Alma Mater Studiorum · Università di Bologna

SCUOLA DI SCIENZE
Corso di Laurea in Matematica

REGOLARITÀ DEL LINGUAGGIO DELLE ESPRESSIONI RIDOTTE DI UN GRUPPO DI COXETER DI RANGO FINITO

Tesi di Laurea in Teoria dei Gruppi

Relatore:

Chiar.mo Prof.
RICCARDO BIAGIOLI

Presentata da:

MARCO ANTONIO
IRCIDE

Anno Accademico 2025-2026

A mia madre, ai miei nonni.

Indice

Introduzione **vii**

1 La rappresentazione geometrica **1**

2 Sistemi di radici **5**

3 Il poset delle radici positive **11**

4 Intermezzo **15**

5 Radici piccole e radici umili **21**

6 Automi e regolarità **27**

Introduzione

Nota storica

Lo studio della rappresentazione geometrica dei gruppi di Coxeter si fa risalire ad Ernst Witt, più precisamente all'articolo *Spiegelungsgruppen und Aufzählung halbeinfacher Liescher Ringe* del 1941, mentre la dimostrazione della fedeltà di tale rappresentazione per gruppi di Coxeter arbitrari risale ad una nota ciclostilata del 1961 di Jacques Tits, redatta per l'*Institut des Hautes Études Scientifiques* e pubblicata per la prima volta in forma dattiloscritta nel 2001. Nel 1968 il contributo di Tits è stato incluso in *Groupes et algèbres de Lie: Ch. 4-6* di Nicholas Bourbaki.

Lo studio della regolarità del linguaggio delle parole ridotte di un gruppo di Coxeter di rango finito è invece assai recente, se comparato ai contributi di Tits. Una dimostrazione dell'esistenza di un automa che riconosce tale linguaggio si deve a Brink e Howlett in un articolo del 1993. Per ottenere questo risultato, sono stati necessari la definizione di un ordine parziale sull'insieme delle radici positive e lo studio di due sottoinsiemi delle stesse: quello delle radici piccole e quello delle radici umili.

L'ordine parziale anzidetto è stato introdotto indipendentemente da Brink e Howlett, e da H. e K. Eriksson. Le radici piccole sono state introdotte nella tesi di dottorato di H. Eriksson, mentre le radici umili sono state definite, non con questo nome, da Brink e Howlett.

In questa tesi di laurea

Passiamo alla presentazione sintetica dei contenuti della tesi. Nel Capitolo 1 studiamo la rappresentazione geometrica, dandone una dimostrazione dell'esistenza tramite estensione della definizione della stessa sui generatori di un gruppo di Coxeter. Nel Capitolo 2 definiamo il sistema di radici di un gruppo di Coxeter; dimostriamo che tale insieme è l'unione delle radici positive e di quelle negative; studiamo come agisce un generatore sull'insieme delle radici positive. Nel Capitolo 3 definiamo il concetto di profondità di una radice e lo usiamo per definire un ordine

parziale sull'insieme delle radici positive; studiamo alcune proprietà fondamentali di tale ordinamento. Nel Capitolo 4 sono presenti risultati tecnici necessari alle dimostrazioni dei capitoli successivi. Nel Capitolo 5 definiamo gli insiemi delle radici piccole e delle radici umili; dimostriamo l'uguaglianza e la finitezza di tali insiemi. Nel Capitolo 6 costruiamo l'automa che riconosce il linguaggio delle espressioni ridotte di un gruppo di Coxeter di rango finito.

Capitolo 1

La rappresentazione geometrica

Sia (W, S) un sistema di Coxeter con S finito e sia V uno spazio vettoriale reale di dimensione $|S|$ con base $\{\alpha_s\}_{s\in S}$. Definiamo la forma bilineare simmetrica $(\cdot|\cdot)\colon V \times V \to \mathbb{R}$ dettando il suo comportamento sulla base succitata:

$$(\alpha_s|\alpha_{s'}) = -\cos\frac{\pi}{m(s,s')},$$

con la convenzione che $\pi/m(s,s') = 0$ se $m(s,s') = \infty$. La sua definizione su tutto $V \times V$ segue in modo unico dalla bilinearità.

Parleremo, senza che ciò causi alcun dubbio, di s-esima coordinata di $\alpha \in V$ riferendoci al coefficiente c_s nello sviluppo $\alpha = \sum_{s\in S} c_s\alpha_s$.

Proposizione 1.1. *La forma bilineare $(\cdot|\cdot)$ è semidefinita positiva su $V_{s,s'} = \mathrm{Span}\{\alpha_s, \alpha_{s'}\}$. Inoltre, essa è definita positiva su $V_{s,s'}$ se e solo se $m(s,s') < \infty$.*

Dimostrazione. Siano $\beta = x\alpha_s + y\alpha_{s'} \in V_{s,s'} \setminus \{0\}$.

- Se $m \coloneqq m(s,s') < \infty$, si ha

  $$(\beta|\beta) = x^2 - 2xy\cos\frac{\pi}{m} + y^2 = \left(x - y\cos\frac{\pi}{m}\right)^2 + \left(y\sin\frac{\pi}{m}\right)^2 > 0.$$

  Infatti, se $y > 0$, il secondo addendo sarà positivo e se $y = 0$, allora il primo addendo sarà positivo.

- Se $m(s,s') = \infty$, si ha

  $$(\beta|\beta) = x^2 - 2xy + y^2 = (x-y)^2 \geq 0\ ,$$

  da cui segue anche che $\alpha_s + \alpha_{s'}$ è isotropo. □

Definiamo ora, per ogni $s \in S$, una funzione lineare $\sigma_s \colon V \to V$, ponendo, per ogni $\beta \in V$

$$\sigma_s(\beta) = \beta - 2(\alpha_s|\beta)\alpha_s. \tag{1.1}$$

Proposizione 1.2. *Per ogni $s \in S$ valgono i seguenti fatti:*

(i) $\sigma_s\alpha_s = -\alpha_s$.

(ii) σ_s *agisce banalmente su* $H_s = \alpha_s^\perp$.

(iii) σ_s *ha ordine* 2 *in* $GL(V)$.

(iv) σ_s *è un'isometria rispetto a* $(\cdot|\cdot)$.

(v) Per ogni $s' \in S$ *si ha che* σ_s *preserva* $\mathrm{Span}\{\alpha_s, \alpha_{s'}\}$.

Dimostrazione. Ognuno dei precedenti enunciati segue da semplici calcoli.

(i) $\sigma_s\alpha_s = \alpha_s - 2(\alpha_s|\alpha_s)\alpha_s = \alpha_s - 2\alpha_s = -\alpha_s$.

(ii) Sia $v \in H_s$, si ha $\sigma_s(v) = v - 2(\alpha_s|v)\alpha_s = v$.

(iii) Per ogni $\beta \in V$ si ha:

$$\begin{aligned}\sigma_s(\sigma_s(\beta)) &= \sigma_s(\beta - 2(\alpha_s|\beta)\alpha_s)\\ &= \sigma_s(\beta) - 2(\alpha_s|\beta)\sigma_s(\alpha_s)\\ &= \sigma_s(\beta) + 2(\alpha_s|\beta)\alpha_s\\ &= \beta.\end{aligned}$$

(iv) Per ogni $\lambda, \mu \in V$ si ha:

$$\begin{aligned}(\sigma_s\lambda|\sigma_s\mu) &= (\lambda - 2\,(\alpha_s|\lambda)\,\alpha_s|\mu - 2\,(\alpha_s|\mu)\,\alpha_s)\\ &= (\lambda|\mu) - 4(\alpha_s|\lambda)(\alpha_s|\mu) + 4(\alpha_s|\lambda)(\alpha_s|\mu)(\alpha_s|\alpha_s)\\ &= (\lambda|\mu).\end{aligned}$$

(v) Poiché σ_s preserva $\mathrm{Span}\{\alpha_s\}$, ci basta dimostrare che

$$\sigma_s(\alpha_{s'}) \in \mathrm{Span}\{\alpha_s, \alpha_{s'}\}.$$

Ma questo segue direttamente dall'Equazione (1.1).

□

Definizione 1.3 (Riflessione)**.** Siano V uno spazio vettoriale dotato di una forma bilineare non degenere $(\cdot|\cdot)$ e v un suo elemento. Chiamiamo *riflessione* rispetto a v l'endomorfismo f di V tale che $f(v) = -v$ e $f(u) = u$ per ogni $u \in v^\perp$.

Lemma 1.4. *Siano $s, s' \in S$ con $m(s,s') < \infty$. La restrizione di σ_s a $\mathrm{Span}\{\alpha_s, \alpha_{s'}\}$ è una riflessione lungo $\alpha_s^\perp \cap \mathrm{Span}\{\alpha_s, \alpha_{s'}\}$.*

Dimostrazione. Segue direttamente dai primi due enunciati della Proposizione 1.2. □

Introduciamo la seguente notazione:

$$S^2_{\mathrm{fin}} = \Big\{(s,s') \in S^2 \mid m(s,s') < \infty\Big\}.$$

Teorema 1.5. *Esiste un unico omomorfismo di gruppi $\sigma\colon W \to GL(V)$ che manda s in σ_s per ogni $s \in S$.*

Dimostrazione. Poiché abbiamo già definito σ sui generatori di W, la sua estensione, se esiste, è unica. Per mostrare l'esistenza facciamo vedere che

$$(\sigma_s\sigma_{s'})^{m(s,s')} = \mathrm{id} \text{ per ogni } (s,s') \in S^2_{\mathrm{fin}}.$$

Sappiamo già dalla Proposizione 1.2 che $\sigma_s^2 = \mathrm{id}$. Ci manca da mostrare che per ogni $s \neq s'$ con $(s,s') \in S^2_{\mathrm{fin}}$, si ha $(\sigma_s\sigma_{s'})^{m(s,s')} = \mathrm{id}$.

Sia $V_{s,s'} = \mathrm{Span}\{\alpha_s, \alpha_{s'}\}$. Poiché per la Proposizione 1.2 $\sigma_s\sigma_{s'}$ agisce banalmente su $V_{s,s'}^\perp$, il suo ordine in $GL(V)$ è uguale all'ordine della sua restrizione a $V_{s,s'}$.

Per il Lemma 1.4, $\sigma_s\sigma_{s'}$ è una rotazione di un angolo doppio rispetto all'angolo tra $\alpha_s^\perp$ e $\alpha_{s'}^\perp$, cioè di

$$\begin{aligned} 2(\pi - \arccos((\alpha_s \mid \alpha_{s'}))) &= \\ 2(\pi - \arccos(-\cos(\pi/m(s,s')))) &= \\ 2\pi - 2(\pi - \pi/m(s,s')) &= \\ 2\pi/m(s,s'). & \end{aligned}$$

Dunque $\sigma_s\sigma_{s'}$ ha ordine $m(s,s')$. □

Definizione 1.6 (Rappresentazione geometrica)**.** Dato un sistema di Coxeter (W,S), l'omomorfismo $\sigma\colon W \to GL(V)$ è detto *rappresentazione geometrica* di W.

