ALMA MATER STUDIORUM • UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE,FISICHE E NATURALI

CORSO DI LAUREA MAGISTRALE IN MATEMATICA (CLASSE LM - 40)

Indirizzo Didattico

PRESENTAZIONE IPERTESTUALE DEL CALCOLO DELLA PROBABILITÀ

PRESENTATA DA

ANGELICA NICOLAE

MATRICOLA N. 0000604540

RELATORE
Chiar.mo Prof.

ALESSANDRO GIMIGLIANO

CORRELATORE

PROF. PAOLO NEGRINI

SESSIONE III

ANNO ACCADEMICO 2011 / 2012

INDICE

Ringrazio il relatore

prof. Alessandro Gimigliano

per la disponibilità e la pazienza

con cui mi ha seguito

fin dall'inizio del tirocinio.

Grazie a tutti coloro che

con incredibile pazienza mi sono stati vicino

in questo faticoso e indimenticabile percorso.

Non considerate mai lo studio come un dovere,
ma come un'occasione invidiabile
di imparare a conoscere
l'effetto liberatorio della bellezza spirituale,
non solo per il vostro proprio godimento,
ma per il bene della comunità
alla quale appartiene la vostra opera futura.

A. Einstein

Introduzione

E ora avete capito, miei piccoli lettori, qual era il bel mestiere che faceva l'Omino? Questo brutto mostriciattolo, che aveva una fisionomia tutta latte e miele, andava di tanto in tanto con un carro a girare per il mondo: strada facendo raccoglieva con promesse e con moine tutti i ragazzi svogliati, che avevano a noia i libri e le scuole: e dopo averli caricati sul suo carro, li conduceva nel Paese dei Balocchi, perché passassero tutto il loro tempo in giochi, in chiassate e in divertimenti. Quando poi quei poveri ragazzi illusi, a furia di baloccarsi sempre e di non studiare mai, diventavano tanti ciuchini, allora tutto allegro e contento s'impadroniva di loro e li portava a vendere sulle fiere e sui mercati.

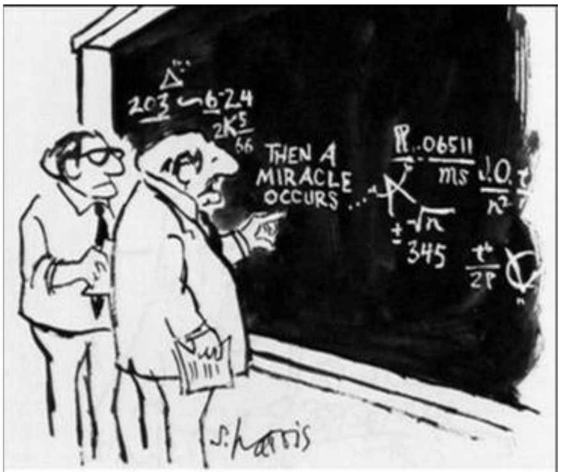
C. Collodi, *Le avventure di Pinocchio*

L'obiettivo della mia tesi è quello di elaborare un ipertesto del Calcolo della probabilità. Lo scopo è quello di introdurre un argomento di matematica in modo “friendly” in quanto "La matematica appare spesso allo studente come una disciplina troppo seria, fredda, astrusa, in poche parole antipatica", come dice Mauro Cerasoli nel testo "Consigli per amare la matematica", ribadendo che: "Insegnare ad amare la matematica è difficile, più facile è insegnare a non odiare, a ridurre il numero di coloro che dichiarano orgogliosi di essere *negati per la matematica."*

Anche se riconosciuta da tutti l'importanza della "matematica dell'incertezza" (per il suo valore in ambito scientifico e non solo) e nonostante che lo studio della stessa sia fortemente auspicato nelle indicazioni nazionali redatte dal ministero dell'istruzione, ancora questo argomento non trova giusto spazio all'interno della prassi scolastica. Tanti studenti non hanno affrontato argomenti di probabilità e statistica all'interno del percorso di studi pre - universitario.

La statistica e la probabilità sono argomenti ancora piuttosto nuovi dal punto di vista della tradizione didattica a livello di scuola media superiore e non molto conosciuti dagli insegnanti, specie quelli che non hanno ricevuto a suo tempo all'Università una formazione specifica. Questi argomenti vengono relegati (talvolta anche nei libri di testo) a poche nozioni un po' frettolose e confuse anche perché in questo quadro si preferisce dedicare il prezioso tempo in classe ad altre questioni più tradizionali e consolidate.

Per questo ho pensato di presentare l'argomento sia per venire incontro a chi si avvicina alla Statistica e Probabilità per la prima volta, sia per presentare una parte pratica della matematica che offre i mezzi adeguati a risolvere svariati problemi e che invita ad esercitare il pensiero sulle modalità per arrivare alla soluzione.



"I think you should be more explicit here in step two."

Perché parliamo di probabilità?

Conosciamo e incontriamo spesso in natura, in economia, nella nostra vita quotidiana, fenomeni che sembrano avere caratteristiche di casualità. Molto spesso questa casualità è solo apparente e potrebbe essere dovuta a una serie di fattori che, pur essendo deterministici, possono non essere completamente noti o avere una spiegazione troppo complessa.

"La teoria delle probabilità non è altro che il tentativo del genere umano di comprendere l'incertezza dell'universo, di definire l'indefinibile" (così scrive A.D. ACZEL, un divulgatore scientifico israeliano, laureato in matematica a Berkeley).

Il Calcolo delle Probabilità è una branca della matematica che fornisce un metodo per quantizzare l'incertezza. In generale la probabilità di un evento è un valore numerico che misura quanto è verosimile che tale evento accada. Assegniamo alla probabilità una scala che va da 0 a 1, dove un valore molto basso indica estremamente improbabile, mentre un valore prossimo a 1 molto probabile.

Il lavoro è progettato nel formato html per poter essere messo in rete nel sito dell'università di Bologna. E' un sito user-friendly dunque è un sito orientato all'utente, caratterizzato da una grafica semplice ed intuitiva che permette una facile navigazione anche agli utenti meno esperti.

Per i giovani nati nell'era digitale è una sfida quotidiana rispondere al meglio alle loro necessità e dunque progettare metodi e strumenti di insegnamento all'interno di uno stretto rapporto tra scuola, casa e il territorio.

Alla luce delle profonde trasformazioni del mondo del lavoro e delle professioni con la crescente instabilità dell'occupazione, delle conoscenze e competenze acquisite, emerge la necessità di gestire autonomamente il proprio percorso formativo e professionale, scegliendo le esperienze di formazione che consentono di conseguire obiettivi di crescita personale e professionale.

Per consentire a tutti di rafforzare le proprie competenze sono messi a disposizione, in modalità on-line, materiali didattici, infatti l'e-learning riveste oggi un ruolo sempre più importante nel mondo della formazione.

Le università, le scuole, le istituzioni e le aziende si rivolgono sempre di più alla **formazione online** per gli indiscutibili vantaggi che questa comporta.

Il più evidente è senza dubbio la flessibilità:

- ***temporale***, che permette di accedere al corso a qualsiasi orario, molto comoda soprattutto per i lavoratori;
- ***spaziale***, che permette di accedere al corso da qualsiasi punto dotato di connessione Internet, quindi anche da casa propria o da paesi localizzati in qualsiasi parte del globo terrestre;
- ***di personalizzazione*** dei percorsi d'apprendimento, che permette quindi sia di procedere secondo i propri tempi e le proprie esigenze, ma

anche, se ben strutturata, di proporre programmi diversi a seconda delle curiosità, inclinazioni e conoscenze pregresse di ciascun individuo.

La tesi evidenzia, altresì, la natura eminentemente pratica ed operativa del concetto di formazione usando le tecnologie informatiche e mette a disposizione on-line materiali didattici e contenuti nel modo di consentire a tutti coloro che possono essere interessati di rafforzare le proprie competenze.

Infatti il successo universitario, in termini di riduzione dell'abbandono e di crescita delle conoscenze, dipende sia dalle motivazioni che dalle competenze degli studenti che si accingono ad affrontare un percorso di formazione universitaria. Scegliere il percorso più adatto alle proprie aspirazioni (orientamento) e creare le condizioni essenziali per poterlo affrontare (anche attraverso l'e-learning) sono fattori che agiscono reciprocamente nella direzione di un successo formativo

Non si può dimenticare che apprendere comporta l'accettazione dell'eventualità di essere "modificati" dall'apprendimento e, quindi, di allontanarsi da una situazione di equilibrio statico per incamminarsi in un processo dinamico.

Oggi le persone non apprendono più soltanto nei luoghi tradizionalmente deputati a questo scopo come le scuole e le università: di continuo, in ogni contesto e attraverso una quantità sempre crescente di mezzi, sono portate a conoscere, imparare e scoprire. È quello che viene definito apprendimento informale. Si assiste ad un incremento notevole dell'informale nell'apprendimento; un analista americano, Jay Cross, a proposito di formazione continua, lo definisce "The other 80%" a significare che solo un quinto degli apprendimenti oggi avviene in maniera formalizzata: tradotto brutalmente in tempo-scuola, significa che in aula un ragazzo impegna mediamente un terzo della propria giornata (compiti esclusi) per un fare un quinto delle proprie scoperte quotidiane.

Le nuove tecnologie potrebbero indurre la falsa idea che il processo di apprendimento possa essere integralmente gestito dal soggetto. In questo modo istituzioni come la scuola sarebbero del tutto inutili e i soli media assolverebbero al problema della trasmissione culturale. In realtà le cose non stanno così, in quanto l'educazione formale ha ancora un suo significativo ruolo da giocare. Essa deve proporsi come un elemento del triangolo: a) *processo di formazione,* b) *tecnologie* e c) *istituzioni deputate alla formazione*. Il mestiere dei docenti ha oggi un senso nuovo, quello della mediazione culturale tra le tecnologie e gli utenti.

Alcuni concetti probabilistici fondamentali, indispensabili per inquadrare l'argomento su qui verte la tesi, quali le definizioni ed i concetti di base della probabilità, la probabilità condizionata, l'indipendenza stocastica si possono trovare nel mio precedente lavoro eseguito nel quadro dell'attività professionalizzanti (Tirocinio formativo) progetto "MATH ON LINE" con la supervisione del professor Alessandro Gimigliano che si trova in rete nel sito dell'università di Bologna all'indirizzo:
http://progettomatematica.dm.unibo.it/ProbElem/index.html

Il lavoro è strutturato in 3 capitoli; il primo capitolo fornisce una motivazione per la mia scelta di costruire un ipertesto e dunque è una presentazione del concetto di e-learning e delle possibilità che e-learning offre; nel secondo capitolo ho descritto una parte delle difficoltà tecniche incontrate nella stesura della tesi, nel terzo capitolo c'è una presentazione dell'argomento matematico contenuto nell'ipertesto per la presentazione del calcolo della probabilità.

Capitolo 1. Cos'è l' "E – learning"?

Una scuola dì umanità

Il primo giorno dì scuola, tutti gli insegnanti dì un istituto privato ricevettero dal Preside la seguente lettera:

Caro collega, sono un sopravvissuto dì un campo di sterminio.
I miei occhi hanno visto cose che nessuno dovrebbe mai vedere:
Camere a gas costruite da ingegneri specializzati,
Bambini avvelenati da medici colti,
Lattanti soppressi da infermiere provette,
Donne e bambini fucilati e bruciati da gente diplomata e laureata.
L'istruzione, perciò, mi insospettisce.
E vi chiedo: aiutate i vostri alunni a diventare umani.
I vostri sforzi non devono mai produrre mostri eruditi,
psicopatici sapienti, o dotti Eichmann.
La lettura, la scrittura e l'aritmetica sono cose importanti
soltanto se servono a rendere i nostri figli più umani.

"L'objectif premier pour un éducateur est de former des autodidactes"
(il primo obiettivo dell'educatore è quello di formare degli autodidatti)
Frère Daniel De Montmollin

L'Unione europea sin dal 1988, con il programma "DELTA" (Distance Education and Learning Technology Applications), ha promosso un'indagine sulle nuove tecnologie applicate alla formazione ed ha costituito l'European Schoolnet, un consorzio dei ministeri per la Pubblica Istruzione dei Paesi membri, allo scopo di mettere a punto strategie comuni in tema di formazione a distanza.

La Commissione europea il 24 maggio 2000 ha adottato l'iniziativa "*e*Learning - pensare all'istruzione di domani", approvata dal Consiglio europeo di Feira del giugno 2000. Tale iniziativa ha presentato i principi, gli obiettivi e le linee d'azione definiti come "l'utilizzo delle nuove tecnologie multimediali e di Internet per migliorare la qualità dell'apprendimento agevolando l'accesso a risorse e servizi nonché gli scambi e la collaborazione a distanza".

L'iniziativa *e*Learning si inserisce nel contesto del *piano d'azione globale eEurope*, che "mira a consentire all'Europa di sfruttare i propri punti di forza e di superare gli ostacoli che si frappongono ad un aumento dell'integrazione e dell'impiego delle tecnologie digitali"

Il documento invita tutti gli Stati membri a perseverare negli sforzi concernenti l'effettiva integrazione delle TIC (tecnologie dell'informazione e della comunicazione) nei sistemi di istruzione e formazione ed a sfruttare pienamente le potenzialità di internet, degli ambienti multimediali e di apprendimento virtuale per migliori e più rapide realizzazioni di educazione permanente.

A questo proposito si ritengono irrinunciabili per lo studente tre ambiti di competenze ritenuti prioritari dalla Commissione europea per l'occupazione e gli affari sociali:

- la padronanza della Rete e delle risorse multimediali,
- la reale utilizzazione delle nuove risorse informatiche per l'apprendimento e l'acquisizione di competenze nuove

- l'acquisizione di competenze essenziali, come la capacità di lavorare in gruppo, la creatività, la pluridisciplinarità, la capacità di adattamento alle innovazioni, di comunicazione interculturale e di risoluzione di problemi.

Tra gli obiettivi prefissati nell'ambito di *e*Europe si annovera l'implementazione della conoscenza e dell'uso da parte di docenti e discenti delle tecnologie digitali nella propria attività didattica e la possibilità per ogni lavoratore di acquisire una cultura digitale tramite l'apprendimento permanente.

L'iniziativa *e*Learning si propone di creare le condizioni adatte all'elaborazione di **contenuti**, **servizi** e **ambienti di apprendimento** moderni e didatticamente appropriati, nonché **rafforzare la collaborazione e l'articolazione delle azioni e delle iniziative** in materia a tutti i livelli (locale, regionale, nazionale ed europeo) e tra tutti i soggetti interessati: università, scuole, centri di formazione, responsabili a livello decisionale e amministratori incaricati della scelta di attrezzature, software, contenuti o servizi.

La direttiva generale 3 maggio 2012, Prot.n. 8164 (registrata alla Corte dei Conti, registro n. 10, foglio 96, del 26 giugno 2012) riguardante le Priorità politiche e linee per la programmazione delle attività del Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca (MIUR) per l'anno 2012, nell'atto di indirizzo, individua tra le priorità politiche per l'Istruzione quelle di favorire l'alfabetizzazione informatica (e-literacy), di promuovere l'implementazione del Piano scuola digitale, ed in generale l'innovazione digitale nella scuola:

*"**c)** Favorire e promuovere l'alfabetizzazione informatica (e-literacy). La possibilità di utilizzare le tecnologie dell'informazione e della comunicazione (TIC), che caratterizzano l'attuale contesto sociale,*

deve essere prerogativa di tutti i cittadini. Il modo per sviluppare queste competenze nella popolazione passa inevitabilmente dalla scuola sia direttamente che indirettamente, attraverso:

1) la digitalizzazione dei servizi di interfaccia tra la scuola e la famiglia;

2) l'utilizzo di e-book e contenuti digitali per le attività scolastiche a casa.

Le scuole possono inoltre diventare esse stesse luoghi per la partecipazione alla società della comunicazione.

***h)** "Rendere l'offerta educativa e formativa coerente con l'evoluzione in senso digitale di tutti gli altri settori della società"* è obiettivo prioritario del ministro dell'istruzione Profumo.

Oggi si sente parlare molto di *e-learning* ed il capitolo dell'*e-learning* si appresta a divenire il più corposo nel grande libro della formazione. L'espressione letteralmente significa "*apprendimento elettronico"* e si propone come un sistema di formazione continua, in un processo all'interno del quale si inseriscono le diverse attività formative.

Secondo la definizione data da uno dei maggiori esperti, Elliot Maise, e-learning significa "utilizzare le tecnologie di rete per progettare, distribuire, scegliere, gestire ed ampliare l'apprendimento." Questo sistema postula, dunque, rispetto alla didattica tradizionale, alcuni cambiamenti:

- nel modo di progettare **i contenuti formativi,**
- nel modo di **organizzarli ed archiviarli,**
- nella **fruizione e scelta** da parte dell'utente,

- nell'**erogazione dei contenuti** e nella gestione del processo formativo nel suo complesso[1].

la definizione di "e-learning" fornita nel Glossario Asfor, che definiva l'*E-learning come: " La metodologia didattica che offre la possibilità di erogare contenuti formativi elettronicamente (e-learning) attraverso Internet o reti Intranet. Per l'utente rappresenta una soluzione di apprendimento flessibile, in quanto fortemente personalizzabile e facilmente accessibile. Il termine e-learning copre un'ampia serie di applicazioni e processi formativi, quali computer based learning, web based learning e aule virtuali .In effetti, sviluppare un sistema di e-learning significa sviluppare un ambiente integrato di formazione utilizzando le tecnologie di rete per progettare, distribuire, scegliere, gestire e ampliare le risorse per l'apprendimento.*
Le modalità più utilizzate per realizzare tale integrazione sono:

- *l'autoapprendimento asincrono attraverso la fruizione di contenuti preconfezionati disponibili sulla piattaforma di erogazione;*
- *l'apprendimento in sincrono attraverso l'utilizzo della videoconferenza e delle aule virtuali;*
- *l'apprendimento collaborativo attraverso le attività delle comunità virtuali di apprendimento"*[2].

L'e-learning sfrutta le potenzialità rese disponibili da reti Internet - intranet per fornire formazione sincrona e/o asincrona agli utenti, che possono accedere ai contenuti dei corsi in qualsiasi momento e in ogni

[1]Notizie su Elliot MAISE e sul Masie Center sul sito www.masieweb.com

[2]Da "Il glossario E-learning di ASFOR" – in Lettera Asfor 2003, anno XV n.3 .Asfor è un'associazione costituitasi nel 1971 con la finalità di sviluppare la formazione manageriale in Italia

luogo in cui esista una connessione online. Questa caratteristica, unita alla tipologia di progettazione dei materiali didattici, porta a definire alcune forme di e-learning come "soluzioni di insegnamento centrato sullo studente".

In una logica di connettività, l'utente costruisce il proprio personal learning environment a partire dalle tecnologie di utilizzo quotidiano.

L'e-learning si può definire come l'insieme dei processi di formazione e di apprendimento resi possibili dall'uso delle tecnologie legate ad Internet e finalizzati allo sviluppo delle conoscenze, delle competenze e al miglioramento della preparazione e del rendimento in campo professionale. Da questa definizione si evince, quindi, che la Rete risulta essere elemento discriminante perché si possa parlare di e-learning, come dire che se le applicazioni non viaggiano in rete non si tratta di e-learning, ed ecco allora che il termine "on line learning" (apprendimento on line) può essere oggi ritenuto equivalente al termine "e-learning".

Quando si parla di apprendimento, quasi sempre si fa riferimento ad approcci che potremo definire di tipo "formale", basati cioè su un preciso programma formativo, con un inizio e una fine, una regia curata da un soggetto a cui è univocamente assegnato il ruolo di erogatore delle conoscenze, una struttura di sostegno per i corsisti costituita dai tutor, dai materiali educativi, dalla presenza di esperti/specialisti, ecc. e ciò indipendentemente dall'uso di strategie di apprendimento individuale, assistito o collaborativo. In questo senso, in tali approcci il fruitore è condotto (ovvero "spinto") verso l'obiettivo formativo attraverso la proposta di una serie di attività corsuali, facilitate o meno dall'azione di supporti più o meno disponibili.

Anche nel caso dell'e-learning si può parlare di approccio di tipo formale, cioè di un approccio che possiede le caratteristiche appena citate. Di converso, esiste ed assume una grande importanza nell'ambito dell'e-learning, anche un approccio di tipo diverso, basato su processi di apprendimento autonomo ed a volte anche poco consapevole, al di fuori dei contesti strutturati e formali del mondo dell'istruzione e della formazione. Infatti Internet permette un uso libero del web per scopi quali la ricerca, la comunicazione o lo svago, permettendo ad ogni singolo utente la costruzione di percorsi autonomi ed originali, e permettendo la tessitura di una rete di contatti o conoscenze anche molto estesa. Il soggetto del processo di apprendimento si trova ad essere un punto di snodo di una serie di processi di scambio bidirezionali fra molteplici attori del processo stesso: tutor e/o formatori, materiali didattici e/o di supporto, sportelli reali e/o virtuali di assistenza alla didattica, comunità di apprendimento più o meno formalizzate basate su piattaforme tipiche del social networking, ecc.

L'e-learning informale quindi costituisce un fenomeno di massa dalle enormi potenzialità. Di esso usufruiscono, o possono usufruirne, larghe fasce della popolazione costituite da persone di solito di cultura medio - alta, con forti motivazioni, con strumenti cognitivi più robusti rispetto alla media, in grado di stabilire degli obiettivi e di valutare anche i progressi rispetto ad essi.

L'e-learning informale può costituire anche una risorsa per quelle fasce più deboli del mercato del lavoro, formate da giovani alle prime esperienze lavorative o da persone assunte con contratti temporanei, che hanno la necessità di acquisire un bagaglio di conoscenze e competenze maggiore da poter poi spendere nel mercato del lavoro. Infine un altro fattore che gioca a favore di questa forma di apprendimento è dato dalla facilità e dalla diffusione capillare dei punti di accesso alla rete, cosa che allarga a dismisura sia le possibilità di un suo utilizzo che le fasce di popolazione a cui può essere rivolto.

Come ogni teoria sociale, anche l'apprendimento informale ha alla sua base un paradigma educativo di riferimento, cioè una guida che fornisce agli studiosi un modello e le indicazioni per costruirlo. Nel caso dell'apprendimento informale il paradigma è soprattutto costituito dalla teoria costruttivista e, in particolar modo, dal cosiddetto costruttivismo sociale centrato sulle modalità con cui il soggetto costruisce attivamente la sua conoscenza.

Il costruttivismo considera l'apprendimento come un processo, socialmente mediato, di costruzione di significati, piuttosto che come un'acquisizione di quantità di conoscenze esistenti all'esterno dell'allievo; in tale approccio metodologico, l'apprendimento avviene principalmente attraverso le interazioni con gli altri. Infatti viene sottolineata l'importanza di un apprendimento che avviene tramite la partecipazione attiva dell'allievo, partecipazione che trova la sua concretizzazione nello studio collaborativo, in gruppo, con altri discenti con cui relazionarsi e con cui interagire.

L'e-learning informale presenta una serie di innegabili punti di forza. In questo processo si tratta, per lo studente, di prendere in prima persona il controllo del suo processo di apprendimento utilizzando la strumentazione che le tecnologie gli mettono a disposizione per condividere e rielaborare i contenuti, crearsi delle conoscenze attraverso un combinazione personalizzabile di applicazioni fruibili sul web. Si possono individuare una serie di condizioni che favoriscono la scelta di una tale strategia di apprendimento, e che sono a loro volta rafforzate da essa, in un feedback positivo:

- autovalutazione delle proprie competenze e lacune formative;

- sviluppo delle capacità organizzative per gestire efficacemente i tempi di studio e la ripartizione delle attività previste;

- flessibilità nella gestione contemporanea di percorsi di studio e lavoro;

- curiosità, motivazione e desiderio di apprendere nuove cose attraverso nuove modalità didattiche;

- facilità all'utilizzo dei principali strumenti tecnologici;

- capacità di utilizzo di più strumenti e diverse metodologie di apprendimento;

- disponibilità ad instaurare comunicazioni e relazioni a distanza;

- individuazione di un percorso di formazione personalizzato.

