

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

Scuola di Scienze
Corso di Laurea in Fisica

Regole di Feynman per la cromodinamica quantistica

Relatore:

Dott. Alexandr
Kamenchtchik

Presentata da:

Stefano Pieri

Sessione I

Anno Accademico 2012/2013

1 Abstract

Nella seguente tesi si è voluto studiare le regole di Feynman per i diagrammi al primo ordine in cromodinamica quantistica, utilizzando il formalismo dell'integrale sui cammini. Per fare ciò si è in principio cercato una formulazione adeguata della meccanica quantistica, ed in particolare per gli elementi di matrice; si è poi passati alla dimostrazione dell'esistenza di un funzionale generatore attraverso il quale poter calcolare agevolmente gli elementi di matrice stessi. Si è poi passati alla trattazione, sempre con il medesimo formalismo, di una teoria quantistica di campo attraverso i valori di aspettazione del vuoto del prodotto di operatori cronologicamente ordinati, ricavando quindi il propagatore per i campi di spin 0 e $1/2$. Successivamente si sono introdotti i concetti di gruppo di simmetria e campi di gauge, costruendo una lagrangiana quantistica invariante per trasformazioni $U(1)$ e $SU(N)$, con particolare attenzione al gruppo $SU(3)$; si è ricavato la forma per l'integrale sui cammini di quantità gauge invarianti e, conseguentemente, all'introduzione del determinante di Faddeev-Popov e del campo ghost.

Infine si sono calcolati i propagatori del campo ghost e dei bosoni di gauge, e le regole di Feynman per i vertici a tre e a quattro gluoni, fermione-gluone e gluone-ghost.

Indice

1	Abstract	1
2	Introduzione	3
3	L'integrale sui cammini nella meccanica quantistica	5
3.1	Rappresentazione degli elementi di matrice attraverso l'integrale sui cammini	5
3.2	Elementi di matrice degli operatori di posizione	8
3.3	Transizioni vacuum-to-vacuum	9
3.4	Rappresentazione delle funzioni di Green come integrali sui cammini . . .	13
3.5	Propagatore per un campo di spin 0	15
3.6	Propagatore di Dirac	17
4	Teorie di gauge	19
4.1	Gruppi di simmetria, campi di gauge	19
4.2	Invarianza di gauge e integrale sui cammini	24
4.3	Determinante di Faddeev-Popov	26
4.4	Caso dell'elettrodinamica quantistica	27
5	Regole di Feynman per la QCD	30
5.1	Calcolo del determinante di Faddeev-Popov	30
5.2	Funzionale generatore completo	32
5.3	Funzioni di Green al primo ordine. Vertici in QCD	33
6	Conclusioni	38
7	Bibliografia	39

2 Introduzione

La fisica delle interazioni fondamentali si propone di ricondurre tutti i fenomeni nucleari e subnucleari ad un insieme di teorie e di leggi che, almeno in linea di principio, spieghino e permettano di predire quantitativamente le osservazioni empiriche. A livello microscopico, tutta la fenomenologia della materia e della radiazione, ossia della fisica molecolare, atomica, nucleare e subnucleare, si può riportare a tre tipologie di interazioni fondamentali: le elettromagnetiche, le deboli e le forti. Le forze elettromagnetiche sono responsabili della struttura atomica, legando gli elettroni al nucleo, e quindi delle proprietà chimiche degli elementi; alle interazioni deboli sono dovuti i decadimenti nucleari β^+ e β^- , quelli dei pioni carichi e dei leptoni carichi μ^+ , μ^- , τ^+ e τ^- , quelli delle particelle adroniche dotate di numeri quantici di stranezza, charm e beauty, il decadimento del quark top, osservato per la prima volta al Tevatron nel 1995 e tutte le interazioni neutriniche. Le interazioni forti invece assemblano protoni e neutroni all'interno del nucleo, essendo a piccole distanze così intensamente attrattive da prevalere sulla repulsione elettromagnetica tra le cariche positive dei protoni. In realtà l'interazione forte avviene soltanto tra particelle fondamentali chiamate quark, che potendo agglomerarsi a due o a tre, danno vita a due famiglie di particelle: i mesoni, costituiti da una coppia di quark-antiquark, e i barioni, costituiti da tre quark come i protoni e i neutroni. L'insieme delle tre teorie di campo delle singole interazioni dà vita al cosiddetto Modello Standard, che è una teoria coerente, finita e, almeno in linea di principio, calcolabile delle interazioni forti, deboli ed elettromagnetiche. Se al Modello Standard si aggiunge la teoria classica della gravitazione, la teoria della relatività generale, si ottiene tutto ciò che sappiamo circa le quattro forze fondamentali. La descrizione delle tre forze fondamentali nell'ambito della fisica quantistica è operata attraverso le cosiddette teorie quantistiche di campo, ovvero teorie che mettendo assieme i principi di meccanica quantistica e relatività ristretta, tengono conto della possibilità che le particelle quantistiche possano essere create o distrutte. Il modello di riferimento nello studio della fisica subnucleare è il Modello Standard, edificato dai fisici delle particelle fra gli anni '60 e '70, e prevede l'unificazione di due delle forze che agiscono a livello nucleare: la forza elettromagnetica e quella debole sono state riconosciute essere due facce della stessa medaglia, la forza elettrodebole.

La teoria si fonda su una generalizzazione dell'elettrodinamica quantistica (QED), una teoria di campo che, attraverso proprietà di simmetria locale rispetto al gruppo di Lie $U(1)$ riesce nell'intento di descrivere l'interazione di tutte le particelle cariche con il campo elettromagnetico.

L'idea fondamentale è quindi che esistano gruppi di trasformazioni, detti gruppi di simmetria, che lascino invariati le equazioni del moto, a patto che il sistema verifichi una opportuna condizione di gauge. Si riesce in questo modo ad estendere l'invarianza di

gauge dell'elettrodinamica classica ad una classe più vasta di fenomeni al fine di descrivere l'interazione delle particelle con i campi. Particolarità dei modelli è il fatto che le interazioni fra due particelle siano mediate da certe particelle di spin 1, i cosiddetti bosoni di gauge, che sono emessi dalla prima ed assorbiti dalla seconda. In QED l'interazione fra due particelle cariche è mediata dallo scambio di un fotone γ ; nella teoria elettrodebole, oltre al fotone, si hanno anche i bosoni W^+ , W^- e Z^0 . La teoria che invece descrive le interazioni forti è chiamata cromodinamica quantistica (QCD). La QCD è una teoria quantistica di campo che descrive l'interazione tra quark, ed ha la struttura di una teoria di gauge non abeliana con gruppo di simmetria $SU(3)$, nel quale i quark si presentano in tripletti: questo significa che ogni quark può presentarsi in tre possibili colori. Il colore è la carica associata al campo; i mediatori del campo di colore, battezzati gluoni, sono otto e non hanno massa. Esistono due caratteristiche peculiari per la cromodinamica quantistica. La prima è il confinamento: la forza fra quark non diminuisce all'aumentare della distanza. A causa di ciò sarebbe necessaria una quantità infinita di energia per separare due quark, ed essi risultano confinati all'interno degli adroni; la conseguenza diretta di ciò è che non è possibile osservare quark liberi in natura. La seconda invece è la libertà asintotica: al diminuire della distanza la forza fra quark diminuisce, fino a convergere asintoticamente a zero nel caso si annulli. I processi di interazione vengono usualmente visualizzati graficamente attraverso i cosiddetti diagrammi di Feynman, strumenti semplici ma allo stesso tempo molto efficaci per comprendere il fenomeno che si vuole descrivere. Sia la QED che la QCD sono due teorie perturbative, il che significa che non è possibile per un certo processo calcolare esplicitamente la probabilità di transizione da uno stato a un altro senza ricorrere ad approssimazioni successive. Questo si traduce nel fatto che per ottenere risultati sempre più precisi, bisogna considerare un numero crescente di diagrammi di Feynman. QED e QCD hanno però caratteristiche leggermente differenti, in quanto nel primo caso la costante d'accoppiamento è piccola e basta un numero relativamente basso di diagrammi ad approssimare con successo le caratteristiche del processo esaminato; in cromodinamica quantistica la costante d'accoppiamento è più grande e serve considerare un numero di processi di ordine superiore molto maggiore. Ad ogni diagramma comunque è associato un insieme preciso di regole matematiche, che servono per calcolare le ampiezze di probabilità dei processi fisici esaminati; queste sono le note regole di Feynman, ed in questa tesi si cercherà di ricavarle per i diagrammi al prim'ordine in cromodinamica quantistica.

3 L'integrale sui cammini nella meccanica quantistica

3.1 Rappresentazione degli elementi di matrice attraverso l'integrale sui cammini

Lo scopo di questa prima parte è di mostrare come gli elementi di matrice degli operatori quantistici possano essere scritti come integrali funzionali su tutte le traiettorie, con l'integrando dipendente dall'azione integrale. Per la derivazione dei diagrammi di Feynman al primo ordine in QCD si adotterà infatti l'approccio dell'integrale sui cammini. Per prima cosa dunque si cerca di ricavare per gli elementi di matrice una forma integrale sullo spazio delle configurazioni. Si consideri un sistema quantistico con un solo grado di libertà. Esso sarà descritto da un vettore $|x, t\rangle$, che descrive lo stato $|x\rangle$ al tempo t . L'elemento di matrice

$$\langle x', t' | x, t \rangle = \langle x' | \exp[-(i/\hbar)H(t' - t)] | x \rangle \quad (1)$$

corrisponde all'ampiezza di transizione dallo stato $|x\rangle$ nell'istante t allo stato $|x'\rangle$ nell'istante t' , ed è una funzione di Green. Definito $|t\rangle$ dall'equazione $H|t\rangle = i\hbar(\partial/\partial t)|t\rangle$ allora si ha che:

$$|t\rangle \rightarrow H|t\rangle = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |t\rangle$$

$$\langle x | t' \rangle = \int dx' \langle x | \exp[-(i/\hbar)H(t' - t)] | x' \rangle \langle x' | t \rangle \quad (2)$$

Partendo dalla (1) si può costruire un procedimento matematico tale per cui l'elemento di matrice prende la forma di un'integrale multiplo, che verrà poi utilizzato nella definizione di un'integrale funzionale sullo spazio delle configurazioni. Si comincia dividendo l'intervallo temporale $(t' - t)$ in $(n + 1)$ parti uguali di 'larghezza' ϵ

$$t' = (n + 1)\epsilon + t$$

$$t_j = j\epsilon + t \quad (j = 1, \dots, n)$$

Ora si utilizza la relazione di completezza

$$\int dx_j |x_j, t_j\rangle \langle x_j, t_j| = 1 \quad (3)$$

per ogni t_j , che assieme alla relazione

$$\langle x_j, t_j | x_{j-1}, t_{j-1} \rangle = \langle x_j | \exp \left(-\frac{i}{\hbar} \epsilon H \right) | x_{j-1} \rangle \quad (4)$$

fornisce

$$\langle x_j, t_j | x_{j-1}, t_{j-1} \rangle = \langle x_j | x_{j-1} \rangle - \frac{i\epsilon}{\hbar} \langle x_j | H | x_{j-1} \rangle + O(\epsilon^2) \quad (5)$$

in cui i punti $x_0, x_{n+1}, t_0, t_{n+1}$ sono rispettivamente x, x', t, t' . Scegliendo l'Hamiltoniana $H = H(P, X)$ nella forma $H = f(P) + g(X)$ è possibile scrivere

$$\begin{aligned} \langle x_j | H | x_{j-1} \rangle &= \int dp_j \langle x_j | p_j \rangle \langle p_j | H | x_{j-1} \rangle \\ &= \int \frac{dp_j}{2\pi\hbar} \exp \left[\frac{i}{\hbar} p_j (x_j - x_{j-1}) \right] H(p_j, x_{j-1}) \end{aligned} \quad (6)$$

dove $H(p, x)$ è ora la classica amiltoniana. Utilizzando (6), la (5) diventa

$$\begin{aligned} \langle x_j, t_j | x_{j-1}, t_{j-1} \rangle &= \int \frac{dp_j}{2\pi\hbar} \exp \left[\frac{i}{\hbar} p_j (x_j - x_{j-1}) \right] \left[1 - \frac{i}{\hbar} \epsilon H(p_j, x_{j-1}) \right] + O(\epsilon^2) \\ &\quad \int \frac{dp_j}{2\pi\hbar} \exp \left[\frac{i}{\hbar} p_j (x_j - x_{j-1}) - \frac{i}{\hbar} \epsilon H(p_j, x_{j-1}) \right] + O(\epsilon^2) \end{aligned} \quad (7)$$

e per l'elemento di matrice si ottiene l'espressione finale:

$$\begin{aligned} \langle x', t' | x, t \rangle &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int \prod_{j=1}^n dx_j \int \prod_{j=1}^{n+1} \frac{dp_j}{2\pi\hbar} \exp \left(\frac{i}{\hbar} \sum_{j=1}^{n+1} [p_j (x_j - x_{j-1}) \right. \\ &\quad \left. - H(p_j, x_{j-1})(t_j - t_{j-1}) \right] \end{aligned} \quad (8)$$

