

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI
Corso di Laurea in Matematica

**ORIGINI E SVILUPPI DEL CALCOLO
DEGLI INTEGRALI
E DELLE LORO APPROSSIMAZIONI**

Tesi di Laurea
in
Analisi Matematica

Relatore:
Chiar.mo Prof.
Paolo Negrini

Presentata da:
Sara Miccichè

Correlatore:
Chiar.ma Prof.ssa
Elena Loli Piccolomini

Sessione II
Anno Accademico 2011-2012

“L’immaginazione è più importante della conoscenza”

Albert Einstein (1879-1955)

Introduzione

La presente tesi descrive tutto il percorso evolutivo dell'integrale, dai lavori di Archimede nei quali è riconducibile una prima idea che in seguito si svilupperà nel calcolo integrale, fino alle approssimazioni numeriche, attualmente realizzabili più facilmente con l'impiego dei calcolatori.

Si comincia, nel primo capitolo, col raccontare dei primi segni del concetto di integrale, risalenti all'epoca ellenistica (336 a.C-30 a.C.). Primo fra tutti è Archimede da Siracusa, in cui il concetto di integrale traspare sottoforma di calcolo di aree e volumi approssimati mediante la somma di un grande numero di elementi via via più piccoli: l'esempio applicativo più significativo è costituito dal calcolo dell'*area di un segmento parabolico*. Il secondo personaggio a contribuire in maniera consistente è Bonaventura Cavalieri (1598-1647), famoso per il suo *metodo degli indivisibili*, che può essere visto come la ripresa inconsapevole del metodo meccanico usato euristicamente da Archimede, in cui troviamo la composizione del continuo mediante i suoi indivisibili (come per esempio una retta composta dai suoi punti).

Il calcolo integrale prende pienamente forma in epoca relativamente recente, ad opera di Leibniz e Newton alla fine del XVII secolo, e viene sviluppato definitivamente da G. B. Riemann e H. Lebesgue. La teoria di integrazione secondo Riemann si basa sui concetti di *somma superiore* e *somma inferiore* della funzione integranda in un determinato intervallo e, come punti di forza, ha il fatto che è una teoria semplice, elementare, e allo stesso tempo efficace. La teoria dell'integrazione di Riemann è infatti quella tuttora utilizzata e insegnata nelle scuole secondarie e nei corsi universitari di base. Possiamo

invece vedere l'integrale di Lebesgue come generalizzazione dell'integrale di Riemann, in quanto si riesce a definire l'integrale per una più ampia classe di funzioni e vi sono minori limitazioni per il passaggio al limite sotto il segno di integrale, proprietà poco flessibile invece per l'integrale di Riemann. La teoria di Lebesgue si basa su una *teoria della misura*, appropriatamente fondata dallo stesso Lebesgue.

Il primo capitolo si conclude con il teorema di Lebesgue-Vitali, che caratterizza in modo elegante le funzioni integrabili secondo Riemann in termini della misura di Lebesgue.

Nel secondo capitolo si affronta il tema del calcolo approssimato degli integrali. Si tratta di tecniche molto importanti per le applicazioni, in quanto non è sempre possibile esprimere una primitiva di una data funzione attraverso le funzioni elementari, e a volte, quando pure ciò è possibile, la primitiva ha un'espressione assai complicata. I diversi metodi hanno in comune una stessa idea: interpolare la funzione integranda f con un polinomio p di grado assegnato, che coincide con f in punti stabiliti (detti *nodi*) e approssimare $\int_a^b f$ con $\int_a^b p$. La precisione dell'approssimazione dipende profondamente dalle proprietà di f e dalla scelta dei nodi; esponiamo diversi metodi che si propongono di perfezionare il risultato, tenendo sotto controllo la mole di calcolo necessaria.

Infine, soprattutto per quanto riguarda le approssimazioni degli integrali multipli, abbiamo visto il *metodo Montecarlo*, metodo nato durante la seconda guerra mondiale come codice per indicare il lavoro segreto condotto a Los Alamos, laboratorio per le ricerche e la produzione di armi nucleari. Esso consiste nel calcolare un'approssimazione di un integrale mediante simulazioni basate sull'utilizzo di numeri casuali (simulazioni stocastiche). Ci si è maggiormente concentrati su due particolari tipologie di questo metodo, dette *metodo Monte Carlo hit or miss* e *il metodo Monte Carlo sample mean*, solitamente più efficiente del precedente.

Nel terzo capitolo infine si passa dallo studio puramente analitico di questi metodi al loro studio all'interno dell'analisi numerica, che ha l'obiettivo di

sviluppare metodi per la risoluzione “pratica” del calcolo di integrali mediante l’applicazione di opportuni algoritmi. Vengono proposti solo alcuni esempi di algoritmi in riferimento ai metodi visti nel secondo capitolo, quali l’*algoritmo di Simpson*, l’*algoritmo di Simpson adattivo*, l’*algoritmo di Romberg* e l’*algoritmo di Montecarlo ‘hit or miss’*. Tutti questi algoritmi sono realizzati con Matlab, uno dei più conosciuti ambienti per il calcolo numerico e l’analisi statistica.

Per la realizzazione di questo lavoro si è fatto riferimento a più testi, indicati nella bibliografia, al quale si rimanda il lettore per ogni ulteriore approfondimento.

Indice

Introduzione	i
1 La nascita degli integrali	1
1.1 Il periodo Ellenistico	1
1.1.1 Archimede da Siracusa	3
1.1.2 Archimede e il calcolo integrale	5
1.2 Il periodo della rivoluzione scientifica	12
1.2.1 Bonaventura Cavalieri	13
1.2.2 Il metodo degli indivisibili	15
1.3 L'età contemporanea	20
1.3.1 Georg Friedrich Bernhard Riemann	22
1.3.2 L'integrale di Riemann	23
1.3.3 Henri Lebesgue	30
1.3.4 L'integrale di Lebesgue	31
1.3.5 Il teorema di Lebesgue-Vitali	37
2 Integrazione numerica	43
2.1 Richiami sugli integrali e loro calcolo	44
2.2 Metodi di approssimazione integrale	46
2.2.1 Formule di Newton-Cotes	47
2.2.2 Formule di Gauss	58
2.2.3 Formule adattive	65
2.2.4 Formule di estrapolazione	69
2.2.5 Difficoltà nell'integrazione numerica	72

2.3	Approssimazione di integrali multipli	74
2.3.1	Metodo Monte Carlo	76
3	Approssimazione integrale in analisi numerica	87
3.1	L'analisi numerica	87
3.2	Alcuni esempi di algoritmi	92
3.2.1	Algoritmo di Simpson	92
3.2.2	Algoritmo di Simpson adattivo	95
3.2.3	Algoritmo di Romberg	97
3.2.4	Algoritmo di Monte Carlo	99
	Bibliografia	103

Capitolo 1

La nascita degli integrali

L'analisi infinitesimale è una delle conquiste più straordinarie della storia della scienza: è il punto di partenza nel tentativo di comprensione della natura attraverso i numeri. Il calcolo infinitesimale è quello che ha permesso a Isaac Newton di formulare la sua “Legge di Gravitazione Universale” e a Charles Augustin de Coulomb di scoprire la forza elettrostatica e le sue analogie con la gravitazione. Fondamentale il contributo del calcolo infinitesimale negli studi di Albert Einstein, che utilizza la “matematica” di Riemann, studioso a cui si conferisce il completamento e l'organizzazione del calcolo integrale.

Questo studio ha però origine in epoche lontane, risalenti all'Antica Grecia, nel momento di maggiore fioritura filosofica in cui ci si interrogava sulla complessità della natura per cercare di capirne i fondamenti.

1.1 Il periodo Ellenistico

Per arrivare a colui che per primo ha studiato i metodi che possiamo ora “tradurre” con i nostri integrali si deve andare molto indietro, fino al periodo ellenistico, periodo storico-culturale che va dall'ascesa al trono di Alessan-

dro Magno nel 336 a.C. all'annessione dell'ultimo regno ellenistico, l'Egitto tolemaico dell'Impero romano, nel 30 a.C. Il suo tratto caratterizzante è la diffusione della civiltà greca nel mondo mediterraneo, eurasiatico e orientale, e la sua fusione con le culture dell'Asia Minore, dell'Asia Centrale, della Siria e della Fenicia, dell'Africa del Nord, della Mesopotamia, dell'Iran e dell'India, e la conseguente nascita di una civiltà, detta appunto ellenistica, che fu modello per altre culture relativamente alla filosofia, all'economia, alla religione, alla scienza e all'arte. Le attività mercantili sono prevalenti rispetto al passato, questo grazie alla migliore conoscenza della geografia, dei metodi di misurazione del tempo e delle tecniche di navigazione; le scienze minori e la matematica applicata trovano forti motivazioni per il loro progresso, si sviluppano le conoscenze relative a luce e suono, e in particolar modo si approfondiscono i campi riguardanti l'ottica, l'idraulica, la statica, l'idrostatica e l'astronomia, aiutate dall'introduzione di piccoli nuovi strumenti tecnologici.

La notevole espansione territoriale favorisce la fioritura di nuovi centri culturali, che però non superano subito il prestigio della città di Atene, fulcro della vita filosofica dell'epoca. Successivamente vi fissarono le sedi le due più grandi scuole ellenistiche, quella epicurea e quella stoica. È così che nascono i centri di Rodi, Pergamo e soprattutto Alessandria: attorno al 290 a.C. Tolomeo Sotero vi costruì un centro, il *Museo*, in cui erano invitati a studiare e ad insegnare i più importanti studiosi provenienti da tutto il mondo, e subito accanto la *Biblioteca*, che raccoglie il sapere dell'epoca, composta di testi originali scritti su papiro, il quale permette una migliore diffusione e conservazione. Per tutti questi motivi tale periodo prende il nome da questa città: viene anche chiamato quindi *periodo alessandrino*.

Tutti gli ambiti culturali subiscono una notevole fioritura: nascono le più importanti dottrine filosofiche dell'epoca, quali lo scetticismo, lo stoicismo e l'epicureismo (dagli insegnamenti di Pirrone di Elide, Zenone di Cizio ed Epicuro), vediamo nascere il *romanzo greco*, ricco di avventure, elementi fantastici e storie d'amore, e contemporaneamente in ambito artistico la scultura

diventa molto più naturalistica, abbandonando in un certo modo gli ideali di bellezza e perfezione fisica caratteristici del periodo classico. Ma è probabilmente alla scienza che spetta il privilegio, nell'ambito della cultura ellenistica, di raggiungere le più alte vette toccate nel mondo antico: nasce la figura dello scienziato di professione, dedito allo studio e alla ricerca. Ed è proprio tra questi ricercatori che troviamo Archimede, matematico con cui nasce il calcolo integrale.

Nonostante la grande potenza intellettuale di questa civiltà, ci saranno alcune tappe fondamentali che segneranno la fine della cultura greca: nel 47 a.C. Cesare brucia la flotta egiziana nel porto di Alessandria e parte della Biblioteca e nel 31 a.C. i romani conquistano l'Egitto; Teodosio nel 392 d.C. distrugge i templi greci e Giustiniano (482-565) chiude tutte le scuole filosofiche; nel 640 Alessandria viene infine distrutta dagli insorti musulmani.

1.1.1 Archimede da Siracusa

Della vita di Archimede purtroppo non sappiamo molto e le notizie che ci sono giunte sono spesso accompagnate da leggende. Certamente Archimede nasce a Siracusa nel 287 a.C. e compie i suoi studi ad Alessandria d'Egitto, molto probabilmente presso la grande scuola euclidea. Gli *Elementi* di Euclide sono una sorta di enciclopedia matematica dell'antichità, in cui si ritrovano teoremi, lemmi, proposizioni e definizioni che rappresentano un quadro completo dei principi della geometria noti a quel tempo.

Ad Alessandria Archimede comincia anche i suoi studi di astronomia e meccanica, materia per cui diventerà famoso. Si narra che proprio sulle sponde del Nilo egli ebbe la geniale idea che gli permise di inventare la famosa vite di Archimede, sistema ancora in uso oggi che permette di portare il livello dell'acqua da un livello più basso a uno più alto, contrastando il naturale moto gravitazionale. Questa è solo la prima di tante invenzioni che ricopre la vita di quello che forse è il primo vero scienziato della storia. Torna poi

a Siracusa, sotto la protezione di Gerone II e poi di Gelone, monarchi della città, riuscendo così a coltivare in piena libertà i suoi studi, dedicandosi alla geometria, alla matematica e soprattutto alla meccanica. Avendo avuto la fisica una grande evoluzione, tale da cambiarle connotazioni in modo rilevante, Archimede può essere considerato il primo fisico in senso moderno: dalla fisica di Aristotele, filosofica e sviluppata qualitativamente, si passa a una matematica inserita nell'ambito della considerazione dei processi della natura, che porta alla formulazioni di leggi che descrivono un particolare fenomeno.

I contributi del siracusano riguardano anche l'ottica, l'idraulica e l'idrostatica, del quale troviamo le sue idee nel suo trattato *Sul galleggiamento dei corpi*.

I testi da lui scritti sono molteplici, ma molti non ci sono pervenuti e quelli che abbiamo non sono sempre integri, anzi spesso abbiamo a disposizione solo pochi frammenti. Ricordiamo tra i più importanti quello che fu probabilmente il suo primo volume, una raccolta di *Elementi di meccanica*, contenente trattati teorici su momenti statici e centri di gravità di alcune figure geometriche piane; l'estensione di quest'ultimo studio a figure solide è argomento del suo libro *Sull'equilibrio dei piani*, mentre riesce a quadrare il segmento parabolico all'interno di *Quadratura della parabola*.

Archimede si era reso conto di aver trovato un nuovo metodo di analisi, ma non credeva che davvero questo avrebbe rivoluzionato il modo di studiare l'intera matematica.

L'età ellenistica sta però volgendo al termine: Gerone II di Siracusa si schiera con i Cartaginesi contro i Romani: esce dalla prima guerra Punic (264-241 a.C.) praticamente indenne, mentre non ebbe scampo dalla seconda (218-201 a.C.). È proprio in una battaglia tra siracusani e romani che Archimede rimane ucciso, nel 212 a.C., talmente concentrato nello studio di una figura geometrica da non accorgersi dell'intrusione di un soldato romano in casa sua. La leggenda dice che si rifiutò di seguirlo, almeno non prima di aver risolto il problema a cui stava lavorando: il soldato adirato lo uccide trafiggendolo

con la sua spada.

1.1.2 Archimede e il calcolo integrale

Archimede è il primo che si occupa di problemi geometrici applicando i suoi studi di meccanica e statica, riuscendo col suo metodo ad anticipare di ben diciotto secoli il calcolo integrale. Fare l'integrale di una funzione in un certo intervallo significa, banalmente, calcolare l'area sottostante il grafico della funzione stessa; ma in antichità, non esistendo il concetto di funzione, i problemi di integrazione erano affrontati da un punto di vista puramente geometrico.

Egli considera le superfici e i volumi come somma di un numero infinito di elementi infinitamente piccoli: per esempio il segmento parabolico è considerato come composto di tutte le corde parallele al suo diametro e la sfera come la somma di tutte le sue sezioni circolari parallele tra loro. Possiamo quindi tradurre queste espressioni utilizzando il simbolo leibniziano, dando a questo simbolo soltanto il significato esteso di sommatoria e di integrale definito:

$$\int_a^b k(x) dx \quad , \quad \int_a^b A(x) dx$$

dove $k(x)$ è l'ordinata corrispondente ad un certo valore x dell'ascissa, $A(x)$ la superficie della sezione determinata nel solido da un piano condotto per un punto di ascissa x e a e b gli estremi di integrazione.

Questo modello si basa sul **metodo di esaustione**, eredità di Eudosso di Cnido, che consiste nella costruzione di una successione di poligoni che approssimano la figura data, perfezionato poi da Archimede con l'introduzione del concetto di momento statico delle figure: è come se volesse pesare le aree e trovare il punto di equilibrio della bilancia utilizzata. Egli osserva che ad una figura curvilinea (o ad un solido limitato da superfici curve) si può sempre inscrivere e circoscrivere una figura poligonale (o un solido prismatico)

tali che la differenza tra la figura inscritta e circoscritta sia minore di una grandezza ε qualunque piccola ad arbitrio.

Sia A l'area o il volume della figura che si deve determinare e B e B' l'area (o il volume) rispettivamente della figura inscritta e di quella circoscritta. Si ha

$$B < A < B'$$

e poichè $B - B' < \varepsilon$ anche le differenze $B' - A$, $A - B$ possono diventare minori di qualunque grandezza assegnata.

Quindi le successioni delle grandezze B' e B *convergono* verso la grandezza A , che può così essere vista come il *limite* comune di quelle due successioni.

Come accennato in precedenza Archimede introduce un nuovo concetto, che accompagna costantemente i suoi studi:

Definizione 1.1. *Il momento statico di una figura piana, o di un solido, rispetto a un punto è il prodotto della superficie, o del volume, per la distanza del suo centro di gravità dal punto.*

Anche se non lo introduce in modo esplicito, nei suoi ragionamenti interviene costantemente una grandezza (area o volume) che, sospesa sopra una leva, fa equilibrio a un'altra grandezza sospesa in un altro punto della leva stessa: questa condizione di equilibrio dà luogo all'uguaglianza di due prodotti, che sono proprio i momenti delle due figure rispetto allo stesso punto (fulcro della leva).

Inoltre egli assume che

Proposizione 1.2. *Il momento di una figura è uguale alla somma dei momenti dei suoi elementi*

proposizione che noi esprimiamo dicendo che il momento di una figura rispetto a un punto è dato da

$$\int_V \delta dv \quad , \quad \int_S \delta dS$$

$KH \simeq CK$.

Archimede considera CH come il giogo di una bilancia, di cui K è il punto di mezzo; prendiamo poi una retta qualunque parallela a ED , che chiamiamo MO . Dal fatto che l'arco contenente CBA è una parabola, CF è una retta ad essa tangente e CD è un'ordinata², si dimostra che $EB = BD$.

Si può partire infatti col definire la *polare di un punto* $P(x_1, y_1)$ rispetto a una conica Γ (che in questo caso è una parabola) come la retta r complanare con Γ e P , la cui equazione si ottiene operando nell'equazione della conica tramite le seguenti sostituzioni:

$$x^2 \rightarrow x_1 x, \quad y^2 \rightarrow y_1 y, \quad x \rightarrow \frac{x_1 + x}{2}, \quad y \rightarrow \frac{y_1 + y}{2}$$

Se il punto P appartiene alla conica, la polare di P coincide con la tangente a Γ passante per il punto stesso, dal quale si può ricavare che

$$P \in Pol(P) \Leftrightarrow P \in \Gamma.$$

Vale inoltre il *teorema della reciprocità delle polari*

Teorema 1.4. *Siano P e Q due punti distinti.*

$$P \in Pol(Q) \Leftrightarrow Q \in Pol(P).$$

In questo caso P e Q si dicono *coniugati*.

Consideriamo per un momento la Figura 1.2. Si ha che t_1 è la polare di K per il punto A e t_2 è la polare di D , anch'essa per il punto A ; si può così affermare, per il teorema di reciprocità, che la polare di A sarà la retta passante sia per D che per K . Tracciando la retta perpendicolare a DK per A essa interseca Γ in V e DK in B . I punti A e B risultano essere coniugati. Si può dimostrare che prendendo A e B coniugati, V vertice della parabola e un punto improprio R , si ha che $RVBA$ è un gruppo armonico (cioè con birapporto $= -1$) con V punto medio di AB .

In corrispondenza con la Figura 1.1 si ha $EB = BD$. Per questo motivo,

²Si intende che CD è la metà della corda parallela alla tangente in B , vertice del segmento parabolico

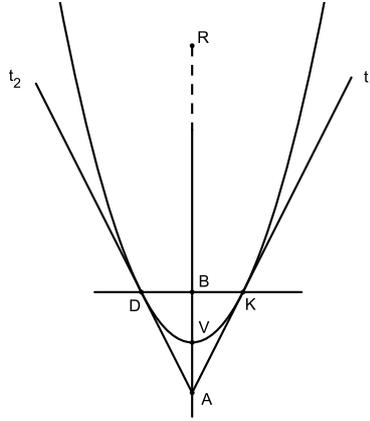


Figura 1.2: t_1 e t_2 rispettivamente polari del punto K e del punto D per A .

unito al fatto che $FA \parallel MO$, vale anche

$$MN = NO, \quad FK = KA.$$

Inoltre, da $CA : AO = MO : OP$ ³ e $CA : AO = CK : KN$, si avrà, essendo anche $CK = KH$,

$$HK : KN = MO : OP.$$

Ora si ha quindi che N è il centro di gravità di MO ($MN = NO$) e se tracciamo un segmento $TG \simeq OP$ in modo che $TH = HG$, allora la retta TG farà equilibrio a MO , poichè HN è divisa dal punto K in parti inversamente proporzionali ai pesi TG e MO , cioè perchè $HK : KN = MO : GT$. Da qui si ricava che K è il centro di gravità della somma di ambedue i pesi.

Analogamente, conducendo nel triangolo FAC quante si vogliono parallele a ED , esse fanno equilibrio ai segmenti intercettati sopra di esse dalla parabola e trasportati nel punto H in modo che il centro di gravità della somma degli uni e delle altre sia K . Possiamo quindi dire che il triangolo CFA è composto da tutte queste rette condotte al suo interno, e allo stesso modo, il segmento

³Dimostrazione che troviamo in *Quadratura della parabola*, ottenuta dalla proprietà fondamentale della parabola: $BD : BQ = AD^2 : PQ^2$, dove Q è il punto in cui la parallela per P ad AC incontra BD .

parabolico ABC è composto dai segmenti rettilinei ottenuti nella parabola allo stesso modo di PO : quindi il trinangolo CFA fa equilibrio rispetto al punto K al segmento ABC trasportato con il suo centro di gravità in H , ottenendo così che il centro di gravità della loro somma è K .

Si tagli ora CK nel punto X tale che $CK = 3KX$ (il punto X è così centro di gravità del triangolo ACF). Possiamo quindi affermare che

$$ACF : (\text{segm.}ABC_{\text{posto in } H}) = HK : XK$$

ed essendo $HK = 3KX$, allora vale

$$FAC = 3(\text{segm.}ABC).$$

Inoltre si dimostra facilmente, poichè si ha $FK = KA$ e $AD = DC$ che

$$FAC = 4ABC^4.$$

Da qui ne consegue che

$$\text{segm.}ABC = \frac{4}{3}ABC.$$

□

Dal punto di vista integrale

Assumiamo ora di avere assi coordinati con l'origine in C , con asse x la retta AC e come asse y il diametro per C . Poniamo

$$PO = y, \quad OM = y'$$

$$AC = 2a, \quad CO = x$$

⁴Avendo $BD \parallel AK$ vale $AD : DC = BC : BK$ e poichè $FK = AK$ e $AD = DC$ si ha $AD : DC = AK : KF = 1$. Per transitività ho $BC = BK$. Quindi i triangoli BCD e CKA sono simili, da cui deriva $AK = 2BD$. Calcolando le due aree si deriva banalmente che $FAC = 4ABC$.

dai quali si ricava immediatamente $AO = 2a - x$. Valendo la relazione $CA : AO = MO : OP$ si ottiene

$$2a : (2a - x) = y' : y$$

e per questo, unito al fatto che i centri di gravità delle y' sono tutti sulla retta CK , che passa per il loro punto di mezzo, si ricava che ogni segmento y del segmento parabolico fa equilibrio al corrispondente segmento y' del triangolo. Si può ora immaginare il segmento parabolico composto di tutti i segmenti y che si possono condurre nel modo detto per i punti di AC , e quindi come somma di tanti elementi $y dx$ e, analogamente, il triangolo ACF composto di altrettanti elementi $y' dx$.

Avremo quindi che il segmento parabolico sospeso con il suo centro di gravità in H ($HK = 2a$) fa equilibrio al triangolo sospeso con il suo centro di gravità in X ($KX = \frac{1}{3} 2a$). Vale allora

$$2a \int_0^{2a} y dx = \frac{1}{3} 2a (ACF)$$

ossia, potendo scrivere ⁵ $y = \frac{1}{2p}(2ax - x^2)$,

$$\frac{1}{2p} \int_0^{2a} (2ax - x^2) dx = \frac{1}{3} (ACF).$$

⁵La relazione $BD : BQ = AD^2 : OQ^2$ corrisponde all'equazione della parabola $y^2 = 2ax$ riferita al diametro e alla tangente nel vertice e la relazione qui indicata corrisponde invece all'equazione della parabola riferita alla corda CA (asse x) e al diametro per C (asse Y), cioè $2py = x(2a - x)$, da qui ricaviamo

$$y = \frac{x(2a - x)}{2p}$$

Ponendo $2a = AC$, riferendoci a questo nuovo sistema di assi, possiamo scrivere la relazione come $2a : (2a - x) = MO : y$. Ma da $y^2 = 2ax$ si ha $BD = \frac{a^2}{2p}$ e, inoltre, per essere $OM : 2BD = CO : CD$ si ha

$$OM = y' = \frac{a}{p} x$$

Se inoltre osserviamo che $y' = \frac{a}{p} x^6$, si ha

$$(ACF) = \frac{a}{p} \int_0^{2a} x \, dx$$

dal quale si può concludere che

$$\int_0^{2a} (2ax - x^2) \, dx = \frac{2}{3} a \int_0^{2a} x \, dx.$$

Risolvendo il secondo integrale si orriene il risultato cercato, cioè che l'area del segmento parabolico è uguale ai quattro terzi dell'area del triangolo che ha la stessa base e la stessa altezza del segmento.