Non si può poi esulare dagli aspetti sociologici che le piattaforme hanno avuto nel corso degli anni. Attraverso di esse, l'apprendimento si è potuto diffondere in modo capillare, raggiungendo, anzi facendosi raggiungere, da persone in tutto il mondo. Le aziende hanno potuto formare il loro personale abbattendo barriere spazio-temporali e i costi esorbitanti dei corsi in presenza. Le scuole e le università hanno erogato ed erogano ancora corsi a distanza a volte basati su piattaforme e-learning LMS (Learning Management System ovvero attività formative basate su una tecnologia specifica, detta "piattaforma tecnologica" LMS). Il bisogno crescente è quello di personalizzare l'apprendimento, andando oltre i suoi confini. La tendenza è verso il cosiddetto lifelong learning, cioè un processo di apprendimento ininterrotto, che ci seguirà per tutta la vita, e verso la presenza costante di computer o macchine assimilabili ad esso. Nello scenario della formazione ciò significa apprendere in qualsiasi momento, qualsiasi cosa si stia facendo, sempre in presa diretta con persone e sistemi, utilizzando potenti e pervasivi mezzi di comunicazione, simulazioni e giochi.

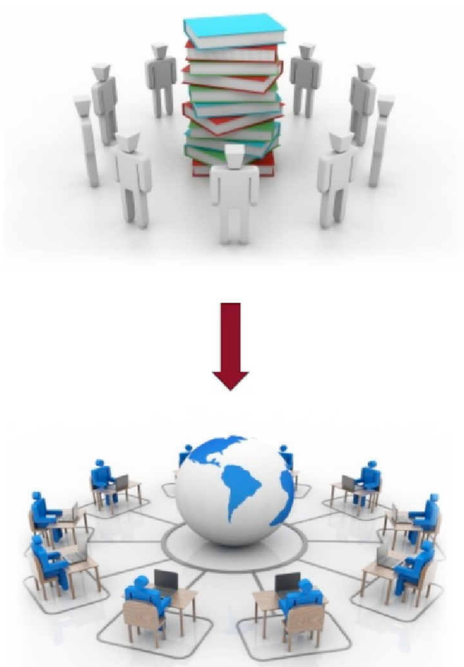
Tutti - ha dichiarato don Francesco Macrì- Presidente della federazione delle scuole cattoliche primarie e secondarie d'Italia - "*sono bravi a mettere le tecnologie a disposizione delle scuole, ma non è sufficiente introdurre supporti digitali o laboratori tra i banchi. Occorre ridisegnare rapidamente un diverso profilo identificativo di scuola, di insegnante, di educazione. La vera sfida* - ha proseguito don Macrì - "*è mettere in campo una didattica centrata sulle competenze e sulla condivisione dei saperi per superare il divario tra il livello di professionalità dei docenti e le intelligenze delle nuove generazioni cresciute tra telefonini, tablet e computer*".

Riempire le scuole di tecnologie o laboratori non serve, se non sono sostenute da una costante formazione dei docenti e da un pieno coinvolgimento degli studenti. "***La didattica*** - spiega la professoressa Dionora Bardi, del liceo scientifico Lussana di Bergamo - ***deve rinascere attorno ad uno studente che sia davvero protagonista***" (Nòva-176, Il Sole 24ore del 6 maggio 2012).

Questo è il lavoro che i docenti hanno di fronte. Dare un senso compiuto allo stare a scuola dei giovani che non trovano la possibilità di proiettare un'immagine di padronanza di oggetti, di nuovi linguaggi che ancora non hanno pieno diritto di cittadinanza nell'universo scuola. Si tratta per i docenti di trovare parole nuove e di utilizzarle come repertorio ordinario, di trovare percorsi didattici affidabili, di coniugare le loro competenze didattiche con quelle tecnologiche dei ragazzi.

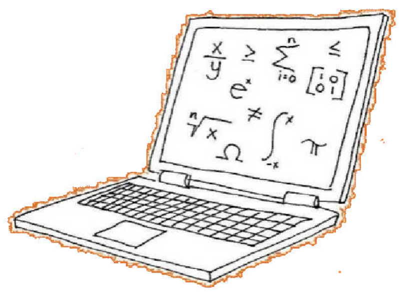
La tecnologia è importante perché apre la strada verso nuove forme di conoscenza, ma da sola non basta anzi può essere pericolosa se non accompagnata dall'impegno di studio, dalla riconquistata capacità di guardarsi attorno che diventano sempre più importanti per superare l'individualismo.

Apprendimento e vita si fonderanno in modo indistinguibile. La sfida del futuro non sarà più su come si apprende, ma su come usare l'apprendimento per creare qualcosa di utile, per comunicare meglio, e varcare, così, gli stretti confini dell'apprendimento formale.



Capitolo 2. Come scrivere pagine web che contengono formule matematiche ?

Spiegamelo e lo dimenticherò.
Mostramelo e lo ricorderò.
Coinvolgimi e lo imparerò.
(Proverbio cinese)

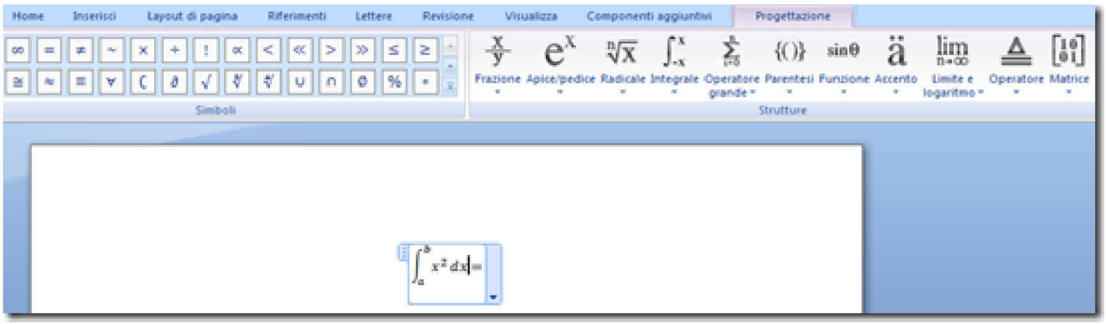


Per scrivere le equazioni e le formule matematiche nella pagine Word ho usato la possibilità offerta del Office 2007, attivando Equation Editor che mi permette di inserire un'equazione nel documento Word.

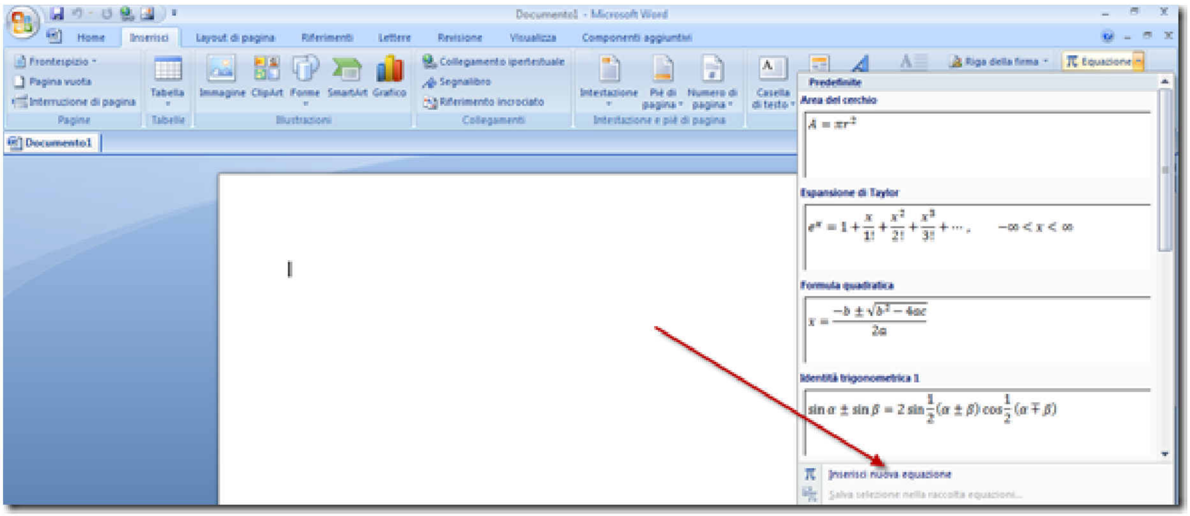
L'Equation Editor non c'era di default sul mio computer con Microsoft Office. Si trovava sul CD di installazione di Office, ma non era stato installato sul computer. Per scoprire se effettivamente è installato sul sistema, si possono fare i seguenti passi:

1. Apri Microsoft Word o PowerPoint.
2. Creare un nuovo documento vuoto con una pagina vuota o una diapositiva.
3. Scegliere Inserisci - Oggetto dalla barra dei menu.
4. Guardate l'elenco dei tipi di oggetti nella finestra. Vedete"Equation Microsoft" oppure "Microsoft Equation" ? Se è così si può rinunciare al processo di installazione e procedere alla sezione successiva.
5. Se Microsoft Equation non compare nella lista, è necessario installarlo dal CD di Office.
6. Chiudere il programma Word o PowerPoint , inserire il CD di Office nel computer.
7. Trovare il file Equation Editor nella cartella denominata *Value Pack.*
8. Copiare questo file nella cartella *di Office* all'interno della cartella *Microsoft Office* sul computer. Nella maggior parte dei casi, la cartella di *Microsoft Office* si trova nella cartella *Applicazioni* o *programmi* sul disco rigido.

Ora la prossima volta che si apre Word o PowerPoint, si vedrà la Equation Editor e si potrà aggiungerlo alla lista dei tipi di oggetto.

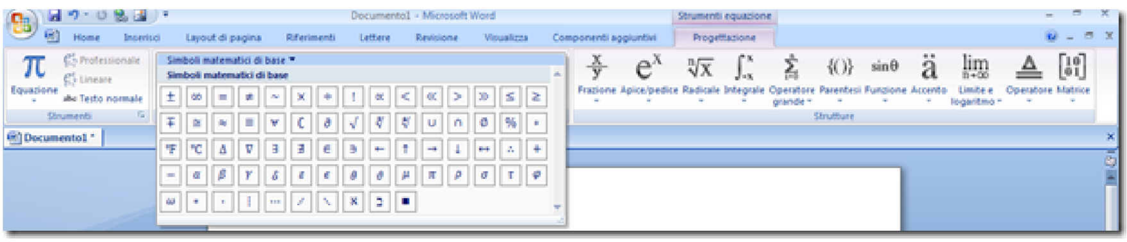


Nel gruppo **Simboli** della scheda **Inserisci** fare clic sulla freccia sotto **Equazione** e quindi su **Inserisci nuova equazione**.



Per scrivere un'equazione, è possibile utilizzare codici di carattere Unicode e voci della correzione automatica simboli matematici per sostituire il testo con simboli.

Sulla sinistra ci sono quelli che vengono definiti gli **Strumenti matematici di base** che vanno dalle lettere greche al simbolo di derivazione parziale, dal simbolo dell'infinito a quelli dell'insiemistica.



Sulla destra invece ci sono ben **10 menù** che contengono:

1. Frazioni
2. Apici e pedici
3. Radicali
4. Integrali
5. Operatori Sommatoria, Prodotto, Intersezione, Unione
6. Parentesi di tutti i tipi
7. Accenti e abbellimenti per le notazioni vettoriali, di derivazione e di potenza
8. Limiti i logaritmi
9. Operatori logici
10. Matrici

Quando si apre un documento scritto in una versione precedente di Word, non è possibile utilizzare le funzioni avanzate di Equation Editor per scrivere e modificare un'equazione se non si converte il documento in Office Word 2007. Per convertire il documento, eseguire le seguenti operazioni :

Fare clic sul pulsante Microsoft Office , quindi su **Converti**.
Fare clic sul pulsante Microsoft Office , quindi su **Salva**.

Dopo aver scritto nel Word con l'aiuto del Microsoft Equation Editor le mie formule, quando ho dovuto scrivere con l'aiuto del programma Nvu oppure Kompozer le mie pagine html, ho visto che vari testi che contenevano le formule nel momento in qui facevo copia - incolla da Word alla pagina html i caratteri si vedevano sfocati o cambiati.

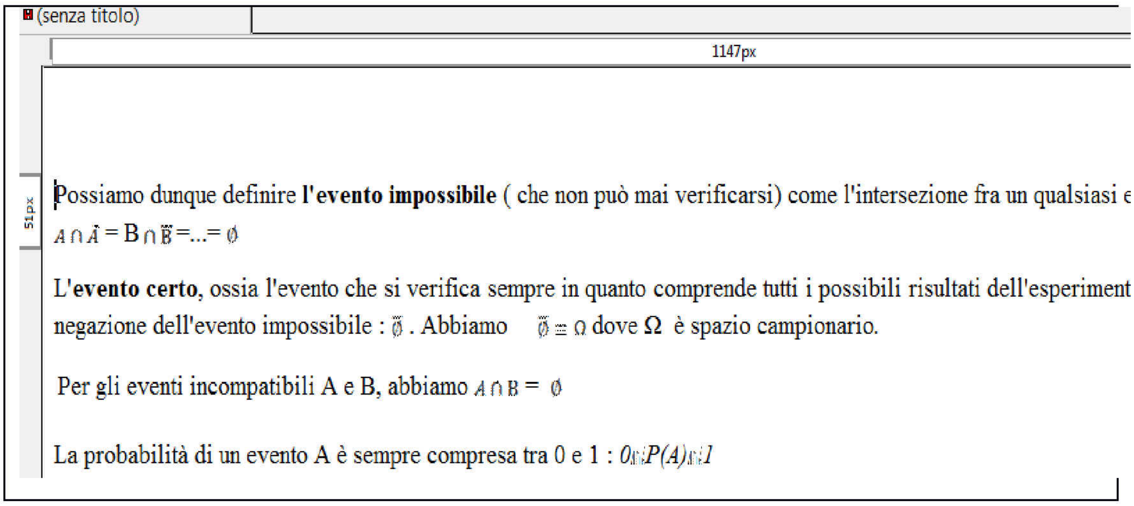
Per esempio, il testo che in Word si presentava così:

Possiamo dunque definire **l'evento impossibile** (che non può mai verificarsi) come l'intersezione fra un qualsiasi evento e la sua negazione: $A \cap \bar{A} = \mathrm{B} \cap \overline{\mathrm{B}} = ... = \emptyset$
L'**evento certo**, ossia l'evento che si verifica sempre in quanto comprende tutti i possibili risultati dell'esperimento, può essere definito come la negazione dell'evento impossibile : $\overline{\emptyset}$. Abbiamo $\overline{\emptyset} \equiv \Omega$ dove Ω è spazio campionario.

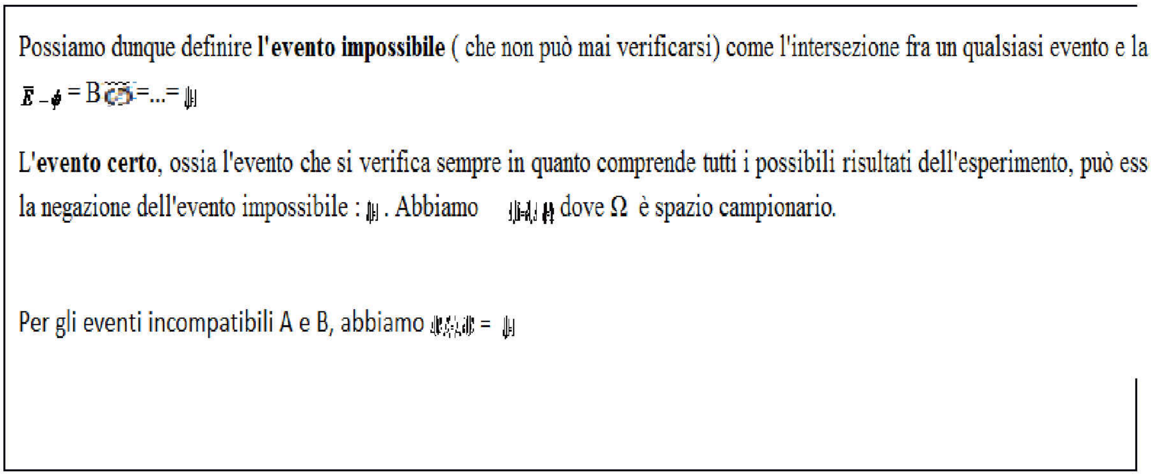
Per gli eventi incompatibili A e B, abbiamo $A \cap \mathrm{B} = \emptyset$

La probabilità di un evento A è sempre compresa tra 0 e 1 : $0 \le P(A) \le 1$

diventava in Nvu:



in Kompozer:



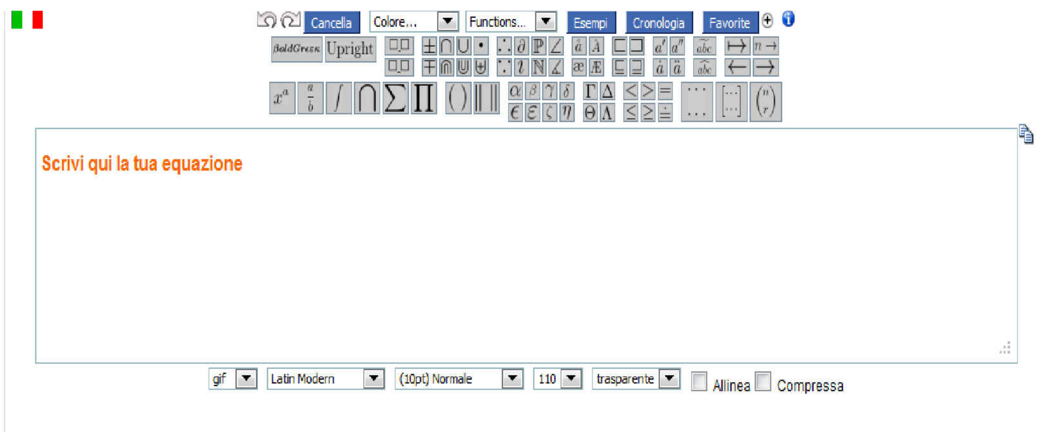
Per evitare questi inconvenienti, ho scelto la soluzione di usare un servizio gratuito online: **LaTex Online Equation Editor for Writing Maths on the Internet** che consente di scrivere la formula o l'equazione matematica online e quindi di salvarla con l'estensione di un immagine GIF oppure PNG.

LaTex Equation Editor permette di scrivere e editare qualsiasi tipo di formula matematica, visualizzando istantaneamente nella parte bassa la relativa immagine grafica, pronta per essere inserita nel documento elettronico o pagina Web, in questo ultimo caso si può anche inserire direttamente il codice HTML che si trova in fondo alla pagina.

Latex Equation Editor é messo gratuitamente a disposizione da CodeCogs, un portale professionale dedicato alle problematiche tecniche in campo Scientifico, Ingegneristico, Matematico e Finanziario. Il sito web è:

http://www.codecogs.com/latex/eqneditor.php?lang=it-it

In caso di necessità si può consultare l'help site:
en.wikipedia.org/wiki/Help:Formula



L'uso dell'editor non è molto complicato. Per chi smanetta già da un po' con l'editor offerto da Office (in particolare, con quello presente nel pacchetto del 2007), si troverà avvantaggiato in quanto non si discosta molto dal modo di intendere la scrittura delle formule matematiche.

Per esempio, se volessimo scrivere l'equazione del teorema di Pitagora ("la somma dei quadrati costruiti sui cateti è uguale al quadrato costruito sull'ipotenusa"), bisognerebbe cliccare sul comando seguente

successivamente comparirà, nel rettangolo dove c'è scritto "scrivi qui la tua equazione" il seguente testo

^{ }

a sinistra dell'apice metteremo la "x" (che indica il primo cateto), all'interno delle parentesi graffe metteremo il numero 2 per indicare il quadrato del cateto. Il risultato sarà questo, ottenuto in Latex:

$$x^2$$

ripetiamo la procedura due volte per il secondo cateto (cioè, la y) e l'ipotenusa (cioè, la z), ricordandoci che si tratta di un'uguaglianza (a differenza del teorema di Fermat!).

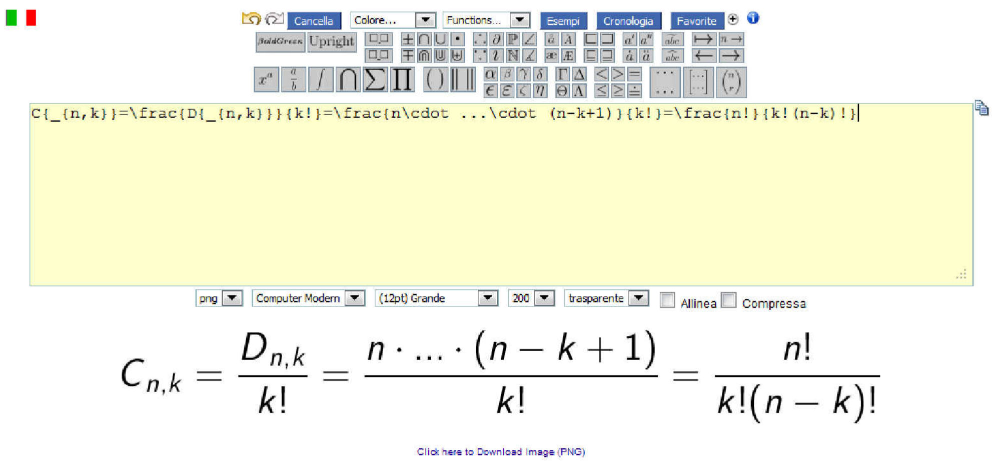
Alla fine di ciò, comparirà in basso all'editor l'immagine che potremo poi scaricare in formato GIF. Il risultato sarà questo:

$$x^2 + y^2 = z^2$$

e in basso si potrà copiare e incollare il codice HTML dell'equazione che ci interessa.

L'editor offre anche una lista delle equazioni più usate, una cronologia delle equazioni scritte, un elenco delle funzioni matematiche più utilizzate e la possibilità di poter modificare la formattazione del testo.

Per esempio, per scrivere la formula delle combinazioni semplici, ho inserito i simboli con la tastiera e ho utilizzato i tool messi a disposizione:

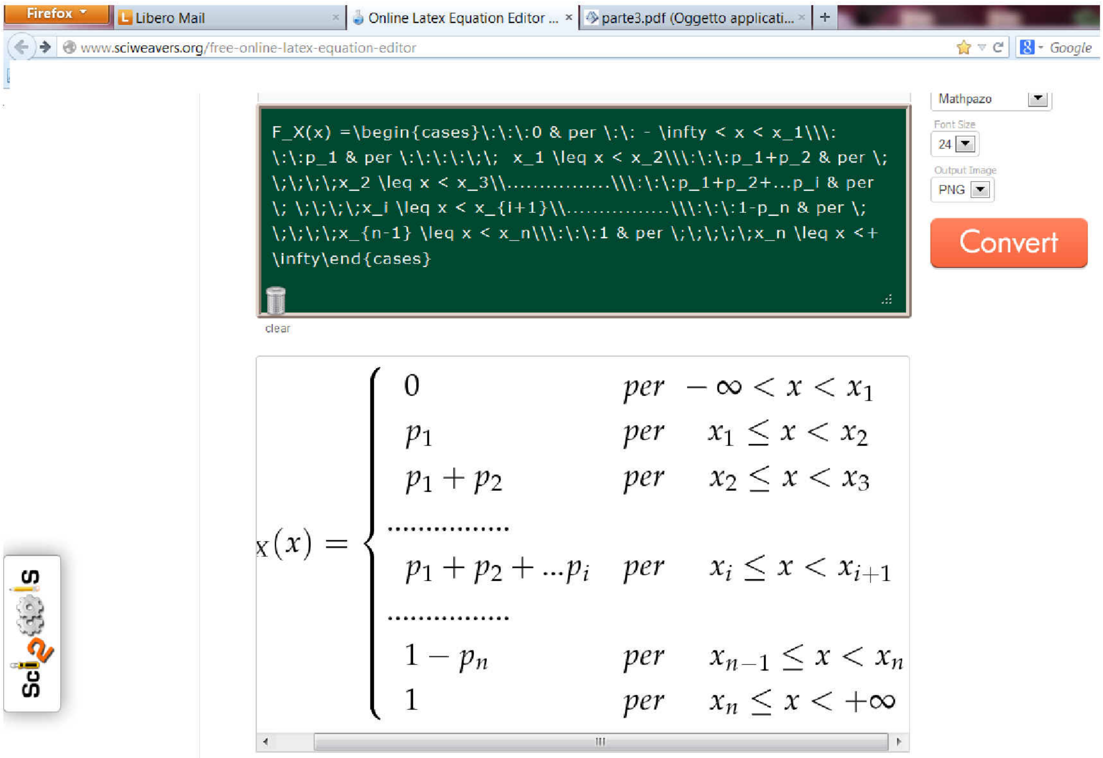


Il simbolo della sommatoria scritto con Latex Equation Editor era per esempio $\sum_{k=1}^{10} X_k$. Siccome questo modo di scrivere la sommatoria non mi piaceva, ho usato un altro editore on line gratuito che ha il nome : SCIWEAVERS - TEX2IMG.