Osservazione 1.7. Se scriviamo le due applicazioni σ_s e $\sigma_{s'}$ in coordinate rispetto alla base $\mathcal{B} = \{\alpha_s, \alpha_{s'}\}$ di $\mathrm{Span}\{\alpha_s, \alpha_{s'}\}$, posto $\theta = \pi/m(s,s')$, otteniamo:

$$\sigma_s = \begin{bmatrix} -1 & 2\cos(\theta) \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_{\mathcal{B}} \quad \text{e} \quad \sigma_{s'} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2\cos(\theta) & -1 \end{bmatrix}_{\mathcal{B}}.$$

Lemma 1.8. *Siano $s, s' \in S$ con $m(s,s) = \infty$. Allora*

$$(ss')^r(\alpha_s) = (2r+1)\,\alpha_s + 2r\alpha_{s'}.$$

Dimostrazione. Procediamo per induzione.

Se $r = 0$,

$$e(\alpha_s) = \alpha_s = 1\alpha_s + 0\alpha_{s'} = (2 \cdot 0 + 1)\,\alpha_s + (2 \cdot 0)\,\alpha_{s'}.$$

Sia $r > 0$,

$$\begin{aligned}(ss')^r(\alpha_s) &= ss'(ss')^{r-1}(\alpha_s)\\ &= (ss')((2(r-1)+1)\,\alpha_s + 2(r-1)\,\alpha_{s'})\\ &= (ss')((2r-1)\,\alpha_s + (2r-2)\,\alpha'_s),\end{aligned} \tag{1.2}$$

ove l'uguaglianza tra la prima e la seconda riga segue per ipotesi induttiva. Esprimiamo ora, per comodità di calcolo, l'Equazione (1.2) nelle coordinate rispetto alla base $\mathcal{B}$ dell'osservazione precedente.

$$\begin{aligned}&= \begin{bmatrix}-1 & 2\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 2 & -1\end{bmatrix}\begin{pmatrix}2r-1\\ 2r-2\end{pmatrix}\\ &= \begin{bmatrix}3 & -2\\ 2 & -1\end{bmatrix}\begin{pmatrix}2r-1\\ 2r-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2r+1\\ 2r\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

□

Un'interessante conseguenza del teorema precedente è il seguente risultato.

Corollario 1.9. *Se $s \neq s'$ in S, essi rimangono diversi anche in W. Inoltre l'ordine di ss' in W è $m(s, s')$.*

Dimostrazione. Poiché σ manda s e s' in elementi diversi di $GL(V)$ deve essere $s \neq s'$.

- Se $m(s, s') < \infty$, le relazioni in W restituiscono $o(ss') \mid m(s, s')$. Siccome σ è un omomorfismo, deve essere $o(\sigma_s\sigma_{s'}) = m(s, s')$.
- Se $m(s, s') = \infty$, per il Lemma 1.8 si ha $o(\sigma_s\sigma_{s'}) = \infty$. □

Per semplicità notazionale scriveremo indifferentemente $w\beta$, $w(\beta)$ o $w \cdot \beta$ invece di $\sigma_w(\beta)$; scriveremo m al posto di $m(s, s')$ ove ciò non causi confusione.

Capitolo 2

Sistemi di radici

In questo capitolo dimostriamo che la rappresentazione geometrica di W è fedele. Per farlo, abbiamo bisogno di introdurre diversi concetti.

Definizione 2.1 (Sistema di radici, Radici semplici)**.** Sia (W, S) un sistema di Coxeter. Definiamo il *sistema di radici*

$$\Phi = \Big\{ w \cdot \alpha_s \mid w \in W, s \in S \Big\}.$$

Il sottoinsieme $\Pi = \{\alpha_s\}_{s \in S} \subseteq \Phi$ viene detto insieme delle *radici semplici*.

Definizione 2.2 (Radici positive, negative)**.** Sia

$$\alpha = \sum_{s \in S} c_s \alpha_s \in \Phi.$$

Diciamo che α è *positiva* (rispettivamente *negativa*), e scriviamo $\alpha > 0$ (rispettivamente $\alpha < 0$) se $c_s \geq 0$ (rispettivamente $c_s \leq 0$) per ogni $s \in S$.

Indichiamo con Φ^+ l'insieme delle radici positive e con Φ^- l'insieme delle radici negative.

Osservazione 2.3. Poiché σ_s è un'isometria per ogni $s \in S$ e ogni elemento di W si scrive come prodotto di elementi di S, segue che la moltiplicazione a sinistra per w è un'isometria, cioè $(w \cdot \beta | w \cdot \gamma) = (\beta | \gamma)$ per ogni $w \in W$, $\beta, \gamma \in V$.

Corollario 2.4. *Tutti i vettori in Φ sono unitari.*

Dimostrazione. Per l'Osservazione 2.3,

$$(w(\alpha_s) \mid w(\alpha_s)) = (\alpha_s | \alpha_s) = 1. \qquad \square$$

Corollario 2.5. *Siano $\alpha, \beta \in \Phi^+$ con $\beta = c\alpha$ per qualche $c \in \mathbb{R}$. Allora $\alpha = \beta$.*

Dimostrazione. Per il Corollario 2.4

$$1 = (\beta|\beta) = c^2(\alpha|\alpha) = c^2,$$

dunque $c = 1$ oppure $c = -1$. Ma se c fosse -1, i coefficienti di β sarebbero non positivi, dunque β non sarebbe una radice positiva. □

Ricordiamo la seguente formula di goniometria elementare, la quale sarà usata nei prossimi lemmi:

$$2\sin(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha - \beta) = \sin(\alpha + \beta) \tag{2.1}$$

Lemma 2.6. *Siano $s, s' \in S$ con $1 < m < \infty$ e sia $\theta = \pi/m$. Allora*

$$(ss')^r(\alpha_s) = \frac{\sin\left((2r+1)\theta\right)}{\sin(\theta)}\,\alpha_s + \frac{\sin(2r\theta)}{\sin(\theta)}\,\alpha_{s'}.$$

Dimostrazione. Procediamo per induzione. se $r = 0$, la tesi è vera, in quanto

$$(ss')^0(\alpha_s) = e(\alpha_s) = \alpha_s$$

Se $r > 0$, allora

$$\begin{aligned}(ss')^r(\alpha_s) &= (ss')(ss')^{r-1} \cdot \alpha_s \\ &= (ss')\left(\frac{\sin((2r-1)\theta)}{\sin(\theta)}\,\alpha_s + \frac{\sin((2r-2)\theta)}{\sin(\theta)}\,\alpha_{s'}\right),\end{aligned} \tag{2.2}$$

ove l'uguaglianza sopra segue per ipotesi induttiva. Riscriviamo l'Equazione (2.2) in coordinate rispetto alla base $\{\alpha_s, \alpha_{s'}\}$ di $\mathrm{Span}\{\alpha_s, \alpha_{s'}\}$.

$$\begin{aligned}&= \begin{bmatrix}-1 & 2\cos(\theta)\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 2\cos(\theta) & -1\end{bmatrix}\begin{pmatrix}\sin((2r-1)\theta)/\sin(\theta)\\ \sin((2r-2)\theta)/\sin(\theta)\end{pmatrix}\\ &= \frac{1}{\sin(\theta)}\begin{bmatrix}-1 & 2\cos(\theta)\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{pmatrix}\sin((2r-1)\theta)\\ \sin(2r\theta)\end{pmatrix}\\ &= \frac{1}{\sin(\theta)}\begin{pmatrix}\sin((2r+1)\theta)\\ \sin(2r\theta)\end{pmatrix};\end{aligned}$$

l'uguaglianza tra la seconda e la terza riga segue dalla formula (2.1). □

Lemma 2.7. *Siano $s \neq s'$, $s, s' \in S$ e $w = (\dots ss')_j$ la parola con j caratteri, alternante in s ed s'. Se $j < m$, allora*

$$w(\alpha_s) = (\dots ss')(\alpha_s) = c\alpha_s + d\alpha_{s'} \text{ con } c, d > 0.$$

Dimostrazione. Per $j = 0$, $w(\alpha_s) = \alpha_s$, dunque la tesi è vera.

- Se $m = \infty$ e w comincia con s, allora $w = (ss')^k$ per qualche $k \in \mathbb{N}$ e la tesi è vera per il Lemma 1.8. Se w comincia con s', allora $w = s'(ss')^k$ per un qualche $k \in \mathbb{N}$, dunque

$$s'(ss')^k(\alpha_s) = (2k+1)\alpha_s + (2k+2)\alpha_{s'}$$

  e la tesi rimane dimostrata.

- Se $m < \infty$, sicuramente $\sin(\theta) > 0$, infatti

$$\theta = \frac{\pi}{m} \in (0, \pi/2]\,.$$

  Se w comincia con s, allora $w = (ss')^k$ per un qualche $k < m/2$ e la tesi è vera per il Lemma 2.6. Infatti, dato che $0 < 2k < m$, si hanno

$$\begin{aligned} 0 < 2k\theta < m\theta = \pi, \\ 0 < (2k+1)\theta \leq m\theta = \pi, \end{aligned}$$

  dalle quali seguono

$$\begin{aligned} 0 < \sin(2k\theta), \\ 0 \leq \sin((2k+1)\theta). \end{aligned}$$

  Se w comincia con s', allora $w = s'(ss')^k$ con $k < (m-1)/2$, dunque

$$w = s'(ss')^k(\alpha_s) = s'\left(\frac{\sin((2k+1)\theta)}{\sin(\theta)}\alpha_s + \frac{\sin(2k\theta)}{\sin(\theta)}\alpha_{s'}\right),$$

  che in coordinate diventa

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2\cos(\theta) & -1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \sin((2k+1)\theta)/\sin(\theta) \\ \sin(2k\theta)/\sin(\theta) \end{pmatrix} = \frac{1}{\sin(\theta)} \begin{pmatrix} \sin(2(k+1)\theta) \\ \sin(2(k+1)\theta) \end{pmatrix};$$

  l'uguaglianza segue dalla formula (2.1) Poiché le due componenti sono uguali, studiamo il segno della prima componente. Ma essa è positiva in quanto $\sin(\theta) > 0$ e dal fatto che $0 < 2(k+1) \leq m$, segue $0 < 2(k+1)\theta \leq \pi$, nonché $0 \leq \sin(2(k+1)\theta)$. □

Teorema 2.8. *Sia $w \in W$ e $s \in S$.*

(i) Se $\ell(ws) > \ell(w)$, allora $w(\alpha_s) > 0$.

(ii) Se $\ell(ws) < \ell(w)$, allora $w(\alpha_s) < 0$.

Dimostrazione. Per dimostrare la (i) procediamo per induzione su $\ell(w)$.

Se $\ell(w) = 0$, allora $w = e$ e la proposizione è sempre vera. Sia ora $\ell(w) > 0$ e $\ell(ws) > \ell(w)$. Scegliendo come s' l'ultimo fattore di una scrittura ridotta di w, otteniamo che $\ell(ws') = \ell(w) - 1$. Per ipotesi $\ell(ws) > \ell(w)$, quindi sicuramente $s \neq s'$.

