Alma Mater Studiorum · Università di Bologna

SCUOLA DI SCIENZE

Corso di Laurea in Matematica

INTRODUZIONE AGLI ORBIFOLD E TEOREMA DI UNIFORMIZZAZIONE DI THURSTON PER ORBIFOLD GEOMETRICI

Tesi di Laurea in Geometria

Relatore:
Prof.
Stefano Riolo

Presentata da:
Bianca Stancampiano

Anno Accademico 2025-2026

Indice

Introduzione **iii**

1 Preliminari **1**

1.1 (G, X)-struttura 1

1.1.1 Mappa sviluppante 2

1.1.2 Olonomia 6

1.2 Rivestimenti ramificati 9

2 Orbifold **13**

2.1 Prime definizioni 13

2.2 Alcuni esempi 18

2.3 Stratificazioni e orbifold 23

2.4 Rivestimento orbifold universale e gruppo fondamentale orbifold . . . 24

2.5 Esempio della sfera 31

2.6 Orientabilità 33

3 Teorema di uniformizzazione di Thurston per orbifold geometrici **35**

3.1 (G, X)-orbifold 35

3.2 Lemmi preliminari 36

3.3 Il teorema 38

Bibliografia **41**

Introduzione

In geometria e in topologia, uno dei concetti cardine è quello di varietà. In questo contesto, quando si considera un gruppo finito Γ che agisce su una varietà M, si richiede classicamente che tale azione sia libera e propriamente discontinua, cosicché lo spazio quoziente M/Γ erediti a sua volta una struttura di varietà.

Nel momento in cui si lascia cadere l'ipotesi che l'azione sia libera, il quoziente ottenuto cessa in generale di essere una varietà. Si ottengono tuttavia spazi interessanti, chiamati *orbifold*, la cui struttura locale non solo è più generale di quella di una varietà, ma tiene traccia dell'azione dei gruppi locali. Il primo a introdurre formalmente questi oggetti fu Ichiro Satake nel 1956 con il nome di *V-manifolds*, ma fu William Thurston, negli anni Settanta, a renderli celebri e a ribattezzarli orbifold.

D'altra parte, sebbene ogni quoziente di questo tipo generi un orbifold, il viceversa non è vero: esistono orbifold che non possono essere ottenuti quozientando una varietà per l'azione propriamente discontinua di un gruppo finito. Questo permette di dividere gli orbifold in due classi fondamentali: gli orbifold *buoni*, che ammettono una varietà ordinaria come rivestimento nel senso degli orbifold, e quelli *cattivi*, il cui esempio più famoso è la "*lacrima*", caratterizzata da una singolarità che non può essere "sciolta" da alcun rivestimento globale.

L'obiettivo di questo elaborato consiste nell'estendere la teoria dei rivestimenti e del gruppo fondamentale agli orbifold e nel mostrare come l'esistenza di una struttura geometrica, con una certa proprietà di rigidità, permetta di superare questa patologia topologica. Infatti, sfruttando in modo essenziale la teoria di Fox sui rivestimenti ramificati e assumendo che un orbifold sia dotato di una (G, X)-struttura in senso orbifold, è possibile dimostrare che esso è necessariamente buono.

Capitolo 1

Preliminari

1.1 (G, X)-struttura

Sia X una varietà liscia n-dimensionale connessa e semplicemente connessa, e sia G un sottogruppo del gruppo dei diffeomorfismi di X, indicato con $\mathrm{Diff}(X)$, con la seguente proprietà:

> *Se $g_1, g_2 \in G$ ed esiste un aperto non vuoto U di X tale che g_1 e g_2 sono uguali se ristretti a U, allora $g_1 = g_2$.* (∗)

Definizione 1.1.1 ((G, X)-*atlante*)**.** Un (G, X)-*atlante* su uno spazio topologico M, T_2 e N_2, è il dato di:

1. un ricoprimento aperto $\{U_i\}_{i \in I}$ di M;
2. un insieme di embedding aperti $\{\varphi_i \colon U_i \to X\}_{i \in I}$ tali che, se $U_i \cap U_j \neq \varnothing$, allora la restrizione di $\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}$ ad ogni componente connessa di $\varphi_j(U_i \cap U_j)$ è la restrizione di un elemento di G.

Indichiamo un (G, X)-atlante su M con $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$ e diciamo che due (G, X)-atlanti sono *equivalenti* se la loro unione è ancora un (G, X)-atlante; ogni classe di equivalenza individua un unico (G, X)-atlante massimale. Una (G, X)-*struttura* su M è un (G, X)-atlante massimale su M (o, equivalentemente, una classe di equivalenza di (G, X)-atlanti). Per semplicità, d'ora in avanti, quando considereremo un atlante associato a una (G, X)-struttura, sottintenderemo sempre di aver scelto l'atlante massimale.

Osservazione 1.1.2. Dalla definizione segue che uno spazio topologico M, T_2 e N_2, dotato di una (G, X)-struttura, è automaticamente una varietà topologica; inoltre, la (G, X)-struttura dà alla varietà topologica M una struttura differenziabile.

Definizione 1.1.3. Uno spazio topologico M dotato di una (G, X)-struttura prende il nome di (G, X)-varietà.

1.1.1 Mappa sviluppante

Prima di definire il concetto di mappa sviluppante introduco la seguente notazione.

Notazione. Da qui in avanti e nei successivi capitoli, per alleggerire la scrittura, con un leggero abuso di notazione ometteremo quasi le parentesi quadre per indicare le classi di omotopia dei cammini. Scriveremo quindi semplicemente γ per denotare indistintamente sia un cammino sia la sua classe di omotopia $[\gamma]$, lasciando che sia il contesto a chiarire di volta in volta il significato inteso.

Definizione 1.1.4 (*Mappa sviluppante*)**.** Sia M una (G, X)-varietà connessa e sia $p\colon \widetilde{M} \to M$ il suo rivestimento universale. Scegliamo un punto base $y_0 \in \widetilde{M}$ e poniamo $x_0 = p(y_0) \in M$. Fissiamo una carta (U_1, φ_1) della (G, X)-struttura con $x_0 \in U_1$, dove possiamo supporre che U_1 sia un aperto banalizzante per p. Sia $\widetilde{U}_1$ la componente connessa di $p^{-1}(U_1)$ contenente y_0, e sia $\psi_1\colon \widetilde{U}_1 \to U_1$ l'omeomorfismo indotto dalla restrizione di p a $\widetilde{U}_1$.

Innanzitutto si definisce localmente la mappa sviluppante $D\colon \widetilde{U}_1 \to X$ come:

$$D|_{\widetilde{U}_1} := \varphi_1 \circ \psi_1.$$

Per definire $D(y)$ per un generico punto $y \in \widetilde{M}$, si considera un cammino $\tilde{\gamma}$ in $\widetilde{M}$ da y_0 a y e la sua proiezione $\gamma = p \circ \tilde{\gamma}$ in M, che è un cammino da x_0 a $x = p(y)$. Poiché l'immagine di γ è compatta, è possibile ricoprirla con un numero finito di aperti dell'atlante (G, X), siano essi $U_1, U_2, \ldots, U_k$, che, senza perdita di generalità, possiamo assumere essere banalizzanti per p e tali che ogni intersezione $U_i \cap U_{i+1}$ sia connessa e non vuota. Sollevando tali aperti lungo $\tilde{\gamma}$ tramite p, si ottiene una catena di aperti $\widetilde{U}_1, \ldots, \widetilde{U}_k$ in $\tilde{M}$ e i relativi omeomorfismi $\psi_i : \widetilde{U}_i \to U_i$.

Sull'intersezione $U_1 \cap U_2$, la condizione di (G, X)-struttura impone che la mappa di transizione sia la restrizione di un elemento di G, ovvero

$$\varphi_1 = g \circ \varphi_2$$

per un qualche $g \in G$. Di conseguenza, sull'intersezione $\widetilde{U}_1 \cap \widetilde{U}_2$ (dove $\psi_1 = \psi_2$), si ha

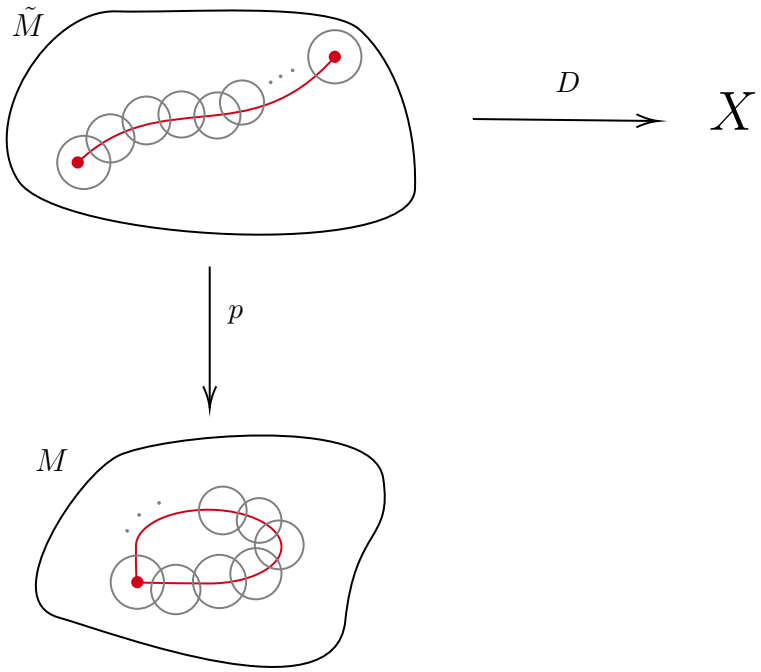
$$D = \varphi_1 \circ \psi_1 = g \circ \varphi_2 \circ \psi_2.$$

Risulta quindi naturale estendere D in modo coerente su tutto $\widetilde{U}_2$ definendo:

$$D|_{\widetilde{U}_2} := g \circ \varphi_2 \circ \psi_2.$$

Questo permette di estendere D in modo coerente su tutto $\widetilde{U}_2$. Iterando il procedimento e componendo i cambi di carta lungo gli aperti, sull'ultimo aperto $\widetilde{U}_k$ contenente y si ottiene un elemento $g_k \in G$ (derivante dalla composizione dei cambi di carta precedenti) tale che:

$$D(y) = g_k \circ \varphi_k \circ \psi_k(y).$$



Si può dimostrare che tale definizione è ben posta, ovvero che il valore finale $D(y)$ non dipende dal particolare cammino $\tilde{\gamma}$ scelto per congiungere y_0 a y, né dalla particolare catena di aperti utilizzata per il ricoprimento. Questo fatto discende fondamentalmente dalla semplice connessione del rivestimento universale $\widetilde{M}$. La mappa $D\colon \widetilde{M} \to X$ così ottenuta prende il nome di *mappa sviluppante* associata alla (G, X)-struttura.

Osservazione 1.1.5. Se M è una (G, X)-varietà e $h\colon N \to M$ è un rivestimento di M, allora N eredita una (G, X)-struttura. Più precisamente, se $\{(U_i, \varphi_i)\}$ è un (G, X)-atlante (non necessariamente massimale) per M in cui ogni aperto U_i è banalizzante per h, allora

$$\{(\widetilde{U}_{ij}, \varphi_i \circ h|_{\tilde{U}_{ij}})\}$$

è un (G, X)-atlante su N, dove, al variare di j, $\widetilde{U}_{ij}$ sono le preimmagini di U_i tramite h; l'unico atlante massimale equivalente a $\{(\tilde{U}_{ij}, \varphi_i \circ h|_{\tilde{U}_{ij}})\}$ definisce una (G, X)-struttura su N.

Si può definire la mappa sviluppante anche nel modo seguente, che risulta talvolta più comodo da applicare.

Definizione 1.1.6. Siano M_1 e M_2 due (G, X)-varietà e $\{(U_i, \varphi_i)\}$ e $\{(V_j, \psi_j)\}$ i rispettivi atlanti. Una mappa continua $D\colon M_1 \to M_2$ è detta (G, X)-*mappa* se per ogni i, j tali che $U_i \cap D^{-1}(V_j) \neq \varnothing$, la restrizione della composizione

$$\psi_j \circ D \circ \varphi_i^{-1}\colon \varphi_i(U_i \cap D^{-1}(V_j)) \longrightarrow \psi_j(V_j)$$

a ogni componente connessa di $\varphi_i(U_i \cap D^{-1}(V_j))$ è la restrizione di un elemento $g \in G$. Nel caso in cui $M_2 = X$ e M_1 è il rivestimento universale di una (G, X)-varietà, D è chiamata mappa sviluppante.

Osservazione 1.1.7. Si può dimostrare che le due definizioni di mappa sviluppante sono equivalenti.

È possibile estendere la definizione di mappa sviluppante nel modo seguente.

Definizione 1.1.8. Sia M una (G, X)-varietà. Una (G, X)-mappa $D\colon M \to X$ è detta mappa sviluppante.

Osservazione 1.1.9. Se da un lato quest'ultima definizione è più generale, dall'altro non assicura a priori l'esistenza della mappa sviluppante.

Lemma 1.1.10. Sia $p\colon \widetilde{M} \to M$ il rivestimento universale di una varietà M dotata di una (G, X)-struttura e $D\colon \widetilde{M} \to X$ una mappa sviluppante. Sia inoltre $h\colon \widetilde{M} \to \widetilde{M}$ una trasformazione di rivestimento. Allora la composizione

$$D \circ h\colon \widetilde{M} \to X$$

è a sua volta una mappa sviluppante.

Dimostrazione. Come prima cosa osserviamo che una trasformazione di rivestimento $h\colon \widetilde{M} \to \widetilde{M}$, essendo un omeomorfismo che verifica $p \circ h = p$, preserva la (G, X)-struttura che $\widetilde{M}$ eredita da M. Perciò, una trasformazione di rivestimento $h\colon \widetilde{M} \to \widetilde{M}$ è una (G, X)-mappa.

