in direzione *Est* nel caso di  $\sigma_{V_N}^2 = \sigma_{V_E}^2 = 12,5$

Viste le buone prestazioni in entrambe le fasi del moto, specialmente dello SUKF, non c'è stato bisogno di differenziare i pesi su  $Q$  nei due tratti; si è invece provato a integrare le misure di velocità nel filtro per analizzarne gli effetti. Per farlo il vettore delle misure è stato trasformato in

$$\begin{aligned} z_1(k) &= \phi(k) + v_\phi(k) \\ z_2(k) &= \lambda(k) + v_\lambda(k) \\ z_3(k) &= V_N(k) + v_{V_N}(k) \\ z_4(k) &= V_E(k) + v_{V_E}(k) \end{aligned} \quad (5.21)$$

mentre le matrici di covarianza del rumore e di legame fra lo stato e le misure sono diventate

$$R = E[vv^T] = \begin{bmatrix} \sigma_\phi^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_\lambda^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{V_N}^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_{V_E}^2 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.22)$$

dove si è scelta come deviazione standard del rumore di misura  $\sigma_{V_N} = \sigma_{V_E} = 3 \text{ m/s}$ . Come si può vedere dalla Tabella 5.9 dove vengono riportati i valori ottenuti ponendo  $\sigma_{V_N}^2 = \sigma_{V_E}^2 = 0,625$ , le nuove informazioni di velocità fanno aumentare drasticamente gli errori di stima, sia della traiettoria che delle velocità, rispetto a quelli ottenuti a parità di penalizzazione con il filtro a quattro misure.

	SUKF	EKF
$RMS_{TR}$ in rettilineo [m]	26,87	31,86
$RMS_{TR}$ in curva [m]	44,20	36,01
$RMS_{V_N}$ in rettilineo [m/s]	82,17	77,95
$RMS_{V_N}$ in curva [m/s]	78,43	64,30
$RMS_{V_E}$ in rettilineo [m/s]	73,89	66,36
$RMS_{V_E}$ in curva [m/s]	64,24	36,86

Tabella 5.9: Errori di stima dei filtri a quattro misure nel caso di  $\sigma_{V_N}^2 = \sigma_{V_E}^2 = 0,625$

Inoltre come si può vedere dalla Tabella D.9 in Appendice D, questa tendenza peggiora ulteriormente tanto più ci si affida al modello (ovvero tanto più si calano le varianze dei rumori di processo) rendendo necessario utilizzare almeno  $\sigma_{V_N}^2 = \sigma_{V_E}^2 = 625$  per ottenere risultati plausibili di traiettoria e velocità. Come si può vedere nelle Figure 5.20 - 5.21,

la traiettoria generata dai filtri in presenza delle misure coincide con sufficiente approssimazione ad esse, mentre nei tratti in cui deve essere predetta si discosta notevolmente da quella più attendibile prodotta dal filtro a tre misure. Questo filtro, differentemente da ciò che avviene con i valori simulati in cui comunque gli errori sono valori impostati come ingresso, non apporta un vantaggio nella stima a causa dell'inattendibilità delle misure di velocità. Questa è dimostrata ancora una volta dal diminuire dell'errore di traiettoria tanto più ci si affida alle misure di posizione, oltre che dall'aumentare degli errori di velocità rispetto al filtro a due misure (le *RMS* relative alla velocità calano solo diminuendo l'errore di processo). I valori di errore relativo medio fra le stime dei filtri SUKF ed EKF a quattro misure sono riportati in Tabella 5.10; ancora una volta questi valori dimostrano che, mentre i filtri non si discostano molto nello stimare la velocità, nella stima della traiettoria lo fanno.

	$\sigma_{V_N}^2 = \sigma_{V_E}^2 = 0,625$		$\sigma_{V_N}^2 = \sigma_{V_E}^2 = 625$	
	<i>rettilineo</i>	<i>curva</i>	<i>rettilineo</i>	<i>curva</i>
$RMS_{TR_{SUKF-EKF}} [m]$	24,09	91,66	11,55	37,21
$RMS_{VN_{SUKF-EKF}} [m/s]$	5,49	13,78	1,99	3,78
$RMS_{VE_{SUKF-EKF}} [m/s]$	11,05	25,29	5,03	9,09

Tabella 5.10: Confronto fra le stime dei filtri a quattro misure nei casi di  $\sigma_{V_N}^2 = \sigma_{V_E}^2 = 0,625$  e di  $\sigma_{V_N}^2 = \sigma_{V_E}^2 = 625$

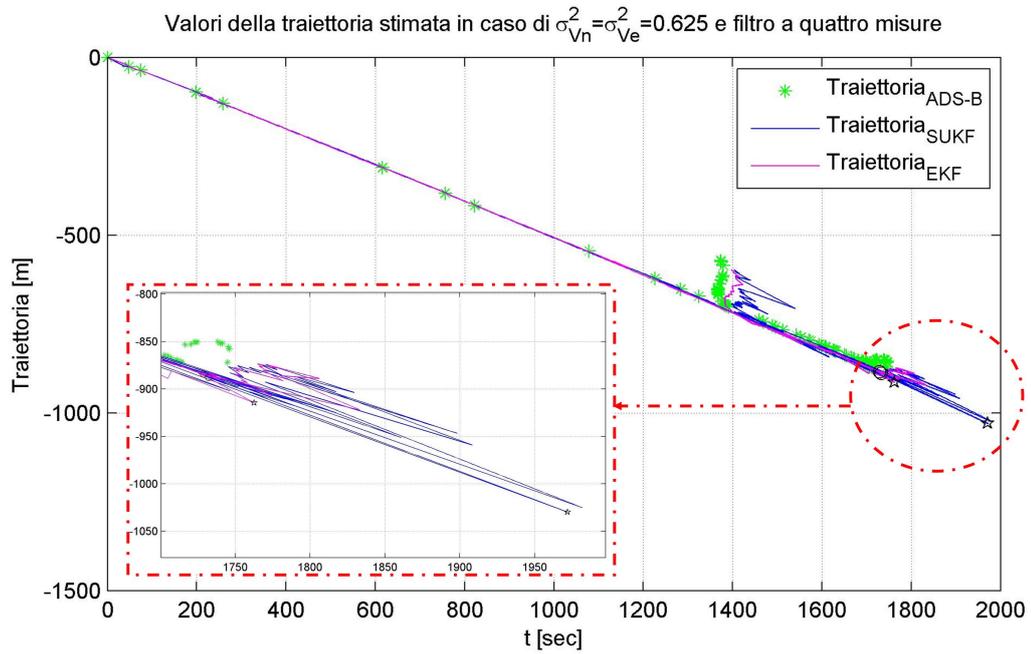


Figura 5.20: Traiettorie stimate dai filtri a quattro misure nei casi di  $\sigma_{V_N}^2 = \sigma_{V_E}^2 = 0,625$

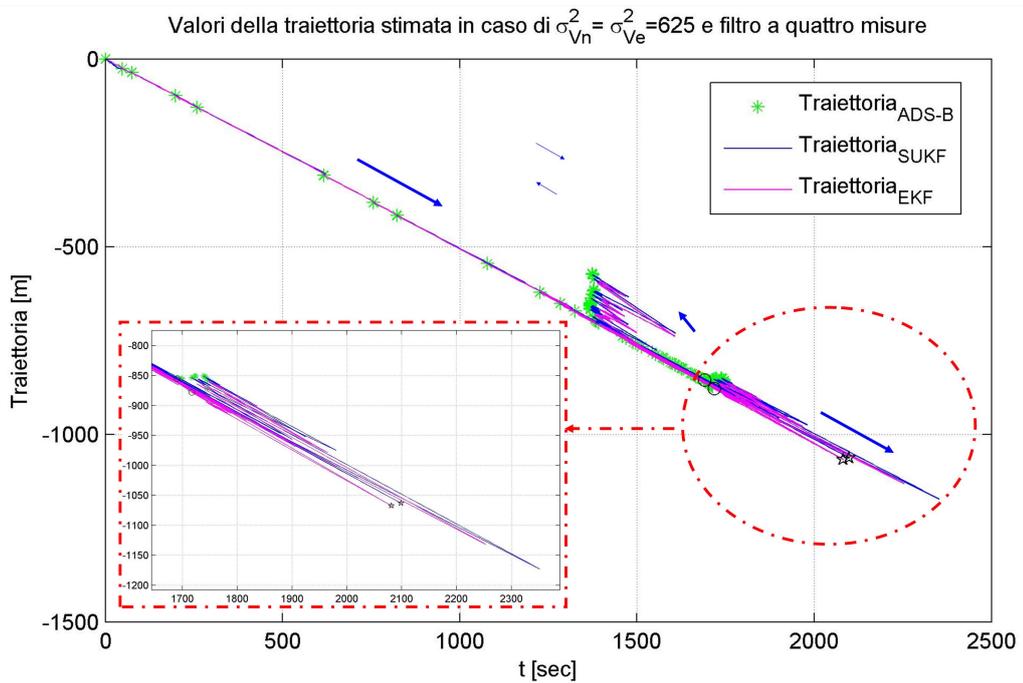


Figura 5.21: Traiettorie stimate dai filtri a quattro misure nei casi di  $\sigma_{V_N}^2 = \sigma_{V_E}^2 = 625$



# Capitolo 6

## Conclusioni e sviluppi futuri

Come è stato illustrato, nella prima fase del lavoro i filtri SUKF sono stati testati utilizzando le misure generate dai simulatori delle dinamiche del velivolo relative al piano verticale e a quello orizzontale. Gli errori di stima commessi nelle simulazioni, legati al *tuning* delle varianze, non dipendono dall'imprecisione del modello del processo nel rappresentare le dinamiche reali; si nota infatti un drastico calo delle *RMS* all'aumentare dell'affidabilità del modello, ovvero al diminuire delle varianze dei rumori di processo. Con i giusti valori di *tuning* si riescono a minimizzare le *RMS* relative agli errori di stima (dove TR indica la traiettoria e  $\varphi$  l'angolo di banco) fino ad ottenere:

<i>SUKF per la quota</i>	$RMS_h = 4,16m$
<i>SUKF per la dinamica in volo</i>	$RMS_{TR} = 8,10m$
	$RMS_\varphi = 2,61^\circ$
<i>SUKF per la dinamica a terra</i>	$RMS_{TR} = 9,15m$

Inoltre, confrontando questi valori con quelli ottenuti con il filtro SUKF che elabora anche le misure di velocità, si desume che il miglioramento apportato rispetto al caso senza misure di velocità non è tale da giustificare il suo utilizzo se non si è sicuri della correttezza delle misure aggiunte. Questa considerazione è valida se il modello su cui si basa il filtro è esattamente quello che ha generato le misure.