La sommatoria diventava: $\sum\limits_{k=1}^{10} X_k$. Questo editore si trova al sito:

http://www.sciweavers.org/free-online-latex-equation-editor

Sotto: un esempio di come ho usato l'editore sopranominato per scrivere la funzione di ripartizione: F_X .



Le immagini, le ho salvate con lo sfondo trasparente con **l'estensione png,** ho fatto questa scelta perché l'estensione jpg spesso non manteneva nell'inserimento della pagina web, lo sfondo trasparente.

Nella tesi, se avevo bisogno di modificare lo sfondo di una immagine, ho usato il programma PowerPoint 2007 impostando lo sfondo trasparente e salvando le immagini con l'estensione png.

PowerPoint2007:

1. Inserisci Immagine facendo clic sulla scheda immagine

2. Fare clic su pulsante Ricolora

3. Fare clic sulla scelta in basso: Imposta colore trasparente

4. Fare DOPPIO clic con il tasto sinistro del mouse sul immagine (in questo modo diventerà trasparente)

5. fare clic con il tasto destro del mouse e salvare la nuova immagine con l'estensione png nella cartella che contiene tutti i file della tesi.

Sempre usando PowerPoint, attraverso il pulsante Ricolora si può cambiare il colore del testo contenuto nelle immagini oppure si possono ridimensionare le immagini.

Per scrivere le pagine web del sito, ho usato il programma gratuito NVU (pronunciato N-view, inteso come "new view"). L'NVU permette la gestione dei file (pagine) che costituiscono il sito con un editor di tipo WYSIWYG (What You See Is What You Get. ovvero "Quello che si vede è quello che si ottiene") facile da usare. E' l'ideale per gli utenti non tecnici che vogliono creare un sito attraente e professionale. Non è necessario conoscere l'HTML o la programmazione di siti web.

OSSERVAZIONI:

1) La cartella che conterrà tutte le pagine del sito web che si crea deve essere nella cartella ***root***, ovvero deve essere stata creata nel disco, non in una cartella esistente. Se, ad esempio, la cartella per creare il sito si chiama "miosito", il percorso per trovarla dovrà essere: C:\miosito.

2) Tutti i nomi dei file devono avere l'estensione html e vanno scritti in minuscolo, senza lettere accentate (dell'italiano), né spazi, né punti, né altri segni di interpunzione. I nomi devono essere corti e si usano i numeri per differenziare i vari nomi.
Certi server sono case-sensitivi, cioè interpretano diversamente le lettere maiuscole da quelle minuscole; per certi server il file "esempio1.png" ed il file "Esempio1.png" sono due file distinti. Di conseguenza tutti i richiami ai file nei link e le sorgenti delle immagini devono essere riportati facendo attenzione a questo fatto. Questo è uno dei problemi che ho incontrato al momento del trasferimento dei file della tesi dal mio pc sul server dell'università.
Per esempio, considerati questi nomi:

- mia pagina.html (non corretto, c'è uno spazio)
- attività.html (non corretto, c'è una lettera accentata)
- Miapagina.html (corretto, ma attenzione alle "sensibilità alla differenza maiuscolo/minuscolo")
- miaPagina.html (corretto, ma attenzione alle "sensibilità alla differenza maiuscolo/minuscolo")
- miapagina.html (corretto)

3) La prima pagina del sito, praticamente il file della Home Page, deve essere un file con il nome: "**index.html**". Nella prima pagina ci dobbiamo ricordare di posizionare un link al sito dell'università dove verrà inserito il sito web che stiamo progettando. Tutte le altre pagine avranno il nome di file con le caratteristiche descritte all'osservazione 2) invece il **Titolo della pagina** si può scegliere in base all'argomento che si deve trattare. Questo titolo è quello che vedrà l'utente navigatore in alto a sinistra, quando aprirà la pagina web. Questo titolo si può scrivere con spazi e segni di interpunzione e con minuscole e maiuscole, non essendo un nome di file o di cartella.

4) Le **foto** devono essere precedentemente dimensionate (a circa indicativamente 400x300 pixel cioè a circa ¼ di schermo, se la risoluzione dello schermo è 800x600)
Le **immagini/loghi/disegni** devono essere dimensionate per starci nello schermo ed avere il formato compresso **gif** (a 256 colori massimi) che possono essere anche animate, oppure jpg oppure png.
Come indicazione mi è sembrato utile di salvare la foto da inserire con un altro nome, per mantenere l'originale così che avevo l'originale se volevo fare dei ridimensionamenti.

5) Prima di inserire una foto/immagine/disegno nella pagina web editata con NVU, ho dovuto memorizzare l'immagine nella cartella che contiene tutti i files del sito; altrimenti quando si sposta la cartella con il sito dal proprio Pc al server web, le pagine web mancheranno delle immagini (che si troveranno solo nel proprio pc e non nel server web). All'inserimento di un immagine nella pagina web che si sta editando, subito dopo aver fatto la scelta del menu "Inserisci immagine" nella scheda proprietà immagine si fa clic sul "Aspetto" e si sceglie "Allineamento del testo rispetto all'immagine: Al centro".

6) Per verificare il contenuto delle pagine e il funzionamento dei links, da Risorse del computer ho aperto la cartella del sito e facendo doppio clic con il tasto sinistro del mouse sul file del nome index ho controllato tutte le pagine e tutti i link navigando a partire dalla pagina index avanti e indietro. Dalla homepage ho verificato anche il link alla 2° pagina secondaria e così via fino quando non ho verificato tutti i links creati.
Se per caso un link non funzionava ho dovuto rifarlo, aprendolo però con NVU perché Firefox, Google Chrome o Internet Explorer permettono solamente di visualizzare una pagina web e non di modificarla. Quindi per modificarla ho dovuto usare il programma NVU che ho usato per scrivere la pagina web. Ho aperto il programma NVU e con il pulsante "Apri" ho aperto il file da correggere (si può fare anche doppio clic sul nome della pagina, all'interno della finestra Gestione siti) per poterla modificare/elaborare; quindi si salva la pagina per riportare le modifiche effettuate.

7) Ho controllato il risultato del mio lavoro con i diversi browser: Firefox, Google Chrome, Internet Explorer ecc. Da Risorse del computer ho aperto la cartella del sito e facendo clic con il tasto destro del mouse sul file del nome index, dal menu a tendina che appare ho scelto : "Apri con" e poi ho fatto la scelta di ognuno dei browser sopra elencati.

Capitolo 3. Contenuto matematico dell'ipertesto per la presentazione del calcolo della probabilità

L'ipertesto si trova all'indirizzo:

http://progettomatematica.dm.unibo.it/Prob2/index.html

3.1. La stima della probabilità

La matematica non è soltanto quel complesso di regole e operazioni che ci aiutano nella vita pratica di ogni giorno, e nemmeno soltanto un insieme astratto di concetti da imparare per non prendere un brutto voto a scuola. La matematica è anche un universo pieno di magia: sotto i più comuni ragionamenti matematici, che facciamo quotidianamente senza pensarci, si nascondono delle implicazioni sorprendenti.

Ennio Peres

Spesso nella vita quotidiana affrontiamo scelte di cui non sappiamo prevedere le conseguenze. La parte della matematica che si occupa di razionalizzare le interpretazioni dei fenomeni casuali, invece che affidarsi a pregiudizi, a superstizioni o al fato, è detta ***calcolo delle probabilità.***

Il calcolo delle probabilità è uno strumento essenziale per la statistica. Esso dà una risposta a quello che possiamo considerare come il problema inverso di quello della statistica inferenziale. Mentre la statistica cerca di determinare tramite la conoscenza dei risultati di un esperimento (o più esperimenti) quali siano le caratteristiche della popolazione su qui l'esperimento è stato eseguito, nel calcolo delle probabilità si assume che tutte le caratteristiche della popolazione siano note (senza preoccuparsi di come ciò sia possibile) e si vuole calcolare a priori la "probabilità" che un esperimento abbia un determinato risultato.

In matematica in particolare, ma anche in gran parte delle altre discipline, affrontare un problema comporta il saperlo vedere dal punto di vista migliore o il saperlo trasformare in un problema sostanzialmente equivalente ma che abbia forma o metta meglio in evidenza collegamenti a concetti e procedure o che lo rendano più "concretamente" esplorabile alla nostra mente. Quesiti a cui si debba rispondere in poco tempo si prestano alla verifica di questa capacità, che purtroppo non sono molto curate dalle più diffuse pratiche di insegnamento/verifica, che (dalla scuola dell'obbligo fino all'università) privilegiano spesso una impostazione a "comportamenti stagni".

La possibilità di poter disporre di un apparato matematico per il calcolo delle probabilità, permette di superarne **le insidie**, che sono di varia natura, ma sono in buona parte legate a una eccessiva confidenza nelle capacità dell'intuizione. Ne esaminiamo alcune che appaiono come le principali fonti di errore nella valutazione della probabilità di eventi di interesse.

- **Il conteggio dei casi**

Una prima fonte di errore è, nel caso di spazi finiti, il conteggio dei casi. Nell'esempio del lancio dei due dadi, confondere i due eventi: "uscita di (1,6)" e "uscita di un 1 e di un 6" porterebbe a conclusioni scorrette in quanto:

1/36 = P (uscita di (1,6)) ≠ P (uscita di un 1 e di un 6) = P (uscita (1,6)) + P (uscita(6,1)) = 1/18.

Spesso i principianti sono messi in difficoltà di fronte alla richiesta di calcolare la probabilità di eventi di tipo "almeno", che è invece facilmente ottenibile considerando l'evento complementare.

Ad esempio dall'identità $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$, si ottiene immediatamente:

$$P(\text{almeno una faccia} > 2) = 1 - P(\text{tutte e due le facce} \leq 2)$$
$$= 1 - P((1,1) \cup (1,2) \cup (2,1)) = 1 - 3/36$$

Per spazi campionari finiti, il calcolo delle probabilità richiede tipicamente l'utilizzo delle formule di calcolo combinatorio.

- **L'abuso dell'equiprobabilità**

Un'altra insidia è costituita dalla supposizione dell'equiprobabilità delle diverse alternative. Per esempio l'ipotesi che la distribuzione di probabilità del picco orario di chiamate ad un call center sia uniforme sulle 24 ore può essere certamente semplificatrice dal punto di vista del calcolo, ma ne appare evidente il limite (almeno che non si stia considerando un call center operante su scala mondiale).

Occorre ricordare che un modello probabilistico, come ogni modello, costituisce comunque una approssimazione della realtà; ipotesi semplificatrici possono essere opportune per un primo approccio ad una situazione complessa. Spesso la semplificazione permette di ottenere risposte comunque utili, che un modello più complesso non riuscirebbe a fornire per le difficoltà, analitiche o computazionali, che insorgerebbero nel trattarlo. È tuttavia importante che le ipotesi sulle quali il modello si basa vengano apertamente dichiarate per mettere in guardia su possibili limiti delle conclusioni a cui l'analisi del modello ha portato, in vista di eventuali raffinamenti successivi.

- **Eventi rari possono accadere**

Un errore in cui incorre spesso il senso comune è quello di equiparare eventi rari, cioè eventi a cui è associata una probabilità bassa di verificarsi, ad eventi impossibili. Il fatto che una determinata persona vinca ad una lotteria nazionale è sicuramente un evento raro, ma se la sua vincita venisse considerata impossibile si dovrebbe considerare impossibile la vincita da parte di chiunque altro (perché l'estrazione dovrebbe fare preferenze?) e di conseguenza si dovrebbe ritenere impossibile che ci sia un vincitore della lotteria, il che è assurdo.

D'altra parte, il fatto che eventi rari prima o poi si verifichino potrebbe essere poco interessante ai fini pratici, se il tempo di attesa è molto elevato. Nel caso sopra citato, della lotteria annuale, la probabilità di vincere acquistando un biglietto, se la lotteria vende dieci milioni di biglietti è pari a: P = 10^{-7} (dovendo supporre che tutti i biglietti abbiano la stessa probabilità di essere estratti, altrimenti ci sarebbero gli estremi per azioni in sede giudiziaria!); supponendo che un individuo compri un biglietto tutti gli anni, il tempo medio di attesa per la sua vincita risulta pari a 10 milioni di anni, il che dovrebbe scoraggiarlo dallo spendere i soldi del biglietto!

La stima della probabilità di un evento è uno strumento fondamentale della statistica. Nelle sue forme più semplici, si fonda sul calcolo combinatorio. Anche se il risultato di ogni singolo tentativo è imprevedibile, con un numero elevato di ripetizioni si stabiliscono regolarità che possono essere previste e calcolate.

Dal punto di vista didattico, l'associazione del concetto di probabilità al calcolo combinatorio è un aspetto importante: serve per collegare una scelta, alla probabilità con la quale l'evento atteso può avvenire, nel contesto di tutti gli eventi alternativi possibili. È la base dell'inferenza statistica, della scelta scientifica in tutti i casi d'incertezza.

Per risolvere i problemi probabilistici mediante il Calcolo combinatorio si considerano le situazioni con tutti gli eventi studiati equiprobabili.

Esempio:

Quando abbiamo definito la probabilità, abbiamo visto che, la probabilità del verificarsi di un evento A, è:

$$P(A) = \frac{numero\ di\ casi\ favorevoli}{numero\ di\ casi\ possibili}$$

oppure: $\lim_{n\to\infty} \frac{n_A}{n}$ dove n_A è il numero di prove nelle quali si è verificato A, n è il numero totale di ripetizioni della stessa prova.

Dunque si devono contare il numero di prove.

Questi calcoli di solito si fanno a posteriori, nulla evita di chiedersi a priori, cioè prima di eseguire l'esperimento, qual è la probabilità di ottenere un certo numero di successi, e quindi una certa frequenza. Si consideri il seguente **esempio**:

Un dado viene lanciato 4 volte. Qual è la probabilità che esca tre volte la faccia numero 1 e una volta un numero diverso da 1?

L'evento, che viene indicato con H, consta di due eventi parziali:

A: uscita del numero 1; $\bar{A}$: uscita di un numero diverso da 1.

Il numero dei casi favorevoli dell'evento A è 1, quello dell'evento $\bar{A}$ è 5. Infatti sono proprio cinque i numeri del dado diversi da 1, per semplicità si pone:

$p = P(A) = 1/6$, $q = 1- p = P(\bar{A}) = 1- P(A) = 5/6$.

I due eventi A e $\bar{A}$ sono indipendenti e complementari, ossia l'evento unione $A \cup \bar{A}$ è un evento certo.

Perché si verifichi l'evento H, l'evento A si deve verificare tre volte e l'evento contrario $\bar{A}$ una volta soltanto.

Il problema può essere posto anche nel seguente modo:

lanciando contemporaneamente quattro dadi, qual è la probabilità che si presentino tre facce contrassegnate dal numero 1 e una con un numero diverso da 1?

L'evento H si verifica al verificarsi di uno qualsiasi dei seguenti eventi intersezione:

$A\cap A\cap A\cap \bar{A}$, $A\cap A\cap \bar{A}\cap A$, $A\cap \bar{A}\cap A\cap A$, $\bar{A}\cap A\cap A\cap A$

Gli eventi sono indipendenti e si ha:

$P(A\cap A\cap A\cap \bar{A}) = p \cdot p\cdot p\cdot q = p^3 \cdot q$;

$P(A\cap A\cap \bar{A}\cap A) = p \cdot p\cdot q\cdot p = p^3 \cdot q$;

$P(A\cap \bar{A}\cap A\cap A) = p \cdot q\cdot p\cdot p = p^3 \cdot q$;

$P(\bar{A}\cap A\cap A\cap A) = q \cdot p\cdot p\cdot p = p^3 \cdot q$.

Risulta: $P(H) = p^3 \cdot q + p^3 \cdot q + p^3 \cdot q + p^3 \cdot q = 4\, p^3 \cdot q =$

$$= 4 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^3 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)$$

Gli esponenti 3 e 1 delle due potenze indicano quante volte si devono ripetere rispettivamente gli eventi di probabilità 1/6 e 5/6.

Il numero 4 che moltiplica le due potenze rappresenta il numero di tutti i raggruppamenti dei sei numeri di un dado che contengono tre volte 1 e una volta un numero diverso da 1.

Nell'esempio svolto, la determinazione del numero 4 è stata abbastanza semplice. Se, invece, si effettuano molti lanci, il calcolo del numero dei raggruppamenti in cui si presenta un certo numero di volte un evento diventa laborioso. Per esempio, volendo calcolare la probabilità che su 20 lanci di un dado esca 12 volte il numero 4 e 8 volte uno diverso da 4 bisogna effettuare il prodotto:

$$k \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^{12} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{8}$$

dove k indica il numero di tutti i raggruppamenti composti da dodici numeri uguali a 4 e otto numeri diversi da 4.

Per semplificare il calcolo del numero k, vengono introdotti i concetti di fattoriale di un numero naturale e di coefficiente binomiale, che saranno spiegati nel prossimo paragrafo.

Vedremo che il numero k sarà il coefficiente binomiale:

$$\binom{20}{12} = \frac{20!}{12! \cdot 8!} = \frac{20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16 \cdot 15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12!}{12! \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 125.970$$

3.2. Cenni di calcolo combinatorio

"Quasi tutta la matematica classica, dall'algebra elementare alla teoria delle equazioni differenziali, è applicabile al mondo reale solo nell'ipotesi che questo sia costituito di oggetti e di eventi a carattere continuo. Però, in molte situazioni comuni in fisica e in chimica ed in altre scienze, si può parlare realisticamente solo di collezione di oggetti a carattere discreto, i quali agiscono in combinazione, un passo per volta; la matematica applicata a tali situazioni si chiama analisi combinatoria. Molti problemi di analisi combinatoria, tra i più interessanti, si sono presentati nella forma di ingegnosi indovinelli, a sfida di matematici e non matematici assieme: a prima vista, alcuni di essi possono sembrare addirittura frivolezze, eppure quasi tutti hanno delle applicazioni immediate ed importanti a problemi scientifici concreti".

Gian Carlo Rota - Analisi combinatoria
(Le Scienze Matematiche - UMI - Zanichelli, 1973)

Il Calcolo combinatorio è una branca della matematica orientata allo sviluppo di formule che permettono di ottenere il numero di casi distinti che si possono presentare in un esperimento, od il numero di elementi che compongono un insieme, senza ricorrere alla loro enumerazione esplicita.

Qualcuno ha definito la combinatoria come ***"l'arte di contare...senza contare"*** mettendo in evidenza la maggiore importanza che in combinatoria ha la conoscenza del numero di combinazioni, rispetto alla conoscenza delle combinazioni stesse.

Serve conoscere prima i seguenti dati:

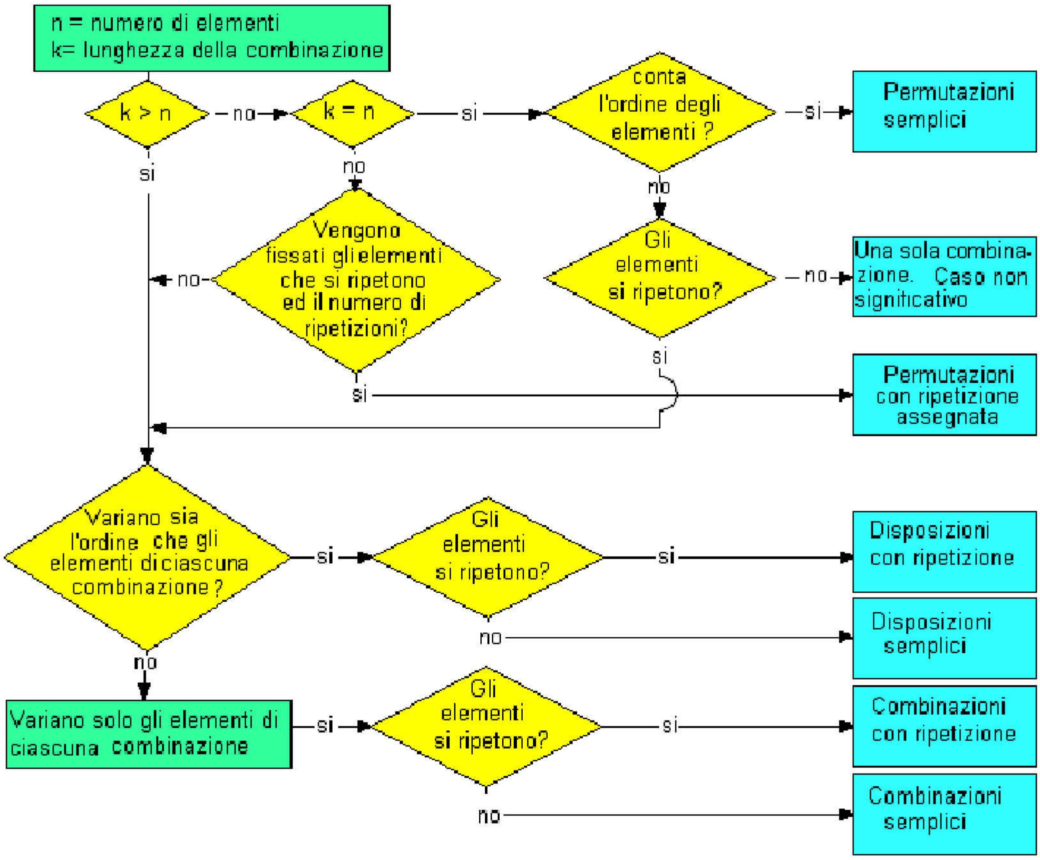
- il numero di oggetti disponibili,
- il numero di quelli che costituiscono una sola combinazione,
- le regole per procedere alla costituzione delle combinazioni: si possono utilizzare tutti gli oggetti disponibili oppure solo una parte; lo stesso oggetto può essere utilizzato una sola volta o più volte in una stessa combinazione, regole che stabiliscono se conta oppure no l'ordine in cui sono disposti gli oggetti nelle varie combinazioni.

PRINCIPIO FONDAMENTALE DEL CALCOLO COMBINATORIO:

se una scelta può essere fatta in *r* modi diversi, per ciascuno dei quali una seconda scelta può essere effettuata in *s* modi diversi, e, per ciascuno dei modi in cui si sono compiute le prime due scelte una terza scelta può essere effettuata in *t* modi diversi ecc., allora la successione di tutte le scelte può essere compiuta in $r \cdot s \cdot t$... modi diversi.

Sotto è rappresentato un schema dicotomico che può essere un valido aiuto per trovare la giusta combinazione. Per utilizzare lo schema, occorre preliminarmente fissare i valori n = numero di elementi disponibili e k = numero di elementi contenuti in una combinazione. Poi si può procedere lungo il grafo, scegliendo il percorso in base alla risposta data ai vari quesiti; al termine si otterrà una risposta fra le sette possibili elencate a destra.

Schema dicotomico per trovare la giusta combinazione:



1) PERMUTAZIONI SEMPLICI DI *n* OGGETTI

sono le combinazioni di *n* elementi in cui conta l'ordine in cui gli elementi sono disposti e non si possono ripetere gli stessi elementi all'interno di ogni permutazione.

Si chiama ***FATTORIALE*** di un numero naturale n il prodotto di tutti i numeri naturali compresi fra 1 e *n*: *n* fattori interi decrescenti da *n* ad 1. Il fattoriale di un numero naturale *n* si indica col simbolo: *n!* e indica il numero di permutazioni semplici o ordinamenti di *n* oggetti:

$$n! = n\,(n-1)(n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$$

Esempi: $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$. Il fattoriale di 4 è 24.

$3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$. Il fattoriale di 3 è 6.

$5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$. Il fattoriale di 5 è 120.