1.2 Il periodo della rivoluzione scientifica

Tra il 1500 e il 1600 si assiste in Europa a una fase di straordinario sviluppo delle scienze. È con *Rivoluzione scientifica* che si fa riferimento a questo periodo, che precisamente si fa iniziare nel 1543, con la pubblicazione del capolavoro di Niccolò Copernico “*Le rivoluzioni degli astri celesti*”, e concludere nel 1687, con la pubblicazione dell'opera di Isaac Newton “*I principi matematici della filosofia naturale*”.

Fino a metà del Cinquecento in tutte le università europee viene insegnata ancora la scienza degli antichi greci, come per esempio Aristotele e Tolomeo, con il suo sistema tolemaico che vede la Terra come centro di un universo chiuso e limitato e i pianeti come corpi luminosi non costituiti da materia. Ma il risveglio culturale dovuto all'Umanesimo e al Rinascimento porta a qualche progresso in alcune scienze pratiche, quali la matematica, l'astronomia e la metallurgia, anche se sopra tutte è l'ambito astronomico che vive uno sviluppo epico, quasi da poter parlare di rivoluzione astronomica. Si passa dalla teoria geocentrica di Tolomeo alla teoria eliocentrica di Copernico, non accettata con facilità, non tanto per un disaccordo a livello matematico, ma soprattutto religioso: viene infatti smontata la visione cosmologica in cui

⁶vedi nota 4

la Chiesa cattolica aveva inquadrato le proprie credenze e in più si afferma il principio di *libera ricerca*, ritenuto dalla Chiesa molto pericoloso. La posizione della religione rispetto alla ricerca scientifica è estrema e ben nota a tutti: le Sacre Scritture sono da interpretare “letteralmente”, non tramite letture allegoriche, e chi decide di seguire altre visioni del mondo subirà forti ripercussioni. Famoso è il caso di Giordano Bruno, seguace copernicano, che nel 1600 viene messo al rogo, dopo un lungo periodo di torture, con le accuse di avere opinioni contrarie e addirittura eretiche sulla fede cattolica, di credere nell’esistenza e nell’eternità di più mondi e di praticare la divinazione e la magia. È con la pubblicazione del “*Dialogo sui massimi sistemi*” di Galileo Galilei nel 1632 che si ha il segnale dell’inizio di uno storico conflitto tra la nuova scienza e la Chiesa di Roma: egli introduce per primo un metodo scientifico rigorosamente sperimentale. È tra uno dei suoi allievi che troviamo Bonaventura Cavalieri, matematico che concentra una parte dei suoi studi su quello che oggi chiamiamo calcolo integrale.

È quindi di fondamentale importanza la nuova idea di scienza che emerge, che passa da una visione rinascimentale legata alla magia a una visione moderna, quale metodologia di conoscenza sistematica e trasmissibile. Il passaggio dall’una all’altra immagine non è rapido, ma il punto di svolta sta proprio nella concezione di un sapere basato su metodi e risultati, che possano essere soprattutto accessibili a tutti.

1.2.1 Bonaventura Cavalieri

Bonaventura Cavalieri nasce a Milano nel 1598 e già da adolescente entra nell’ordine dei Gesuati di San Gerolamo. Nel 1616 viene trasferito nel convento di Pisa, dove segue il corso di matematica di Padre Benedetto Castelli, uno dei primi e più illustri discepoli di Galileo. Rimasto impressionato dalle eccezionali capacità del giovane frate lo presenta a Galileo Galilei, allora Primo Matematico e Filosofo del Granduca di Toscana, che, stimandolo uno dei maggiori matematici del suo tempo, ne appoggia la carriera. Nel periodo successivo Cavalieri approfondisce i suoi studi di geometria e matematica,

sotto la presente guida di Castelli. Dopo un tentativo, fallito, di ottenere nel 1619 una cattedra presso l'Università di Bologna, egli torna a Milano, dove mostra di eccellere negli studi di teologia e prende gli ordini maggiori nel 1622. Sono proprio quelli gli anni in cui getta le basi dei suoi studi geometrici, continuando a confrontarsi con Galileo attraverso un cospicuo scambio epistolare.

Nel 1623 viene nominato priore nella città di Lodi e prova ad ottenere una cattedra e un riconoscimento per i suoi studi; ma deve attendere fino al 1629, anno in cui, grazie all'appoggio di Galileo, riceve la cattedra di matematica presso l'Università di Bologna e, nell'ottobre dello stesso anno, inizia la propria attività di insegnamento. Cavalieri rimane tutto il resto della sua vita a Bologna, dove viene nominato priore, tranne che per un breve periodo nel 1636 in cui si reca ad Arcetri in visita a Galileo.

Seguendo la tradizione dell'epoca, egli comincia a pubblicare i suoi lavori solo dopo aver ottenuto la cattedra: la sua prima opera ad essere stampata è "*Directorium generale Uranometricum*" (1632), collezione di tavole logaritmiche e funzioni trigonometriche. Tra il 1632 e il 1635 pubblica la "*Geometria degli indivisibili*" ("*Geometria indivisibilibus continuorum nova quadam ratione promota*"), opera che contiene la sua teoria degli indivisibili, usato per determinare aree e volumi. Questa teoria è stata elaborata molto probabilmente tra il 1621 e il 1622. Infatti in una lettera a Galilei del 15 dicembre del 1621 troviamo un primo accenno del suo metodo:

"Vado dimostrando alcune proposizioni d'Archimede diversamente da lui, et in particolare la quadratura della parabola, divers'ancora da quello di V.S. ..."

Negli anni successivi Cavalieri si dedica alla stesura di trattati di carattere astronomico, tenendo la maggior parte delle sue discussioni e ricerche per corrispondenza, soprattutto con Evangelista Torricelli, successore di Galilei a Firenze e gran sostenitore della teoria degli indivisibili.

Gli ultimi anni della sua vita sono segnati dalla controversia con il mate-

matico svizzero Paul Guldin, famoso per i teoremi di Pappo-Guldino ⁷ che consentono di trovare superfici e volumi di solidi di rotazione, non d'accordo con la teoria degli indivisibili. Il bersaglio delle critiche è il concetto di vicinanza infinita, che ovviamente sfugge ad ogni tentativo di definizione geometrica formale e va contro il metodo di esaustione di Archimede.

Guldin scrive:

“...che dunque quella superficie sia, e in linguaggio geometrico possa chiamarsi tutte le linee di tale figura, ciò a mio avviso non gli sarà concesso da nessun geometra; mai infatti possono essere chiamate superficie più linee, oppure tutte le linee; giacché la moltitudine delle linee, per quanto grandissima essa sia, non può comporre neppure la più piccola superficie.[...] rispondo che il continuo è divisibile all'infinito, ma non consta di infinite parti in atto, bensì soltanto in potenza, le quali [parti] non possono mai essere esaurite”.

In tutta risposta Cavalieri pubblica nel 1647 *“Exercitationes geometricae sex”*, in cui riesce, nella terza di sei esercitazioni, a dimostrare con gli indivisibili un teorema pensato, ma non completamente dimostrato, dall'ormai defunto Guldin.

Cavalieri muore nello stesso anno a Bologna, dopo essere stato tormentato per l'ultimo periodo della sua vita da continui malanni.

1.2.2 Il metodo degli indivisibili

Il metodo degli indivisibili di Cavalieri non anticipa, almeno tecnicamente, i metodi del calcolo integrale che verranno fondati dai grandi della generazione successiva, ma sono piuttosto la ripresa e la continuazione, assolutamente inconsapevole, del “metodo meccanico” usato euristicamente da Archimede. Perciò potremmo considerare Bonaventura Cavalieri come l'ultimo grande matematico dell'antichità, piuttosto che uno dei primi matematici

⁷I teoremi portano anche il nome di Pappo Alessandrino (290-350 d.C.), matematico del periodo ellenistico che aveva già all'epoca gettato le basi di questo studio.

moderni. Tuttavia a lui si deve riconoscere la coraggiosa presa in considerazione dell'infinito e delle analisi logiche e matematiche rigorose fatte su di esso. Egli getta le prime fondamenta di una trattazione matematica degli insiemi infiniti, definendoli come «molteplicità» di infiniti elementi, raccolti mentalmente in base a una loro proprietà caratteristica. È il primo che distingue la somma di elementi di un continuo nel senso della misura dall'insieme di elementi del continuo stesso; egli afferma che tutti i punti di una linea, tutte le linee di una regione piana e tutti i piani di un solido sono insiemi ben definiti, benchè composti da infiniti elementi.

È nel secondo libro di “*Geometria degli indivisibili*” che troviamo la composizione del continuo mediante i suoi indivisibili, cioè di una retta mediante i suoi punti, di una figura piana limitata mediante tutti i segmenti in essa compresi paralleli a un segmento dato, di un solido mediante tutti i “piani” paralleli a uno dato. Tutto si basa quindi su quella che viene chiamata “posizione semi-atomica”, cioè sull'idea che “*un continuo è generato dal movimento di un suo indivisibile: l'indivisibile, muovendosi, lascia come traccia del suo passaggio la infinità degli indivisibili esistenti nel continuo*”.

Sulla base di queste concezioni egli ottiene grandi risultati, primo fra tutti l'ora chiamato

Principio di Cavalieri:

Se due solidi hanno uguale altezza e se le sezioni, tagliate da piani paralleli alle basi e ugualmente distanti da queste, stanno sempre in un dato rapporto, allora anche i volumi dei solidi staranno in questo stesso rapporto.

Questo enunciato contiene in sè elementi del calcolo integrale. Per giustificare questa affermazione egli dimostrò, usando le nostre notazioni, che

$$\int_0^a x^n dx = \frac{a^{n+1}}{n+1}.$$

Vediamolo nel caso $n = 2$.

Proposizione 1.5. *Se in un parallelogramma è stata condotta una diagonale, esso è il doppio di uno dei qualsiasi triangoli che si vengono a formare.*

Dimostrazione. Consideriamo la Figura 1.3.

Sia $ACDF$ un parallelogramma di base e altezza uguali ad a , nel quale sia condotta una diagonale FC che lo divide così nei due triangoli FAC e CDF . Andiamo allora a vedere che il parallelogramma è il doppio di uno di questi. Si staccino da FD e CA due segmenti congruenti FE e BC ; dai punti E e B si traccino EH e BM parallele alla base CD . Considerando i triangoli FHE e CBM si può notare che sono congruenti in quanto:

- $\widehat{HEF} = \widehat{BCM}$, perchè alterni interni
- $\widehat{FEH} = \widehat{MBC}$ per transitività:
 $\widehat{HEF} = \widehat{FDC}$ (corrispondenti); $\widehat{FDC} = \widehat{FAC}$ (opposti in un parallelogramma); $\widehat{FAC} = \widehat{MBC}$
- $FE = BC$ per costruzione

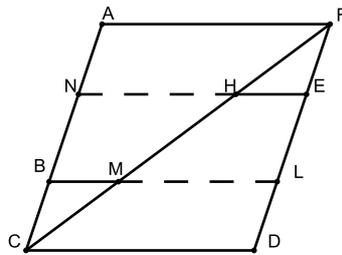


Figura 1.3: Parallelogramma diviso da una diagonale.

Quindi in particolare si ha $HE = BM$. Allo stesso modo si può vedere che $NH = LM$, così come sono uguali le parallele “estreme” AF e CD . Pertanto tutte le linee del triangolo CAF saranno uguali a tutte quelle del triangolo FDC , prese in ambedue tutte le linee con riferimento CD . Pertanto i due

triangoli saranno equivalenti, ossia il parallelogramma $ABCD$ sarà il doppio di uno dei due triangoli. \square

Essendo quindi il parallelogramma ottenuto dalla somma degli indivisibili contenuti nei due triangoli, è chiaro che la somma delle prime potenze dei segmenti contenuti in uno dei triangoli componenti è uguale alla metà della somma delle prime potenze dei segmenti contenuti nel parallelogramma, ossia, in termini moderni

$$\int_0^a x dx = \frac{a^2}{2}.$$

Vediamo qualche applicazione di questo metodo per calcolare l'area e il volume di figure geometriche.

Area di un triangolo

Consideriamo la Figura 1.4.

Nel caso di un triangolo un indivisibile è una corda parallela alla base, distante x dal vertice e che sarà quindi dipendente da x : sia nel nostro caso la corda $DE = f(x)$ a distanza $CK = x$ da C .

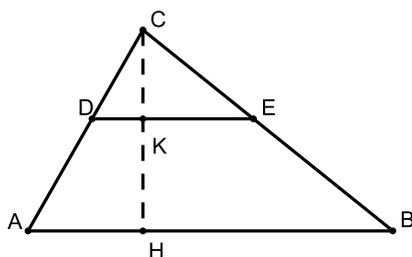


Figura 1.4: Triangolo e un suo *indivisibile*.

Poniamo $AB = b$ e $CH = h$. Per la similitudine dei triangoli ABC e DEC si ha che $AB : CH = DE : CK$, cioè $b : h = f(x) : x$. Allora vale $f(x) = \frac{b \cdot x}{h}$. L'area dell'indivisibile è quindi

$$\int \frac{b \cdot x}{h} dx.$$

Ora, per il metodo, ho che l'area del triangolo ABC è dato dalla somma delle aree dei suoi elementi indivisibili al variar di x da 0 a h , cioè

$$A = \int_0^h \frac{b}{h} x dx = \frac{b}{h} \int_0^h x dx = \frac{b}{h} \cdot \frac{1}{2} \cdot h^2 = \frac{b \cdot h}{2}$$

che è proprio la formula da noi conosciuta per il calcolo dell'area del triangolo.

Volume di una sfera

Consideriamo la Figura 1.5.

Prendiamo un indivisibile della sfera (di raggio r), cioè un cerchio parallelo al cerchio massimo, che disti x dalla superficie sferica: sia quindi $QB = x$. Troviamo il raggio R di questo indivisibile, tramite il teorema di Pitagora,

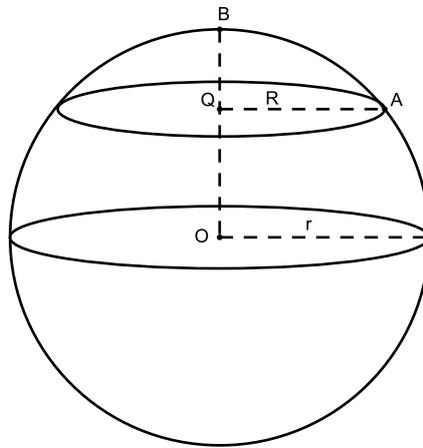


Figura 1.5: Sfera e un suo *indivisibile*.

come $R^2 = r^2 - (r - x)^2 = 2rx - x^2$. Quindi il volume del cerchio indivisibile è uguale a quello di un cilindro che ha altezza dx e per base il cerchio stesso, cioè

$$\int \pi(2rx - x^2) dx.$$

Troviamo così il volume della sfera, che è il doppio della somma di tutti gli indivisibili così ottenuti al variare di x da 0 a r , ossia

$$V = 2 \int_0^r \pi(2rx - x^2) dx = 4\pi r \int_0^r x dx - 2\pi \int_0^r x^2 dx = 4\pi r \frac{x^2}{2} - 2\pi \frac{x^3}{3} = \frac{4}{3}\pi r^3$$

che è esattamente la formula del volume della sfera dei tempi moderni.

1.3 L'età contemporanea

Le opinioni sull'inizio di questo periodo storico sono molteplici, tant'è che il dibattito storiografico sulla periodizzazione dell'età contemporanea è ancora vivamente attivo. C'è chi ne segna l'inizio con la Rivoluzione Francese (1789 - nascita del primo stato nazionale borghese moderno), altre teorie datano l'inizio della storia contemporanea col 1918, anno di inizio della Grande Guerra, altre ancora col 1945, anno in cui finisce la Seconda Guerra Mondiale. Convenzionalmente però si indica l'inizio di questo periodo storico con il Congresso di Vienna (1815 - sconfitta di Napoleone e riassetto dell'ordine europeo) e gli storici sono piuttosto concordi a far finire la storia contemporanea col 1989, anno del crollo del muro di Berlino. Questo è un grande periodo di cambiamenti, che vanno dall'ambito scientifico fino alla situazione culturale e politica.

A cavallo tra la fine del '700 e l'inizio dell' '800, in Gran Bretagna prima e in tutta Europa poi, si ha un processo di evoluzione economica che da un sistema agricolo - artigianale - commerciale porta ad un sistema industriale moderno caratterizzato dall'uso generalizzato di macchine azionate da energia meccanica e dall'utilizzo di nuove fonti energetiche inanimate (come ad esempio i combustibili fossili). Ha appunto inizio quella da noi chiamata Rivoluzione Industriale, che sarà uno dei fattori principali a cui si deve la trasformazione della società.

Questo periodo vede nascere nuovi ideali, quali le aspirazioni liberali e nazionali delle popolazioni europee suscitate dalla Rivoluzione Francese e, di conseguenza, il periodo tra il 1815 ed il 1848 fu segnato da una serie di moti

rivoluzionari.

Il periodo fra il 1870 e la Prima Guerra Mondiale è caratterizzato dall'avvento della società di massa. La produzione di beni di consumo durevoli aumenta sensibilmente, la partecipazione politica si allarga a strati sempre più ampi di popolazione, i governi dei singoli paesi adottano le prime politiche di welfare. È momento di alleanze tra gli stati europei. Sotto la guida politica del suo primo cancelliere, Otto von Bismarck, la Germania assicura la sua nuova posizione in Europa tramite l'alleanza con l'Impero Austro-Ungarico e l'Italia e un'intesa diplomatica con la Russia; tra il 1891 e il 1894 tra Francia e Russia si ha un graduale riavvicinamento diplomatico, culminato in un'alleanza militare ed economica, mentre, nel 1904, Francia e Gran Bretagna firmano l' "Entente cordiale".

Protagoniste di quest'epoca sono inoltre le due Guerre Mondiali (1915-1918/1939-1945), conflitti che hanno coinvolto le maggiori potenze dell'epoca: nella Prima gli schieramenti sono formati dagli Imperi centrali da una parte (Germania, Austria-Ungheria, Impero Ottomano e Bulgaria) e le potenze Alleate dall'altra (Francia, Gran Bretagna, Impero russo e Italia), mentre nella Seconda vediamo coinvolti Germania, Italia e Giappone contro Francia, Inghilterra, Cina e dal 1941 anche Unione Sovietica e Stati Uniti.

Mentre l'Europa, ridotta ad un cumulo di macerie, proseguendo l'involuzione iniziata con il primo conflitto mondiale, perde definitivamente la propria egemonia sul pianeta, al termine del conflitto si viene a instaurare un nuovo ordine mondiale fondato sulla contrapposizione tra Stati Uniti ed Unione Sovietica nota come "Guerra Fredda": questa tensione durerà circa mezzo secolo, pur non concretizzandosi mai in un conflitto militare diretto, ma si sviluppa nel corso degli anni incentrandosi sulla competizione in vari campi (militare, spaziale, ideologico, psicologico, tecnologico, sportivo).

Sulla fine degli anni ottanta, il leader sovietico Michail Gorbacëv, conscio delle gravi difficoltà dello stato sovietico, inizia un percorso di riforme, attraverso politiche di glasnost (trasparenza) e perestrojka (ricostruzione), che non si dimostrano tuttavia sufficienti per impedire il collasso dell'Unione So-

vietica. Nel 1989 cade il muro di Berlino e di lì a poco, nel 1991, lo seguirà l'intera Unione Sovietica, incapace di risolvere le proprie contraddizioni interne e di vincere la sfida con il capitalismo occidentale.

Dal punto di vista scientifico l'età contemporanea è un periodo pieno di innovazioni. In meccanica si ha un'evoluzione che ha dell'incredibile: compaiono le automobili sulle strade, si riescono a coprire grandi distanze in tempi relativamente brevi con l'utilizzo degli aerei; cambia il modo di comunicare, tramite radio, televisione fino ad arrivare all'informatica. In ambito fisico si ottengono i risultati forse più affascinanti, con la *Teoria della Relatività* di Einstein, con gli studi di fisica nucleare e di Meccanica Quantistica. Per ultimi, ma non per importanza, si devono ricordare in ambito matematico personaggi come Riemann e Lebesgue, che sono i protagonisti della creazione delle principali teorie sugli integrali, che sono la base di un qualsiasi studio scientifico, attraverso le quali si sono ottenuti risultati ben più complessi delle loro semplici, ma efficaci teorie.

1.3.1 Georg Friedrich Bernhard Riemann

Georg Friedrich Bernhard Riemann nasce il 17 luglio del 1826 a Breselenz. Fino all'età di 14 anni la sua educazione è seguita solamente dai suoi genitori, che incoraggiano le sue passioni per la storia e per la matematica. Il suo genio compare già all'età di sei anni, quando non solo risolve i problemi aritmetici che gli vengono sottoposti, ma lui stesso ne propone di nuovi. Fin da bambino è timidissimo e cerca di superare l'imbarazzo preparandosi bene ogni volta che doveva parlare in pubblico, tanto da diventare un perfezionista che non mostra a nessuno i propri lavori finché non sono impeccabili. Si trasferisce poi a Luneburgo per proseguire gli studi, ed è qui che il suo insegnante nota le sue brillanti capacità matematiche, tanto da mettergli a disposizione la sua biblioteca riservata.

Nel 1846 si iscrive all'Università di Göttingen, ma l'anno successivo si sposta a Berlino, dove è in contatto con alcuni dei più importanti matematici dell'e-

poca, quali Carl Gustav Jakob Jacobi e Peter Gustav Lejeune Dirichlet. Nel 1849 torna a Göttingen per lavorare, con l'aiuto e la supervisione del grande matematico Carl Friedrich Gauss, alla sua prima tesi, dal titolo "Fondamenti di una teoria generale delle funzioni variabili complesse", che concluderà due anni dopo.

Nel 1854 conclude la sua seconda tesi "Sulle ipotesi che stanno alla base della geometria" (con la quale introduce le varietà e le curvature di varietà), necessaria per l'abilitazione all'insegnamento all'interno dell'Università di Göttingen. Gauss, conoscendo il genio del suo protetto, gli consiglia di occuparsi dei problemi posti dal quinto postulato di Euclide e dalle geometrie non euclidee, elaborate nel frattempo da Bolyai e da Lobacevskij, sviluppandone alcune conseguenze. Infine nel 1859, dopo due anni di assistenza, sostituisce il maestro Dirichlet, deceduto nel maggio di quell'anno, prendendo la sua cattedra, un tempo di Gauss. Sempre in quest'anno Riemann pubblica probabilmente il suo scritto più famoso, saggio sulle note dell'Accademia delle scienze prussiana, l'unico che Riemann scrive sulla teoria dei numeri, nel quale si trova quella che oggi è nota come *Ipotesi di Riemann*⁸.

Nel 1862 la sua condizione di salute non è delle migliori: si ammala di tubercolosi e passa gli ultimi anni della sua vita a viaggiare, soprattutto in Italia. Muore durante il suo terzo viaggio in Italia il 20 luglio 1866, durante il suo soggiorno a Selasca.

1.3.2 L'integrale di Riemann

Quella dell'integrale secondo Riemann è la prima definizione rigorosa di integrale di una funzione su un intervallo ad essere stata formulata. La teoria

⁸È una congettura sulla distribuzione degli zeri non banali della *funzione zeta di Riemann* $\zeta(s)$, definita come

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

per un numero complesso s con parte reale maggiore di 1 e prolungabile analiticamente a una funzione meromorfa su tutto il piano complesso.

dell'integrazione secondo Riemann si basa sulla nozione di somma inferiore e di somma superiore e l'integrabilità di una funzione richiede che l'insieme delle somme inferiori e quello delle somme superiori costituiscano una coppia di classi contigue⁹. Cominciamo col definire le funzioni semplici (o costanti a tratti) su un intervallo $[a, b]$.

Consideriamo la scomposizione di $[a, b]$

$$\sigma = \{x_0 = a < x_1 < \dots < x_n = b\}$$

ed indichiamo con $I_k = [x_{k-1}, x_k]$, per $k = 1, \dots, n$, l'intervallo limitato e chiuso k -esimo. L'unione di tutti questi intervalli è $[a, b]$.

Se $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ sono numeri reali, la funzione $\varphi(x)$ che vale λ_1 in I_1 , λ_2 in I_2 , ..., λ_n in I_n si dice *semplice* (o costante a tratti) in $[a, b]$.

Ricordando che la funzione caratteristica di un insieme E è la funzione $\varphi_E(x)$ che vale 1 se $x \in E$ e vale 0 se $x \notin E$, possiamo scrivere $\varphi(x)$ in forma compatta:

$$\varphi(x) = \lambda_1 \varphi_{I_1}(x) + \lambda_2 \varphi_{I_2}(x) + \dots + \lambda_n \varphi_{I_n}(x) = \sum_{k=1}^n \lambda_k \varphi_{I_k}(x) \quad (1.1)$$

Se φ è una funzione semplice data dalla (1.1) definiamo integrale di φ nell'intervallo $[a, b]$ il numero

$$\int_a^b \varphi(x) dx = \sum_{k=1}^n \lambda_k (x_k - x_{k-1}).$$

Consideriamo ora una funzione $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ limitata.