Nel caso di validazione dello SUKF con i dati sperimentali, oltre a non conoscere i rumori in ingresso (il che implica la necessità di un'accurata fase di *tuning*), i modelli dinamici impiegati nel filtro non possono rispecchiare altrettanto fedelmente, come nel caso precedente, la dinamica del sistema reale. Per questo motivo in virata, soprattutto se si scelgono

bassi valori di varianza dei rumori di processo, i filtri generano rilevanti fluttuazioni nella stima della traiettoria e dell'angolo di banco; per correggerle bisogna utilizzare un modello più sofisticato o aumentare i coefficienti di *tuning* affidandosi alla correttezza delle misure. Le stime nella fase di volo sono state migliorate penalizzando in maniera differente le misure nel tratto rettilineo e in virata; in quest'ultimo caso, aumentando sempre più le varianze dei rumori di processo, si riescono ad eliminare le "frange" d'errore della traiettoria in manovra. Con questo *tuning* differenziato, si ottengono le *RMS* delle misure rispetto ai valori ADS-B riportate in Tabella 5.2. Come si può verificare dalla Tabella 5.3 e dalle Figure 5.9-5.10, con la scelta operata sulle varianze l'EKF fornisce nel tratto rettilineo stime di velocità leggermente più aderenti alle misure e minori scostamenti dell'angolo di banco dal valore nullo. Tuttavia anche lo SUKF non si discosta eccessivamente e, non essendo noto il riferimento corretto, non si può stabilire con certezza quale sia il risultato migliore. Sicuramente in virata le prestazioni dello SUKF sono superiori poichè le stime di posizione istantanea, oltre a risultare più conformi alle misure quando esse sono presenti, ricostruiscono una traiettoria più plausibile, pensando a dinamiche realistiche del velivolo. Permangono però in questa fase rilevanti errori di stima dell'angolo di banco che possono essere ridotti, specialmente nel caso dello SUKF, aggiungendo al vettore delle misure l'informazione di velocità. Questa infatti riduce il numero e l'entità delle fluttuazioni e quindi, piuttosto che non considerare completamente il valore dell'angolo di banco, può risultare utile implementare, in parallelo al filtro a tre misure, quello in cui viene elaborata anche la velocità. Inoltre, per eliminare le poco plausibili variazioni dell'angolo di banco, come già fatto in precedenza [1], si può porre a valle dello SUKF un filtro di *smoothing* realizzato mediante un filtro ellittico digitale, discreto, passa-basso la cui funzione di trasferimento generale è:

$$H(z) = \frac{b(1) + b(2)z^{-1} + \dots + b(n+1)z^{-n}}{a(1) + a(2)z^{-1} + \dots + a(n+1)z^{-n}}$$

Le stime dell'angolo di banco in uscita dal filtro di ricostruzione della traiettoria (SUKF o EKF) vengono poste in ingresso al filtro digitale che restituisce i suoi valori con un andamento più liscio e realistico. I coefficienti e i parametri quali la frequenza di taglio e i *ripple* in banda passante e attenuata, vengono determinati in fase di progetto a seguito di prove sperimentali sui dati reali. Per quanto riguarda il moto a terra, lo SUKF riesce a produrre una stima più precisa rispetto all'EKF in entrambi i tratti di moto, come si può vedere

dalla Tabella 5.8 e dalla Figura 5.15. In particolare il filtro *Unscented* ricostruisce la curva effettuata dal velivolo a fine pista con una varianza di processo minore e riesce a seguire con più precisione le misure nel tratto rettilineo; tutto ciò implica che il modello del moto 2D del velivolo sia attendibile e che lo SUKF sia più robusto poichè fa meno affidamento sui dati. Il comportamento dei filtri risulta invece pressocchè equivalente per quanto riguarda la stima della velocità i cui errori, anche aumentando l'incertezza sul modello, non variano considerevolmente. Implementare quindi un SUKF a quattro misure (posizione e velocità) in questo caso risulta inefficace e controproducente dal punto di vista della stima della traiettoria.

Un approccio alternativo con cui si potrebbero confrontare e migliorare i risultati ottenuti con lo SUKF è il *Particle Filter* (PT). Questo filtro, come già accennato, si basa sui metodi d'integrazione numerica Monte Carlo che risolvono il problema della stima fornendo un'approssimazione della *pdf* "a posteriori" e dei suoi momenti tramite una distribuzione di probabilità discreta; questa viene determinata ricorsivamente attraverso la relazione

$$p(x(k)|z(k)) \approx \sum_{i=1}^M \bar{\omega}(x_i(k)) \delta(x(k) - x_i(k))$$

dove gli  $x_i(k)$  sono gli  $M$  *sample point* di  $x(k)$  ottenuti dal campionamento della funzione d'importanza  $q(x(k)|z(k))$  scelta in modo che il suo supporto contenga quello della *pdf*;  $\delta$  invece è il delta di Dirac discreto. I pesi d'importanza sono invece definiti, sempre in funzione della IS (*Importance Sampling*) come:

$$\omega(x_i(k)) = \frac{p(x_i(k)|z(k))p(z(k))}{q(x_i(k)|z(k))}$$

$$\bar{\omega}(x_i(k)) = \frac{\omega(x_i(k))}{\sum_{j=1}^M \omega(x_j(k))}$$

Mentre nella trasformazione *Unscented* il numero e la posizione dei campioni vengono scelti in modo deterministico, per catturare i primi due momenti della *pdf* assunta gaussiana, nei metodi Monte Carlo usati nel *Particle* i punti vengono scelti casualmente e il loro numero è un parametro di progetto. Poichè vale la legge dei grandi numeri, che assicura un arbitrario grado di accuratezza dell'approssimazione della *pdf* al crescere del numero dei campioni, il vantaggio di posizzionarli ad "hoc" non garantisce più una migliore pre-

stazione dello SUKF. Nella tesi si è scelto di utilizzare lo SUKF piuttosto che il *Particle* proprio per poter verificare sui sistemi in oggetto l'effettivo aumento di precisione rispetto all'EKF senza dover eccedere nel calcolo dei *sigma point*. Inoltre l'aspetto più interessante dei metodi Monte Carlo, rispetto all'UKF e all'EKF, è la possibilità di trattare modelli non lineari con rumori non gaussiani rimuovendo l'ipotesi di gaussianità della *pdf* "a posteriori". Nonostante spesso questa assunzione risulti valida e molti problemi reali siano stati risolti avvalendosi di tale ipotesi, per alcune applicazioni non è adatta e i filtri che la sfruttano non possono essere applicati con sicurezza. Per questo ci si affida a filtri più robusti, ma anche più costosi dal punto di vista computazionale, come il PT di cui esiste anche una versione "migliorata", detta *Unscented Particle Filter*, che sfrutta l'UKF per campionare la funzione d'importanza.

## Appendice A

# Il parametro di scala $p$ e la regolazione degli ordini più elevati

Per ogni possibile scelta del parametro  $p$  si ottiene che:

- i primi tre momenti della distribuzione dei *sigma point* rimangono immutati
- il momento di quarto ordine o la kurtosi<sup>1</sup> vengono scalati di un valore pari a  $n + p$  e così geometricamente anche tutti i momenti di ordine più elevato
- i momenti dispari sono nulli.

Tuttavia variando il valore  $p$  si può ridurre l'errore introdotto negli ordini più elevati; per dimostrarlo si consideri il caso di una distribuzione gaussiana. Se lo spazio degli stati viene trasformato linearmente facendo  $\sqrt{(n+p)(P(k|k) + Q(k))}$ , la distribuzione che si ottiene è equivalente a  $n$  variabili aleatorie indipendenti gaussiane con valore medio nullo e covarianza unitaria. Data la normalità della distribuzione, tutti i momenti dispari sono nulli e quindi la kurtosi del generico  $i$ -esimo stato è  $E[x_i^4] = 3$ . Tramite una trasformazione equivalente anche la distribuzione dei *sigma points* può essere espressa come  $n$  distribuzioni discrete indipendenti ciascuna con covarianza unitaria e per cui le kurtosi assumono la forma  $E[x_i^4] = n + p$ ; i loro momenti di ordine più elevato scalano poi di  $n + p$ . Se però  $p$

---

<sup>1</sup>La kurtosi è un allontanamento dalla normalità distributiva, ovvero è un indice dell'appiattimento e/o allungamento delle "code" di una distribuzione e quindi del loro contributo statistico. Le distribuzioni piatte, con code ampie, sono chiamate "platicurtiche" ed hanno l'indice di curtosi negativo, quelle appuntite, con code piccole, sono dette "leptocurtiche" ed hanno l'indice di curtosi positivo mentre la distribuzione gaussiana ha indice di curtosi nullo ed è detta "mesocurtica".

è preso tale che  $n + p = 3$ , la kurtosi di uno stato dei *sigma points* coincide con quella della distribuzione gaussiana; ciò comporta che i momenti dei campioni di ordine superiore scalino geometricamente di un valore pari a 3 (ovvero che crescano più lentamente rispetto a quelli della distribuzione gaussiana). Inoltre poichè l'EKF non tiene conto di questi momenti, i valori predetti di media e covarianza, per ogni distribuzione simmetrica "a priori" con kurtosi  $k$ , posto  $p$  tale che  $0 < n + p \leq k$ , risultano più precisi. Per minimizzare gli errori nelle kurtosi bisogna scegliere  $p$  tale che  $n + p = k$  [9].

# Appendice B

## Accuratezza della SUT

In questa appendice si vuole dimostrare come la trasformazione *Unscented* riesce ad ottenere un'accuratezza fino al secondo ordine nella determinazione della media e della covarianza “a posteriori”. Per poter esprimere le funzioni non lineari attraverso la serie di Taylor, bisogna presupporre che tutte le trasformazioni siano analitiche in ogni punto del dominio della variabile aleatoria  $x$  considerata. Questa ipotesi infatti assicura che, al crescere del numero dei termini della serie, il suo residuo tenda a zero e che quindi converga al vero valore assunto dalla funzione. Si consideri di perturbare la variabile “a priori”  $x$  con un disturbo a valore medio nullo  $\delta x$ , intorno a suo valore medio  $\bar{x}$ , e di covarianza  $P_x = E[\delta x \delta x^T]$ . La serie di Taylor di una funzione non lineare  $f(x)$  intorno a  $\bar{x}$  è:

$$f(x) = f(\bar{x} + \delta x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \frac{(\delta x \cdot \nabla_x)^n f(x)}{n!} \right]_{x=\bar{x}} \quad (\text{B.1})$$

che si può anche esprimere come

$$y = f(x) = f(\bar{x}) + D_{\delta x} f + \frac{1}{2} D_{\delta x}^2 f + \frac{1}{3!} D_{\delta x}^3 f + \frac{1}{4!} D_{\delta x}^4 f \dots \quad (\text{B.2})$$

una volta definito l'operatore lineare  $D_{\delta x}^n f = [(\delta x \cdot \nabla_x)^n f(x)]_{x=\bar{x}}$ .