Prendendo il limite per cui $n \rightarrow \infty$ (ovvero facendo tendere $\epsilon \rightarrow 0$) si può trascurare il termine $O(\epsilon)$ ed ottenere la forma definitiva

$$\langle x', t' | x, t \rangle = \int \frac{\mathcal{D}x \mathcal{D}p}{2\pi\hbar} \exp \left(\frac{i}{\hbar} \int_t^{t'} [p\dot{x} - H(p, q)] d\tau \right) \quad (9)$$

Per l'integrale qui sopra si è introdotta la notazione

$$\int \frac{\mathcal{D}x \mathcal{D}p}{2\pi\hbar} \equiv \int \prod_{\tau} [dx(\tau) dp(\tau) / 2\pi\hbar]$$

che rappresenta un'integrazione funzionale su tutto lo spazio delle fasi, a cui vanno imposte opportune condizioni al contorno. Per un sistema fisico ad un grado di libertà l'Hamiltoniana è legata alla funzione lagrangiana $L(x, \dot{x})$ attraverso una trasformazione di Legendre

$$H(q, p, t) = p\dot{q} - L(q, \dot{q}, t) \quad \text{con } p = \frac{dL}{d\dot{q}} \quad (10)$$

sicchè per l'espressione (9) si può scrivere

$$\begin{aligned} \langle x', t' | x, t \rangle &= \int \frac{\mathcal{D}x \mathcal{D}p}{2\pi\hbar} \exp\left(\frac{i}{\hbar} \int_t^{t'} [L(q, \dot{q})] d\tau\right) \\ &= \int \frac{\mathcal{D}x \mathcal{D}p}{2\pi\hbar} \exp\left(\frac{i}{\hbar} S[x]\right) \end{aligned} \quad (11)$$

in cui la quantità $S[x] = \int_t^{t'} L(x, \dot{x}) d\tau$ è per definizione l'azione del sistema lungo la traiettoria $x(\tau)$. Le equazioni (9) e (11) sono due rappresentazioni equivalenti per l'elemento di matrice $\langle x', t' | x, t \rangle$ che si stava cercando.

Il procedimento esposto finora può essere naturalmente applicato anche nel caso in cui l'Hamiltoniana abbia una forma 'classica'; si consideri infatti H definita dalla semplice relazione:

$$H = \frac{p^2}{2m} + V(x). \quad (12)$$

È in questo caso conveniente, nell'equazione (8), integrare rispetto all'impulso. Applicando il cambio di variabile $p_j \rightarrow p_j - m(\Delta x_j / \epsilon)$ con $\Delta x_j = x_j - x_{j-1}$ si ha

$$\int \frac{dp_j}{2\pi\hbar} \exp\left[\frac{i}{\hbar} \left(p_j \Delta x_j - \frac{p_j^2}{2m} \epsilon\right)\right] = \frac{1}{N_j} \frac{1}{2\pi\hbar} \exp\left[\frac{i}{\hbar} \epsilon \frac{m}{2} \left(\frac{\Delta x_j}{\epsilon}\right)^2\right] \quad (13)$$

con

$$\frac{1}{N_j} = \int dp_j \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \frac{p_j^2}{2m} \epsilon\right) \quad (14)$$

Il risultato finale ha la forma di un integrale funzionale su tutto lo spazio delle configurazioni:

$$\langle x', t' | x, t \rangle = \frac{1}{N} \int \frac{\mathcal{D}x}{2\pi\hbar} \exp\left(\frac{i}{\hbar} S[x]\right) \quad (15)$$

$S[x] = \int_t^{t'} [\frac{1}{2}m(\dot{x})^2 - V(x)] d\tau$ è naturalmente l'azione lungo la traiettoria $x(\tau)$ mentre il fattore di normalizzazione è dato dalla relazione

$$\frac{1}{N} = \int \mathcal{D}p \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \int_t^{t'} \frac{p^2}{2m} d\tau\right). \quad (16)$$

3.2 Elementi di matrice degli operatori di posizione

L'elemento di matrice determina tutte le probabilità di transizione fra stati quantistici differenti. Ai fini degli sviluppi successivi è importante notare quale sia la forma dell'elemento di matrice dell'operatore posizione tramite la rappresentazione dell'integrale sui cammini. Per il prodotto di N operatori ordinati temporalmente si può mostrare che:

$$\begin{aligned} \langle x', t' | TX(t_1) \cdots X(t_N) | x, t \rangle &= \int \frac{\mathcal{D}x \mathcal{D}p}{2\pi\hbar} x(t_1) \cdots x(t_N) \\ &\times \exp\left(\frac{i}{\hbar} \int_t^{t'} [p\dot{x} - H(p, x)] d\tau\right) \end{aligned} \quad (17)$$

Si dimostra qui di seguito (17) per il prodotto di due operatori: $X(\tau_1)X(\tau_2)$ per $\tau_1 > \tau_2$. Di nuovo si suddivide l'asse temporale in n intervalli, scegliendo $t_1 \cdots t_n$ in modo che

$$\tau_1 = t_{i_1}, \tau_2 = t_{i_2}$$

ed applicando la relazione di completezza ad ogni t_i . Si ottiene

$$\begin{aligned} \langle x', t' | X(\tau_1)X(\tau_2) | x, t \rangle &= \int \prod_i dx_i \langle x', t' | x_n, t_n \rangle \cdots \langle x_{i_1}, t_{i_1} | X(\tau_1) | x_{i_1-1}, t_{i_1-1} \rangle \cdots \\ &\times \langle x_{i_2}, t_{i_2} | X(\tau_2) | x_{i_2-1}, t_{i_2-1} \rangle \cdots \langle x_1, t_1 | x, t \rangle \\ &= \int \prod_i dx_i x_{i_1} x_{i_2} \langle x', t' | x_n, t_n \rangle \cdots \langle x_1, t_1 | x, t \rangle \end{aligned} \quad (18)$$

Procedendo esattamente come per la derivazione di (8), si ottiene (17). Si noti come l'equazione (18) è vera per $\tau_1 > \tau_2$; nel caso in cui $\tau_2 > \tau_1$ la (18) corrisponde all'elemento di matrice $\langle x', t' | X(\tau_2)X(\tau_1) | x, t \rangle$. Così attraverso il path integral si può definire l'elemento di matrice del prodotto ordinato temporalmente di due operatori:

$$\begin{aligned} &\int \frac{\mathcal{D}x \mathcal{D}p}{2\pi\hbar} x(t_1)x(t_2) \exp\left(\frac{i}{\hbar} \int_t^{t'} [p\dot{x} - H(p, x)] d\tau\right) \\ &= \begin{cases} \langle x', t' | X(t_1)X(t_2) | x, t \rangle & t_1 > t_2 \\ \langle x', t' | X(t_2)X(t_1) | x, t \rangle & t_2 > t_1 \end{cases} \end{aligned} \quad (19)$$

Si può inoltre scrivere l'ampiezza di transizione in presenza di sorgenti esterne come:

$$\langle x', t' | x, t \rangle^J = \int \frac{\mathcal{D}x \mathcal{D}p}{2\pi\hbar} \exp\left[\frac{i}{\hbar} \int_t^{t'} p\dot{x} - H(p, x) + \hbar J(\tau)x(\tau)d\tau\right] \quad (20)$$

che corrisponde all'ampiezza di transizione usuale con la trasformazione $H \rightarrow H - \hbar Jx$; essa può essere utilizzata come funzionale generatore degli elementi di matrice degli operatori posizione, che sono dati dalle sue derivate funzionali rispetto a $J(\tau)$:

$$\langle x', t' | TX(t_1)\dots X(t_n) | x, t \rangle = \left(\frac{1}{i}\right)^N \frac{\delta^N}{\delta J(t_1)\dots\delta J(t_N)} \Big|_{J=0} \langle x', t' | x, t \rangle^J \quad (21)$$

Per gli scopi di questa tesi è sufficiente sapere che in presenza di un funzionale $F[J]$

$$F[J] = \int dq_1 \dots \int dq_n f(q_1 \dots q_n) J(q_1) \dots J(q_n) \quad (22)$$

la derivata funzionale rispetto a J è definita come

$$\frac{\delta F[J]}{\delta J(q)} = \int dq_1 \dots dq_{n-1} J(q_1) \dots J(q_{n-1}) n f(q_1 \dots q_{n-1} q) \quad (23)$$

che corrisponde all'usuale regola di differenziazione dei polinomi. Se invece il funzionale è definito dalla serie

$$\Phi[J] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \int dq_1 \dots dq_n \phi_n(q_1 \dots q_n) J(q_1) \dots J(q_n) \quad (24)$$

allora si ha

$$\phi_n = \frac{\delta^n \Phi[J]}{\delta J(q_1) \dots \delta J(q_n)} \Big|_{J=0} \quad (25)$$

3.3 Transizioni vacuum-to-vacuum

In questa tesi si utilizzeranno solamente gli elementi di matrice presi fra stati di vuoto, ovvero funzioni di Green. Sia dato un operatore differenziale lineare arbitrario A_x definito su un certo spazio funzionale, che agisce sulla variabile generica $x = (x_1, \dots, x_n)$; attraverso A si può esprimere un'equazione differenziale nella forma:

$$A_x u(x) = f(x)$$

La funzione di Green dell'operatore A_x è definita come la distribuzione $G(x, y)$ tale che:

$$A_x G(x, y) = \delta(x, y)$$

Tramite le proprietà della delta di Dirac si può scrivere

$$f(x) = \int f(y) \delta(x - y) dy = \int f(y) A_x G(x, y) dy$$

dal momento però che $f(x) = A_x u(x)$ si ha:

$$A_x u(x) = A_x \int f(y) G(x, y) dy$$

da cui si ottiene

$$u(x) = \int f(y) G(x, y) dy + q(x)$$

dove $q(x)$ è una soluzione dell'equazione omogenea associata $A_x q(x) = 0$; la funzione $q(x)$ è univocamente determinata dalle condizioni al contorno. Allo stesso modo, utilizzando la notazione di Dirac per spazi vettoriali, una generica equazione differenziale si scrive nella forma

$$A | u \rangle = | f \rangle$$

Se A ammette un inverso, indicato con $A^{-1} \equiv G$, l'equazione può essere risolta come segue. Si scrive:

$$| u \rangle = G | f \rangle$$

Moltiplicando a sinistra per $\langle x |$ e sfruttando la proprietà:

$$I = \int | y \rangle \langle y | dy$$

si ottiene

$$u(x) = \int dy \langle x | G | y \rangle f(y)$$

La funzione di Green di un operatore differenziale è dunque il nucleo integrale dell'inverso, se esiste, dell'operatore medesimo:

$$G(x, y) \equiv \langle x | G | y \rangle$$

Prima di affrontare gli elementi fra stati di vuoto in una teoria di campo è utile affrontare il problema analogo in meccanica quantistica. Si assuma che la Lagrangiana L del sistema sia indipendente dal tempo; il sistema sarà così descritto dalla funzione d'onda $\Phi(x)$. Gli autostati E_n dell'Hamiltoniana corrispondono agli stati energetici delle funzioni d'onda $\phi_n(x) = \langle x | n \rangle$. In particolare, lo stato fondamentale è descritto dalla funzione $\phi_0(x) = \langle x | 0 \rangle$. Per descrivere l'evoluzione temporale del sistema è conveniente utilizzare la notazione

$$\phi_0(x, t) = \exp[-(i/\hbar)E_0 t] \langle x | 0 \rangle = \langle x | \exp[-(i/\hbar)E_0 t] | 0 \rangle = \langle x, t | 0 \rangle$$