Consideriamo $W_J = \langle s, s' \rangle$: esso è il gruppo diedrale di ordine $2m(s, s')$. Esiste un'unica scrittura $w = w^J w_J$ con $w^J \in W^J$ e $w_J \in W_J$ e

$$\ell(w) = \ell(w^J) + \ell(w_J).^1$$

Poiché $\ell(ws) > \ell(w)$ e $\ell(ws') < \ell(w)$, segue che $w_J \neq e$ e esiste una sua scrittura ridotta come parola alternante in s e s' che termina con s' ed ha meno di m lettere. Per il Lemma 2.7, $w_J = c\alpha_s + d\alpha_{s'}$ con $c, d \geq 0$. Quindi

$$w(\alpha_s) = w^J w_J(\alpha_s) = w^J(c\alpha_s + d\alpha_{s'}) = cw^J(\alpha_s) + dw^J(\alpha_{s'}).$$

Poiché $\ell(w_J) \geq 1$, si ha $\ell(w^J) < \ell(w)$. Inoltre, per definizione di W^J, si ha che $\ell(w^J s) > \ell(w^J)$ e $\ell(w^J s') > \ell(w^J)$, da cui, per ipotesi induttiva, segue che $w^J(\alpha_s)$ e $w^J(\alpha_{s'})$ sono entrambe radici positive.

La (ii) segue dalla (i) applicata a ws. Infatti quest'ultima equivale a dire che se $\ell(ws) < \ell((ws)s)$, allora $ws(\alpha_s) = -w(\alpha_s) > 0$ (cioè $w(\alpha_s) < 0$). □

Corollario 2.9. *L'insieme Φ è unione disgiunta di Φ^+ e Φ^-.*

Dimostrazione. Poiché la moltiplicazione per una riflessione semplice non può lasciare invariata la lunghezza, segue dal Teorema 2.8 che per ogni $w \in W$ e $s \in S$ deve essere vera esattamente una tra $w(\alpha_s) > 0$ e $w(\alpha_s) < 0$. □

Corollario 2.10. *La rappresentazione σ è fedele.*

Dimostrazione. Sia, per assurdo, $e \neq w \in W$ tale che $\sigma(w) = w$. Sia $s \in S$ tale che $\ell(ws) < \ell(w)$. Si ha quindi che $w(\alpha_s) = \alpha_s > 0$, ma per il Teorema 2.8 deve essere $w(\alpha_s) < 0$. □

Proposizione 2.11. *σ_s permuta l'insieme $\Phi^+ \setminus \{\alpha_s\}$.*

Dimostrazione. Sia $\alpha \in \Phi^+ \setminus \{\alpha_s\}$. Per il Corollario 2.5, si ha che α non è un multiplo di α_s. Esiste quindi $t \neq s$ tale che la t-esima coordinata di α sia strettamente positiva.

Applicando s ad α otteniamo una radice che differisce da α solo per la s-esima coordinata, dunque, poiché la t-esima coordinata di $s(\alpha)$ resta positiva, si ha $s(\alpha) \in \Phi^+$ e $s(\alpha) \neq \alpha_s$. Otteniamo quindi il contenimento

$$s(\Phi^+ \setminus \{\alpha_s\}) \subseteq \Phi^+ \setminus \{\alpha_s\}.$$

Applicando s a entrambi i membri, otteniamo anche l'inclusione inversa. □

[1] Per la definizione di W^J e per l'esistenza ed unicità della scomposizione $w^J \cdot w_J$ si veda Björner, A. & Brenti, F. (2005). *Combinatorics of Coxeter Groups*, 39-41.

Definizione 2.12. Sia $w \in W$, definiamo

$$N(w) \coloneqq \{\beta \in \Phi^+ \mid w(\beta) \in \Phi^-\}.$$

Proposizione 2.13. *Per ogni $w \in W$, $\ell(w) = |N(w)|$*

Dimostrazione. Se $\ell(w) = 0$, allora $w = e$ e ogni radice positiva viene mandata da e in se stessa; dunque $|N(w)| = 0$.

Procediamo ora per induzione su $\ell(w)$. Siano $u \in W$, $s \in S$ tali che $w = us$ e $w > u$. Dimostriamo che

$$N(w) = \{\alpha_s\} \cup sN(u).$$

Per il Teorema 2.8, $w(\alpha_s) \in \Phi^-$, dunque $\alpha_s \in N(w)$. Facciamo vedere che $\alpha \in N(us) \setminus \{\alpha_s\}$ se e solo se $\alpha \in sN(u)$. Ma infatti $\alpha \in N(us) \setminus \{\alpha_s\}$ se e solo se $u(s(\alpha)) \in \Phi^-$ e $s(\alpha) \in \Phi^+$, cioè se e solo se $s(\alpha) \in N(u)$.

Poiché s è una biiezione e per ipotesi induttiva, $|sN(u)| = |N(u)| = \ell(u) = \ell(w) - 1$, dunque $|N(w)| = |N(u)| + |\{\alpha_s\}| = \ell(w) - 1 + 1 = \ell(w)$. □

Notiamo inoltre che nella dimostrazione precedente abbiamo dimostrato la seguente

Proposizione 2.14. *Siano $s \in S$, $u, w \in W$ con $w = us > u$. Allora*

$$N(w) = \{\alpha_s\} \cup sN(u).$$

Capitolo 3

Il poset delle radici positive

Esiste una biiezione tra le radici positive e l'insieme delle riflessioni di un gruppo di Coxeter. Costruiamola.

Definizione 3.1. Per ogni $\gamma \in \Phi$ definiamo $t_\gamma \in GL(V)$ ponendo

$$t_\gamma(\beta) = \beta - 2(\beta|\gamma)\gamma \text{ per ogni } \beta \in V.$$

Per ogni $\gamma \in \Phi$, $t_{-\gamma} = t_\gamma$, infatti

$$\begin{aligned} t_{-\gamma}(\beta) &= \beta - 2(\beta|-\gamma)\cdot(-\gamma) \\ &= \beta - 2(\beta|\gamma)\gamma. \end{aligned}$$

Inoltre $t_\gamma^2 = id$ per calcoli identici a quelli nella Proposizione 1.2.

Osservazione 3.2. Posto $\gamma = w(\alpha_s) \in \Phi$ e $\beta \in V$, abbiamo che

$$\begin{aligned} wsw^{-1}(\beta) &= w(w^{-1}(\beta) - 2(\alpha_s|w^{-1}(\beta))\alpha_s) \\ &= \beta - 2(w(\alpha_s)|\beta)w(\alpha_s) \\ &= t_\gamma(\beta). \end{aligned}$$

Dunque è possibile identificare la moltiplicazione per wsw^{-1} su V e t_γ.

Possiamo quindi definire una biiezione

$$\begin{aligned} \rho\colon \Phi^+ &\to T \\ \gamma &\mapsto t_\gamma, \end{aligned}$$

ove $T = \{wsw^{-1}\colon w \in W, s \in S\}$. Tale applicazione è suriettiva in quanto wsw^{-1} è l'immagine di $\gamma = w(\alpha_s)$. Mostriamo che è anche iniettiva. Se $t_\gamma = t_{\gamma'}$ allora per ogni $\beta \in V$,

$$\begin{aligned} t_\gamma(\beta) &= t_{\gamma'}(\beta) \\ \beta - 2(\beta|\gamma)\gamma &= \beta - 2(\beta|\gamma')\gamma' \\ (\beta|\gamma)\gamma &= (\beta|\gamma')\gamma'. \end{aligned}$$

Per $\beta = \gamma$, otteniamo $\gamma = (\gamma|\gamma')\gamma'$, cioè che γ e γ' sono due radici positive una multipla dell'altra. Ma allora $\gamma = \gamma'$ per il Corollario 2.5.

Osservazione 3.3. Per ogni $\beta = w(\alpha_s) \in \Phi^+$ si ha che $t_\beta(\beta) \in \Phi^-$. Infatti

$$t_\beta(\beta) = wsw^{-1}(w \cdot \alpha_s) = ws(\alpha_s) = -w(\alpha_s) = -\beta \in \Phi^-.$$

Inoltre, se $\beta = w(\gamma)$, con $\beta, \gamma \in \Phi^+$, segue da semplici calcoli che

$$wt_\gamma w^{-1} = t_\beta.$$

Infatti, posto $\gamma = u(\alpha_s)$ per qualche $s \in S$,

$$wt_\gamma w^{-1} = wusu^{-1}w^{-1} = t_\beta$$

in quanto $wu(\alpha_s) = w(\gamma) = \beta$.

Definizione 3.4 (Profondità)**.** La *profondità* di $\beta \in \Phi^+$ è

$$\mathrm{dp}(\beta) = \min\left\{k \mid w(\beta) \in \Phi^- \text{ per qualche } w \in W \text{ con } \ell(w) = k\right\}$$

L'insieme di cui facciamo il minimo è non vuoto, in quanto per l'Osservazione 3.3 si ha che $t_\beta(\beta) \in \Phi^-$. Inoltre, per la Proposizione 2.11 si ha che le radici di profondità 1 sono tutte e sole le radici semplici.

Definizione 3.5. Definiamo la relazione binaria $\leq$ su Φ^+ come la chiusura riflessiva e transitiva della relazione di copertura $\lhd$ definita come segue: dati $s \in S$ e $\beta \in \Phi^+$, $\beta \lhd s(beta)$ se $\mathrm{dp}(s(\beta)) = \mathrm{dp}(\beta) + 1$.

Proposizione 3.6. *$\leq$ è una relazione di ordine parziale.*

Dimostrazione. Per definizione $\leq$ è riflessiva e transitiva; ci resta da dimostrare solo che è antisimmetrica. Supponiamo per assurdo che esistano $\alpha, \beta \in \Phi^+$ tali che $\alpha \leq \beta$ e $\beta \leq \alpha$ con $\alpha \neq \beta$. Ciò significa che esiste una catena di ricoprimenti non vuota

$$\alpha \lhd \cdots \lhd \beta \lhd \cdots \lhd \alpha$$

da cui segue che $\mathrm{dp}(\alpha) < \mathrm{dp}(\alpha)$. □

Lemma 3.7. *Siano $\beta_1, \beta_2 \in \Phi^-$; allora $\beta_1 + \beta_2 \neq -\alpha_s$ per ogni $s \in S$.*

Dimostrazione. Se esistesse $s \in S$ per cui $\beta_1 + \beta_2 = -\alpha_s$, allora

$$\alpha_s = s(-\alpha_s) = s(\beta_1) + s(\beta_2).$$

Per la Proposizione 2.11 sia $s(\beta_1)$ che $s(\beta_2)$ sono radici negative; ma allora anche α_s sarebbe una radice negativa, in quanto somma di radici negative. □

Studiamo adesso come varia la lunghezza di una radice quando su di essa si agisce con una riflessione semplice.

