ALMA MATER STUDIORUM
UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

**DIPARTIMENTO DI MATEMATICA**

**CORSO DI LAUREA MAGISTRALE IN MATEMATICA (LM-40)**

# CURVE E SUPERFICI TRA MATEMATICA E ARTE: CONICHE, SPIRALI E FORME TRIDIMENSIONALI

**Tesi di laurea magistrale in STORIA DELLA MATEMATICA**

**Relatore**

**Prof. Alessandro GAMBINI**

**Laureando**

**Antonello LONGO**

**Anno Accademico 2025/2026**

*A zio Natale, per sempre*

# Indice

**Introduzione** **3**

**1 L'eleganza delle coniche** **9**

1.1 Le coniche nella matematica . . . . . 9

1.1.1 La circonferenza . . . . . 28

1.2 Le coniche nell'arte . . . . . 34

1.3 Dal piano allo spazio: le quadriche . . . . . 58

1.3.1 Le quadriche nell'arte . . . . . 62

**2 La dinamica delle spirali** **83**

2.1 Le spirali nella matematica . . . . . 84

2.1.1 La spirale logaritmica . . . . . 90

2.1.2 Altre curve spiraliformi . . . . . 94

2.2 Le spirali nell'arte . . . . . 97

2.3 Spirali tridimensionali: le eliche . . . . . 113

2.3.1 Le eliche nell'arte . . . . . 117

**Conclusione** **139**

**Bibliografia** **143**

**Elenco delle figure** **147**

# Introduzione

*Che cos'è la matematica?*

Una domanda così semplice, eppure così complicata. Nel corso dei millenni, più e più volte ci si è posti questa domanda e altrettante volte si è provato a rispondere; nonostante ciò non è ancora possibile dare una definizione univoca.
Come osserva Boyer (1980), «*le vecchie definizioni [...] come quella di "scienza del numero e della grandezza" non sono più valide; tuttavia esse indicano le origini delle varia branche della matematica [...]. Un tempo si pensava che la matematica avesse direttamente a che fare con il mondo della nostra esperienza sensibile; fu solo nel XIX secolo che la matematica pura si liberò dalle limitazioni imposte dall'osservazione della natura*».
La risposta a tale domanda è l'obiettivo conclamato di *What is Mathematics?*, un trattato di Richard Courant (1888-1972) e Herbert Robbins (1915-2001) che provarono a raggruppare in un'unica opera tutta la matematica di base nota nel secolo scorso, una sorta di nuovi *"Elementi di Euclide"* datati 1941.
Così definivano la matematica nella loro introduzione (Courant & Robbins, 1941):

---

*La matematica, in quanto espressione della mente umana, riflette la volontà attiva, la ragione contemplativa e il desiderio di perfezione estetica. I suoi elementi fondamentali sono la logica e l'intuizione, l'analisi e la costruzione, la generalità e l'individualità [...]. É solo l'interazione di queste forze antitetiche e la lotta per la loro sintesi a costituire la vita, l'utilità e il valore supremo della scienza matematica [...]. Una volta avviata sotto la pressione di applicazioni necessarie,*

*inevitabilmente essa acquista slancio e trascende i limiti dell'utilità immediata.*

---

Andando un po' più a fondo, di sicuro la matematica è **metodo**, «*ogni branca [...] della matematica si occupa di una classe di concetti [...]; definizioni precise dei concetti appartenenti a un sistema sono le [...] fondamenta su cui viene costruita la delicata struttura superiore*» (Kline, 1976). Non tutto, però, può essere definito; è qui che entrano in gioco gli assiomi che «*sono l'unica base per qualsiasi conclusione che possa esser tratta sui concetti in discussione. Ma come sappiamo quali assiomi accettare? [...] É di solito l'esperienza a darci la risposta*» (Kline, 1976).

Poi, la matematica è **coerenza**, che significa «*non solo che gli assiomi non devono contraddirsi tra loro ma anche che non devono dare origine a teoremi che si contraddicano tra loro [...]. Gran parte del lavoro recente [...] si è proposto l'obiettivo di stabilire la coerenza di varie branche matematiche*» (Kline, 1976). Ad oggi, il problema della coerenza non può essere risolto in modo assoluto. Kurt Gödel (1906-1978) ha mostrato che nessun sistema formale sufficientemente potente da includere l'aritmetica può dimostrare la propria coerenza dall'interno, mentre la teoria degli insiemi ha fornito un quadro più ampio in cui è possibile studiare la coerenza in forma relativa: possiamo dimostrare che una teoria è coerente a condizione che lo sia una teoria più forte. Di conseguenza, oggi non si mira più a una dimostrazione definitiva della coerenza dell'intera matematica, ma a comprendere le relazioni tra le diverse teorie e a garantire che le pratiche matematiche si svolgano all'interno di teorie considerate affidabili.

La matematica è **immaginazione**; il matematico «*indovina di avere una conclusione che seguirà dagli assiomi. L'esperienza e la conoscenza possono guidare i suoi pensieri avviandoli nei canali appropriati [...]. Nella ricerca di un metodo di dimostrazione, come nella ricerca di che cosa dimostrare, il matematico deve usare immaginazione, intuizione e abilità creativa*» (Kline, 1976).

La matematica (pura) è **astrazione**. Come diceva Bertrand Russell (1872-1970), «*la matematica pura "è l'argomento in cui non conosciamo né ciò di cui stiamo parlando né se ciò di cui stiamo parlando sia vero". I matematici [...] non fanno*

*alcuno sforzo per accertare se i loro teoremi sono asserzioni vere del mondo fisico. Di tali teoremi possiamo chiederci soltanto se siano stati ottenuti applicando un ragionamento corretto*» (Kline, 1976).
Infine, la matematica è **arte**. Qualcuno potrebbe storcere il naso leggendo questa affermazione, ritenendo, per esempio, che la matematica non abbia un significato emotivo; eppure non si tiene conto dei sentimenti di avversione che numerosi studenti provano durante i loro studi o la gioia provata dai matematici quando riescono a costruire nuove teorie e dimostrazioni. Certamente, «*la matematica si appella [...] alle emozioni meno della musica, della pittura e della poesia [...]. La funzione primaria dell'arte è quella di dare origine a emozioni e di eccitare sentimenti. Secondo questo concetto d'arte, però, una fotografia drammatica che afferri il nostro cuore sarebbe considerata più artistica di numerosi grandi dipinti [...]. L'arte pura dei tempi moderni pone l'accento sull'aspetto teorico e formale della pittura, sull'uso della linea e della forma [...]. Tali opere si rivolgono molto di più all'intelletto che alle emozioni*» (Kline, 1976).