Il valore medio vero “a posteriori”  $\bar{y}$ , posto che la  $x$  sia distribuita simmetricamente<sup>1</sup> e che

---

<sup>1</sup>La distribuzione simmetrica di  $x$  include distribuzioni di probabilità come quella gaussiana

quindi tutti i momenti dispari siano nulli, risulta:

$$\bar{y} = f(\bar{x}) + \frac{1}{2} [(\nabla^T P_x \nabla) f(x)]_{x=\bar{x}} + E \left[ \frac{1}{4!} D_{\delta x}^4 f + \frac{1}{6!} D_{\delta x}^6 f \dots \right] \quad (\text{B.3})$$

La *UT* calcola i sigma point  $\chi_i = \bar{x} \pm \sqrt{\lambda + n} \cdot L_i = \bar{x} \pm \tilde{L}_i$ , dove  $L_i$  è al solito tale che  $P_x = \sum_{i=1}^n (L_i L_i^T)$ . La propagazione di questi nella funzione non lineare e il valore medio “a priori”, tenuto conto anche della simmetria della variabile aleatoria, risultano:

$$Y_i = f(\chi_i) = f(\bar{x}) + D_{\tilde{L}_i} f + \frac{1}{2} D_{\tilde{L}_i}^2 f + \frac{1}{3!} D_{\tilde{L}_i}^3 f + \frac{1}{4!} D_{\tilde{L}_i}^4 f \dots \quad (\text{B.4})$$

$$\bar{y}_{UT} = f(\bar{x}) + \frac{1}{2} [(\nabla^T P_x \nabla) f(x)]_{x=\bar{x}} + \frac{1}{2(\lambda + n)} \sum_{i=1}^{2n} \left[ \frac{1}{4!} D_{\tilde{L}_i}^4 f + \frac{1}{6!} D_{\tilde{L}_i}^6 f \dots \right] \quad (\text{B.5})$$

Confrontando la (B.3) e la (B.5) si osserva che coincidono esattamente fino al terzo ordine e che vengono introdotti errori solo nei termini superiori al quarto ordine. Questi risultano molto minori di quelli ottenuti con la linearizzazione che definisce la media “a posteriori” come  $\bar{y}_{LIN} = f(\bar{x})$ , mentre l’entità degli errori dipende poi dalla scelta del parametro  $\lambda$ , così come per le derivate di ordine superiore di  $f$ . Inoltre la covarianza vera “a posteriori”, posto che il valore atteso venga calcolato con la distribuzione di  $y$ , è espressa come:

$$P_y = E[(y - \bar{y}_T)(y - \bar{y}_T)^T] = E[yy^T] - \bar{y}\bar{y}^T \quad (\text{B.6})$$

dove, risostituendo la (B.2) e la (B.3), eliminando i momenti dispari e definendola matrice Jacobiana di  $f(x)$  valutata in  $\bar{x}$  ( $A_x$ ), si ottiene

$$\begin{aligned} P_y = A_x P_x A_x^T &= \frac{1}{4} \left\{ [(\nabla^T P_x \nabla) f(x)] [(\nabla^T P_x \nabla) f(x)]^T \right\}_{x=\bar{x}} \\ &+ E \left[ \underbrace{\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j! j!} D_{\delta x}^i f (D_{\delta x}^j f)^T}_{ij > 1} \right] \\ &- E \left[ \underbrace{\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{(2j)! (2j)!} E[D_{\delta x}^{2i} f] E[D_{\delta x}^{2j} f]^T}_{ij > 1} \right] \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

Utilizzando lo stesso procedimento usato per la media si può dimostrare che la covarianza

“a posteriori” calcolata con l’*Unscented Trasformation* è:

$$\begin{aligned}
P_{y-UT} = & A_x P_x A_x^T - \frac{1}{4} \left\{ [(\nabla^T P_x \nabla) f(x)] [(\nabla^T P_x \nabla) f(x)]^T \right\}_{x=\bar{x}} \\
& + \frac{1}{2(n+\lambda)} \sum_{k=1}^{2n} \underbrace{\left[ \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j! j!} D_{\tilde{L}_k}^i f(D_{\tilde{L}_k}^j f)^T \right]}_{ij>1} \\
& - \underbrace{\left[ \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{(2j)!(2j)! 4(n+\lambda)^2} \sum_{k=1}^{2n} \sum_{m=1}^{2n} D_{\tilde{L}_k}^{2i} f(D_{\tilde{L}_m}^{2j} f)^T \right]}_{ij>1}
\end{aligned} \tag{B.8}$$

Confrontando nuovamente la (B.7) con la (B.8) si può verificare che anche la covarianza viene calcolata con un’accuratezza fino al secondo ordine; inoltre gli errori sono introdotti dal quarto termine in poi e sono insignificanti rispetto a quelli ottenuti con la linearizzazione che approssima la covarianza a:

$$P_{y-LIN} = A_x P_x A_x^T$$

Per questa analisi si è assunto  $\beta = 0$ , ma se si conosce la forma della distribuzione di  $x$  “a priori”, si può settare questo parametro a un valore più alto in modo da minimizzare l’errore introdotto con i momenti di ordine elevato. [18]



## Appendice C

# L'Elissoide WGS84 e i sistemi di riferimento utilizzati

La forma della Terra deriva da molteplici forze (di attrazione gravitazionale, legate ai movimenti di rotazione e traslazione, ecc.) che agiscono sulle sue masse (in parte solide ed in parte fluide) e la rendono leggermente schiacciata in corrispondenza dei poli e rigonfia all'Equatore. Il geode è il solido che ne descrive la forma ed è definito come la superficie equipotenziale del campo gravitazionale terrestre, in ogni punto perpendicolare alla direzione della forza di gravità, ottenuta eliminando tutti i rilievi e le depressioni e sostituendole con un oceano avente come livello quello medio dei mari. E' possibile studiare il geode misurandone gli scarti (ondulazioni) rispetto all'ellissoide di rotazione, detto ellissoide di riferimento, che è il solido, questa volta descrivibile in termini geometrici e matematici, che meglio approssima la forma reale della Terra. I parametri che identificano questo solido, posto che il semiasse equatoriale maggiore sia  $a$  e quello polare  $b$ , sono:

- l'equazione dell'ellissoide:  $\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$

- lo schiacciamento (*flattening*):  $\alpha = \frac{a - b}{a}$

- l'eccentricità:  $e = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2}}$

- il raggio del parallelo di latitudine  $\varphi$ :  $r = \frac{a \cdot \cos(\varphi)}{\sqrt{1 - e^2 \cdot \sin^2(\varphi)}}$
- il raggio di curvatura del meridiano, o raggio di curvatura minore (intersezione dell'ellissoide con il piano contenente il meridiano) e raggio di curvatura maggiore detta gran normale (intersezione dell'ellissoide con il piano contenente la verticale al punto P e ortogonale al piano contenente il meridiano):

$$\rho = \frac{a \cdot (1 - e^2)}{\sqrt{(1 - e^2 \cdot \sin^2(\varphi))^3}} \quad N = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \cdot \sin^2(\varphi)}} \quad (\text{C.1})$$

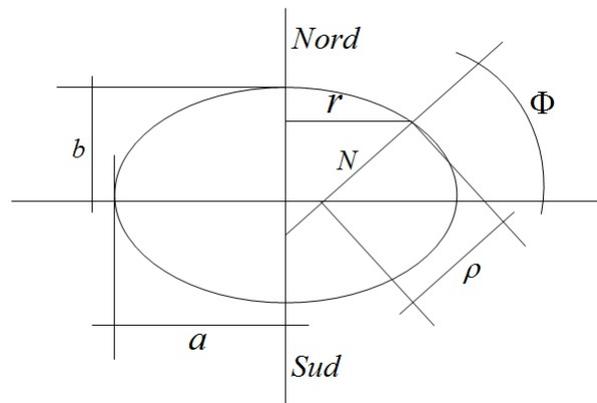


Figura C.1: Parametri dell'ellissoide di rotazione

Con il progredire delle scienze e della tecnica sono stati definiti diversi tipi di ellissoide tra cui il WGS84 (*World Geodetic System 1984* a cui fanno riferimento le misure *GPS*) il cui semiasse maggiore è  $a = 6.378.137\text{ m}$  e lo schiacciamento è  $\alpha = 1/298.3$ . Il Dipartimento della Difesa degli U.S.A lo ha scelto come modello matematico della Terra da un punto di vista geometrico, geodetico e gravitazionale, costruito sulla base delle misure e delle conoscenze scientifiche e tecnologiche disponibili al 1984. Il sistema di riferimento geodetico associato al WGS84 ha origine nel centro di massa terrestre (che coincide con il centro del geode); l'asse  $z_G$  è parallelo alla direzione dell'asse di rotazione convenzionale terrestre all'epoca 1984; l'asse  $x_G$  è generato dall'intersezione del piano equatoriale con il piano in cui passava il meridiano di *Greenwich* nel 1984; mentre l'asse  $y_G$  completa la terna cartesiana destrorsa. Questo sistema di riferimento non è inerziale infatti ruota assieme

alla terra intorno all'asse *Nord-Sud* con velocità  $\Omega_e = 7,272 \cdot 10^{-5} \text{ rad/s}$ . Il GPS fornisce la posizione di un punto  $P$  generico rispetto a questo sistema di riferimento attraverso le coordinate ellissoidiche, ovvero l'angolo di latitudine  $\phi$  (tra la normale  $n$  all'ellissoide in  $P$  e il piano equatoriale), quello di longitudine  $\lambda$  (tra il piano meridiano di riferimento e il piano meridiano per  $P$ , preso in senso antiorario) e la quota ellissoidica  $h$  (che è la distanza del punto  $P$  dall'ellissoide misurata lungo la normale passante per  $P$ , come mostrato in Figura C.2). L'altro sistema di riferimento presente in Figura C.2 è l'ECEF (*Earth-Centered Earth-Fixed*) che ha gli stessi assi di quello geodetico, ma identifica i punti attraverso le coordinate cartesiane  $(x_G, y_G, z_G)$  sulla superficie terrestre. Le relazioni che mettono in corrispondenza un punto di coordinate geografiche  $\phi, \lambda, h$ , con le coordinate  $x_G, y_G, z_G$  sono:

$$x_G = (N + h) \cdot \cos(\phi) \cos(\lambda)$$

$$y_G = (N + h) \cdot \cos(\phi) \sin(\lambda) \quad (\text{C.2})$$

$$z_G = (a \sqrt{1 - e^2} \cdot \sin^2(\phi) + h) \cdot \sin(\phi)$$

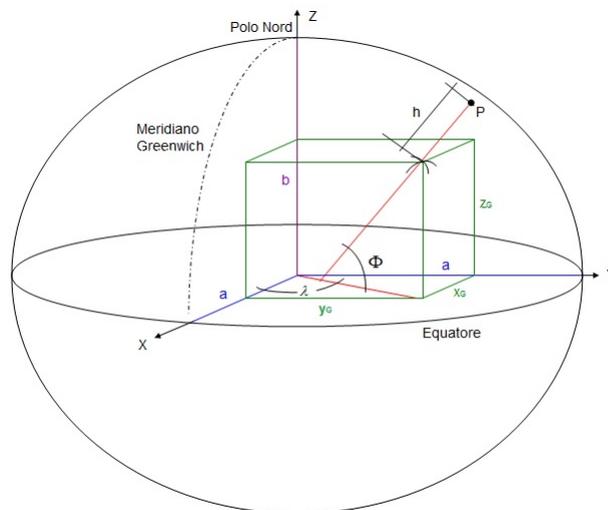


Figura C.2: Sistemi di riferimento geodetico ed ECEF

Un altro sistema di riferimento terrestre utilizzato in questa tesi è il sistema mobile NED (*Nord Est Down*) in generale definito in riferimento al piano tangente alla superficie terrestre in un qualsiasi punto. Per un aereomobile ha origine nel baricentro del velivolo; gli