Al fine dei nostri scopi vogliamo calcolare gli elementi di matrice $\langle 0 | TX(t_1) \dots X(t_n) | 0 \rangle$. Essi hanno la forma

$$\langle 0 | TX(t_1) \dots X(t_n) | 0 \rangle = \int dx' dx \Phi_0^*(x', t') \langle x', t' | TX(t_1) \dots X(t_n) | x, t \rangle \Phi_0(x', t') \quad (26)$$

La forma del valore d'aspettazione considerato può essere ottenuto dal funzionale generatore:

$$\langle 0 | TX(t_1) \dots X(t_n) | 0 \rangle = \left(\frac{1}{i} \right)^N \frac{\delta^N}{\delta J(t_1) \dots \delta J(t_N)} \Big|_{J=0} W[J] \quad (27)$$

dove

$$W[J] = \langle 0 | 0 \rangle^J = \int dx' dx \Phi_0^*(x', t') \langle x', t' | x, t \rangle^J \Phi_0(x, t) \quad (28)$$

e $\langle | \rangle^J$ dato dalla (20). È molto importante il fatto che il funzionale generatore $W[J]$ possa essere derivato in un'altra maniera. Si può mostrare che

$$W[J] = \lim_{\substack{T_1 \rightarrow +i\infty \\ T_2 \rightarrow -i\infty}} \frac{\exp[(i/\hbar)E_0(T_2 - T_1)]}{\Phi_0^*(x_1)\Phi_0(x_2)} \langle x_2, T_2 | x_1, T_1 \rangle^J \quad (29)$$

Questo implica che $W[J]$ sia in realtà determinato per ogni x_2, x_1 dall'ampiezza di transizione $\langle x_2, T_2 | x_1, T_1 \rangle^J$ una volta applicata la continuazione analitica sui valori immaginari di T_1 e T_2 . Per derivare l'equazione si scelga che la sorgente $J(t)$ si annulli al di fuori dell'intervallo (t, t') , con $T_2 > t' > t > T_1$. Si può scrivere allora

$$\langle x_2, T_2 | x_1, T_1 \rangle^J = \int dx' dx \langle x_2, T_2 | x', t' \rangle \langle x', t' | x, t \rangle^J \langle x, t | x_1, T_1 \rangle \quad (30)$$

in cui

$$\begin{aligned}
\langle x, t | x_1, T_1 \rangle &= \langle x | \exp[-(i/\hbar)H(t - T_1)] | x_1 \rangle \\
&= \sum_n \Phi_n^*(x) \Phi_n(x_1) \exp[-(i/\hbar)E_n(t - T_1)]
\end{aligned} \tag{31}$$

e similmente per

$$\langle x_2, T_2 | x', t' \rangle$$

Gli unici termini dipendenti da T sono i fattori $\exp[-(i/\hbar)E_n(t - T_n)]$ e si può applicare esplicitamente il limite per $T_1 \rightarrow +i\infty$. Ricordando che E_0 è l'autovalore più piccolo si può scrivere:

$$\begin{aligned}
\lim_{T_1 \rightarrow +i\infty} \exp[-(i/\hbar)E_0 T_1] \langle x, t | x_1, T_1 \rangle &= \Phi_0(x) \exp[-(i/\hbar)E_0 t] \Phi_0^*(x_1) \\
&= \Phi_0(x, t) \Phi_0^*(x_1)
\end{aligned}$$

e alla stessa maniera

$$\lim_{T_2 \rightarrow -i\infty} \exp[-(i/\hbar)E_0 T_2] \langle x_2, T_2 | x', t' \rangle = \Phi_0^*(x', t') \Phi_0(x_2)$$

Utilizzando (28) e (30), segue (29). Si noti anche che (29) e (27) implicano:

$$\begin{aligned}
\langle 0 | TX(t_1) \dots X(t_N) | 0 \rangle &= \lim_{\substack{T_1 \rightarrow +i\infty \\ T_2 \rightarrow -i\infty}} \frac{\exp[(i/\hbar)E_0(T_2 - T_1)]}{\Phi_0^*(x_1) \Phi_0(x_2)} \\
&\quad \times \langle x_2, T_2 | TX(t_1) \dots X(t_N) | x_1, T_1 \rangle
\end{aligned} \tag{32}$$

Si conclude quindi dicendo che gli elementi di matrice fra stati di vuoto possono essere calcolati a partire da un funzionale generatore. i fattori indipendenti da J sono irrilevanti perchè si possono sempre considerare quantità del tipo

$$\frac{1}{\langle 0 | 0 \rangle} \langle 0 | TX(t_1) \dots X(t_N) | 0 \rangle = \left(\frac{1}{i}\right)^N \frac{1}{W[0]} \frac{\delta^N}{\delta J(t_1) \dots \delta J(t_N)} \Big|_{J=0} W[J] \tag{33}$$

di modo che, invece di (29), si può scrivere:

$$W[J] = \lim_{\substack{T_1 \rightarrow +i\infty \\ T_2 \rightarrow -i\infty}} \int_{\substack{x(T_1)=x_1 \\ x(T_2)=x_2}} \mathcal{D}x \exp \left[(i/\hbar) \int_{T_1}^{T_2} [L(x, \dot{x}) + \hbar Jx] dt \right] \tag{34}$$

con x_1, x_2 arbitrari.

3.4 Rappresentazione delle funzioni di Green come integrali sui cammini

I risultati delle sezioni precedenti sono facilmente generalizzabili al caso di ulteriori gradi di libertà. Se n è il numero di gradi di libertà del sistema, ogni coordinata x deve essere rimpiazzata da un vettore a n componenti. Il funzionale integrale in questo caso corrisponde a una somma su tutte le traiettorie nello spazio delle configurazioni, e naturalmente deve soddisfare appropriate condizioni al contorno. Nelle teorie di campo la traiettoria è sostituita da una funzione $\Phi(\mathbf{x}, t)$ il numero di gradi di libertà è infinito, ed è contrassegnato dall'indice continuo \mathbf{x} ; usualmente si formulano teorie di campo in termini dei valori di aspettazione del vuoto del prodotto di operatori cronologicamente ordinati, le funzioni di Green

$$G^{(n)}(x_1, \dots, x_n) = \langle 0 | T\Phi(x_1) \cdots \Phi(x_n) | 0 \rangle \quad (35)$$

È necessario utilizzare qui l'operatore di ordinamento temporale, in quanto l'Hamiltoniana è funzione del tempo. In similitudine con i paragrafi precedenti si scrive la rappresentazione dell'integrale sui cammini come:

$$G^{(n)}(x_1, \dots, x_n) \sim \int \mathcal{D}\Phi(x_1) \cdots \Phi(x_n) \exp\left[\frac{i}{\hbar} \int d^4\mathcal{L}\right] \quad (36)$$

$\mathcal{D}\Phi$ denota che l'integrazione deve avvenire su tutte le funzioni $\Phi(\mathbf{x}, t)$ dello spazio e del tempo, perchè ad ogni valore di \mathbf{x} corrisponde un grado di libertà differente. Questa equazione può essere considerata come il principio della formulazione della teoria. È utile rimuovere l'ampiezza del vuoto dalla funzione di Green come segue:

$$G^{(n)}(x_1, \dots, x_n) = \langle 0 | T\Phi(x_1) \cdots \Phi(x_n) | 0 \rangle / \langle 0 | 0 \rangle = \frac{1}{N} \int \mathcal{D}\Phi(x_1) \cdots \Phi(x_n) \exp\left[\frac{i}{\hbar} \int d^4\mathcal{L}\right] \quad (37)$$

con

$$N = \int \mathcal{D}\Phi \exp\left[\frac{i}{\hbar} \int d^4\mathcal{L}\right] \sim \langle 0 | 0 \rangle \quad (38)$$

Inoltre le derivate della funzione di Green sono integrali funzionali delle derivate del campo:

$$\square_x G^{(2)}(x, y) \sim \int \mathcal{D}\Phi(x) \square_x \Phi(x) \Phi(y) \exp\left[\frac{i}{\hbar} \int d^4\mathcal{L}\right] \quad (39)$$

La cosa fondamentale però è che, come abbiamo già visto, le (37) possono essere ricavate attraverso le derivate funzionali del funzionale generatore $W[J]$ in presenza di

sorgenti esterne $J(\mathbf{x})$

$$W[J] = \frac{1}{N} \int \mathcal{D}\Phi \exp \left[(i/\hbar) \int d^4x [\mathcal{L} + \hbar J(x)\Phi(x)] \right] \quad (40)$$

Espandendo in serie di potenze rispetto a J ed utilizzando (37) si può riscrivere $W[J]$ come segue:

$$W[J] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \int dx_1 \dots dx_n G^{(n)}(x_1, \dots, x_n) J(x_1) \dots J(x_n) \quad (41)$$

Di conseguenza si ha:

$$G^{(n)}(x_1, \dots, x_n) = \left(\frac{1}{i} \right)^n \left(\frac{\delta^n}{\delta J(x_1) \dots \delta J(x_n)} \right)_{J=0} W[J] \quad (42)$$

Un'altra importante proprietà delle funzioni di Green è che possono essere considerate come le continuazioni analitiche di quelle ottenute dal funzionale generatore, definito nello spazio Euclideo con $x_0 = -i\hat{x}_4$ con \hat{x}_4 reale:

$$W_E[J] = \frac{1}{N} \int \mathcal{D}\Phi \exp \left[- (1/\hbar) S_E[\Phi(x)] + \int d^3x d^4\hat{x}_4 J\Phi \right] \quad (43)$$

in cui per esempio per un campo scalare libero

$$S_E = \frac{1}{2} \int d^3x d^4\hat{x}_4 \left[\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\hat{x}_4} \right)^2 + (\nabla\Phi)^2 + m^2\Phi^2 \right] \quad (44)$$

Le funzioni di Green Euclidee sono date da

$$G^{(n)}(\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_n) = \left(\frac{1}{i} \right)^n \left(\frac{\delta^n}{\delta J(\hat{x}_1) \dots \delta J(\hat{x}_n)} \right)_{J=0} W[J] \quad (45)$$

Analogamente a quelle definite sullo spazio di Minkowski, si possono derivare le equazioni del moto, che sempre per un campo scalare libero si scrivono come:

$$\left(- \frac{\partial^2}{\partial\hat{x}_4^2} - \nabla^2 + m^2 \right) G_E^{(2)}(\hat{x}, \hat{y}) = \delta(\hat{x} - \hat{y}) \delta(x - y) \quad (46)$$

Le funzioni di Green sullo spazio di Minkowski sono date dalla continuazione analitica

$$G^{(n)}(x_1, \dots, x_n) = (i)^n G_E^{(n)}(\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_n)$$

in cui

$$\mathbf{x} = \hat{\mathbf{x}}, \quad x_0 = -i\hat{x}_4$$

3.5 Propagatore per un campo di spin 0

Ipotizziamo che per un sistema si possa scrivere l'azione nel modo seguente:

$$S = \frac{1}{2} \int d^4x d^4y \Phi(x) A(x, y) \Phi(y) \quad (47)$$

ovvero con un termine di Lagrangiana quadratico rispetto alla variabile di campo $\Phi(x)$. Si può dimostrare che il funzionale generatore $W_0[J]$ ha una forma molto semplice; nello specifico quest'ultimo si può scrivere come

$$W_0[J] = \exp \left[\left(\frac{i}{2\hbar} \right) \hbar^2 \int d^4x d^4y J(x) G(x, y) J(y) \right] \quad (48)$$

in cui $G(x, y)$ è la funzione di Green dell'equazione di campo

$$\int A(x, y) \Phi(y) d^4y = -\hbar J(x) \quad (49)$$

Un esempio di teoria con una azione quadratica rispetto alla variabile di campo è la teoria di campo libero con la densità di Lagrangiana

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \Phi \partial^\mu \Phi - m^2 \Phi^2) + \frac{1}{2} i\epsilon \Phi^2 \quad (50)$$

Come si può notare è stato aggiunto alla densità di Lagrangiana il termine $+\frac{1}{2}i\epsilon\Phi^2$. Fra un attimo vedremo il perchè. È necessario però prima ricavare le soluzioni del campo descritto da (50); si comincia notando che il termine $\partial_\mu \Phi \partial^\mu \Phi$ può essere manipolato per ottenere

$$\partial_\mu \Phi \partial^\mu \Phi = \partial_\mu (\Phi \partial^\mu) - \Phi \partial_\mu \partial^\mu \Phi \quad (51)$$