Proprietà: $n! = n(n-1)!$ Per convenzione: $0! = 1$.

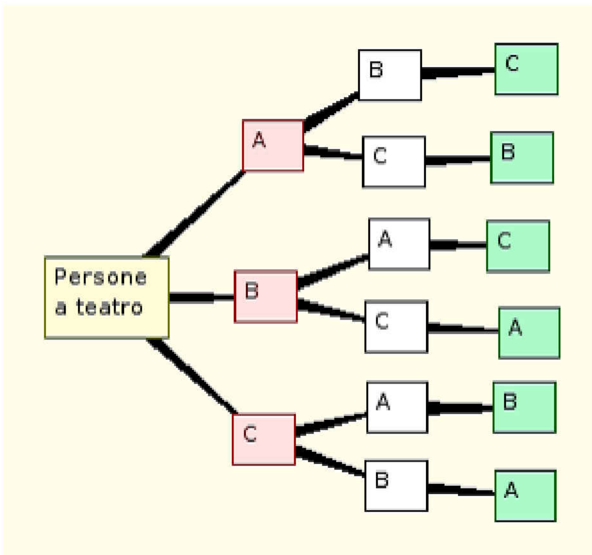
I primi 10 valori del fattoriale di *n* sono:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$n!$	1	2	6	24	120	720	5.040	40.320	362.880	3.628.800

Il numero complessivo di permutazioni di *n* oggetti è: $P_n = n!$

Esempio:

A teatro vogliamo contare in quanti modi possiamo far sedere tre persone su tre sedie. La prima persona sarà indicata con A , la seconda con B e la terza con C.



Le 6 possibili combinazioni sono : ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA.

$(3!=3 \cdot 2 \cdot 1=6)$

2) PERMUTAZIONI CON RIPETIZIONE

Una permutazione di *n* oggetti di cui *h* uguali tra loro e distinti dai precedenti, *k* uguali tra loro e distinti dai precedenti, ..., *p* uguali tra loro e distinti dai precedenti con $h+k+...+p=n$ è:

$$P^r_{n,h,k,\dots,p} = \frac{n!}{h! \cdot k! \cdot \dots \cdot p!}$$

Esempio 1:

Quanti sono i numeri che è possibile formare con le cifre date dall'insieme A= {1,2,2,3} ?

Ci sono quattro elementi di cui due ripetuti, ragion per cui la formula iniziale non è applicabile venendo a mancare una condizione necessaria. Dobbiamo sfruttare quanto appena appreso: permutazioni con ripetizione! Il risultato è:

$$P^r_{4,2} = \frac{4!}{2!} = 12$$

Esempio 2:

In un ufficio si devono stabilire le ferie per 10 impiegati e si hanno 3 turni: nel primo vanno in ferie 3 impiegati, nel secondo 4 impiegati e nel terzo 3 impiegati. Quante sono le assegnazioni possibili dei 10 impiegati ai 3 turni? Notiamo prima di tutto che i turni sono ordinati ma all'interno di ogni turno l'ordine degli impiegati non conta. Il numero di scelte è:

$$P^r_{10,3,4,3} = \frac{10!}{3! \cdot 4! \cdot 3!}$$

3) DISPOSIZIONI SEMPLICI DI *n* OGGETTI DI CLASSE *k*

Si dice "disposizione semplice di *n* oggetti a *k* a *k*" o anche "di classe *k*"
(con $k \leq n$) ogni allineamento con oggetti tutti distinti, di *n* oggetti a gruppi di *k*.
Il numero totale di *n* oggetti a gruppi di *k* è dato da:

$$D_{n,k} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

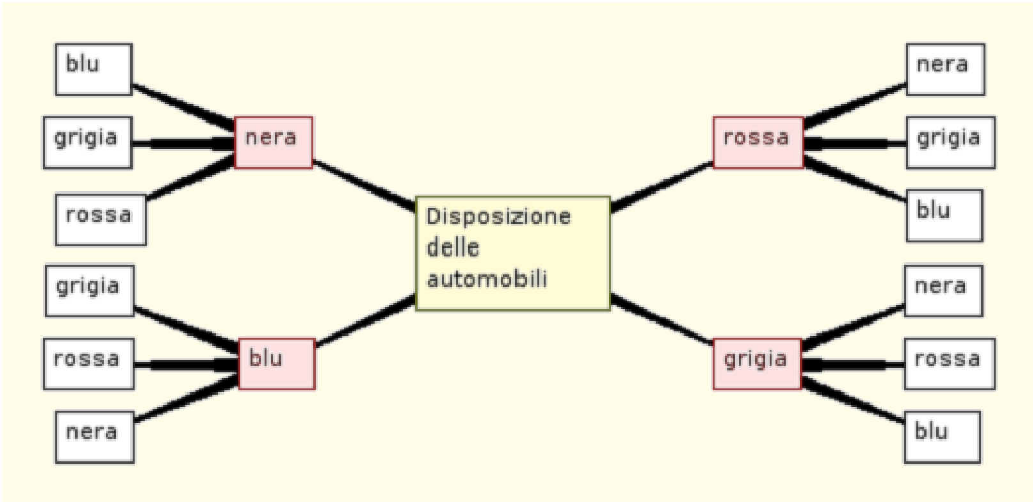
(ci sono *k* fattori)

Possiamo infatti scegliere in n modi diversi l'oggetto da mettere al primo posto, in *n-1* modi quello da mettere al secondo posto (vanno bene tutti, tranne quello messo al primo posto), in *n-2* modi quello da mettere al terzo posto e così via fino all'ultimo posto; poiché i posti sono *k*, all'ultimo posto potremo scegliere tra *n-(k-1)* oggetti (tutti meno i *(k-1)* già utilizzati).

Osservazione: Le permutazioni di *n* elementi sono tutti i possibili allineamenti che si ottengono scambiando semplicemente di posto gli *n* oggetti. Esse coincidono con le disposizioni semplici di *n* elementi di classe *n*.

$$P_n = D_{n,n} = n(n-1)(n-2) \ldots 3 \cdot 2 \cdot 1$$

Esempio: Un concessionario di automobili vuole esporre nella vetrina del suo salone quattro vetture tutte dello stesso tipo ma con 4 colori diversi (blu, grigio, rosso e nero). La vetrina però dispone di soli due posti: uno fisso e l'altro fornito di una piattaforma rotante. Il concessionario desidera sapere in quanti modi diversi è possibile disporre le auto. Usiamo un diagramma ad albero per rappresentare la situazione:



Si hanno le seguenti possibilità: NB, NG, NR, BG, BR, BN, RN, RG, RB, GN, GR, GB.

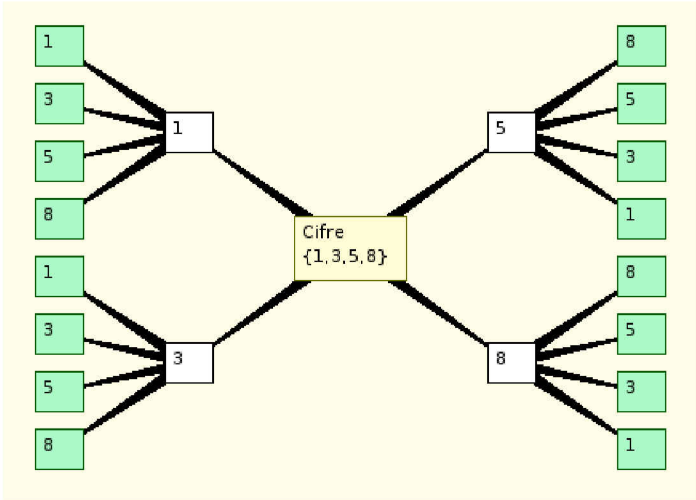
Il numero di disposizioni di 4 oggetti di classe 2: $D_{4,2} = 4 \cdot 3 = 12$

4) DISPOSIZIONI CON RIPETIZIONE

Una disposizione con ripetizione di *n* oggetti distinti presi *k* alla volta è un possibile modo di scegliere *k* oggetti eventualmente ripetuti dagli *n* e ordinarli.

$$D^{r}_{n,k} = n^{k}$$

Esempio: Consideriamo l'insieme: A = {1,3,5,8}; vogliamo determinare quanti numeri a due cifre si possono scrivere con gli elementi di A, considerando che sono ammesse le ripetizioni.



Le possibili combinazioni sono 16:

11,13,15,18,31,33,35,38,51,53,55,58,81,83,85,88

e si indicano con: $D^r_{4,2} = 16 = 4^2$

Se si considerasse di costruire numeri di tre cifre, le possibilità salgono a 64.

5) COMBINAZIONI SEMPLICI

Le combinazioni di *n* oggetti presi a *k* a *k*, sono il numero dei campioni non ordinati di numerosità *k*. Non conta l'ordine, quindi (a,b) sarà lo stesso campione di (b,a).

$$C_{n,k} = \frac{D_{n,k}}{k!} = \frac{n \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}$$

Il simbolo usato per le combinazioni semplici è: $\binom{n}{k}$ si legge "*n* su *k*" e prende il nome, per motivi storici, di coefficiente binomiale. Esprime il numero di sottoinsiemi distinti di cardinalità *k* che si possono formare con gli elementi di un insieme di cardinalità *n*, praticamente si risponde alla domanda:"dati n oggetti, in quanti modi ne posso scegliere k?" (abbiamo sempre $k \leq n$)

Proprietà:

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$$

$$\binom{n}{0} = 1; \binom{n}{n} = 1; \binom{n}{1} = n$$

I coefficienti binomiali $\binom{n}{k}$ si possono calcolare tramite il triangolo di Tartaglia (o di Pascal):

n \ k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
0	1										(a+b)^0
1	1	1									(a+b)^1
2	1	2	1								(a+b)^2
3	1	3	3	1							(a+b)^3
4	1	4	6	4	1						(a+b)^4
5	1	5	10	10	5	1					(a+b)^5
6	1	6	15	20	15	6	1				(a+b)^6
7	1	7	21	35	35	21	7	1			(a+b)^7
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1		(a+b)^8
9	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1	(a+b)^9

Esempio : $\binom{5}{3} = 10$ dove 5 rappresenta la riga e 3 rappresenta il posto nella rispettiva riga. Il triangolo di Tartaglia può essere rappresentato anche così:

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1
\end{array}
\quad \longleftrightarrow \quad
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & \binom{0}{0} & & & & & \\
 & & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & & \\
 & & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & & \\
 & & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & & \\
 & \binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} & \\
\binom{5}{0} & & \binom{5}{1} & & \binom{5}{2} & & \binom{5}{3} & & \binom{5}{4} & & \binom{5}{5}
\end{array}
$$

I coefficienti binomiali sono i coefficienti dello sviluppo delle potenze di un binomio (binomio di Newton) :

$$
(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n b^0 + \binom{n}{1}a^{n-1}b^1 + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \ldots
$$

$$
\binom{n}{n-1}a^1 b^{n-1} + \binom{n}{n}a^0 b^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k
$$

Esempio 1:

Quanti terni si possono formare con i 90 numeri del gioco del Lotto ?
Poiché l'ordine di estrazione dei numeri non ha alcuna importanza,
si tratta di combinazioni semplici:

$$
C_{90,3} = \frac{90 \cdot 89 \cdot 88}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 117.480
$$

Esempio 2:

Calcola il numero di strette di mano che si possono effettuare fra 6 persone.

$$
C_{6,2} = \frac{6 \cdot 5}{2 \cdot 1} = 15.
$$

Esempio 3:

Qual è la probabilità che in trenta lanci di un dado, esca venti volte un numero maggiore di 4?

L'evento A= "uscita di un numero maggiore di 4" ha la probabilità : $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$. La probabilità dell'evento contrario : "uscita di un numero non maggiore di 4" è : $\frac{2}{3}$. Risulta così: P(A) = $\binom{30}{20}\left(\frac{1}{3}\right)^{20}\left(\frac{2}{3}\right)^{10}$.

Osservazione: Le combinazioni di *n* elementi di classe *k*, esprimano il numero di sottoinsiemi distinti di *k* elementi ciascuno, presi da un insieme con cardinalità *n*.

6) COMBINAZIONI CON RIPETIZIONE

Una combinazione con ripetizione è una combinazione che può avere anche ripetizioni di uno stesso elemento. Il numero di combinazioni con ripetizione di *n* oggetti di classe *k* sono tutti i possibili raggruppamenti che si possono formare con n oggetti, presi *k* alla volta, considerando differenti due raggruppamenti che differiscano:

– per qualche elemento
– per il numero di volte in cui un dato oggetto viene ripetuto

In tal caso, come si capisce facilmente, l'ordine in cui compaiono gli elementi non è più significativo e ovviamente in questo caso *k* può essere maggiore, minore o uguale ad *n*.

C'è un modo tradizionale di enunciare questo problema noto come "problema della pasticceria": nel banco della pasticceria ci sono *n* tipi diversi di paste e io voglio riempire un vassoio con *k* paste (con eventuali ripetizioni, cioè posso prendere due o più o, al limite, tutte le *k* paste dello stesso tipo). In quanti modi diversi posso riempire il vassoio? La risposta è:

$$C^r_{k,n} = C_{n+k-1,k} = \binom{n+k-1}{k} = \frac{(n+k-1)!}{k! \cdot (n-1)!}$$

Esempio 1:

Sia A= {1,2,3,4,5}. Quanti gruppi si possono formare con cinque elementi assegnati tale che ciascun gruppo ne contenga due ?

$$C^r_{2,5} = \binom{5+2-1}{2} = \frac{(5+2-1)!}{2!\cdot(5-1)!} = \frac{6!}{2\cdot 4!} = \frac{4!\cdot 5\cdot 6}{2\cdot 4!} = 15$$

infatti, abbiamo: (1,2) (1,3) (1,4) (1,5) (2,3) (2,4) (2,5) (3,4) (3,5) (4,5) (1,1) (2,2) (3,3) (4,4) (5,5).

Esempio 2:

Quanti sono i monomi di 4° grado che si possono formare con le variabili a,b,c ?

Sono tutte le quaterne non ordinate contenenti i simboli a,b,c che possono essere ripetuti più volte. Ad esempio i monomi:

$a^4 = a\cdot a\cdot a\cdot a$

$a\cdot b^2\cdot c = a\cdot b\cdot b\cdot c (= b\cdot a\cdot b\cdot c = a\cdot c\cdot b\cdot b = ...ecc)$

Si devono considerare pertanto le combinazioni (perché non conta l'ordine) con ripetizioni dei tre elementi a,b,c presi a 4 a 4. Quindi i possibili monomi sono :

$$C^r_{3,4} = C_{6,4} = \binom{6}{4} = \binom{6}{2} = \frac{6\cdot 5}{2} = 15$$

Per il numero di possibili estrazioni di *k* oggetti da una scatola contenente *n* oggetti, tenendo conto del fatto che gli oggetti vengono oppure non vengono sostituiti (rimpiazzati, rimessi) possiamo tener conto della seguente tabella:

	senza sostituzione	con sostituzione
ordinate	$\frac{n!}{(n-k)!}$	n^k
non ordinate	$\binom{n}{k}$	$\binom{n+k-1}{k}$

Nel paragrafo successivo si presenteranno esempi di come si applicano le nozioni apprese di calcolo combinatorio al problema del calcolo delle probabilità.

3.3. Esempi con l'applicazione delle nozioni di calcolo combinatorio ai problemi del calcolo delle probabilità

"Affermo che nessuna scienza mi sembra più utile, più bella e più facile della matematica. Ed invero: quale altra scienza si occupa di verità più elementari, poiché essa non ne presuppone alcun'altra, mentre ogni altra presuppone la matematica? In quale altra scienza le argomentazioni sono altrettanto convincenti ed esaurienti? Quale altra scienza conduce a risultati più sicuri e più agevolmente controllabili? In quale altra scienza meglio rifulge lo splendore del vero? Quale altra fornisce cognizioni tanto universali nel tempo e nello spazio? La matematica è universalmente utile, oltre e forse più che per la verità che essa fa conoscere, per i metodi di ricerca che essa adopera ed adoperando insegna. Nessun altro studio richiede meditazione più pacata: nessun altro meglio induce ad esser cauti nell'affermare, semplici ed ordinati nell'argomentare, precisi e chiari nel dire " Alessandro Padoa (1868-1937) , 1908 - "Elogio alla matematica".

La stima della probabilità di un evento è uno strumento fondamentale della statistica. Nelle sue forme più semplici, si fonda sul calcolo combinatorio. È evidente ed intuitiva la sua applicazione ai giochi d'azzardo, ai quali effettivamente fu associata alla sua origine. Anche se il risultato di ogni singolo tentativo è imprevedibile, con un numero elevato di ripetizioni si stabiliscono regolarità che possono essere previste e calcolate. Dal punto di vista didattico, l'associazione del concetto di probabilità al calcolo combinatorio è un aspetto importante: serve per collegare una scelta alla probabilità con la quale l'evento atteso può avvenire, nel contesto di tutti gli eventi alternativi possibili. È la base dell'inferenza statistica, della scelta scientifica in tutti i casi d'incertezza.

I concetti e i metodi del calcolo combinatorio possono essere spiegati in modo semplice, attraverso il seguente esempio.

Esempio 1:

In una corsa con 10 concorrenti, che abbiano le medesime possibilità di vittoria, è possibile porsi molti quesiti, tra i quali:

a) quanti differenti ordini d'arrivo sono possibili?

b) quale è la probabilità di indovinare i primi 3 al traguardo, secondo l'ordine?

c) quale la probabilità di indovinare i primi 3, senza considerare il loro ordine?

d) è conveniente scommettere 10 euro per guadagnarne 500 euro, se si indovinassero i primi 2 nell'ordine?

e) è conveniente senza stabilire l'ordine?

Per calcolare le probabilità richieste, occorre prestare attenzione alle 4 caratteristiche fondamentali di questi eventi:

(1) si escludono a vicenda,

(2) sono tutti ugualmente possibili,

(3) sono casuali,

(4) sono indipendenti.

a) In una corsa con 10 concorrenti, i possibili ordini d'arrivo sono le permutazioni di 10 elementi.

Il loro numero è: $10! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 = 3.628.800$

b) In una corsa di 10 concorrenti, il numero dei possibili gruppi differenti formati dai primi 3 all'arrivo, tenendo conto anche del loro ordine, sono le disposizioni di 10 elementi 3 a 3, cioè :

$$D_{10,3} = \frac{10!}{(10-3)!} = 720$$

La probabilità di indovinare i primi 3 concorrenti secondo l'ordine d'arrivo è: 1 / 720 = 0,001389.

c) In una corsa di 10 concorrenti, i possibili gruppi dei primi 3 concorrenti, senza distinzioni interne di ordine, sono le combinazioni di 10 elementi 3 a 3, cioè:

$$C_{10,3} = \frac{10!}{(10-3)! \cdot 3!} = 120$$

La probabilità di indovinare i primi 3 concorrenti, senza stabilirne l'ordine, è 1/120 = 0,008333; è 6 (= 3!) volte più alta di quella in cui si chiede di indovinare anche il loro ordine.

d) Il numero di possibili gruppi formati dai primi 2 concorrenti, stabilendo chi sarà il primo e chi il secondo, in un gruppo di 10 è determinato dalle disposizioni di 10 elementi 2 a 2, cioè :

$$D_{10,2} = \frac{10!}{(10-2)!} = 90$$

La probabilità di indovinare chi saranno i primi 2 è uguale a 1/90. E un rapporto più sfavorevole del rapporto di 1 a 50 fissato nella scommessa (10 euro contro 500 euro). Per chi scommette non è conveniente vincere 50 volte la posta, quando la probabilità di vincere è 1/90.

e) Il numero di possibili gruppi formati dai primi 2 concorrenti, senza stabilire l'ordine, in un gruppo di 10 è dato dalle combinazioni di 10 elementi 2 a 2, cioè :

$$C_{10,2} = \frac{10!}{(10-2)! \cdot 2!} = 45$$

La probabilità di indovinare i primi 2 senza dover stabilire l'ordine uguale a 1/45; è più favorevole del rapporto di 1 a 50 fissato dalla scommessa. Per chi scommette è conveniente, perché l'eventuale guadagno è superiore al rischio. Una scommessa tra i due giocatori è in parità, solamente quando il prodotto tra la probabilità d'indovinare e il moltiplicatore della posta è uguale a 1.

Esempio 2:

Ho quattro scatole chiuse, numerate da 1 a 4, e so che dentro ci sono complessivamente tre palline (ma non so come queste siano distribuite nelle scatole).
Che probabilità ho che le tre palline siano tutte nella scatola n. 1?

Gli eventi elementari, che possono essere considerati equiprobabili, sono le possibili distribuzioni delle tre palline nelle quattro scatole. Detto ciò, risolviamo l'esercizio in due modi diversi:

1 metodo ("diretto"). Contiamo i casi possibili e i casi favorevoli. I casi favorevoli sono solamente uno (la configurazione in cui le tre palline sono nella scatola 1). Contare i casi possibili è facile: ci sono 4 configurazioni in cui le tre palline sono tutte in una sola scatola e 4 in cui le tre palline sono tutte in scatole diverse. Restano i casi di tipo 2+1 (due palline nella stessa scatola, una in una scatola diversa e due scatole vuote): le due scatole vuote possono essere scelte in 6 modi diversi e per ogni scelta delle due scatole vuote restano 2 possibilità per mettere la pallina singola. Dunque le configurazioni di tipo 2+1 sono 6 × 2 = 12. Complessivamente abbiamo contato 4 + 4 + 12 = 20 casi possibili e pertanto la probabilità cercata è: 1/20.

2 metodo (applicazione delle formule del calcolo combinatorio). Osserviamo che posso interpretare il “mettere una pallina in una scatola” come lo “scegliere” quella scatola e il “mettere due palline” in una scatola come lo “scegliere due volte” quella scatola, "mettere tre palline" in una scatola come lo "scegliere tre volte" quella scatola. Allora una distribuzione delle tre palline nelle quattro scatole la posso vedere come una scelta, con possibili ripetizioni, di tre scatole dalle quattro disponibili. In altre parole, `e una combinazione con ripetizioni di 4 oggetti presi tre alla volta (nel linguaggio paste-vassoio: è come se dovessi riempire un vassoio con tre paste scegliendole da quattro tipi diversi). Dunque i casi possibili sono $C^r_{4,3}$ mentre il caso favorevole è, come già detto, uno solo: tutte e tre le palline nella prima scatola, ovvero la prima scatola “scelta tre volte”. La probabilità è :

$$\frac{\textit{casi favorevoli}}{\textit{casi possibili}} = \frac{1}{C^r_{4,3}} = \frac{1}{C_{6,3}} = \frac{1}{20}$$

Da evidenziare il fatto che questo secondo metodo è migliore quando si ha a che fare con numeri grandi.

Esempio 3:

Esame di stato, tema di matematica n 1 (PNI, a. s. 2000-2001- Corso di ordinamento. Liceo scientifico). Il quesito n° 8 è l'unico di probabilità. Si chiede:

una classe è composta da 12 ragazzi e 4 ragazze. Tra i sedici allievi se ne scelgono tre a caso: qual è la probabilità che essi siano tutti maschi?

