

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE FISICHE E NATURALI
Corso di Laurea Triennale in Matematica

**LIMITI E COLIMITI
NELLA
TEORIA DELLE CATEGORIE**

Tesi di Laurea in Matematica

Relatore:
Chiar.ma Prof.
FRANCESCA CAGLIARI

Presentata da:
FERDINANDO
ZANCHETTA

I Sessione
Anno Accademico 2012/2013

Indice

Premessa	v
Introduzione	vii
1 Categorie e funtori	1
1.1 Categorie	1
1.2 Funtori e trasformazioni naturali	8
1.2.1 Funtori	8
1.2.2 Trasformazioni naturali	12
1.2.3 Funtori pieni e fedeli. Sottocategorie	16
1.3 Monomorfismi, epimorfismi, isomorfismi	21
1.4 Oggetti terminali ed iniziali	25
2 Limiti e Colimiti	27
2.1 Prodotti e coprodotti	27
2.1.1 Prodotti	27
2.1.2 Coprodotti	32
2.2 Intermezzo. Gruppi in una categoria	34
2.3 Equalizzatori e Coequalizzatori	38
2.3.1 Equalizzatori	38
2.3.2 Coequalizzatori	39
2.4 Pullbacks e pushouts	41
2.4.1 Pullbacks	41
2.4.2 Pushouts	44
2.5 Limiti e colimiti	47
2.5.1 Categorie complete	52
2.5.2 Funtori e limiti	53
2.5.3 Limiti nella categoria dei funtori	55
2.5.4 Il teorema di Van-Kampen in forma generale	57
2.5.5 Funtori aggiunti	59

Premessa

Matematica, fisica e filosofia. Fin da bambino sono entrato in contatto con queste discipline, seppur inconsapevolmente: quel desiderio di conoscenza comune ad ogni essere umano mi spingeva a contare e quantificare tutto ciò che potevo numerare, a chiedere sempre come funzionassero gli oggetti, quale fosse la causa dei fenomeni naturali ed infine perchè essi dovessero proprio comportarsi in quel modo.

Ero al quarto anno del liceo quando in primavera lessi per la prima volta la 'Critica della ragion pura' di Kant. Fu proprio con quel libro che cominciai a dare rilevanza al problema delle categorie, seppur in senso filosofico (sommi generi che contengono ogni proprietà predicabile dell'essere). Certo l'idea filosofica di categoria ha radici ben più antiche e ricorre a partire da Aristotele negli scritti di ogni filosofo della storia che abbia detto qualcosa di rilevante riguardo all'ontologia. Ma Kant nella sua genialità per la prima volta si chiese in che modo queste categorie plasmassero ogni attività del pensiero umano. Era un problema impegnativo, che risolse con l'oscura e tutt'oggi incompresa teoria dello schematismo trascendentale, secondo cui alcuni 'schemi' avrebbero proiettato la struttura delle categorie in quella delle intuizioni pure dello spazio e del tempo fornendo una base formale per il darsi di giudizi e quindi di conoscenza di ogni tipo, compresa quella matematica.

Kant però non esaurì il problema, che i filosofi successivi aggirarono, fraintesero o ripresero da altri punti di vista, senza giungere mai a conclusioni davvero solide; la teoria delle categorie filosofiche proseguì in modo articolato e non è questo il posto in cui renderle giustizia, tuttavia si può qui dire che essa costituisce innegabilmente un topos ricorrente e fondamentale in moltissime teorie filosofiche.

Arrivato all'università, finalmente fui in grado di cominciare a coltivare anche i miei interessi matematici e fisici con il dovuto rigore, e la mia ossessione per l'interconnessione tra queste due bellissime discipline mi portò un giorno a sfogliare un libro di teoria dei modelli in cui si faceva menzione dei topoi. Nel tentativo di capire esattamente cosa fossero fui costretto ad occuparmi della teoria delle categorie di cui parlo in questa tesi.

La mia meraviglia fu enorme: mi si parava davanti una teoria di un'eleganza senza eguali che si proponeva di formalizzare le strutture più astratte,

generali e caratterizzanti della matematica, ottenendo per essa quello che i filosofi avrebbero sempre voluto ottenere per la filosofia da una teoria omologa.

Allora mi ricordai del problema di Kant, e mi chiesi quale fosse alla luce di questa nuova teoria delle categorie il suo analogo nel quadro fisico-matematico del ventunesimo secolo.

Fu così che decisi di intraprendere lo studio della teoria delle categorie.

Introduzione

La teoria delle categorie ha le sue radici negli studi compiuti da Eilenberg e Mac Lane nei primi anni 40 volti a calcolare alcuni gruppi di omologia attraverso la teoria dei gruppi. In questi studi essi intuirono dapprima la 'naturalità' di alcuni omomorfismi di gruppi, individuando in due articoli del 1942 alcune caratteristiche funtoriali nell'ambito della teoria dei gruppi; in seguito svilupparono il concetto di categoria, funtore e isomorfismo naturale traendo ispirazione dai loro studi di omologia.

Fondamentale e pionieristico è l'articolo 'General theory of natural equivalences' pubblicato da questi due autori nel 1945, in cui per la prima volta si trova la definizione di categoria, che deve il suo nome al fatto che gli autori riconobbero in tale definizione una definizione matematica del concetto di categoria in senso filosofico.

Subito non fu chiaro se i concetti della teoria delle categorie potessero venire applicati in altre parti della matematica.

Una risposta positiva al problema si ebbe nel 1952 con la pubblicazione da parte di Eilenberg e Steenrod di un influente libro ('Foundations of algebraic topology') in cui si definisce la topologia algebrica in modo assiomatico attraverso la teoria delle categorie. Importante in tal senso fu anche la pubblicazione nel 1956 di 'Homological algebra' da parte di Eilenberg e Cartan, libro fondamentale per la nascita dell'algebra omologica.

Grazie a questi libri i matematici cominciarono a prendere confidenza con i metodi della teoria delle categorie (per esempio il diagram chase) e ad usarli proficuamente nel fare matematica.

Così nel 1957 Grothendieck con il suo articolo 'Sur quelques points d'algèbre homologique' applica i metodi dell'algebra omologica alla geometria algebrica, rivoluzionandola con l'introduzione di concetti molto importanti come quello di categoria abeliana che troverà sviluppi fecondi nello studio dei fasci. Inoltre nel 1958 Kan riconosce che il concetto di funtore aggiunto è profondamente legato ai concetti di limite e colimite, che sono l'oggetto di questa tesi.

L'importanza dei funtori aggiunti per molti settori della matematica si mostrò chiaramente grazie a lavori di Freyd e Lawvere negli anni 60: con la tesi di dottorato di quest'ultimo venne introdotto il concetto di algebra universale, fondamentale per la geometria algebrica.

Tutti questi sviluppi portarono a considerare la teoria delle categorie come ad una disciplina degna di essere studiata a sè stante e non solo come mezzo tecnico propedeutico ad alcuni settori della matematica.

Così negli anni 60 Lawvere introdusse il concetto di categoria delle categorie e propose di utilizzare la teoria delle categorie come fondamento per tutta la matematica, usandola dunque anche per scopi logici e fondazionistici (notevole è l'assiomatizzazione della teoria degli insiemi all'interno della teoria delle categorie ottenuta da Lawvere).

Questo progetto si rivelò particolarmente efficace grazie all'uso del concetto di topos (inventato da Grothendieck negli anni 60), che si rivelò uno strumento di fondamentale importanza a livello di logica matematica.

Negli anni 80 e 90 la teoria delle categorie trovò poi applicazioni notevoli nelle logiche intuizionistiche e nelle logiche di ordine elevato, giungendo a trovare un utilizzo proficuo anche nella moderna informatica teorica (ad esempio nella teoria dei tipi) grazie al suo carattere strutturale e logico.

Infine dal 2000 sono stati pubblicati alcuni studi pionieristici che mostrano come alcuni concetti categoriali, come quello di categoria monoidale, possano trovare legami con la fisica, in particolare con la meccanica quantistica.

Lo scopo di questa tesi è di definire in maniera compiuta i concetti di limite e colimito all'interno della teoria delle categorie e di mostrare come tali concetti siano in effetti la generalizzazione di alcune strutture particolari che ricorrono in matematica.

Si comincia quindi con l'introdurre nel primo capitolo il linguaggio elementare della teoria delle categorie definendo il concetto di categoria, funtore, trasformazione naturale e sviluppando la teoria ad essi immediatamente collegata.

Nel secondo capitolo, sulla base della teoria svolta nel primo, si definiscono alcune strutture notevoli (prodotti, equalizzatori, pullbacks e loro duali) mostrando quali concetti matematici generalizzino e giungendo a far vedere che non sono altro che una forma particolare di limite (o, dualmente, di colimito). Vengono poi enunciati e dimostrati i risultati più importanti riguardanti limiti e colimiti.

Capitolo 1

Categorie e funtori

In questo capitolo si introducono le definizioni di base della teoria delle categorie ed i risultati fondamentali che concernono ad esse. Il contenuto di questo capitolo è stato tratto principalmente da [Bor94],[Awo10] ed in secondo luogo da [MacL97], [Oo02], [AHS04], per quanto molti degli argomenti qui presentati siano ormai standard.

1.1 Categorie

La definizione di categoria cerca di assiomatizzare il concetto intuitivo di una struttura astratta composta di oggetti legati tra loro tramite frecce, che soddisfino certe proprietà operative elementari. Proprio per la generalità del concetto che si vuole definire, la definizione assiomatica di categoria è oggetto di discussione e controversie ancora oggi soprattutto per il motivo che una teoria delle categorie potrebbe essere vista come a sè stante e contenente la matematica assiomatizzata nel modo classico con una teoria degli insiemi adatta come una sua parte. Tuttavia, dato che in questa breve tesi non si ha la pretesa di dare una descrizione completa della teoria delle categorie e si vuole per quanto possibile tenersi legati ad una visione 'matematica' della teoria (sebbene l'autore ritenga che tale visione sia riduttiva), si darà una definizione di categoria appoggiandosi alla teoria degli insiemi, seguendo l'uso della maggior parte degli autori, vedi [Bor94] o [Awo10] o [AL91]¹. Diamo dunque la seguente:

Definizione. Una categoria \mathcal{C} consiste di :

- Una classe C denotata con $\mathbf{Ob}(\mathcal{C})$ o con C_0 i cui elementi si chiameranno 'oggetti della categoria'.

¹Per una discussione più penetrante della definizione che stiamo per dare dal punto di vista delle teorie degli insiemi si rimanda a [Bor94], mentre se oltre a ciò si desidera sapere di più circa la discussione generale sull'assiomatizzazione logica delle categorie si rimanda al classico [MacL97] o ad [MLar92] che ha una impostazione molto vicina alla logica

- Per ogni coppia A, B di oggetti di \mathcal{C} un insieme $C(A, B)$ (anche vuoto, se $A \neq B$) i cui elementi si chiameranno 'morfismi' o 'frece' da A a B .
- Per ogni tripla A, B, C di oggetti, una legge di composizione

$$C(A, B) \times C(B, C) \longrightarrow C(A, C)$$

La composizione di (f, g) si scriverà $g \circ f$ o gf .

- Per ogni oggetto A , un morfismo $1_A \in C(A, A)$ chiamato l'identità di A .
Devono inoltre valere:

- (1) Assioma dell'associatività: dati $f \in C(A, B)$ e $g \in C(B, C)$ e $h \in C(C, D)$ vale la seguente uguaglianza:

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$$

- (2) Assioma dell'identità: dati $f \in C(A, B)$ e $g \in C(B, C)$ vale:

$$1_B \circ f = f \quad g \circ 1_A = g$$

Questa definizione fa ovviamente uso della teoria degli insiemi ma non è accettata universalmente; infatti per alcuni autori una categoria è composta da una classe di oggetti e da una classe di morfismi per ogni coppia di oggetti, e questi autori chiamano una categoria come quella definita sopra 'categoria localmente piccola'. Chiameremo inoltre le categorie aventi solo un insieme di oggetti 'categorie piccole' (small categories). Perchè sia preferibile definire il concetto di categoria come sopra risulterà chiaro in seguito. Se $f \in C(A, B)$ si scriverà anche $f : A \longrightarrow B$ e si dirà che il dominio di f è A e il codominio di f è B .

Si nota poi che le frecce identità sono uniche in quanto se 1_A e $1'_A$ fossero due identità di $A \in C_0$ allora riuscirebbe $1_A = 1_A 1'_A = 1'_A$ da cui l'uguaglianza. Un modo utile per raffigurare una categoria \mathcal{C} è pensarla nel seguente modo:

$$C_2 \xrightarrow{\circ} C_1 \begin{array}{c} \xrightarrow{dom} \\ \xleftarrow{i} \\ \xrightarrow{cod} \end{array} C_0$$

Dove C_2 rappresenta la classe delle coppie di morfismi componibili, C_1 la classe dei morfismi e C_0 la già citata classe degli oggetti. Le frecce che collegano queste tre classi simboleggiano ovviamente la composizione, l'assegnazione di un dominio e di un codominio e l'esistenza dell'identità. Questo diagramma ci suggerisce il fatto che la nozione di categoria non sia la nozione più 'primitiva' di struttura composta da oggetti e frecce. Se noi infatti facciamo a meno di richiedere la legge di composizione, l'associatività e l'esistenza dei morfismi identici, otteniamo la struttura di grafo orientato (che

a sua volta può essere resa più debole) e questo induce a pensare che esista una sorta di 'collegamento' tra i due concetti:

$$\begin{array}{ccc}
 C_2 & \xrightarrow{\circ} & C_1 & \begin{array}{c} \xrightarrow{dom} \\ \xleftarrow{i} \\ \xrightarrow{cod} \end{array} & C_0 \\
 & & \downarrow & & \\
 & & C_1 & \begin{array}{c} \xrightarrow{dom} \\ \xrightarrow{cod} \end{array} & C_0
 \end{array}$$

Mediante il quale si possa associare ad una categoria il suo grafo sottostante e viceversa preso un grafo orientato lo si possa 'completare' a categoria. Vediamo ora degli esempi di categoria:

- La categoria $\mathbf{0}$. Essa si presenta come segue:

ovvero è la categoria avente una classe vuota di oggetti e una classe vuota di frecce. Talvolta essa è chiamata la categoria banale.

- La categoria $\mathbf{1}$. Essa è composta soltanto da un oggetto con il relativo morfismo identità. Si presenta come

$$\begin{array}{c}
 \bullet \\
 \curvearrowright id
 \end{array}$$

- La categoria $\mathbf{2}$. Essa si compone in questo modo:

$$\begin{array}{ccc}
 \bullet & \xrightarrow{f} & * \\
 \curvearrowright id & & \curvearrowleft id_* \\
 \bullet & \xrightarrow{g} & *
 \end{array}$$

con $f \neq g$

- La categoria $\mathbf{3}$: Essa si compone di tre oggetti e di due frecce (oltre alle identità) in questo modo:

$$\begin{array}{ccc}
 & & \bullet \\
 & & \downarrow \\
 \bullet & \longrightarrow & \bullet
 \end{array}$$

Queste prime categorie sono molto semplici ma si riveleranno fondamentali in seguito quando parleremo di limiti e colimiti. Alcuni autori, come per esempio [MacL97] danno definizioni diverse per le categorie $\mathbf{2}$ e $\mathbf{3}$, ma poichè noi useremo le suddette, per evitare ambiguità accettiamo le precedenti definizioni.

- La categoria **Set** avente come oggetti la classe degli insiemi e come morfismi le usuali funzioni. Dall' algebra elementare sappiamo che che esiste la funzione identità per ogni insieme, che vale l'associatività della composizione e che esiste la funzione composta per ogni coppia di funzioni componibili. Dunque gli insiemi formano effettivamente una categoria.

- La categoria **Top** avente come oggetti gli spazi topologici e come morfismi le funzioni continue. Per topologia elementare si vede che **Top** è effettivamente una categoria.
- La categoria $\mathbf{Vect}_{\mathbb{K}}$ avente come oggetti gli spazi vettoriali sul campo \mathbb{K} e come frecce le solite applicazioni lineari. Si vede facilmente che sono soddisfatti gli assiomi di categoria, d'ora in avanti per altri casi similmente ovvi non saranno fatti simili commenti.
- La categoria **Gr** dei gruppi e degli omomorfismi di gruppi
- La categoria **Abgr** dei gruppi abeliani (che ha profondi legami con la precedente).
- La categoria **Rng** degli anelli comutativi unitari.
- La categoria **Set_{*}** avente come oggetti gli insiemi puntati, cioè gli insiemi con un elemento prestabilito e come morfismi le funzioni che conservano tali punti.
- La categoria **Mon** dei monoidi.
- La categoria **Pos** avente come oggetti gli insiemi parzialmente ordinati e come morfismi le funzioni monotone.

Si potrebbe continuare ad elencare altre categorie banali come quelle appena citate, ma risulterebbe ridondante. Vediamo ora degli esempi un poco più sofisticati:

- Prendiamo come classe di oggetti (in questo caso sono un insieme) i numeri naturali e come morfismi da n a m le matrici in un anello commutativo unitario A aventi m righe e n colonne. Per la regola di moltiplicazione tra matrici si vede che emerge una categoria, dove la composizione non è altro che la moltiplicazione tra matrici. Tali categorie a volte si indicano con \mathbf{Matr}_A
- Possiamo vedere un insieme parzialmente ordinato come una categoria. Infatti se prendiamo come oggetti gli elementi di tale insieme ordinato, definiremo $(a \rightarrow b \Leftrightarrow a \leq b), \forall a, b \in A$ dove A è il nostro insieme parzialmente ordinato. Si vede facilmente che $a \leq a \forall a$, da cui si ha l'esistenza e l'unicità dei morfismi identici. Inoltre la proprietà transitiva garantisce la composizione e la associatività di essa. Si noti che non abbiamo la antisimmetria, quindi sono concesse situazioni del tipo $a \begin{array}{c} \xrightarrow{\quad} \\ \longleftarrow \end{array} b$ con $a \neq b$.
- Consideriamo una classe di oggetti qualsiasi C_0 tale che gli unici morfismi di C_1 siano i morfismi identità. Allora siamo di fronte ad una categoria, e lo si vede banalmente. Tali categorie si dicono categorie discrete, **1** ne è un esempio.

- Possiamo vedere un monoide moltiplicativo (M, \cdot) con unità come una categoria nel seguente modo: Prendiamo come M_0 un insieme costituito da un solo elemento, \star , e sia $M_1 = M(\star, \star) = \{b | b \in M\}$. Quindi quelli che nella visione algebrica sono gli 'elementi' del monoide, nella visione categorica sono delle frecce da \star in sè, e gli assiomi di monoide ci danno la legge di composizione (la moltiplicazione) l'unità (l'elemento neutro) e l'associatività.

A questo punto ad un matematico riesce naturale pensare che anche un gruppo possa essere visto come categoria al pari di un monoide, non essendo un gruppo altro che un monoide unitario in cui ogni elemento è invertibile. Così infatti è, e questo porta naturalmente a definire un nuovo tipo di morfismo in una categoria, adatto a comprendere come caso particolare la nozione di inverso in un gruppo visto come categoria. Si pone quindi:

Definizione. Data una categoria \mathbf{C} , sia $f \in C(A, B)$; $A, B \in C_0$. Si dirà che f ha inverso destro se $\exists g \in C(B, A)$ tale che $fg = id_B$. In modo analogo si definisce l'inverso sinistro di f . Dato f come prima, f si dirà isomorfismo (o semplicemente iso) se $\exists g \in C(B, A)$ tale che $fg = id_B$ e $gf = id_A$

Si noti che l'inverso di un isomorfismo è unico: infatti se g' e g fossero due inversi di f , si avrebbe $g = gfg' = g'$; inoltre i morfismi identità sono ovviamente degli iso.

Per esempio, in **Top** gli iso sono gli omeomorfismi, in **Set** le applicazioni biunivoche, e così via...

Dunque, un gruppo può essere visto come una categoria avente un solo oggetto, e come frecce tanti iso dall'elemento in sè quanti sono gli elementi del gruppo che si vuole vedere come categoria. In un gruppo quindi tutte le frecce sono isomorfismi. riesce naturale a questo punto generalizzare la nozione di gruppo a quella di *gruppoide* definendo una categoria in cui tutte le frecce siano isomorfismi. Un gruppo è un particolare gruppoide, e anche le categorie discrete lo sono (ovviamente). Questo ci permette di continuare con la lista di esempi di categorie:

- Consideriamo uno spazio topologico P . Allora definiamo il gruppoide fondamentale (per una definizione ed un commento più esaustivo vedi [Spa66] o [May99]) di P , $\Pi(P)$ come segue: $\Pi(P)_0 = \{x | x \in P\}$ e $\Pi(P)(x, y)$ sia la classe di omotopia dei cammini f da x a y . Poichè ogni cammino è invertibile, si vede effettivamente che siamo nel caso di un gruppoide, e ogni oggetto x del gruppoide determina $\Pi(P)(x, x)$ che non è altro che l'insieme degli elementi del gruppo fondamentale di x . Se poi P è connesso per archi, allora ogni oggetto di $\Pi(P)$ sarà collegato a tutti gli altri mediante isomorfismi. Da qui nasce l'idea di chiamare gruppoide connesso un gruppoide in cui ogni coppia di

oggetti sia collegata da un morfismo.