Ora vogliamo mostrare che $D \circ h$ soddisfa la definizione di mappa sviluppante 1.1.6. Siano quindi $\{(U_k, \varphi_k)\}$ un atlante su $\widetilde{M}$ e $\{(V_j, \psi_j)\}$ un atlante su X. Considerando l'espressione locale della composizione tramite un'altra mappa dell'atlante di $\widetilde{M}$ si ha:

$$\psi_j \circ (D \circ h) \circ \varphi_k^{-1} = (\psi_j \circ D \circ \varphi_i^{-1}) \circ (\varphi_i \circ h \circ \varphi_k^{-1}).$$

Poiché D è una mappa sviluppante, la prima parte $(\psi_j \circ D \circ \varphi_i^{-1})$ si estende a un elemento $g_1 \in G$. Analogamente, poiché h è una (G, X)-mappa, anche la seconda parte $(\varphi_i \circ h \circ \varphi_k^{-1})$ si estende a un elemento $g_2 \in G$.

È quindi possibile estendere $\psi_j \circ (D \circ h) \circ \varphi_k^{-1}$ all'elemento $g_1 \circ g_2 \in G$. Poiché questo vale per ogni coppia di carte, la mappa $D \circ h$ è una mappa sviluppante. □

Osservazione 1.1.11. In generale si può dimostrare che, se M è una (G, X)-varietà, $D\colon M \to X$ è una mappa sviluppante e $h\colon N \to M$ è un rivestimento topologico, allora la composizione

$$D \circ h\colon N \to X$$

è una mappa sviluppante.

Proposizione 1.1.12. Sia M una (G, X)-varietà connessa e $p\colon \widetilde{M} \to M$ il suo rivestimento universale. Allora due mappe sviluppanti D, $D'\colon \widetilde{M} \to X$ differiscono per un elemento di G, ossia esiste un diffeomorfismo $g\colon X \to X$ appartenente a G tale che $D' = gD$. Inoltre se esistono $g_1, g_2 \in G$ tali che $D' = g_1 D = g_2 D$, allora $g_1 = g_2$.

Dimostrazione. Sia $p \in \widetilde{M}$ un punto e $(\widetilde{U}_i, \tilde{\varphi}_i)$ una carta contenente p appartenente all'atlante che $\widetilde{M}$ eredita da quello definito su M dalla (G, X)-struttura. Per definizione di mappa sviluppante si ha che

$$D \circ \tilde{\varphi}_i^{-1}, D' \circ \tilde{\varphi}_i^{-1}\colon\ \tilde{\varphi}(\widetilde{U}_i) \to X$$

si possono estendere a diffeomorfismi $g_i, g_i'\colon X \to X$ con $g_i,\ g_i' \in G$. Definiamo $g = g_i' \circ g_i^{-1} \in G$.

Allora

$$D' = g \circ D$$

su $\tilde{\varphi}_i^{-1}(\tilde{\varphi}_i(\widetilde{U}_i))$. Sia ora $(\widetilde{U}_j, \tilde{\varphi}_j)$ un'altra carta con $\widetilde{U}_i \cap \widetilde{U}_j \neq \varnothing$. La condizione $(*)$ assicura che D' sia uguale a $g \circ D$ anche su $\tilde{\varphi}_j^{-1}(\tilde{\varphi}_j(\widetilde{U}_j))$. Procedendo in questo modo e usando il fatto che M è una varietà connessa, si prova che $D' = g \circ D$ su tutto $\widetilde{M}$.

Resta ora da mostrare l'unicità di g. Siano pertanto $g_1, g_2 \in G$ due elementi che soddisfano la relazione:

$$D' = g_1 \circ D \quad \text{e} \quad D' = g_2 \circ D.$$

Uguagliando le due espressioni, si ottiene:

$$g_1 \circ D = g_2 \circ D.$$

Applicando l'inverso di g_2 a sinistra in entrambi i membri, si ha:

$$(g_2^{-1} \circ g_1) \circ D = D.$$

Ponendo $h := g_2^{-1} \circ g_1 \in G$, la relazione precedente implica che per ogni punto $\tilde{x} \in \widetilde{M}$:

$$h(D(\tilde{x})) = D(\tilde{x}).$$

Questo significa che h e id_X coincidono sull'immagine di D. Per come abbiamo costruito la mappa sviluppante, l'immagine di D contiene certamente un aperto $W \neq \varnothing$, quindi h e id_X coincidono su un aperto non vuoto di X. Per la proprietà $(*)$, $h = \mathrm{id}_X$ su tutto X da cui

$$g_1 = g_2,$$

come desiderato. □

Osservazione 1.1.13. In modo del tutto analogo a quanto appena fatto in quest'ultima dimostrazione, si prova che se $D, D' \colon M \to X$ sono due mappe sviluppanti, dove M è una (G, X)-varietà, allora esiste un elemento g in G tale per cui $D' = g \circ D$.

1.1.2 Olonomia

Sia $D \colon \widetilde{M} \to X$ una mappa sviluppante dove $\widetilde{M}$ è il rivestimento universale di una (G, X)-varietà M. Siano inoltre $x_0 \in M$, $\alpha \in \pi_1(M, x_0)$ un elemento del gruppo fondamentale di M e $T_\alpha \colon \widetilde{M} \to \widetilde{M}$ la trasformazione di rivestimento associata a α. Per il Lemma 1.1.10,

$$D \circ T_\alpha \colon \widetilde{M} \to X$$

è una mappa sviluppante e, per la Proposizione 1.1.12, D e $D \circ T_\alpha$ differiscono per un unico elemento g_α appartenente a G:

$$D \circ T_\alpha = g_\alpha \circ D.$$

Quanto appena detto motiva in modo naturale la seguente definizione.

Definizione 1.1.14. Si chiama *omomorfismo di olonomia* (o più semplicemente *olonomia*) di M la mappa

$$H\colon \pi_1(M, x_0) \longrightarrow G$$
$$\alpha \longmapsto g_\alpha$$

.

Osservazione 1.1.15. L'omomorfismo di olonomia è definito in modo unico a meno di coniugazione in G. Infatti, se $D, D'\colon \widetilde{M} \to X$ sono due mappe sviluppanti, per la Proposizione 1.1.12, esiste $h \in G$ tale che

$$D' = h \circ D.$$

Allora, scelto $\alpha \in \pi_1(M)$,

$$D' \circ T_\alpha = h \circ D \circ T_\alpha = h \circ g_\alpha \circ D = h \circ g_\alpha \circ h^{-1} \circ D'.$$

Proposizione 1.1.16. Sia M una (G, X)-varietà. Allora l'olonomia di M è un omomorfismo di gruppi.

Dimostrazione. Siano α e β in $\pi_1(M, x_0)$ e T_α,T_β le trasformazioni di rivestimento associate. Osserviamo che vale

$$g_{\alpha\beta} \circ D = D \circ T_{\alpha\beta} = D \circ T_\alpha \circ T_\beta = g_\alpha \circ D \circ T_\beta = g_\alpha \circ g_\beta \circ D.$$

Per unicità di $g_{\alpha\beta}$ si ha $g_{\alpha\beta} = g_\alpha \circ g_\beta$ da cui

$$H(\alpha\beta) = H(\alpha) \circ H(\beta).$$

Poiché questo vale per ogni α e β in $\pi_1(M, x_0)$, H è un omomorfismo di gruppi. □

Lemma 1.1.17. Sia M_Γ il rivestimento di una (G, X)-varietà M associato al sottogruppo $\Gamma \leq \pi_1(M)$. Allora M_Γ ammette una mappa sviluppante $D\colon M_\Gamma \to X$ se e solo se $\Gamma \leq \ker(H)$, dove H indica l'omomorfismo di olonomia.

Dimostrazione. Sia $\Gamma \leq \ker(H)$ e $p\colon \widetilde{M} \to M_\Gamma$ il rivestimento universale di M_Γ. Sia inoltre $\widetilde{D}\colon \widetilde{M} \to X$ una mappa sviluppante. $\widetilde{D}$ soddisfa:

$$(\widetilde{D} \circ T_\gamma)(x) = H(\gamma) \circ \widetilde{D}(x) \qquad \forall \gamma \in \pi_1(M),$$

dove T_γ indica la trasformazione di rivestimento associata a γ.

Ora mostro che $\widetilde{D}$ è costante sulle fibre di p. Siano $x, y \in \widetilde{M}$ tali che $p(x) = p(y)$. Allora esiste $\gamma \in \Gamma$ tale che $y = \gamma \cdot x$. Pertanto

$$\widetilde{D}(y) = \widetilde{D}(\gamma \cdot x) = (\widetilde{D} \circ T_\gamma)(x) = H(\gamma) \circ \widetilde{D}(x) = \widetilde{D}(x),$$

poiché $\Gamma \leq \ker H$.

Possiamo quindi definire $D : M_\Gamma \longrightarrow X$ tramite

$$D(p(x)) := \widetilde{D}(x).$$

Questa definizione è ben posta per quanto detto prima e per il fatto che p è suriettiva; inoltre tale mappa soddisfa:

$$D \circ p = \widetilde{D}.$$

D così definita è una mappa sviluppante, infatti, siano

$$\varphi_i : U_i \to X \quad \text{con } U_i \subset M_\Gamma \qquad \text{e} \qquad \psi_j : V_j \to X \quad \text{con } V_j \subset X$$

due carte come nella definizione di mappa sviluppante 1.1.6, tali che

$$U_i \cap D^{-1}(V_j) \neq \varnothing.$$

Poiché p è un rivestimento, esso è localmente un omeomorfismo quindi la rappresentazione locale di D coincide con quella di $\widetilde{D}$. Essendo $\widetilde{D}$ una mappa sviluppante, la composizione

$$\psi_j \circ D \circ \varphi_i^{-1}$$

si estende a un diffeomorfismo di X appartenente a G. Dunque D è una mappa sviluppante su M_Γ.

Viceversa supponiamo che esista una mappa sviluppante $D\colon M_\Gamma \longrightarrow X$. Consideriamo la composizione

$$\widetilde{D} := D \circ p\colon \widetilde{M} \longrightarrow X.$$

Essa è una mappa sviluppante, per l'Osservazione 1.1.11, e la sua olonomia, a meno di coniugio, è H. Pertanto

$$(\widetilde{D} \circ T_\gamma)(x) = H(\gamma) \circ \widetilde{D}(x).$$

Inoltre per ogni $\gamma \in \Gamma$, γ è una trasformazione di rivestimento di p, quindi si ha

$$p(\gamma \cdot x) = p(x).$$

Di conseguenza,

$$\widetilde{D}(\gamma \cdot x) = D(p(\gamma \cdot x)) = D(p(x)) = \widetilde{D}(x),$$

da cui segue

$$H(\gamma) \circ \widetilde{D}(x) = \widetilde{D}(x) \qquad \forall x \in \widetilde{M}.$$

Poiché $\widetilde{D}$ è localmente un diffeomorfismo, la sua immagine contiene un aperto non vuoto di X. Per la proprietà $(*)$, segue che

$$H(\gamma) = \mathrm{id}_X \quad \forall \gamma \in \Gamma.$$

□

Corollario 1.1.18. Una (G, X)-varietà M ammette una mappa sviluppante $D\colon M \to X$ se e solo se l'olonomia

$$H\colon \pi_1(M) \to G$$

è banale.

1.2 Rivestimenti ramificati

In questa sezione introduco la nozione di *rivestimento ramificato* secondo l'approccio topologico generale sviluppato da Ralph H. Fox. Inoltre richiamerò alcuni importanti risultati che si riveleranno uno strumento fondamentale nella trattazione degli orbifold nei capitoli successivi.

Definizione 1.2.1. Siano Y e Z due spazi topologici T_1 e localmente connessi. Una mappa $g\colon Y \to Z$ si dice *spread* se le componenti connesse delle controimmagini degli aperti di Z formano una base per la topologia di Y.

In tal caso Y e Z prendono il nome rispettivamente di *antecedente* e *conseguente*.

Osservazione 1.2.2. Dalla definizione segue che uno spread è una funzione continua.

Definizione 1.2.3. Sia $g\colon Y \to Z$ uno spread. Un punto $z \in Z$ viene chiamato *punto regolare* (o *ordinario*) se esiste un intorno aperto W di z tale per cui la mappa $g|_{g^{-1}(W)}\colon g^{-1}(W) \to g(W)$ è un rivestimento topologico. L'insieme dei punti regolari di Z lo indicheremo con Z_*.

I punti di Z che non sono regolari vengono chiamati *punti singolari*.

Definizione 1.2.4. Siano Y e Z due spazi topologici T_1 e localmente connessi. Uno spread $g\colon Y \to Z$ si dice *completo* se, per ogni punto $z \in Z$, è soddisfatta la seguente condizione: se a ogni intorno aperto W di z è associata una componente connessa V_W della controimmagine $g^{-1}(W)$ in modo tale che $V_{W_1} \subseteq V_{W_2}$ ogni volta che $W_1 \subseteq W_2$, allora l'intersezione

$$\bigcap_W V_W$$

non è vuota (risultando pertanto ridotta a un singolo punto).

Definizione 1.2.5. Se $g\colon Y \to Z$ è uno spread e X è un sottoinsieme di Y, allora anche la mappa $f = g|_X$ è uno spread. In tal caso si dice che lo spread g è un'*estensione* di f.

Definizione 1.2.6. Sia $f\colon X \to Z$ uno spread. Due estensioni $g_1\colon Y_1 \to Z$ e $g_2\colon Y_2 \to Z$ si dicono *equivalenti* se esiste un omeomorfismo $\phi\colon Y_1 \to Y_2$ tale che $g_2 \circ \phi = g_1$ e $\phi|_X = id_X$.

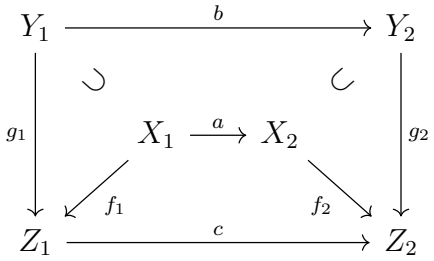
Definizione 1.2.7. Un'estensione $g\colon Y \to Z$ di uno spread $f\colon X \to Z$ prende il nome di *completamento* di f se g è uno spread completo e X è denso e localmente connesso in Y.