Il termine di bordo può essere tralasciato ai fini della scrittura dell'azione: la sua presenza non modifica le equazioni del moto. Alla luce di ciò si scrive quindi

$$S = \frac{1}{2} \int d^4x d^4y \Phi(x) [-\partial_\mu \partial^\mu - m^2 + i\epsilon] \delta(x - y) \Phi(y) \quad (52)$$

la quale implica

$$A(x, y) = -[+\partial_\mu \partial^\mu + m^2 - i\epsilon] \delta(x - y). \quad (53)$$

L'equazione di campo classico

$$[+\partial_\mu\partial^\mu + m^2 - i\epsilon]\Phi(x) = \hbar J(x) \quad (54)$$

ha come soluzione

$$\Phi(x) = \hbar \int d^4y G(x-y)J(y) \quad (55)$$

con la funzione di Green che soddisfa l'ulteriore condizione

$$[+\partial_\mu\partial^\mu + m^2 - i\epsilon]G(x-y) = \delta(x-y). \quad (56)$$

Introducendo la trasformata di Fourier $\tilde{G}(k)$ come

$$G(x-y) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4k \tilde{G}(k) \exp[-ik(x-y)] \quad (57)$$

dalla (56) si ottiene prima $\tilde{G}(k)$:

$$\tilde{G}(k) = -\frac{1}{k^2 - m^2 + i\epsilon} \quad (58)$$

e poi la funzione di Green $G(x-y)$:

$$G(x-y) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4k \frac{\exp[-ik(x-y)]}{k^2 - m^2 + i\epsilon} \quad (59)$$

Verrà spiegata ora la presenza del termine $i\epsilon\Phi^2$ nell'azione: ipotizziamo di voler calcolare un integrale della forma

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{\exp[-ix]}{x^2 - \alpha^2}$$

Quando esso viene calcolato tramite il metodo dei residui sul piano complesso, si applica la sostituzione

$$x \rightarrow z \quad x \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{C} \quad (60)$$

e si valuta l'integrale

$$\int_{\Gamma} dz \frac{\exp[-iz]}{z^2 - \alpha^2}$$

con Γ curva chiusa continua, composta da una circonferenza γ e da un segmento dell'asse reale di lunghezza \mathbb{L} centrato sull'origine degli assi. Si può spezzare quindi l'integrale in due parti:

$$\int_{\Gamma} = \int_{\gamma} + \int_{\mathbb{L}}$$

Per ottenere l'integrazione su tutto l'asse reale bisogna imporre che sia la lunghezza di \mathbb{L} sia il raggio di γ tendano ad infinito; si può tuttavia dimostrare che

$$\lim_{|z| \rightarrow +\infty} \frac{\exp[-iz]}{z^2 - \alpha^2} = 0$$

implica

$$\int_{\gamma} \frac{\exp[-iz]}{z^2 - \alpha^2} dz = 0 \quad |z| \rightarrow +\infty$$

A questo punto si ottiene la comoda forma

$$\int_{\Gamma} \frac{\exp[-iz]}{z^2 - \alpha^2} dz = \int_{\mathbb{L}} \frac{\exp[-iz]}{z^2 - \alpha^2} dz = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp[-ix]}{x^2 - \alpha^2} dx = 2\pi i \sum_{z=\pm\alpha} \text{Res} \frac{\exp[-iz]}{z^2 - \alpha^2}$$

ma ci si trova ad affrontare le singolarità nei punti $z = \pm\alpha$; infatti il cammino di integrazione passa attraverso i due poli rendendo tutto il procedimento mal definito. Per poter continuare ad applicare il teorema dei residui si devono quindi introdurre al denominatore i termini ausiliari $\pm i\epsilon$, con $\epsilon \rightarrow 0$, di modo che il cammino d'integrazione aggiri il polo tramite una semicirconferenza di raggio ϵ ; la forma integrale

$$\int_{\Gamma} dz \frac{\exp[-iz]}{z^2 - \alpha^2 \pm i\epsilon}$$

è quindi matematicamente ben definita ed è possibile passare al calcolo esplicito dell'integrale. Aggiungere il termine $(+i\epsilon)$ al denominatore dell'equazione (59), che equivale ad introdurre nella Lagrangiana il termine extra $(\pm i\epsilon\Phi^2)$, implica che le soluzioni ad energia positiva si propagano solo avanti nel tempo; questa condizione è comunemente chiamata prescrizione causale di Feynman, e la funzione di Green così ottenuta è detta ritardata. Solo per $(+i\epsilon\Phi^2)$ l'integrale funzionale è però ben definito sicchè la funzione di Green è univocamente definita. Integrando la (59) si trova che

$$G(x - y) \sim \exp[-im(x - y)]\Theta(x - y) + \exp[(im(x - y)]\Theta(-(x - y))$$

L'interpretazione a livello fisico della prescrizione $(+i\epsilon)$ perciò corrisponde a soluzioni a frequenza positiva che si propagano dal punto x al punto y avanti nel tempo.

3.6 Propagatore di Dirac

L'equazione che regola i campi di spin 1/2 è l'equazione di Dirac:

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\Psi = 0 \tag{61}$$

in cui le γ^μ sono le matrici di Dirac

$$\gamma^0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \gamma^1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\gamma^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \gamma^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

e $\Psi(x)$ è detto spinore; tutti gli spinori sono quantità anticommutanti, ovvero soddisfano la relazione

$$\{\Psi_i, \Psi_j\} = 0 \quad (62)$$

Il funzionale generatore di un campo fermionico libero, ovvero descritto dalla Lagrangiana

$$\mathcal{L}_\Psi = \bar{\Psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\Psi \quad (63)$$

si scrive

$$W_0^\Psi[\alpha, \bar{\alpha}] = \frac{1}{N} \int \mathcal{D}\Psi \mathcal{D}\bar{\Psi} \exp[(i/\hbar) \int d^4x [\mathcal{L}_\Psi(x) + \hbar\bar{\alpha}(x)\Psi(x) + \hbar\bar{\Psi}(x)\alpha(x)]]$$

in cui

$$N = \langle 0 | 0 \rangle$$

e $\alpha(x), \bar{\alpha}(x)$ sono le sorgenti dei campi fermionici.

Si può dimostrare che il funzionale $W_0^\Psi[\alpha, \bar{\alpha}]$ può essere riscritto nella forma

$$W_0^\Psi[\alpha, \bar{\alpha}] = \exp\left[i\hbar \int d^4x d^4y \bar{\alpha}(x) S(x-y) \alpha(y)\right] \quad (64)$$

in cui $S(x-y)$ è la funzione di Green che soddisfa:

$$(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)S(x-y) = -\mathbb{I}\delta(x-y) \quad (65)$$

Pertanto si scrive

$$S(x-y) = - \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \mathbb{I} \frac{k+m}{k^2 - m^2 + i\epsilon} \exp[-ik(x-y)] \quad (66)$$

in cui $k = \gamma^\mu k_\mu$; il propagatore di Feynman è definito come

$$S_F(x-y) = \langle 0 | T\Psi(x)\bar{\Psi}(y) | 0 \rangle = \int \mathcal{D}\Psi\mathcal{D}\bar{\Psi} \Psi(x)\bar{\Psi}(y) \times \exp\left[\frac{i}{\hbar} \int d^4x \mathcal{L}_\Psi(x)\right] / \int \mathcal{D}\Psi\mathcal{D}\bar{\Psi} \exp\left[\frac{i}{\hbar} \int d^4x \mathcal{L}_\Psi(x)\right] \quad (67)$$

e si ricava dal funzionale generatore attraverso

$$S_F(x-y) = \left(\frac{\delta^2}{\delta\bar{\alpha}(x)\delta\alpha(y)} W_0^\Psi[\alpha, \bar{\alpha}] \right)_{\alpha=\bar{\alpha}=0} \quad (68)$$

ed inserendo la (64) si ottiene

$$S_F(x-y) = -i\hbar S(x-y) \quad (69)$$

4 Teorie di gauge

4.1 Gruppi di simmetria, campi di gauge

La formulazione delle moderne teorie delle forze nucleari parte dal cosiddetto principio di simmetria, ovvero il presupposto secondo il quale le equazioni del moto siano invarianti sotto l'azione di certi gruppi di trasformazioni, detti gruppi di simmetria. I gruppi di simmetria che in fisica delle particelle hanno avuto maggior successo nella descrizione delle interazioni fondamentali sono i gruppi di Lie; in particolare sono utilizzati $U(1)$ per l'elettrodinamica quantistica, $SU(2)$ per la teoria dell'interazione debole e $SU(3)$ per la cromodinamica quantistica; per la teoria elettrodebole, l'impianto teorico che unifica interazione elettromagnetica e debole, viene invece utilizzato il gruppo $U(1) \times SU(2)$. Si mostra ora come sia possibile costruire teorie invarianti sotto l'azione di gruppi di Lie. Si consideri un campo di n fermioni liberi. La densità di Lagrangiana si scrive come:

$$\mathcal{L} = \sum_{i=1}^n (\bar{\Psi}_i i\gamma^\mu \partial_\mu \Psi_i - m_i \bar{\Psi}_i \Psi_i) \quad (70)$$

Si definisce il gruppo di trasformazioni globali $U(1)$ tramite le leggi:

$$\Psi'_i(x) = \exp(-iq_i\Theta)\Psi_i(x) \quad (71)$$

in cui il parametro q_i è l'autovalore del generatore Q di $U(1)$ ed identifica la rappresentazione a cui appartiene il campo Ψ_i . La lagrangiana (113) è invariante sotto

questo gruppo di trasformazioni; secondo il teorema di Noether, la simmetria $U(1)$ implica l'esistenza di una corrente $j^\mu(x)$ e di una carica Q conservate, che si scrivono rispettivamente

$$j^\mu(x) = \sum_{i=1}^n q_i \bar{\Psi}_i \gamma^\mu \Psi_i \quad (72)$$

$$Q = \int d^3x j^0 \quad (73)$$

Si consideri ora il gruppo di trasformazioni locali, ovvero il gruppo di trasformazioni in cui il parametro Θ sia funzione di x .

$$\Psi'_i(x) = \exp(-iq_i\theta(x))\Psi_i(x) \quad (74)$$

È semplice verificare che non vi sia più invarianza della (113) sotto questo tipo di trasformazioni, in quanto i trasformati delle derivate danno termini proporzionali a $\partial_\mu\Theta(x)$. Per costruire una lagrangiana invariante è necessario introdurre una nuova derivata $D_\mu\Psi_i(x)$ che si trasformi come $\Psi_i(x)$

$$[D_\mu\Psi_i(x)]' = \exp[-iq_i\Theta(x)]D_\mu\Psi_i(x) \quad (75)$$

e che sostituisca nella (113) la consueta quadriderivata ∂_μ . La D_μ è usualmente chiamata derivata covariante ed è costruita introducendo un nuovo campo A_μ , detto campo di gauge, secondo l'equazione

$$D_\mu\Psi_i(x) = [\partial_\mu + iq_i e A_\mu(x)]\Psi_i(x) \quad (76)$$

in cui e sarà identificata con la carica dell'elettrone. La regola di trasformazione (75) è valida solo se il campo di gauge si trasforma come:

$$A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \frac{1}{e}\partial_\mu\Theta(x) \quad (77)$$

e la lagrangiana di Dirac, invariante per trasformazioni di gauge $U(1)$ solo se si verifica la condizione (77), si scrive quindi:

$$\mathcal{L} = \sum_{i=1}^n (\bar{\Psi}_i i\gamma^\mu D_\mu \Psi_i - m_i \bar{\Psi}_i \Psi_i) \quad (78)$$

L'equazione (78) così ricavata è gauge-invariante; inoltre attraverso la derivata covariante si possono costruire nuovi oggetti covarianti, e si può vedere come il commutatore di due derivate

$$[D_\mu, D_\nu]\Psi_i = D_\mu(D_\nu\Psi_i) - D_\nu(D_\mu\Psi_i) = iq_i e[\partial_\mu A_\nu(x) - \partial_\nu A_\mu(x)]\Psi_i \quad (79)$$

sia un oggetto covariante. Si definisce quindi il tensore $F_{\mu\nu}$ quindi

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu(x) - \partial_\nu A_\mu(x). \quad (80)$$