Ora, però, sorge una nuova domanda:

*Che cos'è l'arte?*

Anche qui la risposta è tutt'altro che semplice. L'arte, infatti, può essere espressione, rappresentazione, esposizione, costruzione di forme, organizzazione dello spazio, ricerca, estetica. È una disciplina che attraversa epoche, popoli, culture e tecniche, che interroga il mondo, lo rende visibile e, a volte, lo trasforma.
La difficoltà nel definire l'arte si riscontra, per esempio, nella definizione data dall'*Enciclopedia Treccani* (2026) che evidenzia come il termine abbia subito trasformazioni profonde nel corso della storia, passando da un significato tecnico e operativo a una dimensione più espressiva e intellettuale:

---

*Il concetto di arte come* tèchne, *complesso di regole ed esperienze elaborate dall'uomo per produrre oggetti o rappresentare immagini tratte dalla realtà o dalla fantasia, si evolve solo attraverso un passaggio critico nel concetto di arte come*

*espressione originale di un artista, per giungere alla definizione di un oggetto come opera d'arte [...]. Nel mondo occidentale, già nel Medioevo, le diverse arti [...] implicavano principi teorici, ma soltanto dal 15° secolo il significato di arte si lega al concetto di creazione artistica come attività dell'intelletto.*

---

Come evidenzia Kline (1976), un'opera d'arte «*deve fornire uno sfogo all'istinto creativo dell'uomo*». Per quanto detto precedentemente, i matematici creano, quindi fanno arte; e come nell'arte, «*ogni particolare dell'opera finale non è scoperto, ma composto. Il processo creativo deve [...] produrre un'opera che possegga disegno, armonia e bellezza. Queste qualità sono presenti anche nella creazione matematica. Il disegno implica la presenza di modelli strutturali, di ordine, simmetria ed equilibrio. Molti teoremi matematici rivelano appunto questo disegno*» (Kline, 1976). La costruzione delle teorie matematiche non è quasi mai accidentale, ma ragionata; solo attraverso una costruzione razionale e consapevole, per esempio, Euclide riuscì a derivare dai cinque assiomi, con alcune definizioni e nozioni comuni, tutta la teoria geometrica che porta il suo nome.
In ogni opera d'arte, «*la relazione delle parti l'una all'altra [...] dev'essere armonica*» (Kline, 1976). La ricerca di un'armonia e di un'estetica risulta importante anche per molte ricerche matematiche; per esempio, nell'antica Grecia gli studiosi si dedicarono alla geometria perché le sue forme e la sua struttura logica erano ritenute belle ai loro occhi; secoli dopo, Copernico sostenne la nuova teoria dei moti planetari perché la coerenza matematica della sua teoria gli diede piacere estetico; ispirato da Copernico, anche Keplero spese la maggior parte della sua vita nella ricerca di leggi matematiche sia corrette che esteticamente soddisfacenti. Oggi, molte volte la ricerca di nuove dimostrazioni per teoremi già esistenti è intrapresa semplicemente perché le dimostrazioni esistenti risultano poco eleganti; come ricorda Kline (1976), «*una dimostrazione eseguita con eleganza è un poema in tutto tranne che nella forma in cui è scritta*».

Non pochi matematici si commuoverebbero leggendo la definizione che Kline

(1976) dà della matematica:

---

*Essa è il distillato più puro che il pensiero esatto abbia estratto dagli sforzi dell'uomo per comprendere la natura, per impartire ordine alla confusione di eventi che si verificano nel mondo fisico, per creare bellezza*[1] *e per soddisfare la naturale inclinazione del cervello sano a esercitarsi.*

---

### Curve e Superfici tra Matematica e Arte

In questa tesi verrà analizzato il legame profondo tra queste due discipline; in particolare, andando ad analizzare due classi di curve geometriche, coniche e spirali, con rispettive "estensioni" tridimensionali (quadriche, eliche ed elicoidi), si proverà a comprendere come la matematica abbia influenzato la storia dell'arte e a distinguere tra ciò che è matematicamente fondato e ciò che è frutto di interpretazioni artistiche. É possibile individuare due obiettivi principali:

1. Innanzitutto, si vuole ricostruire l'influenza che la matematica ha suscitato nello sviluppo delle forme artistiche: si studierà quando e come le curve e le superfici geometriche siano state adottate, trasformate o reinventate dai matematici e dagli artisti;

2. Inoltre, si proverà a valutare criticamente il rigore matematico delle opere che dichiarano di ispirarsi alla geometria. In molti casi, infatti, la matematica è presente in modo esplicito; in altri, invece, è evocata con un significato simbolico o come giustificazione estetica.

Seguono ora due capitoli suddivisi ciascuno in tre sezioni: una prima sezione presenta le curve matematiche da un punto di vista storico-matematico; una seconda sezione spiega come e perché quelle curve matematiche siano state utilizzate da pittori, scultori e architetti; una terza sezione amplia il raggio d'azione discutendo di quadriche nel primo capitolo e di eliche ed elicoidi nel secondo capitolo.

[1] Per approfondimenti su Arte, Matematica e Bellezza si vedano Emmer (1991) e Emmer (2006).

# Capitolo 1

# L'eleganza delle coniche

Le prime curve che verranno trattate sono le coniche. Esse occupano un posto molto particolare nella storia della conoscenza: sono, infatti, tra le curve più studiate e riconoscibili della matematica, al punto da essere diventate parte della nostra cultura ben prima che la matematica moderna ne chiarisse la natura profonda. Circonferenze, ellissi, parabole, iperboli sono forme che l'umanità ha incontrato, osservato e utilizzato in epoche diverse, spesso senza sapere che appartenevano a una stessa famiglia generata da un semplice taglio di un cono.
La loro notorietà deriva dalla loro capacità di tenere insieme mondi diversi: vengono, infatti, utilizzate in astronomia e in architettura, in ottica e in ingegneria, in arte e in filosofia; hanno permesso di descrivere il moto dei pianeti, di progettare teatri e cupole, di comprendere la riflessione della luce, di costruire strumenti scientifici e di dare forma a vari oggetti quotidiani.
Sono curve che hanno accompagnato l'evoluzione del pensiero umano, diventando strumenti di comprensione del mondo che ci circonda, ma restando forme con un forte valore estetico, diventando simboli di bellezza e armonia.