assi N (diretto verso il *Polo Nord* geografico) e E (diretto verso *Est*) giacciono sul piano orizzontale parallelo al piano tangente alla Terra, mentre l'asse D (rivolto verso il basso) è perpendicolare agli altri due. Si definisce *azimuth* o *prua* o *heading* l'angolo tra l'asse N e la proiezione dell'asse longitudinale dell'aereo sul piano N-E. Per poter trasformare in coordinate NED un generico vettore  $v$  espresso in coordinate geocentriche bisogna utilizzare la matrice di rotazione

$$C_{GEO}^{NED} = \begin{bmatrix} -\sin(\phi)\cos(\lambda) & -\sin(\phi)\sin(\lambda) & \cos(\phi) \\ -\sin(\lambda) & \cos(\lambda) & 0 \\ -\cos(\phi)\cos(\lambda) & -\cos(\phi)\sin(\lambda) & -\sin(\phi) \end{bmatrix} \quad (C.3)$$

che esprime la relazione di trasformazione fra i due vettori

$$v^{NED} = C_{GEO}^{NED} v^{GEO} \quad (C.4)$$

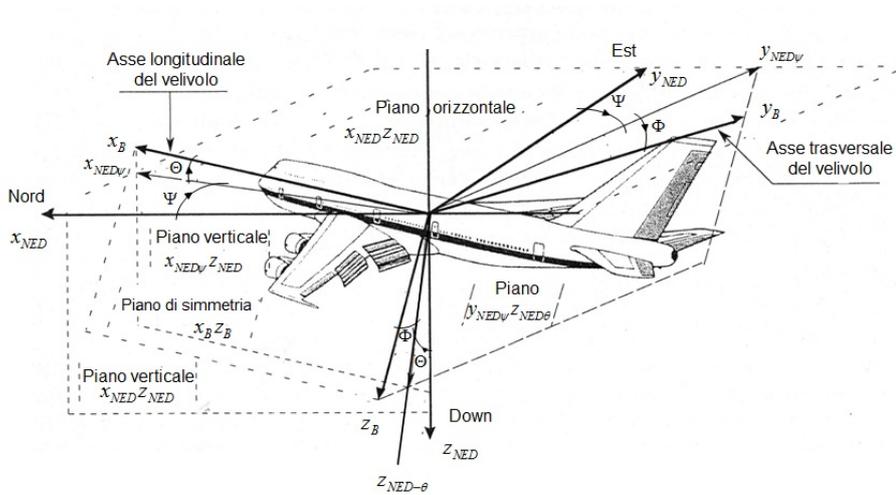


Figura C.3: Sistemi di riferimento NED e *Body* e gli angoli di Eulero

In questa tesi è stato utilizzato anche il sistema assi corpo (o *Body*) solidale al velivolo, centrato nel suo baricentro il cui piano  $x_B - z_B$  coincide con il piano di simmetria. L'asse di rollio  $x_B$  è allineato con l'asse longitudinale di fusoliera, l'asse di beccheggio  $y_B$  è diretto verso la semiala destra, l'asse di imbardata  $z_B$  completa la terna ortonormale destra e quindi è diretto verso il basso. Per poter trasformare in coordinate NED un generico vettore  $v$

espresso in coordinate *Body* bisogna utilizzare la matrice di rotazione

$$C_B^{NED} = \begin{bmatrix} \cos(\psi)\cos(\theta) & \cos(\psi)\sin(\theta)\sin(\phi) - \sin(\psi)\cos(\phi) & \cos(\psi)\sin(\theta)\cos(\phi) + \sin(\psi)\sin(\phi) \\ \sin(\psi)\cos(\theta) & \sin(\psi)\sin(\theta)\sin(\phi) + \cos(\psi)\cos(\phi) & \sin(\psi)\sin(\theta)\cos(\phi) - \cos(\psi)\sin(\phi) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta)\sin(\phi) & \cos(\theta)\cos(\phi) \end{bmatrix}$$

che esprime la relazione di trasformazione fra i due vettori

$$v^{NED} = C_B^{NED} v^B \quad (C.5)$$

Gli angoli nella matrice definiscono l'assetto del velivolo rispetto al sistema NED e sono detti angoli di Eulero. Sono così denominati perchè Eulero stabilì il metodo con cui ottenerli compiendo tre rotazioni successive di una delle terne intorno agli assi correnti (ovvero agli assi che si generano in seguito alle diverse rotazioni) in modo da sovrapporre i due sistemi di riferimento. L'angolo di elevazione (*elevation*)  $\theta$  è quello tra l'asse del velivolo  $x_B$  e il piano orizzontale  $[O_{NED}, x_{NED}, y_{NED}]$ , quello di inclinazione laterale (*bank*)  $\phi$  è l'angolo di cui viene ruotato, intorno a  $x_B$ , l'asse  $y_B$  a partire dalla condizione di ali livellate. Infine l'angolo di direzione (*heading*)  $\psi$  è l'angolo compreso fra il piano verticale che contiene l'asse  $x_B$  e il piano verticale  $[O_{NED}, x_{NED}, z_{NED}]$ .



# Appendice D

## Tabelle dei dati simulati e sperimentali

	<i>SUKF</i>		<i>EKF</i>	
	<i>RMS<sub>h-SUKF</sub> [m]</i>	<i>RMS<sub>V<sub>z</sub>-SUKF</sub> [m/s]</i>	<i>RMS<sub>h-EKF</sub> [m]</i>	<i>RMS<sub>V<sub>z</sub>-EKF</sub> [m/s]</i>
$\sigma_{V_z}^2 = 4$ [1]	11,08	9,34	29,81	2,48
$q_{V_z} = 1/2$	10,18	7,13	29,48	2,42
$q_{V_z} = 1/10$	8,42	3,86	28,82	2,38
$q_{V_z} = 2$	12,09	12,27	30,15	2,60
$q_{V_z} = 10$	14,74	22,98	30,83	3,02
$q_{V_z} = 1/50$	6,74	2,03	28,49	2,41
$q_{V_z} = 1/100$	6,03	1,56	28,43	2,42
$q_{V_z} = 1/1000$	4,16	1,11	28,37	2,44
$q_{V_z} = 1/1100$	4,11	1,12	28,37	2,44
$q_{V_z} = 1/1500$	4	1,15	28,37	2,44

Tabella D.1: *Tuning* dello SUKF per la dinamica della quota testato con i dati simulati

	$\beta = 2$ $\alpha = 0,5$ $p = 7$	$\beta = 2$ $\alpha = 10^{-3}$ $p = 3 \cdot 10^6$	$\beta = 2$ $\alpha = 1$ $p = -2$	$\beta = 0$ $\alpha = 0,5$ $p = 7$
$RMS_{TR} [m]$	9,0399	9,0405	9,0407	9,0417
$RMS_{\psi} [^{\circ}]$	1,2683	1,2683	1,2683	1,2683
$RMS_V [m/s]$	3,0313	3,0310	3,0311	3,0314
$RMS_{\Omega} [^{\circ}/s]$	2,0880	2,0880	2,0880	2,0880
$RMS_{\varphi} [^{\circ}]$	26,4834	26,4835	26,4835	26,4834

*Non si è tenuto conto dei primi quattro secondi di transitorio e del picco in essi presente.*

Tabella D.2: Scelta dei parametri di scala dello SUKF per la dinamica del velivolo in volo testato con i dati simulati

	$RMS_{TR} [m]$	$RMS_{\psi} [^{\circ}]$	$RMS_V [m/s]$	$RMS_{\Omega} [^{\circ}/s]$	$RMS_{\varphi} [^{\circ}]$
$\sigma_V^2 = 0,25$ $\sigma_{\Omega}^2 = 0,0001$ [1]	9,0399	1,2683	3,0313	2,0880	26,4834
$q_V = 1/10$ $q_{\Omega} = 1$	8,5638	1,2635	1,5867	2,0950	26,5309
$q_V = 1$ $q_{\Omega} = 1/10$	9,0490	0,8285	3,0507	0,7465	10,8253
$q_V = 10$ $q_{\Omega} = 1$	9,8241	1,2777	6,9196	2,0849	26,4951
$q_V = 1$ $q_{\Omega} = 10$	9,0410	1,7759	3,0206	5,2379	46,9013
$q_V = 1/50$ $q_{\Omega} = 1/50$	8,3070	0,555	1,1427	0,3211	4,7296
$q_V = 1/100$ $q_{\Omega} = 1/100$	8,2133	0,4510	1,0294	0,2147	3,1792
$q_V = 1/1000$ $q_{\Omega} = 1/1000$	8,1028	0,2193	0,8588	0,1751	2,6116
$q_V = 1/2000$ $q_{\Omega} = 1/2000$	8,2275	0,2687	0,8565	0,2114	3,1534
$q_V = 1/10000$ $q_{\Omega} = 1/10000$	9,0690	0,5419	0,9133	0,2824	4,2271

*Non si è tenuto conto dei primi quattro secondi di transitorio e del picco in essi presente.*

Tabella D.3: Tuning dello SUKF per la dinamica del velivolo in volo testato con i dati simulati

	$\beta = 2$ $\alpha = 0,5$ $p = 8$	$\beta = 2$ $\alpha = 10^{-3}$ $p = 3 \cdot 10^6$	$\beta = 2$ $\alpha = 1$ $p = -1$	$\beta = 0$ $\alpha = 0,5$ $p = 8$
$RMS_{TR} [m]$	16,2567	16,2540	16,2543	16,2544
$RMS_{V_N} [m/s]$	55,4235	55,4235	55,4236	55,4236
$RMS_{V_E} [m/s]$	50,5762	50,5676	50,6245	50,6285

Tabella D.4: Scelta dei parametri di scala dello SUKF per la dinamica del velivolo a terra testato con i dati simulati

	$RMS_{TR} [m]$	$RMS_{V_N} [m/s]$	$RMS_{V_E} [m/s]$
$\sigma_{V_N}^2 = \sigma_{V_E}^2 = 625 [1]$	16,2540	55,4235	50,5676
$q_{V_N} = q_{V_E} = 1/10$	13,4869	23,2643	21,6618
$q_{V_N} = q_{V_E} = 10$	18,8507	119,7425	103,2131
$q_{V_N} = q_{V_E} = 1/50$	11,7314	11,6575	12,3963
$q_{V_N} = q_{V_E} = 1/100$	11,0457	9,5824	9,0415
$q_{V_N} = q_{V_E} = 1/1000$	9,2136	6,2859	5,8397
$q_{V_N} = q_{V_E} = 1/2000$	8,9874	6,6457	6,1237
$q_{V_N} = q_{V_E} = 1/10000$	10,1018	8,2801	7,6706

Tabella D.5: *Tuning* dello SUKF per la dinamica del velivolo a terra testato con i dati simulati

	$RMS_{h-SUKF} [m]$	$RMS_{h-EKF} [m]$
$\sigma_{V_z}^2 = 4 [1]$	0,8628	1,3739
$q_{V_z} = 10$	0,5322	1,1550
$q_{V_z} = 1/10$	1,1550	1,5781
$q_{V_z} = 1000$	0,0535	0,5311
$q_{V_z} = 5000$	0,0131	0,3105
$q_{V_z} = 10000$	0,0068	0,288