Proposizione 3.8. *Siano $s \in S$ e $\beta \in \Phi^+ \setminus \{\alpha_s\}$. Allora*

$$\mathrm{dp}(s(\beta)) = \begin{cases} \mathrm{dp}(\beta) - 1 & \text{se } (\beta|\alpha_s) > 0 \\ \mathrm{dp}(\beta) & \text{se } (\beta|\alpha_s) = 0 \\ \mathrm{dp}(\beta) + 1 & \text{se } (\beta|\alpha_s) < 0 \end{cases}$$

Dimostrazione. Se $(\beta|\alpha_s) = 0$ dall'Equazione (1.1) segue che $s(\beta) = \beta$.

Se $(\beta|\alpha_s) > 0$, si ha che sicuramente $\mathrm{dp}(s(\beta)) \geq \mathrm{dp}(\beta) - 1$. Infatti, se per assurdo esistesse $w \in W$ tale che

$$w(\beta) \in \Phi^- \quad \text{e} \quad \ell(w) < \mathrm{dp}(\beta) - 1,$$

allora $\ell(ws) \leq \ell(w) + 1 < \mathrm{dp}(\beta)$ e $(ws)(\beta) = w(s(\beta)) \in \Phi^-$, contraddicendo la Definizione 3.4. È quindi sufficiente dimostrare che $\mathrm{dp}(s(\beta)) \leq \mathrm{dp}(\beta)$.

Se $\ell(ws) < \ell(w)$, poiché $(ws)(s\beta) = w\beta \in \Phi^-$, si ha

$$\mathrm{dp}(s(\beta)) \leq \ell(ws) < \ell(w) = \mathrm{dp}(\beta).$$

Se invece $\ell(ws) > \ell(w)$, consideriamo la radice

$$\gamma = ws(\beta) = w(\beta) - 2(\beta|\alpha_s)w(\alpha_s).$$

Poiché siamo nelle ipotesi $w(\beta) \in \Phi^-$ e $(\beta|\alpha_s) > 0$, e poiché per il Teorema 2.8 $w(\alpha_s) \in \Phi^+$, si ha che $\gamma \in \Phi^-$, in quanto somma di due radici negative. Ergo, per il Lemma 3.7, si ha $\gamma \neq -\alpha_{s'}$ per ogni $s' \in S$.

Sia ora $s' \in S$ tale che $\ell(s'w) < \ell(w)$. Notiamo che, poiché $\gamma \in \Phi^- \setminus \{-\alpha'_s\}$, si ha $s'(\gamma) \in \Phi^-$. D'altra parte $(s'w)(s(\beta)) = s'(\gamma)$, dunque

$$\mathrm{dp}(s(\beta)) \leq \ell(s'w) < \ell(w) = \mathrm{dp}(\beta).$$

Supponiamo infine $(\beta|\alpha_s) < 0$. Allora $(s(\beta)|\alpha_s) = (s^2(\beta)|s(\alpha_s)) = -(\beta|\alpha_s) > 0$ e dal caso precedente segue che $\mathrm{dp}\,(\beta) = \mathrm{dp}\,(s(s(\beta))) = \mathrm{dp}\,(s(\beta)) - 1$. □

Capitolo 4

Intermezzo

Questo capitolo è dedicato a raccogliere una serie di enunciati tecnici, il cui utilizzo è strumentale al resto della trattazione.

Definizione 4.1. Sia $\sigma^*\colon W \to GL(V)$ il seguente omomorfismo di gruppi, detto *la rappresentazione duale* di $\sigma^*\colon W \to GL(V^*)$,

$$(\sigma^*(w))(p) = p(\sigma(w^{-1})) \text{ per ogni } p \in V^*,\ w \in W.$$

Definizione 4.2 ($M(p)$, C)**.** Dato $p \in V^*$, definiamo i due insiemi

$$M(p) \coloneqq \{\beta > 0 \mid p(\beta) < 0\};$$
$$C \coloneqq \{p \in V^* \mid M(p) = \emptyset\}.$$

Lemma 4.3. *Sia $p \in C$. Allora* $\mathrm{Stab}(p) = W_J$*, ove* $J = \{s \in S \mid p(\alpha_s) = 0\}$.

Dimostrazione. Sia $s \in J$, cioè $p(\alpha_s) = 0$. Allora per ogni $\beta \in V$

$$\begin{aligned}(s(p))(\beta) &= p(s(\beta)) \\ &= p(\beta - 2(\beta|\alpha_s)\alpha_s) \\ &= p(\beta) - 2(\beta|\alpha_s)p(\alpha_s) = p(\beta),\end{aligned}$$

quindi $s \in \mathrm{Stab}(p)$. Poiché $\mathrm{Stab}(p)$ è un gruppo che contiene tutti i generatori di W_J, allora $W_J \subseteq \mathrm{Stab}(p)$.

Viceversa, sia $w \in \mathrm{Stab}(p)$. Dimostriamo che $w \in W_J$ per induzione su $\ell(w)$. Se $\ell(w) = 0$, allora $w = e$, dunque $w \in W_J$.

Sia ora $\ell(w) \geq 1$ e sia $s \in D_R(w)$, cioè tale che $\ell(ws) < \ell(w)$. Allora, per il Teorema 2.8 $w(\alpha_s) < 0$. Poiché $p \in C$, manda radici positive in valori non negativi e radici negative in valori non positivi; dunque si ha:

$$0 \leq p(\alpha_s) = w^{-1}(p(\alpha_s)) = p(w(\alpha_s)) \leq 0,$$

ovvero $p(\alpha_s) = 0$, cioè $s \in J$. Allora, per quanto visto sopra, $s \in \mathrm{Stab}(p)$. Ma $\mathrm{Stab}(p)$ è un gruppo, quindi anche $ws \in \mathrm{Stab}(p)$. Poiché $\ell(ws) < \ell(w)$, per ipotesi induttiva, $ws \in W_J$. Dal fatto che $ws, s \in W_J$, segue $w = ws \cdot s^{-1} \in W_J$. □

Lemma 4.4. *Sia $p \in V^* \setminus C$. Allora esiste un $s \in S$ tale che $\alpha_s \in M(p)$.*

Dimostrazione. Sia $p \in V^* \setminus C$, allora $M(p) \neq \emptyset$. Sia $\beta = \sum_{s \in S} c_s \alpha_s \in M(p)$, cioè $\beta > 0$ e $0 < p(\beta) = \sum_{s \in s} c_s p(\alpha_s)$. Ma $c_s \geq 0$ per ogni $s \in S$, dunque, se tutti i $p(\alpha_s)$ fossero non negativi, avremmo $p(\beta) \geq 0$, contro l'ipotesi $\beta \in M(p)$. □

Lemma 4.5. *Sia $p \in V^*$ e $\alpha_s \in M(p)$. Vale il seguente enunciato:*

$$sM(s(p)) \subseteq M(p) \setminus \{\alpha_s\}.$$

Dimostrazione. Sia $\beta \in sM(s(p))$, allora $\beta = s(\alpha)$ con $\alpha \in M(s(p))$. Verifichiamo che $\beta \in M(p) \setminus \{\alpha_s\}$. Per ipotesi vale quindi che

$$0 > s(p(\alpha)) = p(s(\alpha)) = p(\beta).$$

Inoltre $\beta \neq \alpha_s$ in quanto, se così fosse, $\alpha = s(\beta) = s(\alpha_s) = -\alpha_s$ contro l'ipotesi $\alpha \in M(s(p))$. Per concludere la dimostrazione non ci resta che dimostrare che $\beta \in \Phi^+$.

Sicuramente $\alpha_s \notin M(s(p))$, infatti $s(p(\alpha_s)) = p(s(\alpha_s)) = -p(\alpha_s) > 0$. Ma allora, per la Proposizione 2.11, poiché $\alpha \in M(s(p))$, $\beta = s(\alpha) \in \Phi^+$. □

Lemma 4.6. *Sia p tale che $M(p)$ sia finito. Allora esiste $w \in W$ tale che $w(p) \in C$.*

Dimostrazione. Se $p \in C$, basta prendere $w = e$. Sia quindi $p \in V^* \setminus C$.

Per il Lemma 4.4 esiste un $s \in S$ tale che $\alpha_s \in M(p)$. Per tale s, per il Lemma 4.5 vale $sM(s(p)) \subseteq M(p) \setminus \{\alpha_s\}$. Ma allora

$$\begin{aligned} |M(s(p))| &= |sM(s(p))| \\ &\leq |s(M(p) \setminus \{\alpha_s\})| \\ &= |M(p) \setminus \{\alpha_s\}| \\ &= |M(p)| - 1. \end{aligned}$$

Dunque, iterando il ragionamento, troviamo $s_1, \ldots, s_n \in S$ tali che, posto $w = s_n \ldots s_1$, si ha $|M(w(p))| = 0$, cioè $w(p) \in C$. □

Teorema 4.7. *Sia $H \leq W$ sottogruppo finito. Esistono $w \in W$ e $J \subseteq S$ con W_J sottogruppo finito e $wHw^{-1} \subseteq W_J$.*

Dimostrazione. Procediamo per induzione su $|S|$.

Se $|S| = 1$, a patto di prendere $w = e$ e $J = S$, si ottiene $H \leq W$, ma $W \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, dunque è finito.

Se $|W| < \infty$, con la stessa scelta di cui sopra, si ottiene ugualmente $H \leq W$, con W ancora finito.

Sia quindi $|S| > 1$ e $|W| = \infty$ e consideriamo la base duale $\{\alpha_s^*\}_{s\in S}$. Definiamo:

$$p = \sum_{s\in S} \alpha_s^* \quad \text{e} \quad q = \sum_{h\in H} h(p).$$

Poiché la moltiplicazione per un elemento $h' \in H$ è un automorfismo di H, si ha che $H \subseteq \mathrm{Stab}(q)$.

Sia $\beta \in \Phi^+ \setminus \bigcup_{h\in H} N(h)$, facciamo vedere che $h(\beta) \in \Phi^+$ per ogni $h \in H$.

$$N(h) = \{\beta \in \Phi^+ \mid h(\beta) \in \Phi^-\},$$

$$\bigcup_{h\in H} N(h) = \{\beta \in \Phi^+ \mid \exists h \in H \colon h(\beta) \in \Phi^-\},$$

$$\Phi^+ \setminus \bigcup_{h\in H} N(h) = \{\beta \in \Phi^+ \mid \forall h \in H \colon h(\beta) \in \Phi^+\},$$

che è esattamente ciò che volevamo dimostrare.

Il prossimo passo consiste nel dimostrare che $|M(q)| < \infty$. Per farlo, facciamo vedere che $M(q) \subseteq \cup_{h\in H} N(h)$; cioè che $M(q)$ è contenuto in un'unione finita (per ipotesi di finitezza di H) di insiemi finiti (per la Proposizione 2.13). Sia β come sopra,

$$\begin{aligned} q(\beta) &= \left(\sum_{h\in H} h(p)\right)(\beta) \\ &= \sum_{h\in H} (h(p))(\beta) = \sum_{h\in H} p(h^{-1}(\beta)) \\ &= \sum_{h\in H} p(h(\beta)) = \sum_{h\in H, s\in S} \alpha_s^*(h(\beta)) > 0, \end{aligned}$$

in quanto $\alpha_s^*(h(\beta))$ altro non è che la s-esima componente di $h(\beta)$, che è non-negativa (inoltre, non tutte le componenti possono essere nulle). Dunque $\beta \in \Phi^+$, ma $\beta \notin M(q)$. Quindi $\beta \in \cup_{h\in H} N(h)$.