## 1.1 Le coniche nella matematica

La tradizione vuole che a scoprire le sezioni coniche sia stato molto probabilmente Menecmo (IV secolo a.C.), che vi si era imbattuto per la risoluzione del gravoso

problema di Delo sulla duplicazione del cubo[1].

Già qualche decennio prima, Ippocrate di Chio (V secolo a.C.) era riuscito a supporre che per poter risolvere tale problema occorresse trovare una curva i cui punti soddisfacessero una particolare proporzione continua. Nel dettaglio, in notazione moderna, occorreva trovare una curva le cui coordinate $x$ e $y$ fossero medi proporzionali tra $a$ (lato del cubo di partenza) e $2a$ in proporzione continua. In formule:

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{2a} \tag{1.1}$$

Menecmo riuscì a trovare delle curve che effettivamente soddisfacevano tale proporzione; infatti, «*c'era una famiglia di curve appropriate ottenibili da un'unica origine, ossia tagliando un cono circolare retto mediante un piano perpendicolare a un elemento*[2] *del cono*» (Boyer, 1980).

Si consideri, per esempio, un cono retto $ABC$ con angolo rettangolo al vertice[3] [Figura 1.1]. Sia $D$ un punto della generatrice $AC$ del cono e si consideri il piano passante per $D$ e perpendicolare ad $AC$. L'intersezione tra il cono e il piano è la curva $EDF$. Sia $J$ un generico punto di tale curva e si mandi il piano parallelo alla base passante per $J$, la cui intersezione è la circonferenza $QJP$ ($Q$ e $P$ sono tali che $Q \in AB$ e $P \in AC$). Sia poi $K$ l'intersezione tra la curva $EDF$ e la circonferenza $QJP$ ed $S$ l'intersezione tra $AB$ e la parallela a $BC$, passante per $D$, nel piano $ABC$. Per proprietà sulle simmetrie della figura, si ha che $KJ$ è perpendicolare a $QP$ in $M$; dunque $MJ$ è medio proporzionale tra $QM$ e $MP$, ovvero

$$\frac{QM}{MJ} = \frac{MJ}{MP} \tag{1.2}$$

per quello che noi oggi chiamiamo Secondo teorema di Euclide. Inoltre, i triangoli $ABC$ e $DMP$ sono simili, perciò $\frac{MP}{BC} = \frac{MD}{AB}$; ma anche i triangoli $ASD$ e $ABC$ sono simili, perciò $\frac{SD}{BC} = \frac{AS}{AB}$. Ultima osservazione da fare: $QM \cong SD$, perché lati

[1] I tre grandi problemi della matematica greca erano la duplicazione del cubo (ovvero costruire, con riga e compasso, un cubo di volume doppio rispetto a uno dato), trisezione dell'angolo (ovvero suddividere, con riga e compasso, un angolo in 3 angoli congruenti tra loro) e quadratura del cerchio (ovvero costruire, con riga e compasso, un quadrato con la stessa area di un cerchio dato).

[2] = generatrice

[3] Ovvero, il triangolo ABC in figura è rettangolo in A

opposti del parallelogramma $QMDS$.
Ora, si riscrive l'equazione 1.2, ponendo $MJ = y$ e $MD = x$ (si sta considerando, in moderna geometria analitica, un sistema di riferimento cartesiano di origine $D$ e assi $DM$ e parallela a $MJ$ passante per $D$):

$$\frac{QM}{y} = \frac{y}{MP} \implies y^2 = SD \cdot MP = \frac{AS \cdot BC}{AB} \cdot \frac{x \cdot BC}{AB} = \frac{AS \cdot BC^2}{AB^2} \cdot x \qquad (1.3)$$

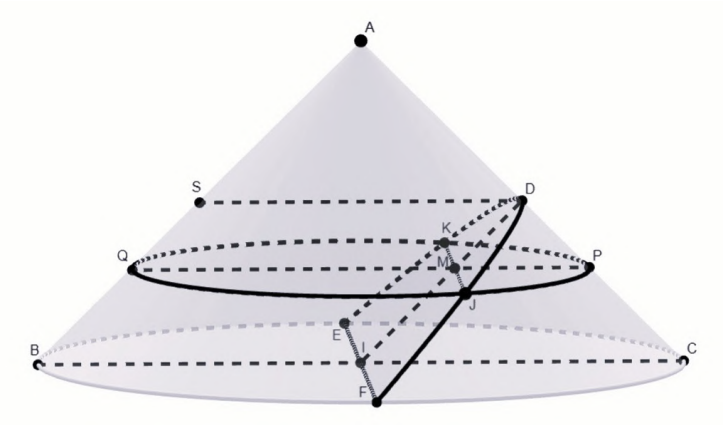



Figura 1.1: Costruzione di Menecmo per la parabola.[4]

Si osserva che le lunghezze che compaiono nella frazione della 1.3 non dipendono dalla scelta di $J$, quindi si può porre tutto uguale a una costante $l$, chiamata *latus rectum*. Così l'equazione della curva "*sezione di un cono ad angolo retto*" diventa: $y^2 = lx$. Noi oggi sappiamo che questa è l'equazione di una parabola. Con costruzioni analoghe si trova l'equazione della "*sezione di un cono ad angolo acuto*[5]" ($y^2 = lx - \frac{b^2x^2}{a^2}$) e della "*sezione di un cono ad angolo ottuso*[6]" ($y^2 = lx + \frac{b^2x^2}{a^2}$), dove $a$ e $b$ sono costanti.
La straordinarietà del ragionamento di Menecmo risiede nel fatto che lui, come tutti gli antichi, non sapeva nulla di geometria analitica, quindi non utilizzava coordinate ed equazioni per risolvere problemi di geometria. Resta un mistero quindi come Menecmo sia arrivato a questi risultati e soprattutto come Menecmo

[4] Tutti i grafici sono stati realizzati con *GeoGebra Classic 5*.
[5] oggi ellisse
[6] oggi iperbole

riusciva a disegnare le tre curve trovate, grafici che risultano necessari per risolvere il problema di Delo: Menecmo, infatti, ipotizzò di trovare due sezioni di cono ad angolo retto con *latus rectum* uno doppio dell'altro ($a$ e $2a$). Utilizzando la geometria analitica, si posizionano le due parabole in un sistema di riferimento cartesiano tali che abbiano lo stesso vertice e assi $y$ e $x$ rispettivamente: le loro equazioni diventano $x^2 = ay$ e $y^2 = 2ax$ rispettivamente. La $x$ del punto d'intersezione tra le due curve (diverso da $O$) è pari a $\sqrt[3]{2}a$, che è esattamente il lato del cubo di volume doppio rispetto a quello di lato $a$.