Tabella D.6: *Tuning* dei filtri per la dinamica della quota testati con le misure ADS-B

SUKF										
	1° RMS <sub>v</sub> [m/s]	2° RMS <sub>v</sub> [m/s]	1° RMS <sub>ψ</sub> [°]	2° RMS <sub>ψ</sub> [°]	1° RMS <sub>Tr</sub> [m]	2° RMS <sub>Tr</sub> [m]	2° RMS <sub>φ</sub> [°]	2° RMS <sub>Ω</sub> [°/s]		
$\sigma_v^2 = 0,25\sigma_\Omega^2 = 10^{-4}$ [1]	$qv = 50q_\Omega = 1$	28,9987	2,7075	20,0219	0,1159	63,4585	5,4129	2,6888	0,1112	
	$qv = 1q_\Omega = 50$	94,8929	7,7988	24,5350	0,1104	58,5351	3,1298	2,6687	0,1095	
	$qv = 1/50q_\Omega = 1$	32,8486	3,33	5,4505	0,0638	44,9535	5,3943	14,4307	0,6487	
	$qv = 1q_\Omega = 50$	5,5993	2,0015	19,7604	0,1177	68,4653	6,9476	2,7017	0,1117	
	$qv = 1/50q_\Omega = 1$	40,1171	2,6703	44,2459	0,1307	132,9997	5,4225	1,0272	0,0424	
	$qv = 50q_\Omega = 1/50$	169,5120	7,7867	52,5794	0,1278	86,8849	3,1485	1,0008	0,0413	
	1° $qv = 1000q_\Omega = 1000$									
	2° $qv = 50q_\Omega = 1/50$	247,03687	7,7985	0,9070	0,1288	19,6334	3,1476	1,037	0,0428	
	1° $qv = 5000q_\Omega = 5000$									
	2° $qv = 50q_\Omega = 1/50$	364,20409	8,1314	0,4005	0,1288	16,7123	3,1442	1,0094	0,0416	
1° $qv = 10000q_\Omega = 10000$										
2° $qv = 50q_\Omega = 1/50$	372,90076	10,1619	0,2783	0,1288	7,1859	3,1431	1,0095	0,0416		
EKF										
$\sigma_v^2 = 0,25\sigma_\Omega^2 = 10^{-4}$ [1]	$qv = 50q_\Omega = 1$	21,8693	2,0193	50,3512	0,1299	196,2846	7,9647	0,8686	0,0353	
	$qv = 1q_\Omega = 50$	47,0431	2,3729	50,1738	0,1265	170,4113	5,7568	0,8591	0,0349	
	$qv = 1/50q_\Omega = 1$	10,8178	1,9404	23,5011	0,1252	92,1260	7,2126	2,2053	0,0855	
	$qv = 1q_\Omega = 50$	5,6998	1,8370	50,3538	1,288	211,1686	10,0673	0,8863	0,0363	
	$qv = 1/50q_\Omega = 1$	123,4113	13,4756	136,0462	2,9464	912,1611	46,4688	11,4528	1,0340	
	$qv = 50q_\Omega = 1/50$	218,1747	8,5676	120,7412	1,9945	337,5976	33,8230	6,4892	0,3124	
	1° $qv = 1000q_\Omega = 1000$									
	2° $qv = 50q_\Omega = 1/50$	101,2244	2,4039	12,0927	0,1057	96,8094	5,7645	0,4471	0,0182	
	1° $qv = 5000q_\Omega = 5000$									
	2° $qv = 50q_\Omega = 1/50$	63,7066	2,4565	5,9738	0,1059	45,9985	5,75915	0,4231	0,0173	
1° $qv = 10000q_\Omega = 10000$										
2° $qv = 50q_\Omega = 1/50$	65,6830	2,4621	5,2628	0,1060	42,3553	5,7587	0,4190	0,01727		

1° indica la prima fase di virata; 2° indica la seconda fase di volo rettilineo

Tabella D.7: Tuning dei filtri per la dinamica del velivolo in volo testati con le misure ADS-B sperimentali

	SUKF							
	$1^\circ \text{ RMS}_{V_E} [m/s]$	$2^\circ \text{ RMS}_{V_E} [m/s]$	$1^\circ \text{ RMS}_{V_N} [m/s]$	$2^\circ \text{ RMS}_{V_N} [m/s]$	$1^\circ \text{ RMS}_{TR} [m]$	$2^\circ \text{ RMS}_{TR} [m]$		
$\sigma_{V_N}^2 = \sigma_{V_E}^2 = 625 [1]$	37,01	59,33	18,30	30,37	0,02	0,04		
$q_{V_N} = q_{V_E} = 50$	37,04	59,37	18,32	30,39	0	0		
$q_{V_N} = q_{V_E} = 100$	37,04	59,37	18,33	30,39	0	0		
$q_{V_N} = q_{V_E} = 1000$	37,04	59,37	18,34	30,42	0	0		
$q_{V_N} = q_{V_E} = 1/50$	36,64	59,07	18,07	30,31	0,40	0,26		
$q_{V_N} = q_{V_E} = 1/100$	36,55	59,08	18,01	30,30	0,59	0,32		
$q_{V_N} = q_{V_E} = 1/1000$	35,98	59,21	17,56	30,22	1,98	0,66		
$\sigma_{V_N}^2 = \sigma_{V_E}^2 = 25$	36,73	59,10	18,13	30,31	0,27	0,21		
$\sigma_{V_N}^2 = \sigma_{V_E}^2 = 100$	36,90	59,22	18,23	30,32	0,11	0,12		
	<b>EKF</b>							
$\sigma_{V_N}^2 = \sigma_{V_E}^2 = 625 [1]$	36,56	59,08	18,01	30,30	0,59	0,32		
$q_{V_N} = q_{V_E} = 50$	36,98	59,31	18,28	30,35	0,05	0,06		
$q_{V_N} = q_{V_E} = 100$	37,01	59,33	18,30	30,37	0,03	0,04		
$q_{V_N} = q_{V_E} = 1000$	37,04	59,36	18,32	30,39	0	0,01		
$q_{V_N} = q_{V_E} = 1/50$	35	59,23	16,94	30,02	4,85	1,48		
$q_{V_N} = q_{V_E} = 1/100$	34,43	59,20	16,60	29,86	6,76	2,25		
$q_{V_N} = q_{V_E} = 1/1000$	31,89	58,56	15,13	28,96	19,78	8,96		
$\sigma_{V_N}^2 = \sigma_{V_E}^2 = 25$	35,49	59,23	17,24	30,13	3,37	1,01		
$\sigma_{V_N}^2 = \sigma_{V_E}^2 = 100$	36,17	59,19	17,69	30,24	1,53	0,55		

$1^\circ$  indica la prima fase rettilinea;  $2^\circ$  indica la seconda fase in cui il velivolo curva

Tabella D.8: Tuning dei filtri per la dinamica del velivolo a terra testati con le misure ADS-B sperimentali

	SUKF							
	1° RMS <sub>V<sub>E</sub></sub> [m/s]	2° RMS <sub>V<sub>E</sub></sub> [m/s]	1° RMS <sub>V<sub>N</sub></sub> [m/s]	2° RMS <sub>V<sub>N</sub></sub> [m/s]	1° RMS <sub>TrR</sub> [m]	2° RMS <sub>TrR</sub> [m]		
$\sigma_{V_N}^2 = \sigma_{V_E}^2 = 625[1]$	88,20	89,37	88,32	89,73	1,79	4,55		
$q_{V_N} = q_{V_E} = 50$	88,41	90,01	88,42	90,02	0,07	0,14		
$q_{V_N} = q_{V_E} = 100$	88,42	90,02	88,42	90,02	0,03	0,07		
$q_{V_N} = q_{V_E} = 1000$	88,42	90,03	88,42	90,03	0	0,01		
$q_{V_N} = q_{V_E} = 1/50$	84,35	82,93	86,74	87,18	14,84	28,39		
$q_{V_N} = q_{V_E} = 1/100$	82,54	80,17	86	85,98	18,73	33,30		
$q_{V_N} = q_{V_E} = 1/1000$	73,89	64,24	82,17	78,43	26,87	44,20		
<i>EKF</i>								
$\sigma_{V_N}^2 = \sigma_{V_E}^2 = 625[1]$	83,16	8158	86,25	86,52	18,75	33,32		
$q_{V_N} = q_{V_E} = 50$	88,10	89,23	88,27	89,68	2,67	7,21		
$q_{V_N} = q_{V_E} = 100$	88,25	89,57	88,34	89,82	1,79	4,54		
$q_{V_N} = q_{V_E} = 1000$	88,40	89,97	88,41	90	0,31	0,65		
$q_{V_N} = q_{V_E} = 1/50$	69,03	51,83	79,71	72,15	27,77	44,58		
$q_{V_N} = q_{V_E} = 1/100$	67,61	46,78	78,88	69,54	27,46	42,57		
$q_{V_N} = q_{V_E} = 1/1000$	66,36	36,86	77,95	64,30	31,86	36,01		

1° indica la prima fase rettilinea; 2° indica la seconda fase in cui il velivolo curva

Tabella D.9: Tuning dei filtri a quattro misure per la dinamica del velivolo a terra testati con le misure ADS-B sperimentali

# Appendice E

## Grafici dei dati simulati e sperimentali

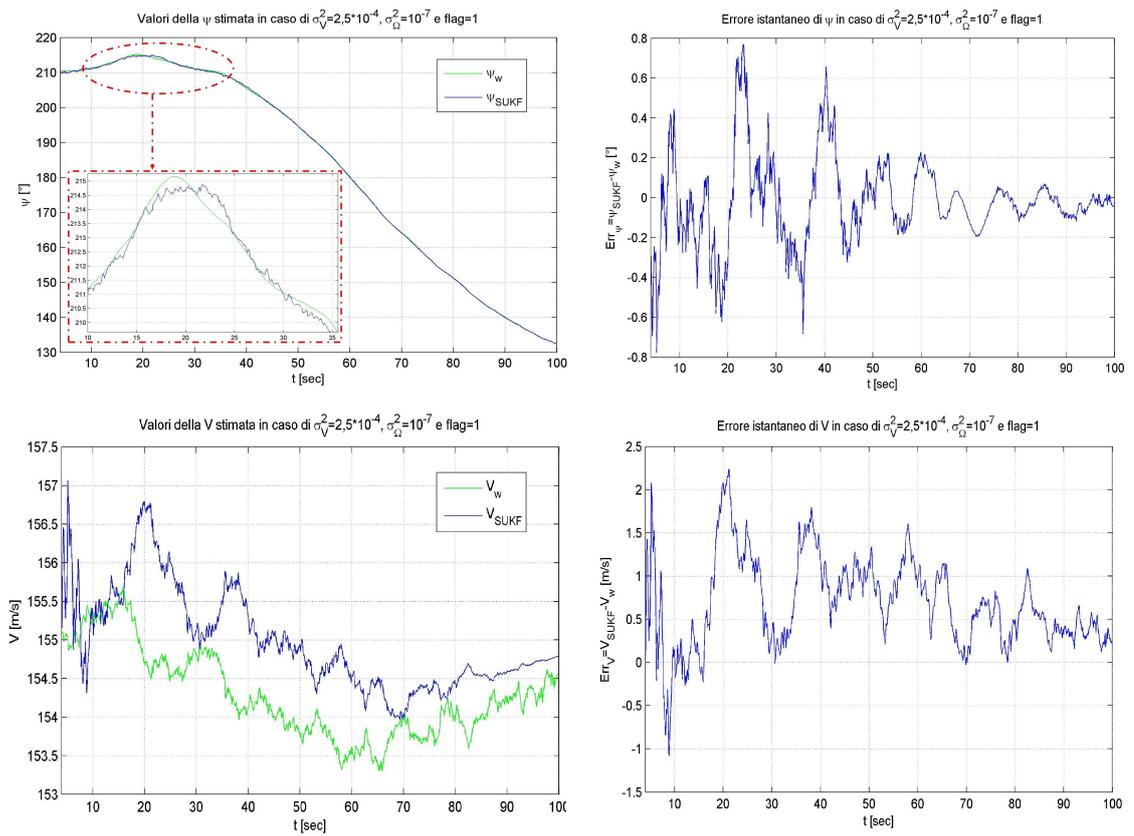


Figura E.1: Valori stimati e relativi errori di  $\psi$  e  $V$  in caso di  $\sigma_V^2 = 2,5 \cdot 10^{-4}$ ,  $\sigma_\Omega^2 = 10^{-7}$ ,  $flag = 1$  e dati simulati