Inoltre conveniamo di chiamare **Gps** la categoria dei gruppidi.

- Dato un sistema di logica deduttivo, consideriamo la classe delle f.b.f. come classe di oggetti. Un morfismo tra due f.b.f. sia inoltre una deduzione naturale fra esse. Si ha dal calcolo proposizionale l'emergere di una categoria (per i dettagli si veda un qualsiasi libro di logica che affronti la deduzione naturale), che ha molte applicazioni in informatica teorica grazie al λ -calcolo.
- Presa una categoria \mathcal{C} potremmo pensare di costruire una categoria avente come elementi i morfismi di \mathcal{C} . Questo si può fare, e in tal caso la categoria creata si chiamerà categoria delle frecce (da arrow category) e si indicherà $\mathcal{C}^{\rightarrow}$. Vediamo come è fatta. $\mathcal{C}_0^{\rightarrow} = \mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}^{\rightarrow}(f, g)$ avrà come elementi coppie (h, s) di morfismi di \mathcal{C} raffiguranti diagrammi commutativi del tipo seguente:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ h \downarrow & & \downarrow s \\ C & \xrightarrow{g} & D \end{array}$$

Dire commutativo significa ovviamente che $sf = gh$. Preso $f \in \mathcal{C}_0^{\rightarrow}$, $id_f = (1_A, 1_B)$ se $f \in \mathcal{C}(A, B)$. Inoltre la legge di composizione è quella che ci si aspetta: $(f_1, f_2) \circ (g_1, g_2) = (f_1g_1, f_2g_2)$ ed è pienamente giustificata dal diagramma commutativo seguente

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{h} & B \\ g_1 \downarrow & & \downarrow g_2 \\ C & \xrightarrow{k} & D \\ f_1 \downarrow & & \downarrow f_2 \\ E & \xrightarrow{z} & F \end{array}$$

L'associatività segue banalmente.

- Consideriamo una categoria \mathcal{C} . Sia Z un oggetto di \mathcal{C} . Consideriamo la classe delle frecce di \mathcal{C} aventi come codominio Z . Vorremmo che fossero gli oggetti di una nuova categoria che vogliamo costruire. Tale categoria avrà la classe appena descritta come classe di oggetti, e presi f, g in tale classe, i morfismi tra f e g saranno tutte e sole le frecce h che rendono il seguente diagramma commutativo:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{h} & B \\ f \downarrow & \swarrow g & \\ Z & & \end{array}$$

Dove $A, B \in \mathbf{Ob}(\mathcal{C})$. Non occorre molta fantasia per verificare che la struttura così determinata soddisfa gli assiomi di categoria.

Una categoria siffatta si chiamerà 'categoria delle frecce su Z ' oppure 'categoria slice di \mathcal{C} su Z ', e si indicherà con \mathcal{C}/Z .

- Possiamo pensare ai numeri ordinali come a dei $n = \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$, dove 0 è l'insieme vuoto (nel caso finito). La categoria dei numeri ordinali avrà come oggetti i consueti numeri ordinali, e le frecce definite dalla consueta relazione d'ordine. Inoltre chiamiamo Δ la categoria dei numeri ordinali finiti (visti come insiemi) avente come frecce le funzioni che conservano l'ordine degli ordinali. Questa categoria è detta categoria simpliciale ed ha applicazioni in topologia algebrica. Si può schematizzare come

$$0 \longrightarrow 1 \begin{matrix} \longleftarrow \\ \longrightarrow \end{matrix} 2 \dots$$

- Infine, presa una qualsiasi categoria \mathcal{C} possiamo pensare che esista un'altra categoria avente gli stessi oggetti, e come frecce le stesse frecce scambiate di verso. Una tale struttura esiste ed è palesemente una categoria, si indicherà con \mathcal{C}^{op} .

Quest'ultimo esempio introduce il concetto di dualità, che risulta molto importante nella teoria delle categorie. In generale, infatti, dato un qualsiasi concetto nella teoria delle categorie, il suo duale sarà semplicemente lo stesso concetto in cui tutto ciò che riguarda le frecce è sostituito dal concetto di freccia con verso invertito. Spieghiamolo più in dettaglio.

Sia φ una fbf nel linguaggio elementare della teoria delle categorie. Allora possiamo considerare φ^* ottenuta sostituendo in φ alcuni termini come segue:

$$\begin{array}{ll} \varphi & \varphi^* \\ f \circ g & g \circ f \\ dom & cod \\ cod & dom \end{array}$$

Allora risulta evidente che φ^* è a sua volta una fbf nel linguaggio elementare delle categorie.

Si potrebbe pensare che tutti i teoremi φ , valgano anche in forma duale; questo è molto naturale. Assumiamo quindi il seguente:

Metateorema. (Principio di dualità) *Se φ è un teorema ottenuto per derivazione dagli assiomi della teoria delle categorie, allora pure φ^* è un teorema.*

Questo metateorema verrà utilizzato in seguito più volte per ottenere risultati altrimenti di noiosa e delicata dimostrazione.

A questo punto è stata completata l'esposizione del concetto di categoria, corredato da molti esempi. Il prossimo passo sarà cercare di capire se e in che modo due categorie siano collegabili mediante morfismi e quale struttura possa emergere in modo naturale da un concetto siffatto.

1.2 Funtori e trasformazioni naturali

1.2.1 Funtori

Siamo in cerca di uno strumento utile e versatile che ci consenta di 'collegare' tra loro diverse categorie. Diamo quindi la fondamentale definizione di *funto*re:

Definizione. Un **funto**re (covariante) F dalla categoria \mathbf{C} alla categoria \mathbf{D} consiste di:

- Una mappa $C_0 \rightarrow D_0$. L'immagine di un elemento $A \in C_0$ in \mathbf{D} si scriverà $F(A)$ o FA .
- Per ogni coppia $A, B \in C_0$ una mappa $C(A, B) \rightarrow D(FA, FB)$. L'immagine di $f \in C(A, B)$ in $D(FA, FB)$ si scriverà $F(f)$ oppure Ff .

Devono inoltre valere

$$(1) \forall f \in C(A, B), \forall g \in C(B, C) \text{ vale } F(gf) = (Fg) \circ (Ff)$$

$$(2) \forall A \in C_0, \quad F(1_A) = 1_{FA}$$

Questa definizione può essere visualizzata come segue:

$$\mathbf{C} \xrightarrow{F} \mathbf{D} : \begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ \uparrow g & \nearrow fg & \\ C & & \end{array} \xrightarrow{F} \begin{array}{ccc} FA & \xrightarrow{Ff} & FB \\ \uparrow Fg & \nearrow F(fg) & \\ FC & & \end{array}$$

e schematizzata così:

$$\begin{array}{ccccc} C_2 & \xrightarrow{\circ} & C_1 & \begin{array}{c} \xrightarrow{dom} \\ \xleftarrow{i} \\ \xrightarrow{cod} \end{array} & C_0 \\ F_2 \downarrow & & F_1 \downarrow & & \downarrow F_0 \\ D_2 & \xrightarrow{\circ} & D_1 & \begin{array}{c} \xrightarrow{dom} \\ \xleftarrow{i} \\ \xrightarrow{cod} \end{array} & D_0 \end{array}$$

Ora che abbiamo definito un morfismo tra due categorie, chiediamoci se può esistere una categoria delle categorie. Questo per fortuna non può essere, in quanto secondo la nostra definizione, una categoria è composta da una *classe* di oggetti e quindi i funtori tra due categorie possono essere una classe, e non c'è alcun motivo per cui debbano essere soltanto un insieme. Quindi la classe di tutte le categorie non è una categoria secondo la nostra definizione. Questo evita che la nostra teoria sia soggetta a ragionamenti simili al paradosso di Russell.

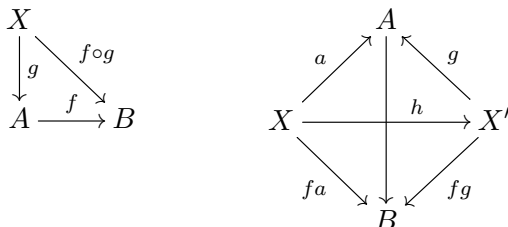
Se tuttavia ci restringiamo alle categorie piccole, allora osserviamo che i funtori tra due categorie piccole costituiscono un insieme, quindi possiamo definire **Cat** come la categoria avente come oggetti le categorie piccole e come morfismi i funtori tra esse. La legge di composizione è definita in modo

ovvio e le identità saranno i funtori identici di cui si parla appena sotto.

Osservazione. Per completezza occorre aggiungere che se introduciamo la nozione di conglomerato di classi (analogo a quello che una classe è per gli insiemi) allora possiamo definire il concetto di *quasicategoria*² in modo analogo a quello di categoria, che consta di un conglomerato di oggetti e di un conglomerato di morfismi per ogni coppia di oggetti. In questo caso possiamo ottenere la quasicategoria delle categorie grandi (aventi classi di morfismi per ogni coppia di oggetti), oppure se definiamo una quasicategoria localmente piccola come una quasicategoria avente al massimo classi di morfismi per ogni coppia di oggetti (la sorella maggiore della nozione di categoria come la abbiamo data in questa dissertazione) possiamo definire la quasicategoria di tutte le categorie. (si vede come il concetto di quasicategoria è a sua volta estendibile, con una teoria degli insiemi adeguata)

Vediamo ora qualche esempio di funtore tra due categorie:

- Per ogni categoria \mathbf{C} è ovviamente possibile definire il funtore identità $id : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$ in modo ovvio.
- Date due categorie, \mathbf{C} e \mathbf{D} , preso un oggetto B di \mathbf{D} definiamo il funtore costante su B , $\Delta_B : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$ che manda ogni oggetto di \mathbf{C} in B e ogni freccia di \mathbf{C} in $id_B \in \mathbf{D}_1$.
- Un funtore concettualmente molto importante è il così detto 'forgetful functor' U che collega una categoria con oggetti aventi una qualche struttura, ad una categoria avente gli stessi oggetti privati di parte della loro struttura. Alcuni esempi sono $U : \mathbf{Abgr} \rightarrow \mathbf{Gr}$; $U : \mathbf{Gr} \rightarrow \mathbf{Set}$, e il lettore si convincerà facilmente che ne esistono molti altri.
- Consideriamo una categoria \mathbf{C} e un suo morfismo $f : A \rightarrow B$. Allora resterà definito un funtore $f^* : \mathbf{C}/A \rightarrow \mathbf{C}/B$ definito da $f^*(g) = f \circ g \quad \forall g \in (\mathbf{C}/A)_0$ e $f^*(h) = h \quad \forall h \in (\mathbf{C}/A)_1$. Per aiutare l'immaginazione si osservino i seguenti diagrammi commutativi che mostrano la buona posizione del funtore:



²Si veda [AHS04] a riguardo

Si noti che la costruzione stessa di categoria slice induce un funtore $C/(\sim) : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{Cat}$ che assegna ad ogni oggetto di \mathbf{C} la corrispondente categoria delle frecce su tale oggetto, e che assegna ad ogni morfismo f di \mathbf{C} il funtore f^* (si noti che una slice category è sempre piccola per costruzione). Preso infine il forgetful functor $U : \mathbf{Cat} \rightarrow \mathbf{Set}$ si definisce infine il funtore 'rappresentazione di Cayley' $U \circ C/(\sim) : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{Set}$ che ci 'rappresenta' ogni categoria \mathbf{C} in \mathbf{Set} . Questo mostra come ogni categoria abbia una sorta di controparte 'concreta' definita mediante la rappresentazione di Cayley.

- Il funtore abelianizzazione $\varphi : \mathbf{Gr} \rightarrow \mathbf{Abgr}$ che associa ad ogni gruppo G il suo abelianizzato definito mediante G/N (dove N è il derivato di G), e ad ogni omomorfismo di gruppi l'omomorfismo sul quoziente. Si verifica facilmente che la definizione di funtore è soddisfatta.
- Definiamo ora un funtore molto importante: il funtore rappresentazione (representable functor). Consideriamo a tal fine una categoria \mathbf{C} e prendiamo un suo oggetto A . Definiamo quindi il funtore

$$C(A, -) : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{Set}$$

come segue:

$$-\forall B \in C_0, \quad C(A, B) = C(A, B)$$

$$-\forall f : H \rightarrow K \in C_1, \quad C(A, f) \text{ è una funzione}$$

$$C(A, f) : C(A, H) \rightarrow C(A, K) \text{ che a } g \in C(A, H) \text{ associa}$$

$$(f \circ g) \in C(A, K); \text{ i.e. } C(A, f)(g) = f \circ g.$$

Si vedrà più avanti l'importanza di questo funtore.

Vediamo ora la seguente importante proposizione:

Proposizione. *I funtori covarianti preservano gli isomorfismi: in una categoria \mathbf{C} se f è un isomorfismo e g è il suo inverso, allora se $F : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$ è un funtore, Ff è un isomorfismo con inverso Fg . Inoltre, preservano gli inversi destri e sinistri.*

Dimostrazione. Supponiamo $f : A \rightarrow B$, allora riesce:

$$(Ff) \circ (Fg) = F(fg) = Fid_B = id_{FB}$$

Analogamente si dimostra che $(Fg)(Ff) = id_{FA}$

Supponiamo ora che g sia inverso destro di f , ovvero che $fg = id_B$ (se $f \in C(A, B)$). Allora si ha che $Ff \circ Fg = id_{FB}$ da cui Fg è inverso destro di Ff .

□

Questo fatto molto semplice ha conseguenze importanti. Per esempio, in topologia, spesso si associa ad ogni spazio topologico (puntato) il suo gruppo fondamentale, e questo si può vedere come un collegamento functoriale: dunque se due spazi topologici fossero omeomorfi allora un omeomorfismo indurrebbe tramite il funtore π_1 un isomorfismo di gruppi, e quindi i rispettivi gruppi fondamentali dovrebbero essere isomorfi e questo è un fatto che spesso può far capire se due spazi non siano omeomorfi in modo semplice. Per ora abbiamo parlato solo di funtori covarianti. Ebbene, esiste un altro tipo di funtore, che è in tutto e per tutto identico al precedente, con la differenza che manda morfismi in morfismi 'di verso opposto'. Vediamo dunque la definizione di funtore *contravariante*:

Definizione. Un **funtore contravariante** F dalla categoria \mathbf{C} alla categoria \mathbf{D} consiste di:

- Una mappa $C_0 \rightarrow D_0$. L'immagine di un elemento $A \in C_0$ in \mathbf{D} si scriverà $F(A) \circ FA$.
- Per ogni coppia $A, B \in C_0$ una mappa $C(A, B) \rightarrow D(FB, FA)$. L'immagine di $f \in C(A, B)$ in $D(FB, FA)$ si scriverà $F(f) \circ Ff$. Devono inoltre valere

$$(1) \quad \forall f \in C(A, B), \forall g \in C(B, C) \text{ vale } F(gf) = (Ff) \circ (Fg)$$

$$(2) \quad \forall A \in C_0, \quad F(1_A) = 1_{FA}$$

Facciamo subito una importante ed ovvia osservazione. Date due categorie \mathbf{C} e \mathbf{D} si ha che un funtore contravariante

$$F : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$$

è uguale al funtore covariante

$$F : \mathbf{C}^{op} \rightarrow \mathbf{D}$$

Dunque ogni funtore controvariante può essere visto come un funtore covariante avente come dominio la categoria duale del dominio del funtore contravariante. Questo fatto è molto utile, come vedremo nel seguente importante esempio:

- Vogliamo definire il funtore controvariante di rappresentazione. Data una categoria \mathbf{C} e un suo oggetto A , definiamo il seguente funtore controvariante

$$C(-, A) : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{Set}$$

come segue:

$$-\forall B \in C_0, \quad C(B, A) = C(B, A)$$

$$-\forall f : H \rightarrow K \in C_1, \quad C(f, A) \text{ è una funzione}$$

$C(f, A) : C(K, A) \rightarrow C(H, A)$ che a $g \in C(K, A)$ associa $(g \circ f) \in C(H, A)$; i.e. $C(f, A)(g) = g \circ f$.

Questo importante funtore si indica anche con h_A .

Si noti che questo è un funtore covariante $\mathbf{C}^{op} \rightarrow \mathbf{Set}$, e quindi avremmo potuto definirlo semplicemente a partire dal funtore rappresentabile, imponendo $h_A = C(A, -) \circ (-)^{op}$, ed evitando una definizione costruttiva.

Vedremo più avanti altri esempi di funtori contravarianti.

Ora ci interessiamo di descrivere come possano essere fatti dei 'morfismi tra funtori'.

1.2.2 Trasformazioni naturali

Quando si studia la topologia, ci si concentra su spazi topologici e su funzioni continue tra di essi. In seguito poi si introduce il concetto di omotopia per passare da una funzione continua all'altra in modo 'naturale'. Se pensiamo in termini di categorie e funtori possiamo sperare di poter fare lo stesso, ovvero di trovare un collegamento tra due funtori aventi lo stesso dominio e codominio. Questo fortunatamente si può fare:

Definizione. Siano dati due funtori $F, G : \mathbf{C} \Rightarrow \mathbf{D}$. Una trasformazione naturale

$$\eta : F \Longrightarrow G$$

è una classe di morfismi $\{\eta_A : FA \rightarrow GA \mid A \in C_0\}$ in D_1 tali che $\forall f \in C_1$, $f : A \rightarrow B$ valga $\eta_B \circ Ff = Gf \circ \eta_A$; ovvero sia commutativo il diagramma seguente:

$$\begin{array}{ccc} FA & \xrightarrow{\eta_A} & GA \\ Ff \downarrow & & \downarrow Gf \\ FB & \xrightarrow{\eta_B} & GB \end{array}$$

Osservazione. La definizione di trasformazione naturale può essere estesa al caso di due funtori contravarianti. In tal caso, se F e G sono due funtori contravarianti, la definizione si da analogamente chiedendo, con la stessa nomenclatura, la commutatività del diagramma seguente:

$$\begin{array}{ccc} FA & \xrightarrow{\eta_A} & GA \\ Ff \uparrow & & \uparrow Gf \\ FB & \xrightarrow{\eta_B} & GB \end{array}$$

Notiamo che una trasformazione naturale può essere pensata in modo suggestivo come 'superficie laterale' di un cilindro nella categoria codominio dei due funtori fra cui agisce la trasformazione naturale: le 'basi' di tale cilindro saranno le due immagini del dominio dei funtori. Se uno dei due

funtori è il funtore costante, allora questo 'cilindro' diventa un 'cono' e questo ispirerà la nozione di cono (che è prematuro anticipare qui) in teoria delle categorie, che vedremo in seguito e sulla quale si costruirà la nozione di limite, fondamentale in questa dissertazione.