Definizione 1.6. Si dice *somma inferiore di f rispetto a σ* la quantità

$$s(f, \sigma) = \sum_{k=1}^n \inf_{x_{k-1}, x_k} f(x_k - x_{k-1}).$$

⁹Due sottoinsiemi non vuoti A e B di \mathbb{R} costituiscono una coppia di classi contigue quando valgono le due condizioni:

- (i) per ogni $a \in A$ e per ogni $b \in B$ vale $a \leq b$;
- (ii) per ogni $\varepsilon > 0$ esistono $a \in A$ e $b \in B$ tali che $b - a < \varepsilon$.

Se $A \neq \emptyset$ e $B \neq \emptyset$ la prima condizione assicura l'esistenza di un elemento di separazione ($\exists c \in \mathbb{R} \mid a \leq c \leq b$, per ogni $a \in A$ e per ogni $b \in B$) e la seconda equivale all'unicità di tale elemento.

Chiamiamo inoltre somma superiore di f rispetto a σ la quantità

$$S(f, \sigma) = \sum_{k=1}^n \sup_{x_{k-1}, x_k} f(x_k - x_{k-1}).$$



Figura 1.6: Somma inferiore e superiore di f rispetto a una sua suddivisione.

Tra queste somme vale la seguente relazione:

$$\inf_{[a,b]} f(b-a) \leq s(f, \sigma) \leq S(f, \sigma) \leq \sup_{[a,b]} f(b-a).$$

Se consideriamo due scomposizioni σ_1 e σ_2 tali che $\sigma_1 \subseteq \sigma_2$, la relazione precedente diventa

$$\inf_{[a,b]} f(b-a) \leq s(f, \sigma_1) \leq s(f, \sigma_2) \leq S(f, \sigma_2) \leq S(f, \sigma_1) \leq \sup_{[a,b]} f(b-a).$$

Definizione 1.7. Sia $\Omega_{[a,b]} = \{\sigma, \text{ scomposizione di } [a, b]\}$.

Chiamiamo integrale inferiore di f nell'intervallo $[a, b]$ la quantità

$$\int_a^b f(x) dx = \sup_{\sigma \in \Omega_{[a,b]}} s(f, \sigma)$$

e analogamente diremo integrale superiore di f nell'intervallo $[a, b]$ la quantità

$$\overline{\int_a^b} f(x) dx = \inf_{\sigma \in \Omega_{[a,b]}} S(f, \sigma).$$

Arriviamo così alla condizione per l'integrazione di una funzione secondo Riemann:

Definizione 1.8. Una funzione si dice integrabile secondo Riemann se l'integrale inferiore e superiore coincidono, cioè se vale

$$\int_a^b f(x)dx = \overline{\int_a^b f(x)dx}$$

e si dice che $f \in \mathfrak{R}[a, b]$.

Indichiamo l'integrale di Riemann con il simbolo $\int_a^b f(x)dx$.

Da questa definizione si può osservare che vale la seguente disuguaglianza

$$s(f, \sigma) \leq \int_a^b f(x)dx \leq S(f, \sigma)$$

valida per ogni scomposizione σ di $[a, b]$.

Consideriamo per esempio una funzione costante $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, per cui vale $f(x) = k$, $\forall x \in [a, b]$. Presa σ una qualsiasi scomposizione di $[a, b]$ si avrà ovviamente

$$\sup_{x \in [x_i, x_{i+1}]} f(x) = k \quad \inf_{x \in [x_i, x_{i-1}]} f(x) = k, \quad \forall i = 1, \dots, n$$

da cui si ricava che la somma inferiore e la somma superiore valgono entrambe $k(b - a)$; si ha quindi

$$\int_a^b f(x)dx = k(b - a).$$

Un esempio invece di funzione *non* integrabile secondo Riemann (che lo è invece secondo Lebesgue) è la funzione di Dirichlet (estesa a un intervallo $[a, b]$), $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ che è così definita:

$$f(x) = \begin{cases} \alpha & \text{se } x \in [a, b] \cap \mathbb{Q} \\ \beta & \text{se } x \in [a, b] \cap (\mathbb{R} - \mathbb{Q}) \end{cases}$$

in cui si le somme inferiore e superiore non coincidono:

$$s(f, \sigma) = \sum_{k=1}^n \inf_{[x_{k-1}, x_k]} f(x_k - x_{k-1}) = \beta(b - a)$$

$$S(f, \sigma) = \sum_{k=1}^n \sup_{[x_{k-1}, x_k]} f(x_k - x_{k-1}) = \alpha(b - a).$$

Un primo grande risultato relativo all'integrale di Riemann è il seguente

Teorema 1.9. (*Criterio di integrabilità di Riemann*).

Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione limitata. Condizione necessaria e sufficiente affinché f sia integrabile secondo Riemann è che per ogni $\varepsilon > 0$ esista una scomposizione $\sigma \in \Omega_{[a,b]}$ tale che

$$S(f, \sigma) - s(f, \sigma) < \varepsilon.$$

Dimostrazione. Partiamo con la dimostrazione della condizione necessaria. Sia quindi $f \in \mathfrak{R}_{[a,b]}$ e limitata. Si ha, dall'ipotesi

$$\overline{\int_a^b} f - \underline{\int_a^b} f = 0.$$

$$\bullet \quad \overline{\int_a^b} f = \inf_{\sigma \in \Omega_{[a,b]}} S(f, \sigma) \Rightarrow \overline{\int_a^b} f \leq S(f, \sigma).$$

Fissato un $\varepsilon > 0$ esiste quindi una scomposizione $\sigma_\varepsilon \in \Omega_{[a,b]}$ per cui vale

$$S(f, \sigma_\varepsilon) < \overline{\int_a^b} f(x) dx + \frac{\varepsilon}{2}.$$

$$\bullet \quad \underline{\int_a^b} f = \sup_{\sigma \in \Omega_{[a,b]}} s(f, \sigma) \Rightarrow \underline{\int_a^b} f \geq s(f, \sigma)$$

e, analogamente a prima, fissando $\varepsilon > 0$ esiste una scomposizione $\sigma'_\varepsilon \in \Omega_{[a,b]}$ per cui vale

$$s(f, \sigma'_\varepsilon) > \underline{\int_a^b} f(x) dx - \frac{\varepsilon}{2}.$$

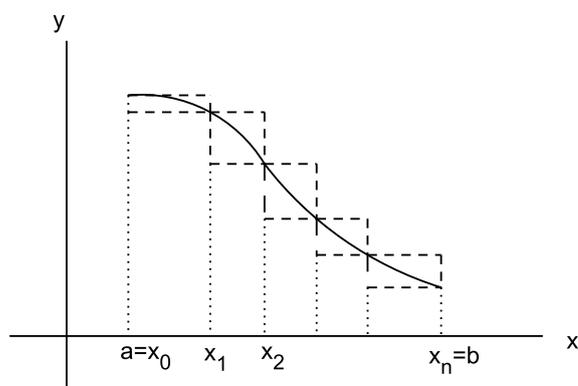


Figura 1.7: Somma inferiore e superiore di f all'interno dello stesso grafico.

Da qui ricaviamo che la somma superiore cresce, mentre quella inferiore decresce.

Chiamiamo $\sigma'' = \sigma_\varepsilon \cup \sigma'_\varepsilon$, per cui vale

$$S(f, \sigma_\varepsilon) \geq S(f, \sigma'') \geq s(f, \sigma'') \geq s(f, \sigma'_\varepsilon)$$

da cui si ricava facilmente che

$$S(f, \sigma'') - s(f, \sigma'') \leq S(f, \sigma'_\varepsilon) - s(f, \sigma_\varepsilon) < \varepsilon$$

che conclude la prima parte di dimostrazione.

Passiamo ora alla dimostrazione della condizione sufficiente. Per ipotesi, fissato $\varepsilon > 0$, esiste una scomposizione σ_ε tale che $S(f, \sigma_\varepsilon) - s(f, \sigma_\varepsilon) < \varepsilon$. Per le proprietà dell'estremo superiore e inferiore segue che

$$\inf_{\sigma \in \Omega_{[a,b]}} S(f, \sigma) - \sup_{\sigma \in \Omega_{[a,b]}} s(f, \sigma) \leq S(f, \sigma_\varepsilon) - s(f, \sigma_\varepsilon)$$

e quindi che $\forall \varepsilon > 0$ si ha

$$0 \leq \inf_{\sigma \in \Omega_{[a,b]}} S(f, \sigma) - \sup_{\sigma \in \Omega_{[a,b]}} s(f, \sigma) \leq \varepsilon$$

Dall'arbitrarietà di ε si ottiene che

$$\inf_{\sigma \in \Omega_{[a,b]}} S(f, \sigma) = \sup_{\sigma \in \Omega_{[a,b]}} s(f, \sigma)$$

cioè f è integrabile secondo Riemann. □

Il precedente criterio è di fondamentale importanza perchè permette di determinare alcune ampie classi di funzioni integrabili secondo Riemann, come le funzioni costanti, di cui abbiamo parlato prima, e le funzioni continue.

Teorema 1.10. (Integrabilità di funzioni continue)

Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua. Allora f è integrabile.

Dimostrazione. Per il Teorema di Cantor f risulta uniformemente continua¹⁰ in $[a, b]$; fissato quindi un $\varepsilon > 0$ esiste un $\delta > 0$ tale che per ogni $x, y \in [a, b]$ con $|x - y| < \delta$, risulta $|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{b - a}$.

Scegliamo una scomposizione σ di $[a, b]$ in modo da avere degli intervalli di lunghezza minore di δ . Osserviamo che, essendo f continua, l'estremo superiore (/inferiore) della funzione in un generico intervallo $[x_i, x_{i+1}]$ è un massimo (/minimo) della funzione: esisteranno così dei punti $z_i, t_i \in [x_i, x_{i+1}]$ per cui $f(z_i) = \sup_{[x_i, x_{i+1}]} f(x)$ e $f(t_i) = \inf_{[x_i, x_{i+1}]} f(x)$.

Ovviamente si ha $|f(z_i) - f(t_i)| \leq x_{i+1} - x_i < \delta$ da cui, per l'uniforme continuità, segue che $\forall i = 1, 2, \dots, n - 1$ vale

$$|f(z_i) - f(t_i)| < \frac{\varepsilon}{b - a}.$$

Andiamo a calcolare ora la differenza $S(f, \sigma) - s(f, \sigma)$:

$$\begin{aligned} S(f, \sigma) - s(f, \sigma) &= \sum_{i=1}^n [f(z_i) - f(t_i)](x_i - x_{i-1}) < \\ &< \frac{\varepsilon}{b - a} \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) = \frac{\varepsilon}{b - a} (b - a) = \varepsilon. \end{aligned}$$

Per criterio di integrabilità di Riemann possiamo affermare così che f è integrabile. \square

Ovviamente la teoria che si sviluppa dietro tutto questo è molto più estesa ed elaborata. Qui ci siamo limitati semplicemente a descrivere la prima vera e

¹⁰Sia $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$, dove $I \subset \mathbb{R}$ è un intervallo. Si dice che f è uniformemente continua in I se per ogni numero reale $\varepsilon > 0$ e per ogni coppia $x_1, x_2 \in I$ esiste un numero reale $\delta > 0$ tale che $|x_1 - x_2| < \delta$ implica $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$.

propria definizione formale di integrale, per poter passare poi alla definizione di integrale data da Lebesgue, che vedremo essere più versatile rispetto a quella di Riemann, per il suo ambito di applicabilità molto più ampio.

1.3.3 Henri Lebesgue

Henri Léon Lebesgue nasce il 28 giugno 1875 a Beauvais, città a nord della Francia in cui inizia i suoi studi presso il Collège de Beauvais, dove mostra di essere un brillante studente. Successivamente si trasferisce a Parigi dove studia prima al Liceo “San Luigi” e poi al Liceo “Luigi il Grande”.

Nel 1894 è ammesso all’“Ecole Normale Supérieure” e nel 1897 ne esce con il diploma di insegnante di matematica. Per i due anni successivi studia nella sua biblioteca privata, in cui affronta scritti di Baire sulle funzioni discontinue e si rende conto che da questo settore si possono tirar fuori nuovi risultati. Nominato professore presso il “Lycée Centrale” di Nancy, vi insegna dal 1899 al 1902.

È in questi anni, più precisamente nel 1901, che Lebesgue, sulla base del lavoro di Émile Borel e Camille Jordan, formula la teoria della misura e sempre nello stesso anno, all’interno del suo famoso saggio “*Sur une Generalizzazione de l’intégrale définie*”, egli dà la definizione di *integrale di Lebesgue* che generalizza la definizione dell’integrale di Riemann, estendendo il concetto di area sottostante una curva a funzioni discontinue. La tesi di laurea di Lebesgue “*Intégrale, longueur, aire*” presentata alla Facoltà di Scienze di Parigi nel 1903, viene pubblicata lo stesso anno negli Annali di matematica a Milano. Il primo capitolo riguarda la teoria della misura, nel secondo viene definito l’integrale sia geometricamente, sia analiticamente, mentre il capitolo finale tratta soprattutto del problema di Plateau ¹¹.

¹¹Intorno alla metà del diciannovesimo secolo il fisico belga Plateau inizia lo studio delle forme assunte dalle lamine saponate. Plateau sfrutta le proprietà fisiche dell’acqua saponata per costruire numerosi modelli di superfici minime, la più semplice delle quali è il piano, che si ottiene immergendo un filo di ferro chiuso in modo da formare una circonferenza.

Le sue lezioni dal 1902 al 1903 vengono raccolte in un breve trattato di Borel “Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives”. Il problema dell'integrazione, considerato come la ricerca di una primitiva di una funzione, è l'idea chiave del libro.

Negli anni 1904-1905 Lebesgue tiene ancora lezioni al Collège de France, questa volta però sulle serie trigonometriche; fa poi pubblicare le sue conferenze su un altro dei piccoli trattati di Borel, in cui spiega le serie di Fourier, la teoria di Cantor-Riemann, l'integrale di Poisson e il problema di Dirichlet. In un articolo del 1910, “Représentation trigonométrique approchée des fonctions satisfaisant a une condition de Lipschitz”, Lebesgue si occupa di serie di Fourier di funzioni che soddisfano la condizione di Lipschitz.

Lebesgue tenta inoltre di affermarsi nel campo dell'analisi complessa e della topologia. Ad ogni modo, questi tentativi perdono di importanza in confronto ai suoi contributi nel campo dell'analisi reale; tali contributi hanno infatti un impatto decisivo sull'attuale forma e struttura dell'analisi reale e il suo metodo è diventato parte integrante dell'analisi moderna. Viene nominato professore associato di analisi matematica alla Sorbona nel 1910, in cui rimane fino al 1918, anno della promozione a professore ordinario. Nel 1921 diventa inoltre professore di matematica al Collège de France, incarico che mantiene fino alla sua morte, avvenuta a Parigi il 26 luglio 1941.

1.3.4 L'integrale di Lebesgue

Nonostante la teoria di Riemann abbia il pregio della semplicità, non è però del tutto soddisfacente, sia per il fatto che un largo gruppo di funzioni non sono integrabili, sia per la scarsa flessibilità dell'integrale per quanto riguarda il passaggio al limite sotto il segno di integrale. Al contrario la teoria dell'integrazione secondo Lebesgue è completamente esente da queste carenze, pur conservando la caratteristica della semplicità della teoria di Riemann.

L'integrale di Lebesgue si può vedere come una generalizzazione dell'integrale di Riemann che permette di definire l'integrale di una più ampia classe di

funzioni. La costruzione dell'integrale di Lebesgue si basa sulla *teoria della misura*, inizialmente creata per fornire un'analisi dettagliata della nozione di lunghezza dei sottoinsiemi della retta reale e, più in generale, aree e volumi di sottoinsiemi di spazi euclidei. Partiamo col vedere cosa si intende con la misura di un insieme.

Definizione 1.11. *Sia A un insieme aperto e limitato di \mathbb{R}^n . Si definisce misura di A l'estremo superiore delle misure dei plurirettangoli¹² contenuti in A :*

$$m(A) = \sup \{m(Y); Y \text{ plurirettangolo}, Y \subset A\}$$

Fondamentale per questa teoria è inoltre distinguere la misura esterna dalla misura interna di un insieme.

Definizione 1.12. *Sia $E \in \mathbb{R}^n$.*

La misura esterna di E è l'estremo inferiore delle misure degli aperti che contengono E

$$\overline{m}(E) = \inf \{m(A), A \text{ aperto}, A \supset E\}.$$

La misura interna di E è l'estremo superiore delle misure dei compatti contenuti in E

$$\underline{m}(E) = \sup \{m(K), K \text{ compatto}, K \subset E\}.$$

Definizione 1.13. *Sia $E \in \mathbb{R}^n$. E si dice misurabile secondo Lebesgue quando vale*

$$\underline{m}(E) = \overline{m}(E).$$

Per tutti questi concetti possiamo affermare, per esempio, che tutti gli insiemi aperti e limitati e tutti i compatti di \mathbb{R}^n sono misurabili.

¹²Un insieme Y si dice plurirettangolo se esiste un reticolato \wp tale che Y sia l'unione di un numero finito di intervalli di \wp .

Se I_1, I_2, \dots, I_N sono intervalli di un reticolato \wp e se vale $I_1 \cup I_2 \cup \dots \cup I_N$ allora si pone $m(Y) = m(I_1) + m(I_2) + \dots + m(I_N)$.

Se estendiamo il discorso da un solo insieme a un'infinità numerabile vale il *teorema dell'addittività della misura*:

Teorema 1.14. *Siano E_1, E_2, \dots, E_n un'infinità numerabile di insiemi misurabili a due a due disgiunti. Sia $E = \cup_{i=1}^n E_i$ e valga $\overline{m}(E) < +\infty$. Allora E è misurabile e si ha*

$$m(E) = \sum_{i=1}^n m(E_i).$$

La definizione dell'integrale di una funzione secondo Lebesgue non è sostanzialmente molto diversa da quella dell'integrale di Riemann, se non per la differenza della definizione delle funzioni semplici.

Definizione 1.15. *Si dice funzione semplice in \mathbb{R}^n una combinazione lineare di funzioni caratteristiche di insiemi misurabili e limitati di \mathbb{R}^n , a due a due disgiunti*

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^N \lambda_i \varphi_{E_i}(x).$$

Definiamo così integrale di φ il numero $\sum_{i=1}^N \lambda_i m(E_i)$, che indichiamo con i simboli

$$I_n(\varphi) \quad , \quad \int \varphi(x) dx \quad , \quad \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) dx_1 dx_2 \dots dx_n .$$

Consideriamo una funzione $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ limitata e nulla fuori da un compatto. Possiamo distinguere l'integrale superiore e inferiore della funzione f , dati rispettivamente dai numeri

$$\overline{\int} f dx = \inf \left\{ \int \varphi dx; \varphi \in \ell_+(f) \right\} \quad , \quad \underline{\int} f dx = \sup \left\{ \int \psi f dx; \psi \in \ell_-(f) \right\}$$

dette $\ell_+(f)$ e $\ell_-(f)$ rispettivamente le classi di funzioni semplici che maggiorano e minorano f .

Definizione 1.16. *La funzione $f(x)$ si dirà sommabile secondo Lebesgue se il suo integrale superiore coincide con quello inferiore. In tal caso si chiama integrale di f il valore comune dell'integrale superiore e inferiore, che*

indichiamo con i simboli

$$I_n(f) , \quad \int f(x)dx , \quad \int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx_1dx_2\dots dx_n.$$

Abbiamo già osservato che l'unica differenza, per quanto riguarda la definizione, tra l'integrale di Lebesgue e quello secondo Riemann consiste nella classe di funzioni semplici che interviene nei due casi. Infatti nell'integrale di Lebesgue le funzioni semplici sono le combinazioni lineari di funzioni caratteristiche di insiemi misurabili, mentre nell'integrale di Riemann si prendono in considerazione solo le funzioni semplici elementari, cioè le combinazioni lineari di funzioni caratteristiche di intervalli. Se chiamiamo con ℓ la classe delle funzioni semplici e con ℓ^{el} quella delle funzioni semplici elementari e consideriamo $f(x)$ limitata e nulla fuori da un compatto si ha

$$\ell^{el} \subset \ell$$

$$\ell_+^{el}(f) \subset \ell_+(f) \quad \ell_-^{el}(f) \subset \ell_-(f)$$

cosicchè

$$\begin{aligned} \sup \left\{ \int \psi dx; \psi \in \ell_-^{el}(f) \right\} &\leq \sup \left\{ \int \psi dx; \psi \in \ell_-(f) \right\} \leq \\ &\leq \inf \left\{ \int \varphi dx; \varphi \in \ell_+(f) \right\} \leq \inf \left\{ \int \varphi dx; \varphi \in \ell_+^{el}(f) \right\}. \end{aligned}$$

Ricordando che una funzione è integrabile secondo Riemann se risulta

$$\sup \left\{ \int \psi dx; \psi \in \ell_-^{el}(f) \right\} = \inf \left\{ \int \varphi dx; \varphi \in \ell_+^{el}(f) \right\}$$

si conclude che ogni funzione integrabile secondo Riemann lo è anche secondo Lebesgue e i due integrali coincidono. In particolare le due funzioni di integrale coincidono per le funzioni continue (e continue a tratti).

Per ottenere la massima generalità prenderemo delle funzioni che possono assumere anche i valori $\pm\infty$. Per quanto riguarda il passaggio al limite sotto il segno di integrale si devono tenere presente le funzioni cosiddette misurabili.

Definizione 1.17. Sia $f(x)$ una funzione definita su \mathbb{R}^n . Diremo che f è misurabile se per ogni $t \in \mathbb{R}$ l'insieme $F(t) = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) > t\}$ è misurabile.

Si vede facilmente che ogni funzione continua è misurabile. Infatti se $f(x)$ è continua e $f(x_0) > t$ esisterà un intorno di x_0 in cui si ha $f(x) > t$ (teorema della permanenza del segno) e di conseguenza F_t è aperto e quindi misurabile. Prima di sviluppare ulteriormente la teoria è opportuno generalizzare il concetto di integrale nella direzione di integrale esteso a un insieme.

Definizione 1.18. Sia E un insieme misurabile limitato di \mathbb{R}^n e sia $f(x)$ una funzione misurabile limitata definita in E . Si dice che f è sommabile in E se la funzione

$$f_E(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in E \\ 0 & \text{se } x \notin E \end{cases}$$

è sommabile. Quando ciò avviene il numero reale $\int_E f dx$ si chiama integrale della funzione f esteso a E e si indica con uno dei seguenti simboli

$$\int_E f(x) dx, \quad \int_E f(x) dx, \quad \int_E f(x) dx_1 dx_2 \dots dx_n.$$

In genere l'insieme E su cui si effettua l'integrazione si suppone misurabile. In tal caso si dice che f è misurabile in E se per ogni $t \in \mathbb{R}$ è misurabile l'insieme $F_t = \{x \in E; f(x) > t\}$.

Veniamo ora alla definizione generale di integrale di una funzione qualunque, dunque anche non limitata, su un insieme arbitrario. Conviene prima trattare il caso delle funzioni non negative.

Definizione 1.19. Sia E un sottinsieme misurabile di \mathbb{R}^n e sia $f(x)$ una funzione definita in E e non negativa. Diremo che f è sommabile in E se:

(a) per ogni $t > 0$ la funzione $f_t(x) = \min\{f(x), t\}$ è sommabile in $E \cap I_t$;

(b) risulta $\lim_{t \rightarrow \infty} \int_{E \cap I_t} f_t(x) dx < +\infty$

con I_t palla di centro 0 e raggio t .

Se poi generalizziamo ancora alle funzioni di segno variabile dobbiamo porre

$$f^+(x) = \max\{f(x), 0\} \quad f^-(x) = \min\{-f(x), 0\}$$

per poter così dire che una funzione f si dice *sommabile su E* se sono sommabili su E ambedue le funzioni non negative $f^+(x)$ e $f^-(x)$ e porremo

$$\int_E f(x)dx = \int_E f^+(x)dx - \int_E f^-(x)dx.$$

È ora che possiamo affrontare quella che è la grande flessibilità dell'integrale di Lebesgue nei rispetti del passaggio al limite, che rende questa teoria di gran lunga preferibile a quella di Riemann.

Teorema 1.20. di Beppo Levi (o della convergenza monotona).

Sia $\{f_j\}$ una successione di funzioni misurabili non negative tali che:

$$(i) \quad 0 \leq f_1(x) \leq f_2(x) \leq f_3(x) \leq \dots \leq \infty \quad \forall x \in E$$

$$(ii) \quad f(x) = \lim_{j \rightarrow \infty} f_j(x) \quad \forall x \in E.$$

Allora f è misurabile e vale

$$\int_E f(x)dx = \lim_{j \rightarrow \infty} \int_E f_j(x)dx$$

Teorema 1.21. di Lebesgue (o della convergenza dominata).