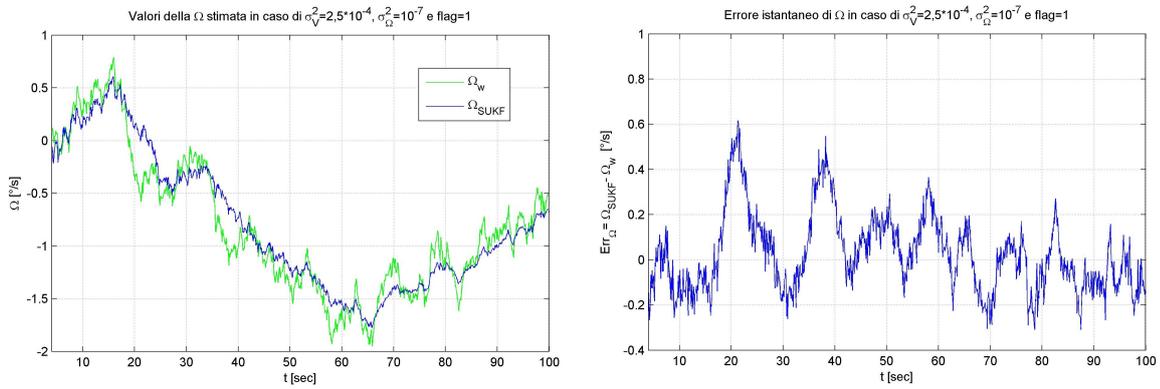


Figura E.2: Valori stimati e relativi errori di  $\Omega$  in caso di  $\sigma_V^2 = 5 * 10^{-4}$ ,  $\sigma_\Omega^2 = 10^{-5}$  e  $flag = 1$

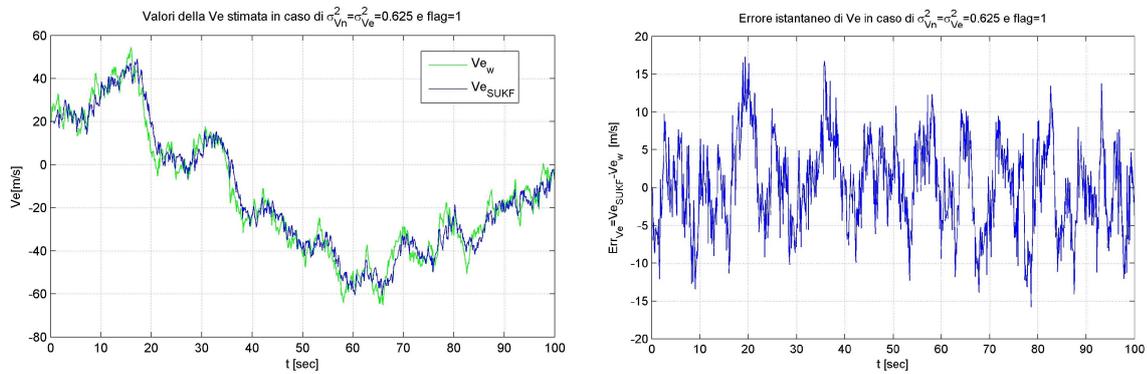


Figura E.3: Valori stimati e relativi errori della  $V_E$  nel caso di  $\sigma_{V_N}^2 = \sigma_{V_E}^2 = 0,625$ ,  $flag = 1$  e dati simulati

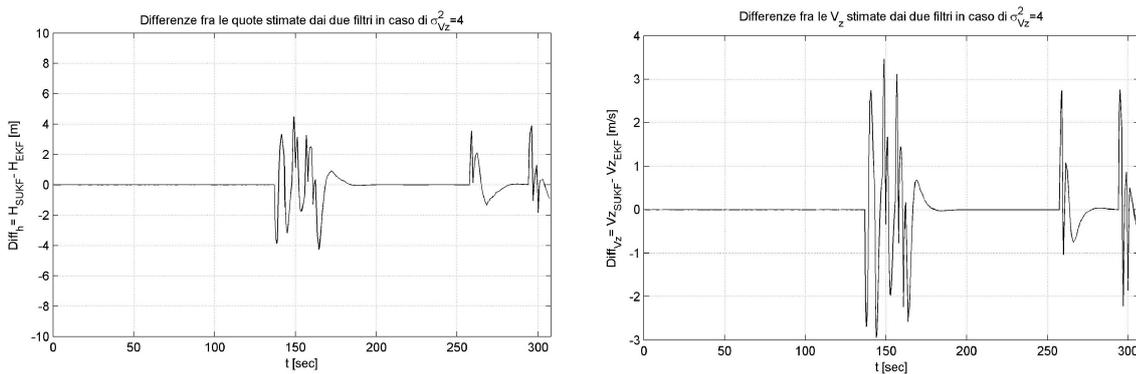


Figura E.4: Differenze fra i valori di quota e velocità verticali stimati dai due filtri nel caso di  $\sigma_{V_z}^2 = 4$  e dati ADS-B sperimentali

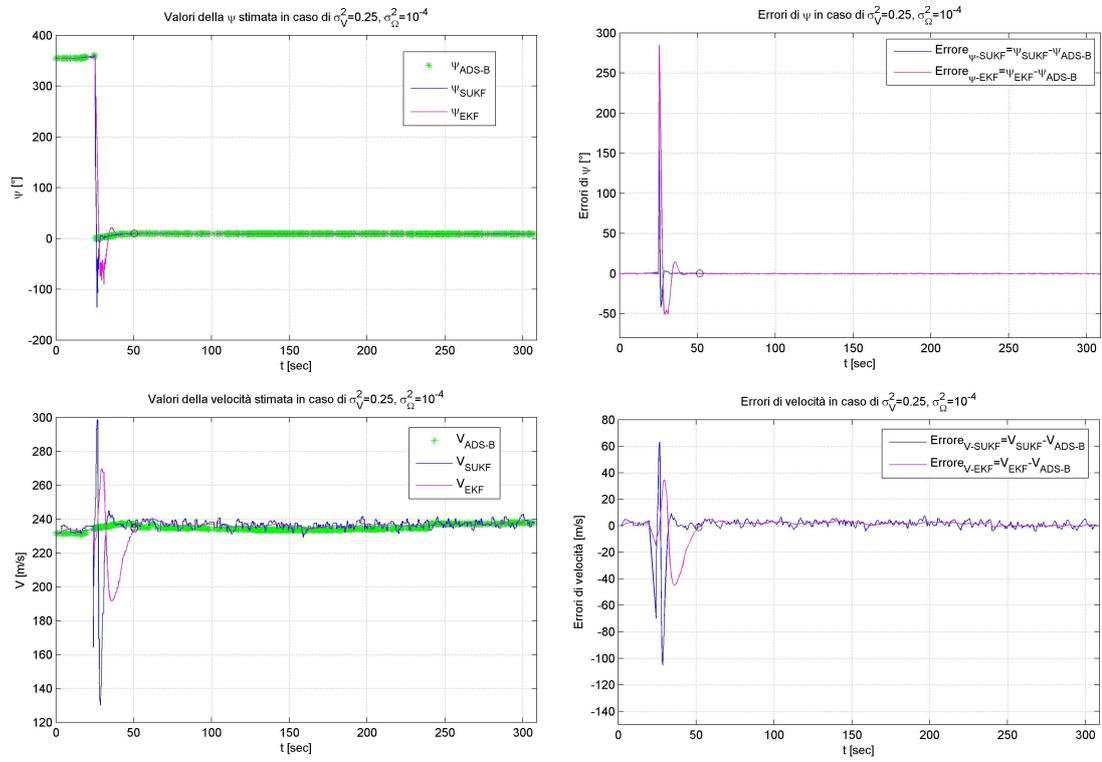


Figura E.5: Valori stimati ed errori di  $\psi$  e  $V$  nel caso di  $\sigma_V^2 = 0,25$ ,  $\sigma_\Omega^2 = 10^{-4}$  e dati ADS-B sperimentali

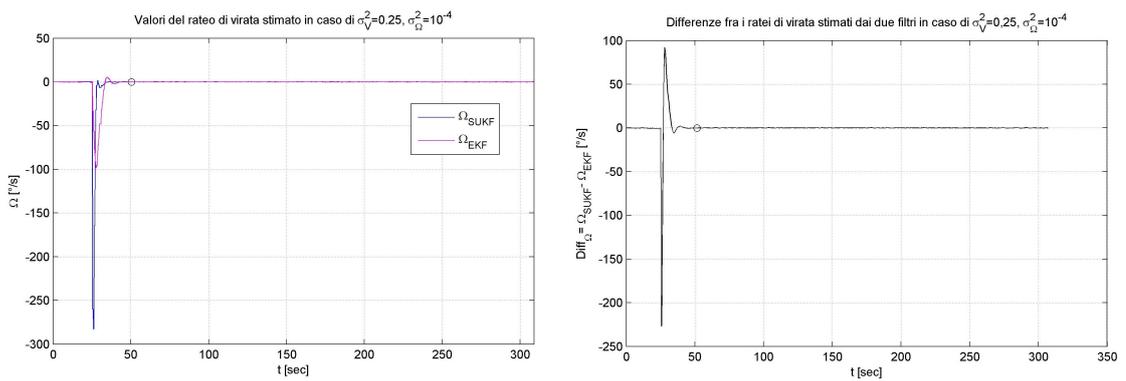


Figura E.6: Valori stimati e differenze fra i valori di  $\Omega$  stimati dai due filtri nel caso di  $\sigma_V^2 = 0,25$ ,  $\sigma_\Omega^2 = 10^{-4}$  e dati ADS-B sperimentali