Prima di dare degli esempi di trasformazioni naturali, vediamo come sia possibile comporre fra di loro due o più trasformazioni naturali

Lemma. *Siano \mathbf{C} e \mathbf{D} due categorie, F, G, H tre funtori tra di esse e $\eta : F \Rightarrow G$ $\alpha : G \Rightarrow H$ due trasformazioni naturali tra di essi Allora $\alpha \circ \eta = \{(\alpha \circ \eta)_A := \alpha_A \circ \eta_A | A \in C_0\}$ è una trasformazione naturale $F \Rightarrow H$.*

Dimostrazione. Basta osservare che il seguente diagramma commuta:

$$\begin{array}{ccccc} FA & \xrightarrow{\eta_A} & GA & \xrightarrow{\alpha_A} & HA \\ Ff \downarrow & & \downarrow Gf & & \downarrow Hf \\ FB & \xrightarrow{\eta_B} & GB & \xrightarrow{\alpha_B} & HB \end{array}$$

□

Vediamo ora un altro tipo di composizione di trasformazioni naturali:

Proposizione. *Supponiamo di essere nella seguente situazione:*

$$\mathbf{C} \begin{array}{c} \xrightarrow{F} \\ \Downarrow \alpha \\ \xrightarrow{G} \end{array} \mathbf{D} \begin{array}{c} \xrightarrow{H} \\ \Downarrow \eta \\ \xrightarrow{K} \end{array} \mathbf{E}$$

in cui \mathbf{C} \mathbf{D} \mathbf{E} sono categorie, F, G, H, K sono funtori e α, η trasformazioni naturali. Allora la seguente uguaglianza:

$$(\eta * \alpha)_A = \eta_{GA} \circ H(\alpha_A) = K(\alpha_A) \circ \eta_{FA}$$

per ogni $A \in C_0$ definisce una trasformazione naturale

$$\eta * \alpha : H \circ F \Rightarrow K \circ G$$

Tale trasformazione naturale è anche chiamata 'prodotto di Godement' di α e η (in onore del famoso matematico francese)

Dimostrazione. $(\eta * \alpha)_A$ è definita dal seguente diagramma, commutativo per la naturalità di η :

$$\begin{array}{ccc} HFA & \xrightarrow{H(\alpha_A)} & HGA \\ \eta_{FA} \downarrow & & \downarrow \eta_{FA} \\ KFA & \xrightarrow{K(\alpha_A)} & KGA \end{array}$$

Se riusciamo a mostrare che nel diagramma seguente commuta il rettangolo esterno $\forall f : A \longrightarrow B, f \in C_0$, avremo dimostrato la proposizione

$$\begin{array}{ccccc}
 HFA & \xrightarrow{H(\alpha_A)} & HGA & \xrightarrow{\eta_{GA}} & KGA \\
 HFf \downarrow & & \downarrow HGf & & \downarrow KGf \\
 HFB & \xrightarrow{H(\alpha_B)} & HGB & \xrightarrow{\eta_{GB}} & KGB
 \end{array}$$

come si vede, il diagramma esterno commuta in quanto il quadrato di sinistra commuta perché H è un funtore e perché α è una trasformazione naturale, mentre il quadrato di destra commuta per la naturalità di η (in quanto $\eta : H \Rightarrow K$) e dunque commuterà anche il rettangolo esterno. \square

Avendo noi ora fatto vedere che due trasformazioni naturali sono componibili, date due categorie \mathbf{C} \mathbf{D} , con \mathbf{C} categoria piccola, definiamo la categoria dei funtori $\mathbf{Fun}(\mathbf{C}, \mathbf{D})$ come la categoria avente come oggetti i funtori fra \mathbf{C} e \mathbf{D} e come morfismi le trasformazioni naturali tra essi. Ciò che abbiamo visto sulla composizione di due trasformazioni naturali e il fatto che \mathbf{C} sia piccola mostrano come questa definizione sia ben posta (useremo questa nuova categoria molto presto).

Vediamo ora alcuni esempi di trasformazioni naturali:

- Osserviamo subito che esiste sempre per ogni funtore F una 'trasformazione naturale identica' $id : F \Rightarrow F$ garantita dall'esistenza del morfismo identità per ogni elemento della categoria codominio di F . Queste trasformazioni naturali sono le identità della summenzionata $\mathbf{Fun}(\mathbf{C}, \mathbf{D})$.
- Date due categorie \mathbf{C} e \mathbf{D} , per ogni morfismo $f : B \longrightarrow C$ in \mathbf{D}_1 definiamo la trasformazione naturale costante su f , $\Delta_f : \Delta_B \Rightarrow \Delta_C$ definita da $(\Delta_f)_A = f \quad \forall A \in C_0$.
- Sia $i : \mathbf{Abgr} \longrightarrow \mathbf{Gr}$ il funtore inclusione e sia $\varphi : \mathbf{Gr} \longrightarrow \mathbf{Abgr}$ il funtore di abelianizzazione. Allora sono definite due trasformazioni naturali $\alpha : \varphi i \Rightarrow id_{\mathbf{Abgr}}$ e $\eta : id_{\mathbf{Gr}} \Rightarrow i\varphi$ dove le componenti η_G di η sono definite dal morfismo proiezione di un gruppo nel suo abelianizzato, mentre le componenti di α sono isomorfismi di gruppi abeliani.
- Siano A e B due preordini, visti come categorie. Allora un funtore fra di essi è una funzione monotona e presi due funtori F e G esisterà una trasformazione naturale se e solo se $F(x) \leq G(x) \quad \forall x \in A$.
- Un esempio molto importante è il seguente. Sia \mathbf{C} una categoria e siano h_A e h_B due funtori di rappresentazione controvarianti (descritti sopra). Allora una $g : A \longrightarrow B, g \in C_1$ definisce per composizione una trasformazione naturale $h_g : h_A \Rightarrow h_B$. Infatti se si pone $(h_g)_H(l) :=$

$g \circ l$, $\forall H \in C_0$ dove $l \in C(H, A)$, $g \circ l \in C(H, B)$, $\forall f : H \rightarrow K$, $H, K \in C_0$, $f \in C_1$ il seguente diagramma commuta

$$\begin{array}{ccc} C(H, A) & \xrightarrow{(h_g)_H} & C(H, B) \\ h_A(f) \uparrow & & \uparrow h_B(f) \\ C(K, A) & \xrightarrow{(h_g)_K} & C(K, B) \end{array}$$

Quindi, se C è piccola possiamo definire un funtore covariante

$$Y := h_{(-)} : C \rightarrow \text{Set}^{\text{Cop}}$$

dove $\text{Set}^{\text{Cop}} = \mathbf{Fun}(C^{\text{op}}, \mathbf{Set})$ (che è ben posto perchè C è piccola). Tale funtore è detto in letteratura 'immersione di Yoneda' (*Yoneda embedding*).

A questo funtore (di cui esiste una versione contravariante, come si può immaginare) è associato un lemma molto importante, di cui daremo ora una versione semplificata:

Teorema. (Lemma di Yoneda) $\forall F \in \text{Set}^{\text{Cop}}$, $\forall A \in C_0$ esiste una biezione

$$f_{A,F} : (h_A, F) \rightarrow F(A).$$

Dimostrazione. $\forall B \in C_0$, $\forall l \in C(B, A)$ vale:

$$l = id_A \circ l = h_A(l)(id_A)$$

Quindi, presa $\eta = \{\eta_B; B \in C_0\}$, $\eta : h_A \Rightarrow F$, si ha che

$$\eta_B(l) = F(l)(\eta_A(id_A))$$

e questo perchè se $h_A \Rightarrow F$, $h_A(l) \rightarrow F(l)$ e $id_A \rightarrow \eta_A(id_A)$.

Quindi η è completamente determinato da $\eta_A(id_A) \in F(A)$ e viceversa ogni elemento di $F(A)$ determina una $\eta : h_A \Rightarrow F$. Questo prova completamente che $f_{A,F}$ è una biezione.

□

Concludiamo dando due definizioni:

Definizione. Un isomorfismo naturale fra due funtori è una trasformazione naturale che ammette inversa (ovvero è composta solo da iso).

Definizione. Una equivalenza naturale tra due categorie C e D è una coppia di funtori covarianti $F : C \rightarrow D$, $G : D \rightarrow C$ tali per cui FG sia naturalmente isomorfo al funtore id_C e GF sia naturalmente isomorfo al funtore id_D .

Oltre si darà una definizione equivalente della nozione di equivalenza appena riportata. Inoltre si vedrà in che modo questo concetto sia significativo.

1.2.3 Funtori pieni e fedeli. Sottocategorie

Definizione. Consideriamo un funtore $F : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$ e per ogni coppia di oggetti (A, B) , $A, B \in C_0$ la funzione

$$\varphi : C(A, B) \longrightarrow D(FA, FB), \quad \varphi(f) = Ff$$

Allora:

- F si dirà fedele (faithful) se le φ sono iniettive $\forall A, B$
- F si dirà pieno (full) se le φ sono suriettive $\forall A, B$
- F si dirà pieno e fedele (full and faithful) se le φ sono biezioni $\forall A, B$
- F si dirà isomorfismo di categorie se oltre ad esser pieno e fedele, induce una biezione tra C_0 e D_0

Osservazione. Si noti che la nozione di isomorfismo di categorie qui data ha come caso particolare quello di isomorfismo in **Cat**

Grazie a quanto abbiamo visto nella sezione precedente riesce facilmente il seguente importante esempio:

Proposizione. *Il funtore immersione di Yoneda $Y : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{Set}^{\mathbf{C}^{\text{op}}}$ è pieno e fedele.*

Dimostrazione. Questo fatto segue facilmente dal lemma di Yoneda in quanto

$$C(B, A) = h_A(B) \cong \mathbf{Set}^{\mathbf{C}^{\text{op}}}(h_A, h_B)$$

□

Definizione. Data una categoria \mathbf{C} , una sottocategoria \mathbf{K} di \mathbf{C} consta di:

- Una sottoclasse $K_0 \subseteq C_0$ di oggetti,
- Per ogni coppia di oggetti A, B di \mathbf{K} , un sottoinsieme $K(A, B) \subseteq C(A, B)$ tali che:

$$(1) \text{ Se } e, g \in K(B, D) \text{ e } f \in K(A, B) \text{ allora } g \circ f \in K(A, D)$$

$$(2) \forall A \in K_0, \quad 1_A \in K(A, A)$$

Osservazione. Una sottocategoria definisce in modo ovvio un funtore inclusione (banalmente fedele) $i : \mathbf{K} \rightarrow \mathbf{C}$.

Definizione. Quando il suddetto funtore inclusione è anche pieno, allora la sottocategoria \mathbf{K} si dirà *sottocategoria piena*

Esempi:

- La categoria degli insiemi e delle funzioni 1-1 tra di essi è una sottocategoria (non piena) di **Set**.
- La categoria degli insiemi finiti e delle funzioni tra essi è una sottocategoria piena di **Set**.

Vediamo ora come catturare mediante la nozione di sottocategoria la 'struttura' di una categoria senza ricorrere ad una nozione forte come quella di isomorfismo di categorie. Cominciamo con una definizione di isomorfismo tra categorie più debole:

Definizione. Un funtore $F : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$ si dice *equivalenza* se è pieno e fedele e se per ogni oggetto $B \in D_0$ esiste un oggetto $A \in C_0$ tale che esista un isomorfismo in \mathbf{D} tra $F(A)$ e B (in questo ultimo caso F si dirà *denso* per isomorfismi). Due categorie si dicono *equivalenti* se esiste una equivalenza fra esse.

Si noterà che abbiamo già definito un concetto di equivalenza tra categorie nella sottosezione precedente. Vogliamo far vedere che questa definizione equivalente alla precedente; per farlo dimostreremo due proposizioni che oltretutto approfondiranno la definizione appena data.

Cominciamo con:

Proposizione. Dato un funtore $F : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$, se esso individua uno dei due funtori coinvolti nell'equivalenza naturale (i.e. se esiste G tale per cui $GF \cong id_{\mathbf{C}}$, con quindi \mathbf{C} e \mathbf{D} naturalmente equivalenti), allora esso è pieno, fedele e denso per isomorfismi (i.e. è una equivalenza).

Dimostrazione. Consideriamo $G : \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{C}$ e siano

$$\alpha : id_{\mathbf{C}} \iff GF$$

$$\eta : id_{\mathbf{D}} \iff FG$$

isomorfismi naturali.

Allora per ogni $A \in C_0$ si ha $\alpha_A : A \rightarrow GF(A)$, $\alpha_A \in C_1$ isomorfismo; quindi $\forall f \in C(A, B)$ commuta il seguente: (Δ)

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ \alpha_A \downarrow & & \downarrow \alpha_B \\ GF(A) & \xrightarrow{GF(f)} & GF(B) \end{array}$$

Allora se $F(f) = F(f')$, $f' \in C_1$, riesce $GF(f) = GF(f')$ e quindi $f = f'$, da cui segue la fedeltà di F . Per simmetria, si nota che anche G è fedele.

A questo punto, per ogni $h : F(A) \rightarrow F(B), h \in D_1$, consideriamo il diagramma seguente:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ \alpha_A \downarrow & & \downarrow \alpha_B \\ GF(A) & \xrightarrow{G(h)} & GF(B) \end{array}$$

con $f = (\alpha_B)^{-1} \circ G(h) \circ \alpha_A, f \in C_1$. Allora poichè F è un funtore abbiamo $F(f) : F(A) \rightarrow F(B)$ e per il diagramma (Δ) $GF(f) = G(h)$.

Dal momento che G è fedele, riesce che $F(f) = h$ e quindi F è pieno.

Infine, per ogni $E \in D_0$, dato che $\eta : id_{\mathbf{D}} \iff FG$, per la definizione di isomorfismo naturale esisterà $\eta_E : E \rightarrow FG(E)$ isomorfismo con $G(E) \in C_0$.

□

Come conseguenza abbiamo che se due categorie sono naturalmente equivalenti, allora sono equivalenti.

Vediamo ora una proposizione che ci garantisce anche il viceversa (punto (b)), e che ci mostra inoltre come il concetto di equivalenza ci induca una relazione di equivalenza sul conglomerato di tutte le categorie o semplicemente in *Cat*.

Proposizione. (a) Se $F : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$ è una equivalenza, allora esiste $G : \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{C}$ che è pure una equivalenza.

(b) \mathbf{C} e \mathbf{D} sono naturalmente equivalenti.

(c) se $F : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$ e $H : \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{K}$ sono equivalenze, allora $F \circ H$ è pure una equivalenza.

Dimostrazione. -(a-b): Per ogni $B \in D_0$ esisterà $C_B \in C_0$ tale che (F è denso per isomorfismi) esista $\alpha_B : F(C_B) \rightarrow B$ isomorfismo in \mathbf{D} . Preso ora $g : B \rightarrow E, g \in D_1, B, E \in D_0$, dal momento che F è pieno e fedele, esisterà un unico $C_g : C_B \rightarrow C_E, C_g \in C_1$ tale che, indicato $F(C_g) = \alpha_E^{-1} \circ g \circ \alpha_B : F(C_B) \rightarrow F(C_E)$ ci sia un unico diagramma commutativo (Δ) :

$$\begin{array}{ccc} F(C_B) & \xrightarrow{F(C_g)} & F(C_E) \\ \alpha_B \downarrow & & \downarrow \alpha_E \\ B & \xrightarrow{g} & E \end{array}$$

Definiamo ora $G : \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{C}, G(B) = C_B, G(g) = C_g$, vediamo che è un funtore:

G preserva le identità a causa dell'unicità del diagramma precedente, dove

si può porre g =identità di un oggetto. Inoltre il fatto che G preservi la composizione si vede, dati $B, E, O \in D_0, g \in D(B, E), h \in D(E, O)$ dal seguente diagramma commutativo:

$$\begin{array}{ccccc} FG(B) & \xrightarrow{FG(g)} & FG(E) & \xrightarrow{FG(h)} & FG(O) \\ \alpha_B \downarrow & & \downarrow \alpha_E & & \alpha_O \downarrow \\ B & \xrightarrow{g} & E & \xrightarrow{h} & O \end{array}$$

Quindi G è un funtore.

G è pieno perchè per ogni $f \in C_1, f : G(B) \rightarrow G(E)$, il morfismo $g = \alpha_E \circ Ff \circ \alpha_B^{-1} : B \rightarrow E$ è tale che $g \circ \alpha_B = \alpha_E \circ Ff$ e questo implica, per l'unicità del diagramma (Δ) , che $f = G(g)$.

G è fedele in quanto dati $g_1, g_2 \in D(B, E)$, con $G(g_1) = G(g_2) = f$, usando il diagramma (Δ) si ha che

$$g_1 = \alpha_E \circ FG(g_1) \circ \alpha_B^{-1} = \alpha_E \circ Ff \circ \alpha_B^{-1} = \alpha_E \circ FG(g_2) \circ \alpha_B^{-1} = g_2$$

G è denso per isomorfismi perchè, per ogni A oggetto di \mathcal{C} , l'isomorfismo $\alpha_{FA} \in D_1, \alpha_{FA} : FG(FA) \rightarrow FA$ è l'immagine di qualche isomorfismo $l \in C_1, l : GFA \rightarrow A$ in quanto F e G sono funtori pieni e fedeli. Infine quanto appena detto mi fa definire $\eta : FG \iff id_D$ con $\eta_A = l$ costruita come appena sopra. Quindi per simmetria risulta evidente che grazie a questa G , le categorie \mathcal{C} e \mathcal{D} risultano naturalmente equivalenti.

-(c): Dato che la composizione di due funtori pieni e fedeli è anche essa piena e fedele, ci resta da far vedere che HF è denso per isomorfismi. Poichè H è denso per isomorfismi, $\forall A \in K_0, \exists B \in D_0$ tale che $\exists f : H(B) \rightarrow A$ isomorfismo.

Inoltre, dalla densità per isomorfismi di F scende che $\exists E \in C_0$ tale che $\exists g : F(E) \rightarrow B$ isomorfismo.

Quindi $f \circ H(g) : (H \circ F)(E) \rightarrow A$ è un isomorfismo e dunque HF è denso per isomorfismi.

□

D'ora in poi si confonderanno quindi i termini categorie equivalenti e categorie naturalmente equivalenti. Diamo ora l'interessante

Definizione. Uno *scheletro* di una categoria \mathcal{C} è una sottocategoria $S_{\mathcal{C}}$ tale che il morfismo di inclusione da essa definita sia anche una equivalenza (i.e. una sottocategoria equivalente alla categoria stessa) e tale che non esistano due oggetti isomorfi in $S_{\mathcal{C}}$

Esempi:

- La sottocategoria dei numeri cardinali è uno scheletro di **Set**
- La sottocategoria degli \mathbb{R}^n con n numero cardinale è uno scheletro di $\mathbf{Vect}_{\mathbb{R}}$
- Se X è uno spazio topologico connesso per archi, allora preso un qualsiasi $x \in X$, si ha che $\pi_1(X, x)$ è uno scheletro del gruppoide fondamentale di X , denotato con $\Pi(X)$.

Dimostriamo quindi la seguente

Proposizione. (a) *Ogni categoria ha uno scheletro.*

(b) *Tutti gli scheletri di una categoria sono isomorfi.*

Dimostrazione. -(a): Questa è una ovvia conseguenza dell'assioma della scelta applicato sulla relazione di equivalenza di isomorfismo all'interno della classe degli oggetti della categoria di cui si vuole lo scheletro.

-(b): Siano S_C e S'_C due scheletri di una categoria \mathbf{C} . Allora ogni $A \in (S_C)_0$ è isomorfo in \mathbf{C} ad un $B \in (S'_C)_0$, e questo per la densità per isomorfismi del funtore di inclusione di uno dei due scheletri (si ha infatti $\forall B \in (S'_C)_0$, B in particolare appartiene a C_0 , quindi $\exists A \in (S_C)_0$ per cui c'è $id_{(S_C)_0}(A) \rightarrow B$ isomorfismo, ma $id_{(S_C)_0}(A) = A$ e quindi ho l'isomorfismo cercato). Per ogni $A \in (S_C)_0$ consideriamo quindi l'isomorfismo $f_A : A \rightarrow B$. Allora resta definito il funtore $F : S_C \rightarrow S'_C$ come segue:

$$\forall h \in C(A, K), \quad F(h) = f_K \circ h \circ f_A^{-1}$$

$$F(A) = B$$

F così definito è quindi un iso e dunque $S_C \cong S'_C$

□

Abbiamo quindi il seguente importante risultato:

Corollario. *Due categorie sono equivalenti se e soltanto se i loro rispettivi scheletri sono isomorfi.*

La dimostrazione segue subito dalla proposizione precedente.

Ricapitolando, se ammettiamo una relazione più debole dell'isomorfismo tra due categorie (l'equivalenza) vediamo che possiamo mettere in relazione più categorie studiandone soltanto quella che in qualche modo è la parte che contiene le 'informazioni più importanti della categoria'; ovvero studiandone soltanto lo scheletro. Questo ci mostra come sia possibile individuare strutture comuni a più categorie senza fare uso di morfismi eccessivamente forti quali i funtori iso.

1.3 Monomorfismi, epimorfismi, isomorfismi

In questo paragrafo studieremo particolari tipi di morfismi.

Definizione. Consideriamo una categoria \mathcal{C} . Allora, preso $f : A \rightarrow B$ in \mathcal{C} , si dirà che f è un monomorfismo se, $\forall h, g \in C(E, A)$ vale che

$$f \circ g = f \circ h \implies g = h$$

In un linguaggio meno formale, laddove non si generino ambiguità, i monomorfismi si dicono anche mono.

Queste particolari frecce godono delle seguenti proprietà:

Proposizione. *Valgono:*

- (1) *Tutte le identità sono monomorfismi.*
- (2) *Se f, g sono componibili ed entrambi monomorfismi, allora $f \circ g$ è un monomorfismo.*
- (3) *Se $f \circ g$ è un monomorfismo, allora g è un monomorfismo.*

Dimostrazione. 1) Ciò è ovvio in quanto $1_B \circ f = 1_B \circ g \iff f = g$.
 2) Siano $g : A \rightarrow B$ e $f : B \rightarrow C$ due monomorfismi, e siano $h, l \in C(E, A)$. Allora riesce $f \circ g \circ h = f \circ g \circ l \implies g \circ h = g \circ l \implies h = l$ (dove si è usato prima il fatto che f è un mono, e poi che anche g lo è).