Questo nuovo tensore covariante è chiamato tensore forza di campo. Esso risulta utile per completare la lagrangiana con il termine, gauge-invariante, di energia cinetica del campo di gauge stesso

$$\mathcal{L} = \sum_{i=1}^n \bar{\Psi}_i (i\gamma^\mu D_\mu - m_i)\Psi_i - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \quad (81)$$

Come per (78), la lagrangiana (81) è invariante per trasformazioni di gauge ed inoltre incorpora il termine energetico del campo di gauge introdotto attraverso la derivata covariante. Le equazioni del moto di Eulero-Lagrange per il sistema quindi sono:

$$\begin{aligned} \partial_\mu F^{\mu\nu} &= eq \bar{\Psi} \gamma^\nu \Psi \\ (i \not{\partial} - m)\Psi &= eq A\Psi \end{aligned}$$

ed identificando e con la carica elettrica, si riconoscono le equazioni di Maxwell e Dirac per l'elettromagnetismo. Naturalmente l'invarianza di gauge $U(1)$ conserva l'invarianza globale, come la corrente e la carica di Noether definite sopra. Abbiamo così costruito una lagrangiana gauge invariante per un gruppo di simmetria abeliano come $U(1)$. Ai fini di questa tesi bisognerà analizzare le simmetrie di gauge per gruppi non abeliani, ed in particolare per il gruppo $SU(3)$; in ogni caso per costruire una lagrangiana di campo non abeliana si ripetono gli stessi passi compiuti per il gruppo $U(1)$. Si comincia applicando al campo fermionico una trasformazione globale appartenente al generico gruppo di Lie $SU(N)$ secondo:

$$\Psi'(x) = \exp(-i\Theta^\alpha T^\alpha)\Psi(x) \quad (82)$$

in cui le Θ^α sono i parametri della trasformazione e le T^α sono i generatori del gruppo nella loro rappresentazione fondamentale; la lagrangiana libera è invariante sotto le trasformazioni globali (82); generalizzando il caso di $U(1)$ si cerca una formulazione che sia localmente invariante, ovvero si richiede che la lagrangiana rimanga invariante dopo

che venga applicata a Ψ una trasformazione U , appartenente a $SU(N)$, che dipenda da x

$$U(x) = \exp(-i\Theta^\alpha(x)T^\alpha)$$

A questo scopo si cerca una derivata covariante D_μ tale che

$$[D_\mu\Psi(x)]' = \exp[-i\Theta^\alpha(x)T^\alpha]D_\mu\Psi(x) = U(x)D_\mu\Psi(x). \quad (83)$$

In analogia con (76) si costruisce

$$D_\mu = \partial_\mu + A_\mu(x) \quad (84)$$

dove A_μ è un elemento dell'algebra di Lie, e che può essere decomposto in termini di generatori T^α del gruppo come

$$A_\mu = +igA_\mu^\alpha(x)T^\alpha \quad (85)$$

Con la forma (84) la condizione (83) è soddisfatta solo se la trasformazione di gauge ha la forma:

$$A'_\mu(x) = U(x)[A_\mu(x) + \partial_\mu]U^{-1}(x) \quad (86)$$

e la lagrangiana (113) è invariante per trasformazioni $SU(N)$

Come in precedenza si possono a questo punto costruire ulteriori oggetti covarianti. Attraverso il commutatore di due derivate

$$[D_\mu, D_\nu] = (\partial_\mu A_\nu(x) - \partial_\nu A_\mu(x) + [A_\mu(x), A_\nu(x)]) \quad (87)$$

si può definire il tensore (antisimmetrico) forza di campo

$$G_{\mu\nu}(x) = \partial_\mu A_\nu(x) - \partial_\nu A_\mu(x) + [A_\mu(x), A_\nu(x)] \quad (88)$$

che è covariante sotto trasformazioni di gauge secondo

$$G'_{\mu\nu} = U(x)G_{\mu\nu}U^{-1}(x) \quad (89)$$

Anche il tensore $G_{\mu\nu}$ si può decomporre in termini dei generatori del gruppo

$$G_{\mu\nu} = igG_{\mu\nu}^\alpha T^\alpha \quad (90)$$

in cui

$$G_{\mu\nu}^\alpha = \partial_\mu A_\nu^\alpha - \partial_\nu A_\mu^\alpha - gc^{\alpha\beta\gamma}A_\mu^\beta A_\nu^\gamma \quad (91)$$

e il tensore di rango tre $c^{\alpha\beta\gamma}$ rappresenta le costanti di struttura del gruppo. La lagrangiana gauge invariante per una teoria non abeliana quindi si scrive

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2g^2} Tr[G_{\mu\nu}G^{\mu\nu}] + \bar{\Psi}(i\gamma^\mu D_\mu - m)\Psi \quad (92)$$

in quanto il termine $Tr[G_{\mu\nu}G^{\mu\nu}]$ è gauge invariante ($Tr[UG_{\mu\nu}G^{\mu\nu}U^{-1}] = Tr[G_{\mu\nu}G^{\mu\nu}]$).

Per quanto riguarda la cromodinamica quantistica, essa è basata sul gruppo di simmetria SU(3). I generatori di SU(3) sono definiti dalla relazione

$$T^\alpha = \frac{\lambda^\alpha}{2} \quad (93)$$

in cui le λ^α sono le cosiddette matrici di Gell-Mann:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \lambda_2 &= \begin{bmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \lambda_3 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \lambda_4 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \lambda_5 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} & \lambda_6 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{bmatrix} & \lambda_7 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \lambda_8 &= \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Queste soddisfano le proprietà

$$Tr[T^\alpha] = 0$$

$$[T^\alpha, T^\beta] = i \sum_{\gamma=1}^8 c^{\alpha\beta\gamma} T^\gamma$$

mentre le costanti di struttura prendono i valori

$$\begin{aligned} c^{123} &= 1 \\ c^{147} &= c^{165} = c^{246} = c^{257} = c^{345} = c^{376} = \frac{1}{2} \\ c^{458} &= c^{678} = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

Essendo SU(3) un gruppo di Lie i suoi generatori sono otto; questo significa che all'interno dell'impianto teorico della cromodinamica quantistica possono esistere solo otto differenti bosoni di gauge, battezzati gluoni. La carica portata è chiamata colore,

ed esistono tre varietà di colori e tre di anticolori. I quark sono in stato di tripletto di colore, e dunque interagiscono fra loro attraverso il campo gluonico; tutti gli altri campi fermionici sono in stato di singoletto e non interagiscono con il campo di colore.

Se si prova a calcolare esplicitamente il termine riferibile al campo di gauge all'interno della lagrangiana si ottiene l'espressione

$$\begin{aligned} \frac{1}{2g^2} \text{Tr}[G_{\mu\nu}G^{\mu\nu}] = & -\frac{1}{4}(\partial_\mu A_\nu^\alpha - \partial_\nu A_\mu^\alpha)^2 + g c^{\alpha\beta\gamma} A_\mu^\beta A_\nu^\gamma \partial^\mu A^{\nu\alpha} \\ & - \frac{1}{4} g^2 c^{\alpha\beta\gamma} c^{\alpha\sigma\delta} A_\mu^\beta A_\nu^\gamma A^{\mu\sigma} A^{\nu\delta} \end{aligned} \quad (94)$$

che rende visibile il fatto che l'invarianza di gauge implica la presenza di due termini di auto interazioni di gauge nell'ordine di g e g^2 .

4.2 Invarianza di gauge e integrale sui cammini

Si consideri un integrale sui cammini di un campo di gauge A_μ , corrispondente alla quantità gauge-invariante $f(A_\mu)$:

$$\int \mathcal{D}A_\mu f(A_\mu) \exp(i \int d^4x \mathcal{L}) \quad (95)$$

in cui si è scelto di utilizzare la notazione A_μ al posto di A_μ^α , con α indice del gruppo di gauge, e \mathcal{L} densità di lagrangiana. Si assume che la misura integrale $\mathcal{D}A_\mu$ sia gauge-invariante, ovvero deve sottostare alla condizione:

$$\mathcal{D}A_\mu = \mathcal{D}A_\mu^g \quad (96)$$

in cui g è una trasformazione arbitraria del gruppo di gauge; A_μ^g quindi rappresenta il trasformato di A_μ dopo l'applicazione di g . La forma più semplice della misura integrale che sottostà alla condizione (96) è $\mathcal{D}A_\mu = \prod_{\mu,\alpha,x} dA_\mu^\alpha(x)$, la quale non è altro che la generalizzazione naturale della misura integrale introdotta per il campo scalare (fare vedere). L'integrale sui cammini (95) somma tutte le possibili configurazioni di A_μ , e ciò implica un conteggio multiplo su tutte le configurazioni fisicamente equivalenti, ovvero tutte quelle connesse da una trasformazione di gauge; per poter eliminare questa ambiguità l'integrazione quindi deve essere ristretta sulla ipersuperficie dettata dalla condizione di gauge, ovvero $F[A_\mu] = 0$. A seguire verrà descritto il procedimento standard, chiamato inserzione dell'unità, con il quale si applica questa restrizione sul dominio di integrazione. Esso sarà anche il punto di partenza per la ricavazione delle regole di Feynman per la cromodinamica quantistica. Si comincia introducendo il funzionale $\Delta[A_\mu]$ attraverso l'equazione:

$$1 = \Delta[A_\mu] \int \mathcal{D}g \delta[F[A_\mu^g]] \quad (97)$$

in cui $\mathcal{D}g$ è una misura invariante del gruppo di gauge, sottostante quindi alle proprietà

$$\mathcal{D}g = \mathcal{D}(gg'); \quad \mathcal{D}g = \prod_x dg(x) \quad (98)$$

e la $\delta[f(x)]$ rappresenta la produttoria degli usuali δ -funzionali nel punto x dello spaziotempo: $\prod_x \delta(f(x))$

Si può facilmente mostrare che $\Delta[A_\mu]$ è invariante sotto trasformazioni di gauge; infatti

$$\Delta^{-1}[A_\mu^g] = \int \mathcal{D}g' \delta[F[A_\mu^{gg'}]] = \int \mathcal{D}(gg') \delta[F[A_\mu^{gg'}]] = \int \mathcal{D}(g'') \delta[F[A_\mu^{g''}]] = \Delta^{-1}[A_\mu] \quad (99)$$

Per definizione, il termine destro della (97) è uguale a uno. Può quindi essere inserito nell'espressione integrale (95) in modo da ottenere:

$$\int \mathcal{D}g \int \mathcal{D}A_\mu \Delta[A_\mu] f(A_\mu) \delta[F[A_\mu^g]] \exp(iS[A_\mu]) \quad (100)$$

L'integrale è indipendente da g . Si può facilmente vedere utilizzando l'invarianza di gauge delle quantità $\int \mathcal{D}A_\mu, \Delta[A_\mu], f(A_\mu), S[A_\mu]$, sostituirle con i loro trasformati $\int \mathcal{D}A_\mu^g, \Delta[A_\mu^g], f(A_\mu^g), S[A_\mu^g]$ ed ottenere l'espressione equivalente:

$$\int \mathcal{D}g \int \mathcal{D}A_\mu^g \Delta[A_\mu^g] f(A_\mu^g) \delta[F[A_\mu^g]] \exp(iS[A_\mu^g]) \quad (101)$$

L'indipendenza da g è manifesta, potendo fare il cambio di notazione $A_\mu^g \rightarrow A_\mu$. Conseguenza diretta di ciò è che l'integrazione sul gruppo $\int \mathcal{D}g$ può essere fattorizzata all'esterno dal resto dell'integrale. Il suo valore è una costante infinita che rappresenta il 'volume' totale del gruppo di gauge. Si ottiene quindi l'espressione

$$\left(\int \mathcal{D}g \right) \int \mathcal{D}A_\mu \Delta[A_\mu] f(A_\mu) \delta[F[A_\mu^g]] \exp(iS[A_\mu]) \quad (102)$$

che definisce una teoria nel gauge $F[A_\mu] = 0$.