Siano $\psi(x)$ una funzione non negativa e sommabile su un insieme misurabile E e $\{f_j(x)\}$ una successione di funzioni misurabili in E tali che

$$(i) \quad |f_j(x)| \leq \psi(x) \quad \text{q.o. in } E$$

$$(ii) \quad \lim_{j \rightarrow \infty} f_j(x) = f(x) \quad \text{q.o. in } E$$

allora vale

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \int_E f_j dx = \int_E f dx.$$

Dimostrazione. Si ha $-\psi(x) \leq f_j(x) \leq \psi(x)$ quasi ovunque in E , cosicchè (per il lemma di Fatou) valgono le seguenti disuguaglianze:

$$\int_E (\min_{j \rightarrow \infty} f_j) dx \leq \min_{j \rightarrow \infty} \int_E f_j dx$$

$$\int_E (\max_{j \rightarrow \infty} f_j) dx \geq \max_{j \rightarrow \infty} \int_E f_j dx.$$

Osservando che

$$\min \lim_{j \rightarrow \infty} f_j(x) = \max \lim_{j \rightarrow \infty} f_j(x) = f(x)$$

si ottiene

$$\int_E f(x) dx \leq \min \lim_{j \rightarrow \infty} \int_E f_j(x) dx \leq \max \lim_{j \rightarrow \infty} \int_E f_j(x) dx \leq \int_E f(x) dx$$

e dunque si ottiene la tesi. \square

Un altro aspetto di notevole importanza è che l'integrale di Lebesgue non discrimina fra funzioni che differiscono solo per un insieme di misura nulla. In termini più precisi due funzioni f e g si dicono *uguali quasi ovunque* (o uguali q.o.) se

$$m(\{x \in E : f(x) \neq g(x)\}) = 0$$

e se f e g sono funzioni non negative tali che $f = g$ q.o. si ha

$$\int_E f(x) dx = \int_E g(x) dx.$$

È proprio per questo che la *funzione di Dirichlet*, non integrabile secondo Riemann, lo è secondo Lebesgue. Essa è una funzione $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definita nel modo seguente:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in [0, 1] \cap \mathbb{Q} \\ 1 & \text{se } x \in [0, 1] \cap (\mathbb{R} - \mathbb{Q}). \end{cases}$$

Poiché la funzione assume quasi ovunque valore 0 (essendo l'insieme dei numeri razionali un insieme di misura nulla) il risultato dell'operazione di integrazione su qualunque intervallo $[a, b]$ è 0.

1.3.5 Il teorema di Lebesgue-Vitali

Come abbiamo visto sono integrabili secondo Riemann tutte le funzioni continue e, per essere ancora più precisi, tutte le funzioni limitate che presentano un numero finito di punti di discontinuità. Andando sempre più

in profondità vediamo che sono integrabili anche le funzioni monotone, che possono avere fino a un'infinità numerabile di punti di discontinuità, per arrivare poi ad alcune funzioni integrabili in $[0, 1]$, il cui insieme di punti di discontinuità possiede la cardinalità del continuo.

Non tutte le funzioni però sono integrabili, come per esempio la funzione di Dirichlet, discontinua in ogni punto, che non è integrabile secondo Riemann. Queste considerazioni mettono in evidenza che l'integrabilità secondo Riemann di una funzione limitata deve essere in qualche modo associata alla struttura dell'insieme dei suoi punti di discontinuità o, per meglio dire, a quanto è "piccolo" questo insieme.

Nel 1907 Giuseppe Vitali e Henri Lebesgue, indipendentemente l'uno dall'altro, trovano che si possono caratterizzare in modo elegante le funzioni integrabili secondo Riemann in termini della misura di Lebesgue. Per affrontare questo argomento si sfruttano delle proprietà della teoria della misura secondo Peano-Jordan e la già vista teoria di integrazione secondo Lebesgue. Cominciamo col richiamare alcune tra definizioni e risultati più importanti, soprattutto quelli che riguardano i plurintervalli e la loro misura elementare. La misura elementare dei plurintervalli costituisce infatti il punto di partenza, oltre che per la teoria della misura secondo Peano-Jordan, anche per la teoria della misura secondo Lebesgue.

Definizione 1.22. *Si dice plurintervallo di \mathbb{R} ogni sottinsieme di \mathbb{R} che è unione finita di intervalli chiusi di \mathbb{R} stesso.*

La famiglia dei plurintervalli viene indicata con P .

Definizione 1.23. *Siano $I = [a, b]$ un intervallo chiuso di \mathbb{R} . Definiamo misura elementare dell'intervallo I attraverso il numero*

$$mis_e(I) = b - a.$$

Da notare che risulta sempre $mis_e(I) \geq 0$ e che la misura di un intervallo è nulla se e solo se l'intervallo è degenere. Estendendo il ragionamento da un intervallo a un plurintervallo, poichè per la misura elementare di intervalli

chiusi vale l'additività per un numero finito di intervalli, ha senso porre la seguente definizione.

Definizione 1.24. *Sia $\Pi \in P \setminus \{\emptyset\}$. Si dice misura elementare del plurintervallo Π il numero reale non negativo*

$$mis_e(\Pi) = mis_e(I_1) + mis_e(I_2) + \dots + mis_e(I_r)$$

dove $\{I_1, I_2, \dots, I_r\}$ è una qualsiasi famiglia di intervalli chiusi, a due a due privi di punti interni in comune, tali che

$$\Pi = I_1 \cup I_2 \cup \dots \cup I_r.$$

Definizione 1.25. *Sia $X \subseteq \mathbb{R}$ un insieme limitato. Si dice che X è misurabile secondo Peano-Jordan se gli insiemi numerici*

$$\{mis_e(\Pi) : \Pi \in P, \Pi \subseteq X\} \quad , \quad \{mis_e(\Pi') : \Pi' \in P, \Pi' \supseteq X\}$$

oltre che separati sono anche contigui. In questo caso si dice misura di Peano - Jordan di X , e si indica con $mis(X)$, il numero reale non negativo

$$\sup\{mis_e(\Pi) : \Pi \in P, \Pi \subseteq X\} = \inf\{mis_e(\Pi') : \Pi' \in P, \Pi' \supseteq X\}.$$

Diamo ora alcuni tra i risultati principali, la maggior parte dei quali non dimostrati ma solo citati, che ci serviranno per la dimostrazione del teorema di Lebesgue-Vitali.

Teorema 1.26. *Una funzione $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ limitata e non negativa è integrabile secondo Riemann se e solo se il suo rettangoloide¹³ $R(f)$ è misurabile secondo Peano-Jordan. Inoltre in caso di integrabilità il valore dell'integrale della funzione coincide con l'area di $R(f)$.*

¹³Si dice rettangoloide l'insieme

$$R(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x \in [a, b], 0 \leq y \leq f(x)\}.$$

Proposizione 1.27. *Un sottinsieme limitato del piano è misurabile secondo Peano - Jordan se e solo se la sua frontiera ha misura nulla secondo Peano - Jordan.*

Proposizione 1.28. *Siano $f_1, f_2 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ due funzioni integrabili secondo Lebesgue, tali che $f_1(x) \leq f_2(x)$ per ogni $x \in [a, b]$. Allora l'insieme*

$$\{(x, y) \in [a, b] \times \mathbb{R} : f_1(x) \leq y \leq f_2(x)\}$$

è misurabile secondo Lebesgue e la misura vale

$$\int_a^b (f_2(x) - f_1(x)) dx.$$

Proposizione 1.29. *Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione non negativa e integrabile secondo Lebesgue. Allora l'integrale di f è nullo se e solo se f è nulla quasi ovunque secondo Lebesgue, cioè se e solo se l'insieme dei punti in cui f non si annulla ha misura nulla secondo Lebesgue.*

Definiamo ora le nozioni di massimo e minimo limite di una funzione limitata $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ come

$$\limsup_{t \rightarrow x} f(t) = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \sup_{0 < |t-x| < \delta} f(t)$$

$$\liminf_{t \rightarrow x} f(t) = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \inf_{0 < |t-x| < \delta} f(t)$$

con $x \in [a, b]$. Notiamo che se $x = a$ e $x = b$ le definizioni sono analoghe, sostituendo l'intorno di x di raggio δ rispettivamente con l'intorno destro e sinistro.

La caratterizzazione dei punti di discontinuità della funzione f e lo studio della frontiera del suo rettangoloide $R(f)$ poggiano sulla costruzione delle funzioni e dell'insieme che introduciamo nella seguente definizione.

Definizione 1.30. *Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione limitata. Definiamo le funzioni $f^*, f_*, \overline{f}, \underline{f} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ponendo, per $x \in [a, b]$*

$$f^*(x) = \limsup_{t \rightarrow x} f(t) \quad f_*(x) = \liminf_{t \rightarrow x} f(t)$$

$$\bar{f}(x) = \max\{f(x), f^*(x)\} \quad \underline{f}(x) = \min\{f(x), f_*(x)\}.$$

Definiamo inoltre l'insieme

$$G(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, \underline{f}(x) \leq y \leq \bar{f}(x)\}.$$

Osserviamo che, grazie all'ipotesi di limitatezza fatta sulla f e alla teoria generale dell'integrazione, le quattro funzioni introdotte sono integrabili secondo Lebesgue. Per le relazioni che intercorrono tra limite, massimo e minimo limite possiamo dedurre il seguente risultato:

Proposizione 1.31. *La funzione f è continua nel punto x se e solo se*

$$\underline{f}(x) = \bar{f}(x).$$

Enunciamo infine tre lemmi, anch'essi fondamentali per la dimostrazione del teorema di Lebesgue-Vitali, che diremo immediatamente dopo essi.

Lemma 1.32. *Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione limitata non negativa. Allora la frontiera del rettangoloide $R(f)$ è l'unione dei tre segmenti*

$$\{a\} \times [0, f(a)] \quad \{b\} \times [0, f(b)] \quad [a, b] \times \{0\}$$

e dell'insieme $G(f)$.

Lemma 1.33. *Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione limitata. Allora l'insieme $G(f)$ è compatto.*

Lemma 1.34. *Sia K un compatto del piano. Allora K ha misura nulla nel senso di Lebesgue se e solo se ha misura nulla nel senso di Peano-Jordan.*

Tramite tutti i risultati finora descritti possiamo finalmente dimostrare il seguente risultato:

Teorema 1.35. di Lebesgue-Vitali

Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione limitata. Si ha che f è integrabile secondo Riemann se e solo se l'insieme dei suoi punti di discontinuità è un insieme di misura nulla secondo Lebesgue.

Dimostrazione. Per il fatto che f è limitata e che, per ogni costante c , l'integrabilità di f equivale a quella di $f + c$, non è restrittivo porre f non negativa. Grazie ai risultati forniti dai del Teorema (1.26) e dalla Proposizione (1.27) la funzione f è integrabile secondo Riemann se e solo se la frontiera del suo rettangoloide $R(f)$ ha misura nulla secondo Peano-Jordan. Tenendo conto dei Lemmi (1.32), (1.33) e (1.34) deduciamo che f è integrabile secondo Riemann se e solo se l'insieme $G(f)$ ha misura di Lebesgue nulla.

D'altra parte, grazie alla Proposizione (1.28), la misura di Lebesgue dell'insieme $G(f)$ vale

$$\int_a^b (\bar{f}(x) - \underline{f}(x)) dx \quad (1.2)$$

e siccome la funzione integranda è non negativa, possiamo dedurre, anche per la Proposizione (1.29), che l'integrale (1.2) è nullo se e solo se l'integrale dei suoi punti in cui la funzione integranda non si annulla ha misura nulla secondo Lebesgue.

Infine, per la Proposizione (1.31), l'uguaglianza $\bar{f}(x) = \underline{f}(x)$ vale se e solo se f è continua nel punto x considerato. Dunque l'annullamento dell'integrale (1.2), che equivale all'integrabilità di f secondo Riemann, equivale anche al fatto che l'insieme dei punti di discontinuità di f abbia misura nulla secondo Lebesgue. \square

Omettiamo la trattazione delle proprietà degli integrali e delle ben note tecniche di calcolo. Nel secondo capitolo ci occupiamo del calcolo approssimato di integrali, particolarmente utile quando il calcolo esatto non è possibile o è molto laborioso.

Capitolo 2

Integrazione numerica

L'integrazione numerica consiste in una serie di metodi creati per stimare il valore di un integrale definito, senza aver bisogno di calcolare la primitiva della funzione integranda. La necessità di utilizzare questi metodi deriva da più fattori: per esempio non tutte le funzioni ammettono una primitiva in forma esplicita (come ad esempio la funzione gaussiana), oppure la primitiva non è sempre facile da calcolare, o ancora la funzione è disponibile solo in alcuni punti (come nell'acquisizione di dati).

I metodi di integrazione numerica possono essere divisi in due grandi categorie:

i) le formule di Newton-Cotes

ii) le formule di Gauss

mentre nel caso di funzioni a più dimensioni si utilizza il *metodo Monte Carlo*. Ma prima di addentrarci in questi discorsi richiamiamo le basi del calcolo integrale.

2.1 Richiami sugli integrali e loro calcolo

Abbiamo già visto le due definizioni principali dell'integrale, quella di Riemann e quella secondo Lebesgue. Qui ci limitiamo a mostrare i risultati principali su cui si fonda il calcolo degli integrali.

Teorema 2.1. Teorema fondamentale del calcolo integrale

Se $f(x)$ è una funzione continua su $[a, b]$ e se $F(x)$ è una sua primitiva, allora

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a). \quad (2.1)$$

Osserviamo che talvolta la primitiva di una data funzione f è di una specie più complessa di quella di f : per esempio una primitiva della funzione razionale $f(x) = 1/x$ è la funzione trascendente $\ln x$, mentre l'integrazione $\int e^{-x^2} dx$ porta a una funzione che non può essere espressa tramite un numero finito di funzioni algebriche, logaritmiche o esponenziali. Notiamo inoltre che anche quando l'integrale è esprimibile mediante funzioni elementari non è detto che il suo utilizzo sia numericamente conveniente, come per esempio nel caso di

$$\int_0^x \frac{dt}{1+t^4} = \frac{\sqrt{2}}{8} \ln \frac{x^2 + \sqrt{2x+1}}{x^2 - \sqrt{2x+1}} + \frac{\sqrt{2}}{4} \arctan \frac{\sqrt{2x}}{1-x^2}$$

per il quale si devono calcolare logaritmi e arcotangenti, che possono essere eseguiti, in aritmetica di macchina, solo con approssimazione.

Dalla (2.1) si ricavano facilmente due importanti formule risolutive degli integrali:

- *integrazione per parti:*

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f'(x)g(x)dx$$

con $f(x)$ e $g(x)$ derivabili, con derivata continua su $[a, b]$;

- *integrazione per sostituzione:*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_d^c f(g(u))g'(u)du$$

con $g(u)$ C^1 per $c \leq u \leq d$, $f(x)$ continua in ogni punto $x = g(u)$, con $c \leq u \leq d$, avendo posto $g(c) = a$ e $g(d) = b$.

Mediante le due regole precedenti, usate opportunamente, è possibile in alcuni casi calcolare esplicitamente una primitiva di f , ma talvolta è anche possibile trasformare un integrale dato in integrabili risolubili analiticamente, o in una forma più conveniente dal punto di vista numerico.

Integrali impropri

Gli integrali per i quali l'intervallo o la funzione integranda non sono limitati vengono chiamati integrali impropri e vengono definiti come limiti di opportuni integrali propri.

Definizione 2.2. Se $f(x)$ è una funzione integrabile in $[r, b] \forall r \in]a, b]$ si pone

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{r \rightarrow a^+} \int_r^b f(x)dx$$

quando il limite esiste finito.

Una definizione analoga si trova nelle funzioni $f(x)$ non limitate nell'intorno di un punto $x = c$, con $a < c \leq b$.

Si definisce inoltre il *valore principale di Cauchy* dell'integrale il seguente limite, quando esiste finito

$$P \left(\int_a^b f(x)dx \right) = \lim_{r \rightarrow 0^+} \left[\int_a^{c-r} f(x)dx + \int_{c+r}^b f(x)dx \right]$$

che assegna un valore ad integrali impropri altrimenti indefiniti (permettendo ad esempio di definire la funzione logaritmo integrale).

Definizione 2.3. Se $f(x)$ è una funzione integrabile in ogni $[a, b] \subseteq [0, +\infty[$ si pone, quando il limite esiste finito

$$\int_0^\infty f(x)dx = \lim_{r \rightarrow \infty} \int_0^r f(x)dx.$$

Partendo da queste basi possiamo ora andare ad affrontare il tema dei metodi di approssimazione di integrali¹ definiti della forma

$$I(f) = \int_a^b f(x)dx \quad (2.2)$$

con $f(x)$ definita su un intervallo limitato e chiuso $[a, b]$.

2.2 Metodi di approssimazione integrale

La maggior parte dei metodi numerici per approssimare l'integrale (2.2) può essere inquadrata nel seguente contesto generale. Per la funzione integranda $f(x)$ si cerca una famiglia di funzioni approssimanti $\{f_n(x)|n \geq 1\}$ e si definiscono

$$I_n(f) := \int_a^b f_n(x)dx = I(f_n)$$

$$E_n(f) := I(f) - I_n(f) = \int_a^b [f(x) - f_n(x)]dx$$

dove $E_n(f)$ rappresenta l'errore di approssimazione.

Lo studio di E_n può essere così ricondotto a quello dell'approssimazione $f(x) - f_n(x)$. Naturalmente la sostituzione di $I(f)$ con $I(f_n)$ è utile solo se $I(f_n)$ si riesce a calcolare senza grandi difficoltà. Per questo motivo le funzioni f_n vengono scelte, in generale, nell'ambito dei polinomi o dei polinomi a tratti e la tecnica utilizzata per costruire le funzioni approssimanti f_n è quella dell'interpolazione.

I vari metodi differiscono tra loro per vari aspetti: per la tecnica utilizzata, per il numero dei punti di interpolazione e per la loro locazione.

Nel seguito andremo a considerare in particolare le *formule di Newton-Cotes* che corrispondono alla tecnica di interpolazione con punti equidistanti. Una scelta più opportuna dei punti di interpolazione porta alle cosiddette *formule di Gauss*, che risultano esatte per polinomi di grado superiore, rispetto a quelle di Newton-Cotes. L'idea dell'interpolazione polinomiale a tratti

¹L'integrale (2.2) sarà inteso nel senso di integrale di Riemann.

(spline²) porta alle *formule composte* che hanno il vantaggio di utilizzare, in ogni intervallo, polinomi con gradi relativamente bassi. Per concludere analizzeremo le formule di quadratura che risultano dall'applicazione dell'idea dell'*estrapolazione* (processo che permette di calcolare il valore di informazioni esterne ad un insieme discreto di dati noti).

2.2.1 Formule di Newton-Cotes

Consideriamo un intervallo $[a, b]$, diviso in n sottointervalli di ampiezza $h = (b - a)/n$, e i suoi punti $x_i = a + ih$, $i = 0, \dots, n$. Riferendoci all'integrale (2.2), la funzione integranda f è approssimabile dal polinomio di interpolazione $p_n(x)$, di grado al più n , relativo ai nodi $(x_i, f(x_i))$, sempre con $i = 0, \dots, n$. Utilizzando la rappresentazione di Lagrange del polinomio di interpolazione, data da

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^n L_i(x) f(x_i)$$

si ottiene

$$\int_a^b p_n(x) dx = \sum_{i=0}^n \left(\int_a^b L_i(x) dx \right) f(x_i) = \sum_{i=0}^n A_i f(x_i)$$

con A_i pesi della formula, calcolabili integrando i polinomi $L_i(x)$.

Indicando con $R(x)$ l'*errore di interpolazione* relativo alla funzione $f(x)$ e integrando l'uguaglianza $f(x) = p_n(x) + R(x)$ si ricava la seguente relazione

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{i=0}^n A_i f(x_i) + R_T(f)$$

²Data $\sigma = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$, suddivisione di $[a, b]$, una funzione spline di grado p con nodi nei punti x_i , con $i = 1, \dots, n$ è una funzione su $[a, b]$ indicata con $s_p(x)$ tale che, in $[a, b]$ si abbia:

- in ogni sottointervallo $[x_i, x_{i+1}]$, con $i = 1, \dots, n - 1$ la funzione $s_p(x)$ è un polinomio di grado p ;
- la funzione $s_p(x)$ e le sue $p - 1$ derivate sono continue.

in cui $\sum_{i=0}^n A_i f(x_i)$ rappresenta una particolare formula di quadratura di Newton-Cotes e $R_T(f) = \int_a^b R(x)dx$ è il corrispondente errore di troncamento. Per costruzione vale $R_i(f) = 0$ per $f(x) = x^k$, con $k = 0, \dots, n$ e si può facilmente vedere che le formule corrispondenti ad un valore di n pari sono esatte anche per x^{n+1} .

Formula del trapezio

Per $n = 1$ si ottiene la seguente formula, nota appunto come *formula del trapezio*

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx = \frac{h}{2}(f(x_0) + f(x_1)) + R_T(f).$$

Se assumiamo che la funzione integranda ammette derivata seconda continua su $[a, b]$ si può mostrare che l'errore di approssimazione è

$$R_T(f) = -\frac{h^3}{12}f''(\eta), \quad x_0 < \eta < x_1 \quad (2.3)$$

Dimostrazione. Sia $P := (x_0, x_1, \dots, x_n)$ una decomposizione dell'intervallo $[a, b]$ e f_k un valore compreso tra gli estremi della funzione f relativamente all'intervallo $[x_{k-1}, x_k]$. La somma $\sum_{k=1}^n f_k(x_k - x_{k-1})$ tende all'integrale di f su $[a, b]$ al tendere a zero della lunghezza massima degli intervalli della decomposizione P .

Scegliendo come f_k il valore $[f(x_{k-1}) + f(x_k)]/2$ la somma precedente diventa

$$\sum_{k=1}^n [f(x_{k-1}) - f(x_k)](x_k - x_{k-1})/2. \quad (2.4)$$

L'addendo $[f(x_{k-1}) + f(x_k)](x_k - x_{k-1})/2$ ammette una semplice interpretazione geometrica: esso rappresenta l'area del trapezio rettangolo aventi le basi sulle rette $x = x_{k-1}$ e $x = x_k$, e come lati i segmenti congiungenti $(x_{k-1}, 0)$ con $(x_k, 0)$ e $(x_{k-1}, f(x_{k-1}))$ con $(x_k, f(x_k))$. Possiamo dire di aver sostituito all'integrale di f , sull'intervallo $[x_{k-1}, x_k]$, l'integrale della funzione polinomiale di grado ≤ 1 che interpola f negli estremi dell'intervallo stesso.

La (2.4) può essere semplificata se ci si riferisce ad una decomposizione uniforme dell'intervallo $[a, b]$: fissiamo $n \in \mathbb{N}$ e poniamo

$$h = \frac{b-a}{n}, \quad x_0 = a, \quad x_{k+1} = x_k + h, \quad k = 1, 2, \dots, n$$

l'equazione (2.4) diventa

$$T(h) := \frac{h}{2} \sum_{k=1}^n [f(x_{k-1}) + f(x_k)] = \frac{h}{2} [f(x_0) + 2f(x_1) + \dots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)].$$

Possiamo così dire che ³

$$\lim_{h \rightarrow 0} T(h) = \int_a^b f(x) dx$$

che è la *formula dei trapezi* per il calcolo approssimato dell'integrale di f .

Andiamo ora a vedere il risultato relativo all'errore che si commette sostituendo una funzione $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ con la funzione polinomiale p_n , di grado $\leq n$, che interpola f in $n+1$ punti distinti dell'intervallo I . Per poterlo determinare abbiamo bisogno del seguente lemma:

Lemma 2.4. *Sia $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ derivabile $n+1$ volte nell'intervallo $I \subset \mathbb{R}$ e siano x_0, x_1, \dots, x_n $n+1$ punti distinti di I . Detta p_n la funzione polinomiale di grado $\leq n$ che interpola f nei punti x_k , $k = 0, 1, \dots, n$, per ogni $x \in I$ esiste un punto ξ , interno al più piccolo intervallo contenente tanto x quanto x_k tale che*

$$f(x) - p_n(x) = \omega(x) D^{n+1} f(\xi) / (n+1)!$$

avendo posto $\omega(x) = \prod_{k=0}^n (x - x_k)$.

³Questo risultato si ha per la seguente **proposizione**:

sia f_p una funzione a scala rispetto a P che su ogni intervallo aperto J individuato da P assume un valore compreso tra l'estremo inferiore e l'estremo superiore di f su J e coincide con f nei punti di P .