Tutte le opere di Menecmo sono andate perdute, così come quelle del contemporaneo Aristeo (IV secolo a.C.), «*geometra imperfettamente noto che scrisse cinque libri* Sui luoghi solidi *e forse altrettanti* Su le sezioni del cono *ed al quale si attribuiscono i nomi di sezione del cono acutangolo, sezione del cono rettangolo, sezione del cono ottusangolo per indicare le curve*» (Loria, 1930a).

Di sicuro, le opere di Aristeo sono state fondamentali per Euclide d'Alessandria (III secolo a.C.), padre del metodo logico-deduttivo matematico, che scrisse, tra gli altri, un trattato sulle coniche, oggi ormai perduto; ciò nonostante, «*varie circostanze inducono a credere che il sommo Alessandrino*[7] *considerasse a parte ciascuna delle coniche, caratterizzandole mediante quella proprietà che noi esprimiamo con la notissima equazione cartesiana* $y^2 = 2px + qx^2$*, che inoltre egli ne conoscesse gli asintoti e l'applicazione al problema di Delo e che avesse almeno iniziate le indagini sulla similitudine delle coniche*» (Loria, 1930a).

Come detto, il trattato euclideo sulle coniche è andato perduto, probabilmente perché sostituito ben presto dal più completo e rivoluzionario trattato di Apollonio di Perga (262-180 a.C.). Degli otto libri che costituiscono il trattato, solo sette sono arrivati fino ai nostri tempi: i primi quattro in greco, dal quinto al settimo tramite una traduzione araba.
Il trattato può essere suddiviso in due aree: i primi quattro costituiscono un'in-

[7] Euclide

troduzione elementare alle coniche e gran parte dei risultati ivi contenuti erano probabilmente già apparsi in altri trattati precedenti; i quattro libri successivi sviluppano ulteriormente e in modo più avanzato i concetti precedenti.
Alcuni aspetti chiave delle *Coniche* di Apollonio:

1. Prima di Apollonio, le tre coniche erano viste come sezioni di coni retti con angoli diversi, a seconda che l'angolo al vertice fosse acuto, retto od ottuso. Apollonio, per la prima volta, «*dimostrò che non era necessario prendere sezioni perpendicolari a un elemento del cono, e che da un unico cono era possibile ottenere tutte e tre le varietà di sezioni coniche semplicemente variando l'inclinazione del piano di intersezione*» (Boyer, 1980); egli, inoltre, provò che non era necessario considerare un cono retto, ma che si poteva prendere anche un cono obliquo o scaleno.

2. Avendo uniformato le tre coniche a un unico cono, occorreva modificare il loro nome: è grazie ad Apollonio se noi oggi le chiamiamo ellisse, parabola e iperbole. Questi termini, in realtà, erano già usati nella risoluzione di particolari equazioni di secondo grado, ma fu Apollonio a trasmetterli alle coniche. Il termine *parabola* significava "porre accanto, confrontare" e fu associato alla curva di equazione $y^2 = lx$, cioè essa è il luogo dei punti $(x, y)$ tali che il quadrato sul lato $y$ è equivalente al rettangolo di lati $l$ (*latus rectum*) e $x$. Il termine *ellisse* significava "mancanza" e fu associato alla curva di equazione $y^2 = lx - \frac{b^2x^2}{a^2}$, cioè essa è il luogo dei punti $(x, y)$ tali che l'area del quadrato sul lato $y$ è *minore* di quella del rettangolo di lati $l$ e $x$. Il termine *iperbole* significava "gettare oltre, al di là" e fu associato alla curva di equazione $y^2 = lx + \frac{b^2x^2}{a^2}$, cioè essa è il luogo dei punti $(x, y)$ tali che l'area del quadrato sul lato $y$ è *maggiore* di quella del rettangolo di lati $l$ e $x$.

3. Terza novità fondamentale delle *Coniche* di Apollonio è la sostituzione del cono a una falda, con il moderno cono a doppia falda, che lui definisce nello stesso modo in cui si fa tutt'oggi (Apollonio, 1924 in Boyer, 1980):

---

*Se una retta, prolungatesi all'infinito e passante sempre per un punto fisso,*

*viene fatta ruotare lungo la circonferenza di un cerchio che non si trovi nello stesso piano del punto in modo che passi successivamente attraverso ogni punto di quella circonferenza, la retta che ruoterà traccerà la superficie di un cono doppio.*

---

Questa modifica permise ad Apollonio di individuare entrambi i rami di iperbole (gli antichi consideravano due iperboli associate, piuttosto che due rami della stessa curva). Una volta trovate le tre equazioni delle sezioni coniche, Apollonio derivò tante altre loro proprietà abbandonando definitivamente i riferimenti al cono.

4. Come afferma Cresci (1998), le novità introdotte da Apollonio «*erano profonde e anche coraggiose, in quanto non legate direttamente a nessuna immediata applicazione pratica*». Più volte l'autore ha rimarcato la sua volontà di trattare comunque tali teoremi, che «*sono degni di essere accettati per amore delle dimostrazioni stesse, così come, per questa e nessun'altra ragione, accettiamo molte altre cose nella matematica*» (Apollonio, 1924 in Cresci, 1998). Un modo di pensare, quello di Apollonio, assolutamente moderno.
   Occorre comunque ricordare che, ciò che allora veniva considerata solo una "bella teoria", senza alcuna possibile applicazione pratica, nei secoli successivi ha assunto un'importanza cruciale nello sviluppo di numerose teorie scientifiche. Per esempio, «*senza una conoscenza delle proprietà delle tangenti a una parabola, sarebbe impossibile qualsiasi analisi delle traiettorie locali; e uno studio delle traiettorie dei pianeti sarebbe impensabile senza fare riferimento alle tangenti a un'ellisse [...]. É chiaro che fu la matematica pura di Apollonio che, 1800 anni più tardi, rese possibili i* Principia *di Newton*» (Boyer, 1980).