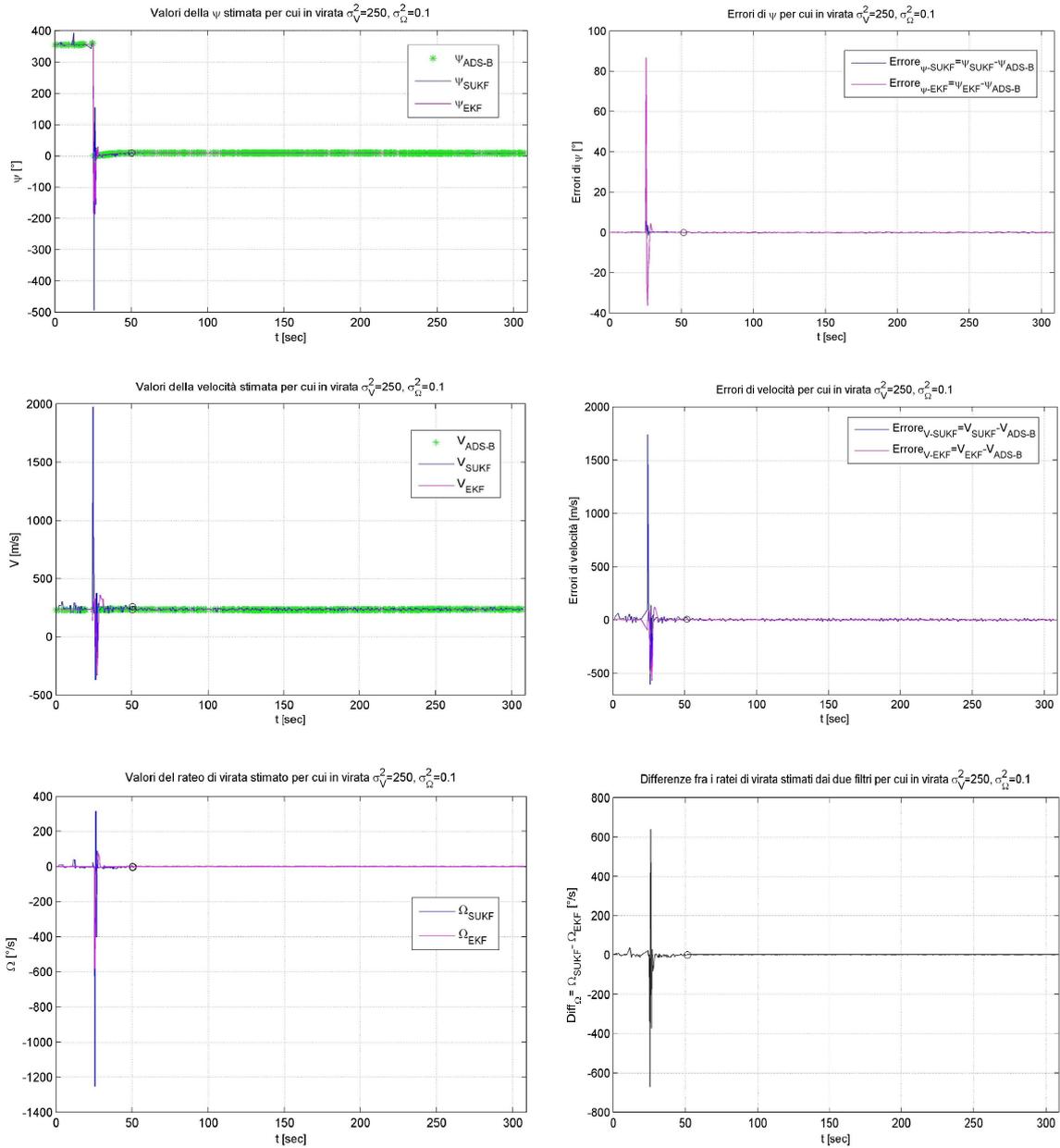


Figura E.7: Valori stimati di  $\psi$  e  $V$  scelte  $\sigma_V^2 = 250$  e  $\sigma_\Omega^2 = 0,1$  per la virata e dati ADS-B sperimentali

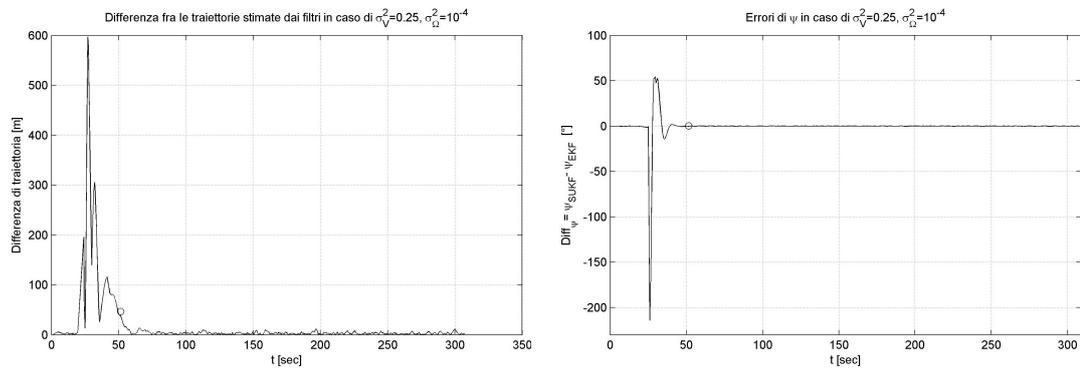


Figura E.8: Differenze fra i valori di traiettoria e  $\psi$  stimati dai due filtri nel caso di  $\sigma_V^2 = 0,25$ ,  $\sigma_\Omega^2 = 10^{-4}$  e dati ADS-B sperimentali

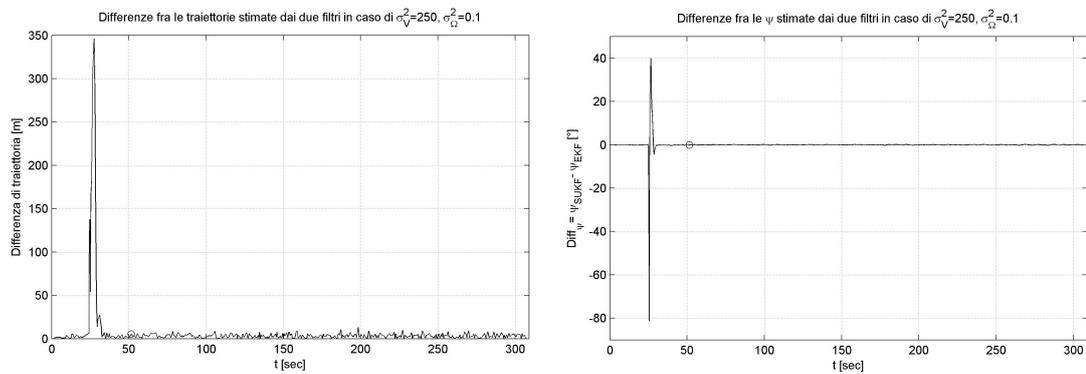


Figura E.9: Differenze fra i valori di traiettoria e  $\psi$  stimati dai due filtri nel caso di  $\sigma_V^2 = 250$ ,  $\sigma_\Omega^2 = 0.1$  e dati ADS-B sperimentali

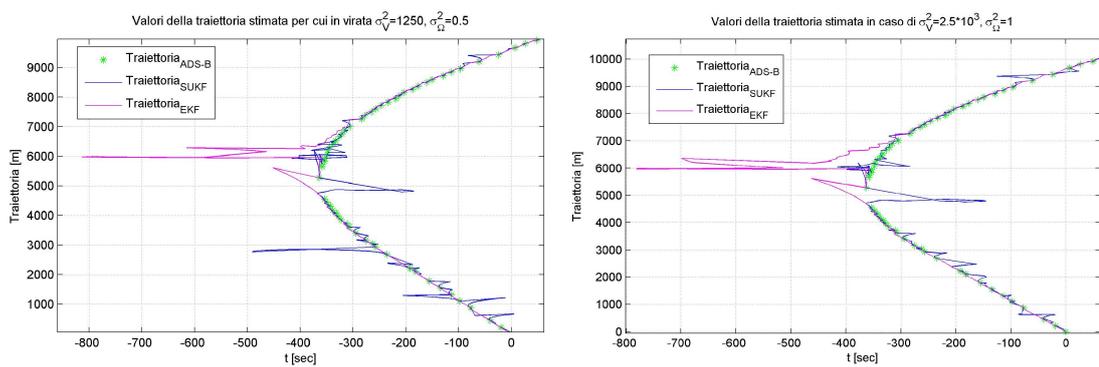


Figura E.10: Valori stimati di traiettoria nel tratto di virata scelte  $\sigma_V^2 = 1250$ ,  $\sigma_\Omega^2 = 0,5$  e  $\sigma_V^2 = 2,5 \cdot 10^3$ ,  $\sigma_\Omega^2 = 1$  per la virata e dati ADS-B sperimentali