Se f è una funzione \mathfrak{R} -integrabile su $[a, b]$ si ha

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta_\varepsilon > 0, \quad \forall P \left(|P| < \delta_\varepsilon \Rightarrow \left| \int_a^b f - \int_a^b f_p \right| < \varepsilon \right)$$

Supposto $f \in C^{(2)}([a, b], \mathbb{R})$ applichiamo il lemma precedente a ciascun intervallo $[x_{k-1}, x_k]$. Ragionando, per comodità di notazioni, su $[x_0, x_1]$ si ha

$$f(x) = p_1(x) + \omega(x)f''(\xi)/2$$

dove $\omega(x) = (x - x_0)(x - x_1)$ e y (che dipende da x) è un punto opportuno con $x_0 < \xi < x_1$. Ne segue che

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx = \int_{x_0}^{x_1} p_1(x)dx + \frac{1}{2} \int_{x_0}^{x_1} \omega(x)f''(\xi) dx.$$

Per valutare l'ultimo integrale dell'equazione precedente si deve tener presente che la funzione $x \rightarrow \omega(x)$ ha segno costante negativo sull'intervallo d'integrazione. Possiamo quindi ricorrere al teorema della media integrale. Poichè l'integrale della funzione $x \rightarrow \omega(x)$ su $[x_0, x_1]$ vale $-h^3/12$ (tramite sostituzione $t = x - x_0$) si ottiene

$$m_2 \leq \left[\frac{1}{2} \int_{x_0}^{x_1} \omega(x)f''(\xi) dx \right] \leq M_2$$

dove m_2 e M_2 sono rispettivamente il minimo e il massimo di f'' su $[x_0, x_1]$. Poichè ogni valore compreso tra il minimo e il massimo della funzione continua $x \rightarrow f''(x)$ sul compatto $[x_0, x_1]$ è un valore della stessa funzione sul medesimo intervallo, esiste ξ_1 , con $x_0 < \xi_1 < x_1$ tale che

$$\frac{1}{2} \int_{x_0}^{x_1} \omega(x)f''(\xi) dx = -\frac{h^3}{12}f''(\xi_1). \quad (2.5)$$

Valutiamo ora l'errore sulla somma $T(h)$ prendendo C_2 , una costante tale che $|f''(x)| \leq C_2$ per $a \leq x \leq b$. Applicando la (2.5) a ciascuno degli intervalli $[x_{k-1}, x_k]$ si trae

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f(x)dx - T(h) \right| &\leq \sum_{k=1}^n \left| \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)dx - [f(x_{k-1}) + f(x_k)]\frac{h}{2} \right| \leq \\ &\leq n C_2 \frac{h^3}{12} = C_2 (b - a) \frac{h^2}{12}. \end{aligned}$$

□

Formula di Simpson

Per $n = 2$, ossia interpolando $f(x)$ mediante un polinomio di secondo grado nei punti equidistanti x_0, x_1, x_2 si ottiene

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx = \frac{h}{3}(f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)) + R_S(f)$$

nota come *formula di Simpson* (o anche Cavalieri-Simpson). Supponendo $f(x)$ dotata di derivata quarta continua su $[a, b]$ si ottiene

$$R_S(f) = -\frac{h^5}{90}f^{(4)}(\eta), \quad x_0 < \eta < x_2.$$

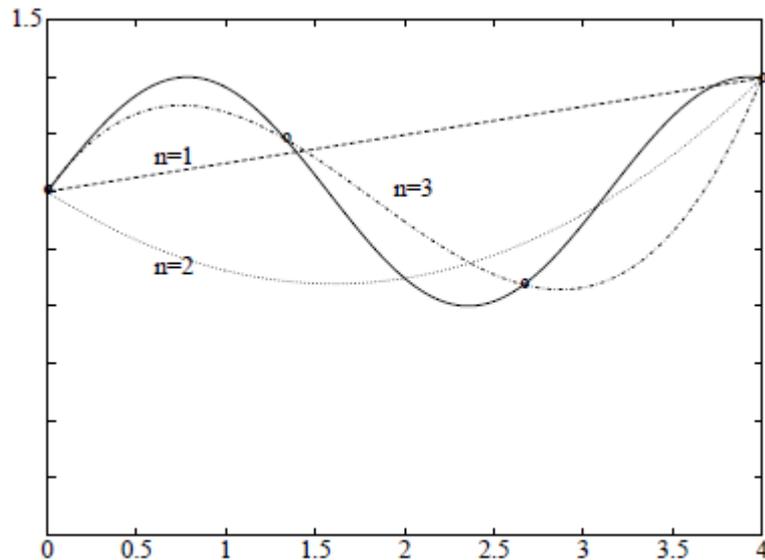


Figura 2.1: Illustrazione delle formule di Newton-Cotes, per $n = 1$, $n = 2$ e $n = 3$.

Dimostrazione. Per usare polinomi di secondo grado è conveniente suddividere $[a, b]$ in un numero pari di intervalli di eguale ampiezza. Sia $m \in \mathbb{N}$ e poniamo

$$n = 2m, \quad h = \frac{b-a}{n}, \quad x_0 = a, \quad x_{k+1} = x_k + h, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Su ognuno degli intervalli $[x_{2i-2}, x_{2i}]$, con $i = 1, 2, \dots, m$, sostituiamo f con p_2 , funzione polinomiale che interpola f nei tre punti x_{2i-2} , x_{2i-1} e x_{2i} . Prendiamo in considerazione l'intervallo $[x_0, x_2]$. La formula p_2 è data dalla formula di interpolazione del polinomio di Lagrange

$$p_2 = \frac{1}{2h^2} [f(x_0)(x-x_1)(x-x_2) - 2f(x_1)(x-x_0)(x-x_2) + f(x_2)(x-x_0)(x-x_1)]$$

e si riesce facilmente a ricavare la cosiddetta *formula di Simpson*

$$\int_a^b p_2(x) dx = [f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)] \frac{h}{3}.$$

Veniamo quindi alla valutazione dell'errore, andando ad applicare il Lemma 2.4 e troviamo

$$f(x) = p_2(x) + \omega(x) D^3 f(\xi) / 6, \quad x_0 \leq \xi \leq x_2$$

da cui

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b p_2(x) dx + \frac{1}{6} \int_a^b \omega(x) D^3 f(\xi) dx.$$

Notiamo che la funzione $x \rightarrow \omega(x) = (x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)$ cambia segno nell'intervallo $[x_0, x_2]$, quindi non possiamo usare la tecnica usata in precedenza per il metodo dei trapezi, anche se notiamo una sua interessante proprietà: essa è dispari rispetto al punto x_1 e questo significa che

$$\int_{x_0}^{x_2} \omega(x) dx = 0.$$

Se si considera $p_3(x) = p_2(x) + K\omega(x)$, funzione polinomiale di terzo grado, qualunque sia il parametro reale K si ha

$$\int_{x_0}^{x_2} p_3(x) dx = \int_{x_0}^{x_2} p_2(x) dx = [f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)] \frac{h}{3}. \quad (2.6)$$

Si può sfruttare l'arbitrarietà del parametro K per fare in modo che risulti

$$p_3' = f'(x_1).$$

Fondamentale è il seguente lemma:

Lemma 2.5. Sia $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione quattro volte derivabile sull'intervallo $I \subset \mathbb{R}$ e sia p_3 la funzione polinomiale di grado ≤ 3 tale che

$$p_3(x_k) = f(x_k), \quad k = 0, 1, \dots, n; \quad p_3'(x_1) = f'(x_1)$$

dove $x_k \in I$. Per ogni $x \in I$ esiste un punto ξ , interno al più piccolo intervallo contenente i punti x, x_0, x_1, x_2 , tale che

$$f(x) - p_3(x) = (x - x_0)(x - x_1)^2(x - x_2)D^4 f(\xi)/4!. \quad (2.7)$$

Dalla (2.7) e dalla (2.6) segue

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x_2} f(x)dx &= \int_{x_0}^{x_2} p_3(x) + \frac{1}{24} \int_{x_0}^{x_2} (x - x_1)\omega(x)D^4 f(\xi)dx = \\ &= \int_{x_0}^{x_2} p_2(x)dx + \frac{1}{24} \int_{x_0}^{x_2} (x - x_1)\omega(x)D^4 f(\xi)dx. \end{aligned}$$

Siccome $(x - x_1)\omega(x)$ ha segno costante su $[x_0, x_2]$ possiamo valutare l'ultimo integrale tramite il teorema della media integrale, esattamente come fatto in precedenza. Si vede facilmente (sostituendo $t = x - x_0$) che l'integrale di $(x - x_1)\omega(x)$ su $[x_0, x_2]$ vale $-4h^5/15$; esiste quindi un ξ_1 , con $0 \leq \xi_1 \leq x_2$, tale che

$$\frac{1}{24} \int_{x_0}^{x_2} (x - x_1)\omega(x)D^4 f(\xi)dx = -\frac{h^5}{90}D^4 f(\xi_1).$$

□

Le formule di Newton-Cotes che abbiamo considerato in precedenza vengono chiamate anche formule di tipo chiuso, in quanto esse considerano nodi anche gli estremi dell'intervallo $[a, b]$. In alcuni ambiti, come per esempio nella risoluzione delle equazioni differenziali, è preferibile usare le formule di tipo aperto, cioè quelle i cui nodi sono solo punti interni all'intervallo. Tra queste ricordiamo

$$n = 2 : \quad \int_{x_0}^{x_2} f(x)dx = 2hf(x_1) + \frac{h^3}{3}f''(\eta)$$

detta *formula delle tangenti* (o anche chiamata *formula mid-point*).

Indicando con il *grado di precisione* di una formula il grado massimo del

polinomio per il quale la formula è esatta, si ha che il grado di precisione aumenta all'aumentare del numero $n + 1$ dei nodi dell'interpolazione.

Verrebbe allo stesso modo da pensare che anche per funzioni non polinomiali l'errore $E_n = I(f) - I(f_n)$ tenda a zero per $n \rightarrow \infty$. Questo ragionamento può tuttavia essere sbagliato.

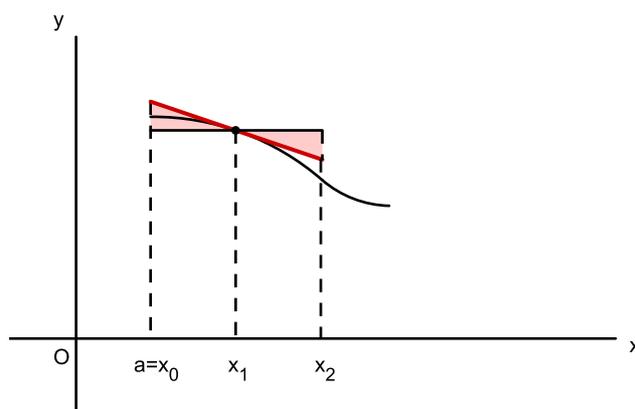


Figura 2.2: Rappresentazione del metodo delle tangenti.

Proviamo per esempio a calcolare le approssimazioni I_n di

$$I = \int_{-1}^1 \frac{1}{1 + 25x^2} dx$$

usando le formule di Newton-Cotes. Si ottiene:

n	I_n	E_n
1	0.038462	0.510898
2	0.679487	-0.130126
4	0.237400	0.311960
6	0.387045	0.162315
7	0.289899	0.250461
8	0.150049	0.399311

Il valore esatto è $I = (1/5)(\arctan 5 - \arctan(-5)) \approx 0.549360$. I risultati mostrano che l'errore non diminuisce per n che aumenta. Si può d'altra parte dimostrare che la successione dei polinomi di interpolazione della funzione $1/(1+25x^2)$, corrispondenti ad una successione di suddivisioni dell'intervallo $[-1, 1]$ in parti uguali, non è uniformemente convergente⁴. È proprio il caso

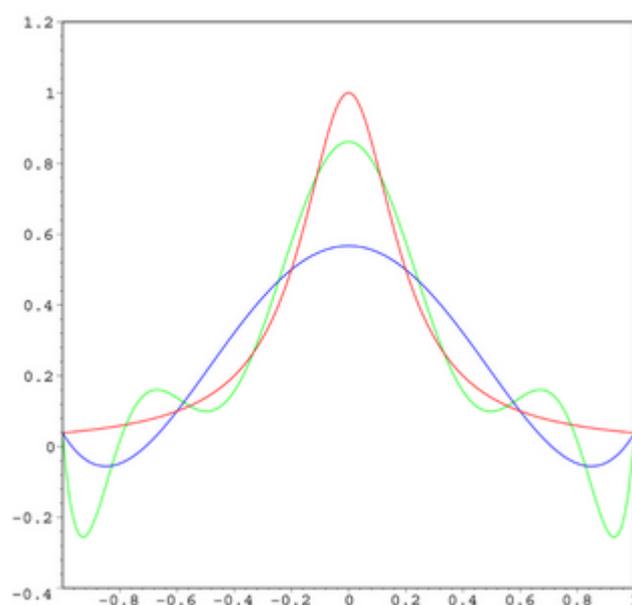


Figura 2.3: La curva rossa indica la funzione di Runge, quella blu è un polinomio di quinto grado e la curva verde è un polinomio di nono grado.

del cosiddetto *Fenomeno di Runge*, problema relativo all'interpolazione polinomiale con polinomi di grado elevato, che consiste nell'aumento di ampiezza dell'errore in prossimità degli estremi dell'intervallo. Proprio studiando la funzione precedente Runge trova che interpolando questa funzione in un insieme di punti x_i equidistanti nell'intervallo $[-1, 1]$ con un polinomio $P_n(x)$

⁴Dato $D \in \mathbb{R}$, una successione (f_n) di funzioni $f_n : D \rightarrow \mathbb{R}$ converge uniformemente ad una funzione f se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un $N \in \mathbb{N}$, tale che

$$n \geq N, x \in D \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

di grado $\leq n$, l'interpolazione risultante oscilla in ampiezza verso gli estremi dell'intervallo. Come si può notare in Figura 2.3, non è quindi conveniente usare polinomi di grado elevato per interpolare, in quanto l'approssimazione in prossimità degli estremi dell'intervallo peggiora all'aumentare del grado.

Formule composte

L'esempio appena visto mette in luce il fatto che esistono funzioni continue per cui l'approssimazione I_n calcolata con le formule di Newton-Cotes non converge all'integrale per $n \rightarrow \infty$. Troviamo però una procedura più opportuna andando ad approssimare la funzione f su sottointervalli di $[a, b]$ con polinomi di grado piccolo, per esempio $n = 1$, $n = 2$. Procedendo in questo modo si ottengono le così chiamate *formule di quadratura composte*.

Si pone ancora $h = (b - a)/n$ e $x_i = a + hi$ e, utilizzando su ogni sottointervallo $[x_i, x_{i+1}]$ la formula del trapezio, nel caso in cui la funzione integranda abbia la derivata seconda continua, si ottiene

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx = T(h) - \frac{b-a}{12} h^2 f''(\eta), \quad \eta \in]a, b[\quad (2.8)$$

dove

$$T(h) := h \left(\frac{1}{2} f(x_0) + f(x_1) + \dots + f(x_{n-1}) + \frac{1}{2} f(x_n) \right) \quad (2.9)$$

è chiamata *formula dei trapezi composta*. L'espressione dell'errore in (2.8) è ottenuta in questo modo: dalla rappresentazione (2.3) dell'errore su ogni intervallo $[x_i, x_{i+1}]$ si ha che l'errore corrispondente alla formula composta è dato da

$$\sum_{i=0}^{n-1} \left(-\frac{h^3}{12} f''(\eta_i) \right) = -\frac{b-a}{12} h^2 \frac{\sum_{i=0}^{n-1} f''(\eta_i)}{n} = -\frac{b-a}{12} h^2 f''(\eta)$$

in cui η_i indicano opportuni punti dell'intervallo $[x_i, x_{i+1}]$ e η è un punto appropriato di (a, b) .

Se l'intervallo $[a, b]$ è diviso in un numero *pari* di sottointervalli, cioè $n = 2m$, allora su ogni intervallo $[x_{2i}, x_{2i+2}]$ l'integrale può essere approssimato mediante la regola di Simpson; se $f^{(4)}$ è continua, si ottiene

$$\int_{x_{2i}}^{x_{2i+2}} f(x)dx = \frac{h}{3} (f(x_{2i}) + 4f(x_{2i+1}) + f(x_{2i+2})) - \frac{h^5}{90} f^{(4)}(\eta_i)$$

con $\eta_i \in]x_{2i}, x_{2i+2}[$, da cui si ha

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=0}^{m-1} \int_{x_{2i}}^{x_{2i+2}} f(x)dx = S(h) - \frac{b-a}{180} h^4 f^{(4)}(\eta), \quad \eta \in]a, b[$$

in cui

$$S(h) := \frac{h}{3}(f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + \dots + 2f(x_{2m-2}) + 4f(x_{2m-1}) + f(x_{2m}))$$

è la *formula di Simpson composta*.

Come mostrato nelle equazioni (2.8)(2.9) l'errore corrispondente alla formula

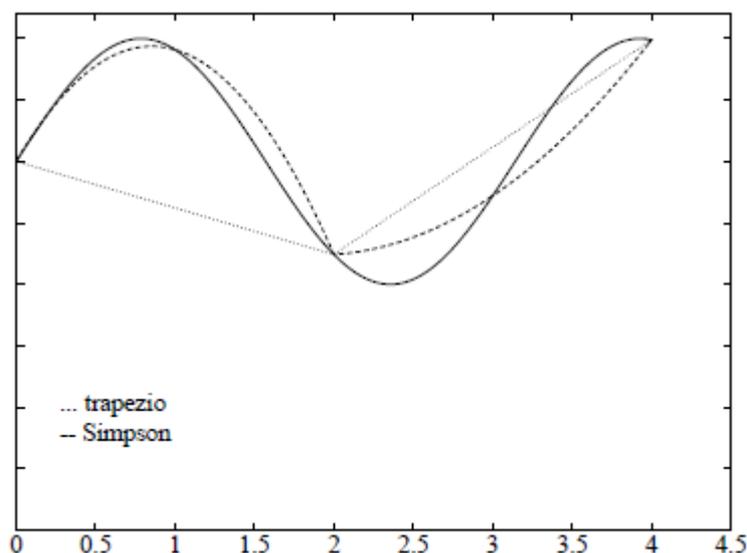


Figura 2.4: Illustrazione delle formule composte del trapezio e di Simpson

dei trapezi composta (rispettivamente alla formula di Simpson composta) tende a zero come h^2 (rispettivamente h^4), purchè la funzione integranda sia opportunamente regolare. Per evidenziare tale comportamento si può considerare, come esempio, il calcolo dell'approssimazione di

$$I = \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx$$

in cui si utilizzano successivamente la regola del trapezio, per $h = 1, 0.5, 0.25, 0.125$ e la regola di Simpson, per $h = 0.5, 0.25, 0.125$. Tenendo presente che il risultato esatto è $I = \ln 2 \approx 0.693147$, si ottengono i seguenti risultati:

h	$T(h)$	$S(h)$	$T(h) - I$	$S(h) - I$
1.	0.750000		0.056853	
0.5	0.708333	0.694444	0.015186	0.001297
0.25	0.697024	0.693254	0.003877	0.000107
0.125	0.694122	0.693155	0.000975	0.000008

che mostrano che l'errore ottenuto con la regola dei trapezi è diviso per 4 quando il passo h è dimezzato, mentre nella regola di Simpson è diviso per 16.

2.2.2 Formule di Gauss

Nelle formule di Newton-Cotes abbiamo utilizzato i valori della funzione integranda in punti equidistanti dell'intervallo di integrazione $[a, b]$ e i pesi A_i sono calcolati integrando il corrispondente polinomio di interpolazione. In questo modo, se i punti di suddivisione x_i sono in numero $n + 1$, si ottengono formule che risultano esatte per i polinomi di grado almeno n .

Le *formule di Gauss* sono ottenute mediante interpolazione, come quelle di Newton-Cotes, ma i nodi x_i sono scelti in modo da massimizzare il grado di precisione, cioè il grado del polinomio per cui le formule sono esatte.

Per dare un'idea più chiara proviamo a considerare la formula

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx A_0 f(x_0) + A_1 f(x_1) \quad (n = 1).$$

Cerchiamo di determinare A_0, A_1, x_0, x_1 imponendo che la formula sia esatta per i polinomi $1, x, x^2, x^3$. Si ottengono i seguenti risultati:

$$\begin{aligned} A_0 + A_1 &= 2, & A_0 x_0 + A_1 x_1 &= 0 \\ A_0 x_0^2 + A_1 x_1^2 &= \frac{2}{3}, & A_0 x_0^3 + A_1 x_1^3 &= 0 \end{aligned}$$

che hanno soluzione

$$A_0 = A_1 = 1 \quad , \quad x_1 = -x_0 = \frac{\sqrt{3}}{3} .$$

Si è così arrivati alla seguente fomula:

$$\int_{-1}^1 f(x)dx \approx f\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$

che ha grado di precisione 3. Per fare un confronto con la formula di Simpson ricordiamo che anche questa ha grado di precisione 3, ma tale precisione è ottenuta con tre nodi.

Osserviamo che la formula ottenuta sull'intervallo $[-1, 1]$ si può estendere a qualsiasi intervallo generico $[a, b]$ attraverso la seguente trasformazione

$$\int_a^b f(t)dt = \frac{b-a}{2} \int_{-1}^1 f\left(\frac{a+b+x(b-a)}{2}\right) dx$$

da cui deriva la seguente espressione della **formula di Gauss**

$$\int_a^b f(t)dt \approx \frac{b-a}{2} \left[f\left(\frac{a+b}{2} - \frac{b-a}{2\sqrt{3}}\right) + f\left(\frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2\sqrt{3}}\right) \right]$$

che è esatta per i polinomi di grado 3.

La procedura dell'esempio precedente può essere generalizzata utilizzando la nozione di *polinomi ortogonali*.

Definizione 2.6. Una famiglia di polinomi $P_n(x)$, con $n = 0, 1, 2, \dots$, dove per ogni n si ha un polinomio di grado n , si dice sequenza di polinomi ortogonali nell'intervallo $[a, b]$ rispetto alla funzione peso $\omega(x)$, positiva nell'intervallo scelto, se

$$\int_a^b \omega(x)P_n(x)P_m(x)dx = 0 \quad \forall m, n = 0, 1, 2, \dots \text{ con } m \neq n$$

A partire dalla base $1, x, x^2, \dots$ è possibile costruire una successione di polinomi $P_n(x)$ di grado $n \geq 0$ tale che

$$\int_{-1}^1 P_n(x)P_m(x)dx = 0 \quad , \quad n \neq m$$

$$\int_{-1}^1 [P_n(x)]^2 dx = c(n) \neq 0$$

proprietà che ci dice che i polinomi $P_n(x)$, detti *polinomi di Legendre*, sono ortogonali su $[-1, 1]$. La proprietà di ortogonalità generalizza quella di perpendicolarità di due vettori nello spazio euclideo \mathbb{R}^n . I primi elementi della successione sono dati da

$$P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = x, \quad P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1), \quad P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$$

e i successivi si ricavano dalla formula ricorrente

$$P_n(x) = \frac{2n-1}{n} x P_{n-1}(x) - \frac{n-1}{n} P_{n-2}(x).$$

Si può inoltre mostrare che la successione $\{P_n(x)\}_{n=0,1,\dots}$ costituisce una base dei polinomi, cioè un qualsiasi polinomio di grado n può essere espresso in maniera unica come combinazione lineare dei polinomi $P_0(x), P_1(x), \dots, P_n(x)$.

Conseguenza dell'ortogonalità è il seguente teorema.

Teorema 2.7. *Sia $\{P_k\}_{k=0,\dots,n}$ una famiglia di polinomi ortogonali in $(0, 1)$ rispetto ad una funzione peso w . Allora il polinomio P_n ha esattamente n radici reali e distinte nell'intervallo aperto $(0, 1)$.*

Dimostrazione. Siano x_1, \dots, x_m tutti gli zeri di P_n interni ad $(0, 1)$ tali che P_n cambia segno in ogni x_k con $k = 0, \dots, m$. Questa richiesta va discussa.

- Se $P_n(x_k) = 0$ ma non cambia segno, allora necessariamente $P_n^{(1)}(x_k) = 0$ e quindi lo zero x_k ha molteplicità maggiore di 1.
- In virtù del fatto che nella richiesta gli zeri distinti interni all'intervallo sono m e con molteplicità uguale a 1, se fosse $n > m$ allora le rimanenti radici sarebbero in $\mathbb{C} \setminus (0, 1)$. Mostriamo che così non è.

Supponiamo sia *per assurdo* $m < n$ e che sia

$$q_m(x) := (x - x_1) \cdot \dots \cdot (x - x_m).$$

Sia

$$p_n(x) = q_m(x) \cdot r_{n-m}(x)$$

con $r_{n-m} \in \mathcal{P}_{n-m}$ che per ipotesi, non avendo zeri in $I = (0, 1)$, ha segno costante in I . Quindi

$$q_m(x) \cdot p_n(x) = q_m(x) \cdot q_m(x) \cdot r_{n-m}(x) = q_m^2(x) \cdot r_{n-m}(x)$$

è una funzione continua che ha segno costante in $(0, 1)$, non è nulla, per cui dalle proprietà della funzione peso w si ha

$$\int_0^1 q_m(x) \cdot p_n(x) \cdot w(x) dx \neq 0.$$

Ma poichè $\deg(q_m) < n$, essendo $(p_n, p)_{2,w} = 0$ ⁵ per ogni polinomio p di grado strettamente inferiore a n , allora

$$\int_0^1 q_m(x) \cdot p_n(x) \cdot w(x) dx = 0$$

il che è assurdo. □

Grazie a questo risultato si può quindi mostrare che, se come nodi della formula di integrazione prendo gli zeri del polinomio di Legendre $P_n(x)$ e i pesi sono calcolati in modo che la formula sia di interpolazione, si ottiene una particolare *formula di Gauss* che risulta esatta per i polinomi fino al grado $2n - 1$.

Nella Tabella 2.1 sono riportati i nodi e i pesi relativi alle prime formule.