3) Nelle notazioni precedenti, supponiamo che $f \circ g$ sia un monomorfismo e consideriamo $h, l \in C(E, A)$. Allora si ha che $g \circ h = g \circ l \implies f \circ g \circ h = f \circ g \circ l \implies$ (poichè $f \circ g$ mono) $h = l$. Quindi g è un monomorfismo.

□

Diamo adesso una definizione utile e significativa:

Definizione. Siano $f : A \rightarrow B$ e $g : B \rightarrow A$ morfismi tale che $g \circ f = id_A$. Allora f si dirà sezione di g e quest'ultima si dirà retratto di f . Inoltre A si dirà retratto di B .

Si ha che

Proposizione. *Ogni sezione è un monomorfismo*

Dimostrazione. Infatti se $g \circ f = id_A$, sappiamo dalla proposizione precedente che id_A è un mono (parte 1), e quindi anche $g \circ f$ lo è e dunque per il punto 3 della proposizione precedente, f è un mono. □

Vediamo ora come agiscono i funtori sui monomorfismi:

Definizione. Sia $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ un funtore. Allora si dirà che:

- F preserva i monomorfismi se dato $f \in C_1$ mono vale che Ff è un mono.
- F riflette i monomorfismi se vale che, dato Ff monomorfismo, allora ne segue che f è un mono.

Proposizione. *Un funtore fedele riflette i monomorfismi.*

Dimostrazione. Sia $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ un funtore fedele e sia $f \in C(A, B)$. Supponiamo che Ff sia un monomorfismo. Allora, presi $h, l \in C(E, A)$ vale che:

$$f \circ h = f \circ l \implies (F \text{ funtore}) Ff \circ Fh = Ff \circ Fl \implies (Ff \text{ mono}) Fh = Fl \implies (F \text{ fedele}) h = l.$$

Quindi f è un monomorfismo. □

Diamo qualche esempio di monomorfismo:

- In **Set** i monomorfismi sono tutte e sole le funzioni iniettive. Dimostriamolo:

Preso un insieme A possiamo associare ad ogni $a \in A$ una funzione $a' : \{\star\} \longrightarrow A$ che manda il singoletto in a . Preso dunque un monomorfismo $f : A \longrightarrow B$, dire $f(a) = f(b)$ equivale a $f \circ a' = f \circ b'$ da cui, poichè f è un mono si ha che $a' = b'$ e dunque $a = b$. Quindi se f è un mono, allora è 1-1.

Viceversa consideriamo $f : A \longrightarrow B$ iniettiva e siano $h, l \in C(E, A)$. Allora

$$f \circ h = f \circ l \implies \forall c \in E \ f(h(c)) = f(l(c)) \implies (f \text{ è 1-1}) h(c) = l(c) \forall c \in E, \text{ da cui segue dunque che } h = l \text{ e che quindi } f \text{ è un monomorfismo.}$$

- in modo del tutto analogo si può osservare che in **Gr**, **Abgr**, **Rng** e altre simili, i monomorfismi sono esattamente i morfismi 1-1. Ma ciò in generale non è vero in tutte le categorie, come si evince dal controesempio seguente.
- Consideriamo la categoria degli spazi topologici puntati e connessi. Sia $(S^1, 1)$ un suo elemento e consideriamo l'applicazione continua $f : (\mathbb{R}, 0) \longrightarrow (S^1, 1)$, $f(\vartheta) = e^{i\vartheta}$ che evidentemente non è iniettiva. Vogliamo far vedere che è un monomorfismo. A tal fine consideriamo due funzioni continue $l, h : (X, a) \longrightarrow (\mathbb{R}, 0)$ tali che $f \circ h = f \circ l$. Allora per il teorema di unicità del sollevamento, si ha che $h = l$ e quindi che f è un monomorfismo.

Dualizziamo ora la definizione del concetto duale a quello di monomorfismo.

Definizione. Consideriamo una categoria \mathbf{C} . Allora, preso $f : A \rightarrow B$ in \mathbf{C} , si dirà che f è un epimorfismo se, $\forall h, l \in C(B, E)$ vale che

$$h \circ f = l \circ f \implies l = h$$

Anche in questo caso per ragioni linguistiche, in modo meno formale si chiameranno talvolta gli epimorfismi semplicemente epi. Si ha la seguente

Proposizione. (1) *Tutte le identità sono epimorfismi.*

(2) *Se f, g sono componibili ed entrambi epimorfismi, allora $f \circ g$ è un epimorfismo.*

(3) *Se $f \circ g$ è un epimorfismo, allora f è un epimorfismo.*

(4) *Ogni retratto è un epimorfismo.*

(5) *Ogni funtore fedele riflette gli epimorfismi.*

Dimostrazione. Le asserzioni da (1) a (4) scendono direttamente dal fatto che i mono sono gli epi in \mathbf{C}^{op} .

La quinta si con un analogo ragionamento dal fatto che $F : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$ è fedele se e soltanto se è fedele $F^{op} : \mathbf{C}^{op} \rightarrow \mathbf{D}^{op}$

□

Vediamo ora qualche esempio di epimorfismo:

- In **Set**, gli epimorfismi sono tutte e sole le funzioni suriettive. Dimostriamolo:

Sia $f : A \rightarrow B$ un epimorfismo in **Set**. Allora consideriamo un insieme costituito da due elementi, $\{\bullet, *\}$ e due funzioni $l, h \in \text{Set}(B, \{\bullet, *\})$ tali che:

$$\begin{aligned} l(b) &= * \text{ se } b \in f(A) \\ l(b) &= \bullet \text{ se } b \notin f(A) \\ h(b) &= * \quad \forall b \in f(A) \end{aligned}$$

Allora per la definizione data $l \circ f = h \circ f$ è la funzione costante su $*$; ma f è un epi, per cui $l = h$ e dunque $f(A) = B$. Questo prova la suriettività.

Consideriamo viceversa $f : A \rightarrow B$ suriettiva. Allora consideriamo $l, h \in \text{Set}(B, C)$ tali che $l \circ f = h \circ f \quad \forall b \in B$. Dunque, poiché f è suriettiva, si può trovare per ogni elemento b di B un $a \in A$ tale che $f(a) = b$. Quindi riesce

$l(b) = l \circ f(a) = h \circ f(a) = h(b), \quad \forall b \in B$, da cui scende che $h = l$ e che quindi f è un epimorfismo.

- In modo analogo in \mathbf{Gr} e \mathbf{Pos} gli epimorfismi sono tutti e soli i morfismi suriettivi.

Diamo anche in questo caso un esempio di epimorfismo non suriettivo (in una categoria dove i morfismi sono particolari funzioni ovviamente, altrimenti la nozione di suriettività sarebbe vuota).

- Nella categoria dei monoidi, consideriamo il morfismo di inclusione $i : \mathbb{N} \hookrightarrow \mathbb{Z}$. Questo morfismo è banalmente non suriettivo, vogliamo vedere che è però un epimorfismo. A tal fine consideriamo $l, h \in \text{Mon}(\mathbb{Z}, M)$. Allora se $l \neq h$ esiste almeno un n intero tale per cui $l(n) \neq h(n)$ da cui segue che $l(-n) \neq h(-n)$. Ma almeno uno tra $-n$ e n deve essere un naturale, e quindi appartenere a $i(\mathbb{N})$. Ne segue che $li \neq hi$. Quindi per logica elementare si ha che $l \circ i = h \circ i \implies l = h$ e quindi i è un epimorfismo.

Terminiamo ora il paragrafo studiando i già definiti isomorfismi. Si ha la seguente

Proposizione. (1) *Tutte le identità sono isomorfismi.*

(2) *Se f, g sono componibili ed entrambi isomorfismi, allora $f \circ g$ è un isomorfismo.*

(3) *Un isomorfismo è anche un monomorfismo e un epimorfismo*

(4) *I funtori preservano gli isomorfismi.*

(5) *Ogni funtore pieno e fedele riflette gli isomorfismi.*

Dimostrazione. I primi due punti sono ovvi in quanto le identità sono inverse di se stesse e se f, g isomorfismo componibili, allora banalmente $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$. Il quarto punto è stato dimostrato in precedenza. Vediamo gli altri due:

(3) Sia $f : A \rightarrow B$ morfismo e $g : B \rightarrow A$ una sua inversa. Allora si ha che $g \circ f = id_A$ da cui f è un mono, e $f \circ g = id_B$ da cui f è un epi. Il risultato a cui si giunge può essere schematizzato nel seguente diagramma commutativo:

$$\begin{array}{ccccc}
 E & \xrightarrow{s} & A & \xrightarrow{f} & B \\
 & \xrightarrow{l} & & \searrow & \downarrow g \\
 & & & id_A & A \xrightarrow{h} D \\
 & & & & \xrightarrow{k}
 \end{array}$$

(5) Sia $F : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$ un funtore pieno e fedele. Supponiamo che Ff sia un isomorfismo, allora esiste $h \in D_1$ inverso di Ff . Ma F è un funtore pieno, dunque esiste $g \in C_1$ tale che $h = Fg$. Si ha poi che $F(fg) = Ff \circ Fg = id_{FB}$ se $f \in C(A, B)$. Inoltre si ha che $F(id_B) = id_{FB} = F(fg)$ e quindi, poichè F è fedele, $f \circ g = id_B$. In modo analogo si prova che $g \circ f = id_A$ e questo conclude la dimostrazione.

□

Così terminiamo la parte riguardante i tipi particolari di morfismi. Affrontiamo ora la definizione dei primi 'oggetti universali' unici a meno di isomorfismi.

1.4 Oggetti terminali ed iniziali

Definizione. Consideriamo una categoria \mathcal{C} ed un suo oggetto A . A si dirà oggetto iniziale se, per ogni oggetto $B \in \mathcal{C}_1$ esiste un unico morfismo $f : A \rightarrow B$. Dualmente, A si dirà oggetto terminale se $\forall B \in \mathcal{C}_1 \exists ! f : B \rightarrow A$. A si dirà infine oggetto zero se è sia iniziale che terminale.

Proposizione. *Se A e A' sono due oggetti iniziali, allora sono isomorfi.*

Dimostrazione. Dato che A e A' sono iniziali, esisteranno unici $f : A \rightarrow A'$ e $g : A' \rightarrow A$ tali che $gf : A \rightarrow A$. Ma si ha per la definizione di categoria che $id_A : A \rightarrow A$, pertanto, per la condizione di unicità legata al fatto che A è iniziale, deve essere $gf = id_A$. In modo analogo si trae che $fg = id_{A'}$ e quindi f è un isomorfismo da cui scende che A e A' sono isomorfi.

□

Per il principio di dualità si avrà che anche gli oggetti terminali sono unici a meno di isomorfismi, e così sarà anche per gli oggetti zero. Per questo motivo, spesso si parlerà dell' oggetto iniziale di una categoria (e lo si denoterà con $\mathbf{0}$) o dell' oggetto terminale di una categoria (e lo si denoterà con $\mathbf{1}$). Vediamo brevemente qualche esempio:

- In **Set** l'insieme vuoto è l'oggetto iniziale e il singoletto quello terminale.
- In **Gr** l'elemento neutro è un oggetto zero.
- In **Rng**, \mathbb{Z} è l'oggetto iniziale (per il morfismo fondamentale).

Oggetti terminali ed iniziali sono il primo esempio di costruzioni generali che vogliamo studiare in questo elaborato e che ricadono sotto la definizione generale di limite (e colimite), che sarà il punto di arrivo della dissertazione. Cominciamo quindi a studiare questi oggetti.

Capitolo 2

Limiti e Colimiti

In questo capitolo si studia il soggetto vero e proprio di questo elaborato. I contenuti qui riportati sono stati tratti principalmente da [Bor94] ed in secondo luogo da [Awo10] [MacL97], [Oo02], [AHS04], e da altre fonti che verranno via via indicate.

2.1 Prodotti e coprodotti

2.1.1 Prodotti

Vediamo ora la generalizzazione categoriale di un concetto molto importante in matematica e non solo: quello di prodotto.

Definizione. Consideriamo la categoria \mathcal{C} e due oggetti A, B in essa. Allora un prodotto di A e B è una tripla (P, p_A, p_B) con:

- 1) $P \in \mathcal{C}_1$.
- 2) $p_A \in \mathcal{C}(P, A)$ e $p_B \in \mathcal{C}(P, B)$

tale per cui, se (W, w_A, w_B) è un'altra tripla tale che:

- 1) $W \in \mathcal{C}_1$.
- 2) $w_A \in \mathcal{C}(W, A)$ e $w_B \in \mathcal{C}(W, B)$

allora esiste uno ed un solo morfismo $f : W \rightarrow P$ tale per cui $w_A = p_A \circ f$ e $w_B = p_B \circ f$, ovvero commuti il seguente:

$$\begin{array}{ccc} & W & \\ w_A \swarrow & \downarrow f & \searrow w_B \\ A & \xleftarrow{p_A} P \xrightarrow{p_B} & B \end{array}$$

Talvolta si denoterà il prodotto di A e B con $A \times B$. Questa è la definizione di prodotto binario, che si può facilmente generalizzare al caso di prodotti di un numero finito di oggetti o di prodotti di famiglie di oggetti (lo faremo in seguito per ora studieremo il caso più semplice, quello generale seguirà facilmente).

Risulta di fondamentale importanza il fatto che i prodotti sono unici a meno di isomorfismi. Infatti:

Proposizione. Se (P, p_A, p_B) e (W, w_A, w_B) sono due prodotti di A e B , allora P è isomorfo a W .

Dimostrazione. Poichè P è un prodotto, $\exists! u : P \rightarrow P$ tale che $p_A \circ u = p_A$ e $p_B \circ u = p_B$ e tale u è esattamente id_P .

Dato che P e W sono prodotti, esisteranno unici f e g per cui commuti il seguente:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & P & & \\
 & p_A \swarrow & \downarrow f & \searrow p_B & \\
 A & \xleftarrow{w_A} & W & \xrightarrow{w_B} & B \\
 & p_A \swarrow & \downarrow g & \searrow p_B & \\
 & & P & &
 \end{array}$$

Ovvero tali per cui $p_A \circ g \circ f = p_A$ e $p_B \circ g \circ f = p_B$ con $g \circ f : P \rightarrow P$. Ma noi sappiamo per quanto detto prima che esiste un solo morfismo u per cui $p_A \circ u = p_A$ e $p_B \circ u = p_B$ ed è l'identità.

Quindi si ha che $g \circ f = id_P$. In modo analogo si può dimostrare che $f \circ g = id_W$ da cui si ha che P e W sono isomorfi, come volevamo dimostrare.

□

Veniamo ora alla definizione di prodotto di una famiglia di oggetti:

Definizione. Consideriamo la categoria \mathcal{C} e una famiglia $\{A_i\}_{i \in I}$ (I insieme) in essa. Allora un prodotto di tale famiglia è $(P, \{p_i\}_{i \in I})$ con:

- 1) $P \in \mathcal{C}_1$.
- 2) $p_i \in C(P, A_i) \forall i \in I$

tale per cui, se $(W, \{w_i\}_{i \in I})$ è tale che:

- 1) $W \in \mathcal{C}_1$.
- 2) $w_i \in C(W, A_i) \forall i \in I$

allora esiste uno ed un solo morfismo $f : W \rightarrow P$ tale per cui $w_i = p_i \circ f \quad \forall i \in I$

Osservazione. In ogni categoria il prodotto 'vuoto', se esiste è l'oggetto terminale.

Vale anche in questo caso il risultato di unicità a meno di isomorfismi e la dimostrazione ha la stessa forma. Inoltre vale l'associatività e la commutatività della quale daremo solo la dimostrazione nel caso più semplice (nel caso generale si ha solo un appesantimento della notazione):

Proposizione. *Supponiamo che il prodotto di A e B esista. Allora vale:*

$$A \times B \cong B \times A$$

Inoltre vale

$$(A \times B) \times C \cong A \times (B \times C)$$

laddove esistano i relativi prodotti.

Dimostrazione. Poniamo $P = A \times B$ e $W = B \times A$. Allora se (P, p_A, p_B) è un prodotto di A e B allora (P, p_B, p_A) è un prodotto di B e A e quindi per la proposizione precedente è isomorfo a W . Nel caso del prodotto triplo l'argomento è analogo.

□

Con un ragionamento simile si può ottenere il risultato equivalente per tutti i prodotti di un numero finito di oggetti e per i prodotti di una famiglia di oggetti.

Prima di dare degli esempi, introduciamo ora dei morfismi particolari e soprattutto le rispettive notazioni, che ci torneranno utili in seguito.

Supponiamo di essere nella categoria \mathcal{C} e prendiamo $A, B, C, D, E \in \mathcal{C}_0$. Supponiamo inoltre che esistano i prodotti $(A \times B, p_A, p_B)$ e $(C \times D, q_C, q_D)$. Allora, se esistono $a : E \rightarrow A$ e $b : E \rightarrow B$ indicheremo l'unico morfismo $u : E \rightarrow A \times B$ individuato dalla definizione di prodotto con la notazione $\langle a, b \rangle$.

Se ora consideriamo $f : A \rightarrow C$ e $g : B \rightarrow D$ allora $f \circ p_A : A \times B \rightarrow C$ e $g \circ p_B : A \times B \rightarrow D$ e dunque $\exists! l : A \times B \rightarrow C \times D$ tale che il diagramma seguente commuti:

$$\begin{array}{ccccc} A & \xleftarrow{p_A} & A \times B & \xrightarrow{p_B} & B \\ f \downarrow & & \downarrow l & & \downarrow g \\ C & \xleftarrow{q_C} & C \times D & \xrightarrow{q_D} & D \end{array}$$

Indicheremo una l siffatta con il simbolo $f \times g$.

Diamo ora una importante definizione:

Definizione. Consideriamo una categoria \mathcal{C} . Diremo che tale categoria ha tutti i prodotti binari se ha tutti i prodotti di due oggetti e quindi per induzione tutti i prodotti di un numero finito (non nullo) di elementi. Diremo

poi che tale categoria ha tutti i prodotti finiti se ha un oggetto terminale e i prodotti di un qualsiasi numero finito di oggetti in essa esistono.

Diremo poi che \mathcal{C} ha tutti i prodotti se esiste sempre in essa il prodotto di una qualsiasi famiglia di oggetti indicati da un insieme e se esiste in tale categoria un oggetto terminale (talvolta in letteratura si dice in quest'ultimo caso che esistono tutti i prodotti piccoli, ciò è dovuto al fatto che si potrebbe definire anche il prodotto di una classe di oggetti, ma questo per quanto si vedrà quando parleremo di limiti, è un caso poco fecondo).

Passiamo ora a dare degli esempi di prodotti:

- In **Set** i prodotti sono quelli individuati dalla teoria degli insiemi elementare. Infatti, presi due insiemi A e B 'il' loro prodotto è $(A \times B, p_A, p_B)$ con p_A e p_B solite proiezioni. Non si deve però pensare che gli unici morfismi tali per cui si incontrino dei prodotti siano le proiezioni. Infatti se noi consideriamo \mathbb{Z} e \mathbb{R} abbiamo che $(\mathbb{Z} \times \mathbb{R}, p_{z_0}, p_{r_0})$ dove $p_{z_0}(z, r) = (z + z_0, r)$ e $p_{r_0}(z, r) = (z, r + r_0)$ è 'un' prodotto identificato da due morfismi che non sono le solite proiezioni. Questo fatto mette in risalto una volta di più quanto ci si debba sempre ricordare che quando si parla 'del' prodotto non si parla di un oggetto ben preciso ma piuttosto di un rappresentante di una classe di equivalenza rispetto agli iso.

Si noti infine che **Set** ha tutti i prodotti per la teoria degli insiemi elementare.

- Definiamo ora la categoria prodotto di due categorie (senza pensarla per ora come prodotto nel senso appena definito).

Prese due categorie \mathcal{C} e \mathcal{D} , costruiamo la categoria prodotto $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$ come segue:

- Gli oggetti di $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$ sono le coppie (A, B) con $A \in \mathcal{C}_0$ e $B \in \mathcal{D}_0$.
- I morfismi $(A, B) \rightarrow (E, F)$ in $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$ sono le coppie (f, g) con $f \in \mathcal{C}(A, E)$ e $g \in \mathcal{D}(B, F)$.
- La legge di composizione è la seguente:

$$(f, g) \circ (h, k) = (f \circ h, g \circ k)$$

laddove i morfismi considerati siano componibili

Si vede facilmente che questa appena definita è una categoria. Resta inoltre possibile definire in modo ovvio due funtori di proiezione $\pi_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \times \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ e $\pi_{\mathcal{D}} : \mathcal{C} \times \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}$.