1 metodo: uso del calcolo combinatorio. Si valuta che il numero di casi favorevoli è il numero di combinazioni di classe 3 di 12 elementi:

$$C_{12,3} = \frac{12!}{(12-3)! \cdot 3!} = \frac{9! \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12}{9! \cdot 3!} = \frac{10 \cdot 11 \cdot 12}{3!}$$

mentre il numero di casi possibili è quello delle combinazioni di classe 3 di 16 elementi:

$$C_{16,3} = \frac{16!}{(16-3)! \cdot 3!} = \frac{13! \cdot 14 \cdot 15 \cdot 16}{13! \cdot 3!} = \frac{14 \cdot 15 \cdot 16}{3!}$$

La probabilità dell'evento che si considera è allora data dalla classica formula:

$$\frac{\textit{casi favorevoli}}{\textit{casi possibili}} = \frac{C_{12,3}}{C_{16,3}} = \frac{10 \cdot 11 \cdot 12}{3!} \cdot \frac{3!}{14 \cdot 15 \cdot 16} = \frac{10 \cdot 11 \cdot 12}{14 \cdot 15 \cdot 16}$$

2 metodo: uso della probabilità condizionata. Si immagina di osservare, uno dopo l'altro, i tre allievi sorteggiati e, per $i \in \{1, 2, 3\}$ si considera l'evento M_i = "Lo studente dell'i-sima osservazione è maschio". Allora l'evento di cui si chiede la probabilità è il prodotto logico $M_1M_2M_3$ e, per il teorema della probabilità composta:

$$P(M_1M_2M_3) = P(M_1)\, P(M_2/ M_1)\, P(M_3/ M_1M_2) = \frac{12}{16} \cdot \frac{11}{15} \cdot \frac{10}{14}$$

3.4. Variabile casuale (o variabile aleatoria o variabile stocastica)

Non puoi aspettarti di vedere al primo sguardo. Osservare è per certi versi un'arte che bisogna apprendere.
(Friedrich Wilhelm Herschel)

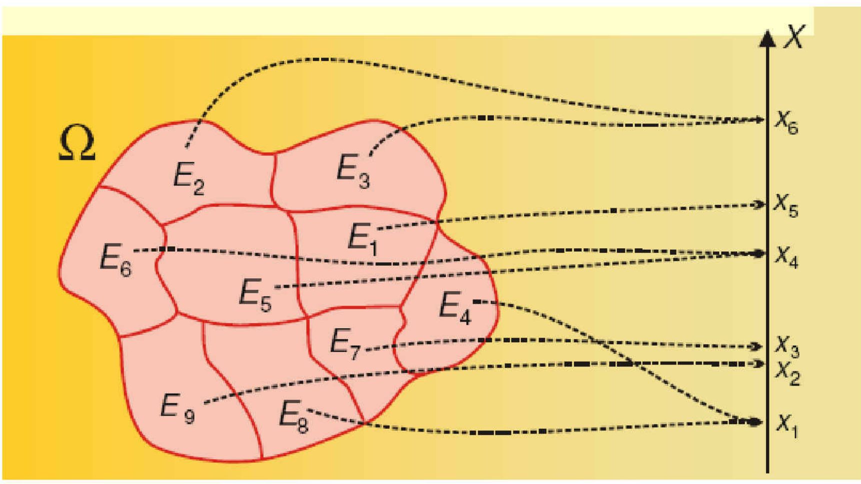
Uno dei principali compiti di un ricercatore consiste nell'individuazione di una legge che meglio permetta di descrivere il fenomeno che sta indagando. Quando il fenomeno implica situazioni di incertezza (che portano quindi ad escludere modellizzazioni di tipo deterministico) ci si riconduce all'elaborazione di modelli probabilistici che consentono di interpretare le informazioni disponibili. La nozione di modello si riferisce generalmente ad una espressione matematica che, in qualche modo, riguarda la possibilità del verificarsi dei risultati di una situazione sperimentale astratta. Quando l'analisi della situazione reale permette di ricondurre il complesso delle informazioni raccolte ad uno schema interpretativo, corrispondente alle assunzioni che caratterizzano il modello astratto, è possibile per il ricercatore adottare il modello come strumento deduttivo.

I modelli probabilistici sono di notevole interesse pratico perché propongono una precisa formulazione matematica di molte situazioni che si incontrano frequentemente nella realtà sperimentale. In molte situazioni reali, diverse tra loro, è possibile adottare lo stesso modello interpretativo, solo i parametri di tale modello varieranno in funzione del problema specifico.

I risultati di certi esperimenti non sono necessariamente numerici, quali ad esempio il lancio di una moneta, o l'estrazione di una carta da un mazzo di carte francesi. E' molto scomodo trattare direttamente gli eventi e la trattazione diventa più semplice ed efficace se associamo delle quantità numeriche agli eventi. L'introduzione del concetto di **variabile casuale** (per brevità indicata a volte **v.c.** oppure **v.a**.) permette di tener conto proprio di questa esigenza, associando ad ogni risultato dell'esperimento un numero reale. Il vantaggio è quello di poter applicare alla risoluzione dei problemi di probabilità i potenti strumenti matematici.

Una variabile casuale X è una funzione definita sullo spazio campionario Ω che associa ad ogni elemento elementare ω_i , un unico numero: $X(\omega_i) = x_i$ (x_i è una determinazione della variabile casuale X). L'attributo "casuale" rinvia al fatto che essa è generata da un esperimento (o meccanismo, o fenomeno naturale ecc.) di cui non siamo in grado di prevedere l'esito con certezza.

La terminologia, seppur universalmente diffusa, è comunque ambigua. Da osservare che ***le variabili casuali non sono variabili*** , ma ***funzioni***.



Il dominio della variabile casuale X (funzione) è dato dai punti dello spazio campionario Ω.

$$X: \Omega \rightarrow R$$

Ad ogni evento elementare ω_i , otteniamo quindi un numero x_i = X(ω_i), che è il valore che la variabile casuale assume sul risultato dell'esperimento: l'evento elementare ω_i. Possiamo dunque considerare, l'insieme di tutti i valori possibili (detto il **rango o il supporto della variabile casuale):** S_X , come un nuovo spazio campionario ed assegnare una probabilità ai possibili valori della variabile casuale: a ogni valore x_i nel range della variabile casuale X, assegnamo la probabilità che X assuma il valore x_i : $P(X = x_i) = p_i$.

Otteniamo così, al posto dello spazio campionario Ω, che in genere è complesso, un semplice spazio campionario formato da un insieme di numeri. Il maggior vantaggio di questa sostituzione è che molte variabili casuali, definite su spazi campionari anche molto diversi tra loro, danno luogo ad una stessa "distribuzione" di probabilità sull'asse reale.

Le variabili casuali si indicano con lettere maiuscole ed i valori assunti con lettere minuscole.

Alcuni **esempi** di variabili casuali:

- il numero di autovetture che attraversano in un giorno un certo casello autostradale;
- la velocità delle molecole di un gas contenuto in un recipiente;
- la durata di vita di una persona;
- il numero dei punti ottenuti con il lancio di due dadi;
- il guadagno (la perdita) che un giocatore realizza in n partite.

È ovvio che non è possibile dire quale valore assumerà la variabile in ognuno di questi casi, è certo però che ne assumerà uno fra tutti quelli possibili. Ogni valore assunto dalla variabile dipende dal verificarsi o meno di un evento aleatorio.

Le variabili casuali a una dimensione (cioè a valori in R) si dicono **semplici** o univariate.

Le variabili casuali a più dimensioni (cioè a valori in R^2,R^3...) si dicono **multiple** o multivariate (doppie, triple, k-uple).

Un **processo stocastico** è un insieme ordinato di variabili casuali, indicizzate dal parametro *t,* spesso detto tempo.

VARIABILI CASUALI DISCRETE

Le variabili casuali sono **discrete** se possono assumere un insieme discreto (finito o numerabile) di numeri reali; in generale queste variabili producono risposte numeriche che derivano da un processo di conteggio (ad esempio: "il numero dei componenti della famiglia", "il numero di stanze in un albergo", ecc.)

VARIABILI CASUALI CONTINUE

Le variabili casuali sono **continue** se possono assumere tutti i valori compresi in un intervallo reale; in generale queste variabili producono risposte che derivano da un processo di misurazione (ad esempio "l'altezza", "il reddito", "il fatturato", ecc.).

Mentre per una variabile discreta è possibile elencare tutti i valori che essa può assumere, per una variabile continua è necessario definire delle classi, cioè degli intervalli in cui suddividere i possibili valori della variabile.

La variabile continua è un concetto astratto: qualunque sia la precisione dello strumento, il numero di modalità ottenibili è discreto. ***Un errore frequente è quello di affermare che un carattere continuo***

(peso, tempo...) sia discreto in quanto si osserva un insieme discreto di valori.

Per **esempio**: una bilancia che misura alla precisione dell'hg fornisce valori come : 66,0 Kg; 66,1 Kg; 66,2 Kg .... i valori osservabili sono un insieme discreto, ma il carattere **"peso"** è continuo !

VARIABILI CASUALI MISTE

La variabile casuale mista è in parte discreta e in parte continua. Un **esempio** lampante che si trova in natura è dato dai livelli energetici degli atomi. Secondo le leggi della meccanica quantistica l'energia di un elettrone in un atomo non è una quantità determinata (né determinabile) a priori ma è piuttosto una variabile casuale. Risulta dalla teoria (e viene confermato dagli esperimenti) che questa variabile casuale ha una distribuzione in parte discreta e in parte continua.

Osservazione:

Se lo spazio campionario Ω è discreto la variabile casuale sarà discreta mentre, se Ω è continuo, la variabile casuale può essere continua o discreta come evidenziato nell'esempio seguente.

Esempio 1:

Consideriamo una prova consistente nell'osservare l'altezza di un individuo. In tal caso Ω è continuo perché contiene un'infinità non numerabile di eventi (tutte le possibili altezze). La variabile casuale X "altezza" (espressa per esempio in cm) è una variabile casuale continua in quanto può assumere, almeno in teoria, qualsiasi valore nell'intervallo [20,300). Per esempio il valore 172,25 potrebbe corrispondere ad un individuo adulto, mentre 45,43 potrebbe corrispondere ad un neonato. Se però consideriamo due eventi E_1= altezza superiore o uguale ai 150 cm ed E_2 = altezza inferiore ai 150 cm, possiamo definire una variabile casuale X, che assume valore 1 in corrispondenza di E_1 e valore 0 in corrispondenza di E_2. In tal caso otteniamo una variabile casuale discreta.

Esempio 2:

Consideriamo l'esperimento del lancio di una moneta bilanciata. In questo caso Ω={testa,croce}; Ω:= {C,T}. Consideriamo la variabile aleatoria così definita:

X({testa}) = 1 e X({croce}) = 0

Quindi: X:{testa,croce} → {0,1} il rango S_X= {0,1}

Che cosa è cambiato? Siamo passati da un insieme non numerico a un insieme numerico. Qual è il vantaggio?

Per esempio se lanciamo 10 volte la moneta e indichiamo con $X_1 + X_2 + \ldots, X_k, \ldots, X_{10}$ le variabili aleatorie corrispondenti a 10 lanci. Se vogliamo sapere il numero di uscite di testa nei 10 lanci possiamo sommare i valori delle 10 variabili aleatorie. Quindi la variabile aleatoria **X** = $X_1 + X_2 + \ldots, X_k, \ldots, X_{10}$ ovvero X= $\sum_{k=1}^{10} X_k$ rappresenta il numero di uscite di testa in 10 lanci.

Esempio 3:

Consideriamo l'esperimento casuale del lancio contemporaneo di due monete. In questo caso Ω^2 sarà lo spazio campionario ottenuto dal prodotto cartesiano tra gli spazi dei singoli lanci, In simboli:

Ω^2= Ω x Ω:= {(C,C),(C,T), (T,C), (T,T)}.

Consideriamo la variabile aleatoria X dallo spazio campionario Ω^2 in R, che a ciascun punto campionario dello spazio, associa il numero di teste risultante.

$X: \Omega^2 \rightarrow R$ è una variabile casuale discreta, i suoi possibili valori sono:

- 0 (se non si ottiene alcuna testa) X(C,C) =0
- 1 (se una delle due monete dà testa) X [(C,T),(T,C)]=1
- 2 (se entrambe le monete danno testa) X (T,T)=2

il rango $S_X = \{0,1,2\}$

Dalle considerazioni e dagli esempi esposti finora, appare evidente il fatto che, qualora si voglia identificare una variabile casuale è necessario determinare due cose:

- l'insieme dei valori che la variabile casuale può assumere (insieme di valori costituito da un numero finito o infinito numerabile di numeri reali per le variabile discrete oppure un numero infinito non numerabile di numeri reali, per le variabili continue)

- il modo in cui la probabilità si distribuisce (si "spalma") su questi valori. Può essere determinato :

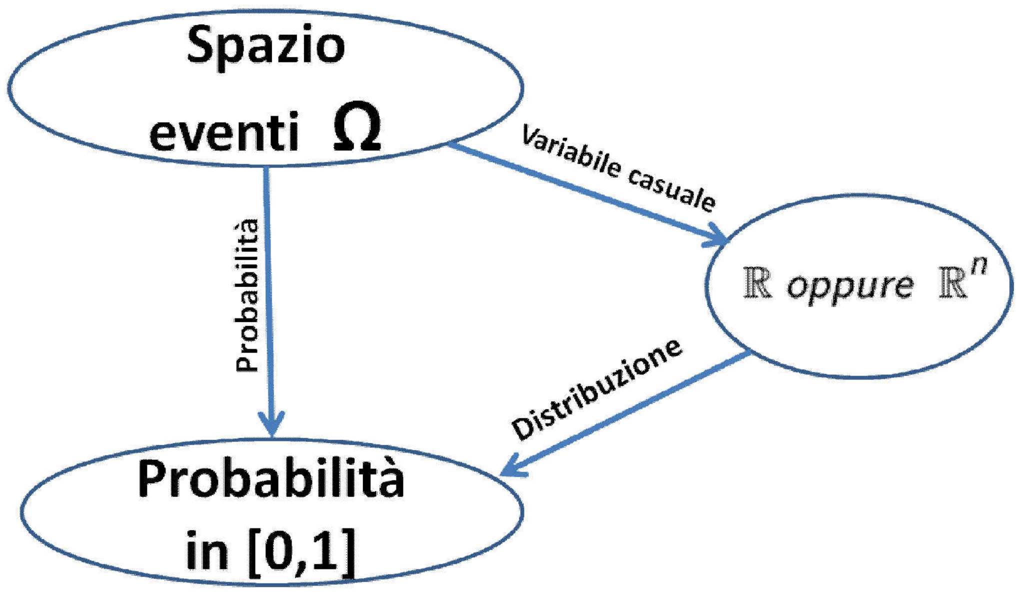
  1) attraverso la **funzione di massa** (o **funzione di probabilità**) definita **solo** per le variabili casuali discrete. La funzione di massa o di probabilità, la si può incontrare anche con la notazione **PMF**, dall'inglese "Probability Mass Function".

  2) attraverso la **funzione di densità** - definita **solo** per le variabili casuali continue . La funzione di densità, la si può incontrare anche con la notazione **PDF**, dall'inglese: "Probability Density Function".

3) attraverso la **funzione di ripartizione** (o **funzione di distribuzione** o **delle probabilità cumulate**) - definita sia per le variabili casuali discrete che per le continue. La funzione di ripartizione la si può incontrare anche con la notazione **CDF**, dall'inglese "Cumulative Distribution Function ".

Ognuno dei risultati di una variabile casuale è associato ad una determinata probabilità. La funzione che associa ad ogni valore della variabile una probabilità corrispondente si chiama **"distribuzione di probabilità"** oppure **"legge di probabilità"** .

Distribuzione di probabilità:={ (x,f(x)) | x ∈ dom} dove f(x) è la funzione di massa di probabilità oppure la funzione di densità di probabilità oppure la funzione di ripartizione (o di distribuzione).



Le variabili casuali che emergono, interpretando distinte situazioni reali, vengono così ad essere descritte da distribuzioni di probabilità che possono essere studiate ed algebricamente manipolate, indipendentemente dalle loro specifiche applicazioni.

La scelta del modello della distribuzione di probabilità da adattare ad un particolare problema, molto spesso, è condotta per mezzo del confronto tra la forma dell'istogramma dei dati osservati e la forma della funzione di massa (PMF), funzione di densità (PDF) o funzione di ripartizione (CDF) di una particolare distribuzione nota. A volte questo esame può essere l'unico approccio al problema, ma è da sottolineare che le conclusioni a cui si arriverà saranno tanto più errate, tanto più le assunzioni del modello di base sono lontane dal descrivere e interpretare la situazione reale. E' quindi auspicabile che la scelta del modello si basi principalmente sulla comprensione del fenomeno.

La variabile casuale trasforma in numeri il risultato di un esperimento casuale; ma poiché tali risultati sono frutto del caso, anche i valori che la variabile casuale assume sono frutto del caso. Ne possiamo conoscere il valore solo dopo che l'esperimento è stato effettuato, a priori possiamo sapere al massimo i valori che la variabile casuale assume e con quale probabilità. Conoscere queste due cose significa conoscere completamente la variabile casuale; infatti la distribuzione identifica la variabile casuale, nel senso che ne descrive completamente il massimo che possiamo conoscere della variabile casuale: il suo comportamento probabilistico.

Per particolari esigenze si può essere interessati non alla distribuzione della variabile casuale considerata, ma più semplicemente a delle ***descrizioni sintetiche*** della stessa, che tramite pochi valori ci permetta di cogliere le caratteristiche essenziali della distribuzione, anziché procedere ad una sua rappresentazione completa mediante la funzione di ripartizione, la funzione di massa o la funzione di densità. In questo ipertesto saranno presentati alcuni di questi **indicatori caratteristici**: il valore atteso (o media o speranza matematica) e varianza. Altri indicatori caratteristici sono: moda e mediana.

Osservazione: E' possibile associare una variabile casuale a qualsiasi fenomeno o esperimento casuale anche nel caso in cui il risultato non sia esprimibile numericamente. In questi casi se E è l'evento, si considera la variabile X che può assumere il valore 1 se l'evento E si verifica e il valore 0 se l'evento E non si verifica.

Indicando con p la probabilità che l'evento E si verifichi e con 1-p la probabilità che non si verifichi, si ha la seguente tabella:

X	**P**
0	$1 - p$
1	p

La variabile X così formata è detta **variabile indicatrice** dell'evento E. La variabile casuale indicatrice costruita in questo modo è una variabile casuale discreta, in quanto assume solo i valori 0 e 1 con la probabilità P(X=1) = p e P(X=0) = 1 - p. Dunque è possibile costruire variabili casuali discrete su un qualunque spazio di probabilità (discreto o continuo). Osserviamo infatti che se Ω è uno spazio di probabilità discreto, tutte le variabili casuali costruite su Ω saranno necessariamente discrete. Se invece Ω è uno spazio di probabilità continuo su di esso è possibile costruire sia variabile aleatorie continue che discrete (e ovviamente anche miste).

3.5. Funzione di massa (o di probabilità) per variabili casuali discrete (o PMF)

Dov'è la sapienza che abbiamo smarrita nella conoscenza? Dov'è la conoscenza che abbiamo smarrita nell'informazione? Dov'è l'informazione che abbiamo smarrito nei dati?"

(Mark Porat, frase incisa nell'ala delle Comunicazioni nel Museo scientifico dei Bambini di Washington)

Il singolo esito di un processo aleatorio non è prevedibile a priori, anche dopo ripetute esecuzioni nelle stesse condizioni. Si possono comunque individuare delle "regolarità" nell'insieme dei risultati di un numero elevato di ripetizioni dello stesso esperimento, ovvero si può "modellare" la "casualità" presente in una misura sperimentale attraverso una funzione di probabilità che regola il processo aleatorio.

Sia **X una variabile casuale discreta** che assume i valori: $x_1, x_2, \ldots, x_k$ (eventualmente k è se la variabile casuale assume un'infinità numerabile di valori).

La **funzione di massa** di X , è la funzione f_X dall'insieme dei reali nei reali positivi, che ad ogni elemento associa la probabilità che la variabile casuale discreta assuma valori uguali al reale x_i; in simboli:

$$f_X : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$$
$$f_X(x_i) = P(X = x_i)$$

Tale funzione vale quindi:

$$f_X(x_i) := \begin{cases} P(X = x_i) = p_i \; ; & per \; x_i \in S_X \\ 0 & per \; x_i \notin S_X \end{cases}$$

Gli elementi dell'insieme $\{x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots\}$ vengono indicati con il nome di **punti di massa**.

La funzione di massa di una variabile casuale discreta, quindi, è semplicemente P(X = x), cioè la probabilità che X sia uguale ad x. Solo per brevità è indicata con $f_X(x)$, ma dobbiamo sempre pensare che suo significato è, appunto, P(X = x). Come indicato nella definizione, tale probabilità sarà maggiore di 0 solo per i valori x che la variabile casuale può assumere, mentre sarà 0 per tutti gli altri valori di x.

A ogni valore x_i si fa corrispondere il valore p_i della probabilità dell'evento al quale x_i è associato, ossia con p_i si indica la probabilità $P(X = x_i) = p_i$.

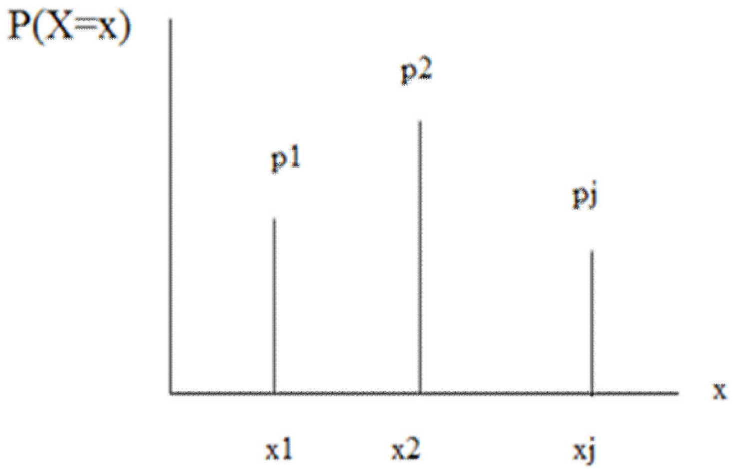
- $0 \le p_i \le 1$ Le probabilità associate ai valori di una variabile casuale devono essere comprese tra 0 e 1 inclusi.
- $\sum p_i = 1$ La somma delle probabilità di tutti i valore x di una variabile casuale devono essere 1.

Proprietà della funzione di massa:

- $0 \le f_X(x_i) \le 1$;
- $\sum_{i=1}^{k} f_X(x_i) = 1$.

La seconda proprietà significa che la funzione di massa soddisfa la **condizione di normalizzazione**, la somma essendo estesa a tutti i possibili valori assunti da X, questa condizione ci dice che la probabilità che X assuma almeno uno dei valori possibili è uguale ad 1.

Si può rappresentare la funzione di massa di una variabile casuale ponendo in ascissa i valori reali che assume, ed in ordinata le rispettive probabilità:



Possiamo utilizzare una rappresentazione tramite una tabella:

X	x_1	x_2	x_3	x_4	...
$f_X(x)$	p_1	p_2	p_3	p_4	...

Esempio 1:

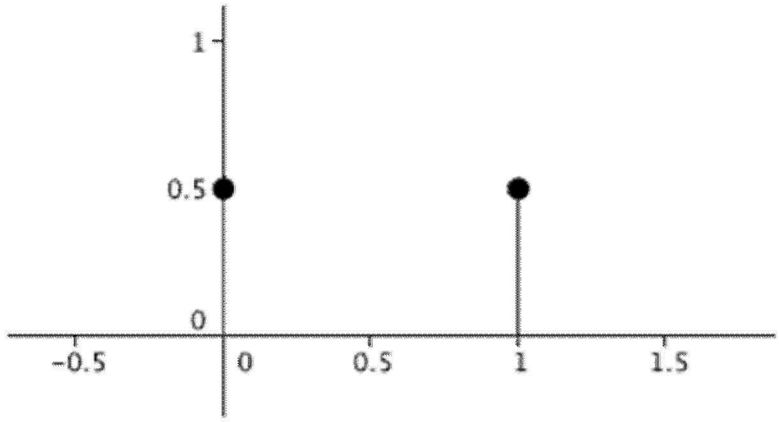
Nel caso dell'esperimento casuale di lancio di una moneta bilanciata con spazio campionario Ω costituito dai punti campionari Croce e Testa: Ω:={C,T}

Si assume la variabile casuale X: Ω→R , che ad ogni punto dello spazio (croce e testa) associa uno ed un solo numero reale, ad esempio 0 a C ed 1 a T; simbolicamente abbiamo: X(C)=0; X(T)=1.