Altre formule di tipo Gauss che possono essere ottenute utilizzando differenti polinomi ortogonali sono quelle che utilizzano i polinomi di Chebichev,

⁵La notazione $(f, g)_{2,w}$ indica il prodotto scalare

$$(f, g)_{2,w} = \int_a^b f(x) \overline{g(x)} \omega(x) dx.$$

h	x_i	A_i
1	$\pm.57735\ 02692$	1.0
2	$\pm.77459\ 66692$ 0.0	0.55555 55556 0.88888 88889
3	$\pm.86113\ 63116$ $\pm.33998\ 10436$	0.3475 848451 0.65214 51549
4	$\pm.90617\ 98459$ $\pm.53846\ 93101$ 0.0	0.23692 68851 0.87462 86805 0.56888 88889
5	$\pm.93246\ 95142$ $\pm.66120\ 93865$ $\pm.23861\ 91861$	0.17132 44924 0.36076 15730 0.46791 39346

Tabella 2.1: Nodi e pesi per la formula di Gauss-Legendre.

indicati solitamente con $T_n(x)$, i quali sono ortogonali rispetto alla funzione peso $\omega(x) = 1/\sqrt{1-x^2}$, cioè verificano le seguenti relazioni:

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} T_n(x) T_m(x) dx = 0, \quad n \neq m$$

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} [T_n(x)]^2 dx = c(n) \neq 0.$$

Partendo da $T_0(x) = 1$, $T_1(x) = x$, i polinomi successivi sono dati dalla relazione ricorrente

$$T_n(x) = 2x T_{n-1}(x) - T_{n-2}(x).$$

Un altro modo di scrivere i polinomi di Chebichev è il seguente

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x)$$

da cui si riesce a vedere che gli zeri di $T_{n+1}(x)$ sono dati esplicitamente da

$$x_i = \cos \frac{(2i+1)\pi}{2n+2}, \quad i = 0, 1, \dots, n.$$

Assumendo tali punti come nodi si ottiene la seguente formula

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} f(x) \approx \sum_{i=0}^n A_i f(x_i) \quad , \quad A_i(x) = \frac{\pi}{n+1} \quad , \quad i = 0, 1, \dots, n$$

che risulta esatta per le funzioni $f(x)$ che sono polinomi di grado inferiore o uguale a $2n - 1$.

Terminiamo ricordando che esistono formule di Gauss per l'approssimazione di integrali su intervalli illimitati come $(0, +\infty)$ e $(-\infty, +\infty)$, che utilizzano come nodi gli zeri di opportuni polinomi ortogonali, noti come *polinomi di Laguerre*⁶ e di *Hermite*⁷.

Formule di Lobatto

Per quanto si sia visto che le formule di Gauss sono formule aperte, ci possono essere casi in cui vi è la necessità, o l'opportunità, di utilizzare come nodi anche gli estremi dell'intervallo. Le formule di Gauss vengono così trasformate. Consideriamo ancora l'intervallo $[-1, 1]$ e prendiamo come nodi i punti $-1, 1$ e gli zeri dell'equazione $P'_{n-1} = 0$, dove con $P_{n-1}(x)$ indichiamo il polinomio di Legendre di grado $n - 1$. Per interpolazione otteniamo così la seguente

⁶I polinomi di Laguerre sono polinomi speciali costituenti una successione di polinomi che si possono definire tramite la seguente espressione

$$L_n(x) := \frac{e^x}{n!} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x} x^n) \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

⁷I polinomi di Hermite sono una sequenza polinomiale usata in probabilità, in combinatoria ed in meccanica quantistica, in particolare nel calcolo degli autostati dell'oscillatore armonico quantistico. Per ogni n naturale si definiscono polinomi di Hermite

$$H_n(x) := (-1)^n e^{-x^2/2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2/2}.$$

I polinomi di Hermite e Laguerre sono legati tra loro dalla relazione

$$H_{2n+1}(x) = (-1)^n 2^{2n+1} n! L_n^{1/2}(x^2).$$

formula, detta *formula di Lobatto*

$$\int_{-1}^1 f(x)dx \approx \alpha f(-1) + \alpha f(1) + \sum_{k=1}^{n-2} \alpha_k f(x_k)$$

in cui $\alpha = 2/n(n-1)$ e $\alpha_k = \alpha/P_{n-1}(x_k)^2$. Le ascisse e i pesi sono indicati nella Tabella 2.2.

Si può vedere che calcolando la funzione integranda nei punti ± 1 si perdono due gradi di libertà: una formula di Lobatto a n punti è esatta solo per polinomi di grado $2n-3$, in confronto a $2n-1$ per una corrispondente formula di Gauss-Legendre.

n	x_k	α_k
3	$\pm 1.00000\ 0000$	0.33333 33333
	0.00000 00000	1.33333 33333
4	$\pm 1.00000\ 00000$	0.16666 66667
	$\pm 0.44721\ 35955$	0.83333 33333
5	$\pm 1.00000\ 00000$	0.10000 00000
	$\pm 0.65465\ 36707$	0.54444 44444
	0.00000 00000	0.71111 11111
6	$\pm 1.00000\ 00000$	0.06666 66667
	$\pm 0.76505\ 53239$	0.37847 49563
	$\pm 0.28523\ 15165$	0.55485 83770

Tabella 2.2: Nodi e pesi per la formula di Lobatto.

Formule di quadratura di Gauss-Kronrod

Indichiamo con G_n la formula di Gauss a n punti, cioè

$$G_n = \sum_{i=1}^n \omega_i f(x_i)$$

che risulta esatta per i polinomi fino al grado $2n-1$, con un costo di n valutazioni della funzione. Kronrod decide (1965) di valutare l'errore commesso

nell'applicazione della formula considerando formule del seguente tipo

$$K_{2n+1} = \sum_{i=0}^n a_i f(x_i) + \sum_{j=1}^{n+1} b_j f(y_j)$$

che condividono n nodi con le formule G_n , dimostrando che è possibile trovare i $3n + 2$ parametri a , b e y_j in modo da far sì che K_{2n+1} abbia grado di precisione $3n + 1$.

Le due formule (G_n, K_{2n+1}) sono dette *coppia Gauss-Kronrod*. Il costo per il calcolo di questa coppia è dato da $2n+1$ valutazioni della funzione integranda, che notiamo essere uguale a quello relativo al calcolo di G_{2n+1} , che ha grado di precisione $4n+1$. Questo tipo di coppie hanno lo stesso costo computazionale delle coppie di formule di Gauss G_n e G_{n+1} , ma la formula K_{2n+1} ha precisione molto maggiore di G_{n+1} . Per questo motivo le coppie (G_n, K_{2n+1}) sono le più utilizzate nello sviluppo delle funzioni per il calcolo degli integrali.

Come stima dell'errore è possibile utilizzare un'opportuna funzione Φ della differenza tra G_n e K_{2n+1} , cioè

$$E \simeq \Phi[|G_n - K_{2n+1}|]$$

con Φ funzione crescente che dipende dalle particolari formule di quadratura scelte e da considerazioni di carattere sperimentale ⁸.

In effetti le formule di Gauss-Kronrod rappresentano uno degli algoritmi più efficienti per il calcolo di integrali di tipo generale: la scelta standard è la coppia (G_7, K_{15}) .

2.2.3 Formule adattive

Se si vuole integrare una funzione con comportamento altamente variato nell'intervallo di integrazione, cioè con variazioni larghe su alcune parti

⁸Ad esempio alcune funzioni, relativamente alla coppia di Gauss-Kronrod (G_7, K_{15}) rispettivamente con 7 e 15 nodi, utilizzano come stima calcolabile dell'errore la quantità

$$E = (200 |G_7 - K_{15}|)^{1.5}.$$

e variazioni piccole su altre, la scelta di suddivisione in parti uguali in una formula di quadratura composta può non essere la più indicata. Il significato di variazione è precisato dal comportamento delle derivate della funzione.

Con la formula composta di Simpson abbiamo visto che l'errore relativo a tale formula dipende dal comportamento della derivata quarta della funzione integranda nell'intervallo di integrazione. Per stimare quindi l'errore in maniera *uniforme* su tutto l'intervallo (e al minimo costo) sarebbe appropriato utilizzare un passo di suddivisione molto *piccolo* nei tratti in cui la derivata quarta è grande e, viceversa, un passo più *grande* dove la derivata quarta è più piccola.

Il problema è che in generale non è possibile conoscere a priori il comportamento della funzione integranda e delle sue derivate.

Definizione 2.8. *Chiamiamo formula adattiva un procedimento attraverso il quale, con successive applicazioni di una determinata formula, è possibile avere un'idea del comportamento di una funzione e scoprire eventuali singolarità della funzione o delle sue derivate.*

Si riesce così ad adattare automaticamente il passo di suddivisione.

Andiamo a vedere nel concreto la risoluzione approssimata di un particolare integrale.

Fissiamo una precisione ϵ da raggiungere: vogliamo quindi calcolare una quantità che differisca dal valore dell'integrale esatto per meno di ϵ . Ovviamente dobbiamo arrivare alla quantità approssimata mediante il minimo numero di valutazioni della funzione. Andiamo a sviluppare quest'idea utilizzando la formula di Simpson.

Formula di Simpson adattiva

Dato $\epsilon > 0$, si vuole ottenere un'approssimazione AI dell'integrale di $f(x)$ su un intervallo limitato (a, b) tale che

$$\left| \int_a^b f(x)dx - AI \right| \leq \epsilon.$$

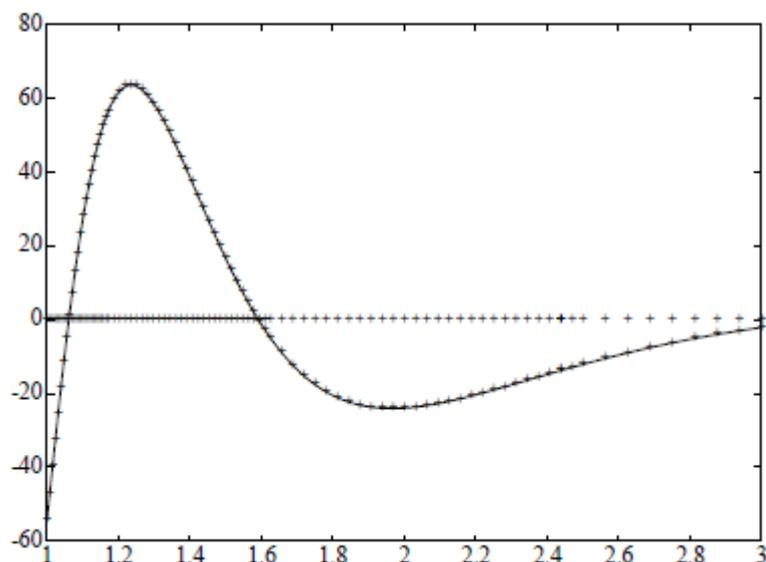


Figura 2.5: Rappresentazione dei punti di valutazione in una formula di Simpson adattiva.

L'espressione dell'errore nella formula di Simpson, nell'ipotesi che f sia sufficientemente regolare in $[a, b]$, è

$$\int_a^b f(x) dx - \frac{h}{3} [f(a) + 4f(a+h) + f(b)] = -\frac{h^5}{90} f^{(4)}(\xi) \quad (2.10)$$

essendo ξ un punto interno all'intervallo $[a, b]$. Cominciamo ad applicare la formula di Simpson con passo $h = \frac{b-a}{2}$, ottenendo così

$$\int_a^b f(x) dx = S(a, b) - \frac{b-a}{180} h^4 f^{(4)}(\xi), \quad \xi \in (a, b)$$

dove

$$S(a, b) = \frac{h}{3} [f(a) + 4f(a+h) + f(b)].$$

Successivamente si cerca di stimare l'errore $I - S(a, b)$, senza però determinare in modo esplicito la funzione $f^{(4)}(x)$, applicando Simpson con passo

$$\frac{h}{2} = \frac{b-a}{4}$$

$$\int_a^b f(x)dx = \overbrace{\frac{h}{6}[f(a) + 4f(a + \frac{h}{2}) + f(a+h)]}^{S(a, \frac{a+b}{2})} + \overbrace{\frac{h}{6}[f(a+h) + 4f(a + \frac{3}{2}h) + f(b)]}^{S(\frac{a+b}{2}, b)} - \left(\frac{h}{2}\right)^4 \frac{b-a}{180} f^{(4)}(\bar{\xi}), \quad \bar{\xi} \in (a, b)$$

Si ricava quindi, essendo $b-a=2h$,

$$\int_a^b f(x)dx = S\left(a, \frac{a+b}{2}\right) + S\left(\frac{a+b}{2}, b\right) - \frac{1}{16} \frac{h^5}{90} f^{(4)}(\bar{\xi}). \quad (2.11)$$

Supponiamo ora

$$f^{(4)}(\xi) = f^{(4)}(\bar{\xi}) \quad (2.12)$$

ipotesi in generale non verificata, ma che permette di ottenere utili indicazioni sull'errore. Il successo della tecnica dipenderà quindi da quanto poco l'ipotesi precedente si discosta dal vero. Dalle equazioni (2.10) e (2.11) si ha rispettivamente

$$\int_a^b f(x) dx = S(a, b) - \frac{h^5}{90} f^{(4)}(\xi)$$

$$\int_a^b f(x) dx = S\left(a, \frac{a+b}{2}\right) + S\left(\frac{a+b}{2}, b\right) - \frac{1}{16} \frac{h^5}{90} f^{(4)}(\xi)$$

e uguagliando i secondi membri si ricava

$$\frac{h^5}{90} f^{(4)}(\xi) \simeq \frac{16}{15} \left[S(a, b) - S\left(a, \frac{a+b}{2}\right) - S\left(\frac{a+b}{2}, b\right) \right]$$

da cui, chiamando $S_1(a, b) = S\left(a, \frac{a+b}{2}\right) + S\left(\frac{a+b}{2}, b\right)$, si ha la seguente stima

$$\left| \int_a^b f(x)dx - S_1(a, b) \right| \simeq \frac{1}{15} |S(a, b) - S_1(a, b)|.$$

Se pertanto

$$|S(a, b) - S_1(a, b)| < 15\epsilon \quad (2.13)$$

si ha allora

$$\left| \int_a^b f(x)dx - S_1(a, b) \right| \leq \epsilon.$$

In pratica, per tener conto dell'ipotesi (2.12), invece che 15ϵ si prenderà una stima più conservativa, come per esempio 10ϵ .

Se la disuguaglianza (2.13) non è verificata si applica la procedura di stima dell'errore su ogni intervallo $[a, (a+b)/2]$, $[(a+b)/2, b]$, mentre, nel caso in cui la stima su ciascuno degli intervalli segni un errore più piccolo di $\epsilon/2$, il procedimento termina. Altrimenti, se su uno degli intervalli la stima dell'errore non passa il test, tale intervallo viene ulteriormente suddiviso e ognuno dei sottointervalli viene esaminato per vedere se l'errore è più piccolo di $\epsilon/4$, e così di seguito.

2.2.4 Formule di estrapolazione

L'idea del metodo di estrapolazione⁹ (o *metodo di Richardson*) si applica in una situazione generale che andiamo ora a descrivere. Sia τ_0 una quantità incognita che si calcola come limite su una successione di quantità calcolabili $T(y)$, dipendenti da un parametro y . Per fissare le idee supponiamo che $y \rightarrow 0$.

L'idea di Richardson parte dal presupposto che il risultato finale del calcolo numerico richieda la valutazione di $T(y)$ per successivi valori del parametro y . Questa è una situazione reale quando, come accade in generale, non si conosce a priori il valore del parametro y che fornisce la stima di τ_0 corrispondente ad una precisione prefissata.

Osserviamo che le maggiorazioni dell'errore di troncamento non possono, in generale, essere utilizzate direttamente, poichè richiedono la conoscenza di quantità difficili da valutare o da stimare. Nel metodo Richardson le maggiorazioni dell'errore di troncamento sono utilizzate indirettamente, per poter ricavare informazioni sul comportamento asintotico di $T(y)$. Questo comportamento permette infatti di *estrapolare*, dai valori già calcolati di $T(y)$, un valore più esatto. È importante sottolineare come il valore è ottenuto senza far intervenire il calcolo di $T(y)$.

⁹Il termine estrapolazione indica il processo che permette di calcolare il valore di informazioni esterne ad un insieme discreto di dati noti.

Per andare maggiormente nel dettaglio, supponiamo che $T(y)$ abbia uno sviluppo rispetto ad y del tipo

$$T(y) = \tau_0 + \tau_1 y + \tau_2 y^2 + \dots + \tau_k y^k + R_{k-1}(y)$$

in cui i coefficienti τ_i e c_{k+1} sono indipendenti da y e vale

$$|R_{k+1}(y)| \leq c_{k+1} y^{k+1}.$$

Tenendo presente che il resto $R_{k+1}(y)$ nello sviluppo asintotico tende a zero per $y \rightarrow 0$, l'idea è di sostituire la quantità $T(y)$ con il polinomio

$$\tilde{T}(y) = \tau_0 + \tau_1 y + \tau_2 y^2 + \dots + \tau_k y^k$$

prendendo quindi il valore $\tilde{T}(0)$ come nuova stima di τ_0 .

Il polinomio $\tilde{T}(y)$ può essere costruito con un procedimento di interpolazione utilizzando i valori di $T(y)$ calcolati in corrispondenza a particolari valori di y . Mostriamo come si può procedere in generale.

Si scelgono due numeri reali r e y_0 tali che $0 < r < 1$, $y_0 > 0$ e si costruiscono per $m = 0, 1, \dots$ le successioni definite da

$$T_{m,0} = T(r^m y_0)$$

$$T_{m,n+1} = \frac{T_{m,n} - r^{n+1} T_{m-1,n}}{1 - r^{n+1}}, \quad n \geq 0$$

che corrispondono al calcolo della quantità $T(y)$ nei punti $y = r^m y_0$ e per $n \geq 0$ alle operazioni di interpolazione e estrapolazione. Si può riassumere il risultato nella come in Figura 2.6.

Si può dimostrare il seguente risultato.

Teorema 2.9. *Per ogni $n \geq 0$ si ha*

$$T_{m,n} = \tau_0 + O((r^m y_0)^{n+1}).$$

Si ha quindi la convergenza verso τ_0 di ciascuna delle colonne della tavola: per la prima colonna la convergenza è $O(r^m y_0)$, per la seconda è $O(r^{2m} y_0^2)$, per la n -esima colonna è $O((r^m y_0)^n)$. Osserviamo che la convergenza della n -esima colonna è asintoticamente n volte più rapida della prima colonna.

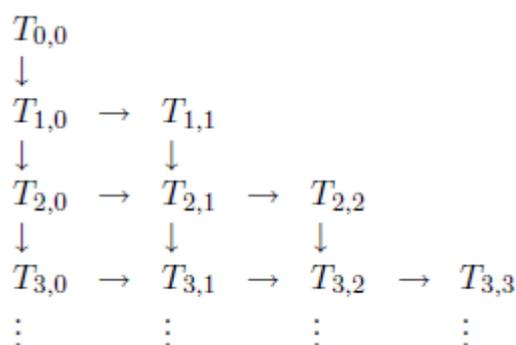


Figura 2.6: Successione della quantità $T(y)$ per $y = r^m y_0$ e $n \geq 0$.

Metodo di Romberg

Il *metodo di Romberg* consiste nell'applicare il metodo di Richardson alla formula dei trapezi così descritta: indichiamo con $T(h)$, con $h = (b - a)/n$, la *formula dei trapezi*

$$\int_a^b f(x) dx \approx T(h) := \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + \frac{h}{2}(f(x_0) + f(x_n)) \quad , \quad x_i = a + ih$$

e, assumendo $y = h^2$, $y_0 = (b - a)^2$ e $r = 1/4$, la tabella triangolare $T_{m,n}$ è allora definita da

$$\begin{aligned}
T_{m,0} &= T\left(\frac{b-a}{2^m}\right) \quad , \quad m \geq 0 \\
T_{m+1,n+1} &= \frac{4^{n+1}T_{m,n} - T_{m-1,n}}{4^{n+1} - 1} \quad , \quad n = 0, 1, \dots, m-1.
\end{aligned}$$

Per il risultato precedente si ha allora

$$T_{m,n} = \int_a^b f(x) dx + O(h^{2n+2}) \quad , \quad h = \frac{b-a}{2^m}.$$

Se la funzione f è integrabile secondo Riemann su (a, b) allora si ha

$$\lim_{m \rightarrow \infty} T_{m,n} = \int_a^b f(x) dx \quad , \quad \forall n \geq 0.$$

Si può verificare facilmente che $T_{m,1}$ è ancora il metodo Simpson, mentre per $n > 2$ la quantità $T_{m,n}$ non corrisponde più a un metodo di Newton-Cotes.

Si noti che i valori della funzione f che intervengono nel calcolo di $T_{m,0}$ intervengono pure nel calcolo di $T_{m+1,0}$, per cui si può organizzare l'algoritmo nella forma seguente

$$T_{0,0} = \frac{1}{2}(f(a) + f(b))$$

$$T'_{m,0} = h \sum_{i=1}^{2^m} f\left(a + \left(i - \frac{1}{2}\right)h\right), \quad h = (b-a)/2^m$$

$$T_{m+1,0} = \frac{1}{2}(T_{m,0} + T'_{m,0}).$$

2.2.5 Difficoltà nell'integrazione numerica

Le formule di quadratura che abbiamo trattato nei paragrafi precedenti possono dare risultati insoddisfacenti quando la funzione integranda, o alcune delle sue derivate, presentano delle singolarità¹⁰. Ricordiamo, infatti, che la maggiorazione dell'errore di una particolare formula, e quindi il corrispondente ordine di convergenza, sono ottenuti sotto opportune condizioni di regolarità della funzione. Dobbiamo quindi trovare delle strategie per questi integrali singolari.

Consideriamo il seguente integrale

$$I = \int_0^1 \frac{\arctan x}{x^{3/2}} dx$$

che presenta una singolarità non eliminabile nel punto $x = 0$, in quanto per lo sviluppo in serie si ha

$$\frac{\arctan x}{x^{3/2}} = \frac{x - x^3/3 + x^5/5 - \dots}{x^{3/2}} = x^{-1/2} + O(x^{3/2}).$$

Abbiamo più di una possibilità per procedere. Un modo è tramite un'integrazione per parti che mi fornisce

$$I = \int_0^1 \frac{\arctan x}{x^{3/2}} dx = [-2x^{-1/2} \arctan x]_0^1 + \int_0^1 \frac{2}{x^{1/2}(1+x^2)} dx$$

¹⁰Il termine singolarità indica in generale un punto in cui un ente matematico, come per esempio una funzione, degenera, cioè perde parte delle proprietà di cui gode negli altri punti generici, i quali per contrapposizione sono detti regolari. Talvolta le singolarità sono apparenti e altre volte, invece, nel punto singolare una funzione o le sue derivate possono non essere definite e nell'intorno del punto stesso tendere ad infinito.

e tramite il cambiamento di variabile $z = x^{1/2}$ si ottiene

$$I = -\frac{\pi}{2} + \int_0^1 \frac{4}{1+t^4} dt$$

il quale non presenta singolarità e può essere calcolato numericamente con una formula di quadratura.

Un modo alternativo di procedere consiste in una sottrazione della singolarità mediante un'opportuna funzione. In questo caso si può proseguire nel seguente modo

$$I = \int_0^1 \frac{\arctan x - x}{x^{3/2}} dx + \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \int_0^1 \frac{\arctan x - x}{x^{3/2}} dx + 2.$$

La nuova funzione integranda è della forma $(-1/3)x^{3/2} + O(x^{7/2})$ (vicino all'origine): si è quindi eliminata la singolarità nella funzione, ma è rimasta singolare la derivata seconda. Per avere maggiore regolarità è quindi necessario sottrarre un polinomio di grado superiore: ricordando lo sviluppo in serie di $\arctan x$ si può, per esempio, sottrarre $x - x^3/3$.

Segnaliamo, infine, la procedura basata su uno sviluppo in serie della funzione integranda. Nel caso dell'esempio

$$I = \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} x^{-3/2} dx = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2}{(2n+1)(4n+1)}.$$

Un altro tipo di singolarità si trova quando l'intervallo di integrazione è illimitato. In questo caso si effettua una trasformazione di variabili per ridurre l'intervallo di integrazione a un intervallo limitato. Ad esempio l'intervallo $(0, \infty)$ viene trasformato nell'intervallo $]0, 1[$ con la trasformazione $t = 1/(1+x)$ o $t = e^{-x}$.

L'integrale improprio $\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx$ può essere approssimato dall'integrale proprio $\int_0^b e^{-x^2} dx$ con un errore dato da

$$\begin{aligned} E &= \int_b^{\infty} e^{-x^2} dx < \frac{1}{b} \int_b^{\infty} x e^{-x^2} dx = -\frac{1}{2b} \int_b^{\infty} -2x e^{-x^2} dx = \\ &= -\frac{1}{2b} \int_b^{\infty} \frac{d}{dx} (e^{-x^2}) dx = -\frac{1}{2b} [e^{-x^2}]_{x=b}^{x=\infty} = \frac{1}{2b} e^{-b^2} \end{aligned}$$

errore che tende a zero per $b \rightarrow \infty$, riducendo il calcolo dell'integrale su $(0, \infty)$ alla ricerca di un valore b e al calcolo, mediante opportuna formula di quadratura, dell'integrale sull'intervallo $(0, b)$.