A questo punto, se consideriamo **Cat** vediamo che in essa la categoria che abbiamo appena definito, con i due funtori di proiezione è un prodotto secondo la definizione categoriale. Inoltre poichè nella costruzione si sono usati solo argomenti insiemistici, possiamo affermare che anche **Cat** ha tutti i prodotti.

- In **Top** i prodotti sono quelli usuali definiti come prodotti insiemistici dotati della topologia meno fine che rende continui i morfismi di proiezione (vedi un libro di topologia, come [Mun00] per i dettagli).
- Nella categoria degli spazi topologici compatti di Hausdorff i prodotti si ottengono come in **Top** grazie al teorema di Tychonoff.
- In un insieme parzialmente ordinato (poset) visto come categoria, si vede che individuare il prodotto di una famiglia di elementi $\{x_i\}_{i \in I}$ equivale a individuare un estremo inferiore per tale famiglia.

Vediamo ora una importante proprietà del funtore covariante di rappresentazione legata ai prodotti. Sia dunque \mathbf{C} una categoria e sia $C(P, -)$ il funtore di rappresentazione. Allora si vede che ogni coppia di morfismi $p_1 : P \rightarrow A, p_2 : P \rightarrow B$ determina in elemento $(p_1, p_2) \in C(P, A) \times C(P, B)$. A questo punto, se consideriamo $X \in \mathbf{C}_0$ e una freccia $f : X \rightarrow P$ abbiamo per composizione due morfismi $f_1 = p_1 \circ f$ e $f_2 = p_2 \circ f$. In questo modo resta definita una funzione

$$\varphi_X(f) : C(X, P) \rightarrow C(X, A) \times C(X, B)$$

con $\varphi_X(f) = (f_1, f_2)$ come sopra. Si ha dunque:

Proposizione. *Una tripla (P, p_1, p_2) con $P \in \mathbf{C}_0$ e $p_1 : P \rightarrow A, p_2 : P \rightarrow B$ è un prodotto se e soltanto se $\forall X \in \mathbf{C}_0, \exists f : X \rightarrow P$ (con $C(X, A) \neq \emptyset \neq C(X, B)$) tale che φ_X sia biettiva*

Dimostrazione. La definizione di prodotto infatti chiede che per ogni tripla (X, q_1, q_2) con $X \in \mathbf{C}_0$ e $(q_1, q_2) \in C(X, A) \times C(X, B)$ esista una e una sola f per cui $p_1 \circ f = q_1$ e $p_2 \circ f = q_2$; e questo è equivalente a chiedere la biettività di φ_X .

□

Osservazione. Risulta interessante notare come la proposizione precedente possa essere usata per dare una definizione alternativa ed equivalente di prodotto.

Diamo ora la seguente

Definizione. Siano \mathbf{C} e \mathbf{D} due categorie e F si un funtore covariante tra esse. Allora si dirà che tale funtore preserva i prodotti binari se dato (P, p_1, p_2) prodotto in \mathbf{C} , risulta che (FP, Fp_1, Fp_2) è a sua volta un prodotto in \mathbf{D} (in modo analogo si può dare la definizione di funtore che preserva i prodotti).

Un esempio banale di funtore che preserva i prodotti binari è il funtore dimenticante $U : \mathbf{Mon} \rightarrow \mathbf{Set}$.

Si ha dunque che

Lemma. *Il funtore covariante di rappresentazione preserva i prodotti binari.*

Dimostrazione. Preso il funtore $C(X, -)$ per ogni A, B oggetti della categoria \mathbf{C} per cui esista il relativo prodotto, esiste per la proposizione precedente una biezione (che è un isomorfismo in **Set**) tra $C(X, A \times B)$ e $C(X, A) \times C(X, B)$ che è il prodotto delle immagini di A e B in **Set** mediante $C(X, -)$.

□

Questo fatto è molto importante e avrà un analogo importante quando parleremo di funtori che preservano i limiti.

2.1.2 Coprodotti

Veniamo ora alla definizione duale di prodotto:

Definizione. Consideriamo la categoria \mathbf{C} e una famiglia $\{A_i\}_{i \in I}$ (I insieme) in essa. Allora un coprodotto di tale famiglia è $(P, \{p_i\}_{i \in I})$ con:

- 1) $P \in C_1$.
- 2) $p_i \in C(A_i, P) \forall i \in I$

tale per cui, se $(W, \{w_i\}_{i \in I})$ è tale che:

- 1) $W \in C_1$.
- 2) $w_i \in C(A_i, W) \forall i \in I$

allora esiste uno ed un solo morfismo $f : P \rightarrow W$ tale per cui $w_i = u \circ p_i \quad \forall i \in I$

Nel caso del coprodotto di due oggetti, si chiede dunque che commuti il seguente:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & W & & \\
 & w_A \nearrow & \uparrow & \nwarrow & w_B \\
 A & \xrightarrow{p_A} & P & \xleftarrow{p_B} & B
 \end{array}$$

Poichè abbiamo appena dato la definizione duale di prodotto, per il principio di dualità otteniamo risultati analoghi a quelli ottenuti per i prodotti:

Proposizione. *Ogni coprodotto è unico a meno di isomorfismi.*

Proposizione. *Sia I un insieme e $I = \bigcup_{h \in H} J_h$ una partizione di tale insieme. Allora, presa una famiglia $\{A_i\}_{i \in I}$ di oggetti in una categoria \mathbf{C} , laddove i sottomenzionati coprodotti esistano, vale*

$$\coprod_{i \in I} A_i \cong \coprod_{h \in H} \left(\coprod_{j \in J_h} A_j \right)$$

Vediamo ora alcuni esempi di coprodotti:

- In **Set**, il coprodotto di una famiglia $\{A_i\}_{i \in I}$ di insiemi non è altro che la loro unione disgiunta che si può ottenere, per evitare problemi dovuti ad eventuali intersezioni, nel modo seguente:
Si considerano gli insiemi (esistenti in quanto **Set** ha tutti i prodotti) disgiunti (banalmente) $A'_i = A_i \times \{i\}, \forall i \in I$. Allora il coprodotto cercato sarà $P = \bigcup_{i \in I} A'_i$ e i morfismi associati saranno le inclusioni banali.
- In **Top** il coprodotto di una famiglia di spazi topologici non è null'altro che la loro unione disgiunta dotata della topologia indotta banalmente (anche per questo caso si consulti [Mun00]).
- Nella categoria degli spazi topologici puntati i coprodotti si ottengono considerando il relativo coprodotto in **Top** e poi quozientando ad un punto tutti i punti fissi. Questo procedimento in letteratura si dice somma wedge.
- In **Cat** i coprodotti si ottengono in modo analogo a **Set** con un procedimento costruttivo per unioni disgiunte molto simile al caso dei prodotti.
- In **Gr** i coprodotti richiedono un trattamento più delicato. Si consideri una famiglia $\{G_i\}_{i \in I}$ di gruppi e consideriamo l'unione disgiunta insiemistica di tale famiglia, denotandola con U . In U consideriamo il sottoinsieme delle parole, e lo denotiamo con P (che è quindi il sottoinsieme delle sequenze finite di U). In esso introduciamo una relazione di equivalenza \sim tale che:
 - L'elemento neutro di ogni gruppo equivale alla sequenza vuota (parola senza lettere).
 - Una parola avente due lettere consecutive appartenenti allo stesso gruppo G_i è equivalente alla stessa parola dove ad ab si rimpiazza $a * b$ (con $*$ che indica il prodotto in G_i).

Allora si vede che P/\sim ha una struttura di gruppo. Infatti la concatenazione di parole descrive una regola moltiplicativa ed associativa, l'elemento neutro è semplicemente la parola senza lettere e l'inverso di una parola non è altro che la parola avente per lettere le inverse delle lettere della parola che si vuole invertire, in ordine inverso. Dunque P/\sim è effettivamente un gruppo.

Inoltre per ogni G_i resta definito un banale morfismo $p_i : G_i \rightarrow P/\sim$ tale che $p_i(a) = [a]_{\sim}, \forall a \in G_i$.

Infine supponiamo che esista W gruppo e $\{f_i\}_{i \in I}$ morfismi tali che $f_i \in Gr(G_i, W)$, allora esiste un unico $f : P/\sim \rightarrow W$ che manda

$[a]_{\sim}$ in $f_i(a)$, $\forall a \in G_i, \forall i \in I$. Quindi $(P, \{p_i\}_{i \in I})$ è 'il' coprodotto di $\{G_i\}_{i \in I}$ e questo dimostra che in \mathbf{Gr} esistono tutti i coprodotti. Tali coprodotti si dicono anche prodotti liberi.

- In \mathbf{Abgr} ovviamente i coprodotti non possono essere esattamente i prodotti liberi in quanto in generale essi non sono commutativi. In questo caso si può procedere a svariate costruzioni equivalenti di costruzione dei coprodotti in questa categoria. I metodi sono essenzialmente due: o si quozientano ulteriormente i prodotti liberi abelianizzandoli, oppure si procede ex novo con la costruzione delle somme dirette di gruppi. Non si descriveranno qui tali costruzioni, per cui si rimanda, per esempio a [Lang05] o a [John97].

Si deve tuttavia menzionare una proprietà molto importante dei coprodotti in \mathbf{Abgr} . In questa categoria, non solo i coprodotti esistono, ma di più i coprodotti finiti (ovvero di un numero finito di gruppi abeliani) sono isomorfi ai rispettivi prodotti. Questo è un fatto molto importante e profondo e deriva dalla peculiare struttura di \mathbf{Abgr} . Procedendo con la teoria delle categorie infatti si riconosce un particolare tipo di categorie, le categorie additive, in cui non solo se i prodotti finiti esistono, allora esistono anche i relativi coprodotti, ma di più sono isomorfi. \mathbf{Abgr} è forse la categoria additiva per eccellenza e quindi in essa vale il risultato summenzionato. Lo studio generale di queste categorie è purtroppo al di là dei limiti di questa tesi. Per uno studio approfondito delle categorie additive (e molto altro) si veda [Bor94II], mentre per risultati specifici meno potenti sul legame tra prodotti e coprodotti in \mathbf{Abgr} si veda [Lang05].

- Analogamente al caso dei prodotti, in un insieme parzialmente ordinato (poset) visto come categoria, si vede che individuare il coprodotto di una famiglia di elementi $\{x_i\}_{i \in I}$ equivale a individuare un estremo superiore per tale famiglia.

2.2 Intermezzo. Gruppi in una categoria

Scopo di questa sezione è analizzare più da vicino una generalizzazione categoriale di un concetto molto importante in matematica e non solo: il concetto di gruppo.¹

Vogliamo infatti dapprima dare una definizione molto generale di gruppo in una qualsiasi categoria, e studiare in che modo questo concetto sia legato al concetto di gruppo in matematica.

Prendiamo dunque in considerazione una categoria \mathcal{C} e consideriamo un

¹I risultati qui riportati sono tratti da [Awo10], ma per informazioni circa questo argomento si possono consultare anche [MacL97] o [MLar92]

$G \in C_0$. Supponiamo inoltre che C abbia tutti i prodotti binari e denotiamo con $\mathbf{1}$ l'oggetto terminale di C . Possiamo quindi dare la seguente

Definizione. $G \in C_0$ è un gruppo di C se esistono m, u', i morfismi descritti dal seguente diagramma:

$$\begin{array}{ccc} G \times G & \xrightarrow{m} & G \xleftarrow{i} G \\ & & \uparrow u' \\ & & \mathbf{1} \end{array}$$

e tali che:

- 1) m sia associativo, ovvero commuti il seguente

$$\begin{array}{ccccc} & & G & & \\ & m \nearrow & & \nwarrow m & \\ G \times G & & & & G \times G \\ m \times id_G \uparrow & & & & \uparrow id_G \times m \\ (G \times G) \times G & \xrightarrow{\cong} & & & G \times (G \times G) \end{array}$$

(un tale diagramma in letteratura si dice pentagono di Maclane).

- 2) dato $\sim: G \rightarrow \mathbf{1}$ definito dalla nozione di oggetto terminale e definito $u = u' \circ \sim: G \xrightarrow{\sim} \mathbf{1} \xrightarrow{u'} G$, sia commutativo

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\langle u, id_G \rangle} & G \times G \\ \downarrow \langle id_G, u \rangle & \searrow id_G & \downarrow m \\ G \times G & \xrightarrow{m} & G \end{array}$$

- 3) Posto $\Delta = \langle id_G, id_G \rangle$, i sia tale per cui commuti

$$\begin{array}{ccccc} G \times G & \xleftarrow{\Delta} & G & \xrightarrow{\Delta} & G \times G \\ u \times i \downarrow & & \downarrow u & & \downarrow i \times u \\ G \times G & \xrightarrow{m} & G & \xleftarrow{m} & G \times G \end{array}$$

Questa è la definizione generale di gruppo in una categoria. Vediamo quindi la definizione generale di omomorfismo di gruppi di una categoria:

Definizione. Siano G e H due gruppi nella categoria C e siano m_G, u'_G, i_G e m_H, u'_H, i_H i morfismi determinati dalla definizione di gruppo. Un omomorfismo di gruppi da G ad H è un morfismo $f: G \rightarrow H$ (di C_1) tale che i seguenti diagrammi commutino:

1)

$$\begin{array}{ccc}
 G \times G & \xrightarrow{f \times f} & H \times H \\
 m_G \downarrow & & \downarrow m_H \\
 G & \xrightarrow{f} & H
 \end{array}$$

2)

$$\begin{array}{ccc}
 G & \xrightarrow{f} & H \\
 u'_G \uparrow & \nearrow u'_H & \\
 \mathbf{1} & &
 \end{array}$$

3)

$$\begin{array}{ccc}
 G & \xrightarrow{f} & H \\
 i_G \downarrow & & \downarrow i_H \\
 G & \xrightarrow{f} & H
 \end{array}$$

Osservazione. Così, data una categoria \mathbf{C} , è possibile definire la (sotto)categoria $\mathbf{Groups}(\mathbf{C})$ avente come oggetti i gruppi di \mathbf{C} e come morfismi gli omomorfismi di gruppi appena definiti.

Vediamo ora qualche semplice esempio:

- In \mathbf{Set} i gruppi in senso categoriale coincidono con i gruppi nel solito senso matematico.
- In \mathbf{Top} i gruppi sono i gruppi topologici.

A questo punto è interessante chiedersi chi siano i gruppi intesi in senso categoriale nella categoria dei gruppi.

Consideriamo dunque la categoria \mathbf{Gr} e prendiamo un gruppo G nel senso delle categorie in essa (supponiamo per ora che esista).

Denotiamo con \circ il prodotto di G visto come elemento di \mathbf{Gr} (ovvero, presi $a, b \in G$, il loro 'prodotto dentro G ' sarà $a \circ b$) e con $*$ il prodotto inteso in senso categoriale (ovvero, presa la $m : G \times G \rightarrow G$, $m(a, b) = a * b$).

Si nota ora che $m(a, b) = a * b$ è sia un morfismo di \mathbf{Gr} che un omomorfismo di gruppi in senso categoriale (questa osservazione è fondamentale).

Dunque, presi $c, d \in G \times G$ ($c = (c_1, c_2), d = (d_1, d_2)$) riesce che

$$m(c \circ d) = m(c) \circ m(d)$$

ovvero che

$$(c_1 \circ d_1) * (c_2 \circ d_2) = (c_1 * c_2) \circ (d_1 * d_2) \quad (\Delta)$$

Scriveremo inoltre 1° per indicare l'elemento neutro di \circ e 1^* per indicare l'elemento neutro di $*$.

A questo punto, la (Δ) ci consente di dimostrare la seguente, importante

Proposizione. *Dato un qualsiasi insieme G dotato delle operazioni $\circ, * : G \times G \rightarrow G$ soddisfanti (Δ) aventi elementi neutri rispettivamente 1° e 1^* , valgono:*

$$1) 1^\circ = 1^*$$

$$2) \circ = *$$

3) \circ e $*$ sono commutative

Dimostrazione. 1) Usando (Δ) si ha:

$$\begin{aligned} 1^\circ &= 1^\circ \circ 1^\circ = (1^\circ * 1^*) \circ (1^* * 1^\circ) \\ &= (1^\circ \circ 1^*) * (1^* \circ 1^\circ) \\ &= 1^* * 1^* = 1^* \end{aligned}$$

chiameremo dunque $1^\circ = 1^* = 1$

2) Sempre da (Δ) si ha dunque

$$\begin{aligned} a \circ b &= (a * 1) \circ (1 * b) \\ &= (a \circ 1) * (1 \circ b) \\ &= a * b \end{aligned}$$

Chiameremo dunque $\circ = * = \cdot$.

3) Sempre da (Δ) si ha infine

$$\begin{aligned} a \cdot b &= (1 \cdot a) \cdot (b \cdot 1) \\ &= (1 \cdot b) \cdot (a \cdot 1) \\ &= b \cdot a \end{aligned}$$

Questo prova completamente la proposizione. □

La tecnica usata nella precedente dimostrazione è nota come "argomento di Eckmann-Hilton".

Grazie a questa proposizione abbiamo che i gruppi in senso categoriale in \mathbf{Gr} devono essere necessariamente abeliani, e a questo punto risulta molto facile convincersi del fatto che ogni gruppo abeliano è anche un elemento di $\mathbf{Group}(\mathbf{Gr})$. Si ha quindi:

Corollario. *I gruppi nella categoria dei gruppi sono tutti e soli i gruppi abeliani*

Questo mostra, come nel caso dei coprodotti, quanto i gruppi abeliani siano una parte molto peculiare ed importante della categoria dei gruppi.

2.3 Equalizzatori e Coequalizzatori

2.3.1 Equalizzatori

Definizione. Consideriamo una categoria \mathcal{C} e due frecce $f, g \in C(A, B)$. Un equalizzatore è una coppia (E, e) tale che:

- 1) $E \in C_0$
- 2) $e \in C(E, A)$ e si ha $f \circ e = g \circ e$

con la proprietà che se (Z, z) è un'altra coppia data da

- 1) $Z \in C_0$
- 2) $z \in C(Z, A)$ e si ha $f \circ z = g \circ z$

allora esiste una ed una sola $u : Z \rightarrow E$ tale per cui riesca $z = e \circ u$, ovvero sia commutativo

$$\begin{array}{ccccc} Z & & & & \\ & \searrow z & & & \\ u \downarrow & & & & \\ E & \xrightarrow{e} & A & \xrightarrow[f]{g} & B \end{array}$$

Come nel caso di prodotti, coprodotti, oggetti iniziali e terminali vale che

Proposizione. *Gli equalizzatori sono unici a meno di isomorfismi*

La dimostrazione è molto semplice e sfrutta un argomento analogo a quello usato per i prodotti e quindi verrà omessa (comunque si vedrà più oltre che gli equalizzatori sono un particolare limite, e si vedrà l'unicità a meno di isomorfismi dei limiti).

Risulta invece rilevante la seguente:

Proposizione. *Se (E, e) è un equalizzatore per $A \xrightarrow[f]{g} B$, allora e è un monomorfismo.*

Dimostrazione. Consideriamo il seguente diagramma:

$$\begin{array}{ccccc} Z & & & & \\ & \searrow z & & & \\ h \downarrow & & l \downarrow & & \\ E & \xrightarrow{e} & A & \xrightarrow[f]{g} & B \end{array}$$

in cui (E, e) è un equalizzatore di f e g . Supponiamo che $e \circ h = e \circ l$, vogliamo ricavare che $h = l$.

Sia allora $z = e \circ h = e \circ l$, per la definizione di z si avrà che $f \circ z = g \circ z$. Ma (E, e) è un equalizzatore, quindi $\exists! u : Z \rightarrow E$ per cui si ha $e \circ u = z$. Tuttavia $z = e \circ h = e \circ l$. Quindi per l'unicità di u si ha che $h = z = l$ e ciò conclude la dimostrazione.

□

Osserviamo ora una cosa molto importante (e di ovvia dimostrazione):

Proposizione. L'equalizzatore di $A \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \xrightarrow{g} \end{array} B$ è la coppia (A, id_A) .

Vediamo ora alcuni esempi di equalizzatori:

- In **Set**, prese due funzioni $A \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \xrightarrow{g} \end{array} B$, si può facilmente costruire il loro equalizzatore considerando l'insieme $E = \{a \in A; f(a) = g(a)\}$ e la funzione di inclusione $i : E \hookrightarrow A$. In questo modo (E, i) sarà un equalizzatore di f, g e si indicherà come $\text{Ker}(f, g)$.

- In **Top**, **Gr**, **Abgr**, **Rng**... l'equalizzatore di due morfismi $A \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \xrightarrow{g} \end{array} B$ sarà

$$\text{Ker}(f, g) = \{a \in A; f(a) = g(a)\}$$

dotato rispettivamente della struttura di spazio topologico, gruppo... ed il morfismo ad esso associato sarà, per esempio, l'inclusione.