5. Certamente mancano alcune proprietà che oggi consideriamo essenziali.
   Nei trattati moderni i *fuochi* occupano una posizione centrale, ma Apollonio non disponeva di un termine specifico per indicarli e li menzionava solo in modo indiretto. È plausibile che lui, insieme ai suoi colleghi precedenti,

conoscesse la relazione tra le curve, un fuoco e una direttrice; tuttavia nelle *Coniche* non compare alcun riferimento esplicito a tali elementi. Come ricorda Loria (1930a) fu Pappo di Alessandria (III secolo) a preparare «*lo studio delle coniche come luoghi dei punti le cui distanze da un punto fisso e da una retta fissa serbano un rapporto costante*».
Inoltre, la matematica antica non possedeva un concetto numerico assimilabile alla nostra *eccentricità*. Sembra, inoltre, che fossero in grado di determinare una conica a partire da cinque punti, ma questo tema, che sarà fondamentale nei *Principia* di Newton, non viene affrontato. Alcuni studiosi credono che tali mancanze dipendano dal fatto che Apollonio o altri matematici abbiano discusso questi aspetti in opere andate perdute.

6. Sull'approccio alla geometria di Apollonio, si può dire lo stesso di quanto detto per Menecmo: la sua geometria delle coniche si basava su costruzioni che utilizzavano diametri, tangenti e rette di riferimento, strumenti che oggi possiamo interpretare come forme primitive di sistemi di coordinate. Pur non disponendo dell'algebra simbolica né delle equazioni che caratterizzano la geometria analitica moderna, Apollonio riusciva comunque a descrivere le curve attraverso procedimenti che, riletti oggi, richiamano l'uso di ascisse e ordinate. Questa impostazione riflette un tratto generale della matematica greca: le curve non venivano definite tramite formule, ma solo attraverso processi geometrici o sezioni di superfici. Questo implica che gli antichi greci conoscevano un insieme limitato di curve che non permetteva loro di elaborare dei metodi analitici generali. *Le Coniche*, quindi, da un lato mostra la potenza della geometria greca, dall'altro rivela i limiti dell'approccio antico che non poteva ancora trasformarsi in algebra.

Dopo Apollonio, iniziò per la geometria una fase di lento e inesorabile declino che si protrasse almeno fino alla fine del XVI secolo. Delle *Coniche* di Apollonio, così come delle principali opere di geometria, circolavano poche copie, in quanto ritenute poco utili a fini pratici e di sicuro meno interessanti e più complesse rispetto alle moderne opere di aritmetica e algebra. Di questi diciotto secoli di storia si

ricordano solo gli studi di Pappo, già citati, e gli *Elementi delle Coniche*, opera in latino pubblicata nel 1522 dal matematico tedesco Johannes Werner (1468-1528). Quest'opera segnò la rinascita dell'interesse per le curve geometriche, anche se non menzionava affatto l'ellisse (l'obiettivo di Werner era la duplicazione del cubo); in particolare presentava una nuova costruzione, con riga e compasso, della parabola.

Colui che introdusse il concetto di fuoco nello studio delle coniche fu un altro scienziato tedesco: Johannes Kepler (1571-1630). Già dal 1604 si era interessato alle sezioni coniche durante sue ricerche sull'ottica e sulle proprietà degli specchi parabolici. Kepler, in particolare, considerò le coniche come facenti parte della stessa famiglia, suddivise in cinque categorie diverse: alle tre coniche di Apollonio, aggiunse la circonferenza (così come oggi) e l'ovale (non accettata oggi come conica).
Dotato di una fervida immaginazione, Kepler, nei suoi *Ad Vitellionem paralipomena*, formulò il principio di continuità per le coniche (Boyer, 1980):

---

*Dalla sezione conica formata semplicemente da due rette intersecatisi, nella quale i due fuochi coincidono con il punto d'intersezione, si passa gradualmente attraverso un numero infinito di iperboli via via che un fuoco si allontana sempre di più dall'altro. Quando un fuoco è infinitamente lontano, non si ha più l'iperbole a due rami, ma la parabola. Quando il fuoco, continuando a muoversi, passa al di là dell'infinito e torna ad avvicinarsi dall'altra parte, si passa attraverso un numero infinito di ellissi fino a che, quando i fuochi tornano a coincidere, si raggiunge il cerchio.*

---

Ma il termine fuoco (dal latino *focus* = "focolare") Kepler lo introdusse grazie ai suoi studi astronomici: nell'*Astronomia nova* del 1609 annunciava le tre leggi che prendono il suo nome. In particolare, la prima afferma che l'orbita dei pianeti non è circolare (come si credeva fino a quel tempo), ma ellittica e il Sole si trova in un punto decentrato che determina tutto il moto. Per questo motivo lo chiamò *focus*: il punto dove "brucia" la causa del moto. Queste leggi rivoluzionarie non furono

subito accettate dalla comunità scientifica: «*come era possibile che i pianeti non percorressero la figura perfetta per antonomasia, il cerchio? [...] Kepler fu così spaventato dalla sua scoperta, che sentì il bisogno di scusarsi, e lo stesso Galileo [...] si rifiutò sempre di accettare l'evidenza sempre maggiore delle orbite ellittiche*» (Cresci, 1998).

L'interesse per la geometria, e per le coniche, riesplose grazie a una delle più grandi rivoluzioni del metodo matematico: la nascita della geometria analitica, grazie ai contributi di René Descartes (1596-1650) e Pierre de Fermat (1601-1665).

Nel suo celeberrimo *Discours de la Méthode*, pubblicato anonimo nel 1637, Descartes propose una metodo pedagogico e dimostrativo per studiare tutte le scienze (filosofia compresa): da una parte, si voleva promuovere l'emancipazione degli intellettuali dalla cultura scolastica; dall'altra voleva testare le reazioni ecclesiastiche in vista di una più ampia esposizione del suo sistema filosofico. In coda al *Discours*, Descartes inserì tra appendici, tra cui un piccolo trattato, in tre capitoli, intitolato *La Géométrie*, in cui venne fondata la geometria analitica, ovvero l'applicazione di equazioni per la risoluzione di problemi geometrici. In verità, lo scopo di Descartes era ben diverso da quello dell'attuale geometria analitica: lui, infatti, voleva codificare la geometria con un certo numero di segni e fornire le regole della loro manipolazione; le lettere utilizzate rappresentavano per Descartes dei segmenti geometrici (mai numeri). L'opera del francese si distingueva dai trattati precedenti per la «*sistematicità con cui usava l'algebra simbolica e sviluppava la sua interpretazione geometrica dell'algebra*» (Boyer, 1980). Il metodo universale utilizzato da Descartes è ben espresso dalle sue stesse parole (Descartes, 1954 in Boyer, 1980):