2.3 Approssimazione di integrali multipli

Le idee finora esaminate possono essere opportunamente generalizzate al calcolo degli integrali multipli, ma bisogna fare i conti con il rapido aumento delle operazioni richieste al crescere del numero delle dimensioni. Bisogna quindi trovare, quando è possibile, dei metodi analitici che riducano il numero delle dimensioni. Se consideriamo per esempio

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(x_1+x_2+x_3)} \sin(x_1x_3) \sin(x_2x_3) dx_1 dx_2 dx_3$$

possiamo vederlo come

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty e^{-x_1} dx_1 \int_0^\infty e^{-x_2} \sin(x_2x_1) dx_2 \int_0^\infty e^{-x_3} \sin(x_3x_1) dx_3 = \\ & = \int_0^\infty e^{-x_1} \left(\int_0^\infty e^{-x_2} \sin(x_2x_1) dx_2 \int_0^\infty e^{-x_3} \sin(x_3x_1) dx_3 \right) dx_1. \end{aligned}$$

Calcoliamo separatamente i due integrali interni:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{-x_2} \sin(x_1x_2) dx_2 &= \left| -e^{-x_2} \sin(x_1x_2) \right|_{x_2=0}^{x_2=\infty} + \int_0^\infty e^{-x_2} x_1 \cos(x_2x_1) dx_2 = \\ &= x_1 \int_0^\infty e^{-x_2} \cos(x_1x_2) dx_2 = x_1 \left[\left| -e^{-x_2} \cos(x_1x_2) \right|_{x_2=0}^{x_2=\infty} - \int_0^\infty e^{-x_2} x_1 \sin(x_2x_1) dx_2 \right] = \end{aligned}$$

dal quale si ricava che

$$\int_0^\infty e^{-x_2} \sin(x_1x_2) dx_2 = x_1 \left[1 - x_1 \int_0^\infty e^{-x_2} \sin(x_1x_2) dx_2 \right]$$

che implica, con facili conti che

$$\int_0^\infty e^{-x_2} \sin(x_1x_2) dx_2 = \frac{x_1}{1+x_1^2}.$$

Ragionando analogamente con l'altro integrale si ottiene

$$\int_0^{\infty} e^{-x^3} \operatorname{sen}(x_1 x_3) dx_3 = \frac{x_1}{1+x_1^2}.$$

In questo modo si può scrivere l'integrale di partenza come di seguito

$$\int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-(x_1+x_2+x_3)} \sin(x_1 x_3) \sin(x_2 x_3) dx_1 dx_2 dx_3 = \int_0^{\infty} \left(\frac{x_1}{1+x_1^2} \right)^2 e^{-x_1} dx_1$$

e l'integrale che resta può essere calcolato con le tecniche viste in precedenza.

Talvolta si riesce a ridurre il numero delle dimensioni attraverso un efficace cambiamento di variabile. Se per esempio si considera D un cerchio unitario e il seguente integrale

$$\int \int_D \frac{x_2 \sin(kx_2)}{x_1^2 + x_2^2} dx_1 dx_2$$

si ottiene un integrale semplice tramite il passaggio a coordinate polari.

Purtroppo questi procedimenti non sono di utilità generale, o per lo meno di facile applicabilità. Abbiamo bisogno quindi di tecniche più generali, tra le quali segnaliamo le seguenti:

i) quando il dominio è di integrazione semplice rispetto a uno degli assi coordinati (come per esempio un parallelogramma), l'integrale può essere ridotto ad integrazioni successive in una dimensione alle quali si possono applicare le usuali formule;

ii) quando il dominio è suddivisibile in figure elementari (come nel caso di un parallelogramma, di un prisma,...), l'integrale può essere calcolato come somma di integrali sulle singole figure elementari. Si tratta dell'estensione delle formule composte;

iii) quando il numero delle dimensioni è elevato è conveniente usare una tecnica di simulazione statistica, come il metodo Monte Carlo.

Ci soffermiamo sull'ultimo caso e andiamo ad approfondire proprio il cosiddetto *metodo Monte Carlo*, chiamato anche metodo delle prove statistiche (statistical trials), usato per trarre stime attraverso simulazioni e che si basa su un algoritmo che genera una serie di numeri tra loro incorrelati.

2.3.1 Metodo Monte Carlo

Il termine *Monte Carlo* viene introdotto da Von Neumann e Ulam durante la seconda guerra mondiale, come messaggio in codice per indicare il lavoro segreto condotto a Los Alamos¹¹: il metodo viene quindi utilizzato soprattutto per la simulazione della diffusione di neutroni nella fissione nucleare. In seguito il metodo è stato ampiamente utilizzato per approssimare il valore di integrali multipli e la soluzione di equazioni differenziali e integrali, originate dalla fisica e non risolubili in maniera analitica. Attualmente il metodo Monte Carlo rappresenta una delle tecniche più interessanti per l'analisi di sistemi complessi, e trova quindi applicazione in svariati campi. Il metodo Monte Carlo consiste nell'approssimazione della soluzione di un problema matematico mediante simulazioni basate sull'utilizzo di numeri casuali (simulazioni stocastiche). Questo metodo può essere accostato più a un metodo sperimentale che ai metodi numerici classici. In effetti l'errore ottenuto con questo metodo non può essere, in generale, stimato a priori, ma viene valutato mediante l'analisi della deviazione standard delle quantità che vengono simulate; inoltre la soluzione potrebbe non essere riproducibile nei suoi dettagli.

Introduciamo l'idea del metodo partendo dai concetti di base, per poter così arrivare facilmente ad un'analisi più approfondita del metodo stesso.

Numeri casuali e pseudo-casuali

Un aspetto di base del metodo Monte Carlo è costituito dalla disponibilità di successioni di numeri casuali (random variate), che vengono ricavate attraverso varie tecniche.

¹¹Il LANL (Los Alamos National Laboratory) è stato fondato per le ricerche e la produzione di armi nucleari nell'ambito del progetto Manhattan, durante la seconda guerra mondiale.

Numeri casuali con distribuzione uniforme

Un primo modo per generare numeri casuali, utilizzato soprattutto prima dell'affermarsi dei calcolatori, consiste nel successivo lancio di una moneta, o di un dado, o nell'utilizzo di altri processi fisici. In questo modo però si ottengono sì delle successioni, ma queste presentano l'inconveniente della non riproducibilità, oltre che della lentezza con cui sono ottenute. L'idea per superare queste difficoltà consiste nell'utilizzare, per la generazione di numeri casuali, delle operazioni aritmetiche di un calcolatore.

Un primo metodo in questa direzione è noto come *metodo mid-square*, suggerito da Von Neumann nel 1951. Esso consiste nel prendere il quadrato del numero casuale precedente e estrarne le cifre centrali: per esempio se si generano numeri casuali di quattro cifre e abbiamo il numero 5232, che ha come quadrato 27 373 824, si assume come numero casuale successivo il numero 3738. In realtà i numeri così generati non sono propriamente casuali e per questo vengono usualmente chiamati *numeri pseudo-casuali*. Ad oggi le procedure maggiormente utilizzate per la generazione di numeri pseudo-casuali con distribuzione uniforme sono basate sulla relazione di congruenza della seguente forma

$$x_i = (ax_{i-1} + c)(\text{mod } m) \quad , \quad m = 1, 2, \dots \quad (2.14)$$

in cui il moltiplicatore a , l'incremento c e il modulo m sono interi non negativi¹². Naturalmente la successione generata dalla (2.14) a partire da un intero x_0 si ripete al più m passi, ed è quindi periodica.

Per questo tipo di applicazioni si ha interesse a prendere i parametri a , c e m affinché il periodo p sia il più lungo possibile, e quando si ha $p = m$ si dice

¹²L'operazione modulo $(\text{mod } m)$ significa che vale

$$x_i = ax_{i-1} + c - mk_i$$

dove $k_i = [(ax_{i-1} + c)/m]$ indica la parte intera di $(ax_{i-1} + c)/m$, cioè x_i è il resto della divisione di $ax_{i-1} + c$ per m .

che il generatore (2.14) ha un periodo completo. Ricordiamo inoltre che p ed m non devono avere divisori comuni. La costruzione di efficienti generatori di numeri pseudo-casuali è dunque strettamente dipendente dal calcolatore. Un'altra idea interessante per generare successioni di numeri pseudo-casuali consiste nel calcolare il generico elemento come combinazione lineare di due elementi precedenti: per questo motivo la procedura è anche chiamata *generatore di Fibonacci*. Come esemplificazione possiamo considerare

$$x_{i+1} = x_{i-17} - x_{i-5}$$

nel quale i valori della successione dipendono da 17 valori iniziali x_i , assunti nell'intervallo $(0, 1)$.

Numeri casuali secondo una distribuzione assegnata

Nelle applicazioni è spesso necessario generare numeri casuali ξ distribuiti secondo una densità di probabilità assegnata $f(x)$, non necessariamente uniforme su un generico intervallo (a, b) . Ricordiamo che questo significa che la probabilità che $\xi \in [a, b]$ è $\int_a^b f(x)dx$, intuitivamente significa che $f(x) dx$ è la probabilità che ξ si trovi in un intorno di x di ampiezza infinitesima dx . Per la distribuzione uniforme su $(0, 1)$ si ha $f(x) = 1$ su $(0, 1)$ e $f(x) = 0$ fuori dall'intervallo.

I numeri ξ possono essere trovati a partire dai numeri casuali su $(0, 1)$ in diversi modi.

Metodo della trasformata inversa

Consideriamo $F(x)$ una funzione di distribuzione (o di ripartizione) corrispondente alla densità di probabilità $f(x)$, ossia la funzione

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt.$$

$F(x)$ è così una funzione non decrescente in (a, b) con $0 \leq F(x) \leq 1$. Ad ogni numero casuale r a distribuzione uniforme su $(0, 1)$ si associa ξ definito nel modo seguente

$$\xi = F^{-1}(r) := \inf\{x \in (a, b) | F(x) \geq r\}, \quad 0 \leq r \leq 1 \quad (2.15)$$

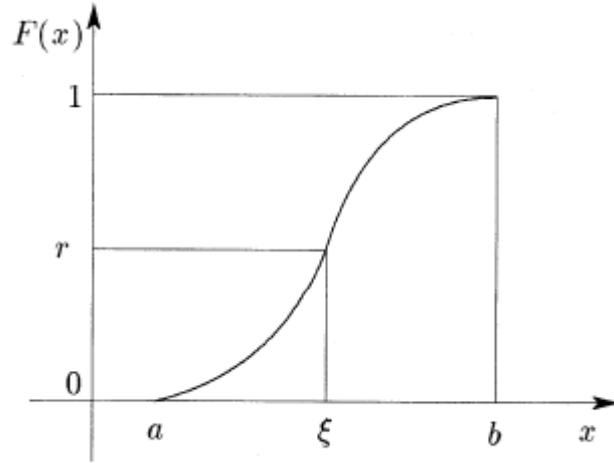


Figura 2.7: Illustrazione del metodo della trasformata inversa.

come possiamo notare in Figura 2.7. Inoltre dalla figura si può osservare che la probabilità che ξ sia nell'intervallo $(x, x + dx)$ è uguale alla probabilità che r stia nell'intervallo $(F(x), F(x + dx))$; quest'ultima, essendo r distribuito uniformemente, è data da $F(x + dx) - F(x) = F'(x)dx$, ossia da $f(x)dx$, e di conseguenza ξ segue la distribuzione $f(x)$. In altre parole, se U è una variabile aleatoria con distribuzione uniforme su $[0, 1]$, allora la variabile $F^{-1}(U)$ ha F come funzione di distribuzione; viceversa, se X è una variabile aleatoria con funzione di ripartizione F , allora si ha che $F(x)$ è uniformemente distribuita su $[0, 1]$.

Il risultato (2.15) può essere utilizzato per generare numeri random in cui F^{-1} non sia nota esplicitamente. Per ottenere la densità $f(x)$ è necessario, praticamente, generare un numero elevato N di numeri casuali r e dedurne i corrispondenti numeri casuali ξ . Si tiene conto quindi del numero $\Delta n(x)$ di numeri ξ nell'intervallo $(x - \Delta x/2, x + \Delta x/2)$ da cui $\Delta n(x)/N = f(x)\Delta x$. Osserviamo infine che, quando la distribuzione $f(x)$ è data a meno di un fattore di normalizzazione, l'equazione (2.15) è sostituita da

$$r = \left(\int_a^\xi f(t)dt \right) / \left(\int_a^b f(t)dt \right).$$

Consideriamo, per esempio, la distribuzione esponenziale $\varepsilon(\lambda)$ definita nel seguente modo

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{se } 0 \leq x < \infty, \lambda > 0 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

a cui corrisponde la funzione di ripartizione

$$F(x) = \int_0^x \lambda e^{-\lambda t} dt = 1 - e^{-\lambda x}.$$

Il metodo della trasformata ci fornisce direttamente il risultato

$$\xi = -\frac{\ln(1-r)}{\lambda}$$

oppure, poichè $1-r$ è anch'esso un numero casuale a distribuzione uniforme su $(0, 1)$

$$\xi = -\frac{1}{\lambda} \ln r.$$

Come abbiamo già osservato, il metodo della trasformata inversa è utilizzabile nella forma illustrata in precedenza quando $F(x)$ è tale che la corrispondente trasformata inversa può essere calcolata analiticamente, o in maniera analoga, quando esiste la soluzione analitica dell'equazione $F(\xi) = r$. Ci sono comunque distribuzioni, tra cui la gaussiana, per le quali questo non si verifica. Esistono quindi opportuni metodi alternativi.

Metodo acceptance-rejection di Von Neumann

Supponiamo che la densità di probabilità $f(x)$, definita sull'intervallo (a, b) , sia limitata

$$f(x) \leq M.$$

Avremo così $f(x)/M \leq 1$ e $f(a) = 0$. Si generano allora delle coppie di numeri casuali (r_1, r_2) a distribuzione uniforme su $(0, 1)$. Si confronta quindi r_1 con la quantità $f(a + (b-a)r_2)/M$ e se

$$\begin{cases} (1/M)f(a + (b-a)r_2) \geq r_1 & \text{si pone } \xi = a + (b-a)r_2 \\ (1/M)f(a + (b-a)r_2) < r_1 & \text{si scarta la coppia } (r_1, r_2) \end{cases}$$

si può dimostrare che i numeri casuali ξ selezionati in questo modo seguono la distribuzione $f(x)$.

Possiamo generalizzare questo metodo andando a considerare una variabile aleatoria X con densità di probabilità $f_X(x)$, che viene rappresentato nella forma

$$F_X(x) = C h(x)g(x)$$

in cui $C \geq 1$, $h(x)$ è una densità di probabilità e $0 < g(x) \leq 1$. Si generano in questo modo due variabili aleatorie U e Y , rispettivamente con distribuzione $u(0, 1)$ e $h(y)$, per cui si esegue il test $U \leq g(Y)$. Quando il test è verificato si assume Y come numero casuale secondo la distribuzione $f_X(x)$, altrimenti si rigetta la coppia U, Y e si ripete il procedimento.

Questa procedura è conveniente nel momento in cui è facile generare numeri casuali secondo la distribuzione $h(x)$ e l'efficienza (cioè il reciproco del numero di tentativi prima di trovare una coppia che passi il test) è sufficientemente elevata. Si può vedere inoltre che la probabilità di successo di ogni tentativo è data da $p = 1/C$.

Caso della distribuzione gaussiana

Una variabile casuale X ha una distribuzione gaussiana (o normale) $N(\mu, \sigma^2)$ se la densità di probabilità è data da

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}, \quad -\infty < x < +\infty.$$

Dal momento che $X = \mu + \sigma Z$, dove Z è la variabile normale standard $N(0, 1)$, possiamo limitarci a considerare la distribuzione di numeri casuali distribuiti secondo la distribuzione $N(0, 1)$. In questo caso specifico non è possibile esprimere in forma analitica l'inversa F^{-1} della formula di ripartizione ed è per questo che non possiamo utilizzare il metodo della trasformata inversa. Ci limitiamo qui a ricordare un metodo introdotto da Box e Muller (1958) e basato sul seguente risultato.

Se r_1 e r_2 sono due numeri casuali indipendenti distribuiti secondo la distribuzione $u(0, 1)$, allora i numeri

$$z_1 = (-2 \ln U_1)^{1/2} \cos(2\pi U_2) \quad , \quad z_2 = (-2 \ln U_1)^{1/2} \sin(2\pi U_2)$$

seguono la distribuzione $N(0, 1)$ (la dimostrazione del risultato è basata sul passaggio a due dimensioni e alla trasformata in coordinate polari).

Calcolo di integrali

Nel caso di integrali in una dimensione abbiamo analizzato alcune tecniche per eliminare le eventuali discontinuità. In due o più dimensioni tuttavia le singolarità di una funzione o delle sue derivate possono presentarsi anche lungo curve o superfici di forma complicata, facendo risultare difficile la loro rimozione con particolari suddivisioni del dominio o con sostituzioni di variabili. In questi casi il metodo Monte Carlo diventa competitivo con le formule di quadratura, in particolare quando la dimensione del dominio di integrazione è molto elevata, casi in cui potrebbe essere l'unico metodo utilizzabile.

Tutto quello che il metodo richiede è che la funzione integranda sia definita nel dominio di integrazione e che l'integrale esista. Un'aspetto degno di nota riguarda l'ordine di convergenza: mentre per le formule di quadratura il numero di valutazioni necessarie per ottenere un'accuratezza assegnata cresce esponenzialmente con il numero delle dimensioni, in questo caso è indipendente dalle dimensioni del dominio di integrazione.

Di questo metodo andremo ad esaminare in particolare due idee: la prima, nota come *metodo Monte Carlo hit or miss*, che è basata sull'interpretazione geometrica di un integrale come area, mentre la seconda, chiamata *metodo Monte Carlo sample-mean*, più efficiente solitamente della precedente, che utilizza la rappresentazione di un integrale come valor medio.

Metodo Monte Carlo hit or miss

Sia

$$I = \int_a^b g(x) dx \quad (2.16)$$

l'integrale da approssimare, in cui, per semplicità, supponiamo $0 \leq g(x) \leq c$.
Indichiamo con R il rettangolo

$$R = \{(x, y) : a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq c\}.$$

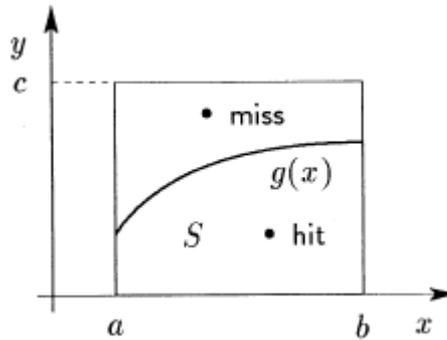


Figura 2.8: Rappresentazione grafica del metodo Monte Carlo hit or miss.

Sia (X, Y) un vettore casuale distribuito uniformemente sul rettangolo R con densità di probabilità

$$f_{XY} = \begin{cases} \frac{1}{[c(b-a)]} & \text{se } (x, y) \in R \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

La probabilità p che il vettore casuale (X, Y) cada nell'insieme $S := \{(x, y) | y \leq g(x)\}$ è data da

$$p = \frac{\text{area } S}{\text{area } R} = \frac{\int_a^b g(x) dx}{c(b-a)} = \frac{I}{c(b-a)}. \quad (2.17)$$

Se considero poi N vettori casuali indipendenti $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \dots, (X_N, Y_N)$, allora il parametro p può essere stimato dal rapporto

$$\hat{p} = \frac{N_H}{N} \quad (2.18)$$

in cui N_H è il numero dei successi (*hits*), cioè del numero dei vettori per i quali $g(X_i) \geq Y_i$, $i = 1, 2, \dots, N$ ($N - N_H$ è il numero degli insuccessi,

(*misses*)).

Dalle equazioni (2.17) e (2.18) segue che l'integrale I può essere stimato come segue

$$I \approx \theta_1 = c(b-a) \frac{N_H}{N}.$$

Dal momento che ognuna delle N prove costituisce una prova di Bernoulli con probabilità p di successo, allora

$$E(\theta_1) = c(b-a)E\left(\frac{N_H}{N}\right) = c(b-a)\frac{E(N_H)}{N} + pc(b-a) = I$$

da cui si ricava che θ_1 è uno stimatore non distorto¹³ di I . La varianza di p è data da

$$\text{var}(p) = \text{var}\left(\frac{N_H}{N}\right) = \frac{1}{N^2} \text{var}(N_H) = \frac{1}{N}p(1-p)$$

da cui, tenendo presente la (2.17) vale

$$\text{var}(\theta_1) = [c(b-a)]^2 \text{var}(\hat{p}) = \frac{1}{N}[c(b-a) - I].$$

Metodo Monte Carlo sample-mean

Il metodo sample-mean consiste nel rappresentare l'integrale (2.16) come un valore atteso di una particolare variabile aleatoria. In maniera generale, possiamo scrivere l'integrale nel seguente modo

$$I = \int_a^b g(x)dx \quad \Rightarrow \quad I = \int_a^b \frac{g(x)}{f_X(x)} f_X(x)dx$$

dove $f_X(x)$ è una qualunque densità di probabilità tale che $f_X(x) > 0$ quando $g(x) \neq 0$. Allora

$$I = E\left(\frac{g(x)}{f_X(x)}\right)$$

¹³In statistica uno stimatore è una funzione che associa ad ogni possibile campione un valore del parametro da stimare. Uno stimatore si dice distorto se per qualche ragione ha valore atteso diverso dalla quantità che stima.

in cui la variabile aleatoria X è distribuita secondo $f_X(x)$. Assumendo in particolare

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{(b-a)} & \text{se } a < x < b \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

si ha

$$E(g(x)) = \frac{I}{b-a} \Rightarrow I = (b-a)E(g(x))$$

e uno stimatore non distorto di I è la seguente media campionaria (*sample mean*)

$$\theta_2 = (b-a) \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N g(X_i). \quad (2.19)$$

La varianza di θ_2 è data da $E(\theta_2^2) - [E(\theta_2)]^2$ e quindi si ha

$$\text{var}(\theta_2) = \frac{1}{N} \left[(b-a) \int_a^b g^2(x) dx - I^2 \right]. \quad (2.20)$$

In conclusione questo metodo è definito da questi passi:

1. si genera una successione $\{U_i\}_{i=1}^N$ di N numeri casuali;
2. si calcola $X_i = a + U_i(b-a)$, $i = 1, \dots, N$;
3. si calcola $g(X_i)$, $i = 1, \dots, N$;
4. si calcola la media θ_2 come indicato in (2.19), che fornisce una stima dell'integrale I con varianza data dalla (2.20).

Calcolo di integrali multipli

I metodi che abbiamo visto si estendono facilmente al calcolo di un integrale multiplo del tipo

$$I = \int_D g(x) dx$$

dove si ha $x = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T \in \mathbb{R}^n$ e $D = \prod_{k=1}^n [a_k, b_k]$. Se consideriamo l'applicazione del sample-mean, essa consiste nell'estrarre a caso, per la prova i -esima, n variabili aleatorie a distribuzione rettangolare su $(0, 1)$

$$U_i = [U_{i1}, U_{i2}, \dots, U_{in}] \quad , \quad i = 1, 2, \dots, N$$

a cui si associa il vettore $X_i = [X_{i1}, X_{i2}, \dots, X_{in}]$, con $X_{ik} = a_k + (b_k - a_k)U_{ik}$.

In corrispondenza si calcola il seguente stimatore di I

$$\bar{I} = |D| \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N g(X_i) \quad , \quad |D| = \prod_{k=1}^n (b_k - a_k)$$

e il valore della varianza si può ottenere procedendo nello stesso modo visto in precedenza. Come si vede, all'aumento della dimensione n corrisponde un aumento della quantità dei numeri casuali necessari, ma non della valutazione di g ; in altre parole il risultato di base sulla riduzione dell'errore in maniera proporzionale a $N^{-1/2}$ si applica indipendentemente dalle dimensioni del dominio d'integrazione.

Capitolo 3

Approssimazione integrale in analisi numerica

3.1 L'analisi numerica

L'analisi numerica (detta anche calcolo numerico o calcolo scientifico) è una disciplina che rientra nella classe della matematica applicata. Il suo obiettivo è di sviluppare metodi per la risoluzione “pratica” di problemi matematici nel continuo (cioè relativi ai numeri reali o ai numeri complessi) tramite algoritmi spesso implementabili nei calcolatori. Si noti che la soluzione calcolata dall'algoritmo (detta anche soluzione numerica) è sempre un'approssimazione di quella esatta: un algoritmo non ha ovviamente interesse se la soluzione calcolata si discosta molto da quella esatta.

Il campo dell'analisi numerica nasce ben prima dell'invenzione dei calcolatori elettronici: infatti la prima persona che utilizza questo termine, nell'accezione moderna, in cui per analisi si intende il calcolo differenziale e integrale, è Isaac Newton (1642-1727) nel trattato “*Analysis per aequationes numero terminorum infinitas*”. In seguito altri autori (quali Joseph-Louis Lagrange, Seidel, Jacobi, Carl Friedrich Gauss, Eulero) ripresero il termine usandolo sempre con questo significato finché, dalla seconda metà del XIX secolo, tutti i trat-

tati di calcolo differenziale e integrale furono chiamati trattati di analisi.

Per facilitare il conto a mano si erano stampati dei libri interi pieni di formule e tabelle di dati, come punti interpolanti, o coefficienti di particolari funzioni, che venivano utilizzati per trovare i valori da inserire nelle formule date e ottenere stime numeriche molto buone di alcune funzioni. Si passa poi alle *calcolatrici meccaniche*, sviluppatasi per eseguire una o più operazioni aritmetiche (addizione, sottrazione, moltiplicazione e divisione) in modo automatico, grazie a meccanismi azionati a mano o da un motore elettrico: queste si trasformano in calcolatori elettronici attorno al 1940, strumenti utili anche per scopi amministrativi, ma che soprattutto rivoluzionano il campo dell'analisi numerica, in quanto permettono di eseguire calcoli più lunghi e complessi.