Teorema 1.2.8 (*Esistenza del completamento*)**.** *Ogni spread $f\colon X \to Z$ ammette un completamento $g\colon Y \to Z$.*

Definizione 1.2.9. Siano $f_1\colon X_1 \to Z_1$ e $f_2\colon X_2 \to Z_2$ due spread. Si dice che una mappa $a\colon X_1 \to X_2$ *riveste* una mappa $c\colon Z_1 \to Z_2$ se

$$f_2 \circ a = c \circ f_1.$$

Teorema 1.2.10 (*Teorema di estensione*)**.** *Siano f_1, f_2, a e c come nella definizione precedente. Siano inoltre $g_1\colon Y_1 \to Z_1$ e $g_2\colon Y_2 \to Z_2$ rispettivamente due completamenti di f_1 e f_2. Allora, la mappa a può essere estesa a una mappa $b\colon Y_1 \to Y_2$, la quale a sua volta riveste la mappa c.*



Teorema 1.2.11 (*Unicità del completamento*)**.** *Sia $f\colon X \to Z$ uno spread; siano inoltre $g_1\colon Y_1 \to Z$ e $g_2\colon Y_2 \to Z$ due completamenti di f. Allora g_1 e g_2 sono equivalenti.*

Definizione 1.2.12. Sia $f\colon X \to Z$ uno spread con X e Z connessi. Allora f viene detto *rivestimento non ramificato* se $Z = Z_*$.

Osservazione 1.2.13. Se $f\colon X \to Z$ è un rivestimento non ramificato, allora f è un rivestimento in senso topologico.

Osservazione 1.2.14. Se $g\colon Y \to Z$ è uno spread con Z_* non vuoto e connesso, e $X := g^{-1}(Z_*)$, allora $f = g|_X\colon X \to Z_*$ è un rivestimento non ramificato e prende il nome di *rivestimento non ramificato associato a* g.

Definizione 1.2.15. Uno spread $g\colon Y \to Z$ viene chiamato *rivestimento ramificato* se:

1. Z_* è connesso, denso e localmente connesso in Z;
2. $g^{-1}(Z_*)$ è connesso (quindi tale che g ha un rivestimento non ramificato associato);
3. g è il completamento del suo rivestimento non ramificato associato.

Capitolo 2

Orbifold

2.1 Prime definizioni

Definizione 2.1.1 (*Atlante orbifold*)**.** Sia O uno spazio topologico T_2 e N_2. Un *atlante orbifold* di dimensione n su O è il dato di:

1. un ricoprimento aperto $\{U_i\}_{i\in I}$ di O chiuso per intersezioni finite non vuote e indicizzato da un insieme I;

2. per ogni $i \in I$:

   (a) un sottogruppo finito G_i del gruppo delle isometrie lineari $\mathrm{O}(n)$;

   (b) un aperto $\widetilde{U}_i \subseteq \mathbb{R}^n$ invariante rispetto all'azione di G_i;

   (c) una mappa continua $f_i\colon \widetilde{U}_i \to U_i$ che fattorizza attraverso la proiezione al quoziente $\pi_i\colon \widetilde{U}_i \to \widetilde{U}_i/G_i$, inducendo un omeomorfismo $\varphi_i\colon \widetilde{U}_i/G_i \to U_i$ tale che $f_i = \varphi_i \circ \pi_i$;

3. per ogni inclusione $U_i \subset U_j$, un omomorfismo iniettivo $\rho_{ij}\colon G_i \hookrightarrow G_j$ e un embedding $\psi_{ij}\colon \widetilde{U}_i \hookrightarrow \widetilde{U}_j$ che sia ρ_{ij}-equivariante, ovvero tale che

$$\psi_{ij}(g \cdot x) = \rho_{ij}(g) \cdot \psi_{ij}(x) \quad \forall g \in G_i,\, \forall x \in \widetilde{U}_i,$$

   e che soddisfi la condizione di compatibilità $f_j \circ \psi_{ij} = f_i$.

Indichiamo un atlante orbifold con la famiglia $\{(\widetilde{U}_i, G_i, f_i, U_i)\}_{i\in I}$, di cui ogni elemento prende il nome di *carta*. Due atlanti si dicono *equivalenti* se sono contenuti in un medesimo atlante per O. Ogni classe di equivalenza individua un unico *atlante massimale*. Una *struttura di orbifold* su O di dimensione n (o, più brevemente, di

n-orbifold O) è la scelta di un atlante massimale per O. I gruppi G_i vengono chiamati *gruppi locali* di O, mentre gli omeomorfismi indotti $U_i \cong \widetilde{U}_i/G_i$ sono chiamati *modelli locali*. Inoltre, le mappe ψ_{ij} e f_i vengono chiamate rispettivamente *mappe d'incollamento* e *mappe di piegamento*. Infine, lo spazio topologico O privo della struttura di orbifold è chiamato *spazio topologico sottostante*.

Osservazione 2.1.2. Esiste una definizione leggermente più generale di n-orbifold in cui per ogni $i \in I$, il gruppo locale G_i è un sottogruppo finito del gruppo dei diffeomorfismi di una n-varietà liscia e connessa $\widetilde{U}_i$.

Tuttavia, le due definizioni sono equivalenti a patto di scegliere come atlante quello massimale. L'idea risiede nel fatto che restringendo opportunamente le carte a intorni locali sufficientemente piccoli attorno ai punti fissi, l'azione del gruppo si può sempre linearizzare. Quindi, in tali coordinate locali, ogni diffeomorfismo del gruppo coincide con la sua parte lineare, riducendosi localmente all'azione di un'isometria lineare di $\mathbb{R}^n$.

Osservazione 2.1.3. La definizione di orbifold introdotta individua la classe di quelli che vengono chiamati *orbifold effettivi*. Tale terminologia deriva dal fatto che l'azione di ciascun gruppo locale G_i sul corrispondente aperto $\widetilde{U}_i$ è fedele: l'unico elemento di G_i che agisce banalmente su $\widetilde{U}_i$ è l'identità.

Al contrario, in contesti più generali come in geometria algebrica, si adotta una definizione di orbifold in cui l'azione dei gruppi locali non è necessariamente fedele, dando luogo ai cosiddetti *orbifold non effettivi*.

Ecco di seguito un esempio di orbifold non effettivo.

Esempio 2.1.4. Sia $M = \mathbb{R}^n$ e $G \neq \{e\}$ un gruppo finito che agisce su M in modo banale, ossia tale che ogni elemento di G agisca come l'identità.

Questa costruzione definisce una struttura di orbifold non effettivo, la cui azione fedele associata è quella indotta dal gruppo banale $\{e\}$. Dal punto di vista topologico, lo spazio quoziente M/G coincide con $M/\{e\} \cong \mathbb{R}^n$; tuttavia, l'orbifold non effettivo conserva l'informazione del gruppo locale G, distinguendosi formalmente dall'orbifold effettivo associato all'azione di $\{e\}$.

D'ora in avanti verrà adottata esclusivamente la definizione iniziale di orbifold o, eventualmente, la sua versione equivalente descritta nell'Osservazione 2.1.2.

Esempio 2.1.5. Una varietà ha una struttura canonica di orbifold dove per ogni i il gruppo G_i è banale.

Definizione 2.1.6. Siano O, $\widetilde{O}$ due orbifold e sia $p\colon \widetilde{O} \to O$ una mappa continua. Si dice che p è un *rivestimento orbifold* di O, se O ammette un atlante massimale $\{(\widetilde{U}_i, G_i, f_i, U_i)\}$ tale per cui, per ogni componente connessa V_j di $p^{-1}(U_i)$, esiste una mappa di piegamento $k\colon \widetilde{U}_i \to V_j$ nell'atlante massimale di $\widetilde{O}$ tale per cui $f_i = p \circ k$.

In altre parole, possiamo pensare p come una mappa continua tra gli spazi topologici sottostanti di $\widetilde{O}$ e O in cui, per ogni $x \in O$, esiste un intorno $U_i \cong \widetilde{U}_i/G_i$ nell'atlante massimale di O, tale per cui ogni componente connessa V_j di $p^{-1}(U_i)$ è omeomorfa a $\widetilde{U}_i/\widetilde{G}_j$, dove $\widetilde{G}_j \subset G_i$ è un qualche sottogruppo.

Definizione 2.1.7. Sia O un orbifold e $p \in O$. Considerata una carta locale $(\widetilde{U}, G, f, U)$ attorno a p, sia $\tilde{p} \in \widetilde{U}$ un sollevamento di p, ossia un punto tale che $f(\tilde{p}) = p$. Sia inoltre

$$S_{\tilde{p}} = \{g \in G \mid g \cdot \tilde{p} = \tilde{p}\}$$

lo stabilizzatore di $\tilde{p}$ rispetto all'azione di G.

Tale sottogruppo di G determina una classe di isomorfismo che non dipende né dal sollevamento né dalla carta scelti. Infatti, un diverso sollevamento $\tilde{p}' \in \widetilde{U}$ per il punto p deve necessariamente appartenere alla medesima orbita, dunque esisterà un $g_0 \in G$ tale che $\tilde{p}' = g_0 \cdot \tilde{p}$; ne segue che gli stabilizzatori dei due sollevamenti sono coniugati in G, essendo $S_{\tilde{p}'} = g_0 \cdot S_{\tilde{p}} \cdot g_0^{-1}$, e pertanto isomorfi.

Inoltre, la condizione di compatibilità per l'atlante di un orbifold assicura che, valutando lo stabilizzatore di un sollevamento in una differente carta locale attorno a p, si ottiene un gruppo isomorfo a $S_{\tilde{p}}$. Infatti, siano $(\widetilde{U}_i, G_i, f_i, U_i)$ e $(\widetilde{U}_j, G_j, f_j, U_j)$ due carte locali attorno a $p \in O$ con $U_i \subset U_j$, e siano $\tilde{p}_i \in \widetilde{U}_i$, $\tilde{p}_j \in \widetilde{U}_j$ due sollevamenti di p.

Per la compatibilità, esiste un embedding ρ_{ij}-equivariante $\psi_{ij} : \widetilde{U}_i \hookrightarrow \widetilde{U}_j$ rispetto a un omomorfismo iniettivo $\rho_{ij} : G_i \hookrightarrow G_j$, tale che $f_j \circ \psi_{ij} = f_i$. Posto $\tilde{p}'_j = \psi_{ij}(\tilde{p}_i) \in \widetilde{U}_j$, si ha $f_j(\tilde{p}'_j) = f_i(\tilde{p}_i) = p$, pertanto $\tilde{p}'_j$ è un sollevamento di p in $\widetilde{U}_j$.

Mostriamo ora che l'omomorfismo iniettivo ρ_{ij} si restringe a un isomorfismo tra gli stabilizzatori $S_{\tilde{p}_i}$ e $S_{\tilde{p}'_j}$. Preso un elemento $g \in S_{\tilde{p}_i}$, per la ρ_{ij}-equivarianza di ψ_{ij} si ha

$$\rho_{ij}(g) \cdot \tilde{p}'_j = \rho_{ij}(g) \cdot \psi_{ij}(\tilde{p}_i) = \psi_{ij}(g \cdot \tilde{p}_i) = \psi_{ij}(\tilde{p}_i) = \tilde{p}'_j,$$

da cui segue che $\rho_{ij}(g) \in S_{\tilde{p}'_j}$, ossia $\rho_{ij}(S_{\tilde{p}_i}) \subset S_{\tilde{p}'_j}$.

Viceversa, sia $h \in S_{\tilde{p}'_j}$. Poiché ψ_{ij} è un embedding tra aperti della medesima dimensione, l'immagine $\psi_{ij}(\widetilde{U}_i)$ è un intorno aperto di $\tilde{p}'_j$ in $\widetilde{U}_j$. Essendo l'azione di h continua e tale che $h \cdot \tilde{p}'_j = \tilde{p}'_j$, esiste un intorno aperto connesso $V \subset \widetilde{U}_i$ di $\tilde{p}_i$ tale

che $h \cdot \psi_{ij}(V) \subset \psi_{ij}(\widetilde{U}_i)$. Di conseguenza, per ogni $x \in V$ esiste un punto $y \in \widetilde{U}_i$ tale che $h \cdot \psi_{ij}(x) = \psi_{ij}(y)$. Applicando f_j a entrambi i membri e sfruttando la relazione $f_j \circ \psi_{ij} = f_i$ unitamente alla G_j-invarianza di f_j, si ottiene

$$f_i(x) = f_j(\psi_{ij}(x)) = f_j(h \cdot \psi_{ij}(x)) = f_j(\psi_{ij}(y)) = f_i(y).$$

Ne segue che x e y appartengono alla medesima orbita rispetto all'azione di G_i; dunque esiste un elemento $g \in G_i$ che, per la finitezza di G_i e la connessione di V, non dipende da x, tale che $y = g \cdot x$. Per la ρ_{ij}-equivarianza di ψ_{ij}, vale allora

$$h \cdot \psi_{ij}(x) = \psi_{ij}(g \cdot x) = \rho_{ij}(g) \cdot \psi_{ij}(x) \quad \forall x \in V.$$

Poiché h e $\rho_{ij}(g)$ coincidono sull'aperto non vuoto $\psi_{ij}(V)$ e l'azione di G_j su $\widetilde{U}_j$ è fedele, si ha necessariamente $h = \rho_{ij}(g)$. Da tale uguaglianza si ricava:

$$\psi_{ij}(g \cdot \tilde{p}_i) = \rho_{ij}(g) \cdot \psi_{ij}(\tilde{p}_i) = h \cdot \tilde{p}'_j = \tilde{p}'_j = \psi_{ij}(\tilde{p}_i).$$

L'iniettività di ψ_{ij} implica quindi $g \cdot \tilde{p}_i = \tilde{p}_i$, ovvero $g \in S_{\tilde{p}_i}$. Ciò dimostra l'inclusione $S_{\tilde{p}'_j} \subset \rho_{ij}(S_{\tilde{p}_i})$ e, per l'iniettività di ρ_{ij}, permette di concludere che $S_{\tilde{p}_i} \cong S_{\tilde{p}'_j}$.