---

*Volendo risolvere qualsiasi problema, si deve innanzi tutto considerarlo come risolto, e si devono dare dei nomi a tutte le linee che sembrano necessarie per la sua costruzione [...]. Poi, senza fare alcuna differenza tra queste linee, note e ignote, bisogna affrontare le difficoltà secondo l'ordine che mostra nella maniera più naturale in che modo tali linee siano in rapporto tra loro, fino a che non si sia trovato un modo di esprimere una medesima quantità in due maniere diverse: ciò*

*si chiama un'equazione.*

---

L'opera di Descartes risulta lontana da un qualsiasi trattato di geometria analitica moderna; non si parlava esplicitamente di coordinate dei punti, formule di distanza, assi ortogonali, coordinate negative... ma si definivano coordinate ad'hoc per il problema geometrico preso in considerazione. Inoltre, non erano presenti nuove curve tracciate direttamente a partire dalla loro equazione e il principio fondamentale della geometria analitica, ovvero il fatto che le equazioni indeterminate in due incognite corrispondono a luoghi geometrici, veniva appena accennato nel II libro. Solo in un'occasione Descartes studiò in dettaglio un luogo geometrico, in relazione al problema di Pappo, per il quale derivò l'equazione

$$y^2 = ay - bxy + ex - dx^2 \tag{1.4}$$

Questa altro non è che l'equazione generale di una conica passante per l'origine $O$ di un sistema di riferimento: anche se i coefficienti erano considerati positivi, questa equazione offriva la visione più unitaria che fosse mai stata fatta sulle coniche. Descartes andò anche a classificare le coniche in base al valore dei coefficienti. Inoltre, egli era a conoscenza che con un'opportuna scelta dell'origine e degli assi si poteva ottenere una forma più semplice di questa equazione, ma non formulò nessuna delle forme canoniche che noi oggi conosciamo.
L'omissione di dettagli elementari, ma fondamentali, rese estremamente difficile per i contemporanei la comprensione dell'opera. Questo non permise alla *Géométrie* di diffondersi nei decenni successivi e le furono sempre preferite opere più semplici di altri autori.

Diverso fu l'approccio di Fermat alla geometria analitica: il suo obiettivo era quella di ricostruire le coniche di Apollonio a partire da alcuni input contenuti nella *Collezione matematica* di Pappo. Fu così che nel 1636 scoprì il principio fondamentale della geometria analitica (Tannery & Henry, 1894):

---

*Ogniqualvolta in un'equazione finale compaiono due quantità incognite si ha un luogo, l'estremità dell'una descrivendo una linea retta o curva.*

---

Fermat, a differenza di Descartes, concentrò la sua attenzione sulle soluzioni di equazioni indeterminate, piuttosto che sulla costruzione geometrica delle soluzioni di equazioni algebriche determinate. Fermat, quindi, partì da un'equazione lineare e la inserì in un arbitrario sistema di coordinate. Successivamente, mostrò che l'equazione $xy = k^2$ rappresentava una particolare iperbole e che un'equazione del tipo $xy + a^2 = bx + cy$ si poteva ricondurre alla prima (tramite una traslazione degli assi del sistema di riferimento). A seguire, classificò anche le altre coniche:

- $a^2 \pm x^2 = by$ (parabola)
- $x^2 + y^2 + 2ax + 2by = c^2$ (circonferenza)
- $a^2 - x^2 = ky^2$ (ellisse)
- $a^2 + x^2 = ky^2$ (iperbole)

Per equazioni più complicate, Fermat andava a ruotare gli assi di riferimento così da ricondursi a una delle equazioni precedenti; non così diverso da ciò che si fa oggi.

Nel XVII secolo le *Coniche* di Apollonio attirarono l'interesse anche di altri studiosi, come Girard Desargues (1591-1661) e il suo miglior allievo Blaise Pascal (1623-1662).

Ingegnere di successo, Desargues si interessò di prospettiva per le sue applicazioni all'architettura. Fece inoltre parte del circolo di Mersenne, diventando amico di Descartes. La sua opera più nota, per quanto sfortunata, fu il *Brouillon projet d'une atteinte aux événemens des rencontres d'un cône avec un plan*[8], trattato pubblicato nel 1639 in una cinquantina di copie distribuite a suoi conoscenti e perciò andata quasi perduta dopo poco tempo. Solo nel 1845 ne fu ritrovata una copia e vennero alla luce le sue grandi intuizioni che avevano anticipato di due secoli gli studi di geometria proiettiva. Nonostante il titolo articolato e poco accattivante, l'idea dello studio era abbastanza semplice e derivava dagli studi rinascimentali

[8] *Prima stesura del tentativo di studiare gli effetti dell'incontro di un cono con un piano* (Boyer, 1980)

sulla prospettiva e dal principio di continuità di Keplero: «*tutti sanno che un cerchio, se guardato di sbieco, presenta l'aspetto di un'ellisse [...]. Forme e dimensioni mutano a seconda del piano di incidenza che taglia il cono dei raggi visivi o dei raggi luminosi; ma alcune proprietà restano immutate attraverso questi cambiamenti*» (Boyer, 1980). Sono proprio queste proprietà che Desargues studiò. Per esempio, fu mostrato che una conica resta una conica per qualunque proiezione venga effettuata su di essa; questa proprietà in qualche modo ricalcava il principio di continuità di Keplero sulle coniche. Per arrivare a questi risultati Desargues dovette supporre che la parabola avesse un fuoco "*all'infinito*", come aveva fatto Keplero, e che rette parallele si intersecano in un "*punto all'infinito*": gli studi di prospettiva aiutavano molto la comprensione di queste ipotesi.
Il principale problema dell'opera di Desargues, oltre alla tiratura limitata, fu il linguaggio utilizzato, poco convenzionale. Per esempio, chiamava le sezioni coniche "*colpo di matterello*" e utilizzava diversi termini che provenivano dalla botanica, ben lontani dagli usuali termini dei matematici.

Stessa sorte toccò a numerose opere del suo allievo più dotato, l'*enfant prodige* Pascal. Già all'età di dodici anni, egli fu incoraggiato dal padre ad intraprendere studi matematici e partecipò ad alcuni incontri del circolo di Mersenne dove conobbe Desargues, che divenne suo maestro. Nel 1640, ad appena sedici anni, pubblicò un *Essay pour les coniques*, un'unica pagina stampata che conteneva, tra gli altri, il *mysterium hexagrammaticum*, oggi noto come teorema di Pascal [Figura 1.2]:

---

*Siano A, B, C, D, E, F vertici consecutivi di un esagono inscritto in una conica; sia P il punto d'intersezione tra le rette AB e DE, Q il punto d'intersezione tra le rette BC e EF. Allora le rette PQ, CD, FA sono rette che appartengono allo stesso fascio*[9].