Poiché $|M(q)| < \infty$, per il Lemma 4.6, esiste $w \in W$ tale che $w(q) \in C$. Inoltre, poiché $H \subseteq \mathrm{Stab}(q)$, allora $wHw^{-1} \in \mathrm{Stab}\, w(q)$; infatti

$$wHw^{-1}(wq) = wH(q) = w(q).$$

Per il Lemma 4.3 si ha $wHw^{-1} \subseteq W_J$, ove $J = \{s \in S \mid (w(q))(\alpha_s) = 0\}$. Sicuramente $J \neq S$, altrimenti si avrebbe $wq = 0$, da cui segue $q = 0$, contro il fatto che $q(\beta) > 0$.

Dunque wHw^{-1} è un sottogruppo finito di un sottogruppo parabolico di rango minore del rango di S. Per ipotesi induttiva esiste $w' \in W_J$ e $J' \subseteq J$ tale che $w'wHw^{-1}w'^{-1} \subseteq W_{J'}$. A meno di rinominare $w'w$ in w, si ha la tesi. □

Proposizione 4.8. *Siano $\alpha, \beta \in \Phi^+$.*

(i) Se $|(\alpha|\beta)| < 1$, allora $\langle t_\alpha, t_\beta \rangle$ è un gruppo diedrale finito.

(ii) Se $(\alpha|\beta) \leq -1$, allora $\langle t_\alpha, t_\beta \rangle$ è un gruppo diedrale infinito. Inoltre le radici $(t_\alpha t_\beta)^n(\alpha)$ per $n = 0, 1, 2, \ldots$, sono tutte combinazioni lineari non negative di α e β distinte.

Dimostrazione.

(i) Supponiamo di aver dimostrato che se $|(\gamma|\alpha_s)| < 1$, allora $\langle t_\gamma, s \rangle$ è un gruppo diedrale finito. Sia ora $|(\alpha|\beta)| < 1$ con $\beta = w(\alpha_s)$. Poiché $|(w^{-1}\alpha|\alpha_s)| = |(\alpha|\beta)| < 1$ e

$$\langle t_\alpha, t_\beta \rangle \cong w^{-1}\langle t_\alpha, t_\beta \rangle w = \langle w^{-1}t_\alpha w, w^{-1}t_\beta w \rangle = \langle t_{w^{-1}\alpha}, s \rangle,$$

allora $\langle t_\alpha, t_\beta \rangle$ è isomorfo a un gruppo diedrale finito. Possiamo quindi assumere nel resto della dimostrazione $\beta = \alpha_s$ per qualche $s \in S$.

Siano $V_0 = \mathrm{Span}\{\alpha, \alpha_s\}$, $\alpha = \sum_{r \in S} a_r \alpha_r$, $\gamma = \alpha - a_s\alpha_s$. Poiché $|(\alpha|\alpha_s)| < 1$, sicuramente $\alpha \neq \alpha_s$, dunque $\gamma \neq 0$; ma allora, presi $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ di segno opposto, $\lambda\gamma$ ha almeno una coordinata non nulla e sarà di segno opposto all'unica coordinata di $\mu\alpha_s$. Poiché non esistono radici con coordinate di segno opposto, segue che

$$\{\lambda\gamma + \mu\alpha_s \mid \lambda\mu < 0\} \cap \Phi = \emptyset. \tag{4.1}$$

Facciamo vedere che $(\cdot|\cdot)$ è definita positiva su V_0. La matrice di $(\cdot|\cdot)$ rispetto alla base $\{\alpha_s, \alpha_{s'}\}$ di V_0 è

$$A \coloneqq \begin{bmatrix} 1 & (\alpha|\alpha_s) \\ (\alpha|\alpha_s) & 1 \end{bmatrix},$$

che è definita positiva per il criterio di Sylvester, infatti $a_{11} = 1 > 0$ e $\det(A) = 1 - (\alpha|\alpha_s)^2 > 0$. Dunque V_0 è un piano euclideo. Per calcoli analoghi alla Proposizione 1.2 t_α è una riflessione in tale spazio e agisce banalmente su $V_0^\perp$; quindi $D \coloneqq \langle t_\alpha, s \rangle$ agisce banalmente su $V_0^\perp$, per cui D agisce fedelmente su V_0. Se così non fosse, esisterebbe un elemento $d \in D$ tale che $dv = v$ per ogni $v \in V_0$; ma $dv' = v'$ per ogni $v' \in V_0^\perp$, sicché $dv = v$ per ogni $v \in V = V_0 \oplus V_0^\perp$. D è quindi un gruppo diedrale.

Se D fosse infinito, $t_\alpha s$ avrebbe ordine infinito e $\{(t_\alpha s)^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sarebbe un insieme denso in S^1, quindi intersecherebbe ogni aperto di S^1, in particolare

$$\{(t_\alpha s)^n\}_{n\in\mathbb{N}} \cap (S^1 \cap \{\lambda\gamma + \mu\alpha_s \mid \lambda\mu < 0\}) \neq \emptyset,$$

contraddicendo l'Equazione (4.1). Dunque D è finito.

(ii) Sia $x = -(\alpha|\beta) \geq 1$. Per ogni $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} t_\alpha t_\beta(\lambda\alpha + \mu\beta) &= t_\alpha(\lambda t_\beta\alpha - \mu\beta) \\ &= t_\alpha(\lambda(\alpha - 2(\alpha|\beta)\beta) - \mu\beta) \\ &= t_\alpha(\lambda\alpha + (2x\lambda - \mu)\beta) \\ &= -\lambda\alpha + (2x\lambda - \mu)t_\alpha(\beta) \\ &= -\lambda\alpha + (2x\lambda - \mu)(\beta - 2(\beta|\alpha)\alpha) \\ &= -\lambda\alpha + (2x\lambda - \mu)\beta + 2x(2x\lambda - \mu)\alpha \\ &= ((4x^2 - 1)\lambda - 2x\mu)\alpha + (2x\lambda - \mu)\beta. \end{aligned}$$

Dunque, possiamo calcolare $(t_\alpha t_\beta)^n(\alpha)$ con la seguente formula ricorsiva:

$$\begin{cases} \lambda_{n+1} = (4x^2 - 1)\lambda_n - 2x\mu_n \\ \mu_{n+1} = 2x\lambda_n - \mu_n, \end{cases}$$

con le condizioni iniziali $\lambda_0 = 1$ e $\mu_0 = 0$. Dimostriamo per induzione su n che per ogni $n \in \mathbb{N}$, $\lambda_n > \mu_n \geq 0$. Per $n = 0$ si ha $\lambda_0 \geq 0$ e $\mu_0 \geq 0$.

Siano $A = 4x^2 - 2x - 1$ e $B = 2x - 1$, allora, poiché $x \geq 1$,

$$A \geq B \geq 1 \text{ e } A - B = (2x - 1)^2 - 1 \geq 0. \tag{4.2}$$

Si ha quindi che

$$\lambda_{n+1} - \mu_{n+1} = A\lambda_n - B\mu_n \geq (A - B)\lambda_n > 0;$$

le due disuguaglianze seguono per ipotesi induttiva. Dimostriamo ora che $\mu_{n+1} \geq 0$, questo concluderà il passo induttivo. Abbiamo

$$\mu_{n+1} = 2x\lambda_n - \mu_n \geq 2\lambda_n - \lambda_n = \lambda_n \geq 0.$$

Dimostriamo infine che $\{(t_\alpha t_\beta)^n(\alpha)\}_{n\in\mathbb{N}}$ è fatto di elementi distinti. Per farlo, facciamo vedere che la successione μ_n è strettamente crescente.

$$\mu_{n+1} - \mu_n = 2x\lambda_n - \mu_n - \mu_n = 2x\lambda_n - 2\mu_n \geq 2(\lambda_n - \mu_n) > 0. \qquad \square$$

Proposizione 4.9. *L'insieme* $\Big\{(\alpha|\alpha_s) \mid \alpha \in \Phi^+,\ s \in S,\ |(\alpha|\alpha_s)| < 1\Big\}$ *è finito.*

Dimostrazione. Siano

$$\mathcal{P}_{\text{fin}} = \Big\{J \subseteq S \mid |W_J| < \infty\Big\} \text{ e } \mathcal{A}_{\text{fin}} = \Big\{(\alpha|\beta) \mid \alpha, \beta \in \Phi \colon t_\alpha, t_\beta \in \bigcup_{J \in \mathcal{P}_{\text{fin}}} W_J\Big\}.$$

L'insieme $\mathcal{P}_{\text{fin}}$ è finito in quanto sottoinsieme dell'insieme delle parti di S. L'insieme $\mathcal{A}_{\text{fin}}$ è finito in quanto $\bigcup_{J \in \mathcal{P}_{\text{fin}}} W_J$ è un'unione finita di insiemi finiti ed in quanto le riflessioni sono in biiezione con le radici positive per la Definizione 3.1. Dunque le radici positive associate a tali riflessioni sono in numero finito, e le radici di Φ con tali proprietà saranno in numero doppio. Dimostriamo che $\{(\alpha|\alpha_s) \mid \alpha \in \Phi^+, s \in S, |(\alpha|\alpha_s)| < 1\} \subset \mathcal{A}_{\text{fin}}$; ciò concluderà la dimostrazione.

Siano $\alpha \in \Phi^+$, $s \in S$ tali che $|(\alpha|\alpha_s)| < 1$. Per la Proposizione 4.8 $\langle t_\alpha, s\rangle$ è finito, quindi, per il Teorema 4.7 esistono $w \in W$ e $J \in \mathcal{P}_{\text{fin}}$ tali che $w \langle t_\alpha, s\rangle w^{-1} \subseteq W_J$. Ma $(\alpha|\alpha_s) = (w(\alpha)|w(\alpha_s))$; per l'Osservazione 3.3

$$t_{w(\alpha)} = w t_\alpha w^{-1} \in w \langle t_\alpha, s\rangle w^{-1} \subseteq W_J,$$
$$t_{w(\alpha_s)} = w s w^{-1} \in w \langle t_\alpha, s\rangle w^{-1} \subseteq W_J.$$

Dunque $(\alpha|\alpha_s) \in \mathcal{A}_{\text{fin}}$. □

Capitolo 5

Radici piccole e radici umili

Definizione 5.1 (Radici piccole)**.** Ogni radice semplice è una radice *piccola*. Se α è piccola e la differenza tra le s-esime coordinate di α e $s(\alpha)$ è positiva e minore di 2, allora anche $s(\alpha)$ è *piccola*. Indichiamo con Σ l'insieme delle radici piccole.

Osservazione 5.2. Poiché α e $s(\alpha)$ differiscono solo nella s-esima coordinata di una quantità pari a $-2(\alpha|\alpha_s)$, possiamo definire Σ come il più piccolo insieme che soddisfa le seguenti due proprietà:

1. $\{\alpha_s\}_{s\in S} \subseteq \Sigma$.
2. Se $\alpha \in \Sigma$, $s \in S$ e $-1 < (\alpha|\alpha_s) < 0$, allora $s(\alpha) \in \Sigma$.