D'altra parte, essendo $\tilde{p}'_j$ e $\tilde{p}_j$ due sollevamenti del medesimo punto p nella stessa carta $(\widetilde{U}_j, G_j, f_j, U_j)$, per quanto visto in precedenza i rispettivi stabilizzatori $S_{\tilde{p}'_j}$ e $S_{\tilde{p}_j}$ sono coniugati in G_j, e pertanto isomorfi. Per transitività, si ottiene $S_{\tilde{p}_i} \cong S_{\tilde{p}_j}$.

Si definisce dunque il *gruppo di isotropia* associato a p, denotato con Γ_p, come la classe di isomorfismo del gruppo $S_{\tilde{p}}$.

Da tale definizione segue che è ben posta la seguente classificazione: un punto $p \in O$ si dice *regolare* se $\Gamma_p = \{1\}$, *singolare* altrimenti. L'insieme dei punti singolari

$$\Sigma_O = \{x \in O \mid \Gamma_x \neq \{1\}\}$$

prende il nome di *luogo singolare* di O, mentre il suo complementare $O_* = O \setminus \Sigma_O$ costituisce la *parte regolare* dell'orbifold.

Osservazione 2.1.8. Sia $p\colon \widetilde{O} \to O$ un rivestimento orbifold. Considerata come mappa continua tra gli spazi topologici sottostanti, p è un rivestimento ramificato nel senso di Fox (si veda la Definizione 1.2.15). In particolare, la restrizione

$$p|_{\widetilde{O} \setminus p^{-1}(\Sigma O)}\colon \widetilde{O} \setminus p^{-1}(\Sigma O) \longrightarrow O_*$$

è un rivestimento non ramificato, e il luogo di ramificazione di p è contenuto nel luogo singolare ΣO.

Proposizione 2.1.9. La parte regolare di un orbifold O forma un sottoinsieme denso di O.

Dimostrazione. Sia $U \subseteq O$ un aperto non vuoto. Per mostrare che O_* è denso in O, è sufficiente verificare che $U \cap O_* \neq \varnothing$.

Sia $(\widetilde{V}, G, f, V)$ una carta locale dell'orbifold O tale che V è connesso e $V \cap U \neq \varnothing$. Si consideri l'aperto non vuoto $W := U \cap V \subset V$. La sua preimmagine tramite la mappa continua f,

$$\widetilde{V}' := f^{-1}(W) \subset \widetilde{V},$$

è un aperto non vuoto di $\widetilde{V}$.

L'insieme dei punti di $\widetilde{V}$ aventi stabilizzatore non banale per l'azione di G, ossia la preimmagine del luogo singolare di V, è dato da

$$S := \{y \in \widetilde{V} \mid \Gamma_{f(y)} \neq \{e\}\} = \bigcup_{g \in G \setminus \{e\}} \mathrm{Fix}(g),$$

dove $\mathrm{Fix}(g) := \{y \in \widetilde{V} \mid g \cdot y = y\}$ e $\Gamma_{f(y)}$ indica il gruppo di isotropia associato a $f(y)$.

Ogni elemento $g \in G \setminus \{e\}$ agisce come un'isometria lineare non banale. Ne consegue che $\mathrm{Fix}(g) = \widetilde{V} \cap E_g$, dove $E_g := \ker(g - \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n})$ è un sottospazio vettoriale proprio di $\mathbb{R}^n$ di dimensione minore o uguale a $n-1$ poiché $g \neq \mathrm{id}$.

Ciascun insieme $\mathrm{Fix}(g)$ è dunque chiuso in $\widetilde{V}$ e privo di punti interni. Essendo G un gruppo finito, S è un'unione finita di chiusi a parte interna vuota, ed è pertanto un chiuso in $\widetilde{V}$ con parte interna vuota.

Ne deriva che il complementare $\widetilde{V} \setminus S$ è aperto e denso in $\widetilde{V}$. Poiché $\widetilde{V}' \subset \widetilde{V}$ è un aperto non vuoto, si ha

$$\widetilde{V}' \cap (\widetilde{V} \setminus S) \neq \varnothing.$$

Scegliendo un elemento $y \in \widetilde{V}' \cap (\widetilde{V} \setminus S)$, esso soddisfa $\Gamma_{f(y)} = \{e\}$, per cui $f(y) \in O_*$. Poiché $y \in \widetilde{V}'$, risulta $f(y) \in f(\widetilde{V}') = W \subset U$. Pertanto $f(y) \in U \cap O_*$, da cui segue $U \cap O_* \neq \varnothing$.

Per l'arbitrarietà di U, il sottoinsieme O_* è denso in O. □

Osservazione 2.1.10. Poiché i sottogruppi non banali di $\mathrm{O}(2)$ sono, a meno di isomorfismo, i gruppi ciclici di ordine $n \geq 2$ e i gruppi diedrali D_n di ordine $2n$ con $n \geq 1$, ogni punto appartenente al luogo singolare di un 2-orbifold ha necessariamente uno dei seguenti modelli locali:

1. $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}_n$, $n \geq 2$, con $\mathbb{Z}_n$ che agisce tramite rotazioni;

2. $\mathbb{R}^2/D_n$, $n \geq 1$, dove D_n agisce come gruppo generato da due riflessioni, se $n \geq 2$, e come gruppo generato da una singola riflessione nel caso in cui $n = 1$.

Definizione 2.1.11. Un orbifold O è *buono* se esiste un rivestimento orbifold

$$p\colon \widetilde{O} \to O$$

in cui $\widetilde{O}$ è una varietà, *cattivo* altrimenti.

2.2 Alcuni esempi

Proposizione 2.2.1. Se M è una varietà e Γ è un gruppo che agisce tramite diffeomorfismi in modo propriamente discontinuo su M, allora M/Γ ha una naturale struttura di orbifold (intesa nel senso dell'Osservazione 2.1.2) tale che la proiezione al quoziente sia un rivestimento orbifold.

Dimostrazione. Sia $p\colon M \to M/\Gamma$ la proiezione al quoziente. Per ogni $x \in M/\Gamma$ scegliamo $\tilde{x} \in M$ tale che $p(\tilde{x}) = x$.

Poiché l'azione di Γ su M è propriamente discontinua, esiste un intorno aperto V di $\tilde{x}$ tale che l'insieme

$$F = \{\gamma \in \Gamma \mid \gamma V \cap V \neq \varnothing\}$$

è finito. Di conseguenza, lo stabilizzatore $I_x = \{\gamma \in \Gamma \mid \gamma \cdot \tilde{x} = \tilde{x}\}$ è un sottogruppo finito in quanto $I_x \subseteq F$.

Certamente, per ogni $\gamma \in F \setminus I_x$, si ha $\gamma \cdot \tilde{x} \neq \tilde{x}$. Essendo M uno spazio di Hausdorff, per ogni $\gamma \in F \setminus I_x$ possiamo trovare un intorno aperto J_γ di $\tilde{x}$ tale che $\gamma J_\gamma \cap J_\gamma = \varnothing$. Definiamo quindi l'intorno aperto

$$\widetilde{U}_x := \bigcap_{h \in I_x} h\left(V \cap \left(\bigcap_{\gamma \in F \setminus I_x} J_\gamma\right)\right).$$

Essendo I_x e $F \setminus I_x$ insiemi finiti, $\widetilde{U}_x$ è intersezione finita di aperti di $\tilde{x}$ ed è pertanto un intorno aperto I_x-invariante di $\tilde{x}$. Se per un qualche $\gamma \in \Gamma$ si ha $\gamma\widetilde{U}_x \cap \widetilde{U}_x \neq \varnothing$, allora necessariamente $\gamma \in F$ poiché $\widetilde{U}_x \subseteq V$; d'altra parte $\gamma \notin F \setminus I_x$ poiché $\widetilde{U}_x \subseteq J_\gamma$, da cui segue

$$\gamma\widetilde{U}_x \cap \widetilde{U}_x \neq \varnothing \implies \gamma \in I_x.$$

Se poniamo $U_x := p(\widetilde{U}_x)$ e consideriamo $f_x := p|_{\widetilde{U}_x}\colon \widetilde{U}_x \to U_x$ la proiezione rispetto all'azione di I_x, abbiamo che $(\widetilde{U}_x, I_x, f_x, U_x)$ è una carta attorno a x.

Ora vogliamo mostrare che due carte costruite in questo modo soddisfano la relazione di compatibilità. Se $U_x \cap U_y \neq \varnothing$, esistono γ_x e $\gamma_y \in \Gamma$ tali che

$$W := \gamma_x \widetilde{U}_x \cap \gamma_y \widetilde{U}_y \neq \varnothing.$$

L'insieme W è un aperto della varietà M ed è invariante rispetto all'azione del gruppo finito

$$G_W := \gamma_x I_x \gamma_x^{-1} \cap \gamma_y I_y \gamma_y^{-1} \subset \Gamma.$$

Inoltre, la restrizione della proiezione canonica $f_W := p|_W \colon W \to p(W) \subset U_x \cap U_y$ induce un omeomorfismo $W/G_W \cong p(W)$. Pertanto $(W, G_W, f_W, p(W))$ definisce una carta locale su $p(W)$.

Per verificare la condizione di compatibilità tra le carte, basta osservare che

$$\gamma_x^{-1} \circ i_x \colon W \hookrightarrow \widetilde{U}_x \quad \text{e} \quad \gamma_y^{-1} \circ i_y \colon W \hookrightarrow \widetilde{U}_y$$

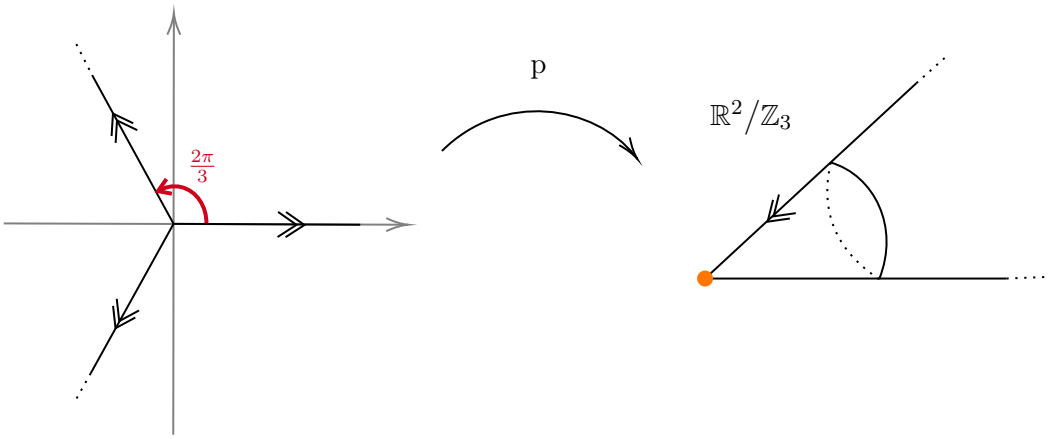
sono diffeomorfismi locali che commutano con le proiezioni al quoziente, ovvero $f_x \circ (\gamma_x^{-1} \circ i_x) = f_W$ e $f_y \circ (\gamma_y^{-1} \circ i_y) = f_W$, dove $i_x \colon W \to \gamma_x \widetilde{U}_x$ e $i_y \colon W \to \gamma_y \widetilde{U}_y$ sono inclusioni.

Aggiungendo al ricoprimento $\{U_x\}_{x \in M/\Gamma}$ tutte le carte costruite sulle intersezioni finite, si ottiene un atlante orbifold $\mathcal{A}$ per M/Γ; l'unico atlante massimale compatibile con $\mathcal{A}$ conferisce a M/Γ la struttura di orbifold desiderata.

Infine, per costruzione delle carte $(\widetilde{U}_x, I_x, f_x, U_x)$ tramite la restrizione di p, la proiezione al quoziente $p \colon M \to M/\Gamma$ è automaticamente un rivestimento orbifold. □

Osservazione 2.2.2. Dalla dimostrazione segue immediatamente che se $M = \mathbb{R}^n$ e Γ è un sottogruppo di $O(n)$ che agisce su M in modo propriamente discontinuo, M/Γ ha una naturale struttura di orbifold in accordo con la Definizione 2.1.1.

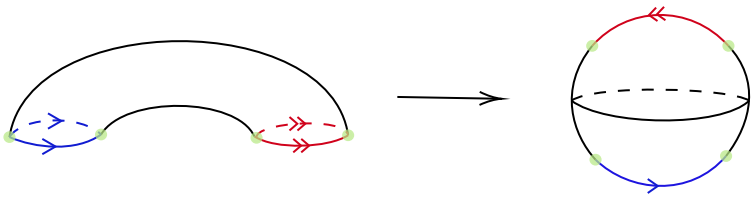
Esempio 2.2.3. Sia $G = \mathbb{Z}_n$ il gruppo che agisce su $\mathbb{R}^2$ tramite rotazioni di angolo $2\pi m/n$ attorno all'origine con m,$n \in \mathbb{N}$ e $m < n$. Poiché G è un gruppo finito, esso agisce in maniera propriamente discontinua su $\mathbb{R}^2$; quindi, per la Proposizione 2.2.1, $O = \mathbb{R}^2/G$ eredita una struttura di orbifold. In particolare l'insieme dei punti singolari di O è costituito da un unico punto, l'origine, a cui è associato il gruppo locale $\mathbb{Z}_n$. La proiezione al quoziente $p \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2/G$ è un rivestimento orbifold pertanto O è buono.