L'impatto sul mondo reale è decisivo e sfata il luogo comune secondo il quale la matematica non avrebbe alcun fine pratico. Un esempio per tutti: l'algoritmo FFT (Trasformata Veloce di Fourier), che è uno dei successi dell'analisi numerica, è alla base degli algoritmi ricostruttivi delle immagini di tomografia computerizzata e di risonanza magnetica, come di risoluzione di problemi della multimedialità (compressione JPEG di immagini, compressione MP3 di musica, compressione mpeg di filmati, campionamento e filtraggio di segnali, solo per citare i più importanti). Ma gli algoritmi di analisi numerica sono applicati quotidianamente per risolvere molti altri problemi scientifici e tecnici, come le previsioni meteorologiche, la progettazione di strutture come ponti e aeroplani, l'analisi di molecole (chimica computazionale). L'efficienza degli algoritmi e della loro implementazione ha una grande importanza. Pertanto, un metodo euristico, ma efficiente, può essere preferito a un metodo con una solida base teorica ma inefficiente. In generale, l'analisi numerica è una scienza sia teorica che sperimentale, infatti usa assiomi, teoremi e dimostrazioni, come il resto della matematica, ma usa anche i risultati empirici delle elaborazioni eseguite per studiare i metodi migliori per risolvere i problemi.

Il campo dell'analisi numerica può essere suddiviso in diverse discipline, a

seconda di quale sia il problema da risolvere:

- *calcolo dei valori delle funzioni:*
l'attenzione principale nella risoluzione di questi problemi è volta a stimare e tenere sotto controllo gli errori di arrotondamento dovuti all'aritmetica a virgola mobile;
- *interpolazione, estrapolazione, regressione:*
i metodi di interpolazione e estrapolazione stimano il valore di una funzione incognita dato il valore della funzione stessa in alcuni punti, mentre la regressione è simile ai suddetti problemi, ma tiene conto che i valori dati sono imprecisi;
- *soluzioni di equazioni e di sistemi di equazioni:*
la distinzione principale è tra equazioni (o sistemi di equazioni) lineari, che vengono risolti con metodi diretti o tramite procedimento iterativo, e equazioni (o sistema di equazioni) non lineari, che si affrontano tramite linearizzazione, o tramite algoritmi per trovare le radici;
- *ottimizzazione:*
i problemi di ottimizzazione richiedono di trovare il punto, che deve soddisfare alcuni vincoli, in cui una data funzione assume il valore massimo (o minimo);
- *valutazione di integrali:*
l'integrazione numerica, nota anche come quadratura numerica, stima il valore di un integrale definito, usando, per esempio, le formule di Newton-Cotes, la quadratura numerica di Gauss o il metodo Monte Carlo per integrali in più dimensioni;
- *equazioni differenziali:*
le equazioni differenziali vengono risolte dapprima discretizzando l'equazione, cioè portandola in un sottospazio a dimensione finita e si riduce il problema alla soluzione di un'equazione algebrica.

Un modo per comprendere il carattere di una disciplina è di esaminarne gli obiettivi, che possono essere enunciati in forme diverse, ma equivalenti nella sostanza. Ad esempio, si può dire che obiettivo principale dell'analisi numerica è trovare gli *algoritmi* che risolvono un problema matematico nel minimo tempo e con la massima accuratezza; possiamo vedere cioè l'analisi numerica come l'arte di dare una risposta numerica ad un problema matematico mediante un calcolatore automatico digitale.

Definizione 3.1. *Viene detto algoritmo un insieme di istruzioni, eseguibili in sequenza, non contraddittorie e in numero finito.*

Dalla precedente definizione si evincono alcune proprietà caratteristiche degli algoritmi, che essi devono possedere per essere definiti come tali:

- i passi devono essere elementari, ovvero non ulteriormente scomponibili (atomicità);
- i passi devono essere interpretabili in modo diretto e univoco dall'esecutore, sia esso umano o artificiale (non ambiguità);
- l'algoritmo deve essere composto da un numero finito di passi e richiedere una quantità finita di dati in ingresso (finitezza);
- l'esecuzione deve avere termine dopo un tempo finito;
- l'esecuzione deve portare ad un risultato univoco;
- ad ogni passo, il successivo deve essere uno ed uno solo, ben determinato.

Il concetto di algoritmo indica in generale il procedimento per la risoluzione di un problema, che deve essere risolto attraverso un numero finito di passi, che produce in un tempo finito la soluzione desiderata. Se per ottenere un certo risultato (risolvere un certo problema) esiste un procedimento infallibile, che può essere descritto in modo non ambiguo fino ai dettagli, e conduce sempre all'obiettivo desiderato in un tempo finito, allora esistono le condizioni per affidare questo compito a un computer, semplicemente descrivendo l'algoritmo in questione in un programma scritto in un opportuno linguaggio comprensibile alla macchina.

Un aspetto importante che non può essere trascurato nella progettazione di un algoritmo è la caratterizzazione dell'efficienza con la quale l'algoritmo stesso viene eseguito su un elaboratore. L'efficienza è, tra l'altro, da intendersi non solo come tempo di esecuzione, ma anche come utilizzo delle altre risorse del sistema di elaborazione, come ad esempio la memoria centrale.

Dato un problema, è possibile determinare un insieme, generalmente finito, di algoritmi in grado di risolverlo. La scelta di un algoritmo piuttosto che un altro può essere basata su differenti fattori. Ad esempio il tempo di esecuzione, le risorse necessarie alla sua esecuzione, etc. Tra essi, quello che gioca un ruolo essenziale è la complessità computazionale, che può essere misurata come tempo necessario all'esecuzione dell'algoritmo su un computer di architettura tradizionale. La valutazione della complessità computazionale deve soddisfare due requisiti:

- 1) *Non deve dipendere da una particolare macchina o da un particolare compilatore*: il tempo di esecuzione di ogni istruzione in un qualunque linguaggio non è uguale per tutti i calcolatori, e il numero di istruzioni in linguaggio macchina che vengono generate in corrispondenza ad un programma scritto in un linguaggio ad alto livello dipende dal particolare compilatore;
- 2) *Deve essere espressa in funzione dei dati in ingresso*: dato che un algoritmo elabora dei dati in ingresso per fornirne altri che rappresentano la soluzione del problema, quello che interessa è sapere come il tempo di esecuzione dell'algoritmo varia al variare dei dati in ingresso. In particolare, la dipendenza del tempo di esecuzione dai dati in ingresso al problema può essere relativa sia alla dimensione dei dati in ingresso (numero dei dati che devono essere elaborati dall'algoritmo) che al loro valore (i particolari valori assunti dai dati in ingresso).

Noi ci dedicheremo alla parte dell'analisi numerica riguardante la valutazione di integrali, che abbiamo visto nel capitolo precedente sotto un punto di vista analitico. Uno dei più conosciuti ambienti per il calcolo numerico e

l'analisi statistica è l'ambiente **MATLAB** (abbreviazione di Matrix Laboratory) che comprende anche l'omonimo linguaggio di programmazione creato dalla MathWorks. MATLAB consente di manipolare matrici, visualizzare funzioni e dati, implementare algoritmi, creare interfacce utente, e interfacciarsi con altri programmi.

Nasce alla fine degli anni '70, creato da Cleve Moler, il presidente del dipartimento di scienze informatiche dell'Università del Nuovo Messico. Egli dà vita a MATLAB per dare ai suoi studenti accesso a LINPACK e ad EISPACK¹ senza che essi dovessero conoscere il Fortran. Presto si diffonde nelle altre università e trova un grande pubblico tra la comunità dei matematici applicati. Jack Little, un ingegnere, conosce il programma durante una visita a Moler all'università di Stanford nel 1983. Riconoscendo il suo potenziale commerciale, si unisce a Moler e Steve Bangert. Essi riscrivono MATLAB in C e fondano la *The MathWorks* nel 1984 per continuare il suo sviluppo.

Gli algoritmi che analizzeremo, tutti realizzati con MATLAB, sono esempi di codice di alcuni tra i metodi che abbiamo affrontato nel secondo capitolo.

3.2 Alcuni esempi di algoritmi

Ricordiamo che lo scopo di questi algoritmi è di calcolare, o meglio approssimare, l'integrale

$$I(f) = \int_a^b f(x) dx$$

con $f(x)$ definita sull'intervallo limitato e chiuso $[a, b]$, integrale inteso come integrale di Riemann.

3.2.1 Algoritmo di Simpson

Andiamo ora a vedere la formula di quadratura composta di Simpson sottoforma di algoritmo. Esso segue i seguenti passi:

¹LINPACK e EISPACK sono librerie software, entrambe scritte in Fortran, sviluppate per eseguire operazioni di algebra lineare.

- Inizializzazione delle variabili;
- Valutazione della funzione negli estremi a e b e salvataggio di tali valori che verranno poi riutilizzati in seguito (tutte le valutazioni di funzioni vengono eseguite richiamando il modulo ausiliario Fun);
- Suddivisione dell'intervallo di integrazione (a, b) in due sottointervalli e calcolo della prima stima dell'integrale usando la formula di Simpson semplice su 3 punti;
- Inizio del ciclo `while` che dà luogo al procedimento di Simpson. Tale ciclo termina o quando si raggiunge la tolleranza richiesta o quando si raggiunge il numero massimo di valutazioni di funzione consentito;
- Al termine del ciclo c'è un controllo che stabilisce quali delle suddette condizioni si è verificata, in modo da restituire in output il corrispettivo valore dell'indicatore `iflag`, indice dell'errore.

I parametri di **input** sono:

- a e b , rispettivamente gli estremi sinistro e destro dell'intervallo di integrazione;
- f , che indica la funzione integranda scritta nel seguente modo

$$f = '(100./x.^7) .* sin(10./x.^7)'$$

- $tolleranza$, la tolleranza richiesta;
- n_{fmax} , che indica il massimo numero consentito di valutazioni della funzione.

Per quanto riguarda invece i parametri di **output** abbiamo:

- AI , che è l'approssimazione dell'integrale;
- $Errore$, che stima l'errore;
- $iflag$, che indica se durante la procedura si verificano degli errori: vale 0 se la condizione di uscita si è verificata per il raggiungimento della tolleranza richiesta o 1 se si è verificata per il raggiungimento del numero massimo di valutazioni;

- *nval*, il numero di valutazioni della funzione.

Si fa utilizzo della funzione *Fun*, una funzione ausiliaria che calcola i valori della funzione dati in input secondo Matlab (*function y=Fun(f,x)*), di cui illustriamo subito il codice:

Listing 3.1: Funzione ausiliaria *Fun*

```

1 function y=Fun( f, x )
2 Funzione = sprintf( 'y=%s;', f);    % crea la funzione
3 eval( Funzione );                % calcola i valori

```

Andiamo a vedere ora la parte di **codice del metodo di Simpson**.

Listing 3.2: Algoritmo di Simpson

```

1 function [AI,Errore,iflag,nval]=simfix(a,b,f,tolleranza,nfmax)
2 Iprecedente=0;                    % Inizializzazione variabili
3 AI=0;
4 fa=0;
5 fb=0;
6
7 fa=Fun(f,a);
8 fb=Fun(f,b);
9 Errore=tolleranza;
10 nval=3;
11
12 iflag=0;                          % Inizializza l'indicatore di errore
13 sommaprecedente=0;                % Somma valutazioni all'iterazione k
14 sommacorrente=0;                  % Somma valutazioni all'iterazione k+1
15 h=(b-a)/2;
16 sommacorrente=Fun(f,a+h);
17
18 AI=(h/3)*(fa + 4*sommacorrente + fb);    % Calcolo di Simpson
19 k=1;                                    % su tre punti

```

```

20
21 while (Errore>=tolleranza) & (nval<=nfmax) % Metodo di Simpson
22 k=k+1;
23 Iprecedente=AI; % Memorizza il valore dell'ultima iterazione
24 h=(b-a)/(2^k);
25
26 m=2^(k-1); % Calcola il numero dei nodi in cui andare
27 % a valutare la funzione
28 sommaprecedente = sommaprecedente + sommacorrente;
29 sommacorrente=0; % Aggiornamento somma delle valutazioni
30 for i=1:1:m % al passo k+1 con l'aiuto di Fun
31 sommacorrente = sommacorrente + Fun(f,a+((2*i)-1)*h);
32 end
33 % Calcolo dell'integrale definito con
34 % la formula di Simpson composta
35 AI=(h/3)*(fa + 2*sommaprecedente + 4*sommacorrente + fb);
36
37 Errore=abs(AI-Iprecedente)/15; % errore (stima di Richardson)
38 nval=nval+m; % Aggiornamento del numero
39 end % di valutazioni effettuate
40 iflag=(nval>=nfmax & Errore>=tolleranza);

```

3.2.2 Algoritmo di Simpson adattivo

Vediamo ora il metodo di Simpson adattivo sottoforma di algoritmo. Questo algoritmo, dopo aver inizializzato le variabili e calcolato la prima stima dell'integrale richiamando la funzione *simfix* (eseguita su 3 punti), crea una lista in cui verranno memorizzati tutti i dati relativi ai sottointervalli. Successivamente, ha inizio il ciclo while che esegue il procedimento di Simpson a schema adattivo. Tale ciclo esegue le seguenti operazioni:

- Ricerca nella lista dell'intervallo con errore massimo utilizzando il modulo ausiliario *MaxList*
- L'intervallo selezionato viene suddiviso in due parti per calcolare le nuove approssimazioni di integrale ed errore;

- Rimozione dalla lista della vecchia approssimazione relativa all'intervallo selezionato;
- Calcolo delle nuove approssimazioni sul sottointervallo di sinistra e di destra;
- Aggiornamento della lista con i nuovi dati;
- Aggiornamento delle stime complessive di integrale ed errore.

Infine vi è un controllo sulle condizioni di terminazione del ciclo.

I parametri di **input** e di **output** sono esattamente quelli utilizzati nell'algoritmo di Simpson semplice, a meno del parametro di input f sostituito qui dal parametro fun .

Si utilizza una nuova funzione ausiliaria *MaxList*, funzione che esegue la ricerca nella lista dell'intervallo con errore massimo. Una volta trovato ne restituisce i dati al programma chiamante. Illustriamo qui sotto il codice di *MaxList*:

Listing 3.3: Funzione ausiliaria *MaxList*

```

1 function [E, approx, xl, xh, k]=MaxList(list, c)
2 E=getfield(list(1), 'est');           % Salva i valori alla testa
3 approx=getfield(list(1), 'approx');   % della struttura
4 xl=getfield(list(1), 'xl');
5 xh=getfield(list(1), 'xh');
6 k=1;
7 for (j=2:1:c)                         % Ricerca dati relativi all'intervallo
8 if (E<getfield(list(j), 'est'))       %con errore massimo
9 E=getfield(list(j), 'est');           % Confronta la testa della lista con
10 approx=getfield(list(j), 'approx');   % gli altri valori
11 xl=getfield(list(j), 'xl');
12 xh=getfield(list(j), 'xh');
13 k=j;                                   % Indica la posizione nella lista
14 end                                     % dell'intervallo con il massimo errore
15 end

```

E vediamo immediatamente qui sotto il **codice del metodo di Simpson adattivo**.

Listing 3.4: Algoritmo di Simpson adattivo

```

1 function [AI,Errore,iflag,nval]=simglobal(a,b,fun,tolleranza,nfmax)
2 nval=1;
3 [Iprecedente,Errore,z,g]=simfix(a,b,fun,0,3);
4 list(nval)=struct('xl',a,'xh',b,'approx',Iprecedente,'est',Errore);
5                               % Crea una lista in cui vengono inseriti
6 AI=Iprecedente;               % i dati riferiti agli intervalli
7 while (Errore>=tolleranza & nval<=nfmax) % Inizio procedimento
8                               % Simpson adattivo
9 [E,Iprecedente,xa,xb,k]=MaxList(list,nval);
10 h=(xb-xa)/2;
11 xmid=xa+h;                   % Calcola il punto medio
12 list(k)=[];                 % Rimuove dalla lista la vecchia approssimazione
13                               % relativa all'intervallo selezionato
14 [I1,E1,z,g]=simfix(xa,xmid,fun,0,3);
15 list(nval)=struct('xl',xa,'xh',xmid,'approx',I1,'est',E1);%Calcolo
16 nval=nval+1;                % nuova approssimazione sul
17 [I2,E2,z,g]=simfix(xmid,xb,fun,0,3); % sottointervallo destro e
18                               % sinistro e aggiornamento lista
19 list(nval)=struct('xl',xmid,'xh',xb,'approx',I2,'est',E2);
20
21 AI=AI-Iprecedente+I1+I2;     % Nuova stima integrale e errore.
22 Errore=Errore-E+E1+E2;
23 end
24 iflag=(nval>=nfmax & Errore>=tolleranza);

```

3.2.3 Algoritmo di Romberg

Passiamo ad analizzare l'algoritmo del metodo di Romberg. Questo algoritmo calcola l'approssimazione della funzione integrale $fname$ su un intervallo generico $[a, b]$ mediante la formula di integrazione di Romberg.

Si comincia con il creare una tabella in cui verranno inseriti tutti i valori dell'approssimazione dell'integrale. Indichiamo con I la miglior approssimazione dell'integrale.

I valori di **input** sono:

- *fname*, che è la funzione di cui vogliamo calcolare l'approssimazione (deve essere *inline*, cioè direttamente nello spazio di lavoro);
- *a*, *b*, che sono gli estremi dell'intervallo considerato;
- *m*, che mi dà il numero massimo di sottointervalli in cui è suddiviso l'intervallo $[a, b]$, pari a 2^m .

Invece, per quanto riguarda i valori di **output** abbiamo:

- I , che mi dà la migliore approssimazione dell'integrale della funzione;
- *tab*, matrice $(m + 1) \times (m + 1)$ che contiene la tabella contenente le approssimazioni di Romberg;
- I_{diag} , che è un vettore di dimensione $m + 1$, che contiene la diagonale di *tab*.

Questo script si appoggia alla funzione ausiliaria *trap*, la quale calcola un'approssimazione dell'integrale della funzione sull'intervallo $[a, b]$ mediante la formula dei trapezi composta usando $m + 1$ punti equidistanti di $[a, b]$. Riproduciamo immediatamente sotto il codice della funzione *trap*.

Listing 3.5: Funzione ausiliaria *trap*

```

1 function I = trap(fname, a, b, m)
2 h = (b-a)/m; % Calcola la lunghezza di
3 % m sottointervalli equivalenti
4 xk = linspace(a,b,m+1); % Genera m+1 punti equidistanti
5 % all'interno del range
6 fxk = feval(fname,xk); % Valuta la funzione (inline)
7
8 I = h*( 0.5*fxk(1) + sum(fxk(2:m)) + 0.5*fxk(m+1)); % Formula dei
9 % trapezi composta

```

Possiamo così passare all'esposizione del **codice del metodo di Romberg**.

Listing 3.6: Algoritmo di Romberg

```

1 function [I, Idiag, tab] = romb(fname, a, b, m)
2 tab = NaN*ones(m+1);      % Inizializzazione della tabella
3 idiag = zeros(m+1,1);
4
5 n = 1;                    % Calcolo della prima colonna della tabella
6 for i = 1:m+1
7 I = trap(fname,a,b,n);    % Chiama trap, che calcola l'integrale
8                             % con formula dei trapezi composta
9 tab(i,1) = I;            % Scrive nella tabella il valore dell'integrale
10                            % nella locazione (i,1), con i=1,...m+1
11 n = 2*n;                 % Numero degli intervalli
12 end
13 Idiag(1) = tab(1,1);     % Scrive il primo valore della
14                            % diagonale di tab
15 for h = 2:m+1           % Calcolo delle successive righe della tabella
16 for k = 2:h
17 tab(h,k) = (4^(k-1)*tab(h,k-1)-tab(h-1,k-1))/(4^(k-1)-1); % Metodo
18 end                                                                % di Romberg
19 Idiag(h) = tab(h,h);
20 end
21
22 I = Idiag(m);           % Migliore approssimazione dell'integrale

```

3.2.4 Algoritmo di Monte Carlo

Il metodo di Monte Carlo che abbiamo preso in considerazione è del tipo *hit or miss*.

Conosciuti gli estremi inferiore e superiore della funzione considerata in un intervallo generico $[a, b]$, l'algoritmo genera N numeri casuali all'interno del rettangolo $[a, b] \times [f_{min}, f_{max}]$. Per ogni punto generato si controlla poi se esso appartiene o meno all'area individuata dalla funzione. L'algoritmo calcola

infine il valore dell'integrale.

I valori di **input** sono:

- f , la funzione integranda (*inline*);
- a, b , estremi dell'intervallo di integrazione;
- c, d , che sono rispettivamente l'estremo inferiore e superiore della funzione nell'intervallo $[a, b]$;
- N , che è il numero di punti da generare.

Inoltre si hanno dei valori di **output** che sono:

- xp, yp , che sono i vettori rappresentanti i punti generati;
- *integrale*, che indica il valore numerico dell'integrale, calcolato tramite il metodo Monte Carlo hit or miss.

Ma andiamo nello specifico a vedere il codice del **metodo di Monte Carlo hit or miss**.

Listing 3.7: Algoritmo di Monte Carlo hit or miss

```

1 function [integrale,xp,yp]=montecarlo(f,a,b,c,d,N)
2 hit=0;
3
4 for i=1:N
5
6 x=a+(b-a)*rand;      % Generazione dei punti pseudo-casuali
7 y_r=c+(d-c)*rand;
8 y=eval(f);          % Valutazione della funzione integranda
9 xp(i)=x;            % Memorizza il punto x generato nell'iterazione
10                    % corrente nel vettore xp
11 yp(i)=y_r;         % Memorizza il punto y_r generato nell'iterazione
12                    % corrente nel vettore xp
13 if y_r<y,          % Controlla se y_r appartiene all'area
14 hit=hit+1;        % individuata dalla funzione
15 end
16
17 end
18 integrale=hit*(b-c)*(d-c)/N;    % Calcolo integrale con il

```


Bibliografia

- [1] G. C. Barozzi, S. Matarasso, *Analisi Matematica 1*, Zanichelli, 1997.
- [2] F. Bongiorno, *Calcolo I: Integrali indefiniti, Integrali definiti secondo Riemann, Integrale generalizzato, Serie numeriche, Formula e serie di Taylor, Funzioni in più variabili*, Progetto Leonardo, 2002.
- [3] B. Cavalieri, a cura di L.Lombardo-Radice, *Geometria degli indivisibili*, UTET, 1966.
- [4] C. Codegone, *Metodi matematici per l'ingegneria*, Zanichelli, 1995.
- [5] V. Comincioli, *Metodi numerici e statistici per le scienze applicate*, CEA, 1992.
- [6] I. Galligani, *Elementi di analisi numerica*, Calderini, 1982.
- [7] M. Giaquinta, *La forma delle cose: idee e metodi in matematica tra storia e filosofia*, Edizioni di storia e letteratura.
- [8] E. Giusti *Analisi Matematica II*, Bollati Boringhieri, 2003.
- [9] G. Monegato, *Fondamenti di calcolo numerico*, Levrotto & Bella, 1990.
- [10] R.Piessens, E. de Donker-Kapenga, C.W.Überhuber, D.K.Kahaner, *QUADPACK - A Subroutine package for automatic integration*, SCM, 1983.
- [11] G. Pittaluga, *Esercizi di calcolo numerico*, Levrotto & Bella, 1991.

- [12] A. Quateroni, R. Sacco, F. Saleri, *Matematica numerica*, Springer, 2008.
- [13] E. Rufini, *Il metodo di Archimede e le origini del calcolo infinitesimale nell'antichità*, Feltrinelli, 1961.

Ringraziamenti

Un ringraziamento particolare al mio relatore Paolo Negrini, per tutta la disponibilità dimostratami in questi mesi, e alla mia correlatrice Elena Loli Piccolomini, per l'aiuto datomi durante questo lavoro.

Ringrazio la mia famiglia, mamma, babbo e Simone, perchè, con tutta la pazienza che hanno avuto, questa laurea alla fine è anche un po' loro.

Un grazie speciale a Timmy, perchè è sempre stato lì con me, perchè c'è stato senza bisogno di chiedere, perchè con lui ogni cosa diventa possibile e non fa più paura niente ... per questo e per altre mille ragioni!

Grazie a Marica, perchè è come una rosetta e perchè lo è da un sacco di tempo.

Grazie a Seli e Marty, perchè ... che mondo sarebbe senza Nutella?!

Grazie a "quei ragazzi", Ovo, Samu, Bedo, Cico, Matto, Claudio, Diuz, che alla fine, dai, non siete così male ...

Grazie a Linda, perchè, anche se non ci conosciamo da tanto, sono certa che una cosa buona l'hai fatta ... hai "distratto" mio fratello ... grazie!

Grazie ai miei nipotini Amelia, Andrea e Alisea, che con i loro piccoli sorrisi mi hanno sempre regalato momenti unici.

Un grazie di cuore a Anto e Ale, che con la loro pazzia e il loro affetto hanno fatto in modo che questi anni volassero. E un grazie a Mari, Sofi, Claudia, Vale, Lugia e Cate, perchè l'unione fa la forza, e senza tutte loro sarebbe stato molto più faticoso fare questi altri due anni.