4.3 Determinante di Faddeev-Popov

Rimane da calcolare la quantità $\Delta[A_\mu]$. Si può dimostrare che

$$\Delta^{-1}[A_\mu] = \int \mathcal{D}F \left(\det \frac{\delta F[A_\mu^g]}{\delta g} \right)^{-1} \delta[F] \quad (103)$$

da cui si evince che

$$\Delta[A_\mu] = \det \frac{\delta F[A_\mu^g]}{\delta g} \quad (104)$$

La quantità $\Delta[A_\mu]$ è usualmente chiamata determinante di Faddeev-Popov. È molto conveniente usare le proprietà di gauge-invarianza di $\Delta[A_\mu]$ per scegliere A_μ che soddisfi la condizione di gauge $F[A_\mu] = 0$. Così nell'equazione (104) si può sostituire il vincolo $F[A_\mu^g] = 0$ con $g=1$, cosicchè i calcoli espliciti di

$$\Delta[A_\mu] = \left(\det \frac{\delta F[A_\mu^g]}{\delta g} \right) \Big|_{g=1}; \quad F[A_\mu] = 0 \quad (105)$$

siano semplificati. Vicino all'unità si può utilizzare il formalismo delle trasformazioni infinitesime. Se $U(\omega)$ è un elemento del gruppo, può essere scritto come $U(\omega) = 1 - iT^j \omega^j(x) + \dots$ (dove $\omega^j(x) \ll 1$ e i T^j sono i generatori del gruppo di Lie); si può quindi riscrivere la (105) in forma esplicita

$$\Delta[A_\mu] = \left(\det \frac{\delta F^\alpha(x, [A_\mu^\omega])}{\delta \omega^\beta(y)} \right) \Big|_{\omega=0}; \quad F^\alpha(x, [A_\mu]) = 0 \quad (106)$$

in cui A_μ^ω equivale a A_μ^g mentre α, β sono gli indici del gruppo di gauge. La quantità

$$\frac{\delta F^\alpha(x, [A_\mu^\omega])}{\delta \omega^\beta(y)}$$

è chiaramente una matrice, sicchè si può scrivere

$$M^{\alpha\beta}(x, y) = \left(\frac{\delta F^\alpha(x, [A_\mu^\omega])}{\delta \omega^\beta(y)} \right) \Big|_{\omega=0} \quad (107)$$

e

$$\Delta[A_\mu] = \det M^{\alpha\beta}(x, y); \quad F[A_\mu] = 0 \quad (108)$$

All'interno della (102) perciò il funzionale $\delta[A_\mu]$ può essere sostituito con il $\det M$ in quanto la condizione di gauge è già fissata dal funzionale δ . $F[A_\mu] = 0$ però non è l'unica

scelta che si può operare. Infatti si può considerare una classe di condizioni di gauge della forma

$$F[A_\mu] - C(x) = 0 \quad (109)$$

in cui $C(x)$ è una funzione arbitraria dello spaziotempo. Per tutte le condizioni di gauge appartenenti a questa classe $\det M$ ha lo stesso valore in quanto $C(x)$ non dipende dalla trasformazione di gauge; per questo motivo la delta può essere rimpiazzata da un altro funzionale che può risultare utile ai fini pratici del calcolo. Tramite la condizione (109), l'integrale in (102) diventa:

$$\left(\int \mathcal{D}g \right) \int \mathcal{D}A_\mu \det M f(A_\mu) \delta[F[A_\mu] - C(x)] \exp(iS[A_\mu]) \quad (110)$$

Si può integrare la (110) rispetto $\mathcal{D}C$ con un funzionale peso arbitrario $G[C]$, sicchè il risultato differisca dalla (110) solo per una costante di normalizzazione. Si può scrivere quindi:

$$\begin{aligned} \int \mathcal{D}A_\mu \det M f(A_\mu) (iS[A_\mu]) \int \mathcal{D}C \delta[F[A_\mu] - C(x)] G[C] = \\ \int \mathcal{D}A_\mu \det M f(A_\mu) \exp(iS[A_\mu]) G[F[A_\mu]] \end{aligned} \quad (111)$$

Una scelta standard per $G[C]$ è

$$G[C] = \exp \left[- \frac{i}{2\alpha} \int d^4x [C(x)]^2 \right] \quad (112)$$

dove α è reale e viene chiamato parametro di gauge-fixing. Questa scelta di G è equivalente a sostituire la lagrangiana originale con

$$\mathcal{L}_{eff} = \mathcal{L} - \frac{1}{2\alpha} (F[A_\mu])^2. \quad (113)$$

4.4 Caso dell'elettrodinamica quantistica

Come esempio si procede considerando il caso dell'elettrodinamica quantistica. Si calcola il propagatore libero fotonico $G_0^{\mu\nu}(x_1, x_2)$ in presenza di differenti condizioni di gauge. Per prima cosa si utilizza la cosiddetta gauge di Lorentz

$$\partial_\mu A^\mu = 0$$

Si può dimostrare che la matrice $M^{\alpha\beta}(x, y)$, definita dall'equazione (104), prende la forma

$$M^{\alpha\beta}(x, y) = \frac{1}{e} \partial^2 \delta(x - y) \quad (114)$$

in cui $\partial^2 = \partial_\mu \partial^\mu$.

Si noti che il determinante di Faddeev-Popov è indipendente dal campo A_μ ; ai fini del calcolo può essere incluso nel fattore di normalizzazione, il quale è irrilevante. Per poter utilizzare il δ -funzionale $\delta[\partial_\mu A^\mu]$ che fissa il gauge è utile decomporre il campo A_μ nelle sue componenti trasversale A_μ^T e longitudinale A_μ^L

$$A_\mu^T = P_{\mu\nu} A^\nu; \quad A_\mu^L = (g_{\mu\nu} - P_{\mu\nu}) A^\nu$$

in cui $P_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - \frac{\partial_\mu \partial_\nu}{\partial^2}$ è l'operatore di proiezione. Si ha quindi

$$\partial_\mu A_T^\mu = 0$$

coscicchè la presenza del termine di gauge-fixing $\delta[\partial_\mu A^\mu]$ non influenza l'integrazione rispetto alla componente trasversale del campo di gauge. Si scrive quindi il funzionale generatore $W_0[J]$ nella gauge di Lorentz

$$W_0[J] \sim \int \mathcal{D}A_\mu^T \exp[i \int d^4x (\frac{1}{2}) A_\mu^T \partial^2 g^{\mu\nu} A_\nu^T + J_\mu^T A_\mu^T] \quad (115)$$

in cui però bisogna tenere in mente il termine extra $\frac{1}{2} i \epsilon A_\mu^T g^{\mu\nu} A_\nu^T$ nell'azione; per ottenere la forma dell'equazione (115) si utilizza il fatto che la densità di lagrangiana del campo elettromagnetico libera può essere scritta come

$$-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = \frac{1}{2} A_\mu \partial^2 (g^{\mu\nu} - \partial^\mu \partial^\nu / \partial^2) A_\nu = \frac{1}{2} A_\mu^T \partial^2 g^{\mu\nu} A_\nu^T \quad (116)$$

La componente longitudinale A_L^μ non appare nell'azione e nella gauge di Lorentz il funzionale $\delta[\partial_\mu A_L^\mu]$ fa sì che l'integrazione in $\mathcal{D}A_L$ sia triviale; si può semplicemente porre $A_L^\mu = 0$. Si è già visto che la dipendenza dalle sorgenti J di un path integral si scrive

$$W_0[J] = \exp[\frac{1}{2} i \int d^4x d^4y J_\mu^T D^{\mu\nu}(x-y) J_\nu^T] \quad (117)$$

dove $-D_{\mu\nu}(x-y)$ è l'inverso dell'azione quadratica. Nello spazio trasverso l'operatore unità è equivalente all'operatore $P_{\mu\nu} \delta(x-y)$, per cui si ottiene la seguente equazione per $D_{\mu\nu}$:

$$(\partial^2 - i\epsilon) D_{\mu\nu} = -(g_{\mu\nu} - \partial_\mu \partial_\nu / \partial^2) \delta(x-y) \quad (118)$$

Dopo una trasformata di Fourier la (118) diventa

$$(k^2 - i\epsilon)\tilde{D}_{\mu\nu} = -(g_{\mu\nu} - k_\mu k_\nu/k^2) \quad (119)$$

da cui si ottiene

$$\tilde{D}_{\mu\nu} = \frac{1}{k^2 + i\epsilon} \left(g_{\mu\nu} - k_\mu k_\nu/k^2 \right) = \frac{\tilde{P}_{\mu\nu}}{k^2 + i\epsilon} \quad (120)$$

e

$$D_{\mu\nu}(x-y) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{g_{\mu\nu} - k_\mu k_\nu/k^2}{k^2 + i\epsilon} \exp[-ik(x-y)] \quad (121)$$

Si noti come nello spazio trasverso, fino a quando si opera con sorgenti trasversali, si può sempre sostituire $P_{\mu\nu}$ con $g_{\mu\nu}$ e viceversa. Ora si può scrivere la formula del propagatore per il campo elettromagnetico libero nel gauge di Lorentz come:

$$G_0^{\mu\nu}(x_1, x_2) = \left(\frac{1}{i} \right)^2 \frac{\delta^2 W_0[J]}{\delta J_\mu(x_1) \delta J_\nu(x_2)} \Big|_{J=0} = -i D^{\mu\nu}(x_1 - x_2) \quad (122)$$

in cui $D^{\mu\nu}(x_1 - x_2)$ è dato dall'equazione (121).

Questo risultato può essere generalizzato utilizzando un altro tipo di gauge, ovvero quello sviluppato in (111) - (112). Imponendo $F[A_\mu] = \partial_\mu A^\mu$ si ottiene la lagrangiana

$$\mathcal{L}_{eff} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{2\alpha} (\partial_\mu A^\mu)^2 = \frac{1}{2} A^\mu [g_{\mu\nu} \partial^2 - (1 - \frac{1}{\alpha}) \partial_\mu \partial_\nu] A^\nu \quad (123)$$

Si può scrivere nuovamente

$$W_0[J] = \exp\left[\frac{i}{2} \int d^4x d^4y J^\mu(x) D_{\mu\nu}(x-y) J^\nu(y)\right] \quad (124)$$

in cui $D_{\mu\nu}(x-y)$ soddisfa la condizione

$$[g_{\mu\nu} \partial^2 - (1 - \frac{1}{\alpha}) \partial_\mu \partial_\nu - i\epsilon] D_{\lambda}^\nu = -g_{\mu\lambda} \delta(x-y) \quad (125)$$

La soluzione è perciò:

$$D_{\mu\nu}(x-y) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \left[(g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2 + i\epsilon}) + \alpha \frac{k_\mu k_\nu}{k^2 + i\epsilon} \right] \frac{1}{k^2 + i\epsilon} \exp[-ik(x-y)] \quad (126)$$

Si noti come nel limite $\alpha \rightarrow 0$ si riottiene il gauge di Lorentz; il caso per cui $\alpha = 1$ viene usualmente chiamato gauge di Feynman.

5 Regole di Feynman per la QCD

5.1 Calcolo del determinante di Faddeev-Popov

Per la derivazione delle regole di Feynman è necessario calcolare esplicitamente il determinante di Faddeev-Popov, la cui presenza all'interno dell'integrale funzionale è una conseguenza della quantizzazione in presenza di condizioni di gauge-fixing. Viene scelta una classe di condizioni di gauge del tipo $\partial_\mu A^\mu = c(x)$, il quale equivale ad imporre la condizione (113). Si può dimostrare che la matrice di Faddeev-Popov prende la forma

$$M^{\alpha\beta}(x, y) = \frac{1}{g_s}(\delta^{\alpha\beta}\partial^2 + g_s c^{\alpha\beta\gamma} A_\gamma^\mu(x)\partial_\mu)\delta(x - y) = \frac{1}{g_s}(D_\mu\partial^\mu)^{\alpha\beta}\delta(x - y) \quad (127)$$