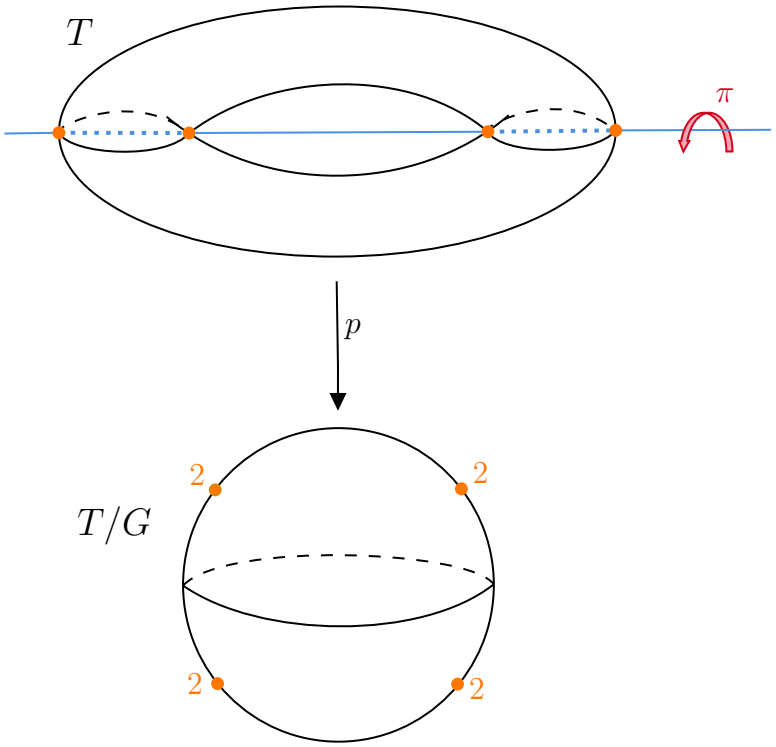
Esempio 2.2.4. Siano $r, R \in \mathbb{R}^+$ con $r < R$ e

$$T = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \left(\sqrt{x^2 + y^2} - R\right)^2 + z^2 = r^2 \right\} \subset \mathbb{R}^3$$

dotato della topologia di sottospazio; T è un toro immerso in $\mathbb{R}^3$ simmetrico rispetto agli assi. Sia inoltre G il gruppo generato dalla rotazione di angolo π rispetto all'asse x che passa per l'origine e interseca T in quattro punti distinti; sia $p\colon T \to T/G$ la proiezione al quoziente. Osserviamo che T/G come spazio topologico è omeomorfo a S^2.



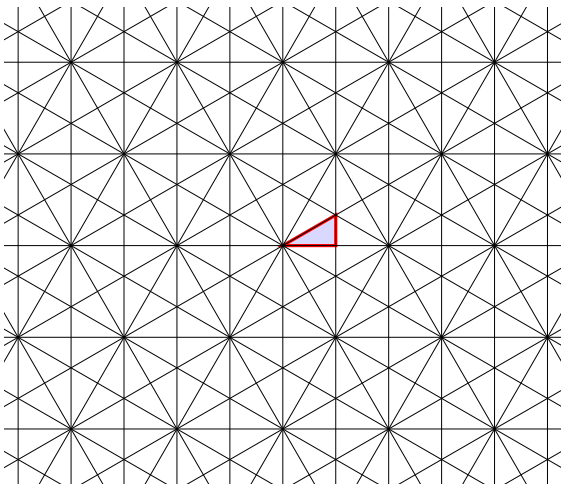
Poiché l'azione di G è propriamente discontinua (essendo G un gruppo finito), per la Proposizione 2.2.1, $T/G \cong S^2$ eredita una struttura di orbifold. Inoltre presenta quattro punti singolari, ognuno dei quali ha un intorno $U_i \cong \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}_2$, dove $\mathbb{Z}_2$ agisce su $\mathbb{R}^2$ tramite rotazione di angolo π. Analogamente all'esempio precedente, la proiezione al quoziente p è un rivestimento orbifold pertanto, T/G è un esempio di orbifold buono.



Esempio 2.2.5. Sia $T \subset \mathbb{R}^2$ un triangolo con angoli interni

$$(\alpha, \beta, \gamma) = (\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6})$$

e $G \subset \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2)$ il gruppo generato dalle riflessioni rispetto ai tre lati di T.



Come prima cosa osserviamo che l'azione di G su $\mathbb{R}^2$ è propriamente discontinua. Infatti, il triangolo T contiene un insieme di rappresentanti per l'azione, il che garantisce che ogni punto $x \in \mathbb{R}^2$ sia G-equivalente a un unico punto $y \in T$ (ovvero

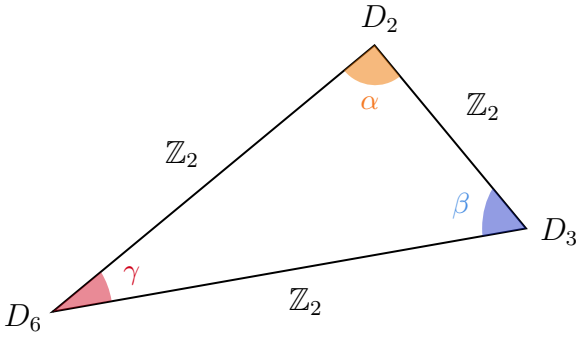
$x = \bar{g} \cdot y$ per un qualche $\bar{g} \in G$). Analizzando la posizione di y in T, per ogni $x \in \mathbb{R}^2$ è possibile scegliere un intorno aperto U di x tale che l'insieme $\{g \in G \mid gU \cap U \neq \varnothing\}$ coincida con lo stabilizzatore $G_x = \bar{g} G_y \bar{g}^{-1}$, che risulta sempre finito. Infatti:

- per ogni $x \in \mathbb{R}^2$ in relazione con un punto $y \in \mathrm{Int}(T)$, lo stabilizzatore è banale, dunque esiste un intorno aperto U di x tale che $\{g \in G \mid gU \cap U \neq \varnothing\} = \{\mathrm{id}\}$;
- per ogni $x \in \mathbb{R}^2$ in relazione con un punto y appartenente all'interno di uno dei lati di T, esiste un intorno aperto U di x tale che $\{g \in G \mid gU \cap U \neq \varnothing\} = \{\mathrm{id}, \bar{g} r \bar{g}^{-1}\} \cong \mathbb{Z}_2$, dove r indica la riflessione rispetto al lato a cui appartiene y;
- per ogni $x \in \mathbb{R}^2$ in relazione con un vertice y di T di angolo interno $\theta \in \left\{\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}\right\}$, sia $m \in \{2, 3, 6\}$ tale che $\theta = \frac{\pi}{m}$. Esiste un intorno aperto U di x tale che $\{g \in G \mid gU \cap U \neq \varnothing\} = \bar{g} G_y \bar{g}^{-1} \cong D_m$, dove G_y è il gruppo diedrale di ordine $2m$ generato dalle riflessioni rispetto ai due lati incidenti nel vertice y.

Essendo tali insiemi finiti per ogni $x \in \mathbb{R}^2$, l'azione è propriamente discontinua e, per la Proposizione 2.2.1, O ha una naturale struttura di orbifold. Inoltre, essendo

$$p \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 / G$$

un rivestimento orbifold, O è buono. Tale orbifold ha spazio topologico sottostante omeomorfo a T e i suoi punti regolari sono tutti e soli quelli appartenenti all'interno di T. I punti sui lati di T che non sono vertici hanno gruppo locale associato $\mathbb{Z}_2$, il quale è generato dalla riflessione rispetto al lato corrispondente, mentre i vertici di angoli α, β, γ hanno come gruppi locali associati rispettivamente D_2, D_3 e D_6, dove ciascun D_i, $i = 2, 3, 6$, è generato dalle riflessioni rispetto ai lati adiacenti.



A differenza degli esempi precedenti, il luogo singolare di tale orbifold è un insieme di cardinalità infinita e include sia elementi di codimensione 1 che di codimensione 2.

2.3 Stratificazioni e orbifold

Definizione 2.3.1. Sia X uno spazio topologico. Una stratificazione

$$\mathcal{S} = \{S_\alpha\}_{\alpha \in A}$$

di X è una collezione di sottoinsiemi localmente chiusi, chiamati strati, con le seguenti proprietà:

1. $X = \coprod_{\alpha \in A} S_\alpha$;
2. ogni punto di X possiede un intorno che interseca solo un numero finito di strati S_α;
3. se $S_\alpha \cap \overline{S_\beta} \neq \varnothing$ allora $S_\alpha \subset \overline{S_\beta}$, dove $\overline{S_\beta}$ indica la chiusura di S_β in X.

Definizione 2.3.2. Dato un orbifold O di dimensione n, si definisce in modo naturale una stratificazione $\mathcal{S} = \{S_\alpha\}_{\alpha \in A}$ sullo spazio topologico sottostante con le seguenti proprietà:

(i) ogni strato S_α è una varietà liscia e connessa di dimensione inferiore o uguale a n, massimale rispetto alla proprietà (ii);

(ii) per ogni $\alpha \in A$ e per ogni $p, q \in S_\alpha$ si ha $\Gamma_p \cong \Gamma_q$ tramite coniugio in $\mathrm{O}(n)$, ossia $\Gamma_p = g\Gamma_q g^{-1}$ per un qualche $g \in \mathrm{O}(n)$;

(iii) l'insieme $\overline{S_\alpha} \setminus S_\alpha$ è unione di strati di dimensione strettamente inferiore.

Il gruppo d'isotropia corrispondente a uno strato di codimensione 0, 1 o 2 è particolarmente semplice:

- $\dim(S_\alpha) = n$ se e solo se S_α coincide con il luogo regolare di O;
- $\dim(S_\alpha) = n - 1$ se e solo se il gruppo di isotropia associato è di ordine 2, generato dalla restrizione a $\widetilde{U}_i$ di una riflessione di $\mathbb{R}^n$ rispetto a un iperpiano. L'unione degli strati di codimensione 1 prende il nome di *bordo argentato*;
- se $\dim(S_\alpha) = n-2$, allora il gruppo di isotropia associato è un gruppo diedrale o un gruppo ciclico. Se O è privo di bordo argentato, tale gruppo è necessariamente ciclico di ordine $b_\alpha > 1$. Quest'ultimo prende il nome di *ordine* dello strato S_α di codimensione 2.

Definizione 2.3.3. Sia O un orbifold connesso senza bordo argentato. Sia S_α uno strato di codimensione 2. Per quanto detto sopra, il gruppo di isotropia di ogni suo punto è ciclico di ordine $b_\alpha > 1$. Scelgliamo μ_α un laccio in O_* attorno a tale strato, tale per cui $[\mu_\alpha]$ corrisponda a un generatore del gruppo di isotropia. Un cammino chiuso scelto in questo modo è detto *meridiano*.

Fissiamo ora $x_0 \in O_*$ e consideriamo x_α un punto base per μ_α per ogni α in $\widetilde{A} = \{\alpha \in A \mid \dim(S_\alpha) = n-2\}$. Definiamo il *sottogruppo caratteristico* di $\pi_1(O_*, x_0)$, che indicheremo $\mathrm{Char}(O)$, come la chiusura normale del sottoinsieme costituito dagli elementi della forma

$$c_\alpha \mu_\alpha^{b_\alpha} c_\alpha^{-1}$$

al variare di α in $\widetilde{A}$, dove c_α è un cammino in O_* che congiunge x_0 e x_α.

Esempio 2.3.4. Nell'esempio 2.2.3 si ha $\mathrm{Char}(O) = n\mathbb{Z} < \mathbb{Z} = \pi_1(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$.

Dato un rivestimento orbifold $p\colon \widetilde{O} \to O$, chiamo $\widetilde{O}_0 := \widetilde{O} \setminus p^{-1}(\Sigma O)$. Tale insieme è costituito dai punti la cui immagine appartiene all'insieme dei punti non singolari di O; in generale $\widetilde{O}_0 \subseteq \widetilde{O}_*$ ma a priori potrebbe non coincidere.

Definizione 2.3.5. L'immagine di $\pi_1(\widetilde{O}_0)$ tramite l'omomorfismo

$$(p|_{\widetilde{O}_0})_*\colon \pi_1(\widetilde{O}_0) \to \pi_1(O_*)$$

si chiama *sottogruppo associato* al rivestimento orbifold p.

2.4 Rivestimento orbifold universale e gruppo fondamentale orbifold

Lemma 2.4.1. Sia O un n-orbifold connesso senza bordo argentato, $(\widetilde{U}_i, G_i, f_i, U_i)$ una carta su O con $\widetilde{U}$ semplicemente connesso e $\mathrm{Char}(U_i)$ il sottogruppo caratteristico di $\pi_1(U_{i*})$, dove U_{i*} indica l'insieme dei punti regolari di U_i. Sia inoltre $p\colon V \to U_i$ un rivestimento ramificato lungo ΣU_i. Si supponga infine che il sottogruppo associato $(p|_{V_0})_*(\pi_1(V_0))$ contenga $\mathrm{Char}(U_i)$, dove $V_0 = V - p^{-1}(\Sigma U_i)$. Allora esiste una mappa di piegamento $k\colon \widetilde{U}_i \to V$ tale che il diagramma

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{U}_i & \xrightarrow{k} & V \\ & \searrow^{f_i} & \downarrow p \\ & & U_i \end{array}$$

commuti.

Osservazione 2.4.2. Se sono soddisfatte le ipotesi del Lemma, V eredita una struttura di orbifold, il cui atlante è l'unico atlante massimale equivalente all'atlante composto dalla sola carta $(\widetilde{U}_i, K, k, V)$, dove K è un qualche sottogruppo di G_i.