Ad esempio, in **Top** prese $\mathbb{R}^2 \begin{array}{c} \xrightarrow{g(x,y)=x^2+y^2} \\ \xrightarrow{F(x,y)=1} \end{array} \mathbb{R}$ un loro equalizzatore è (S^1, \hookrightarrow) .

- In **Cat** la situazione è analoga.

2.3.2 Coequalizzatori

Diamo ora la definizione duale di quella di equalizzatore:

Definizione. Consideriamo una categoria \mathbf{C} e due frecce $f, g \in C(A, B)$. Un equalizzatore è una coppia (Q, q) tale che:

- 1) $Q \in C_0$
- 2) $q \in C(B, Q)$ e si ha $q \circ f = q \circ g$

con la proprietà che se (Z, z) è un'altra coppia data da

- 1) $Z \in C_0$

2) $z \in C(B, Z)$ e si ha $z \circ f = z \circ g$

allora esiste una ed una sola $u : Q \rightarrow Z$ tale per cui riesca $z = u \circ q$, ovvero sia commutativo

$$\begin{array}{ccc} A & \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \xrightarrow{g} \end{array} & B & \xrightarrow{q} & Q \\ & & & \searrow z & \downarrow u \\ & & & & Z \end{array}$$

Applicando il principio di dualità ai risultati ottenuti per gli equalizzatori si ha:

Proposizione. 1) I coequalizzatori sono unici a meno di isomorfismi.

2) Se (Q, q) è un coequalizzatore, allora q è un epimorfismo.

3) (B, id_B) è il coequalizzatore di $A \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \xrightarrow{f} \end{array} B$.

Inoltre si ha che

Proposizione. Consideriamo una categoria \mathbf{C} . Allora se $e : E \rightarrow A$ è un epimorfismo e un equalizzatore, allora è anche un isomorfismo.

Dimostrazione. Supponiamo che (E, e) sia un equalizzatore di $A \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \xrightarrow{g} \end{array} B$ e che e sia un epi. Allora, poichè $f \circ e = g \circ e$ si ha che $f = g$. Ma (A, id_A) è l'equalizzatore di $f = g$. Quindi $\exists u : E \rightarrow A$ isomorfismo per cui $e = id_A \circ u = u$.

Quindi e è un isomorfismo. □

Diamo ora una definizione che talvolta compare in letteratura:

Definizione. Se in una categoria \mathbf{C} , f è un mono che è anche parte di un equalizzatore, allora f si dirà monomorfismo regolare. In modo analogo se g è un epi che è anche parte di un coequalizzatore, allora g si dirà epimorfismo regolare.

Vediamo infine qualche breve esempio di coequalizzatore:

- In **Set**, il coequalizzatore di $A \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \xrightarrow{g} \end{array} B$ si ottiene quotizzando B per la minima relazione di equivalenza indotta dalle coppie $(f(a), g(a))$ per $a \in A$ (il conucleo).
In **Top** i coequalizzatori si otterranno insiemisticamente come in **Set** e avranno la topologia quoziente.

2.4 Pullbacks e pushouts

2.4.1 Pullbacks

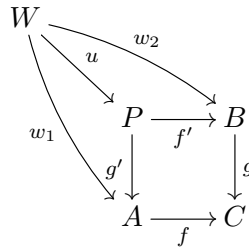
Definizione. Si consideri una categoria \mathcal{C} , tre oggetti A, B, C di essa e due morfismi $f : A \rightarrow C$ e $g : B \rightarrow C$. Un pullback di (f, g) è una tripla (P, f', g') tale che

- 1) $P \in \mathcal{C}_0$
- 2) $f' : P \rightarrow B$ e $g' : P \rightarrow A$
- 3) $f \circ g' = g \circ f'$

con la proprietà che se (W, w_1, w_2) è un'altra tripla tale che

- 1) $W \in \mathcal{C}_0$
- 2) $w_2 : W \rightarrow B$ e $w_1 : W \rightarrow A$
- 3) $f \circ w_1 = g \circ w_2$

allora esiste un unico $u : W \rightarrow P$ tale che commuti il seguente



Con un argomento a questo punto ormai standard, si trae che:

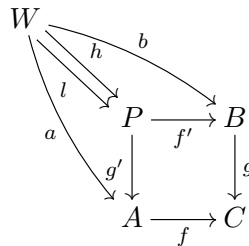
Proposizione. *I pullbacks sono unici a meno di isomorfismi.*

Vediamo ora qualche proprietà notevole dei pullbacks:

Proposizione. *Sia (P, f', g') il pullback di (f, g) con le notazioni precedenti. Allora valgono:*

- 1) *Se g è un monomorfismo, anche g' lo è.*
- 2) *Se g è un isomorfismo, anche g' lo è.*

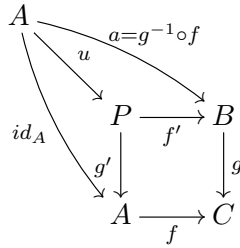
Dimostrazione. 1) Supponiamo che g sia un monomorfismo e consideriamo il seguente:



con l, h tali che $g' \circ h = g' \circ l$. Vogliamo far vedere che $h = l$. Sia dunque $a = g' \circ h$ e $b = f' \circ h$. Allora si ha che $f \circ a = f \circ g' \circ h = g \circ f' \circ h = g \circ b$. Quindi h è l'unico morfismo $W \rightarrow P$ individuato dalla definizione di pullback che fattorizza (a, b) . Ma avevamo che $g' \circ l = g' \circ h = a$. Quindi riesce $g \circ f' \circ l = f \circ g' \circ l = f \circ g' \circ h = f \circ a = g \circ b$ da cui $f' \circ l = b$ perchè g è un mono. Ma si aveva che $g' \circ l = a$.

Dunque l è un altro morfismo che fattorizza (a, b) , quindi per la definizione di pullback $l = h$.

2) Sia ora g isomorfismo. Consideriamo



con u dato dalla definizione di pullback.

Allora si ha subito che $g' \circ u \circ g' = id_A \circ g' = g' \circ id_P$ e che

$$f' \circ u \circ g' = g^{-1} \circ f \circ g' = g^{-1} \circ g \circ f' = f' = f' \circ id_P$$

da cui si ha che $u \circ g' = id_P$ per la condizione di unicità del pullback. Dunque $g' \circ u = id_A$ e $u \circ g' = id_P$, ovvero u è l'inversa di g' e quindi g è un isomorfismo.

□

Diremo poi che una categoria ha tutti i pullbacks se per ogni coppia di morfismi (f, g) aventi lo stesso codominio allora esiste il relativo pullback. I pullbacks godono inoltre di una proprietà di facile dimostrazione (vedi [Bor94]);

Proposizione. *Consideriamo il seguente diagramma commutativo in una categoria:*

$$\begin{array}{ccccc}
 A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{l} & A \\
 \downarrow g & & \downarrow m & & \downarrow n \\
 D & \xrightarrow{h} & E & \xrightarrow{q} & F
 \end{array}$$

Allora:

- 1) Se il rettangolo di sinistra e quello di destra sono pullbacks, allora lo è anche il rettangolo esterno.

2) Se il rettangolo di destra e quello esterno sono pullbacks, allora è un pullback anche il rettangolo di sinistra.

Questa proposizione ha il seguente corollario che 'estende' la nozione di pullback.

Corollario. Il pullback di un triangolo commutativo è un triangolo commutativo. Ovvero, dato un triangolo commutativo $A \begin{matrix} \searrow f \\ \downarrow h \\ C \end{matrix} \xleftarrow{g} B$ per ogni

$$\begin{array}{ccc} A & & \\ \downarrow h & \searrow f & \\ C & \xleftarrow{g} & B \end{array}$$

$c : C' \rightarrow C$ se si può formare il pullback di (c, h) e di (c, g) allora esiste una ed una sola $f' : A' \rightarrow B$ tale che il diagramma seguente commuti:

$$\begin{array}{ccccc} A' & \xrightarrow{h_A} & A & & \\ \downarrow h' & \searrow f' & \downarrow h & \searrow f & \\ & B' & \xrightarrow{h_B} & B & \\ \downarrow g' & & \downarrow g & & \\ C' & \xrightarrow{c} & C & & \end{array}$$

I pullbacks hanno una proprietà molto importante e profonda, che li lega ai prodotti e agli equalizzatori:

Teorema. Una categoria \mathbf{C} ha i prodotti finiti e gli equalizzatori se e soltanto se ha un oggetto terminale e i pullbacks.

Dimostrazione. La dimostrazione è costruttiva ed ovviamente consta di due parti.

1) Supponiamo che \mathbf{C} abbia tutti i prodotti finiti e gli equalizzatori. Allora avrà anche il prodotto 'vuoto' ovvero l'oggetto terminale. Costruiamo ora i pullbacks. Sia (f, g) una coppia qualsiasi di morfismi di \mathbf{C} tale che $f : A \rightarrow B$ e $g : B \rightarrow C$. Allora esisterà il prodotto $(A \times B, \pi_A, \pi_B)$ e si avrà

$$A \times B \begin{matrix} \xrightarrow{f \circ \pi_A} \\ \xrightarrow{g \circ \pi_B} \end{matrix} C.$$

Prendiamo ora un equalizzatore (E, e) di quest'ultimo, allora si ha che $f \pi_A e = g \pi_B e$. Inoltre, presa una tripla (Z, z_1, z_2) tale che $Z \in \mathbf{C}_0, z_1 : Z \rightarrow A, z_2 : Z \rightarrow B$ tali che $f \circ z_1 = g \circ z_2$ si ha che posto $z = \langle z_1, z_2 \rangle$, allora esiste unico $u : Z \rightarrow E$ tale che $z = e \circ u$ per la definizione di equalizzatore. Questo prova che

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\pi_B e} & B \\ \pi_A e \downarrow & & \downarrow g \\ A & \xrightarrow{f} & C \end{array}$$

è il diagramma di un pullback, ovvero $(E, \pi_A e, \pi_B e)$ è un pullback di (f, g) .

2) Viceversa supponiamo che \mathcal{C} abbia un oggetto terminale $\mathbf{1}$ e tutti i pullbacks. Allora presi due oggetti $A, B \in \mathcal{C}_0$, esisterà la coppia (f, g) di morfismi $f : A \rightarrow \mathbf{1}, g : B \rightarrow \mathbf{1}$ determinata dalla definizione di oggetto terminale; quindi il pullback di (f, g) , $P \longrightarrow B$, sarà il prodotto di A e B e dunque

$$\begin{array}{ccc} P & \longrightarrow & B \\ \downarrow & & \downarrow g \\ A & \xrightarrow{f} & \mathbf{1} \end{array}$$

in \mathcal{C} esisteranno tutti i prodotti finiti.

Infine, presi due morfismi $A \xrightarrow{f} B$, costruiamo il pullback

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{h} & B \\ e \downarrow & & \downarrow \Delta = \langle 1_B, 1_B \rangle \\ A & \xrightarrow{\langle f, g \rangle} & B \times B \end{array}$$

Si ha che (E, e) è un equalizzatore di $A \xrightarrow{f} B$ in quanto $f \circ e = h = g \circ e$

e se (Z, z) fosse un'altra coppia con questa proprietà, per la definizione di pullback esisterebbe un unico $u : Z \rightarrow E$ tale che $z = e \circ u$.

Quindi \mathcal{C} ha anche tutti gli equalizzatori e il teorema resta così completamente dimostrato. □

Questo teorema importante mostra come le nozioni di prodotti, equalizzatori e pullbacks siano molto legate, e questo risulterà infine naturale una volta data la definizione generale di limite.

Vediamo ora un esempio di pullback:

In **Set**, poichè esistono tutti gli equalizzatori ed i prodotti finiti, allora esisteranno anche tutti i pullbacks. Prese poi due funzioni $f : A \rightarrow C, g : B \rightarrow C$, il loro pullback sarà (P, f', g') con $p = \{(x, y) \in A \times B; x \in A, y \in B, f(x) = g(y)\}$ e $g'(x, y) = x, f'(x, y) = y$.

Stesso ragionamento si può fare se si chiede il pullback di (f, f) , chiamiamolo (P, α, β) .

In una categoria qualsiasi, i pullbacks di due morfismi uguali hanno un ruolo molto particolare, tanto da meritarsi un nome a parte, quello di coppie di nuclei (vedi [Bor94] per una trattazione esauriente).

2.4.2 Pushouts

Diamo ora la nozione duale a quella di pullback:

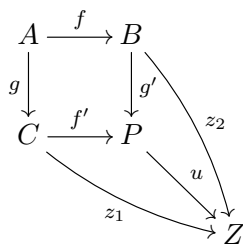
Definizione. Si consideri una categoria \mathbf{C} , tre oggetti A, B, C di essa e due morfismi $f : A \rightarrow B$ e $g : A \rightarrow C$. Un pushout di (f, g) è una tripla (P, f', g') tale che

- 1) $P \in C_0$
- 2) $f' : C \rightarrow P$ e $g' : B \rightarrow P$
- 3) $f' \circ g = g' \circ f$

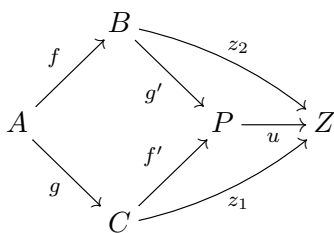
con la proprietà che se (Z, z_1, z_2) è un'altra tripla tale che

- 1) $Z \in C_0$
- 2) $z_1 : C \rightarrow Z$ e $z_2 : B \rightarrow Z$
- 3) $z_1 \circ g = z_2 \circ f$

allora esiste un unico $u : P \rightarrow Z$ tale che commuti il seguente



O anche, in modo più suggestivo



Grazie al principio di dualità si hanno i seguenti risultati derivati da quanto si è visto circa i pullbacks (citeremo solo quelli più rilevanti).

Proposizione. Valgono:

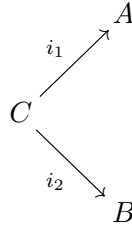
- 1) I pushouts sono unici a meno di isomorfismi
- 2) Se (P, f', g') è il pushout di (f, g) e f è un epi, anche f' lo è
- 3) In una categoria \mathbf{C} esistono tutti i coprodotti finiti e i coequalizzatori se e soltanto se esistono tutti i pushouts e c'è un oggetto iniziale.

Non aggiungeremo altro alla teoria dei pushouts.

Giova però dare un esempio notevole:

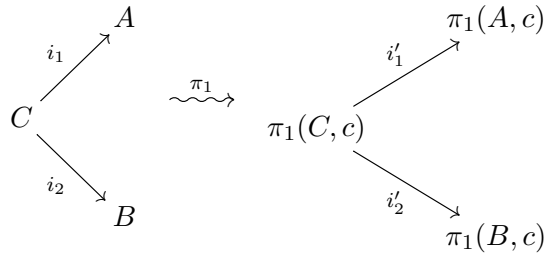
In \mathbf{Gr} i pushouts si ottengono mediante il prodotto libero amalgamato, che è una generalizzazione del prodotto libero. In particolare, prendiamo $f_1 : H \rightarrow G_1$ e $f_2 : H \rightarrow G_2$ morfismi di \mathbf{Gr} e sia $G_1 * G_2$ il prodotto libero di G_1 e G_2 . Sia poi N il sottogruppo normale di $G_1 * G_2$ generato dagli elementi della forma $f_1(a)f_2(a)^{-1}$, con $a \in H$. Allora il prodotto libero amalgamato $G_1 *_H G_2$ è per definizione $G_1 * G_2 / N$ (vedi per approfondire [John97] o meglio [MKS76]).

Orbene, vediamo ora come questo possa rivelarsi illuminante anche in topologia: supponiamo dunque di essere in \mathbf{Top} e consideriamo uno spazio topologico X connesso per archi e ricoperto da due aperti A, B connessi per archi aventi intersezione (non vuota ovviamente) C connessa per archi. Allora resta determinato un diagramma

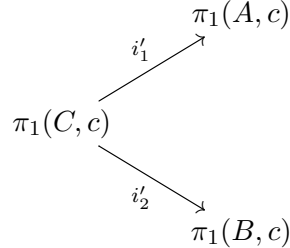


con i_1, i_2 inclusioni canoniche.

Facciamo agire π_1 su questo diagramma; allora, preso $c \in C$, si avrà:



con i'_1, i'_2 inclusioni di gruppi. Allora la teoria del prodotto amalgamato (e il fatto che \mathbf{Gr} è cocompleta, in particolare ha tutti i pushouts) garantisce che il pushout di



Van Kampen garantisce che è isomorfo a $\pi_1(X, c)$, e quindi tale teorema può essere enunciato in questo modo in modo più elegante rispetto alla maniera tradizionale.

Dunque il teorema di Van Kampen è un teorema che parla di preservazione

di pushouts sotto certe ipotesi.

Ci si può chiedere se la preservazione di pushouts valga in condizioni più generali. Ebbene, fortunatamente la risposta è positiva e si avvale di un linguaggio più potente e generale, quello dei limiti e dei colimiti che ora possiamo finalmente introdurre.

2.5 Limiti e colimiti

Fino ad ora, studiando prodotti, equalizzatori, pullbacks e il loro duali, abbiamo visto che questi hanno qualcosa in comune: sono dei 'diagrammi' immersi in una categoria e dotati di una proprietà universale (che li rende tutti unici a meno di isomorfismi). Possiamo dunque chiederci se si possa in generale 'creare' degli oggetti aventi una proprietà universale simile a partire da dei 'diagrammi'. Questa è l'idea che da luogo alla definizione di limite e colimite, che ora vogliamo dare.

Definizione. Consideriamo due categorie \mathbf{D} e \mathbf{C} . Un diagramma di tipo \mathbf{D} in \mathbf{C} (o semplicemente diagramma di \mathbf{D} in \mathbf{C}) è un funtore $F : \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{C}$, dove \mathbf{C} si dice anche categoria indice del diagramma.

Con questa definizione abbiamo generalizzato l'idea di 'immergere' una struttura in una categoria. Costruiamo ora un oggetto (per ora non unico) a partire da un diagramma siffatto

Definizione. Dato un diagramma di \mathbf{D} in \mathbf{C} , $F : \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{C}$, un *cono* di F consiste di un oggetto $A \in \mathbf{C}_0$ e di una trasformazione naturale $\eta : \Delta_A \Rightarrow F$, e si indicherà (A, η) .

In altre parole, data una qualsiasi $f : B \rightarrow C$ in \mathbf{D} si chiede che commuti il diagramma

$$\begin{array}{ccc} & A & \\ \eta_B \swarrow & & \searrow \eta_C \\ FB & \xrightarrow{Ff} & FC \end{array}$$

Questo ci spiega perchè un cono si chiami effettivamente così: dato un diagramma di \mathbf{D} in \mathbf{C} , possiamo pensarlo come un 'disegno' di \mathbf{D} in \mathbf{C} e (A, η) sarà un 'cono' avente come base tale disegno.

Data la sua importanza, diamo subito la definizione duale a quella di cono:

Definizione. Dato un diagramma di \mathbf{D} in \mathbf{C} , $F : \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{C}$, un *cocono* di F consiste di un oggetto $A \in \mathbf{C}_0$ e di una trasformazione naturale $\eta : F \Rightarrow \Delta_A$, e si indicherà (A, η) .

In altre parole, data una qualsiasi $f : B \rightarrow C$ in \mathbf{D} si chiede che commuti

il diagramma

$$\begin{array}{ccc}
 & A & \\
 \eta_B \nearrow & & \nwarrow \eta_C \\
 FB & \xrightarrow{Ff} & FC
 \end{array}$$

Due coni si possono collegare nel modo seguente:

Definizione. Nelle notazioni precedenti, un morfismo di coni (dello stesso diagramma $F : \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{C}$) $\varphi : (A, \eta) \rightarrow (B, \varepsilon)$ è un morfismo di \mathbf{C} tale che $\forall K \in D_0, \eta_K = \varepsilon_K \circ \varphi$, ovvero commutino i seguenti

$$\begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{\varphi} & B \\
 \eta_K \searrow & & \downarrow \varepsilon_K \\
 & & FK
 \end{array}$$

per ogni K oggetto di \mathbf{D} .

Si ha ovviamente una definizione analoga per i coconi.

A questo punto riesce possibile, dato un diagramma F di tipo \mathbf{D} in \mathbf{C} , definire la categoria dei coni di F , $\mathbf{Cone}(F)$, avente come oggetti i coni di F e come frecce i morfismi tra coni. La legge di composizione è indotta da quella di \mathbf{C} e le identità sono (laddove ha senso) quelle di \mathbf{C} . In modo del tutto analogo si può costruire la categoria dei coconi, $\mathbf{Cocone}(F)$.

Siamo ora nella condizione di definire l'oggetto universale che cerchiamo:

Definizione. Un **limite** per il diagramma $F : \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{C}$ è un oggetto terminale nella categoria $\mathbf{Cone}(F)$. Dualmente un **colimite** per il diagramma $F : \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{C}$ è un oggetto iniziale nella categoria $\mathbf{Cocone}(F)$.