La matrice $M^{\alpha\beta}$ dipende esplicitamente dai campi di gauge, c'è quindi un accoppiamento con il campo A_μ^γ . La metodologia standard per il calcolo esplicito del determinante di Faddeev-Popov è quella di sostituirlo con una integrazione addizionale da effettuare su un certo campo complesso $\eta(x)$, il quale è una variabile di Grassmann. Sia $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$ un insieme di variabili di Grassmann e α_i un numero ordinario; si hanno allora per definizione la proprietà:

$$\{\theta_i, \theta_j\} = 0 \quad (128)$$

$$[\theta_i, \alpha_i] = 0 \quad (129)$$

ovverosia l'anticommutatività di due variabili di Grassmann qualsiasi e la commutazione di una variabile di Grassmann con i numeri ordinari. In particolare il quadrato di un numero di Grassmann è nullo:

$$\theta_i\theta_i = 0 \quad (130)$$

Si può definire quindi un'integrazione per funzioni di variabile di Grassmann; in realtà questa non è un'integrazione nel senso di Lebesgue, ma si tratta di un'operazione matematiche con proprietà analoghe che viene utilizzata per avere una somma sui cammini. Sia θ una variabile di Grassmann; l'integrale di Grassman è definito come il funzionale lineare:

$$\int (af(\theta) + bg(\theta))d\theta = a \int f(\theta)d\theta + b \int g(\theta)d\theta \quad (131)$$

in cui si definisce

$$\begin{aligned}\int \theta d\theta &= 1 \\ \int d\theta &= 0\end{aligned}\tag{132}$$

cosicchè si abbia:

$$\int \frac{\partial}{\partial \theta} f(\theta) d\theta = 0.\tag{133}$$

Queste proprietà definiscono univocamente l'integrale. È necessario fare ricorso alle variabili di Grassmann per il calcolo esplicito del determinante in quanto si vuole imporre che nei calcoli successivi il determinante rimanga al numeratore e non vada al denominatore. In ogni caso ogni ulteriore trattazione dell'argomento esula dagli scopi di questa tesi. Si scrive a questo punto

$$\det M^{\alpha\beta}(x, y) = C \int \mathcal{D}\eta \mathcal{D}\eta^* \exp[i \int d^4x d^4y \eta^{*\alpha}(x) M^{\alpha\beta} \eta^\beta(y)]\tag{134}$$

in cui C è una costante moltiplicativa che ingloba anche il termine $\frac{1}{g}$ e l'integrazione su η e η^* è l'equivalente dell'integrazione sulle parti reale ed immaginaria del campo η . Le regole di Feynman per il campo ghost seguono dalle (127) e (134). Il propagatore per il campo ghost può essere calcolato dal funzionale generatore

$$W_0^\eta[\beta] = \exp[i \int d^4x d^4y \beta^{*\alpha}(x) \Delta^{\alpha\beta}(x-y) \beta^\beta(y)]\tag{135}$$

Usando il metodo standard, si esplicita la dipendenza di W_0^η da β come

$$W_0^\eta[\beta] \sim \int \mathcal{D}\eta \mathcal{D}\eta^* \exp\left(i \int d^4x [\eta^{*\alpha}(x) \delta^{\alpha\gamma} \partial^2 \eta^\gamma + \beta^{*\alpha}(x) \eta^\alpha(x) + \eta^{*\alpha}(x) \beta^\alpha(x)]\right)\tag{136}$$

in cui

$$\Delta^{\alpha\beta}(x-y) = \delta^{\alpha\beta} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2 + i\epsilon} \exp[-ik(x-y)]\tag{137}$$

A questo punto può essere definito il propagatore ghost $\xi_0^{\eta\alpha\beta}$ come:

$$\xi_0^{\alpha\beta}(x, y) = \left(\frac{1}{i}\right)^2 \frac{\delta}{\partial \beta^{*\alpha}(x)} \frac{\delta}{\partial \beta^\beta(y)} W_0^\eta[\beta]\tag{138}$$

da cui si ottiene

$$\xi_0^{\alpha\beta}(x, y) = -i\Delta^{\alpha\beta}(x - y) \quad (139)$$

Graficamente il propagatore $\xi_0^{\alpha\beta}(x, y)$ è disegnato come una linea tratteggiata con una freccia che punta verso la sorgente del campo η .



5.2 Funzionale generatore completo

Il funzionale generatore completo per la QCD si scrive

$$\begin{aligned} W[J, \alpha, \beta] = N \int \mathcal{D}A_\mu^\alpha \mathcal{D}\Psi \mathcal{D}\bar{\Psi} \mathcal{D}\eta \mathcal{D}\eta^* \exp[i(S[A, \Psi] + S^\eta[A, \eta] + S_G)] \\ + i \int d^4x [J_\mu^\alpha(x) A_\alpha^\mu(x) + \beta^{*\alpha}(x) \eta^\alpha(x) + \eta^*(x) \beta^\alpha(x) \\ + \bar{\alpha}(x) \Psi(x) + \bar{\Psi}(x) \alpha(x)] \end{aligned} \quad (140)$$

in cui

$$\begin{aligned} S[A, \Psi] &= \int d^4x \left(-\frac{1}{4} G_{\mu\nu}^\alpha G_{\alpha}^{\mu\nu} + i \bar{\Psi} \gamma_\mu D^\mu \Psi - m \bar{\Psi} \Psi \right) \\ S^\eta[A, \eta] &= \int d^4x \eta^{*\alpha} [\delta^{\alpha\beta} \partial^2 + g c^{\alpha\beta\gamma} A_\gamma^\mu(x) \partial_\mu] \eta^\beta(x) \\ S_G &= -\frac{1}{2\xi} \int d^4x [\partial^\mu A_\mu^\alpha]^2 \end{aligned}$$

Gli spinori di Dirac $\Psi, \bar{\Psi}$ descrivono i quark e sono vettori nello spazio tridimensionale del colore. È molto utile separare l'azione nel termine di non interazione S_0

$$\begin{aligned} S_0[A, \Psi, \eta] = \int d^4x \left[\frac{1}{2} A_\mu^\alpha \delta^{\alpha\beta} \partial^2 (g^{\mu\nu} - \frac{\partial^\mu \partial^\nu}{\partial^2} A_\nu^\beta) \right. \\ \left. + \bar{\Psi}(x) (i\gamma^\mu \partial^\mu - m) \Psi(x) + \eta^{*\alpha} \delta^{\alpha\beta} \eta^\beta \right] + S_G \end{aligned} \quad (141)$$

e nel termine di interazione S_1

$$\begin{aligned}
S_1[A, \Psi, \eta] = & \int d^4x [g c_{\alpha\beta\gamma} (\partial_\mu A_\nu^\alpha) A^{\mu\beta} A^{\nu\gamma} - \frac{1}{4} g^2 c_{\alpha\beta\gamma} c_{\alpha\rho\sigma} A_\mu^\beta A_\nu^\gamma A^{\mu\rho} A^{\nu\sigma} \\
& - g \bar{\Psi} \gamma_\mu A^{\mu\alpha} T^\alpha \Psi + g c_{\alpha\beta\gamma} A_\mu^\gamma \eta^{*\alpha} (\partial^\mu \eta^\beta)]
\end{aligned} \tag{142}$$

Le matrici T^a sono i generatori di colore di $SU(3)$ nella loro rappresentazione fondamentale. Si può notare come in QCD oltre i processi d'interazione fra campo fermionico e ghost con il campo gluonico, siano ammessi vertici a tre e quattro gluoni. Il funzionale generatore libero si scrive quindi

$$\begin{aligned}
W_0 = & \exp\left(i \int d^4x d^4y \left[\frac{1}{2} J_\mu^\alpha(x) D_{\alpha\beta}^{\mu\nu}(x-y) J_\nu^\beta(y) \right. \right. \\
& \left. \left. + \bar{\alpha}(x) S_{\alpha\beta}(x-y) \alpha_\beta(y) + \beta^{*\alpha} \Delta^{\alpha\beta}(x-y) \beta^\beta(y) \right] \right)
\end{aligned} \tag{143}$$

in cui $S_{\alpha\beta}, D_{\alpha\beta}^{\mu\nu}, \Delta^{\alpha\beta}$ sono date da:

$$\begin{aligned}
S_{\alpha\beta} = & -\delta_{\alpha\beta} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^2} \frac{k + m}{k^2 - m^2 + i\epsilon} \exp[-ik(x-y)] \\
D_{\mu\nu}^{\alpha\beta}(x-y) = & \delta^{\alpha\beta} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \left[(g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2 + i\epsilon}) + \xi \frac{k_\mu k_\nu}{k^2 + i\epsilon} \right] \frac{1}{k^2 + i\epsilon} \exp[-ik(x-y)] \\
\Delta^{\alpha\beta} = & \delta^{\alpha\beta} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^2} \frac{1}{k^2 + i\epsilon} \exp[-ik(x-y)]
\end{aligned} \tag{144}$$

I propagatori $\langle 0 | T \eta^\alpha(x) \eta^{*\beta}(y) | 0 \rangle$, $\langle 0 | T \Psi^\alpha(x) \bar{\Psi}^\beta(y) | 0 \rangle$ e $\langle 0 | T A_\mu^\alpha(x) A_\nu^\beta(y) | 0 \rangle$ sono ottenuti moltiplicando le rispettive funzioni di Green per $(-i)$

5.3 Funzioni di Green al primo ordine. Vertici in QCD

Tutte le funzioni di Green in QCD possono essere calcolate attraverso il metodo perturbativo dall'espansione

$$\begin{aligned}
\langle 0 | T A_\mu^\alpha \dots A_\nu^\beta \Psi \dots \bar{\Psi} | 0 \rangle = & \\
\frac{\int \mathcal{D}[A \Psi \bar{\Psi} \eta \eta^*] (A_\mu^\alpha \dots A_\nu^\beta \Psi \dots \bar{\Psi}) \Sigma_N \frac{(iS_1)^N}{N!} \exp(iS_0)}{\int \mathcal{D}[A \Psi \bar{\Psi} \eta \eta^*] \Sigma_N \frac{(iS_1)^N}{N!} \exp(iS_0)}
\end{aligned} \tag{145}$$

in cui il denominatore ha la funzione di eliminare tutti i diagrammi vacuum-to-vacuum.

Si procede ora al calcolo esplicito delle funzioni di Green al primo ordine in S_1 di modo da ricavare le regole di Feynman per i vertici in QCD.

Il primo processo ad essere preso in considerazione è

$$G_{\mu\nu\lambda}^{(3g)abc}(x_1, x_2, x_3) \equiv \langle 0 | T A_\mu^a(x_1) A_\nu^b(x_2) A_\lambda^c(x_3) | 0 \rangle \quad (146)$$

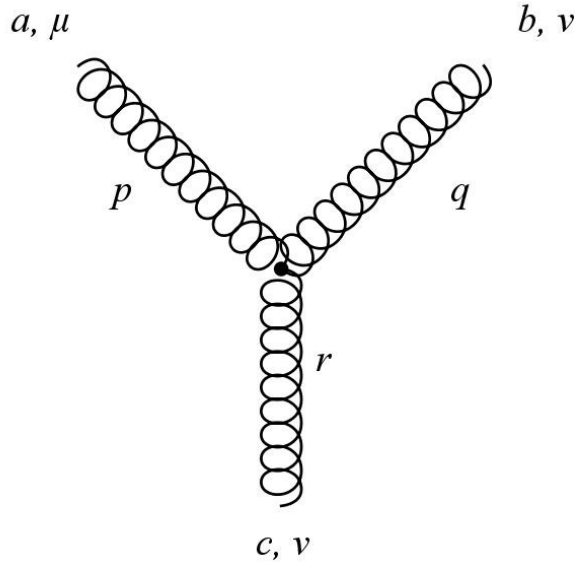


Figura 1: Diagramma per il vertice a tre gluoni

che definisce il vertice gluone-gluone-gluone completamente simmetrico dalla relazione

$$G_{\mu\nu\lambda}^{(3g)abc}(x_1, x_2, x_3) \equiv \int d^4y [-iD_{\mu\mu'}^{aa'}(x_1 - y)][-iD_{\nu\nu'}^{bb'}(x_2 - y)][-iD_{\lambda\lambda'}^{cc'}(x_3 - y)] V_{a'b'c'}^{\mu'\nu'\lambda'}(y) \quad (147)$$

Al prim'ordine in S_1 si ha

$$G_{\mu\nu\lambda}^{(3g)abc}(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{i^6} \frac{\partial^3}{\partial J_\mu^a \partial J_\nu^b \partial J_\lambda^c} i \int d^4y (g_{cdef}) \frac{\partial^3}{\partial J_\mu^a \partial J_\nu^b \partial J_\lambda^c} W_0[J, \beta, \alpha] |_{J=\beta=\alpha=0} \quad (148)$$

in cui la notazione $\partial_\rho^{(d)}$ indica che la componente A_ρ^d è derivata rispetto alla variabile y . Si procede assegnando ai punti x_1, x_2, x_3 e y_1, y_2, y_3 al diagramma guida