Dimostrazione. Come prima cosa, osservo che $U_i(\cong \widetilde{U}_i/G_i)$, avendo una struttura di orbifold di dimensione n, ammette una naturale stratificazione $\mathcal{T} = \{T_\beta\}_{\beta\in B}$ del suo luogo singolare ΣU_i, per un qualche insieme B. Sia T_β un qualsiasi strato di codimensione 2 e $\widetilde{T}_\beta$ una componente connessa di $f_i^{-1}(T_\beta)$ contenuta in $\widetilde{U}_i$. Allora possiamo trovare un elemento di G_i che agisce su $\widetilde{U}_i$ come una rotazione attorno a $\widetilde{T}_\beta$ di angolo $2\pi/b_\beta$ dove b_β è l'ordine di T_β. Quindi, dato un meridiano μ_β di T_β tutto contenuto in U_i, si ha che una delle componenti connesse di $f_i^{-1}\big((\mu_\beta)^{b_\beta}\big)$ è un meridiano $\tilde{\mu}_\beta$ di $\widetilde{T}_\beta$. Questo, insieme alla semplice connessione di $\widetilde{U}_i$ implica che il sottogruppo

$$(f_i|_{\widetilde{U}_{i0}})_*(\pi_1(\widetilde{U}_{i0}))$$

di $\pi_1(\widetilde{U}_{i*})$ coincide con il sottogruppo caratteristico $\mathrm{Char}(U_i)$.

Dalla teoria dei rivestimenti, segue che il gruppo delle trasformazioni di rivestimento del rivestimento non ramificato

$$f_i|_{\widetilde{U}_{i0}} \colon \widetilde{U}_{i0} \longrightarrow U_{i*}$$

è isomorfo a $\pi_1(U_{i*})\big/(f_i|_{\widetilde{U}_{i0}})_*(\pi_1(\widetilde{U}_{i0}))$. Ma, per quanto detto prima, quest'ultimo gruppo è isomorfo a

$$\pi_1(U_{i*})/\,\mathrm{Char}(U_i).$$

D'altra parte, il gruppo delle trasformazioni di rivestimento è isomorfo a G_i, poiché quest'ultimo agisce liberamente su $\widetilde{U}_{i0}$ e il quoziente di tale azione coincide con U_{i*}. Comparando tali isomorfismi si ottiene

$$G_i \cong \pi_1(U_{i*})/\,\mathrm{Char}(U_i).$$

Sia ora $p\colon V \to U_i$ un rivestimento ramificato come nell'enunciato del lemma. Per ipotesi e per quanto detto in precedenza

$$(f_i|_{\widetilde{U}_{i0}})_*(\pi_1(\widetilde{U}_{i0})) \subseteq (p|_{V_0})_*(\pi_1(V_0)).$$

Quindi, per la proprietà di sollevamento delle mappe, esiste un rivestimento non ramificato $k_0\colon \widetilde{U}_{i0} \to V_0$ tale che il diagramma

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{U}_{i0} & \xrightarrow{k_0} & V_0 \\ & \searrow^{f_i|_{\widetilde{U}_{i0}}} & \downarrow{\scriptstyle p|_{V_0}} \\ & & U_{i*} \end{array}$$

commuti. Inoltre k_0 è un rivestimento regolare pertanto, sempre per la teoria dei rivestimenti, il suo gruppo delle trasformazioni di rivestimento K è isomorfo a $(p|_{V_0})_*\pi_1(V_0)/\operatorname{Char}(U_i)$. Tale gruppo viene identificato con un sottogruppo di G_i, infatti:

$$K \cong (p|_{V_0})_*\pi_1(V_0)/\operatorname{Char}(U_i) \leq \pi_1(U_{i*})/\operatorname{Char}(U_i) \cong G_i.$$

Quanto detto fino ad ora mostra che il rivestimento non ramificato $p|_{V_0} : V_0 \to U_{i*}$ è isomorfo a $\widetilde{U}_{i0}/K \to \widetilde{U}_{i0}/G_i$. Ora, per quanto visto sui rivestimenti ramificati, $p : V \to U_i$ è il completamento di $V_0 \to U_{i*}$, mentre $\widetilde{U}_i/K \to U_i$ è il completamento di $\widetilde{U}_{i0}/K \to \tilde{U}_{i0}/G_i$, che come detto sopra è isomorfo a $V_0 \to U_{i*}$. Quindi, per l'unicità del completamento 1.2.11, $p : V \to U_i$ e $\widetilde{U}_i/K \to U_i$ sono rivestimenti ramificati isomorfi. In particolare $V \cong \widetilde{U}_i/K$; pertanto si ha la mappa richiesta $k : \widetilde{U}_i \to V$ nell'atlante massimale di V (data dalla proiezione al quoziente), che faccia commutare il diagramma dell'enunciato. □

Teorema 2.4.3. *Sia O un n-orbifold connesso senza bordo argentato. Un rivestimento ramificato $p\colon \widetilde{O} \to O$ lungo ΣO è un rivestimento orbifold, ossia $\widetilde{O}$ ammette una struttura di orbifold che rende p un rivestimento orbifold, se e solo se il sottogruppo associato $(p|_{\widetilde{O}_0})_*(\pi_1(\widetilde{O}_0))$ contiene il sottogruppo caratteristico* $\operatorname{Char}(O)$.

Dimostrazione. Sia $p\colon \widetilde{O} \to O$ un rivestimento ramificato lungo ΣO il cui sottogruppo associato contiene il sottogruppo caratteristico. Vogliamo mostrare che $\widetilde{O}$ ammette una struttura di orbifold che rende p un rivestimento orbifold.

Fissiamo quindi $x_0 \in O_*$ e $\tilde{x}_0 \in \widetilde{O}_0$ tali che $p(\tilde{x}_0) = x_0$ e consideriamo $\pi_1(O_*, x_0)$ e $\pi_1(\tilde{O}_0, \tilde{x}_0)$. Sia x un qualsiasi punto in O e $(\widetilde{U}_i, G_i, f_i, U_i)$ una carta attorno a x dove possiamo assumere, senza perdita di generalità, $\widetilde{U}_i$ semplicemente connesso. Sia infine V una componente connessa di $p^{-1}(U_i)$. Per prima cosa proviamo che

$$\operatorname{Char}(U_i) \subseteq (p|_{V_0})_*\big(\pi_1(V_0)\big) \qquad (\star)$$

dove $V_0 = V \cap \tilde{O}_0$. Consideriamo $\tilde{\gamma}$ un cammino in $\widetilde{O}_0$ che congiunge $\tilde{x}_0$ a $\tilde{x}_1 \in V_0$ e

$$\gamma := p \circ \tilde{\gamma}\colon [0,1] \to O_*.$$

γ è quindi un cammino in O_* con punto iniziale x_0 e punto finale $x_1 = p(\tilde{x}_1) \in U_{i*} (= U_i \cap O_*)$. Siano ora x_1 e $\tilde{x}_1$ punti base di $\pi_1(U_{i*}, x_1)$ e $\pi_1(V_0, \tilde{x}_1)$, e η un laccio in $\operatorname{Char}(U_i) \leq \pi_1(U_{i*}, x_1)$. Il laccio

$$\gamma\,\eta\,\gamma^{-1} \in \operatorname{Char}(O) \subset (p|_{\widetilde{O}_0})_*(\pi_1(\widetilde{O}_0, \tilde{x}_0))$$

può essere sollevato a un cammino η' in $\widetilde{O}_0$ basato nel punto $\tilde{x}_0 = \tilde{\gamma}(0)$. Poiché il cammino γ si solleva a $\tilde{\gamma}$ e V_0 è una componente connessa di $p^{-1}(U_{i*})$, η' deve essere della forma

$$\tilde{\gamma}\,\tilde{\eta}\,\tilde{\gamma}^{-1}$$

dove $\tilde{\eta}$ è un laccio in V_0 basato in $\tilde{x}_1 = \tilde{\gamma}(1)$. Quindi η si solleva a $\tilde{\eta}$ da cui segue che η appartiene all'immagine di $(p|_{V_0})_*\colon \pi_1(V_0) \to \pi_1(U_{i*})$. Poiché avevamo scelto $\eta \in \mathrm{Char}(U_i)$ arbitrariamente, abbiamo provato $(\star)$.

Ora, grazie al Lemma precedente, esiste una mappa $k\colon \widetilde{U}_i \to V$ nell'atlante massimale di V tale che il diagramma

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{U}_i & \xrightarrow{k} & V \\ & \searrow^{f_i} & \downarrow p \\ & & U_i \end{array}$$

commuti. Questo significa che $\widetilde{O}$ è un rivestimento orbifold di O tramite la proiezione $p\colon \widetilde{O} \to O$ poiché $(\widetilde{U}_i, G_i, f_i, U_i)$ è scelta arbitrariamente e V è una qualsiasi componente connessa di $p^{-1}(U_i)$.

Per quanto riguarda l'altra implicazione, voglio mostrare che se $p\colon \widetilde{O} \to O$ è un rivestimento orbifold, allora il sottogruppo associato contiene il sottogruppo caratteristico.

Come prima cosa ricordiamo che il sottogruppo caratteristico $\mathrm{Char}(O)$ è la chiusura normale in $\pi_1(O_*)$ del sottoinsieme costituito dagli elementi della forma $\mu^m = [\gamma]^m$, dove γ è un laccio in O_0 che compie un giro attorno a uno strato di codimensione 2 del luogo singolare ΣO, e m è l'ordine del gruppo di isotropia G associato a tale strato.

Poiché p è un rivestimento orbifold, esso localmente coincide con il quoziente di aperti euclidei rispetto all'azione dei gruppi locali. A meno di restringere gli aperti delle carte possiamo supporre che i gruppi locali coincidano con i gruppi di isotropia. Inoltre, sempre per il fatto che p è un rivestimento, a meno di restringere gli aperti delle carte su $\widetilde{O}$ e su O, esistono $(\widetilde{U}, H, h, V)$ e $(\widetilde{U}, G, f, U)$ rispettivamente carte su $\widetilde{O}$ e su O, con $H \leq G$, tali che localmente p corrisponde alla proiezione tra i quozienti

$$\widetilde{U}/H \to \widetilde{U}/G.$$

Definisco *l'indice di ramificazione* lungo lo strato considerato come

$$e := [G : H] = \frac{|G|}{|H|} = \frac{m}{|H|};$$

esso coincide con il numero di fogli del rivestimento topologico $\widetilde{U}_*/H \to \tilde{U}_*/G$. Di conseguenza, l'indice di ramificazione e divide sempre l'ordine del gruppo di isotropia m associato a tale strato.

Dalla teoria dei rivestimenti, segue che una classe di omotopia appartiene all'immagine $(p|_{\widetilde{O}_0})_*(\pi_1(\widetilde{O}_0))$ se e solo se il laccio corrispondente alla base si solleva a un laccio in $\widetilde{O}_0$. γ rappresenta un singolo giro attorno al luogo singolare e il suo sollevamento in $\widetilde{O}_0$ si chiude se e solo se il laccio alla base viene percorso un numero di volte multiplo dell'indice di ramificazione e. Pertanto, il laccio γ^e si solleva a un laccio.

Poiché e divide m, si ha che γ^m si solleva necessariamente a un laccio in $\widetilde{O}_0$.

Ho quindi mostrato che la classe di omotopia di γ^m appartiene a $(p|_{\widetilde{O}_0})_*(\pi_1(\widetilde{O}_0))$. Essendo questo ragionamento valido per ogni componente singolare e per ogni generatore di $\mathrm{Char}(O)$, concludo che l'intero sottogruppo caratteristico è contenuto in $(p|_{\widetilde{O}_0})_*(\pi_1(\widetilde{O}_0))$. □

Sia O un orbifold connesso senza bordo argentato e sia $p\colon \widetilde{O} \to O$ un rivestimento orbifold, tale che

$$(p|_{\widetilde{O}_0})_*(\pi_1(\widetilde{O}_0)) = \mathrm{Char}(O).$$

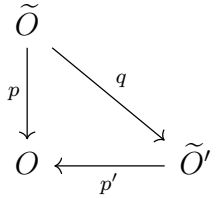
Per il teorema precedente tale rivestimento esiste e, per unicità del completamento 1.2.11, è unico a meno di isomorfismo.

Definizione 2.4.4. Il rivestimento orbifold $p\colon \widetilde{O} \to O$ che soddisfa

$$(p|_{\widetilde{O}_0})_*(\pi_1(\widetilde{O}_0)) = \mathrm{Char}(O)$$

è chiamato *rivestimento orbifold universale* di O.

Proposizione 2.4.5 (*Proprietà universale*)**.** Sia O un orbifold connesso senza bordo argentato e sia $p\colon \widetilde{O} \to O$ un rivestimento orbifold. Allora p è il rivestimento orbifold universale di O se e solo se per ogni altro rivestimento orbifold connesso, $p'\colon \widetilde{O}' \to O$, esiste un sollevamento $q\colon \widetilde{O} \to \widetilde{O}'$ di p a una mappa di rivestimento per $\widetilde{O}'$.



Dimostrazione. Consideriamo $p\colon \widetilde{O} \to O$ il rivestimento orbifold universale di O e mostriamo che vale la proprietà di sollevamento. Sia quindi $p'\colon \widetilde{O}' \to O$ un qualsiasi

altro rivestimento orbifold connesso. Osservo che le mappe

$$p|_{\widetilde{O}_0}\colon \widetilde{O}_0 \to O_* \quad \text{e} \quad p'|_{\widetilde{O}'}\colon \widetilde{O}' \to O_*$$

sono rivestimenti topologici. Inoltre poiché $p'\colon \widetilde{O}' \to O$ è un rivestimento orbifold, per il Teorema 2.4.3, il sottogruppo associato soddisfa

$$\mathrm{Char}(O) \subseteq (p'|_{\widetilde{O}'_0})_*(\pi_1(\widetilde{O}'_0))$$

pertanto si ha l'inclusione

$$(p|_{\widetilde{O}_0})_*(\pi_1(\widetilde{O}_0)) \subseteq (p'|_{\widetilde{O}'_0})_*(\pi_1(\widetilde{O}'_0)).$$

Quindi, per la proprietà di sollevamento delle mappe, esiste $q_0\colon \widetilde{O}_0 \to \widetilde{O}'_0$ tale che

$$(p'|_{\widetilde{O}'_0}) \circ q_0 = p|_{\widetilde{O}_0}.$$

Ora, per i Teoremi 1.2.10, 1.2.8 e 1.2.11, la mappa continua q_0 ammette un unico completamento q, che verifica

$$p' \circ q = p$$

e che eredita la struttura di rivestimento orbifold.