Definizione 5.3 (Copertura corta, Copertura lunga)**.** Diciamo che la copertura $\alpha \lhd s(\alpha)$ è *corta* se $-1 < (\alpha|\alpha_s) < 0$. Altrimenti diciamo che la copertura è *lunga*.

Dalla 2 dell'Osservazione 5.2, insieme alla Proposizione 3.8 segue che, se α è piccola e $s(\alpha)$ è piccola per qualche $s \in S$, allora $\alpha \lhd s(\alpha)$. Quindi una radice è piccola se e solo se può essere ottenuta a partire da una radice semplice tramite una succesione di coperture corte.

Lemma 5.4. *Sia $\alpha \in \Sigma$ e $s \in S$, con $\alpha \neq \alpha_s$. Si ha che $(\alpha|\alpha_s) < 1$.*

Dimostrazione. Procediamo per induzione su $\operatorname{dp}\alpha$.

Se $\operatorname{dp}\alpha = 1$ e $\alpha \neq \alpha_s$, allora $\alpha = \alpha_{s'}$ per qualche $s' \in S \setminus \{s\}$. Ne segue che $(\alpha|\alpha_s) < 1$. Sia ora $\operatorname{dp}\alpha \geq 2$. Poiché $\alpha \in \Sigma$, esiste $\beta \in \Sigma$ e $r \in S$ tali che $\beta \lhd \alpha = r(\beta)$ e $-1 < (\beta|\alpha_r) < 0$.

Se $s = r$, abbiamo:

$$-1 < (\beta|\alpha_r) = (r \cdot \beta | r \cdot \alpha_r) = -(\alpha|\alpha_r) < 0. \tag{5.1}$$

Moltiplicando membro a membro la disuguaglianza (5.1) per -1 si ottiene la tesi.

Sia $s \neq r$. Se $\beta = \alpha_s$,

$$(\alpha|\alpha_s) = (r \cdot \alpha_s|\alpha_s) = (\alpha_s - 2(\alpha_r|\alpha_s)\alpha_r|\alpha_s) = 1 - 2(\alpha_r|\alpha_s)^2 < 1.$$

Se $\beta \neq \alpha_s$,

$$\begin{aligned}(\alpha|\alpha_s) &= (r \cdot \beta|\alpha_s) \\ &= (\beta - 2(\beta|\alpha_r)\alpha_r|\alpha_s) \\ &= (\beta|\alpha_s) - 2(\beta|\alpha_r)(\alpha_r|\alpha_s) \\ &\leq (\beta|\alpha_s) < 1;\end{aligned}$$

ove la prima disuguaglianza segue dal fatto che $(\alpha_r|\alpha_s) < 0$ e $(\beta|\alpha_r) < 0$ e la seconda dall'ipotesi induttiva applicata a β. □

Dato $\alpha \in \Sigma$, definiamo $\mathcal{N}(\alpha) \coloneqq \Big\{s \in S \colon |(\alpha|\alpha_s)| < 1\Big\}$.

Lemma 5.5. *Siano $\beta, \gamma \in \Sigma$ con $\beta \triangleleft r(\beta) = \gamma$ per qualche $r \in S$ e $\operatorname{dp}\beta \geq 2$, allora $\mathcal{N}(\beta) \supseteq \mathcal{N}(\gamma)$.*

Dimostrazione. Siano $s \in S \setminus \mathcal{N}(\beta)$ e $r \in S$ come nell'enuniato. Facciamo vedere che $s \in S \setminus \mathcal{N}(\gamma)$. Poiché $\operatorname{dp}\beta \geq 2$, sicuramente $\beta \neq \alpha_s$ e $\beta \neq \alpha_r$. Dal Lemma 5.4 si ha che $(\beta|\alpha_s) \leq -1$. Dalla Proposizione 3.8 otteniamo che

$$(\beta|\alpha_r) < 0; \tag{5.2}$$

per il Lemma 5.4 abbiamo

$$-(\beta|\alpha_r) = (\beta|r(\alpha_r)) = (r(\beta)|\alpha_r) = (\gamma|\alpha_r) < 1. \tag{5.3}$$

Combinando le disequazioni (5.2) e (5.3), si ha

$$-1 < (\beta|\alpha_r) < 0. \tag{5.4}$$

Si può quindi dire che $r \neq s$. Calcoliamo

$$\begin{aligned}(\gamma|\alpha_s) &= (r(\beta)|\alpha_s) \\ &= (\beta - 2(\beta|\alpha_r)\alpha_r|\alpha_s) \\ &= (\beta|\alpha_s) - 2(\beta|\alpha_r)(\alpha_r|\alpha_s).\end{aligned} \tag{5.5}$$

Ma $(\beta|\alpha_r) < 0$ per la disequazione in (5.4), mentre $(\alpha_r|\alpha_s) < 0$ per la definizione di $(\cdot|\cdot)$, per cui

$$(\beta|\alpha_s) - 2(\beta|\alpha_r)(\alpha_r|\alpha_s) \leq (\beta|\alpha_s) \leq -1. \tag{5.6}$$

Combinando le disequazioni (5.5) e (5.6) abbiamo mostrato che $(\gamma|\alpha_s) \leq -1$, quindi $s \in S \setminus \mathcal{N}(\gamma)$. □

Teorema 5.6. *L'insieme delle radici piccole di un gruppo di Coxeter è di cardinalità finita.*

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo $|\Sigma| = \infty$. Poiché ci sono solo un numero finito di elementi di una data profondità, segue che esistono radici piccole di profondità arbitraria, dunque esistono catene sature di lunghezza arbitraria fatte di radici piccole.

Dimostriamo che esistono finite coppie (J, v) con $J \subseteq S$ e $v \in \mathbb{R}^J$ per cui esiste un $\gamma \in \Sigma$ con $\mathcal{N}(\gamma) = J$ e $\{(\gamma|\alpha_s)\}_{s\in J} = v$. Poiché $J \subseteq S$, sicuramente l'insieme dei possibile J è un finito. Ci basta quindi dimostrare che per ogni J ci sono finiti v che soddisfano la proprietà desiderata. Ma l'insieme degli v di cui sopra è contenuto nell'insieme dei vettori di $|J|$ componenti con entrate in $\{(\alpha|\alpha_s) \mid \alpha \in \Phi^+, s \in \mathcal{N}(\alpha)\}$. Ma tale insieme ha cardinalità finita per la Proposizione 4.9.

Consideriamo una catena satura C in $\Sigma \setminus \Pi$ di lunghezza maggiore della cardinalità dell'insieme di coppie di cui sopra. Per il principio dei cassetti esiste un segmento $\gamma_j \lhd \cdots \lhd \gamma_k$ con $\mathcal{N} \coloneqq \mathcal{N}(\gamma_j) = \mathcal{N}(\gamma_k)$ e

$$(\gamma_j|\alpha_s) = (\gamma_k|\alpha_s) \tag{5.7}$$

per ogni $s \in \mathcal{N}$, con $\operatorname{dp} \gamma_i = i$ per ogni $i = j, \ldots, k$.

Per il Lemma 5.5 si ha $\mathcal{N} = \mathcal{N}(\gamma_j) \supseteq \cdots \supseteq \mathcal{N}(\gamma_k) = \mathcal{N}$, dunque

$$\mathcal{N}(\gamma_c) = \mathcal{N} \quad \text{per ogni } c = j, \ldots, k.$$

Inoltre, poiché la catena può essere presa di lunghezza arbitraria, posso sempre prendere k in modo che $k \geq 2j - 1$, sicché $j \leq k - j + 1 \leq k$ e quindi

$$\mathcal{N}(\gamma_{k-j+1}) = \mathcal{N}. \tag{5.8}$$

Sia $s_i \in S$ tale che $s_i(\gamma_i) = \gamma_{i+1}$ per ogni $i = j \ldots k - 1$. Per la Proposizione 3.8,

$$(\gamma_i|\alpha_{s_i}) < 0 \tag{5.9}$$

e per il Lemma 5.4,

$$-(\alpha_i|\alpha_{s_i}) = (\alpha_i|s_i(\alpha_{s_i})) = (s_i(\alpha_i)|\alpha_{s_i}) = (\alpha_{i+1}|\alpha_{s_i}) < 1. \tag{5.10}$$

Dunque, per le Equazioni (5.9) e (5.10), si ha che $s_i \in \mathcal{N}(\gamma_i)$ per ogni $i = j \ldots k-1$. Per il Lemma 5.5, $s_j, \ldots, s_{k-1} \in \mathcal{N}$.

Sia $\gamma_{j-i} = s_{k-1}(\gamma_j)$. Per l'Equazione (5.7),

$$\begin{aligned}(\gamma_{j-1}|\alpha_s) &= (s_{k-1}(\gamma_j)|\alpha_s)\\ &= (\gamma_j|s_{k-1}(\alpha_s))\\ &= (\gamma_j|(\alpha_s) - 2(\alpha_s|\alpha_{s_{k-1}})\alpha_{s_{k-1}})\\ &= (\gamma_j|\alpha_s) - 2(\alpha_s|\alpha_{s_{k-1}})(\gamma_j|\alpha_{s_{k-1}})\\ &= (\gamma_k|\alpha_s) - 2(\alpha_s|\alpha_{s_{k-1}})(\gamma_k|\alpha_{s_{k-1}}) \qquad (5.11)\\ &= (\gamma_k|\alpha_s - 2(\alpha_s|\alpha_{s_{k-1}})\alpha_{s_{k-1}})\\ &= (\gamma_k|s_{k-1}(\alpha_s))\\ &= (s_{k-1}(\gamma_k)|\alpha_s)\\ &= (\gamma_{k-1}|\alpha_s)\end{aligned}$$

per ogni $s \in \mathcal{N}$. Dall'Equazione (5.11) e dal fatto che $\gamma_{k-1} < \gamma_k$, segue $(\gamma_{j-1}|\alpha_{s_{k-1}}) < 0$, dunque $\gamma_{j-1} \lhd \gamma_j$. Abbiamo quindi ottenuto una catena satura $\gamma_{j-1} \lhd \cdots \lhd \gamma_{k-1}$ con $s_{k-1}(\gamma_{j-1}) = \gamma_j$ e $s_i(\gamma_i) = \gamma_{i+1}$ per ogni $i = j-1, \ldots, k-2$. Iterando la costruzione, otteniamo una catena satura

$$\gamma_k \rhd \cdots \rhd \gamma_j \rhd \cdots \rhd \gamma_1$$

a partire da γ_1 radice semplice e tale che per ogni $s \in \mathcal{N}$

$$(\gamma_1|\alpha_s) = (\gamma_{k-j+1}|\alpha_s). \qquad (5.12)$$

Sia $r \in S$ con $\gamma_1 = \alpha_r$. Se $r \in \mathcal{N}$, per l'Equazione (5.12),

$$(\gamma_{k-j+1}|\alpha_r) = (\gamma_1|\alpha_r) = (\alpha_r|\alpha_r) = 1. \qquad (5.13)$$

D'altra parte, poiché $\mathcal{N}(\gamma_{k-j+1}) = \mathcal{N}$ per l'Equazione (5.8),

$$|(\gamma_{k-j+1}|\alpha_s)| < 1;$$

ciò contraddice l'Equazione (5.13).