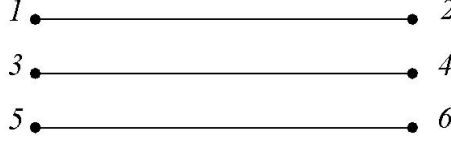


Figura 2: Diagramma prototipo per interazione a tre

Per ogni assegnazione esiste un fattore di simmetria $2^3 3!$, che si cancella esattamente con il fattore $\frac{1}{2^3 3!}$ proveniente dall'espansione in serie di W_0 ; inoltre il fattore $\frac{1}{i^6} i^3 = -i^3$ viene incluso nei propagatori in modo da ottenere il risultato finale scritto nella forma

$$G_{\mu\nu\lambda}^{(3g)abc}(x_1, x_2, x_3) = \int d^4 y \partial_\rho^d \Sigma [-i D_{\mu\mu'}^{aa'}(x_1 - y)] [-i D_{\nu\nu'}^{bb'}(x_2 - y)] [-i D_{\lambda\lambda'}^{cc'}(x_3 - y)] V_{a'b'c'}^{\mu'\nu'\lambda'}(y) \quad (149)$$

in cui la somma è fatta su tutte le permutazioni delle coppie di indici (d, k) , (e, ρ) e (f, k) e la derivazione è rispetto ad y . Scrivendo il risultato nella forma (147) si ottiene

$$V_{\mu\nu\lambda}^{abc} = i g c_{def} (\delta^{ad} \delta^{be} \delta^{cf} g_{\mu\nu} \partial_\lambda^{(d)} + \delta^{af} \delta^{bd} \delta^{ce} g_{\mu\nu} \partial_\lambda^{(d)} + \delta^{ae} \delta^{bf} \delta^{cd} g_{\nu\lambda} \partial_\mu^{(d)} + \delta^{ad} \delta^{bf} \delta^{ce} g_{\mu\nu} \partial_\lambda^{(d)} + \delta^{ae} \delta^{bd} \delta^{cf} g_{\nu\lambda} \partial_\mu^{(d)} + \delta^{af} \delta^{be} \delta^{cd} g_{\mu\lambda} \partial_\nu^{(d)}) \quad (150)$$

Solitamente si cerca l'espressione delle funzioni di Green nello spazio dei momenti. Si definisce così la funzione $\tilde{G}_{\mu\nu\lambda}^{(3g)abc}(p, q, r)$ come la trasformata di Fourier di $G_{\mu\nu\lambda}^{(3g)abc}(x_1, x_2, x_3)$:

$$G_{\mu\nu\lambda}^{(3g)abc}(x_1, x_2, x_3) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{d^4 r}{(2\pi)^4} \exp(-ip \cdot x_1) \exp(-iq \cdot x_2) \times \exp(-ir \cdot x_3) \tilde{G}_{\mu\nu\lambda}^{(3g)abc}(p, q, r) \quad (151)$$

e il vertice trigluonico $\tilde{V}_{a'b'c'}^{\mu'\nu'\lambda'}(p, q, r)$ dalla relazione

$$\tilde{G}_{\mu\nu\lambda}^{(3g)abc}(p, q, r) = \tilde{G}_{\mu\mu'}^{(2g)aa'}(p) \tilde{G}_{\nu\nu'}^{(2g)bb'}(q) \tilde{G}_{\lambda\lambda'}^{(2g)cc'}(r) \tilde{V}_{a'b'c'}^{\mu'\nu'\lambda'}(p, q, r) \quad (152)$$

in cui

$$\tilde{G}_{\mu\mu'}^{(3g)aa'} = \frac{-i}{p^2 + i\epsilon} [g_{\mu\mu'} - (1 - \alpha) \frac{p_\mu p_{\mu'}}{p^2}] \delta^{aa'} \quad (153)$$

ed analogamente per $\tilde{G}_{\nu\nu'}^{(3g)bb'}$ e $\tilde{G}_{\lambda\lambda'}^{(3g)cc'}$. Scrivendo i propagatori nella relazione (147) nei termini delle loro trasformate di Fourier (150), differenziando secondo (151) e (152)

si ottiene il risultato finale:

$$\begin{aligned} \tilde{V}_{\mu\nu\lambda}^{abc}(p, q, r) = & -(2\pi)^4 \delta(p + q + r) g c_{abc} \\ & \times [(r - p)_\nu g_{\mu\lambda} + (q - p)_\lambda g_{\mu\nu} + (r - q)_\mu g_{\nu\lambda}] \end{aligned} \quad (154)$$

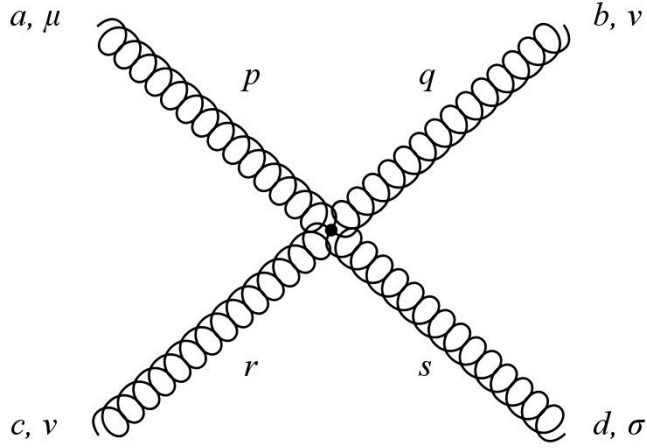


Figura 3: Diagramma per il vertice a quattro gluoni

Allo stesso modo si può ricavare l'espressione per il vertice a quattro gluoni. Il punto di partenza è la funzione di Green

$$G_{\mu\nu\lambda\sigma}^{(4g)abcd}(x_1, x_2, x_3, x_4) \equiv \langle 0 | T A_\mu^a(x_1) A_\nu^b(x_2) A_\lambda^c(x_3) A_\sigma^d(x_4) | 0 \rangle \quad (155)$$

che al prim'ordine in S_1 definisce il vertice 4g secondo la relazione

$$\begin{aligned} G_{\mu\nu\lambda\sigma}^{(4g)abcd}(x_1, x_2, x_3, x_4) = & (-i)^4 \int d^4 y D_{\mu\mu'}^{aa'}(x_1 - y) D_{\nu\nu'}^{bb'}(x_2 - y) \\ & \times D_{\lambda\lambda'}^{cc'}(x_3 - y) D_{\sigma\sigma'}^{dd'}(x_4 - y) V_{a'b'c'd'}^{\mu'\nu'\lambda'\sigma'} \end{aligned} \quad (156)$$

Scrivendo

$$\begin{aligned} G_{\mu\nu\lambda\sigma}^{(4g)abcd}(x_1, x_2, x_3, x_4) = & \frac{1}{i^8} \frac{\partial^4}{\partial J_\mu^a(x_1) \partial J_\nu^b(x_2) \partial J_\lambda^c(x_3) \partial J_\sigma^d(x_4)} \\ & \times i \int d^4 y \left(-\frac{1}{4} g^2 c_{efh} c_{emn} \right) \frac{\partial^4}{\partial J_k^f \partial J_\rho^h \partial J^{mk} \partial J^{n\rho}(y)} W_0 |_{J=\beta=\alpha=0} \end{aligned} \quad (157)$$

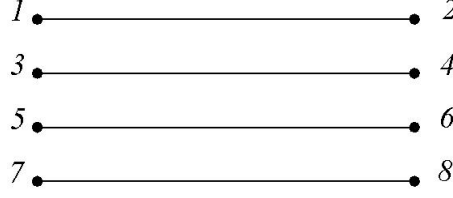


Figura 4: Diagramma prototipo per interazione a quattro particelle

è possibile calcolare $V_{abcd}^{\mu\nu\lambda\sigma}$. Sono possibili 24 differenti assegnazioni di coppie di punti $x_1\dots x_4, y_1\dots y_4$ nel diagramma prototipo. Esattamente come nel caso a tre gluoni, il fattore di simmetria $2^4 4!$ è cancellato dal coefficiente $\frac{1}{2^4 4!}$ che proviene dall'espansione di W_0 . Si ottiene quindi la forma finale:

$$V_{\mu\nu\lambda\sigma}^{abcd} = -ig^2 [c_{abe}c_{cde}(g_{\mu\lambda}g_{\nu\sigma} - g_{\mu\sigma}g_{\nu\lambda}) + c_{ace}c_{bde}(g_{\mu\nu}g_{\lambda\sigma} - g_{\mu\sigma}g_{\nu\lambda}) + c_{ade}c_{bce}(g_{\mu\nu}g_{\lambda\sigma} - g_{\mu\lambda}g_{\nu\sigma})] \quad (158)$$

che è vera anche nello spazio dei momenti.

Le ultime cose che rimangono da calcolare sono le espressioni per i vertici comprendenti fermioni e ghost. Queste sono ottenute rispettivamente dalle funzioni di Green $\langle 0 | T\Psi_j(x_3)\Psi_i(x_2)A_\mu^a(x_1) | 0 \rangle$ e $\langle 0 | T\eta^c(x_3)\eta^{\beta*}(x_2)A_\mu^a(x_1) | 0 \rangle$ scritte come:

$$G_{\mu,(f-g)}^{abc}(x_1, x_2, x_3) = \int d^4y [-iD_{\mu\mu'}^{aa'}(x_1 - y)][-iS^{bb'}(x_2 - y)][-iS^{cc'}(x_3 - y)]V_{a'b'c'}^{\mu'}(y) \quad (159)$$

$$G_{\mu,(gh-g)}^{abc}(x_1, x_2, x_3) = \int d^4y [-iD_{\mu\mu'}^{aa'}(x_1 - y)][-i\Delta^{bb'}(x_2 - y)][-i\Delta^{cc'}(x_3 - y)]V_{a'b'c'}^{\mu'}(y) \quad (160)$$

Seguendo passo per passo le procedure gi\`a applicate nel caso dei vertici a tre e a quattro gluoni si ottendono, nello spazio dei momenti, le seguenti espressioni:

$$\tilde{V}_{\mu,(f-g)}^{abc} = -ig\gamma_\mu (T^a)_{ji} (2\pi)^4 \delta(r + q - p) \quad (161)$$

$$\tilde{V}_{\mu,(gh-g)}^{abc} = -gC_{cab}T_\mu (2\pi)^4 \delta(r + q - p) \quad (162)$$

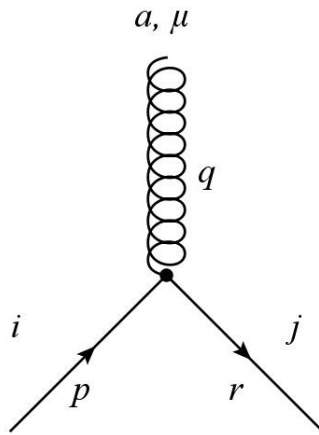


Figura 5: Diagramma di interazione fra fermione e campo ghost

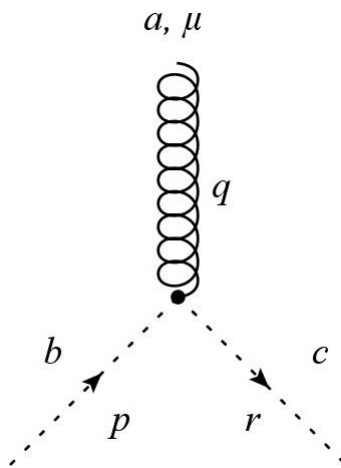


Figura 6: Diagramma di interazione fra gluone e campo ghost

6 Conclusioni

In questa tesi si sono presentate le regole di Feynman dei diagrammi al prim'ordine per la cromodinamica quantistica. Dopo una breve parte preliminare in cui si è introdotto il formalismo dell'integrale sui cammini, si è proceduto alla ricavazione dei propagatori per i campi scalari e di Dirac; si è poi introdotto il formalismo delle teorie di gauge, con particolare attenzione al caso di una teoria di gauge non abeliana con gruppo di

simmetria $SU(3)$, e sviluppato una teoria gauge-invariante. È stato poi introdotto il determinante di Faddeev-Popov, il campo ghost come metodologia standard di calcolo del determinante, il suo propagatore e si è infine passati al calcolo esplicito dei diagrammi di interazione a tre e a quattro gluoni, gluone-quark e gluone-ghost.

7 Bibliografia

Pokorski, S. (2000). *Gauge fields theories*, Cambridge University Press.

Peskin, M.; Schroeder D. (1995). *An introduction to quantum field theory*, Perseus Books Publishing.

Bjorken, J.D.; Drell, S.D. (1965). *Relativistic quantum fields*, McGraw-Hill.