Abbiamo S_X= {0,1} e la funzione di massa:

$$f_X(x) := \begin{cases} \frac{1}{2} = f_X(1) = P(X=1)\ ;\ per\ 1 \in S_X \\ \frac{1}{2} = f_X(0) = P(X=0)\ ;\ per\ 0 \in S_X \\ 0 \qquad\qquad per\ x \notin S_X \end{cases}$$

dunque osserviamo che la sua funzione di massa di probabilità è quella che è pari a $\frac{1}{2}$ per ogni punto appartenente al supporto: perché la probabilità che X assuma valore 0 (cioè che esca croce) è $\frac{1}{2}$ e così anche la probabilità che X assuma valore 1 (esca testa). Per ogni reale non appartenente al supporto (cioè i valori diversi da 0 ed 1) la funzione di massa di probabilità è pari a zero. Il grafico:



Esempio 2 :

Esperimento: lancio di 2 monete $\Omega^2 = \{(T,T);(T,C);(C,T);(C,C)\}$.
Variabile casuale: X = numero totale degli esiti "testa"; $X: \Omega^2 \rightarrow R$;
X è una variabile casuale discreta, i suoi possibili valori sono:

- 0 (se non si ottiene alcuna testa) $X(C,C) = 0$
- 1 (se una delle due monete dà testa) $X\,[(C,T),(T,C)]=1$
- 2 (se entrambe le monete danno testa) $X\,(T,T)=2$

Abbiamo le probabilità:

- $P(X=0)=P(C,C)=1/4$
- $P(X=1)=P((T,C)$ oppure $(C,T))=2/4=1/2$
- $P(X=2)=P(T,T)=1/4$

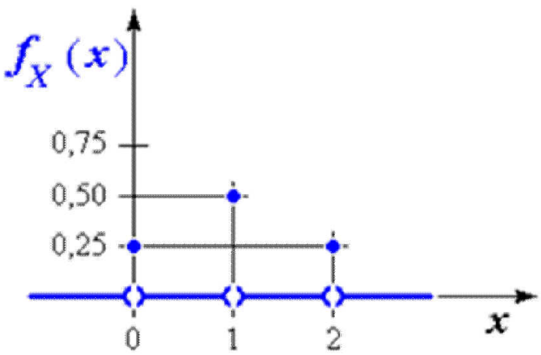
Abbiamo $S_X = \{0,1,2\}$ e la funzione di massa:

$$f_X(x) := \begin{cases} \frac{1}{4} = f_X(0) = P(X=0)\ ;\ per\ 0 \in S_X \\ \frac{1}{2} = f_X(1) = P(X=1)\ ;\ per\ 1 \in S_X \\ \frac{1}{4} = f_X(2) = P(X=2)\ ;\ per\ 2 \in S_X \\ \quad 0 \qquad\qquad\qquad per\ x \notin\ S_X \end{cases}$$

oppure in tabella:

Valori di X x	Funzione di massa di probabilità P(X = x)
0	0,25
1	0,5
2	0,25
	$\sum p_i = 1$

il grafico della funzione di massa (o di probabilità):



La distribuzione di probabilità è un modo di organizzare e quindi presentare in forma sintetica un insieme di dati. Le distribuzioni consentono di vedere come la variabile in esame si distribuisce nell'insieme analizzato.

Esempio 3:

Consideriamo il lancio di due dadi. Ω è finito e quindi discreto. I risultati possibili (eventi elementari) sono infatti 36, mentre la variabile causale X="somma dei due punteggi" può assumere 11 possibili valori distinti : numeri interi compresi tra 2 e 12.

Vediamo nella seguente tabella la corrispondenza tra gli eventi di Ω ed i valori della variabile casuale X, nella prova "lancio di due dadi":

Primo dado	Secondo dado	Primo dado	Secondo dado	Primo dado	Second o dado	Primo dado	Second o dado	Primo dado	Secondo dado	Primo dado	Secondo dado	**X**
1	1											X=2
1	2	2	1									X=3
1	3	2	2	3	1							X=4
1	4	2	3	3	2	4	1					X=5
1	5	2	4	3	3	5	1	4	2			X=6
1	6	2	5	3	4	6	1	4	3	5	2	X=7
2	6	3	5	6	2	5	3	4	4			X=8
3	6	6	3	4	5	5	4					X=9
6	4	4	6	5	5							X=10
6	5	5	6									X=11
6	6											X=12

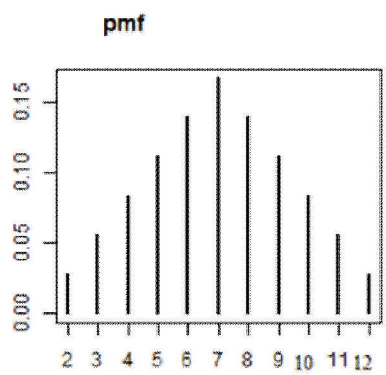
Poiché ogni evento elementare ha probabilità 1/36, dalla tabella si ricava, per esempio, che:

P(X=2)= P[(1;1)] = $\frac{1}{36}$; P(X=3) = P[(1;2) U (2;1)]= $\frac{2}{36}$ ...

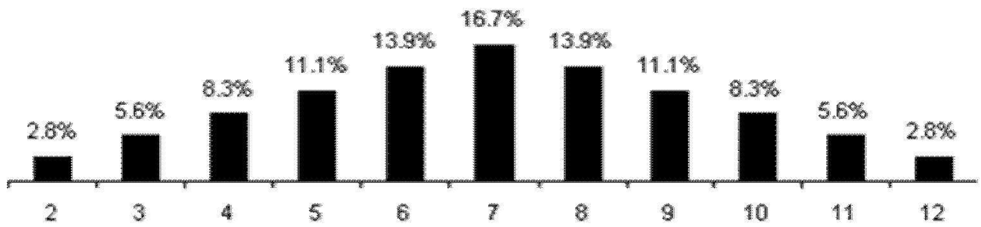
In definitiva si ottiene la seguente distribuzione di probabilità:

X	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**
f_X=P(X)	1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36	5/36	4/36	3/36	2/36	1/36

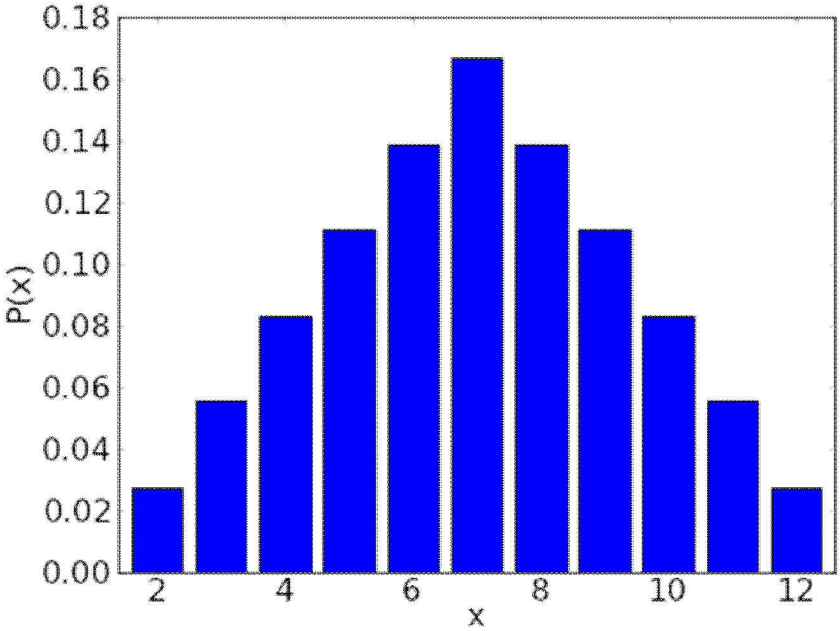
In generale si indica con P(X = x_i) la probabilità che la variabile casuale X assuma il valore x_i ; in alcuni casi si usa semplicemente P(x_i).



La distribuzione di probabilità di una variabile casuale discreta può essere rappresentata in modo grafico attraverso un istogramma di distribuzione di probabilità:



oppure:



Nella rappresentazione con istogrammi è bene osservare che P(X = x_i) può essere visualizzata mediante l'area del rettangolo la cui base ha x_i come punto medio.

Si noti anche che la somma delle aree dei rettangoli è 1.

La funzione di massa non può essere definita per le variabili casuali continue. Diamo una spiegazione basata su argomenti intuitivi. Una variabile casuale continua, come detto può assumere valori in un insieme continuo. Ora nel continuo, e questo vale anche se si prende un intervallo "piccolino", ci sono tanti valori, assai più che nell'infinito numerabile. Se X avesse probabilità positiva, anche piccolissima, in ciascuno di questi valori, sommando tali probabilità otterremmo che la probabilità che X assuma un valore qualsiasi (evento certo) sarebbe infinito, contravvenendo ad una delle regole fondamentali della probabilità secondo le quali $P(\Omega) = 1$. Quindi: primo, non ci possono essere più di un'infinità numerabile di punti con probabilità maggiore di 0; secondo, nel continuo $P(X = x) = 0$ in ogni x.

Pertanto nel continuo la funzione di massa non può essere definita e occorre un altro modo per vedere "cosa accade" sulle singole x: la funzione di densità.

3.6. Funzione di densità per variabili casuali continue (PDF)

Abbiamo visto precedentemente:"Funzione di massa di probabilità", che per le variabili casuali continue non ha senso determinare la probabilità su ciascun valore assunto dalla variabile casuale semplice X (visto che è sempre nulla), ma è corretto parlare di probabilità che la variabile casuale assuma valori in un intervallo, anche piccolissimo, del tipo (*x*, *x* + *dx*]. O meglio, la cosa che importa di più è valutare quanto cambia la probabilità da un valore all'altro, cioè interessa il rapporto incrementale:

$$P(x < X \leq x + dx) / dx.$$

Infatti, una variabile casuale continua X è una funzione che può assumere tutti i valori compresi in un intervallo (a,b). I casi possibili sono di fatto infiniti e quindi:

$$P(X = x_i) = \frac{numero\ di\ casi\ favorevoli}{numero\ di\ casi\ possibili} = \frac{1}{\infty} = 0$$

Esempio 1: La probabilità che la temperatura nella stanza sia *esattamente* 20°C è nulla, invece sarà maggiore di zero la probabilità che la temperatura sia compresa fra 20°C e 20,1°C.

Data la **variabile casuale continua X** che assume valori nell'intervallo (a,b), dove $-\infty \leq a < b \leq +\infty$, la **funzione di densità di probabilità (o PDF)** è la funzione $f_X : R \rightarrow R$ che ad ogni reale associa il limite per dx che tende a 0, del rapporto tra la probabilità che la variabile casuale assuma valori nell'intervallo $(x, x + dx]$ e l'ampiezza dx.

In simboli :

$$f_X : R \to R : \quad x \to \lim_{dx \to 0} \left[\frac{P(x < X \leq x + dx)}{dx} \right]$$

La funzione di densità in x, allora, rappresenta quanto vale la probabilità "intorno ad x" in rapporto all'ampiezza di tale "intorno". Il termine funzione di densità, serve proprio ad evocare quanto è **densa** la probabilità.

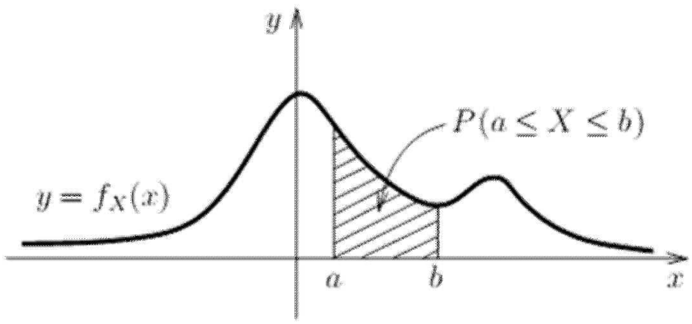
Ogni evento deve essere ricondotto all'unione, negazione o intersezione di intervalli del tipo $(-\infty, x)$. Abbiamo:

$$P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(x)\,dx$$

oppure:

$$P(a \leq X \leq b) = \int_{a}^{b} f_X(x)\,dx$$

La probabilità che una variabile aleatoria continua X assume valori in un intervallo reale (a,b) è data dall'area sottesa al grafico della funzione di densità.



Osservazione:

La funzione di densità, non è una probabilità, è pero una funzione legata alla probabilità, perché se voglio calcolare la probabilità che la variabile casuale continua X appartenga ad un intervallo, basta che faccio l'integrale della funzione di densità.

Proprietà della funzione di densità:

1. Una funzione di densità non può mai assumere valori negativi, ossia $f_X(x) \geq 0$ ciò assicura che la probabilità X cada in un qualsiasi intervallo sia non-negativa.

2. L'area totale sottesa alla funzione è uguale a 1, ossia:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\, dx = 1$$

(in quanto quest'integrale rappresenta la probabilità dell'evento certo). Il fatto che l'integrale della funzione di densità nell'intervallo $(-\infty, +\infty)$ vale 1 viene nominata condizione di normalizzazione. Per avere questo, ossia per avere la convergenza dell'integrale, la funzione che rappresenta una densità di probabilità deve tendere a zero quando la variabile indipendente tende a più o meno infinito.

3. La probabilità che la variabile casuale continua X assuma un particolare valore dell'intervallo è uguale a zero. Ciò è dovuto al fatto che un singolo valore corrisponde ad un intervallo di ampiezza zero, quindi la corrispondente area è anch'essa zero. Questo per esempio implica che non ha influenza l'inclusione, nel calcolo della probabilità, degli estremi dell'intervallo, ossia:

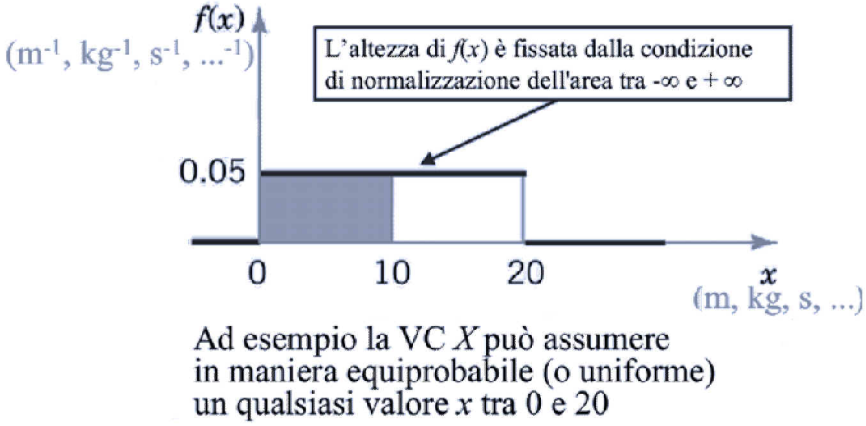
$$P(a \leq X \leq b) = P(a < X < b) = P(a \leq X < b) = P(a < X \leq b)$$

Osservazione:

La funzione di densità può essere **costante** o **non costante.**

Esempio 2: funzione di densità di probabilità **costante**:

Sia X una variabile casuale che può assumere tutti i valori dell'intervallo reale [0;20] in modo tale che tutti i sottointervalli di uguale ampiezza abbiano la stessa probabilità (diversa da zero). Se consideriamo la seguente funzione:



Dunque la funzione di densità della variabile casuale X, sarà:

$$f_X(x) := \begin{cases} 0 & per\ x \notin [0;20], \\ 0,05 & per\ x \in [0;20]. \end{cases}$$

Esempio 3:

Quando arriva la telefonata?

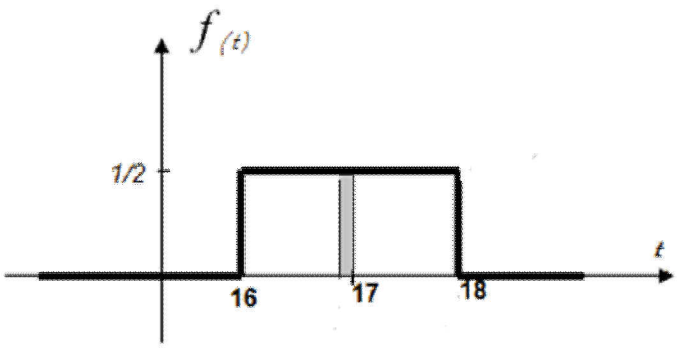
Il signor Rossi aspetta una telefonata dal signor Bianchi il quale ha preannunciato che chiamerà, in un istante non meglio precisato, fra le 16:00 e le 18:00. Il signor Rossi si deve però assentare dalle 16:45 alle ore 17:00.

Qual è la probabilità che la telefonata arrivi mentre il signor Rossi è assente?

L'istante della telefonata è una variabile casuale X. Per quanto ne sa il signor Rossi, tutti i momenti dalle 16:00 alle 18:00 sono equiprobabili, mentre fuori da questo intervallo la probabilità è zero. Dunque è intuitivo considerare X come una variabile casuale continua, la cui densità f_X ha un valore costante : **c** sull'intervallo [16,18] ed ha il valore zero fuori di questo intervallo.

Quanto vale la costante c? Deve essere tale da soddisfare la relazione: $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,dx = 1$, ovvero l'area del rettangolo con base [16,18] e l'altezza **c** sia 1. Dunque 2**c** = 1 e perciò abbiamo **c** = 1/2. La funzione di densità della variabile X, sarà:

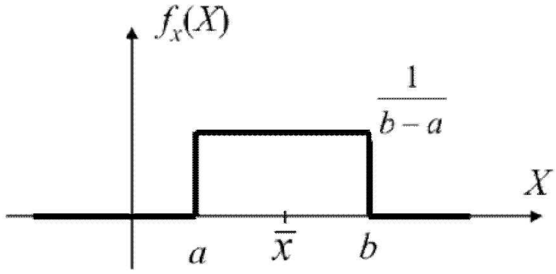
$$f_X(t) := \begin{cases} 0 & per \;\; t < 16, \\ \frac{1}{2} & per \;\; 16 \leq t \leq 18, \\ 0 & per \;\; t > 18. \end{cases}$$



L'area grigia corrisponde alla probabilità P(16:45 ≤ X ≤ 17:00) e si nota che il valore di questa probabilità è 1/8 (l'area del rettangolo è 1)

Osservazione:

In genere abbiamo il grafico della funzione di densità costante :



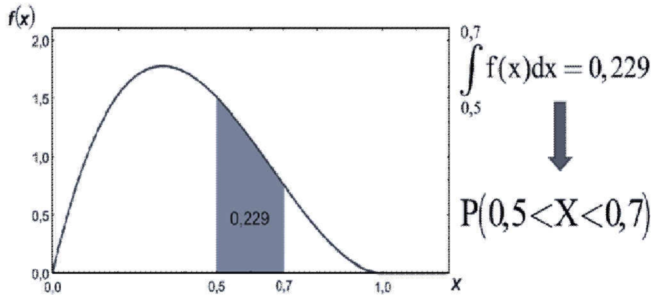
$$f_x(X)=\begin{cases}1/(b-a) & a<X<b\\ 0 & \text{altrove}\end{cases}$$

Esempio 4: funzione di densità di probabilità **non costante**:

Consideriamo una variabile casuale X che può assumere tutti i valori dell'intervallo reale [0;1] con probabilità descritta dalla seguente funzione di densità:

$$f_X(x) := \begin{cases} 12x(1-x)^2 & per\ x \in [0;1], \\ 0 & per\ x \notin [0;1]. \end{cases}$$

La variabile casuale X ha quindi una funzione di densità che non assegna una probabilità costante all'interno dell'intervallo [0;1] (a parità di ampiezza dei sottointervalli). Si può osservare dal grafico sottostante che la probabilità è più bassa in corrispondenza a sottointervalli vicini agli estremi. Come è mostrato nel seguente grafico, la probabilità che la variabile casuale X assuma un valore nell'intervallo [0,5;0,7] è pari a 0,229, che corrisponde all'area sottesa alla funzione in quell'intervallo.



Una funzione di densità di probabilità continua è un modello che definisce analiticamente come si distribuiscono i valori assunti da una variabile casuale continua.

Quando si dispone di un'espressione matematica adatta alla rappresentazione di un fenomeno continuo, siamo in grado di calcolare la probabilità che la variabile aleatoria assuma valori compresi in intervalli.

I modelli continui hanno importanti applicazioni in ingegneria, fisica, economia e nelle scienze sociali.

Alcuni tipici fenomeni continui sono l'altezza, il peso, le variazioni giornaliere nei prezzi di chiusura di un'azione, il tempo che intercorre fra gli arrivi di aerei presso un aeroporto, il tempo necessario per servire un cliente in un negozio, ecc.

L'immagine sottostante rappresenta graficamente tre funzioni di densità di probabilità: normale, uniforme, ed esponenziale.

3.7. Funzione di ripartizione o di distribuzione, o delle probabilità cumulate (CDF)

In alcune situazioni potremmo essere interessati non alla probabilità che la variabile casuale X assuma uno specifico valore, bensì alla probabilità che essa assuma un valore minore o uguale ad un dato valore x. In tal caso si devono considerare delle probabilità cumulate: $P(X \leq x)$ che si riferiscono alla probabilità degli intervalli ($-\infty$, x].

Data una variabile casuale X, la funzione che fa corrispondere ai valori di x, le probabilità cumulate $P(X \leq x)$ viene detta **funzione di ripartizione** è indicata con F_X ed è così definita:

$$F_X : R \rightarrow [0, 1] \qquad F_X(x) := P(X \leq x)$$

La funzione di ripartizione è definita sia per le variabili casuali discrete che per le variabili casuali continue.

Osservazione: Se due variabili casuali hanno la medesima funzione di ripartizione esse si dicono **somiglianti.**

Proprietà della funzione di ripartizione:

1. $0 \leq F_X(x) \leq 1$

2. $\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$; $\lim_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$.
L'ultimo limite è la proprietà di normalizzazione.

3. $F_X(x)$ è monotona non decrescente, ossia:

$$x_1 < x_2 \rightarrow F_X(x_1) \leq F_X(x_2)$$

4. $P(x_1 < X \leq x_2) = F_X(x_2) - F_X(x_1)$

dunque la funzione di ripartizione consente di stabilire la probabilità che la variabile casuale semplice X assuma valori compresi in intervalli di tipo $(x_1, x_2]$, dove $x_1, x_2 \epsilon$ R con $x_1 < x_2$. Abbiamo:

P $(x_1 \leq X < x_2) = F_X(x_2)$ - $F_X(x_1)$ + P(X = x_1) - P(X = x_2)

P $(x_1 < X < x_2) = F_X(x_2)$ - $F_X(x_1)$ - P(X = x_2)

P $(x_1 \leq X \leq x_2) = F_X(x_2)$ - $F_X(x_1)$ + P(X = x_1)

5. Nel caso di una **variabile casuale discreta**, la funzione di ripartizione è continua a destra : $\lim_{x \to x_0^+} F_X(x) = F_X(x_0)$.

Abbiamo anche: $lim_{x \to x_0^-} F_X(x) \neq F_X(x_0)$ cioè la funzione di ripartizione presenta dei punti di discontinuità di 1° specie (o salti).

Osservazione: si chiama **salto** la quantità pari alla differenza tra i limiti: $\lim_{x \to x_0^+} F_X(x)$ - $\lim_{x \to x_0^-} F_X(x) = F_X(x_0)$ - $F_X(x_0^-)$ = P(X = x_0) = $f_X(x_0)$

dove la funzione $f_X(x_0)$ è la funzione di massa che misura la probabilità che la variabile casuale semplice discreta X assuma valori uguale ad x_0.

Possiamo utilizzare la rappresentazione dei dati tramite una tabella:

X	x_1	x_2	x_3	x_4	...
$F_X(x)$	p_1	p_1+p_2	$p_1+p_2+p_3$	$p_1+p_2+p_3+p_4$	...

dove $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ sono i valori della variabile casuale discreta X e pi = P(X = x_i) con $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$. La funzione di ripartizione sarà:

$F_X(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} p_i\,(x_i) = \sum_{t \leq x} f_X\,(t)$,

dove $f_X(t)$ è la funzione di massa della variabile casuale discreta X.