---

A partire da questo teorema Pascal era arrivato a costruire anche la tangente a una conica in un suo punto.
Questo breve trattato faceva da apripista ad un ulteriore e più completo trattato

[9] proprio o improprio

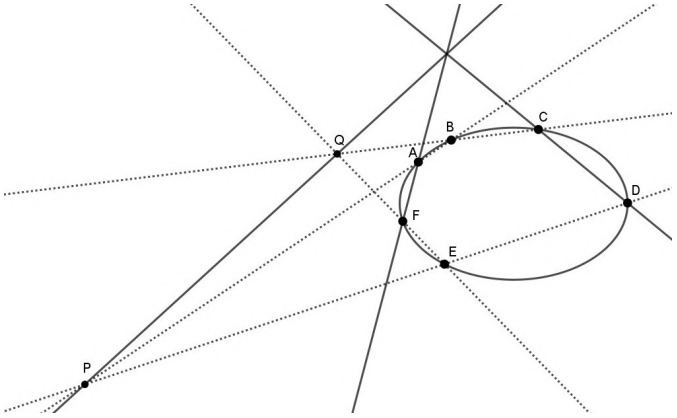



Figura 1.2: Teorema di Pascal applicato a un esagono inscritto in un'ellisse.

sulle coniche intitolato *Conicorum opus completum*, che, però, non fu mai pubblicato ed è ormai perduto.

Studi importanti della seconda metà del 1600 sulle coniche sono quelli compiuti dall'olandese Jan De Witt (1625-1672), dall'inglese John Wallis (1617-1703) e dal francese Philippe de La Hire (1640-1718).

De Witt, autore degli *Elementa Curvarum* (1659), non abbandonò l'approccio sintetico alla geometria, ma la riformulò con un linguaggio che anticipava la geometria analitica. Il suo approccio alle coniche è profondamente radicato nella tradizione classica, ma introdusse definizioni che Apollonio non possedeva: luogo di punti, fuochi, somma delle distanze, direttrice. De Witt, in particolare fu tra i primi a formulare chiaramente la definizione moderna dell'ellisse come luogo dei punti per cui la somma delle distanze da due punti fissati (i fuochi) è costante. Lavorando con rapporti di particolari segmenti, emerse anche una prima idea dell'eccentricità. De Witt, per altro, non usò le coordinate cartesiane, ma il suo modo di pensare era moderno: la curva veniva, infatti, definita da una condizione, non più da una costruzione.

Nel *De Sectionibus Conicis* (1655), Wallis andò a unificare tutte le coniche attraverso l'algebra. Mentre Cartesio aveva introdotto le coordinate, Wallis fu il primo dopo Fermat a costruire un trattato sistematico che mostrava come ellisse,

parabola e iperbole fossero casi particolari di un'unica equazione quadratica. Si potrebbe dire che la sua opera fu il primo manuale moderno di geometria analitica. Wallis mostrò anche che la classificazione delle coniche dipendeva dai coefficienti. In particolare, le tre forme convenzionali erano:

- $e^2 = ld - \frac{ld^2}{t}$ per l'ellisse
- $p^2 = ld$ per la parabola
- $h^2 = ld + \frac{ld^2}{t}$ per l'iperbole

dove $e$, $p$ e $h$ solo le ordinate dei punti delle tre coniche, $d$ è l'ascissa, $l$ è il *latus rectum* e $t$ è la misura dell'*asse* (o *diametro*).
Wallis, inoltre, mostrò che, attraverso rotazioni e traslazioni, ogni conica poteva essere ricondotta a una forma più semplice.

La Hire, discepolo di Desargues e autore delle *Sectiones Conicae* (1685), fu colui che più di tutti cercò di sistemare la teoria geometrica delle coniche nel XVII secolo. Se De Witt aveva introdotto la definizione moderna dell'ellisse e Wallis aveva introdotto l'equazione generale, La Hire estese la definizione come luogo dei punti alla parabola. La definì come luogo dei punti equidistanti da un punto (fuoco) e da una retta (direttrice). La sua trattazione è completamente sintetica: non usa coordinate o algebra. Tuttavia, la sua geometria non è più la geometria delle sezioni del cono, ma la geometria dei luoghi di punti. La Hire fu il primo a costruire un sistema coerente di proprietà delle coniche basato su fuochi, direttrici, tangenti e normali. In questo senso, è il vero erede di Apollonio, ma con strumenti concettuali che Apollonio non possedeva. La Hire fu anche profondamente influenzato dalla geometria proiettiva nascente: le sue costruzioni mostravano, infatti, una consapevolezza delle trasformazioni che preservano le coniche e delle relazioni tra fasci di rette e punti polari.

Se nel 1600 si ebbe una riscoperta della geometria delle coniche, è nei secoli XVIII e XIX che la teoria delle coniche divenne pienamente matura: le definizioni si consolidarono, le proprietà vennero sistematizzate in quadri teorici coerenti e le

geometrie analitica e proiettiva fornirono finalmente una trattazione completa e unificata di queste curve.

Nei *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* (1687), Isaac Newton (1642-1712) mostrò grande interesse per le sezioni coniche, chiamandole genericamente *traiettorie*. In particolare, era interessato a determinare una conica a partire da diverse condizioni date. Innanzitutto, propose alcune costruzioni quando era noto un fuoco. Poi, quando non era noto alcun fuoco, iniziò con alcuni lemmi, di cui il più interessante è il Lemma XXI (Coolidge, 1968):

---

*Se due rette mobili e indefinite $BM$, $CM$ passanti per $B$, $C$, dal loro punto di incontro $M$ descrivono una retta $MN$ data dalla posizione*[10]*; e altre due rette indefinite $BD$, $CD$ formano con le prime, in questi punti dati $B$, $C$, angoli fissi $\widehat{MBD}$, $\widehat{MCD}$, allora le due rette $BD$, $CD$ nel loro punto di incontro $D$ descrivono una sezione conica passante per $B$ e $C$.*