Viceversa voglio mostrare che se $p\colon \widetilde{O} \to O$ soddisfa la proprietà di sollevamento allora vale l'uguaglianza

$$(p|_{\widetilde{O}_0})_*(\pi_1(\widetilde{O}_0)) = \mathrm{Char}(O).$$

Chiaramente, per il teorema 2.4.3, vale $\mathrm{Char}(O) \subseteq (p|_{\widetilde{O}_0})_*(\pi_1(\widetilde{O}_0))$.

Per mostrare quindi l'altra inclusione consideriamo il sottogruppo caratteristico di $\pi_1(O_*)$; dalla teoria dei rivestimenti segue che esiste un rivestimento $h_0\colon Q_0 \to O_*$ tale che $(h_0)_*(\pi_1(Q_0)) = \mathrm{Char}(O)$. Grazie ai Teoremi 1.2.11 e 1.2.8, possiamo considerare il completamento di h_0, ottenendo una mappa $h\colon Q \to M$ con $Q_0 = Q - h^{-1}(\Sigma O)$. Poiché il sottogruppo associato a h_0 è $\mathrm{Char}(O)$, per il Teorema 2.4.3, la mappa h è un rivestimento orbifold.

Ora, per la proprietà di sollevamento, esiste $q\colon \widetilde{O} \to Q$ tale che

$$p = h \circ q.$$

Osserviamo che $q(\widetilde{O}_0) \subseteq Q_0$, quindi $p|_{\widetilde{O}_0} = h_0 \circ q|_{\widetilde{O}_0}$. Passando agli omomorfismi indotti sui gruppi fondamentali otteniamo

$$(p|_{\widetilde{O}_0})_*(\pi_1(\widetilde{O}_0)) = (h_0)_*\big((q|_{\widetilde{O}_0})_*(\pi_1(\widetilde{O}_0))\big) \subseteq (h_0)_*(\pi_1(Q_0))$$

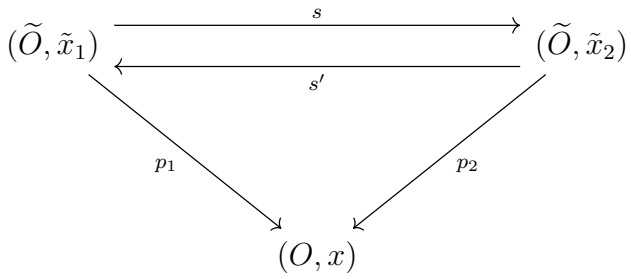
da cui, usando quanto detto sopra, si ha l'inclusione desiderata. □

Corollario 2.4.6. Il rivestimento orbifold universale $\widetilde{O}$ di un orbifold O è un rivestimento regolare, ossia per ogni $x \in O$ e per ogni coppia di punti $\tilde{x}_1$ e $\tilde{x}_2 \in \widetilde{O}$ nella fibra di x, esiste una trasformazione di rivestimento $s\colon \widetilde{O} \to \widetilde{O}$ tale che $s(\tilde{x}_1) = \tilde{x}_2$.

Dimostrazione. L'enunciato di tale corollario segue direttamente dalla proposizione precedente applicando due volte la proprietà di sollevamento. Infatti se $p_1\colon (\widetilde{O}, \tilde{x}_1) \to (O, x)$ e $p_2\colon (\widetilde{O}, \tilde{x}_2) \to (O, x)$ sono i due rivestimenti, per la proposizione precedente esistono s e s' tali che

$$p_1 = p_2 \circ s \quad \text{e} \quad p_2 = p_1 \circ s'$$

da cui segue che s è una trasformazione di rivestimento essendo un omeomorfismo che fa commutare il seguente diagramma



□

Definizione 2.4.7. Dato un orbifold O, definisco il *gruppo fondamentale in senso orbifold* $\pi_1^{\mathrm{orb}}(O)$, come il gruppo delle trasformazioni di rivestimento del suo rivestimento universale.

Osservazione 2.4.8. Esiste la nozione di *cammino* e di *omotopia di cammini* anche in senso orbifold. Ciò permette di definire il gruppo fondamentale come quoziente del gruppo dei cammini chiusi per la relazione di omotopia. Di conseguenza si può costruire il rivestimento universale in modo analogo a quanto fatto per gli spazi topologici.

Esempio 2.4.9. Nell'esempio 2.2.3, il gruppo delle trasformazioni di rivestimento è il gruppo generato dalla rotazione di angolo $2\pi/n$. Quindi il gruppo fondamentale è

$$\pi_1^{\mathrm{orb}}(O) \cong \mathbb{Z}_n.$$

Secondo la definizione che adotta la nozione di cammino, ciò intuitivamente significa che il gruppo fondamentale in senso orbifold conta modulo n il numero di giri che un laccio compie attorno al punto singolare.

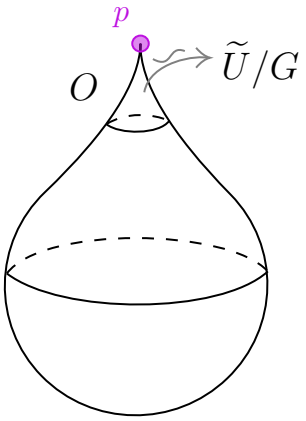
Osservazione 2.4.10. In generale, il gruppo fondamentale in senso orbifold è completamente diverso dal gruppo fondamentale dello spazio topologico sottostante $\pi_1(O)$.

Infatti, come si può osservare nell'ultimo esempio, esistono cammini nello spazio topologico sottostante che rappresentano elementi banali in $\pi_1(O)$, essendo $\pi_1(O) = \{e\}$, ma non sono banali se visti come elementi di $\pi_1^{orb}(O)$.

2.5 Esempio della sfera

Procedo ora presentando un importante esempio di orbifold cattivo.

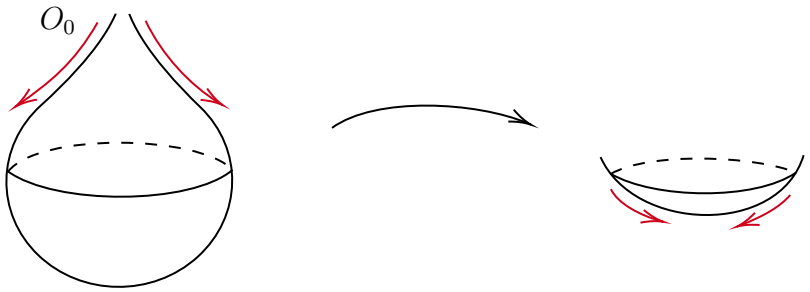
Esempio 2.5.1 (Lacrima)**.** Sia O un orbifold con spazio topologico sottostante omeomorfo a S^2 e con un solo punto singolare p a cui è associato il gruppo locale $G = \mathbb{Z}_n$, ossia esiste un intorno U di p, che suppongo semplicemente connesso, omeomorfo a $\widetilde{U}/G$ dove $\widetilde{U}$ è un aperto semplicemente connesso di $\mathbb{R}^2$ e G agisce tramite rotazione di angolo $2\pi/n$. Vogliamo mostrare che tale orbifold non è buono. A tal fine, dimostreremo che $\mathrm{id}\colon O \to O$ è il rivestimento universale di O.



Innanzitutto consideriamo $\mathrm{id}\colon O \to O$ e osserviamo che vale

$$(\mathrm{id}|_{O_0})_*(\pi_1(O_0)) = \mathrm{Char}(O),$$

dove $O_0 = O \setminus \mathrm{id}^{-1}(\Sigma O)$. Infatti, per il Teorema 2.4.3, $\mathrm{Char}(O)$ è contenuto in $(\mathrm{id}|_{O_0})_*(\pi_1(O_0))$; d'altra parte $(\mathrm{id}|_{O_0})_*(\pi_1(O_0)) = \{e\}$ dal momento che $\pi_1(O_0) = \{e\}$ essendo O_0 contraibile.



Quindi, poiché vale l'uguaglianza

$$(\mathrm{id}|_{O_0})_*(\pi_1(O_0)) = \mathrm{Char}(O),$$

la mappa $\mathrm{id}\colon O \to O$ è il rivestimento orbifold universale di O per definizione. Questo implica che O non è buono poiché un orbifold è buono se e solo se il suo rivestimento universale è una varietà.

Un altro modo per dimostrare che questo orbifold non è buono è il seguente.

Supponiamo per assurdo che esista un rivestimento ordifold $s\colon O' \to O$ per O, con O' privo di punti singolari. Essendo id_O il rivestimento universale, per la proprietà universale esiste $q\colon O \to O'$ tale che $\mathrm{id} = s \circ q$. D'altra parte, il sottogruppo associato a q è banale essendo contenuto in $\pi_1(O_*) = \{e\}$. Quindi q è il rivestimento universale di O. Per l'unicità del rivestimento universale in senso orbifold, ne segue che q è isomorfo a id, il che è assurdo poiché O ha un punto singolare, mentre O' ne è privo.

Osservazione 2.5.2. Nell'esempio precedente, il gruppo delle trasformazioni di rivestimento coincide con

$$T = \{g\colon O \to O \mid \mathrm{id} = \mathrm{id} \circ g\};$$

dalla condizione $\mathrm{id} = \mathrm{id} \circ g$ segue immediatamente che l'unico elemento di $T (= \pi_1^{\mathrm{orb}}(O))$ è l'identità.

Il fatto che il gruppo fondamentale in senso orbifold sia banale, trova un chiaro riscontro geometrico interpretando il gruppo fondamentale in senso orbifold come quoziente del gruppo dei cammini chiusi per la relazione di omotopia (come accennato nell'Osservazione 2.4.8). Infatti, è intuitivo immaginare di poter contrarre un qualsiasi laccio su O ad un punto.

Esempio 2.5.3. Sia O un orbifold con spazio topologico sottostante omeomorfo a S^2 con esattamente due punti singolari s e q, i cui gruppi locali associati sono

rispettivamente $\mathbb{Z}_n$ e $\mathbb{Z}_m$ con $n \neq m$, che agiscono tramite rotazioni. In modo analogo a quanto fatto nell'esempio precedente, si può mostrare che tale orbifold non è buono.

Invece, nel caso in cui $n = m$, O è buono. Consideriamo infatti la sfera $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ e il gruppo ciclico $G \cong \mathbb{Z}_n$ generato dalla rotazione di angolo $2\pi/n$ attorno all'asse passante per i due poli. Per la Proposizione 2.2.1, S^2/G ha una naturale struttura di orbifold ed è buono poiché la mappa

$$p\colon S^2 \longrightarrow S^2/G$$

è un rivestimento orbifold. Osserviamo che S^2/G ha spazio topologico sottostante omeomorfo a S^2 e presenta esattamente due punti singolari con gruppo locale $\mathbb{Z}_n$. Poiché S^2/G presenta la stessa struttura locale di orbifold di O (a meno di far corrispondere s e q con le immagini dei poli tramite p), possiamo identificare O con S^2/G e concludere che anche O è buono.

2.6 Orientabilità

Definizione 2.6.1. Un orbifold O di dimensione n si dice *localmente orientabile* se tutti i gruppi locali che agiscono su $\mathbb{R}^n$ ne conservano l'orientazione.

Definizione 2.6.2. Un orbifold O di dimensione n si dice *orientabile* se è localmente orientabile e O_* è orientabile.

Osservazione 2.6.3. Dalla definizione segue immediatamente che se O è localmente orientabile allora è privo di bordo argentato.

Osservazione 2.6.4. Sia O un 2-orbifold orientabile. Per quanto appena detto, O è privo di bordo argentato, pertanto, grazie all'osservazione 2.1.10, l'unico modello locale presente su O è quello descritto nell'esempio 2.2.3.

Fatto. Si può dimostrare che ogni orbifold O ha un rivestimento doppio canonico $p\colon \widetilde{O} \to O$ con $\widetilde{O}$ orientabile.

Osservazione 2.6.5. In particolare se O è orientabile, $\widetilde{O}$ coincide con l'unione disgiunta di due copie di O e la mappa p è l'identità se ristretta a ciascuna componente.

Se invece O non è orientabile, $\widetilde{O}$ è un rivestimento connesso di O.

Esempio 2.6.6. Sia O l'orbifold introdotto nell'Esempio 2.2.5. Tale orbifold non è localmente orientabile (e dunque non è orientabile), poiché i punti singolari diversi

dai vertici hanno come gruppo locale $\mathbb{Z}_2$, la cui azione non preserva l'orientazione. Per il Fatto 2.6, O ammette un rivestimento doppio $p\colon \widetilde{O} \to O$ orientabile. Di seguito descrivo esplicitamente tale rivestimento.

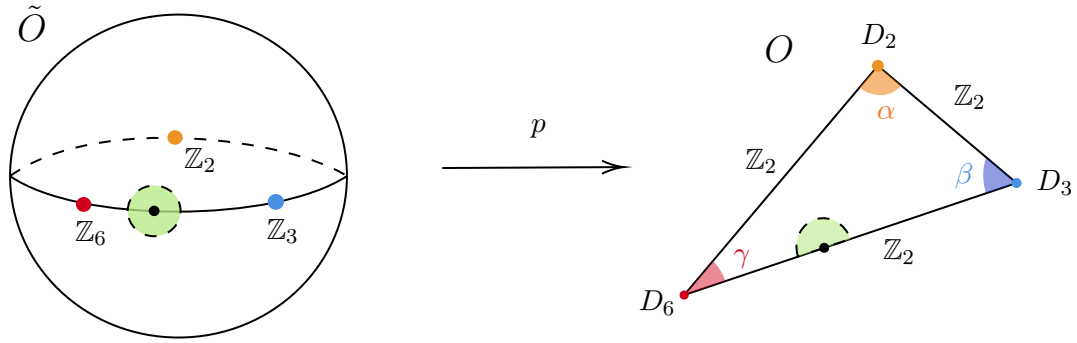
Sia $\widetilde{O}$ lo spazio ottenuto incollando due copie di O, T^+ e T^-, lungo il bordo tramite la mappa $\mathrm{id}_{\partial O}$. $\widetilde{O}$ così ottenuto è omeomorfo come spazio topologico a $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ tramite un omeomorfismo che manda T^+ e T^- rispettivamente nell'emisfero superiore e in quello inferiore e i loro bordi incollati sull'equatore. Identificando $\widetilde{O}$ con S^2 mediante tale omeomorfismo, la mappa che scambia le due copie T^+ e T^- si legge come la riflessione di $\mathbb{R}^3$ rispetto al piano su cui giace l'equatore; possiamo quindi ottenere O quozientando $\widetilde{O}$ rispetto a tale riflessione; sia $p\colon \widetilde{O} \to O$ la relativa proiezione al quoziente. In modo del tutto analogo a quanto visto per la Proposizione 2.2.1, si può mostrare che $\widetilde{O}$ possiede una naturale struttura di orbifold tale che la mappa p è un rivestimento orbifold.