L'ampiezza del salto è data da :

$$p_i = f_X(x_i) = F_X(x_i) - F_X(x_{i-1}) \quad con \quad x_i \in S_X$$

Abbiamo:

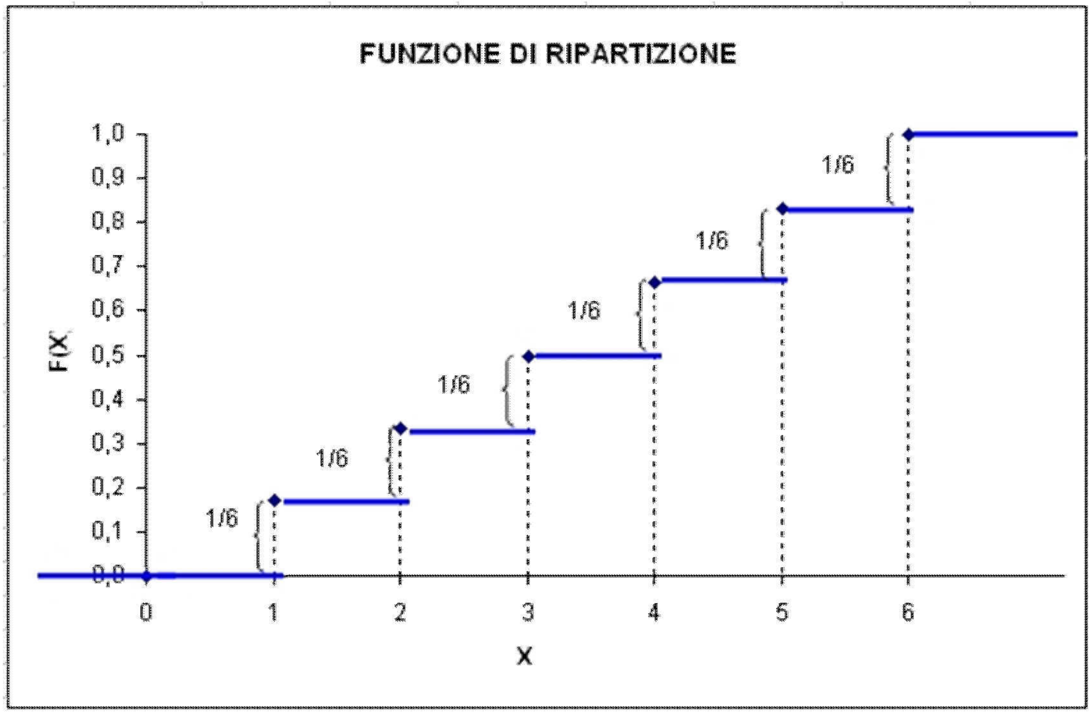
$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & per \quad -\infty < x < x_1 \\ p_1 & per \quad x_1 \leq x < x_2 \\ p_1 + p_2 & per \quad x_2 \leq x < x_3 \\ \dots\dots\dots\dots & \\ p_1 + p_2 + \dots p_i & per \quad x_i \leq x < x_{i+1} \\ \dots\dots\dots\dots & \\ 1 - p_n & per \quad x_{n-1} \leq x < x_n \\ 1 & per \quad x_n \leq x < +\infty \end{cases}$$

Esempio 1:

Nel lancio di un dado non truccato gli unici risultati possibili sono le facce da 1 a 6, ciascuna con probabilità 1/6. La funzione di massa di probabilità di questa variabile casuale X e la funzione di ripartizione sono riportate nella seguente tabella:

X	***f(x)*=P(X)**	**F(*x*)**
1	1/6	1/6
2	1/6	2/6
3	1/6	3/6
4	1/6	4/6
5	1/6	5/6
6	1/6	6/6

Il grafico della funzione di ripartizione:



Come si nota, dalla F(x) si possono ricavare, in corrispondenza dei valori di x, le rispettive probabilità. Infatti, l'ampiezza del salto in x è pari alla probabilità P(X = x). Ad esempio, usando le proprietà della funzione di ripartizione, abbiamo:

P(X = 3) = P(X ≤ 3) - P(x < 3)= F(3) – F(2) = 3/6 – 2/6 =1/6

P(2 < X ≤ 5) = F(5) – F(2) = 5/6 – 2/6 = 3/6

P(2 ≤ X < 5) = F(5)- F(2) + P(X = 2) - P(X = 5) = 5/6 – 2/6 + 1/6 – 1/6 =3/6

P(2 < X < 4) = F(4) – F(2) – P(4) = 4/6 – 2/6 – 1/6 = 1/6

P(2 ≤ X ≤ 6) = F(6) – F(2) + P(2) = 6/6 – 2/6 + 1/6 = 5/6.

6. Nel caso di una **<u>variabile casuale continua</u>,** la funzione di ripartizione è continua è dunque:

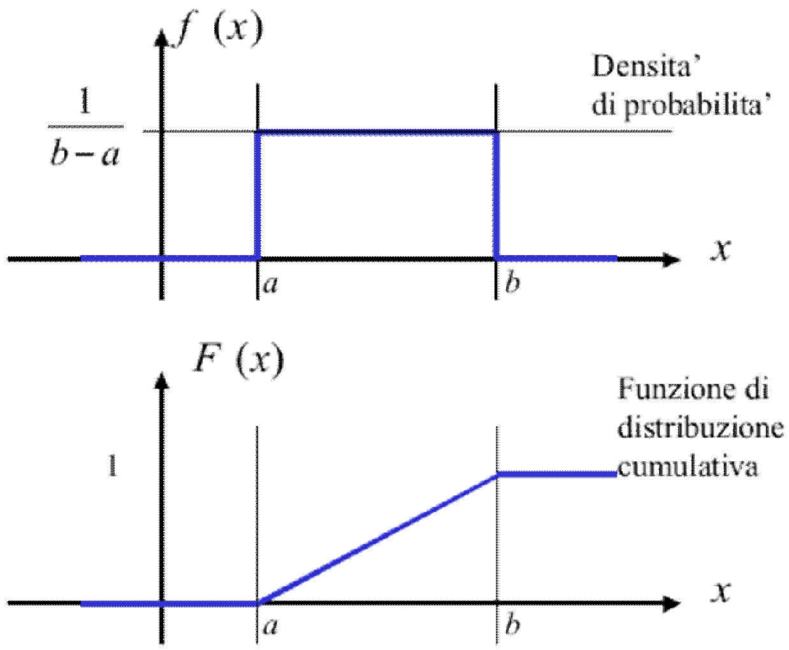
$\lim_{x \to x_0^+} F_X(x) = \lim_{x \to x_0^-} F_X(x) \rightarrow F_X(x_0)$ - $F_X(x_0^-) = 0$

Abbiamo $F_X(x)$ = P(X≤ x) = $\int_{-\infty}^{x} f_X(t)\, dt$ dove f_X è la funzione di densità della variabile casuale continua X.

Per X variabile casuale continua abbiamo:

$$P(a \leq X \leq b) = P(a < X < b) = P(a \leq X < b) = P(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a)$$

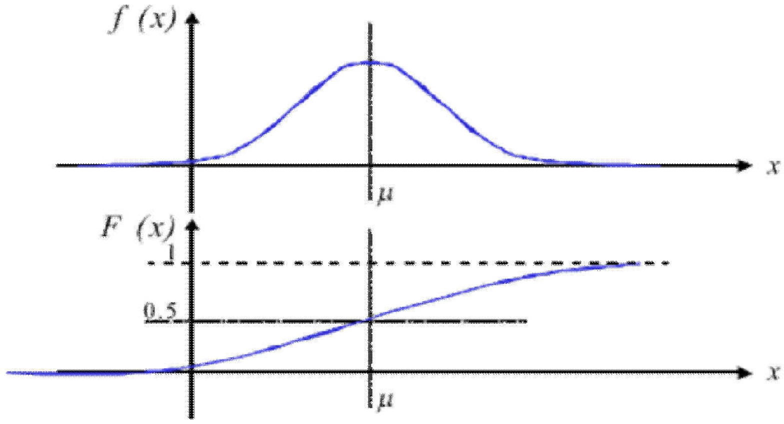
Nel caso di una <u>funzione di densità costante</u> di una variabile casuale continua X, abbiamo il grafico della funzione di densità ed il grafico della funzione di ripartizione (distribuzione) di probabilità cumulate:



$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & per \quad -\infty < x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & per \quad a \leq x < b \\ 1 & per \quad b \leq x < +\infty \end{cases}$$

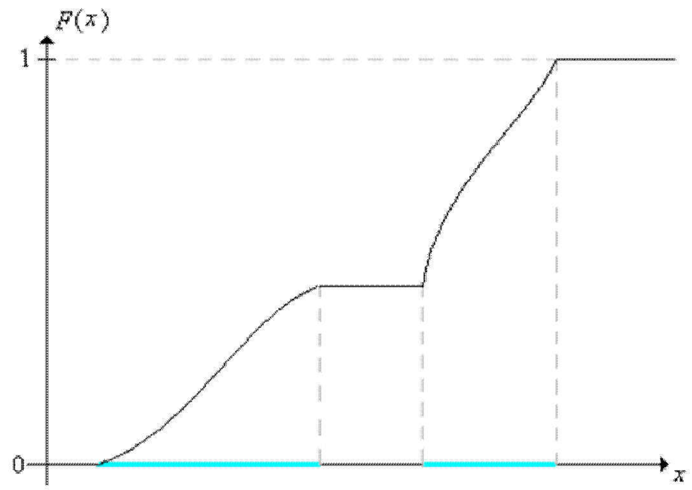
La probabilità che la variabile casuale X assuma un valore compreso nell'intervallo [a,*x*] è: P(a $\leq$ X $\leq$ *x*) = (*x* - a)/(b - a) . Essa rappresenta l'area sottesa dalla retta y = 1/ (b - a) nell'intervallo [a,*x*].

Nel caso di una <u>funzione di densità non costante</u> di una variabile casuale continua X, abbiamo il grafico della funzione di densità f_X ed il grafico della funzione di ripartizione (distribuzione) di probabilità cumulate F_X:

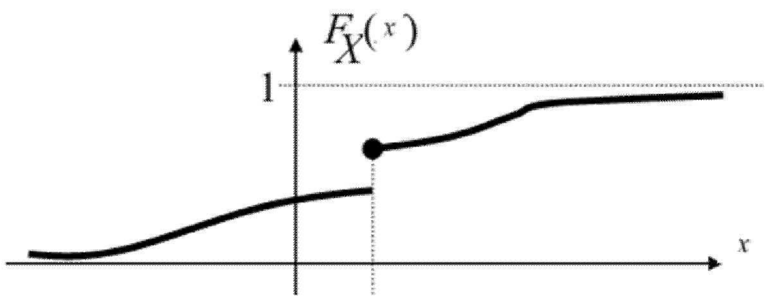


7. Osservazione:

Nel caso di una variabile casuale mista che a tratti è discreta ed a tratti è continua, il grafico della sua funzione di ripartizione può essere :



oppure:



La funzione di ripartizione nel caso di una variabile casuale mista, può essere decomposta nella somma di una funzione continua e di una funzione costante a tratti.

Osservazione:

Una variabile casuale è discreta se la sua funzione di ripartizione è una funzione a scala (costante a tratti). Una variabile casuale è continua se la sua funzione di ripartizione è una funzione continua.

Esempio 2:

Nel caso dell'esperimento casuale di lancio di una moneta bilanciata con spazio campionario Ω costituito dai punti campionari Croce è Testa.

$\Omega := \{C,T\}$

Si assume la variabile casuale $X: \Omega \rightarrow R$, che ad ogni punto dello spazio (croce e testa) associa uno ed un solo numero reale, ad esempio 0 a C ed 1 a T; simbolicamente abbiamo: $X(C)=0$; $X(T)=1$.

Abbiamo $S_X=\{0,1\}$, dunque X può assumere solo due valori 0 o 1.

$P(X=0) = P(X=1) = \frac{1}{2}$.

Costruiamo la funzione di ripartizione della variabile casuale X.

Abbiamo:

Se $x < 0$ allora $Fx(x) = P(X \leq x) = 0$ perché X non può essere < 0.

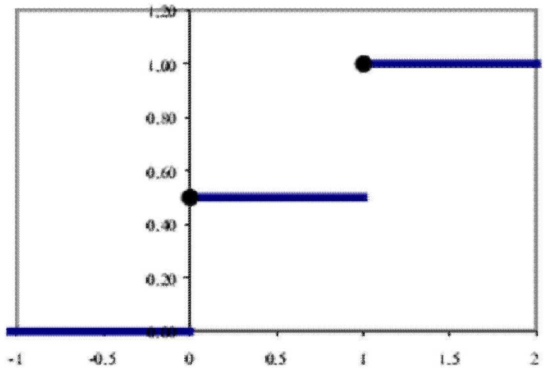
Se $x = 0$ allora $Fx(0) = P(X = 0) = 1/2$.

Se $0 < x < 1$ abbiamo $Fx(x) = P(X \leq 0) = 1/2$ perché la variabile aleatoria X è più piccola o uguale ad un numero nell'intervallo (0;1) se e solo se è più piccola o uguale a 0. Siccome $P(X = 0) = 1/2$ allora $P(X \leq 0) = 1/2$.

Se $x = 1$ allora $Fx(1) = P(X \leq 1) = P(X = 0) + P(X = 1)=1/2 + 1/2 =1$.

Se $x > 1$ allora $Fx(x) = P(X \leq x) = 1$ semplicemente perché certamente la nostra variabile casuale X, che prende solo i due valori 0 e 1, sarà $\leq$ di x (con $x > 1$ per ipotesi).

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & per \quad -\infty < x < 0 \\ \frac{1}{2} & per \quad 0 \leq x < 1 \\ 1 & per \quad 1 \leq x < +\infty \end{cases}$$



Esempio 3: Esperimento: lancio di 2 monete La relazione tra i valori di una v.a. e le probabilità ad essi corrispondente è espressa dalla legge di probabilità che può assumere forme diverse.

$\Omega^2=\{(T,T);(T,C);(C,T);(C,C)\}$

La variabile casuale: X = numero totale degli esiti "testa"; $X: \Omega^2 \rightarrow R$;

X è una variabile casuale discreta, i suoi possibili valori sono:

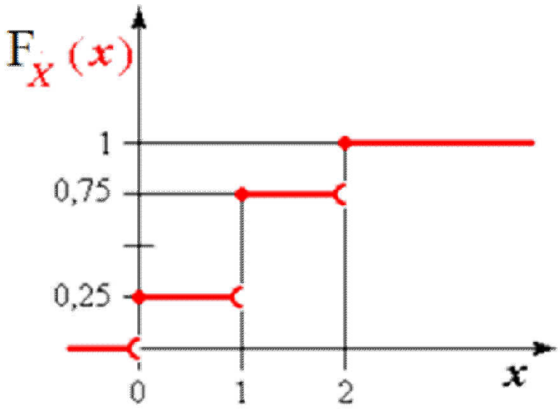
- 0 (se non si ottiene alcuna testa) $X(C,C)=0$
- 1 (se una delle due monete dà testa) $X\,[(C,T),(T,C)]=1$
- 2 (se entrambe le monete danno testa) $X\,(T,T)=2$

Abbiamo le probabilità:

- $P(X=0)=P(C,C)=1/4$
- $P(X=1)=P((T,C)$ oppure $(C,T))=2/4=1/2$
- $P(X=2)=P(T,T)=1/4$

Valori di X **x**	**Funzione di massa (di probabilità) P(X = x)**	**Funzione di massa di ripartizione P(X ≤ x)**
0	0,25	$P(X \le 0) = P(X=0)=0,25$
1	0,5	$P(X \le 1) = P(X=0) + P(X=1)=0,75$
2	0,25	$P(X \le 2) = P(X=0) + P(X=1)+P(X=2)=1$
	$\sum p_i = 1$	

Il grafico della funzione di ripartizione sarà:

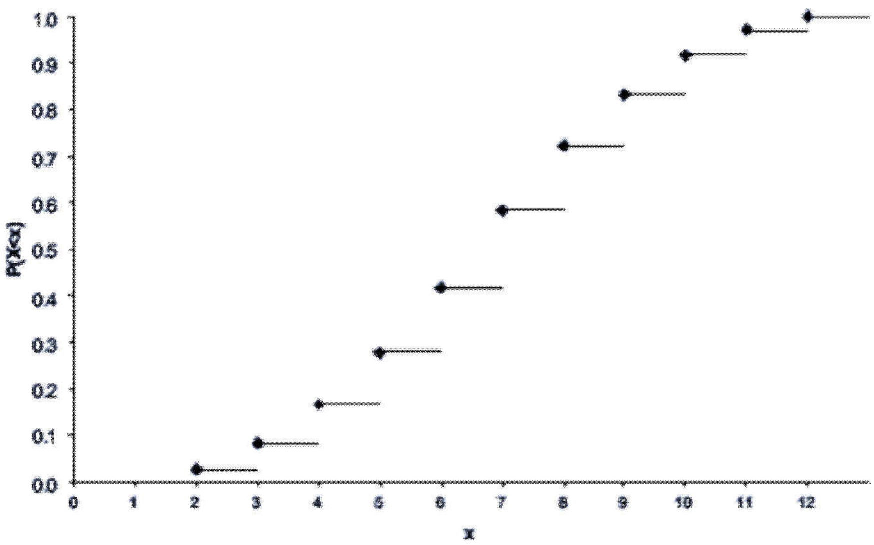


Esempio 4:

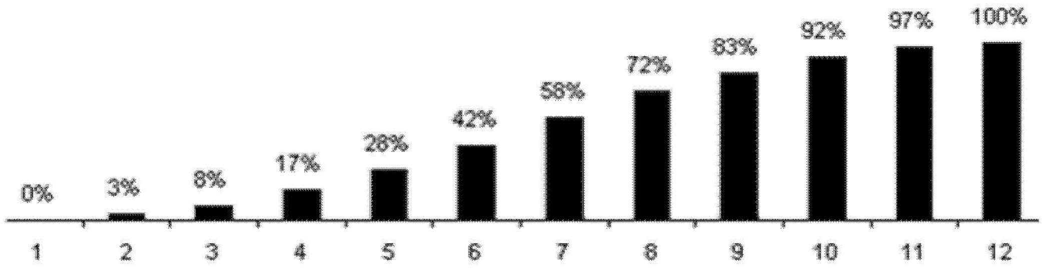
Nel caso già studiato nell'esempio 3 del paragrafo "Funzione di massa di probabilità", nel caso del lancio di due dadi, considerando la variabile causale X="somma dei due punteggi nel lancio di due dadi" possiamo aggiungere alla tabella della funzione di massa di probabilità, la riga corrispondente alla funzione di ripartizione.

X	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
f_X=P(X)	1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36	5/36	4/36	3/36	2/36	1/36
$F_X(x)$	1/36	3/36	6/36	10/36	15/36	21/36	26/36	30/36	33/36	35/36	1

Il grafico della funzione di ripartizione sarà:



oppure come istogramma:



Osservazione:

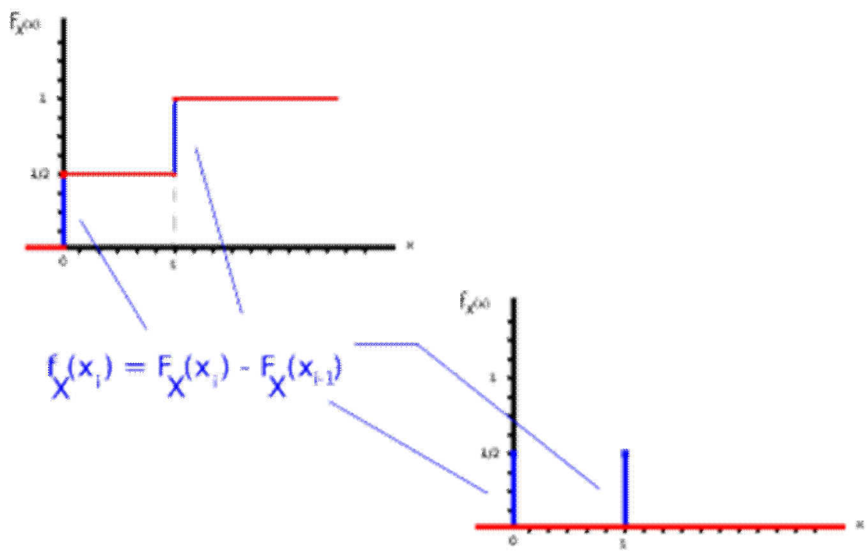
La probabilità P (x > a) = 1 - F_X(a) è detta **probabilità di coda**. Uno dei maggiori vantaggi dell'uso della funzione di distribuzione è che permette un trattamento unificato del caso delle variabili aleatorie discrete e di quelle continue.

3.8. Legami tra funzione di ripartizione, funzione di massa e funzione di densità

Le tre funzioni: di ripartizione, di massa e di densità di probabilità, che consentono di stabilire il modo in cui la probabilità si distribuisce sull'insieme dei valori assunti dalla variabile casuale semplice X, sono tra loro strettamente connesse.

1. Passare dalla funzione di ripartizione F_X a quella di massa f_X :

$$f_X(x_i) := \begin{cases} F_X(x_i) - F_X(x_{i-1}) \text{ ; } per\ x_i \in S_X \\ 0 \qquad\qquad per\ x_i \notin S_X \end{cases}$$



2. Passare dalla funzione di massa f_X a quella di ripartizione F_X:

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \sum_{t \leq x} f_X(t)$$

3. Passare dalla funzione di ripartizione F_X a quella di densità f_X :

$$f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx}$$

in altre parole la funzione di densità è la derivata prima della funzione di ripartizione.

4. Passare dalla funzione di densità f_X a quella di ripartizione F_X :

$$F_X(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

3.9. Indici caratteristici di una variabile casuale

Quando le cose diventano troppo complicate, qualche volta ha un senso fermarsi e chiedersi: "Ho posto la domanda giusta?"
Enrico Bombieri

In alcune situazioni, può essere utile dare una rappresentazione sintetica della distribuzione di una variabile casuale attraverso degli indicatori caratteristici piuttosto che dare una sua rappresentazione completa, mediante la funzione di ripartizione, di massa o di densità di probabilità.

Spesso è necessaria una descrizione più sintetica della variabile casuale, che tramite pochi valori, ci permette di cogliere le caratteristiche essenziali della distribuzione, quali:

- la **posizione**, cioè il centro della distribuzione di probabilità;
- la **variabilità**, cioè la dispersione della distribuzione di probabilità attorno ad un centro;
- la **forma** della distribuzione di probabilità, considerando la simmetria e la curtosi (pesantezza delle code).

Esistono diversi modi per costruire questi indicatori.

Valore atteso

Il **valore atteso,** che viene chiamato anche **media** o **speranza matematica** della distribuzione di una variabile casuale, è un indicatore di posizione.

Il valore atteso di una variabile casuale rappresenta il valore previsto che si potrà ottenere in un gran numero di prove. Con la locuzione "gran numero di prove" s'intende un numero sufficientemente grande di prove così che sia possibile prevedere, mediante la probabilità, le frequenze relative dei vari eventi.

Il valore atteso (o speranza matematica) di una variabile casuale discreta, se la distribuzione è finita, è un numero reale dato dalla somma dei prodotti di ogni valore della variabile casuale per la rispettiva probabilità, cioè:

$$E(X)= x_1 p_1 + x_2p_2+\ldots x_np_n = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$$

Il valore atteso è dunque una somma pesata dei valori che la variabile casuale assume con pesi le probabilità associate. *Può quindi essere negativo o positivo.*

- Se la variabile casuale discreta, assuma un'infinità numerabile di valori: $x_1, x_2,\ldots ,x_{n,\ldots}$

  $$E(X)= \sum_{i=1}^{\infty} x_i P(X = x_i)$$

  con la condizione che, nel caso in cui i valori $x_1, x_2,\ldots ,x_{n,\ldots}$ non siano tutti dello stesso segno (tranne al più un numero finito di essi), la serie $\sum_{i=1}^{\infty} x_i \; P(X = x_i)$ sia assolutamente convergente.

- Se la variabile casuale è continua, abbiamo :

  $$E(X)= \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\, dx$$

  con la condizione che, nel caso in cui i valori $x_1, x_2,\ldots ,x_{n,\ldots}$ non siano tutti dello stesso segno (tranne al più un numero finito di essi), è necessario che: $\int_{-\infty}^{\infty} |x| f(x) dx < +\infty$.

  Dove f è la funzione di densità della variabile casuale continua.

Il simbolo E proviene dall'inglese *Expectation* o *Expected value* e **usualmente** si pone: $E(X) = \mu$.

Proprietà del valore atteso:

1. Se a è una costante reale, allora:

$$E(aX)=a\ E(X);\ E((aX)=a\ E(X)$$

2. Se a è una costante reale, allora:

$$E(X+a)=E(X)+a, \text{ in particolare } E(a)=a$$

3. Se X e Y sono due variabili casuali, si ha una nuova variabile casuale Z=X+Y i cui valori sono dati dalla somma di tutti i possibili valori x_i di X con tutti i possibili valori y_k, di Y, con probabilità $P(X=x_i, Y=y_k)= p_{ik}$.

$$E(Z)= E(X+Y)=E(X) + E(Y)$$

Questa proprietà si può generalizzare alla somma di *n* variabili.