Possiamo pensare ad un limite come al cono con 'vertice più vicino' al diagramma di \mathbf{D} in \mathbf{C} .

Osservazione. Non si deve tuttavia pensare che la nozione di limite non possa esistere senza quella di oggetto terminale. Infatti sebbene a questo punto la definizione che abbiamo dato fosse forse quella più evocativa, è semplice osservare che si potrebbe definire il concetto di limite enunciando semplicemente la sua proprietà universale, senza ricorrere appunto alla nozione di oggetto terminale.

Inoltre notiamo che un cono, così come un limite, non deve necessariamente esistere.

Data la nostra definizione, per quanto dimostrato sugli oggetti terminali ed iniziali (o se si preferisce una definizione di limite senza citare gli oggetti terminali, si ripete una dimostrazione analoga a quella data per loro), si ha che

Proposizione. *Se un limite per un dato diagramma esiste, allora esso è unico a meno di isomorfismi.*

Diamo inoltre

Definizione. Si dice che un limite di un diagramma di tipo \mathbf{D} è piccolo, quando \mathbf{D} è una categoria piccola (ovvero avente un insieme di oggetti).

Come esempio chiarificante della potenza di questo nuovo concetto, vediamo come tutte le 'costruzioni universali' fatte fino ad ora siano particolari limiti (o colimiti) piccoli.

- Consideriamo l'unico diagramma (esiste sempre) $F : \mathbf{0} \longrightarrow \mathbf{C}$. Allora il limite di F , se esiste, è l'oggetto terminale di \mathbf{C} .
Dualmente, il colimito di tale diagramma è l'oggetto iniziale di \mathbf{C}
- Sia \mathbf{D}_2 la categoria discreta avente due oggetti. Allora un diagramma di tipo \mathbf{D}_2 in \mathbf{C} determina due oggetti, A e B , e un loro cono sarà del tipo

$$A \longleftarrow W \longrightarrow B$$

Si vede chiaramente come il limite di un tale diagramma non sia null'altro che il prodotto di A e B . Generalizzando si ha che tutti i prodotti possono essere visti come il limite di un particolare diagramma di tipo \mathbf{D}_i in \mathbf{C} , con \mathbf{D}_i categoria discreta avente $\mathbf{Ob}(\mathbf{D}_i)$ della cardinalità giusta.

Con un discorso duale, si vede come i coprodotti siano colimiti di tali diagrammi.

- Consideriamo un diagramma $F : \mathbf{2} \longrightarrow \mathbf{C}$. Esso avrà come immagine un particolare $A \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \xrightarrow{g} \end{array} B$ e un suo cono (W, η) sarà un diagramma commutativo del tipo

$$\begin{array}{ccc} & W & \\ \eta_A \swarrow & & \searrow \eta_B \\ A & \xrightarrow{f} & B \\ \xrightarrow{g} & & \end{array}$$

in cui $f \circ \eta_A = \eta_B$ e $g \circ \eta_A = \eta_B$. Si può quindi facilmente vedere che il limite di F , se esiste, è l'equalizzatore di $A \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \xrightarrow{g} \end{array} B$.

Dualmente, si vede che il colimito di un tale diagramma è un coequalizzatore.

- Consideriamo un diagramma $F : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}$. esso avrà immagine

$$\begin{array}{ccc} & & B \\ & & \downarrow g \\ A & \xrightarrow{f} & C \end{array}$$

e un cono (W, η) di tale diagramma sarà rappresentato dal seguente diagramma commutativo:

$$\begin{array}{ccc} W & \xrightarrow{\eta_B} & B \\ \eta_A \downarrow & \searrow \eta_C & \downarrow g \\ A & \xrightarrow{f} & C \end{array}$$

Dunque si può osservare che il limite di F , se esiste, sarà il pullback di (f, g) .

Ancora, in modo duale riesce che i pushouts sono colimiti del diagramma $F : \mathcal{B}^{op} \rightarrow \mathcal{C}$

Osservazione. Si osservi che le costruzioni appena descritte potrebbero essere 'capovolte' ed usate per definire ex novo prodotti, ecc... senza dare le definizioni che avevamo dato, e usando quindi solo la nozione di limite.

La nozione di limite ci permette dunque di creare estensioni delle definizioni precedenti. Come piccolo esempio, prendiamo in \mathcal{C} una famiglia di morfismi $\{f_i\}_{i \in I}$ tali che $f_i : A_i \rightarrow C$, con $A_i, C \in \mathcal{C}_0 \forall i$. Allora preso un diagramma avente come immagine $(\{A_i\}, \{f_i\}, C)$ (esiste?²), si può definire, se esiste, il multi-pullback di $\{f_i\}_{i \in I}$ come il limite di F (vedi [AHS04] per dettagli e proprietà).

I prodotti e i limiti hanno un legame molto forte in una categoria. Vale infatti l'importantissimo:

Teorema (Teorema fondamentale di esistenza dei limiti). *In una categoria \mathcal{C} esistono tutti i limiti piccoli se e soltanto se ogni famiglia di oggetti $\{A_i\}_{i \in I}$ di \mathcal{C} ha un prodotto e ogni coppia di frecce parallele $A \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \xrightarrow{g} \end{array} B$ ha un equalizzatore.*

Dimostrazione. Se in una categoria \mathcal{C} esistono tutti i limiti piccoli, allora ovviamente ogni famiglia di oggetti $\{A_i\}_{i \in I}$ di \mathcal{C} ha un prodotto e ogni

²Si, basta prendere la categoria generata da un opportuno grafo. Tuttavia sarebbe lungo e dispersivo descrivere qui tutto il procedimento, quindi lo ometteremo. In alternativa, basta considerare la sottocategoria $(\{A_i\}, \{f_i\}, C)$ e considerare come diagramma il funtore di inclusione

coppia di frecce parallele $A \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \xrightarrow{g} \end{array} B$ ha un equalizzatore.

Viceversa supponiamo che tali prodotti ed equalizzatori esistano, allora preso un diagramma di tipo \mathbf{D} in \mathbf{C} , con \mathbf{D} categoria piccola, vogliamo costruire il limite di tale diagramma. Presa una $f \in D_1$, ricordiamo che si indica il 'bersaglio' o codominio di tale morfismo con $\text{cod}(f)$; inoltre osserviamo esplicitamente che in questo caso D_0, D_1 sono insiemi. Allora $\{FA\}_{A \in D_0}$, e $\{F(\text{cod}(f))\}_{f \in D_1}$ sono famiglie di oggetti ben definite in \mathbf{C} , e pertanto possiamo considerare i rispettivi prodotti di tali famiglie:

$$\left(\prod_{A \in D_0} FA, \{\pi_A\}_{A \in D_0} \right) \quad , \quad \left(\prod_{f \in D_1} F(\text{cod}(f)), \{\pi'_{\text{cod}(f)}\}_{f \in D_1} \right)$$

in cui $\{\pi_A\}_{A \in D_0}$ e $\{\pi'_{\text{cod}(f)}\}_{f \in D_1}$ sono le proiezioni canoniche (a volte scriveremo da qui in poi π'_f in luogo di $\pi'_{\text{cod}(f)}$ per alleggerire la notazione).

Poichè $\forall f \in D_1, \exists F(\text{cod}(f)) \in \{FA\}_{A \in D_0}$, allora, $\forall f \in D_1$ esisterà $\pi_{\text{cod}(f)} : \prod_{A \in D_0} FA \rightarrow F(\text{cod}(f))$.

Quindi, poichè $(\prod_{f \in D_1} F(\text{cod}(f)), \{\pi'_{\text{cod}(f)}\}_{f \in D_1})$ è un prodotto, esisterà unica $\alpha : \prod_{A \in D_0} FA \rightarrow \prod_{f \in D_1} F(\text{cod}(f))$ tale che $\pi'_f \circ \alpha = \pi_{\text{cod}(f)}, \forall f \in D_1$.

Inoltre, per ragioni analoghe, esisterà un unico β tale che $\pi'_f \circ \beta = Ff \circ \pi_{\text{dom}(f)}, \forall f \in D_1$, vedi il seguente diagramma:

$$\begin{array}{ccccc} Z & \xrightarrow{\varepsilon_A} & FA & & F(\text{cod}(f)) \\ \Omega \downarrow & \searrow \gamma & \uparrow \pi_A & \nearrow \pi_{\text{cod}(f)} & \uparrow \pi'_f \\ E & \xrightarrow{e} & \prod_{A \in D_0} FA & \xrightarrow[\beta]{\alpha} & \prod_{f \in D_1} F(\text{cod}(f)) \\ \eta_A \downarrow & \nearrow \pi_A & \downarrow \pi_{\text{dom}(f)} & & \downarrow \pi'_f \\ FA & & F(\text{dom}(f)) & \xrightarrow{Ff} & F(\text{cod}(f)) \end{array}$$

Consideriamo allora l'equalizzatore (E, e) di $\prod_{A \in D_0} FA \xrightarrow[\beta]{\alpha} \prod_{f \in D_1} F(\text{cod}(f))$.

Definiamo $\eta_A = \pi_A \circ e, \forall A \in D_0$. Vogliamo provare che (E, η) così definito è il limite di F .

Vediamo subito che $\forall f : A \rightarrow B, f \in D_1$ si ha che

$$Ff \circ \eta_A = Ff \circ \pi_A \circ e = \pi'_f \circ \beta \circ e = \pi'_f \circ \alpha \circ e = \pi_B \circ e = \eta_B$$

da cui $\eta = \{\eta_A\}_{A \in D_0}$ è effettivamente una trasformazione naturale

$\eta : \Delta_E \Rightarrow F$; e quindi $(E, \eta) \in \mathbf{Cone}(F)$.

Sia ora (Z, ε) un altro cono di F . Allora poichè $(\prod_{A \in D_0} FA, \{\pi_A\}_{A \in D_0})$ è un prodotto esiste unica $\gamma : Z \rightarrow \prod_{A \in D_0} FA$ tale che $\pi_A \circ \gamma = \varepsilon_A, \forall A \in D_0$ (vedi figura precedente).

A questo punto, notiamo che per ogni morfismo $f \in D_1, f \in C(A, B)$, si ha

$$\pi'_f \circ \alpha \circ \gamma = \pi_B \circ \gamma = \varepsilon_B = Ff \circ \pi_A \circ \gamma = \pi'_f \circ \beta \circ \gamma$$

da cui segue $\alpha \circ \gamma = \beta \circ \gamma$. Quindi, poichè (E, e) è un equalizzatore, esiste unica $\Omega : Z \rightarrow E$ tale che $e \circ \Omega = \gamma$. Quindi, $\exists A \in D_0, \eta_A \circ \Omega = \pi_A \circ e \circ \Omega = \pi_A \circ \gamma = \varepsilon_A$. Questo prova che (E, η) è il limite richiesto e conclude la dimostrazione. □

Corollario. *In una categoria \mathbf{C} sono equivalenti:*

- 1) \mathbf{C} ha tutti i limiti finiti
- 2) \mathbf{C} ha tutti i prodotti finiti e gli equalizzatori
- 3) \mathbf{C} ha un oggetto terminale e tutti i pullbacks

Dimostrazione. Segue facilmente dal teorema precedente e da quanto visto per i pullbacks. □

Ovviamente valgono anche i risultati duali.

Si vede quindi come in qualche modo le strutture studiate prima dei limiti siano molto importanti; in particolare si vede come prodotti ed equalizzatori siano una sorta di base per i limiti. La proprietà di avere tutti i limiti finiti è particolarmente importante e merita di essere studiata a parte.

2.5.1 Categorie complete

Pensando ai limiti si potrebbe pensare che rivestano particolare importanza le categorie in cui esistano tutti i limiti di diagrammi $F : \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{C}$ con \mathbf{D} categoria qualsiasi, e si vorrebbe chiamare tali categorie 'complete'. Tuttavia un candidato che noi vorremmo essere completo, per la sua notevole importanza, è \mathbf{Set} , ma se prendiamo $F : \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{Set}$ con \mathbf{D} categoria discreta avente una classe di oggetti, vediamo che il limite di F non esiste (sarebbe il prodotto di una classe di oggetti, che non è un insieme). Di più, si ha il seguente

Teorema. *Preso una categoria \mathbf{C} , supponiamo che $\forall F : \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{C}, \mathbf{D}$ categoria qualsiasi, esista il limite di F . Allora, \mathbf{C} è semplicemente una classe munita di una relazione di preordine. Lo stesso risultato vale sostituendo dovunque la parola 'categoria' con la parola 'categoria piccola' o con 'categoria finita'.*

Per la dimostrazione si rimanda a [Bor94].

Quindi una siffatta definizione di categoria completa sarebbe poco significativa per i nostri fini. Diamo dunque una definizione più utile:

Definizione. Una categoria \mathbf{C} si dice completa quando per ogni diagramma F di tipo \mathbf{D} in \mathbf{C} , con \mathbf{D} categoria piccola, esiste il limite di F . Se vale lo stesso con \mathbf{D} categoria finita, allora \mathbf{C} si dirà categoria finitamente completa.

Analogamente si dà la definizione duale, quella di cocompletezza.

Il teorema fondamentale visto nella sezione precedente ci descrive condizioni necessarie e sufficienti affinché una categoria sia completa in termini di esistenza di prodotti ed equalizzatori, e quindi se ne comprende ora bene l'importanza.

Infatti così riesce che le categorie *Set*, *Top*, *Top**, *Gr*, *Abgr*, *Mon*, *Pos*, *Rng* e *Grph* sono complete e cocomplete come conseguenza.

Tuttavia non si deve pensare che se una categoria è completa, allora debba essere cocompleta o viceversa.

Infatti la categoria *Ord* degli ordinali è cocompleta, ma non avendo oggetto terminale non può essere completa. Vale però il seguente risultato, che non verrà dimostrato:

Teorema. *Una categoria \mathbf{C} piccola è completa se e soltanto se è cocompleta.*

Per la dimostrazione e una trattazione più esauriente del rapporto tra completezza e cocompletezza, si veda [AHS04].

2.5.2 Funtori e limiti

Vediamo ora come agiscono i funtori sui limiti:

Definizione. Un funtore $F : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{K}$ preserva i limiti quando per ogni diagramma G di tipo \mathbf{D} in \mathbf{C} , con \mathbf{D} categoria piccola, se (L, η) è un limite di G , allora ne segue che (FL, ε) è un limite di $F \circ G$, con $\varepsilon = \{F\eta_A\}_{A \in D_0}$. Viceversa, F riflette i limiti se per ogni cono $(L, \eta) \in \mathbf{Cone}(G)$ vale che se (FL, ε) è un limite di $F \circ G$, allora (L, η) è un limite di G .

Una immediata conseguenza del teorema fondamentale sui limiti è dunque che:

Proposizione. *Sia \mathbf{C} una categoria completa e sia \mathbf{D} una categoria qualsiasi. Allora $F : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$ preserva i limiti se e soltanto se preserva i prodotti e gli equalizzatori.*

Un notevole esempio a riguardo è:

Proposizione. *Preso una categoria \mathbf{C} e un suo oggetto A , il funtore covariante di rappresentazione $C(A, -) : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{Set}$ preserva tutti i limiti, (anche quelli larghi)*

Dimostrazione. Ad una dimostrazione generale (comunque semplice, vedi [Bor94]), preferiamo (seguendo [Awo10]) una dimostrazione diretta che usi

la proposizione precedente (e che quindi non considera i limiti larghi). Abbiamo già visto parlando dei prodotti che $C(A, -)$ preserva i prodotti binari; ripercorrendo la dimostrazione data allora vediamo che essa può essere estesa al caso di prodotti qualsiasi. Quindi possiamo dire che $C(A, -)$ preserva i prodotti.

Ci resta da far vedere che $C(A, -)$ preserva gli equalizzatori. A tal fine si

prenda un equalizzatore $E \xrightarrow{e} X \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \xrightarrow{g} \end{array} B$ in \mathbf{C} . Esso è mappato in

$$C(A, E) \xrightarrow{C(A, e)} C(A, X) \begin{array}{c} \xrightarrow{C(A, f)} \\ \xrightarrow{C(A, g)} \end{array} C(A, B)$$

Vediamo che questo è un equalizzatore.

Dato $H = \{h \in C(A, X) \mid C(A, f)(h) = C(A, g)(h)\}$, preso un qualsiasi insieme Z con $z : Z \rightarrow C(A, X)$ tale che $C(A, f) \circ z = C(A, g) \circ z$ si ha che $\text{Im}(z) \subseteq H$. Prendiamo $h : A \rightarrow X \in C(A, X)$ tale che $C(A, f)(h) = C(A, g)(h)$. Allora $fh = gh$ e quindi esiste un unico $u : A \rightarrow E$ tale che $e \circ u = h$ poichè (E, e) è un equalizzatore. Allora abbiamo un unico $u \in C(A, E)$ tale che $C(A, e)(u) = eu = h$. Dunque $C(A, E)$ è isomorfo ad H mediante $C(A, e)$. Da questo segue quindi che $\exists! \varphi : Z \rightarrow C(A, E)$ tale che $z = C(A, E) \circ \varphi$ e dunque $(C(A, E), C(A, e))$ è un equalizzatore in \mathbf{Set} . \square

Dualizzando, come corollario abbiamo

Proposizione. *Il funtore controvariante di rappresentazione $C(-, A) : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{Set}$ trasforma i limiti in colimiti.*

Dimostrazione. Infatti per la proposizione precedente $C^{op}(A, -) : \mathbf{C}^{op} \rightarrow \mathbf{Set}$ preserva i limiti. \square

Concentriamoci ora sulla riflessione:

Proposizione. *$F : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{K}$ un funtore che preserva i limiti. Allora, se \mathbf{C} è completa e F riflette gli isomorfismi, segue che F riflette i limiti.*

Dimostrazione. Consideriamo \mathbf{D} categoria piccola e $G : \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{C}$ diagramma di \mathbf{D} in \mathbf{C} . Sia ora (L', ρ) un cono di G tale che (FL', ξ) , con $\xi = \{F\rho_A\}_{A \in D_0}$ sia limite di $F \circ G$. Consideriamo (L, η) limite di G , che esiste in quanto \mathbf{C} è completa; poichè F preserva i limiti, (FL, ε) sarà un limite di $F \circ G$, con $\varepsilon = \{F\eta_A\}_{A \in D_0}$. Allora in \mathbf{K} esiste, poichè il limite è unico a meno di isomorfismi, $h : FL \rightarrow FL'$ isomorfismo, e poichè F riflette gli isomorfismi per ipotesi, esiste $f : L \rightarrow L'$ in \mathbf{C} tale che f sia un isomorfismo. Quindi (L', ρ) è limite di G .

□

Infine vediamo un altro risultato interessante

Proposizione. *Un funtore pieno e fedele riflette i limiti.*

Dimostrazione. Sia $F : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{K}$ un funtore pieno e fedele e sia $G : \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{C}$ un diagramma di \mathbf{D} in \mathbf{C} con \mathbf{D} piccolo. Con le notazioni ormai standard, sia (L, η) un cono di G tale che (FL, ε) sia un limite di $F \circ G$. Allora preso un altro $(L', \rho) \in \mathbf{Cone}(G)$, poichè (FL, ε) è un limite, esiste unica $h : FL' \rightarrow FL$ tale che $F\eta_A \circ h = F\rho_A$ e poichè F è pieno e fedele, $\exists ! l : L' \rightarrow L$ morfismo tale che $F(l) = h$. Quindi $\eta_A \circ l = \rho_A, \forall A \in D_0$, e dunque (L, η) è limite di G .

□

Facciamo alcuni esempi

- Il funtore dimenticante $U : \mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{Set}$ preserva limiti e colimiti.
- Il funtore dimenticante $U : \mathbf{Abgr} \rightarrow \mathbf{Set}$ preserva i limiti e poichè \mathbf{Abgr} è completa e U riflette gli isomorfismi allora U riflette i limiti.

2.5.3 Limiti nella categoria dei funtori

Supponiamo di avere tre categorie, $\mathbf{C}, \mathbf{D}, \mathbf{K}$ con \mathbf{C} e \mathbf{D} categorie piccole. Consideriamo ora la categoria $\mathbf{Fun}(\mathbf{C}, \mathbf{K})$, che denotiamo con $\mathbf{K}^{\mathbf{C}}$. Dato un funtore $F : \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{K}^{\mathbf{C}}$ siamo qui interessati a studiare il limite di tale funtore.

A tale scopo, scelto un qualsiasi $C \in C_0$, otteniamo un funtore $F_C(-) : \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{K}$ che associa a $L \in D_0$ $F(L)(C)$ e otteniamo $\forall f : A \rightarrow B$ in C_1 una trasformazione naturale $F_f(-) : F_A(-) \Rightarrow F_B(-)$.