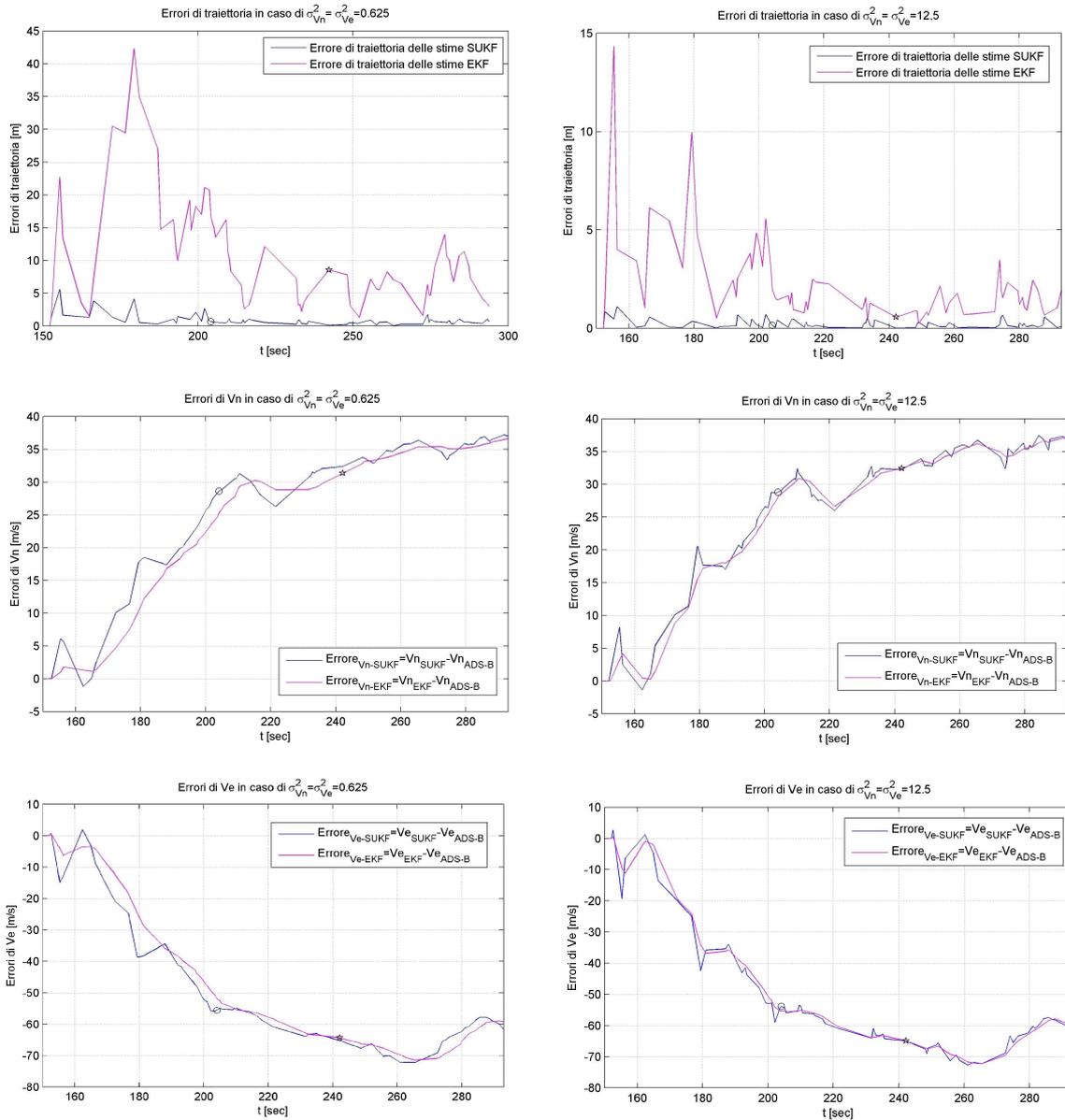
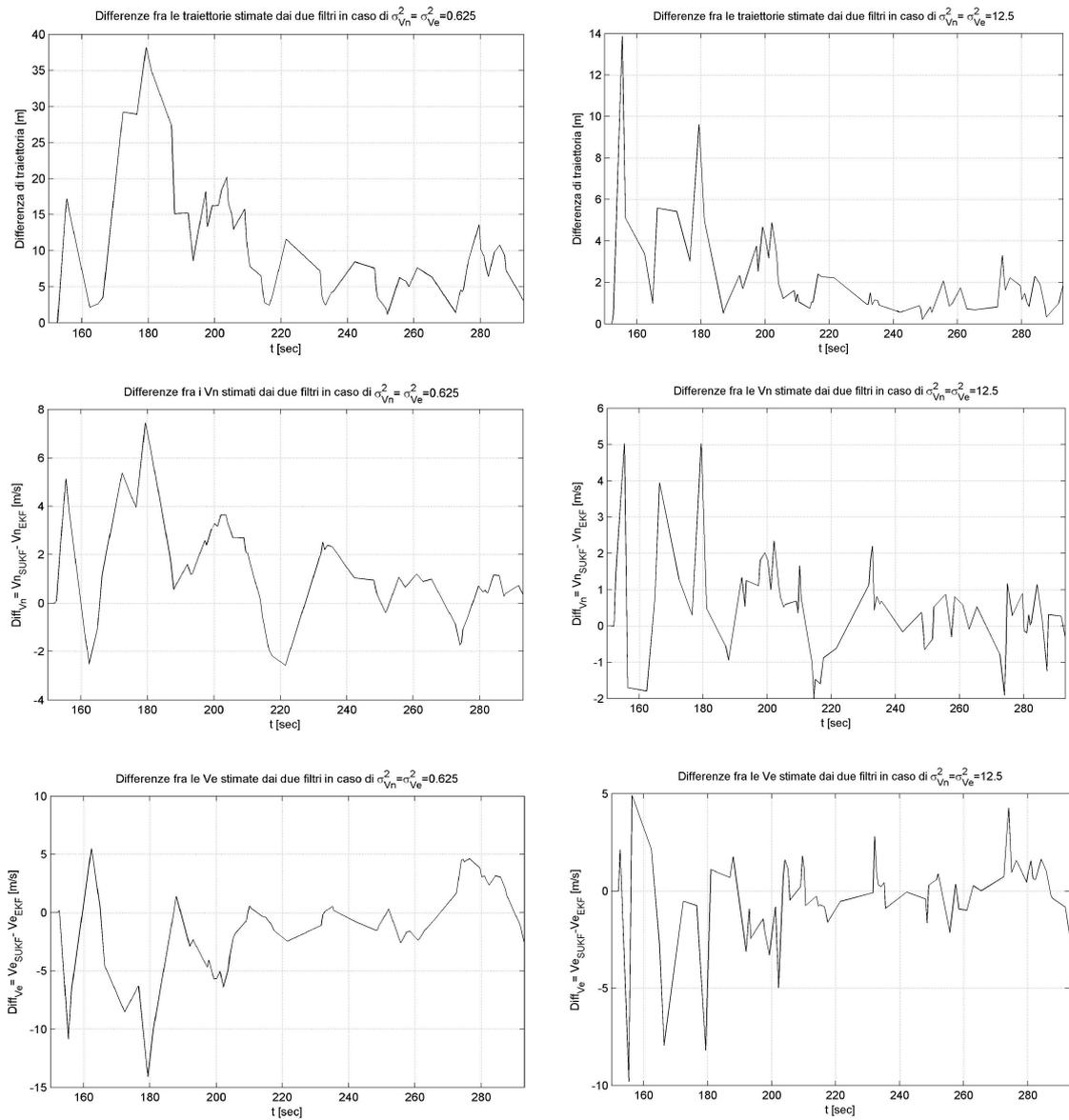


Figura E.11: Confronto fra gli errori di stima di traiettoria e  $V_N$  nel caso di  $\sigma_{V_N}^2 = \sigma_{V_E}^2 = 0,625$  e di  $\sigma_{V_N}^2 = \sigma_{V_E}^2 = 12,5$  e dati ADS-B sperimentali



**Figura E.12: Differenze fra i valori di traiettoria e velocità stimati dai due filtri nel caso di  $\sigma_{V_N}^2 = \sigma_{V_E}^2 = 0,625$  e di  $\sigma_{V_N}^2 = \sigma_{V_E}^2 = 12,5$  e dati ADS-B sperimentali**



# Bibliografia

- [1] P. Baldi, N. Regina, M. Zanzi, *Algoritmi T-Recs*, LASIM, Scuola di Ingegneria e Architettura, Alma Mater Studiorum Università di Bologna, 2013
- [2] ENAV S.p.a, *ADS-B National Implementation programme*, Aprile 2011
- [3] M. Zanzi, *Il GPS e la navigazione satellitare*, Appunti sui sistemi GNSS
- [4] R.G. Brown, P.Y.C. Hwang, *Introduction to Random Signals and Applied Kalman Filtering: with MATLAB exercises and solutions.3*, New York, John Wiley & Sons, 1997
- [5] R. E. Kalman, *A new approach to linear filtering and prediction problems*, Transactions of the ASME–Journal of Basic Engineering, 82(Series D):35–45, 1960.
- [6] G. Welch, G. Bishop, *An introduction to the Kalman filter*, Chapel Hill Department of Computer Science, University of North Carolina , Chapel Hill, disponibile online: <http://www.cs.unc.edu/~{welch, gb}>
- [7] S. F. Schmidt, *Applications of state space methods to navigation problems*, In C. T. Leondes, *Advances in Control Systems*, Academic Press, pp. 293–340, New York City, New York, USA, 1966
- [8] S.J. Julier, J.K. Uhlmann, *A general method for approximating nonlinear transformations of probability distributions*, Technical report, University of Oxford, Department of Engineering Science, Robotics Research Group, Oxford, OX1 3PJ United Kingdom, November 1996.
- [9] S.J. Julier, J.K. Uhlmann, H. Durrant-Whyte, “*A new approach for filtering nonlinear systems*”, in *Proceedings of the American Control Conference*, pp. 1628–1632, 1995

- [10] M. Norgaard, N.K. Poulsen, O. Ravn, *New developments in state estimation for nonlinear systems*, Automatica, Vol. 36, pp. 1627-1638, 2000
- [11] R. Kandepe et al., *Applying the unscented Kalman filter for nonlinear state estimation*, J. Process Contr., 2008, doi:10.1016/j.jprocont.2007.11.004
- [12] S.J. Julier, J.K. Uhlmann, *A New Extention of the Kalman Filter to Nonlinear Systems*, Proc. of AeroSense: The 11th Int. Symp. on Aerospace/Defence Sensing, Simulation and Controls, 1997
- [13] J. Hartikainen, A.Solin, S. Särkkä, *Optimal Filtering with Kalman Filters and Smoothers a Manual for the Matlab toolbox EKF/UKF Verision 1.3*, Department of Biomedical Engineering and Computational Science, Aalto University School of Science, Espoo, Finland, Agust 2011
- [14] R. Capua, A. Bottaro, *Implementation of the Unscented Kalman Filter and a Simple Augmentation System for GNSS SDR Receivers*, Proceedings of the 25th International Technical Meeting of The Satellite Division of the Institute of Navigation (ION GNSS 2012), Nashville, TN, September 2012, pp. 2398-2407
- [15] L. Chisci, *Appunti\_UKF-PF. Appunti di filtraggio non-lineare*, Dipartimento di Sistemi e Informatica, Università di Firenze, inedito, 2007
- [16] X. Luo, I.M Moroz, I. Hoteit, *Scaled unscented transform Gaussian sum filter: Theory and application*, Mathematical Institute & The Oxford-Man Institute, Oxford,UK, King Abdullah University of Science and Technology, Thuwal, Saudi Arabia, Physica D: Nonlinear Phenomena, Volume 239, Issue 10, pp. 684-701, 2010, arXiv:1005.2665 [physics.data-an]
- [17] S. J. Julier, J. K. Uhlmann, *The scaled unscented transformation*, In Proceedings of the IEEE American Control Conference, pp. 4555–4559, Anchorage, Alaska, USA, 8–10 May 2002. IEEE.
- [18] E. A. Wan, R. van der Merwe, “Chapter 7 : The Unscented Kalman Filter”, In “Kalman Filtering and Neural Networks”, Wiley Publishing, Eds. S. Haykin, September 2001.

- [19] H. Hakl, Prof. B. Herbst, *Structure-from-motion for enclosed environments*, Department of Applied Mathematics, University of Stellenbosch, A.A 2007
- [20] J.J. LaViola Jr., *A comparison of Unscented and Extended Kalman Filtering for Estimating Quaternion Motion*, Advanced Scientific Computing & Visualization, Brown University Technology Center, Providence, RI, USA, American Control Conference, Vol. 3, pp. 2435 - 2440, 2003
- [21] R. Merwe, E.A. Wan, *Sigma-Point Kalman Filters for Integrated Navigation*, Aerospace and Electronic Systems, IEEE Transactions, Volume 42, Issue 2, pp. 750 - 756, 2006
- [22] L. Calandrino, M. Chiani, *Lezioni di comunicazioni elettriche*, Bologna, Pitagora Editrice, 2006



# Ringraziamenti

Ringrazio il Professor Matteo Zanzi per avermi seguito anche in questo percorso, per avermi guidato, ma anche dato fiducia e libertà d'azione.