4. Se a e b sono costanti reale, allora:

$$E(aX+bY)=aE(X) + bE(Y)$$

Questa proprietà si può estendere anche al caso di combinazioni lineari di piu di due variabili casuali.

5. Se a è una costante reale, allora:

$$E((aX)^2) = a^2E(X^2)$$

Esempio 1:

Esperimento: lancio di 2 monete, con la variabile casuale: X = numero totale degli esiti "testa". Abbiamo visto nella paragrafo della funzione di massa, che:

Valori di X x	Funzione di massa di probabilità $P(X = x)$
0	0,25
1	0,5
2	0,25
	$\sum p_i = 1$

Il valore atteso di X risulta essere:

$$E(X) = \sum x_i p_i = 0 \cdot 0,25 + 1 \cdot 0,5 + 2 \cdot 0,25 = 1$$

Esempio 2:

Per la variabile casuale X = "somma dei due punteggi nel lancio di due dadi", abbiamo:

X	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
f_X	1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36	5/36	4/36	3/36	2/36	1/36

$$E(X) = 2 \cdot \frac{1}{36} + 3 \cdot \frac{2}{36} + 4 \cdot \frac{3}{36} + 5 \cdot \frac{4}{36} + 6 \cdot \frac{5}{36} + 7 \cdot \frac{6}{36}$$
$$+8 \cdot \frac{5}{36} + 9 \cdot \frac{4}{36} + 10 \cdot \frac{3}{36} + 11 \cdot \frac{2}{36} + 12 \cdot \frac{1}{36} = 7$$

Esempio 3:

Se X è la variabile casuale continua uniforme su [0,a] si ha:

$$\text{E(X)=} \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\, dx = \int_0^a x \cdot \frac{1}{a}\, dx = \frac{a}{2}$$

Esempio 4:

In una indagine, una compagnia telefonica si è stabilito che la durata (in un ora) dei collegamenti ad Internet dei propri utenti è distribuita come:

$$f(x) = 6\, x\, (1 - x) \text{ per } 0 \le x \le 1$$

La media di questa distribuzione è

$$E(X) = \int_0^1 x \cdot f(x) dx = \int_0^1 6x^2 \cdot (1 - x) dx$$
$$= 6 \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \right]_0^1 = 6(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}) = 0,5$$

Il valore atteso è sempre, un indicatore di posizione della distribuzione, interpretabile come fulcro della stessa. Il valore atteso evidenzia solamente la dimensione del fenomeno descritto dalla variabile casuale, ma non fornisce alcuna informazione sulla sua variabilità, che si sa è una caratteristica di grande importanza. Una misura della variabilità della variabile casuale è la sua varianza.

Varianza

Dopo il valore atteso, il parametro più usato per caratterizzare le distribuzioni di probabilità delle variabili casuali è la varianza, la quale indica quanto sono "dispersi" i valori della variabile aleatoria relativamente al suo valore medio. Data una variabile casuale X qualsiasi sia E(X) il suo valore atteso. Consideriamo la variabile casuale X–E(X), i cui valori sono le "distanze" tra i valori di X e il valore atteso E(X). Sostituire ad una variabile X la variabile X - E(X) equivale ad una traslazione di sistema di riferimento che porta il valore atteso nell'origine degli assi.

Osservazione:

La variabile casuale X - E(X) si chiama **scarto,** oppure **deviazione** oppure **variabile casuale centrata**. Si può dimostrare facilmente che il valore atteso della variabile scarto: X- E(X) vale zero.

La differenza fra un qualsiasi valore della variabile casuale X e il suo valore atteso può essere positiva o negativa, o nulla.

Per ottenere una misura della dispersione dei valori di X occorre rendere sempre positivi i valori di X – E(X), ad esempio considerando la variabile casuale : $(X - E(X))^2$.

$V(X) := E((X - E(X))^2)$

oppure:

$V(X) := E(X^2) - (E(X))^2$

usualmente si pone: $V(X) = \sigma^2$

- Se la variabile casuale X discreta, ha la distribuzione è finita, la varianza è:

$$\sigma^2 = V(X) = \sum_{i-1}^{n}(x_i - E(X))^2 \cdot p_i = \sum_{i-1}^{n}(x_i - \mu)^2 \cdot p_i$$

- Se la variabile casuale discreta X, assuma un'infinità numerabile di valori: $x_1, x_2,...,x_n,...$

$$\sigma^2 = V(X) = \sum_{i=1}^{\infty}(x_i - E(X))^2 \cdot P(X = x_i) = \sum_{i=1}^{\infty}(x_i - \mu)^2 \cdot P(X = x_i)$$

- Se la variabile casuale X è continua, abbiamo :

$$\sigma^2 = V(X) = \int_{-\infty}^{\infty}(x - E(X))^2 \cdot f(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty}(x - \mu)^2 \cdot f(x)dx$$

La varianza è uguale a zero quando tutti i valori della variabile sono uguali e quindi non c'è variabilità nella distribuzione; in ogni caso è positiva e misura il grado di variabilità di una distribuzione.

Tanto maggiore è la varianza tanto più i valori sono dispersi. Tanto minore è la varianza tanto più i valori di X sono concentrati attorno al valor medio.

La varianza viene usata nella teoria delle decisioni come misura della rischiosità di una distribuzione.

Se due distribuzioni hanno lo stesso valore atteso e varianza diversa, la distribuzione con varianza maggiore è la più rischiosa (lo scarto è maggiore).

Esempio 5:

A e B giocano al lancio dei dadi e puntano entrambi sul pari. Ma A è avverso al rischio e punta solo 1 €, mentre B è "propenso al rischio" e punta 1000 €. La vincita di A è una variabile aleatoria W discreta che assume solo i due valori −1 e 1 con probabilità 1/2, e quella di B è una variabile aleatoria Z che assume i due valori −1000 e 1000 con probabilità 1/2. Sia per A che per B il gioco è "equo", cioè entrambi vincono mediamente 0 euro, cioè E(W) = E(Z) = 0 ma W, Z sono molto diverse fra loro. La differenza fondamentale fra W e Z è che mentre W assume valori vicini al proprio valore atteso, Z assume valori piuttosto lontani da E(Z).

$$\mathrm{V(W)} = \mathrm{E((W - E(W))^2)} = \mathrm{E(W^2)} = \sum_{\mathrm{k}\in\{-1,1\}} k^2 \cdot f_W(k)$$
$$= (-1)^2 \cdot \frac{1}{2} + 1^2 \cdot \frac{1}{2} = 1$$

$$\mathrm{V(Z)} = \mathrm{E((Z - E(Z))^2)} = \mathrm{E(Z^2)} = \sum_{\mathrm{k}\in\{-1000,1000\}} k^2 \cdot f_Z(k)$$
$$= (-1000)^2 \cdot \frac{1}{2} + 1000^2 \cdot \frac{1}{2} = 1.000.000$$

Come già anticipato, V(Z) è molto più grande di V(W) ad indicare che Z si discosta da E(Z) molto più di quanto non faccia W da E(W).

Proprietà della varianza:

1. Se X è una variabile casuale costante e pari a c, non c'è dispersione e V(X) = 0. Viceversa, se V(X) = 0, allora X è costante. La varianza non è mai negativa: V(X) ≥ 0.

2. Se X ammette varianza ed a è una costante reale, allora:

$$V(aX) = a^2 V(X)$$

3. Se X ammette varianza ed a è una costante reale, allora:

$$V(X + a) = V(X)$$

Scarto quadratico medio (o deviazione standard)

Essendo la varianza una quantità di secondo grado rispetto ai valori di X, si usa talvolta, la variabile che è la radice quadrata della varianza: **scarto quadratico medio** o **deviazione standard** che ha la peculiarità di essere qualificabile nella stessa unità di misura della variabile casuale X di cui si sta studiando la distribuzione.

$$\sigma := \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{V(X)}$$

Osservazione:

Nella teoria delle misure, dove una variabile aleatoria X è una misura di un parametro fisico, lo scarto quadratico medio σ è detto "l'incertezza della misura" e il valore atteso μ : "valore di misura".

Esempio 6:

Esperimento: lancio di 2 monete, con la variabile casuale: X = numero totale degli esiti "testa". Abbiamo visto nel paragrafo della funzione di massa, che:

Valori di X x	Funzione di massa di probabilità P(X = x)
0	0,25
1	0,5
2	0,25
	$\sum p_i = 1$

Nell'esempio 1 abbiamo calcolato il valore atteso: E(X)=1 e dunque la varianza sarà:

$$\mathrm{V(X)} = (0-1)^2 \cdot 0,25 + (1-1)^2 \cdot 0,5 + (2-1)^2 \cdot 0,25 = 0,5$$

Lo scarto quadratico medio, sarà:

$$\sigma = \sqrt{\mathrm{V(X)}} = \sqrt{0,5} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{10}} = \frac{2,23}{3,16} = 0,70$$

Esempio 7:

Per la variabile casuale X= "somma dei due punteggi nel lancio di due dadi", abbiamo:

X	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
f_X	1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36	5/36	4/36	3/36	2/36	1/36

Dall'esempio 2, di questo paragrafo, risulta che E(X) = 7 e dunque abbiamo la varianza:

$$V(X) = \sum_x [x - E(X)]^2 \cdot P(X = x) = (2-7)^2 \cdot \frac{1}{36} +$$

$$+(3-7)^2 \cdot \frac{2}{36} + ... + (12-7)^2 \cdot \frac{1}{36} = 5,83$$

Lo scarto quadratico medio, sarà:

$$\sigma = \sqrt{\mathrm{V(X)}} = \sqrt{5,83} = 2,41$$

Esempio 8:

Se la variabile casuale X è uniforme su {1,...,n}, cioè $f_X = \frac{1}{n}$ allora:

$$\mathrm{E(X)} = \frac{1 + ... + \mathrm{n}}{\mathrm{n}} = \frac{\mathrm{n(n+1)}}{2\mathrm{n}} = \frac{\mathrm{n}+1}{2}$$

Per calcolare la varianza, abbiamo:

$$E(X^2) = \sum_{k-1}^{n} \frac{k^2}{n} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n} = \frac{(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$V(X) = \frac{(n+1)(2n+1)}{6} - \left(\frac{n+1}{2}\right)^2 = \frac{n^2-1}{12}$$

Esempio 9:

calcolare valore atteso μ e la varianza σ^2 per la seguente distribuzione:

x_i	f_i	$x_i f_i$	$x_i - \mu$	$(x_i - \mu)^2$	$f_i(x_i - \mu)^2$
2	0,05	0,1	-2,2	4,84	0,242
3	0,2	0,6	-1,2	1,44	0,288
4	0,35	1,4	-0,2	0,04	0,014
5	0,3	1,5	0,8	0,64	0,192
6	0,1	0,6	1,8	3,24	0,324
		μ=4,2			σ^2=1,06

Esempio 10:

Sia la variabile casuale X con la funzione di densità f_X:

$$f_X(x) := \begin{cases} x^2 + \frac{1}{6} & per\ x \in (-1,1) \\ 0 & per\ |x| \geq 1 \end{cases}$$

Si calcolino il valore atteso, la varianza, la funzione di ripartizione di X e la probabilità P(X ≥ 0).

Abbiamo:

$$E(X) = \int_{-1}^{1} x f_X(x) dx = \int_{-1}^{1} x(x^2 + \frac{1}{6}) dx$$
$$= \left[\frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{12}\right]_{-1}^{1} = 0$$

$$V(X) = \int_{-1}^{1} x^2 f_X(x)dx = \int_{-1}^{1} x^2(x^2 + \frac{1}{6})dx$$
$$= \left[\frac{x^5}{5} + \frac{x^3}{18}\right]_{-1}^{1} = \frac{2}{5} + \frac{1}{9} = \frac{23}{45} = 0,511$$

Per calcolare la funzione di ripartizione F_X, per t $\in (-1,1)$:

$$P(X \leq t) = \int_{-1}^{t} (x^2 + \frac{1}{6})dx = \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x}{6}\right]_{-1}^{t} = \frac{t^3}{3} + \frac{t}{6} + \frac{1}{2}$$

Quindi:

$$F_X(t) = \begin{cases} 0 & per \quad -\infty < t \leq -1 \\ \frac{t^3}{3} + \frac{t}{6} + \frac{1}{2} & per \quad -1 < t < 1 \\ 1 & per \quad 1 \leq x < +\infty \end{cases}$$

Per calcolare la probabilità $P(X \geq 0)$:

$$P(X \geq 0) = 1 - P(X < 0) = 1 - F(0) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

oppure:

$$P(X \geq 0) = \int_{0}^{1} (x^2 + \frac{1}{6})dx = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$$

Senza fare i calcoli, si poteva ottenere lo stesso risultato, notando la simmetria della funzione di densità rispetto a 0.

3.10. Test di autovalutazione

Domanda 1:

In una classe ci sono 16 femmine e 14 maschi, per partecipare ad un torneo di scacchi, si deve formare un equipe composta da 7 studenti, tale che il numero dei maschi deve essere tra 3 e 5. Calcolare il numero di prove favorevoli a questo evento.

☐ $C_{16,4}\cdot C_{14,3}+C_{16,3}\cdot C_{14,4}+C_{16,2}\cdot C_{14,5}$

☐ $C_{14,3}\cdot C_{14,4}\cdot C_{14,5}$

☐ $P_{30,7}$

Domanda 2:

Nella classe A di un istituto scolastico ci sono 17 femmine e 16 maschi e nella classe B ci sono 17 femmine e 10 maschi. Per avere un numero pari di alunni si impone il trasferimento di 3 alunni dalla classe A alla classe B. Calcolare la probabilità della realizzazione del evento in seguito al quale, dopo il trasferimento, nella classe B ci devono essere 40% maschi.

☐ 3/30 ☐ 3/33 ☐ ***255/682***

Soluzione: Annotiamo con $x \in \{1;2;3\}$ il numero di maschi che dovranno essere trasferiti. Dal ipotesi risulta : $(10 + x)/30 = 40/100$ e dunque $x = 2$. Allora si devono trasferire 2 maschi ed una femmina, il numero dei casi favorevoli è: $C_{16,2} \cdot 17$ e il numero dei casi possibili $C_{33,3}$

$P = (C_{16,2} \cdot 17) / C_{33,3} = 255/682 = 0,37$

Domanda 3:

Una squadra di basket ha dieci giocatori. Quale espressione rappresenta il numero di modi in cui si può formare una squadra di cinque giocatori sapendo che il capitano della squadra, deve essere in ogni squadra?

☐ $C_{10,\ 5}$ ☐ ***$C_{9,4}$*** ☐ $P_{9,4}$

Domanda 4:

Si deve costituire una commissione formata da cinque membri scelti a caso tra nove studenti del primo anno e sette studenti del secondo anno. Quale espressione rappresenta il numero di modi in cui può essere scelta la commissione, sapendo che nella commissione ci devono essere tre studenti del primo anno e due studenti del secondo anno ?

☐ $C_{9,3} + C_{7,2}$ ☐ $C_{16,\ 3} \cdot C_{16,\ 2}$ ☐ ***$C_{9,3} \bullet C_{7,\ 2}$***

Domanda 5:

Qual è la probabilità di ottenere al massimo il valore 10 nella somma dei punteggi nel lancio di due dadi?

☐ 3/36 ☐ ***33/36*** ☐ [3] 10/36

R: $P(X \leq 10) = 1 - P(X = 11) - P(X = 12) = 1 - 2/36 - 1/36 = 33/36$ oppure $P(X \leq 10) = F_X(10) = 33/36$

Domanda 6:

Una famiglia ha tre figli. Qual è la probabilità che al massimo due sono maschi? La probabilità che un figlio sia maschio (femmina) è $\frac{1}{2}$

☐ 0,375 ☐ *0,875* ☐ 0,125

Soluzione:

possiamo avere 0 maschi con la probabilità: $\binom{3}{0}\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(\frac{1}{2}\right)^3 = 0{,}125$

possiamo avere 1 maschio con la probabilità: $\binom{3}{1}\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^2 = 0{,}375$

possiamo avere 2 maschi con la probabilità: $\binom{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^1 = 0{,}375$

$P(X \leq 2) = 0{,}125 + 0{,}375 + 0{,}375 = 0{,}875 \approx 88\ \%$

Domanda 7:

Dopo aver studiato geneticamente la storia familiare di una coppia, un medico ha determinato che la probabilità che un bambino abbia una malattia genetica per la malattia X è di 1 su 4. Se la coppia ha tre figli, qual è la probabilità che esattamente due bambini hanno il difetto genetico per il gene della malattia X?

☐ ***0,14*** ☐ 0,66 ☐ 1/12

Soluzione:

$\binom{3}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^2\left(\frac{3}{4}\right)^1 = \frac{9}{64} = 0{,}140625 \approx 14\ \%$

Domanda 8

Riempiendo a caso una schedina di totocalcio, qual è la probabilità di fare almeno 12?

☐ 0,12 ☐ ***0,00008*** ☐ 0,008

Soluzione:

Su una schedina di totocalcio, sono elencate 14 partite e ogni partita può avere tre risultati: 1,2 o X. La probabilità di azzeccare una singola partita è uguale ad $\frac{1}{3}$. Inoltre l'aver azzeccato o meno il risultato di una certa partita non influenza la capacità di azzeccare le altre. Sia Y il numero di partite azzeccate. Abbiamo:

$$P(Y \geq 12) = \sum_{k=12}^{14} f_Y(k) = \sum_{k=12}^{14} \binom{14}{k}\left(\frac{1}{3}\right)^k\left(\frac{2}{3}\right)^{14-k} = \frac{393}{4782969} = 0{,}00008$$

Domanda 9:

Si consideri la seguente famiglia di funzioni:

$$f_c(x) := \begin{cases} c(x^2 + \frac{c}{6}) & per\ x \in (-1,1) \\ 0 & per\ |x|\ \geq\ 1 \end{cases}$$

determinare l'unico valore della costante reale c, affinché f_c rappresenti una funzione di densità di probabilità.

Soluzione:

Una funzione di densità di probabilità f_c deve soddisfare le due condizioni:

$$f_c(x) \geq 0$$

e

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_c(x)\,dx = 1$$

Troviamo il c per cui è soddisfatta la seconda proprietà:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_c(x)\,dx = \int_{-1}^{1} c(x^2 + \frac{c}{6})\,dx$$

$$= c\left[\frac{x^3}{3} + \frac{cx}{6}\right]_{1}^{1} = \frac{2c}{3} + \frac{c^3}{3}$$

$$\frac{2c}{3} + \frac{c^3}{3} = 1 \quad ; \quad c^2 + 2c - 3 = 0\,; c = 1\ e\ c = \ -3.$$

Per c = - 3 abbiamo f_c = -3/2 < 0 e dunque non soddisfa la condizione $f_c(x) \geq 0$. Dobbiamo accettare solo la soluzione c = 1, la funzione di densità sarà:

$$f_X(x) := \begin{cases} x^2 + \frac{1}{6} & per\ x \in (-1,1) \\ 0 & per\ |x|\ \geq\ 1 \end{cases}$$

☐ c = - 3 ☐ ***c = 1*** ☐ c = -1

Domanda 10:

La varianza, che valori può avere ?

☐ < 0 ☐ ≥ 0 ☐ > 0

Osservazione: Le risposte corrette sono in corsivo.

• Bibliografia e sitografia

A. Alberici, C. Catarsi, V. Colapietro, I. Loiodice, *Adulti e università. Sfide ed innovazioni nella formazione universitaria e continua*, FrancoAngeli, Milano, 2007;

A. Alberici (a cura di), *Adulti e università. Accogliere e orientare nei nuovi Corsi di Laurea*. Rapporto di ricerca Prin 2004, Anicia, Roma, 2007.

Agnoli Paolo, Piccolo Franceso, *Probabilità e scelte razionali : una introduzione alla scienza delle decisioni* Armando Editore, Roma, 2008

ANEE (2005), *E-learning in Italia: una strategia per l'innovazione*, Apogeo, Milano.

Atto di indirizzo MIUR
http://www.universita.cisl.it/carlo/documenti/MIURatto-di-indirizzo-3-4-2012.pdf

Barletti Luigi - *Applicazioni di Matematiche e Statistica*
http://web.math.unifi.it/users/ricci/TAIS/BarlettiFronteRetro.pdf

Borra Simone, Agostino Di Ciaccio - *Statistica 2/ed Metodologie per le scienze economiche e sociali* , McGraw-Hill Education (Italy) srl, giugno 2008

Bruno Betrò - "*La probabilità, nella vita quotidiana*" articolo pubblicato alla pag. 29 sul n. 53 di "*Lettera Matematica Pristem*"- Centro PRISTEM dell'Università "Bocconi" di Milano

Chiandotto B., Cipollini F. - *Metodi statistici per le decisioni d'impresa* (note didattiche), Firenze, 2003, cap. 2

Cicchitelli G. e Montanari G. E., *Introduzione alla statistica*, Morlacchi Editore, Perugia, 2003

Cicchitelli G., *Probabilità e statistica*, Maggioli editore, Rimini, 2001

Comunicazione della Commissione al Consiglio e al Parlamento Europeo del 2001 "*Piano d'azione eLearning - Pensare all'istruzione di domani*".
http://europa.eu/rapid/press-release_IP-01-446_it.htm?locale=en

Direttiva generale 3 maggio 2012, Prot.n. 8164
http://www.edscuola.eu/wordpress/?p=12633

Eletti V., *Che cos'è l'e-learning*, Carocci, Roma, 2003.

Epifani,I. *Esercizi di Calcolo delle probabilità*, (2009)
http://www1.mate.polimi.it/~ileepi/esercizi/0809CP/

Epifani,I. *Appunti per il corso di Calcolo delle probabilità*, (2005) Estratto dal Documento MIUR 03.04.2012, prot. n. 5851 *Atto di indirizzo concernente l'individuazione delle priorità politiche del MIUR per l'anno 2012.* http://www.notiziedellascuola.it/legislazione-e-dottrina/indice-cronologico/2012/aprile/DOCUMENTO_MIUR_20120403_prot5851

Haim G. Ginott, *Bambini e maestri*, Garzantí 1973

Il giornale dell'E-learning
http://www.wbt.it/index.php?pagina=395#nota5

ISFOL, *Capitale umano on line. Le potenzialità dell'e-learning nei processi formativi e lavorativi*, Franco Angeli, 2003

Marconato G., Litturi P., *Conversazione con David Jonassen*, in Sistemi & Impresa, n. 9, novembre 2005, pp. 15-20 http://static.scribd.com/docs/5ujjf9hxdo2g3.pdf

Siviglia Paolo: *Introduzione al calcolo delle probabilità*
www.paolosiviglia.it/downloader.php?ID=3481

Trentin G., *E-learning formale ed informale*, Aprile 2007.

Trentin G., *Dalla formazione a distanza all'apprendimento in rete*, Franco Angeli, Milano, 2001

Wenger E., *Comunità di pratica. Apprendimento, significato e identità*, Raffaello Cortina, 2006

---

http://digilander.libero.it/rosarb/Inferenza.pdf
http://www.ds.unifi.it/rampi/statistica_sociale2006_07.htm#_Materiale_didattico_1
http://elearningeuropa.info/
http://www.imparando.net/elearning/
http://internettime.com/Learning/The%20Other%2080%25.htm
http://www.loescher.it/librionline/risorse_circolomatematico/download/invalsi/3153_prova_invalsi_001_029.pdf
http://macosa.dima.unige.it/ssis/me/5_5.htm
http://makutolandia.altervista.org/statistica.htm
http://www.help-pc.it/
http://www.web-facile.org/0_sito/creasito/creasito.htm
http://www1.mate.polimi.it/~zucca/ita/didattica/2003-04/zuczamb/
http://www.sanavia.it/nvuitalia/
http://www.sanavia.it/nvuitalia/download.html
http://web.ticino.com/gfwp/scuola/sspss_3_calcolo_combinatorio.pdf
http://www.youmath.it/lezioni/lezioni-da-categorizzare/327-combinatoria-permutazioni.html
www.moodle.org
www.wikipedia.org

In realtà un lavoro simile non termina mai.
Lo si deve dichiarare concluso quando,
a seconda del tempo e delle circostanze,
si è fatto il possibile.
Johann Wolfgang von Goethe
Italienische Reise (1817)