Supponiamo ora che per ogni $E \in C_0$ esista il limite di $F_E(-)$, sia $(L(E), \{\eta_P^E\}_{P \in D_0})$ con $\eta_P^E : L(E) \rightarrow F_E(P)$.

Inoltre per ogni $f : A \rightarrow B$ in C_1 , si ha che F_f induce una $L(f) : L(A) \rightarrow L(B)$ tale che

$$\eta_P^B \circ L(f) = F_f(P) \circ \eta_P^A$$

Allora abbiamo fatto vedere che $L : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{K}$ è un funtore (e quindi un elemento di $\mathbf{K}^{\mathbf{C}}$) e di più possiamo vedere che $\{\eta_P^E : L(E) \rightarrow F_E(P)\}_{E \in C_0}$ è una trasformazione naturale (ovvero un morfismo di $\mathbf{K}^{\mathbf{C}}$) $\varepsilon_P : L \Rightarrow F(P)$. Allora vogliamo far vedere che $(L, \{\varepsilon_P\}_{P \in D_0})$ è il limite di F ; in questo caso si dirà che il limite è calcolato puntualmente, ovvero il limite di F calcolato in $A \in C_0$ è uguale al limite di $F_A(-)$.

Vediamo innanzi tutto che (L, ε) è un cono: se $p : P \rightarrow P'$ è un morfismo

di D_1 , si ha che $\forall A \in C_0$ riesce che $F_A(p) \circ \eta_P^A = \eta_{P'}^A$, da cui $F(p) \circ \varepsilon_P = \varepsilon_{P'}$ e quindi

$$\begin{array}{ccc} & L & \\ \varepsilon_P \swarrow & & \searrow \varepsilon_{P'} \\ FP & \xrightarrow{F(p)} & FP' \end{array}$$

commuta $\forall p \in D_1$, quindi (L, ε) è un cono.

Orbene, se $(L', \theta) \in \mathbf{Cone}(F)$, allora ogni $(L'(A), \{\theta_P^A\}_{P \in D_0})$ è un cono di $F_A(-)$, e questo permette (poichè $L(A)$ è il limite di $F_A(-)$) di costruire una unica fattorizzazione $\varphi_A : L'(A) \rightarrow L(A)$ tale che $\eta_P^A \circ \varphi_A = \theta_P^A$, ovvero commuti

$$\begin{array}{ccc} L'(A) & & \\ \varphi_A \downarrow & \searrow \theta_P^A & \\ L(A) & \xrightarrow{\eta_P^A} & F_A(P) \end{array}$$

Allora $\{\varphi_A\}_{A \in C_0}$ sono una trasformazione naturale $\varphi : L' \Rightarrow L$ poichè, dato un $f : A \rightarrow B$ in C_1 si ha

$$\eta_P^B \circ L(f) \circ \varphi_A = F_f(P) \circ \eta_P^A \circ \varphi_A = F_f(P) \circ \theta_P^A = \theta_P^B \circ L'(f) = \eta_P^B \circ \varphi_B \circ L'(f)$$

ovvero commuta:

$$\begin{array}{ccccc} & & L'(A) & & \\ & & \downarrow \varphi_A & \searrow \theta_P^A & \\ & L'(f) & L(A) & \xrightarrow{\eta_P^A} & F_A(P) \\ & & \downarrow L(f) & & \downarrow F_f(P) \\ L'(B) & \xrightarrow{\varphi_B} & L(B) & & \\ & \searrow \theta_P^B & \downarrow \eta_P^B & & \\ & & F_B(P) & & \end{array}$$

e quindi $L(f) \circ \varphi_A = \varphi_B \circ L'(f)$ (in quanto $L(B)$ è limite di $F_B(-)$ e questi sarebbero due diversi morfismi di coni da $(L'(A), \{\eta_P^B \circ L(f) \circ \varphi_A\}_{P \in D_0}) = \{\eta_P^B \circ \varphi_B \circ L'(f)\}_{P \in D_0}$ a $(L(B), \{\eta_P^B\}_{P \in D_0})$). Ma i φ_C sono unici e quindi $\varphi : L' \Rightarrow L$ è l'unica trasformazione naturale tale che $\varepsilon_P \circ \varphi = \theta_P \quad \forall P \in D_0$. Quindi (L, ε) è il limite di F .

Abbiamo dunque dimostrato:

Proposizione. *Siano $\mathbf{C}, \mathbf{D}, \mathbf{K}$ categorie, con \mathbf{C} e \mathbf{D} categorie piccole. Allora se per ogni $E \in C_0$ esiste il limite di $F_E(-) : \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{K}$, allora si ha che $F : \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{K}^{\mathbf{C}}$ ha limite calcolato puntualmente.*

Siamo ora in grado di dimostrare il seguente

Teorema. *Consideriamo una categoria piccola \mathbf{C} e sia $Y : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{Set}^{\mathbf{C}^{\text{op}}}$ il funtore di immersione di Yoneda. Allora Y preserva e riflette i limiti*

Dimostrazione. Si era già visto che Y è pieno e fedele, pertanto Y riflette i limiti.

Per vedere che li preserva, consideriamo un funtore $F : \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{C}$ con limite $(L, \{\varepsilon_P\}_{P \in D_0})$. Dobbiamo far vedere che $(C(-, L), \{C(-, \varepsilon_P)\}_{P \in D_0})$ è il limite del funtore di $Y \circ F$ e questo, per la proposizione precedente, è vero se per tutti gli A in \mathbf{C} , $(C(A, L), \{C(A, \varepsilon_P)\}_{P \in D_0})$ è il limite del funtore covariante di rappresentazione $C(A, F(-)) : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{Set}$. Quest'ultima affermazione tuttavia è vera in quanto si è visto che tale funtore preserva i limiti.

□

Quanto si è visto, oltre che a darci un bel saggio della struttura delle categorie di funtori, evidenzia la potenza del funtore Y . Infatti, procedendo con la teoria, si ha che $\mathbf{Set}^{\mathbf{C}^{\text{op}}}$, per \mathbf{C} piccola, è completa e cocompleta, a prescindere da \mathbf{C} (vedi [Bor94]), pertanto, come si può intuire, avere la possibilità di collegare una qualsiasi categoria piccola ad una categoria completa e cocompleta mediante un funtore che preserva e riflette i limiti rappresenta un grande vantaggio nello studiare problemi legati ai limiti in \mathbf{C} stessa; di più, ciò è ancora più importante visto che $\mathbf{Set}^{\mathbf{C}^{\text{op}}}$ è una categoria legata in modo molto naturale a \mathbf{C} .

2.5.4 Il teorema di Van-Kampen in forma generale

Vogliamo infine mostrare come la teoria sviluppata sin qui permetta di esprimere in un linguaggio molto conciso ed elegante risultati molto forti, rendendone inoltre le relative dimostrazioni notevolmente chiarificate.

Come annunciato laddove studiavamo i pushouts, siamo qui pronti a dare la generalizzazione del teorema di Van Kampen. Per farlo seguiremo da vicino l'argomento ben esposto in [May99]

Essa richiede il concetto di gruppoide fondamentale di uno spazio topologico, che abbiamo introdotto precedentemente (per una discussione più approfondita vedi [Spa66] o [May99]).

Richiamiamo all'attenzione il fatto che è possibile definire un funtore

$\Pi : \mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{Gps}$ che associa ad ogni spazio topologico il proprio gruppoide fondamentale. \mathbf{Gps} è la categoria dei gruppidi, ed essa è completa e cocompleta.

Consideriamo ora uno spazio topologico X e consideriamo un suo ricoprimento $\Sigma = \{U_i\}_{i \in I}$ (I insieme) con U_i aperto connesso per archi $\forall i \in I$ e tale che l'intersezione di una qualsiasi famiglia finita di sottoinsiemi di Σ sia

ancora un elemento $U_i \in \Sigma$.

Allora possiamo guardare a Σ come ad una sottocategoria di **Top** avente come oggetti gli U_i e come morfismi le funzioni di inclusione.

Resta dunque definito un diagramma di tipo Σ in **Gps** ottenuto restringendo Π , ovvero abbiamo $\Pi|_{\Sigma} : \Sigma \rightarrow \mathbf{Gps}$ che porta U_i nel suo gruppoide fondamentale $\Pi(U_i)$.

Abbiamo quindi il seguente:

Teorema (Van Kampen generalizzato). *Sia X uno spazio topologico. Allora nelle notazioni precedenti si ha che $\Pi(X)$ è il colimite di $\Pi|_{\Sigma}$.*

Dimostrazione. Poichè **Gps** è cocompleta, il colimite di $\Pi|_{\Sigma}$ esiste e lo denoteremo con G . Vediamo che $\Pi(X) \in \mathbf{Cocone}(\Pi|_{\Sigma})$: ciò è ovvio in quanto in **Gps**, per come sono definiti gli U_i , i morfismi di inclusione $\varepsilon_{U_i} : \Pi(U_i) \rightarrow \Pi(X)$ formano una trasformazione naturale $\varepsilon : \Pi|_{\Sigma} \Rightarrow \Delta_{\Pi(X)}$. Quindi $\Pi(X) \in \mathbf{Cocone}(\Pi|_{\Sigma})$.

Sia ora $\eta : \Pi|_{\Sigma} \Rightarrow \Delta_G$ la trasformazione naturale del colimite G . Allora per la definizione di colimite esiste un'unica $\varphi : G \rightarrow \Pi(X)$ mappa di coconi. Se mostriamo che esiste una unica $\psi : \Pi(X) \rightarrow G$ tale che $\eta_{U_i} = \psi \circ \varepsilon_{U_i}, \forall i \in I$ allora avremo dimostrato che $\Pi(X)$ è isomorfo a G in quanto si avrebbe, per le richieste di unicità che φ è l'inversa di ψ ($\varphi \circ \psi = id_G$ e viceversa). Quindi $\Pi(X)$ sarebbe il colimite di $\Pi|_{\Sigma}$ come desiderato.

Costruiamo quindi una ψ soddisfacente la suddetta condizione, ovvero tale che $\psi|_{\Pi(U_i)} = \eta_{U_i}, \forall i \in I$.

Sugli oggetti, definiamo quindi obbligatoriamente $\psi(x) = \eta_{U_i}(x), \forall x \in U_i \forall i \in I$. Per come è fatto Σ si vede che questa richiesta è sensata per la condizione sulle intersezioni finite.

Vediamo ora come agisce ψ sulle classi di omotopia $[f]$.

Se una $f : a \rightarrow b^3$ giace interamente in un aperto U_i , allora siamo costretti a definire $\psi([f]) = \eta_{U_i}([f])$, e questa definizione è indipendente dalla scelta di U_i per la struttura di Σ .

Analogamente, una qualsiasi $f : a \rightarrow b$ in X è una composizione finita di $f_j : a_j \rightarrow b_j$ ($j \in J$ finito) ciascuna giacente interamente in un solo U_i ; allora siamo forzati a definire $\psi([f])$ come composizione degli $\psi([f_j])$ definite in precedenza. Ci resta da far vedere che la definizione di ψ è ben posta, ovvero che presi f e g cammini omotopi a estremi fissi, allora $\psi([f]) = \psi([g])$, ovvero che $\psi([f])$ non dipende dalla scelta di $g \in [f]$. Siano dunque f e g due siffatti cammini, $f, g : a \rightarrow b$ e sia $h : L \times L \rightarrow X$ (L intervallo $[0,1]$) l'omotopia che li lega.

Allora possiamo suddividere il rettangolo $L \times L$ in un numero finito di sottorettangoli aventi ciascuno immagine contenuta interamente in un U_i e tali

³Con $f : a \rightarrow b$ si indica, seguendo la notazione suggestiva di May, un cammino da a a b in X .

che $L \times \{0\}$ sia il dominio della scomposizione di f in $\{f_j\}$ sopra enunciata e che $L \times \{1\}$ sia l'analogo per g . Allora si può vedere $[f] = [g]$ in $\Pi(X)$ come conseguenza di un numero finito di relazioni valide ciascuna in un $\Pi(U_i)$. Quindi poichè tali relazioni sono in numero finito, riesce $\psi([f]) = \psi([g])$ e la definizione è ben posta.

Inoltre poichè le scelte fatte nel definire ψ erano le uniche possibili per cui tale morfismo soddisfacesse $\eta_{U_i} = \psi \circ \varepsilon_{U_i}, \forall i \in I$, allora ψ è unica.

Ciò conclude la dimostrazione.

□

Riesce facile intuire come questo generalizzi il classico teorema per i gruppi fondamentali. Se infatti X è connesso per archi, e si può operare una suddivisione Σ come sopra, possiamo egualmente considerare il funtore $\pi_1|_{\Sigma} : \Sigma \rightarrow \mathbf{Gr}$ e ottenere che:

Teorema. *Sia X uno spazio connesso per archi con punto base x . Allora, nelle notazioni precedenti, $\pi_1(X, x)$ è il colimite di $\pi_1|_{\Sigma}$.*

La dimostrazione segue formalmente dal teorema precedente ed è puntualmente riportata in [May99] che abbiamo fin qui seguito fedelmente.

Notiamo esplicitamente che i precedenti teoremi valgono anche per ricoprimenti non necessariamente finiti, il che è molto rilevante.

Ci si può inoltre chiedere se si possa vedere il risultato appena trovato per il gruppo fondamentale nell'ottica di un prodotto amalgamato, come si era visto nella sezione riguardante i pushouts.

Ebbene la risposta è positiva ed analoga, ma richiederebbe di sviluppare meglio il concetto di prodotto libero amalgamato, cosa impossibile nel contesto di questo elaborato.

per una discussione molto bella su tali prodotti (e per molto altro) si rimanda al classico, bellissimo [MKS76].

2.5.5 Funtori aggiunti

Esiste, nella teoria delle categorie, un concetto molto più profondo di quello di limite: quello di funtore aggiunto.

Daremo qui la definizione di tale concetto e enunceremo senza dimostrare alcuni risultati molto potenti legati ai limiti che coinvolgono questo concetto. Per le relative dimostrazioni e per molti (moltissimi) altri risultati rimandiamo in primo luogo a [Bor94] e poi a [Awo10], [Oo02], [MacL97] o ad un qualsiasi valido testo sulla teoria delle categorie.

Esistono svariati modi per introdurre i funtori aggiunti, a seconda del contesto. Qui noi preferiamo partire dal concetto di riflessione:

Definizione. Sia $F : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$ un funtore e sia A un oggetto di \mathbf{D} . Una riflessione di A lungo F è una coppia (GA, η_A) tale che

- 1) $GA \in C_0$ e $\eta_A \in D(A, FGA)$
- 2) Sia $E \in C_0$ e $a : A \rightarrow F(E)$ un morfismo di \mathbf{D} , allora esiste un unico $b : GA \rightarrow E$ in \mathbf{C} tale che $F(b) \circ \eta_A = a$.

$$\begin{array}{ccccc}
 GA & \xrightarrow{b} & E & \overset{F}{\rightsquigarrow} & A & \xrightarrow{\eta_A} & FGA \\
 & & & & \searrow a & & \downarrow F(b) \\
 & & & & & & F(E)
 \end{array}$$

Si può dimostrare che le riflessioni sono uniche a meno di isomorfismi. Inoltre riesce che

Proposizione. *Si consideri $F : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$ funtore e si supponga che $\forall A \in D_0$ esista la riflessione (GA, η_A) . Allora $\exists! G : \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{C}$ funtore tale che*

- 1) $\forall A \in D_0, G(A) = GA$
- 2) $\{\eta_A : A \rightarrow FGA\}_{A \in D_0}$ è una trasformazione naturale $1_{\mathbf{D}} \Rightarrow F \circ G$.

Diamo quindi ora la seguente

Definizione. Un funtore $G : \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{C}$ è aggiunto sinistro del funtore $F : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$ quando esiste una trasformazione naturale $\eta : 1_{\mathbf{D}} \Rightarrow F \circ G$ tale che $\forall A \in D_0 (GA, \eta_A)$ è proprio una riflessione di A lungo F .

Grazie alla unicità della riflessione, si ha che l'aggiunta sinistra è unica a meno di isomorfismi e per la proposizione precedente si ha che F ha aggiunta sinistra se e soltanto se $\forall A \in D_0$ esiste una riflessione (GA, η_A) di A lungo F .

In modo del tutto analogo si può dare la definizione di aggiunta destra.

Quando nelle notazioni precedenti si ha che G è aggiunta sinistra di F e F è aggiunta destra di G , si scrive $G \dashv F$.

Un esempio importante di aggiunta è $ab \dashv i$ dove $i : \mathbf{Abgr} \rightarrow \mathbf{Gr}$ è il funtore di inclusione e ab è il funtore di abelianizzazione.

Enunciamo ora senza ulteriori indugi i potenti risultati che avevamo annunciato

Teorema. *Siano $\mathbf{C} \xrightleftharpoons[G]{F} \mathbf{D}$ due funtori tali che $G \dashv F$. Allora si ha che:*

- 1) F preserva tutti i limiti che esistono in \mathbf{C} .
- 2) G preserva tutti i colimiti che esistono in \mathbf{D} .

Proposizione. *Una categoria \mathbf{C} è cocompleta se e soltanto se per ogni \mathbf{D} categoria piccola,*

$$\Delta_{(-)} : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{Fun}(\mathbf{D}, \mathbf{C})$$

ha aggiunta sinistra. Dualmente \mathbf{C} è completa se e solo se per ogni \mathbf{D} categoria piccola, $\Delta_{(-)}$ ha aggiunta destra.

Diamo poi la seguente

Definizione. Un funtore $F : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$ soddisfa la solution set condition, abbreviata SSC, per un oggetto $B \in D_0$ quando esiste un insieme I_B di oggetti di \mathbf{C} tale che per ogni $f : B \rightarrow FA$ con $A \in C_0$ si ha che esistono $a : A' \rightarrow A$ e $f' : B \rightarrow FA'$ con $A' \in I_B$ tali che commuti

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{f} & FA \\ & \searrow f' & \uparrow F(a) \\ & & FA' \end{array}$$

ovvero $F(a) \circ f' = f$

Possiamo ora enunciare il fondamentale

Teorema (del funtore aggiunto). *Sia data una categoria completa \mathbf{C} e un funtore $F : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$. Allora F ha aggiunta sinistra se e soltanto se F preserva i limiti piccoli e soddisfa la SSC per ogni $B \in D_0$.*

Valgono in tutti i casi i risultati duali.

Tutti questi risultati (e altri che non si sono qui riportati) mostrano quanto la nozione di limite (e colimite) e la correlata nozione di categoria completa siano profondamente legate al concetto di funtore aggiunto; si vede infatti come il fatto che determinati funtori abbiano aggiunta sinistra o destra ci dia come conseguenza che tali funtori preservino i limiti o i colimiti e inoltre si vede come si possa ricondurre lo studio della completezza e della cocompletezza allo studio dell'aggiunta destra o sinistra di particolari funtori.

Ciò porta dunque ad uno studio approfondito e sistematico del concetto di aggiunta che nel procedere della teoria si rivelerà sempre più importante e frequentemente ricorrente, nonchè rivelatore di nuove 'magie' della teoria delle categorie.

Dunque, nonostante questo elaborato si avvii ormai alla sua conclusione, si vede come restino da percorrere ancora molte strade nel mondo delle categorie, che portano molto lontano verso territori fantastici, alcuni dei quali tuttora in attesa di essere esplorati.

Bibliografia

- [AHS04] Adamek, Herrlich, Strecker, *Abstract and concrete categories*, Dover, 2004.
- [Awo10] S.Awoodey, *Category theory*, Oxford logic guides, 2010.
- [AL91] A.Asperti, G.Longo *Categories, types and structures. An introduction to category theory for the working computer scientist*, M.I.T. press, 1991.
- [Bor94] F.Borceux, *Handbook of categorical algebra*, volume 1, Cambridge university press, 1994.
- [Bor94II] F.Borceux, *Handbook of categorical algebra*, volume 2, Cambridge university press, 1994.
- [John97] D.L.Johnson, *Presentation of groups*, Cambridge university press, 1997.
- [MacL97] S.Mac Lane, *Categories for the working mathematician*, Springer, 1997.
- [Lang05] S.Lang, *Algebra*, Springer, 2005.
- [MKS76] Magnus, Karrass, Solitar, *Combinatorial group theory. Presentation of groups in terms of generators and relations*, Dover, 1976.
- [May99] J.P.May, *A concise course in algebraic topology*, Chicago university press, 1999.
- [MLar92] C.Mclarty, *Elementary categories, elementary toposes*, Oxford logic guides, 1992.
- [Mun00] J.Munkres, *Topology*, Prentice Hall, 2000.
- [Oo02] J.V.Oosten, *Basic category theory*, 2002, reperibile online.
- [Spa66] E.H.Spainer, *Algebraic topology*, Springer, 1966.