Se $r \notin \mathcal{N}$, posto s_i tale che $s_i(\gamma_{k-j}) = \gamma_{k-j+1}$ con $j \le i \le k-1$, sicuramente $r \neq s_i$. Dalla definizione di $(\cdot|\cdot)$, dalla Proposizione 3.8 e dall'Equazione (5.12) otteniamo

$$0 \ge (\gamma_1|\alpha_{s_i}) = (\gamma_{k-j+1}|\alpha_{s_i}) > 0. \qquad \square$$

Definizione 5.7. Dati $\beta, \gamma \in \Phi^+$. Diciamo che β *domina* γ e scriviamo $\beta \succcurlyeq \gamma$ se $w\beta \in \Phi^-$ implica $w\gamma \in \Phi^-$ per ogni $w \in W$.

Osservazione 5.8. Questa relazione è chiaramente transitiva. Inoltre, $\beta \succcurlyeq \gamma$ implica $\beta \ge \gamma$. Infatti ogni elemento che manda β in una radice negativa, ci manda anche γ, da cui segue che $\operatorname{dp}\beta \ge \operatorname{dp}\gamma$.

Se $\beta \succcurlyeq \gamma$, allora $w\beta \succcurlyeq w\gamma$ ogniqualvolta $w\gamma \in \Phi^+$. Infatti se $v(w\beta) \in \Phi^-$, allora vw manda β in una radice negativa. Ma poiché $\beta \succcurlyeq \gamma$, vw manda anche γ in una radice negativa, cioè $v(w(\gamma)) \in \Phi^-$.

Lemma 5.9. *Sia (W, S) un gruppo di Coxeter finito e w_0 l'elemento di lunghezza massima in W. Allora $N(w_0) = \Phi^+$.*

Dimostrazione. Poiché $\ell(w_0 s) < \ell(w_0)$ per ogni $s \in S$, allora $w_0(\alpha_s) \in \Phi^-$ per ogni $s \in S$. Dimostriamo che $\Phi^+ \subseteq N(w_0)$; ciò concluderà la dimostrazione. Sia $\beta = \sum_{s\in S} c_s \alpha_s \in \Phi^+$, si ha

$$w_0(\beta) = w_0\left(\sum_{s\in S} c_s\alpha_s\right) = \sum_{s\in S} c_s w_0(\alpha_s) \in \Phi^-,$$

in quanto combinazione lineare a coefficienti non negativi di radici negative. □

Lemma 5.10. *$\beta \in \Phi^+$ domina α_s se e solo se $(\beta|\alpha_s) \geq 1$.*

Dimostrazione. Se $\beta = \alpha_s$, $\alpha_s \succcurlyeq \alpha_s$ e $(\alpha_s|\alpha_s) = 1 \geq 1$, dunque la tesi è dimostrata.

Sia $\beta \neq \alpha_s$, $\beta \succcurlyeq \alpha_s$ e supponiamo per assurdo $(\beta|\alpha_s) < 1$. Per l'Osservazione 3.3 si ha $t_\beta(\beta) \in \Phi^-$, ma $\beta \succcurlyeq \alpha_s$, quindi $\alpha_s - 2(\alpha_s|\beta)\beta = t_\beta(\alpha_s) \in \Phi^-$; dunque deve essere $(\alpha_s|\beta) > 0$. Da quest'ultima disuguaglianza e dall'ipotesi di assurdo, segue $|(\alpha_s|\beta)| < 1$. Per la Proposizione 4.8, $D \coloneqq \langle s, t_\beta\rangle$ è un gruppo diedrale finito che agisce su $\mathrm{Span}\{\alpha_s, \beta\}$ con insieme di radici positive Φ_D^+. Mostriamo che esiste $w \in D$ con $w(\alpha_s) \in \Phi^+$ e $w(\beta) \in \Phi^-$; ciò concluderà una delle due implicazioni. Sia w_0 di lunghezza massima in D e sia $w = w_0 s$. Per la Proposizione 2.14 e per il Lemma 5.9 si ha

$$\begin{aligned} N(w_0) = \{\alpha_s\} \cup sN(w) &\iff \\ sN(w) = N(w_0) \setminus \{\alpha_s\} &\iff \\ N(w) = s(\Phi_D^+ \setminus \{\alpha_s\}) &\iff \\ N(w) = \Phi_D^+ \setminus \{\alpha_s\}; & \end{aligned}$$

dunque w manda β in una radice negativa, ma α_s in una radice positiva, contraddicendo l'ipotesi $\beta \succcurlyeq \alpha_s$.

Viceversa, sia $(\beta|\alpha_s) \geq 1$, allora

$$(s(\beta)|\beta) = (\beta - 2(\beta|\alpha_s)\alpha_s|\beta) = 1 - 2(\beta|\alpha_s)^2 \leq -1.$$

Poiché $\beta \neq \alpha_s$, allora $s(\beta) \in \Phi^+$ e per la Proposizione 4.8, esistono infinite radici positive $\lambda\beta + \mu s(\beta)$ con $\lambda, \mu > 0$. Sia per assurdo $w \in W$ con $w(\beta) \in \Phi^-$ e $w(\alpha_s) \in \Phi^+$, allora

$$w(s(\beta)) = w(\beta - 2(\beta|\alpha_s)\alpha_s) = w(\beta) - 2(\beta|\alpha_s)w(\alpha_s) \in \Phi^-.$$

Ne segue che $w(\lambda\beta + \mu s(\beta)) = \lambda w(\beta) + \mu w(s(\beta)) \in \Phi^-$. Ma allora $|N(w)| = \infty$ contro la Proposizione 2.13. □

Definizione 5.11 (Radice umile)**.** Una radice positiva α si dice *umile* se non domina alcuna radice positiva, eccetto sé stessa.

Lemma 5.12. *Siano $\alpha, \beta \in \Phi^+$ e $s \in S$ tali che $\alpha = s(\beta) \triangleleft \beta$.*

1. *Se $\alpha \triangleright \beta$ è una copertura lunga, allora α non è umile.*

2. *Se $\alpha \triangleright \beta$ è una copertura corta, allora α è umile se e solo se lo è β.*

Dimostrazione. Notiamo innanzitutto che $\alpha \neq \alpha_s$, in quanto se $s(\beta) = \alpha = \alpha_s$, allora si avrebbe $\beta = s(\alpha_s) = -\alpha_s \in \Phi^-$.

1. Per la Proposizione 3.8 e poiché la copertura $\alpha \triangleright \beta$ è lunga, $(\beta|\alpha_s) < -1$. Ma $(\alpha|\alpha_s) = -(\beta|\alpha_s) > 1$. Per il Lemma 5.10 $\alpha \succcurlyeq \alpha_s$, dunque α non è umile.

2. Per la Proposizione 2.11 e poiché la copertura $\alpha \triangleright \beta$ è corta, $-1 < (\beta|\alpha_s) < 0$.

   ($\Rightarrow$) Dimostriamo la contronominale. Sia β non umile, facciamo vedere che α non è umile. Sia $\gamma \in \Phi^+ \setminus \{\beta\}$ con $\beta \succcurlyeq \gamma$. Per il lemma 5.10 non vale $\beta \succcurlyeq \alpha_s$, dunque sicuramente $\gamma \neq \alpha_s$. Ma allora dall'Osservazione 5.8 $\alpha = s(\beta) \succcurlyeq s(\gamma)$. Inoltre $s(\gamma) \neq s(\beta) = \alpha$, dunque α non è umile.

   ($\Leftarrow$) Anche qui dimostriamo la contronominale. Sia α non umile, facciamo vedere che β non è umile. Sia $\gamma \in \Phi^+ \setminus \{\alpha\}$ con $\alpha \succcurlyeq \gamma$. Poiché $(\alpha|\alpha_s) = (s(\beta)|\alpha_s) = -(\beta|\alpha_s) \in (0, 1)$, per il Lemma 5.10 non vale $\alpha \succcurlyeq \alpha_s$; quindi, sicuramente si ha $\gamma \neq \alpha_s$. Ma allora $\beta = s(\alpha) \succcurlyeq s(\gamma)$ e $s(\gamma) \neq s(\alpha) = \beta$, allora β non è umile.

□

Teorema 5.13. *Sia $\alpha \in \Phi^+$. $\alpha \in \Sigma$ se e solo se α è umile.*

Dimostrazione. Sia $\alpha \in \Sigma$, esiste quindi una catena di coperture corte $\alpha \triangleright \cdots \triangleright \alpha_1$ con α_1 radice semplice. Per il Lemma 5.12 α_2 è umile. Iterando il ragionamento un numero sufficiente di volte, otteniamo che α è umile.

Viceversa sia α umile e $\alpha \triangleright \cdots \triangleright \alpha_1$ catena satura a partire da una radice semplice. Poiché α è umile, per il Lemma 5.12 la copertura $\alpha = \alpha_p \triangleright \alpha_{p-1}$ è corta. Sempre per il Lemma 5.12 α_{p-1} è umile. Iterando il ragionamento, otteniamo che tutte le coperture nella catena $\alpha \triangleright \cdots \triangleright \alpha_1$ sono corte; cioè $\alpha \in \Sigma$. □

Corollario 5.14. *Siano $\alpha \in \Sigma$ e $\beta \in \Phi^+$. Se $\alpha \triangleright \beta$, allora $\beta \in \Sigma$.*

Dimostrazione. Poiché $\alpha \in \Sigma$, per il Teorema 5.13 α è umile; dunque, poiché $\alpha \triangleright \beta$ e α è umile, per il Lemma 5.12 la copertura $\alpha \triangleright \beta$ è corta. Sempre per il Lemma 5.12, β è umile. Per il Teorema 5.13 $\beta \in \Sigma$. □

Capitolo 6

Automi e regolarità

In quanto segue, sia A un insieme e A^* il monoide libero generato da A.

Definizione 6.1 (Linguaggio formale, Parola)**.** Un *linguaggio formale* $\mathcal{L}$ è un sottoinsieme di A^*. Chiamiamo *parola* ogni $w \in A^*$.

Definizione 6.2 (Automa a stati finiti)**.** Dato un insieme A, un *automa a stati finiti* (o *automa*) $\mathcal{A}$ è il dato di un grafo orientato con finiti archi e finiti vertici (detti *stat*) i cui archi sono etichettati con elementi di A; di uno stato particolare, detto *di inizio* e di alcuni stati detti *finali*.

Definizione 6.3 (Parola accettata)**.** Diciamo che una parola $w \in \mathcal{A}^*$ è *accettata* dall'automa $\mathcal{A}$ se esiste un cammino in $\mathcal{A}$ a partire dal nodo di inizio e che termina in un nodo finale per cui la sequenza delle etichette incontrate durante tale cammino sia uguale a w. In caso contrario diciamo che w è *rifiutata* dall'automa $\mathcal{A}$.