Le carte locali attorno ai punti di $\widetilde{O}$ che non appartengono all'equatore sono quelle indotte da O lette sui rispettivi emisferi.

Per quanto riguarda invece i punti sull'equatore la cui immagine tramite p non è un vertice, le carte locali sono date dall'incollamento di due semidischi (omeomorfi come spazi topologici a $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1 \text{ e } x \geq 0\}$) provenienti rispettivamente da T^+ e T^-. Tale incollamento genera una palla aperta su cui il gruppo locale agisce in modo banale rendendo questi dei punti regolari per l'orbifold $\widetilde{O}$.

Infine, per i punti sull'equatore che si proiettano sui vertici di O (aventi originariamente gruppo locale diedrale D_i con $i = 2, 3, 6$), l'incollamento produce una carta locale in cui il gruppo locale si riduce al sottogruppo ciclico $\mathbb{Z}_i$ di D_i.

$\widetilde{O}$ soddisfa quindi la definizione di orientabilità e p risulta essere il rivestimento cercato.



Capitolo 3

Teorema di uniformizzazione di Thurston per orbifold geometrici

In questo capitolo farò sempre riferimento alla definizione di orbifold relativa all'Osservazione 2.1.2.

3.1 (G, X)-orbifold

Definizione 3.1.1. Sia X una varietà liscia connessa e $G \leq \mathrm{Diff}(X)$ dotato della Proprietà $(*)$. Si dice che un orbifold O è un orbifold geometrico modellato su (G, X), o semplicemente un (G, X)-orbifold, se per ogni carta $(\widetilde{U}_i, G_i, f_i, U_i)$ su O si ha che:

1. G_i è un sottogruppo finito di G;

2. $\widetilde{U}_i$ è un aperto G_i-invariante di X;

3. ogni mappa di incollamento $\psi_{ij} \colon \widetilde{U}_i \hookrightarrow \widetilde{U}_j$ è la restrizione di un elemento di G.

Tale definizione estende quella per gli spazi topologici presentata nel primo capitolo aggiungendo ipotesi che la rendono compatibile con la struttura di orbifold su O.

Osservazione 3.1.2. Dalla definizione segue che un (G, X)-orbifold ha la stessa dimensione di X.

3.2 Lemmi preliminari

Lemma 3.2.1. Siano O un (G, X)-orbifold senza bordo argentato e $(\widetilde{U}, G, f, U)$ una carta nel suo atlante massimale. Sia inoltre $p\colon V' \to U_*$ un rivestimento non ramificato, dove V' è una (G, X)-varietà connessa. Si supponga che esista una mappa sviluppante

$$D\colon V' \to X.$$

Allora esiste $l'\colon V' \to \widetilde{U}_0$ tale per cui il diagramma

$$\begin{array}{ccc} V' & \xrightarrow{l'} & \widetilde{U}_0 \\ & \searrow^{p} & \downarrow{\scriptstyle f|_{\widetilde{U}_0}} \\ & & U_* \end{array}$$

commuti, dove $\widetilde{U}_0 = \widetilde{U} \setminus f^{-1}(\Sigma U)$

Dimostrazione. Sia $\tilde{f}\colon Z \to \widetilde{U}_0$ il rivestimento universale di $\widetilde{U}_0$ e $j\colon \widetilde{U} \to X$ l'inclusione. Dall'Osservazione 1.1.11, $\tilde{j} = (j|_{\widetilde{U}_0}) \circ \tilde{f}$ è una mappa sviluppante e ovviamente rende il seguente diagramma commutativo:

$$\begin{array}{ccc} Z & \xrightarrow{\tilde{j}} & X \\ {\scriptstyle \tilde{f}}\downarrow & \nearrow_{j|_{\widetilde{U}_0}} & \\ \widetilde{U}_0 & & \\ {\scriptstyle f|_{\widetilde{U}_0}}\downarrow & & \\ U_* & & \end{array}$$

Diagramma (A)

Osserviamo ora che $f|_{\widetilde{U}_0}\colon \widetilde{U}_0 \to U_*$ è un rivestimento con un numero finito di fogli, poiché è ottenuto come quoziente rispetto all'azione di un gruppo finito. Quindi, poiché la composizione di due rivestimenti è un rivestimento se almeno uno dei due ha un numero finito di fogli,

$$f|_{\widetilde{U}_0} \circ \tilde{f}\colon Z \to U_*$$

è un rivestimento e in particolare, essendo Z semplicemente connesso, è proprio il rivestimento universale di U_*.

Da ciò segue che esiste un rivestimento $\tilde{p}\colon Z \to V'$ tale per cui il seguente diagramma commuti:

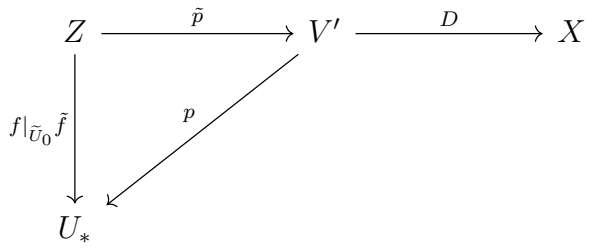


Diagramma (B)

Abbiamo quindi due mappe sviluppanti $\tilde{j}$ e $D\tilde{p}$ da Z in X. Dalla Proposizione 1.1.12 segue che esiste un diffeomorfismo $g \in G$ tale che

$$\tilde{j} = gD\tilde{p}.$$

Sia $D' = gD$. Allora $\tilde{j} = D'\tilde{p}$ da cui si ottiene il seguente diagramma commutativo:

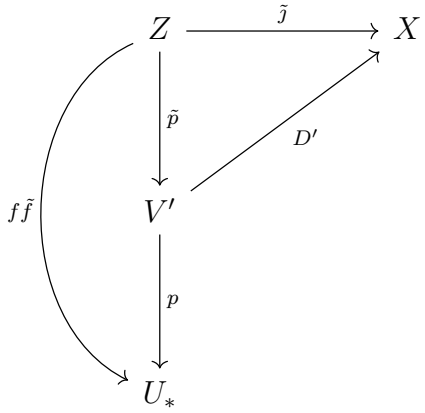


Diagramma (C)

Dai diagrammi (A) e (C) si ottiene:

$$p\tilde{p} \overset{(C)}{=} f\tilde{f} \overset{(A)}{=} f(j|_{\widetilde{U}_0})^{-1}\tilde{j} \overset{(C)}{=} f(j|_{\widetilde{U}_0})^{-1}D'\tilde{p}\ .$$

Poiché $\tilde{p}$ è suriettiva si ha che $p = f(j|_{\widetilde{U}_0})^{-1}D'$. Ponendo

$$l' := (j|_{\widetilde{U}_0})^{-1} \circ D' \colon V' \longrightarrow \widetilde{U}_0$$

si ottiene la mappa cercata. □

Lemma 3.2.2. Sia O un orbifold geometrico connesso senza bordo argentato, modellato su (G, X). Sia $p \colon \widetilde{O} \to O$ il rivestimento orbifold universale. Allora esiste una mappa sviluppante $\widetilde{D} \colon \widetilde{O}_0 \to X$.

Dimostrazione. Per il Corollario 1.1.18, è sufficiente mostrare che l'omomorfismo di olonomia $H\colon \pi_1(\widetilde{O}_0) \to G$ è banale.

Sia $\tilde{\gamma}$ un laccio in $\widetilde{O}_0$ basato nel punto $\tilde{x}_0$. Essendo p il rivestimento orbifold universale, il sottogruppo associato $(p|_{\widetilde{O}_0})_*(\pi_1(\widetilde{O}_0))$ coincide con il sottogruppo caratteristico $\mathrm{Char}(O)$. Il cammino $p_*(\tilde{\gamma})$ può essere quindi espresso come

$$p_*(\tilde{\gamma}) = \prod_\alpha h_\alpha \big(c_\alpha (\mu_\alpha)^{b_\alpha} c_\alpha^{-1}\big) h_\alpha^{-1} \in \pi_1(O_*, x_0),$$

dove $x_0 = p(\tilde{x}_0)$ e $h_\alpha \in \pi_1(O_*, x_0)$. A meno di restringere il meridiano μ_α di S_α, esiste una carta $(\widetilde{U}_i, G_i, f_i, U_i)$ che contiene μ_α. Per definizione di b_α, $(\mu_\alpha)^{b_\alpha}$ si solleva tramite f_i a un laccio $\tilde{\gamma}_\alpha$ contenuto in $\widetilde{U}_i$. Poiché $\widetilde{U}_i$ è un aperto di X, l'olonomia lungo il cammino $\tilde{\gamma}_\alpha$ è l'identità di X. Quindi l'olonomia lungo $(\mu_\alpha)^{b_\alpha}$ è l'identità. Dall'espressione sopra risulta che anche l'olonomia di O_* lungo $p_*(\tilde{\gamma})$ è l'identità di X. Poiché la (G, X)-struttura su $\widetilde{O}_0$ proviene da quella su O_*, l'olonomia lungo $\tilde{\gamma}$ è banale, come volevasi. □

3.3 Il teorema

Teorema 3.3.1. *Sia O un (G, X)-orbifold senza bordo argentato. Allora O è buono.*

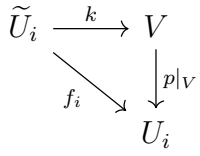
Dimostrazione. Come prima cosa si consideri $p\colon \widetilde{O} \to O$ il rivestimento orbifold universale di O. L'obiettivo è dimostrare che $\widetilde{O}$ è una varietà.

Dal Lemma 3.2.2 segue che esiste una mappa sviluppante $\widetilde{D}\colon \widetilde{O}_0 \to X$. Consideriamo ora $x \in O$ e $(\widetilde{U}_i, G_i, f_i, U_i)$ una carta attorno a tale punto. Senza perdita di generalità, si può assumere che $\widetilde{U}_i$ sia un aperto semplicemente connesso di X. Sia $V \subset \tilde{O}$ una qualsiasi componente di $p^{-1}(U_i)$. $V_0 = V \cap \widetilde{O}_0$ può essere quindi sviluppato su X tramite $\widetilde{D}|_{V_0}$.

Dal Lemma 3.2.1 segue che esiste una mappa $l'\colon V_0 \to \tilde{U}_{i0}$ tale che il seguente diagramma commuti:

$$\begin{array}{ccc} V_0 & \xrightarrow{l'} & \widetilde{U}_{i0} \\ & \searrow^{p|_{V_0}} & \downarrow{\scriptstyle f_i|_{\widetilde{U}_{i0}}} \\ & & U_{i*} \end{array}$$

Inoltre, essendo $p|_V$ un rivestimento orbifold, dalla definizione segue che esiste $k\colon \widetilde{U}_i \to V$ tale che il seguente diagramma commuti:



Dai due diagrammi appena ottenuti si osserva che

$$p|_{V_0} \circ k|_{\widetilde{U}_{i0}} = f_i|_{\widetilde{U}_{i0}} \qquad \text{e} \qquad f_i|_{\widetilde{U}_{i0}} \circ l' = p|_{V_0}$$

da cui, usando la commutatività dei diagrammi, si ottiene:

$$f_i|_{\widetilde{U}_{i0}} \circ l' \circ k|_{\widetilde{U}_{i0}} = f_i|_{\widetilde{U}_{i0}}$$

$$p|_{V_0} \circ k|_{\widetilde{U}_{i0}} \circ l' = p|_{V_0}.$$

Da queste due uguaglianze, segue immediatamente che i due rivestimenti non ramificati $f_i|_{\widetilde{U}_{i0}} : \widetilde{U}_{i0} \to U_{i*}$ e $p|_{V_0} : V_0 \to U_{i*}$ sono isomorfi. Ora, grazie ai Teoremi 1.2.11 e 1.2.8, anche i rivestimenti ramificati associati ad essi sono isomorfi. Quindi, poiché $\widetilde{U}_i$ è un aperto della varietà X, ne segue che V è a sua volta una varietà e pertanto non ha punti singolari.

Poiché quanto appena mostrato vale per ogni componente connessa V di $p^{-1}(U_i)$ e per ogni aperto del ricoprimento $\{U_i\}_{i \in I}$, $\widetilde{O}$ è una varietà. □

Bibliografia

[M] Y. Matsumoto, J. M. Montesinos-Amilibia, *A proof of Thurston's Uniformization Theorem of Geometric Orbifolds*, Tokyo J. Math., vol. 14, no. 1, 181–196, 1991.

[B] M. R. Bridson, A. Haefliger, *Metric Spaces of Non-Positive Curvature*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, vol. 319, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1999, 585–594.

[Th] W. Thurston, *The Geometry and Topology of Three-Manifolds*, Lecture notes, Princeton University, 1980.

[Mar] B. Martelli, *An Introduction to Geometric Topology*, 102–108, CreateSpace Independent Publishing Platform, 2016.

[Fox] R. H. Fox, *Covering spaces with singularities*, *Algebraic Geometry and Topology*, 243–257, Princeton University Press, 1957.