Definizione 6.4 (Linguaggio riconosciuto, Linguaggio regolare)**.** Un linguaggio $\mathcal{L}$ si dice *riconosciuto* da un automa $\mathcal{A}$ se le parole accettate da $\mathcal{A}$ sono tutte e sole quelle di $\mathcal{L}$. Un linguaggio $\mathcal{L}$ si dice *regolare* se esiste un automa che lo riconosce.

Lemma 6.5. *Siano $\alpha \in \Sigma$, $s \in S$ e $w \in W$ con $s(\alpha) \in \Phi^+ \setminus \Sigma$ e $s \notin D_R(w)$. Allora $ws(\alpha) \in \Phi^+$.*

Dimostrazione. Siano α, s, w come nelle ipotesi dell'enunciato. per il Teorema 2.8, $w(\alpha_s) \in \Phi^+$, da cui segue $ws(\alpha_s) = -w(\alpha_s) \in \Phi^-$. Poiché $\alpha \in \Sigma$ e $s(\alpha) \in \Phi^+ \setminus \Sigma$, $s(\alpha) \triangleright \alpha$ per il Corollario 5.14; ma allora $(\alpha|\alpha_s) < -1$.

Per la Proposizione 4.8, $\{(t_\alpha s)^n(\alpha)\}_{n\in\mathbb{N}}$ è un insieme infinito di combinazioni lineari non negative di α e α_s. Supponiamo per assurdo che $ws(\alpha) \in \Phi^-$; ne segue che $ws(t_\alpha s)^n(\alpha) \in \Phi^-$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Da ciò segue che $|N(ws)| = \infty$, contraddicendo la Proposizione 2.13; perciò $ws(\alpha) \in \Phi^+$. □

Definizione 6.6. Definiamo l'*insieme delle discese piccole* di $w \in W$ come

$$D_\Sigma(w) = \left\{\alpha \in \Sigma \colon w(\alpha) \in \Phi^-\right\}$$

Proposizione 6.7. *Sia $w \in W$ e $s \notin D_R(w)$. Allora*

$$D_\Sigma(ws) = \{\alpha_s\} \cup \left(\left\{s(\beta) \colon \beta \in D_\Sigma(w)\right\} \cap \Sigma\right)$$

Dimostrazione. Procediamo per doppia inclusione.

Dimostriamo che $\alpha_s \in D_\Sigma(w)$. Dal Teorema 2.8, poiché $s \notin D_R(w)$, segue $w(\alpha_s) \in \Phi^+$. Ma allora $ws(\alpha_s) = -w(\alpha_s) \in \Phi^-$, cioè $\alpha_s \in D(ws)$.

Ora mostriamo che $D \coloneqq \{s(\beta) \colon \beta \in D_\Sigma(w)\} \cap \Sigma \subseteq D_\Sigma(ws)$. Sia $\beta \in D$, $\beta = s\gamma$ per qualche $\gamma \in D_\Sigma(w)$. Si ha quindi $ws\beta = wss\gamma = w\gamma \in \Phi^-$ per definizione di $D_\Sigma(w)$. Ciò conclude la dimostrazione di un'inclusione.

Sia $\alpha \in D_\Sigma(ws)$. Per il Lemma 6.5, $s(\alpha) \notin \Phi^+ \setminus \Sigma$, quindi $s(\alpha) \notin \Phi^+$ oppure $s(\alpha) \in \Sigma$. Nel primo caso $\alpha = \alpha_s$. Nel secondo, poiché $w(s(\alpha)) = (ws)(\alpha) \in \Phi^-$, $s(\alpha) \in D_\Sigma(w)$, cioè $\alpha \in sD_\Sigma(w)$. □

Definizione 6.8. Definiamo l'automa $\mathcal{A}$ che ha come insieme dei nodi

$$\mathcal{S} = \left\{D_\Sigma(w) \colon w \in W\right\}$$

e come nodo iniziale ha $D_\Sigma(e) = \emptyset$. Tutti i nodi sono anche finali. Definiamo ora l'insieme degli archi. Per ogni $D \in \mathcal{S}$ e ogni $s \in S$ tale che $\alpha_s \notin D$, poniamo un arco diretto etichettato

$$D \xrightarrow{s} \{\alpha_s\} \cup (sD \cap \Sigma).$$

Non aggiungiamo altri archi.

Osservazione 6.9. Tale automa è ben posto in quanto $D = D_\Sigma(w)$ per qualche $w \in W$ e dunque

$$\{\alpha_s\} \cup (sD \cap \Sigma) = D_\Sigma(ws) \in \mathcal{S}$$

per la Proposizione 6.7.

Teorema 6.10. *Il linguaggio delle espressioni ridotte di un gruppo di Coxeter è regolare. In particolare è riconosciuto dall'automa a stati finiti $\mathcal{A}$. Inoltre, ogniqualvolta un'espressione ridotta per $w \in W$ viene letta nell'automa, la sua lettura termina nel nodo $D_\Sigma(w)$.*

Dimostrazione. $\mathcal{A}$ è a stati finiti in quanto $|\Sigma| < \infty$ per il Teorema 5.6 e $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(\Sigma)$, ovvero è contenuto nell'insieme delle parti di un insieme finito.

Tutte le parole di lunghezza 1 sono ridotte; mostriamo che sono riconosciute dall'automa e che la lettura di $s \in S$ termina in $D_\Sigma(s)$. Poiché $\alpha_s \notin \emptyset = D_\Sigma(e)$,

esiste un arco etichettato con s che parte dall'insieme vuoto per ogni $s \in S$. Dopo aver percorso tale arco, ci troviamo per costruzione nello stato $D_\Sigma(es) = D_\Sigma(s)$.

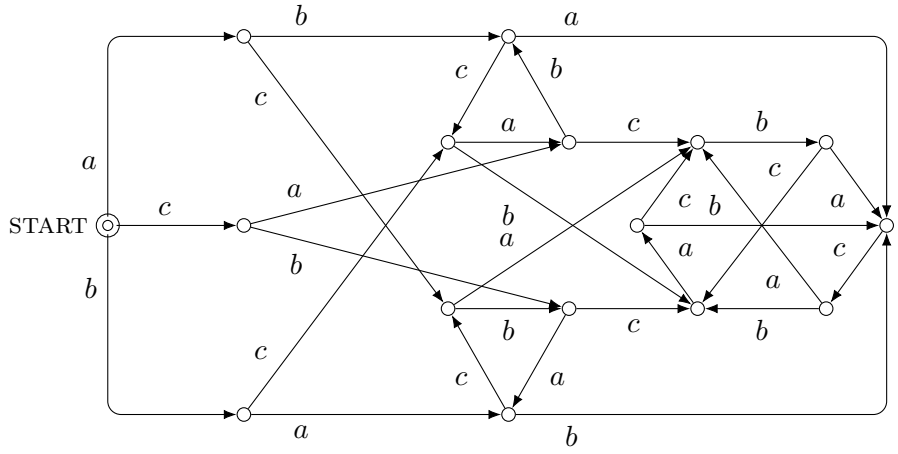
Supponiamo ora che tutte e solo le espressioni con k lettere accettate dall'automa $\mathcal{A}$ siano tutte e sole le espressioni ridotte di lunghezza k in W. Mostriamo che tutte e sole le espressioni di $k+1$ lettere accettate dall'automa sono tutte e sole le espressioni ridotte di lunghezza $k+1$ in W e che la loro lettura termina nello stato corrispondente indicato nell'enunciato del teorema.

Sia $s_1 \dots s_{k+1}$ un'espressione di $k+1$ lettere accettata dall'automa, allora $s_1 \dots s_k$ è una parola di k lettere accettata dall'automa, dunque, per ipotesi induttiva, è un'espressione ridotta e la sua lettura termina in $D_\Sigma(s_1 \dots s_k)$. Se $s_1 \dots s_{k+1}$ è una espressione ridotta, allora $s_{k+1} \notin D_R(s_1 \dots s_k)$, quindi $\alpha_s \notin D_\Sigma(s_1 \dots s_k)$. Per costruzione esisterà quindi un arco etichettato con s che parte da $D_\Sigma(s_1 \dots s_k)$ e termina in $D_\Sigma(s_1 \dots s_{k+1})$ che ci permetterà di leggere $s_1 \dots s_{k+1}$.

Se $s_1 \dots s_{k+1}$ non è un'espressione ridotta, allora $s_{k+1} \in D_R(w)$, quindi $\alpha_s \in D_\Sigma(s_1 \dots s_k)$. Non esisterà quindi un arco etichettato con s che ci permetterà di passare da $s_1 \dots s_k$ a $s_1 \dots s_{k+1}$ ovvero $s_1 \dots s_{k+1}$ non è un'espressione accettata da $\mathcal{A}$.

In conclusione, $s_1 \dots s_{k+1}$ è accettata da $\mathcal{A}$ se e solo se è un'espressione ridotta e in tal caso la sua lettura termina in $D_\Sigma(s_1 \dots s_{k+1})$. □

Esempio 6.11 (Automa di $\tilde{A}_2$). Facciamo vedere adesso un esempio di automa a stati finiti costruito a partire dal teorema precedente: quello del gruppo di Coxeter di tipo $\tilde{A}_2$.



Dalla figura si deduce che non ci sono generatori che commutano tra di loro, in quanto non ci sono cammini di lunghezza due che partono dal nodo di inizio e terminano nello stesso nodo; altresì si riesce a dedurre che i prodotti di 3 generatori distinti in un qualsiasi ordine danno luogo a una parola che, se ripetuta continua a produrre nuove parole ridotte Infatti, dopo aver letto sull'automa la parola *abc*

ci ritroviamo in un triangolo che permette di ripetere questa parola un numero arbitrario di volte.

Bibliografia

[1] Björner, Anders & Brenti, Francesco. *Combinatorics of Coxeter Groups*. SpringerLink. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2005.

[2] Bourbaki, Nicolas. *Éléments de Mathématiques, Groupes et Algèbres de Lie: Chapitres 4,5, et 6*. Numero 1337 in Actualités scientifiques et industrielles. Hermann, Paris, 1968.

[3] Brink, B., Howlett, R.B. A finiteness property an an automatic structure for Coxeter groups. *Math. Ann. 296*, 179–190 (1993).

[4] H. S. M. Coxeter. Discrete Groups Generated by Reflections. *The Annals of Mathematics*, 35(3):588, 1934.

[5] H. S. M. Coxeter. The Complete Enumeration of Finite Groups of the Form $R_i^2 = (R_i R_j)^{k_{ij}} = 1$. *Journal of the London Mathematical Society*, s1-10(1):21–25, 1935.

[6] Eriksson, Henrik *Computational and Combinatorial Aspects of Coxeter Groups* 1994

[7] James E. Humphreys. *Reflection Groups and Coxeter Groups*. Cambridge University Press, 1990.

[8] Mühlherr, Bernhard & Weiss, Richard. Coxeter's enumeration of Coxeter groups. *Journal of the London Mathematical Society*, 113(1), Gennaio 2026.

[9] Witt, Ernst. Spiegelungsgruppen und Aufzählung halbeinfacher Liescher Ringe A*bhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg* 1941