---

Questo lemma presenta una "costruzione organica" delle coniche, che Newton pensava in modo "meccanico-fisico". In figura 1.3, il caso in cui gli angoli $\widehat{MBD}$ e $\widehat{MCD}$ hanno ampiezza $\pi/4$; si osserva che si ottiene un'iperbole:

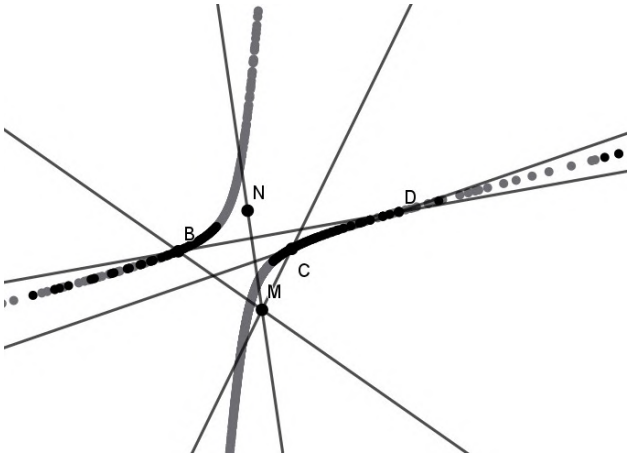



Figura 1.3: Applicazione del lemma XXI dei *Principia* di Newton.

[10] = fissa

Nel Libro III, Newton applicò poi i risultati geometrici per dimostrare le leggi di Keplero, interpretò il fuoco dell'ellisse come sede della forza attrattiva e descrisse le orbite dei pianeti, delle comete e dei corpi in fuga. La conica divenne così un oggetto fisico, non solo geometrico: l'ellisse rappresentava l'orbita del moto planetario; la parabola descriveva le comete che sfioravano il sistema solare; l'iperbole rappresentava le traiettorie dei corpi che non vengono catturati dalla gravità.

Se Newton aveva reinterpretato ellisse, parabola e iperbole come traiettorie dinamiche, legate alla legge della gravitazione universale, furono Brook Taylor (1685-1731) e Colin Maclaurin (1698-1746) che riportarono le coniche nel piano con un linguaggio nuovo, capace di unificarle e di descriverle con una struttura concettuale che anticipava la geometria moderna.

Taylor fu il primo a ipotizzare che la definizione di tutte le coniche dipendesse da una costante (che chiamò *eccentricità*), ovvero il rapporto tra la distanza di un punto della conica dal fuoco e la distanza del punto dalla direttrice. Come visto, la parabola era già stata interpretata in questo modo da La Hire, ma Taylor estese questa idea all'ellisse e all'iperbole. Se l'eccentricità è minore di uno, la curva è un'ellisse; se è uguale a uno, è una parabola; se è maggiore di uno, è un'iperbole. Con questa formulazione, Taylor non solo unificò le tre coniche, ma introdusse un parametro che ne descriveva la forma in modo continuo, in linea con il principio di Keplero. Questa visione anticipò la geometria moderna, dove le coniche sono trattate come elementi di una famiglia parametrica e preparò il terreno per la loro interpretazione analitica.

Maclaurin, allievo di Newton e uno dei più brillanti matematici scozzesi del Settecento, portò la teoria di Taylor a un livello superiore. Egli fu il primo a formulare in modo rigoroso il concetto di luogo di punti, cioè l'idea che una curva possa essere definita come l'insieme dei punti che soddisfano una certa proprietà; inoltre, esplorò le conseguenze della definizione di Taylor, studiò le proprietà delle coniche che derivavano dalla definizione, analizzò le relazioni tra eccentricità e forma della curva e introdusse dei metodi geometrici che anticipavano la teoria delle trasformazioni geometriche. In particolare, Maclaurin era consapevole che la

definizione come luogo di punti era indipendente dal cono e permetteva di trattare le coniche come oggetti del piano, senza ricorrere a costruzioni tridimensionali.
Un altro contributo fondamentale di Maclaurin fu la sua capacità di integrare la teoria delle coniche con il calcolo infinitesimale. Pur seguendo la tradizione geometrica di Newton, Maclaurin utilizzò metodi analitici per studiare le proprietà delle curve, introducendo tecniche che anticipavano la geometria differenziale. Per esempio, analizzò la loro curvatura, studiò le tangenti e le normali e mostrò come la loro definizione potesse essere tradotta in equazioni differenziali.

Se tradizionalmente si definisce "*Età eroica della Matematica*" il periodo che va tra il VI e il IV secolo a.C. con Talete, Pitagora e Ippocrate di Chio come massimi rappresentanti, il XIX secolo è passato alla storia come l'"*Età eroica della Geometria*".

Colui che aprì il periodo più florido della geometria dall'Antica Grecia fu il matematico francese Charles Julien Brianchon (1785-1864). Ancora studente dell'École Polytechnique di Parigi, riscoprì il teorema di Pascal, riformulandolo in chiave moderna e più generale: «*i sei vertici di un esagono giacciono su una conica*[11] *se, e soltanto se, i tre punti comuni*[12] *alle tre coppie di lati opposti hanno una retta in comune*» (Boyer, 1980). A partire da questo teorema, Brianchon arrivò a dimostrare il teorema che oggi porta il suo nome: «*i sei lati di un esagono giacciono su una conica*[13] *se, e soltanto se, le tre rette comuni*[14] *alle tre coppie di vertici opposti hanno un punto in comune*» (Boyer, 1980). Questo è il primo esempio di un coppia di teoremi *duali*, ovvero sono teoremi che si ottengono l'uno dall'altro se vengono invertiti i termini "retta" con "punto" e viceversa.

I risultati ottenuti da Brianchon furono, poco tempo dopo, sfruttati da un altro studente dell'École Polytechnique: Jean-Victor Poncelet (1788-1867), colui che divenne il padre della geometria proiettiva.

[11] = appartengono a una conica
[12] = d'intersezione
[13] = sono tangenti a una conica
[14] = le diagonali

---

*Pochi trattati di matematica furono composti in condizioni così deprimenti come il "*Traité des propriétés projectives des figures*" di Poncelet, iniziato dall'autore mentre era prigioniero nella prigione militare russa di Saratow nel 1813. Forse sarebbe un'esagerazione affermare che questa fu l'unica cosa positiva scaturita dalla campagna di Russia di Napoleone, ma il mondo sarà per sempre debitore all'autore per aver intrapreso un'opera così importante in circostanze così sfavorevoli. La sua prima edizione, ampliata e rivista, fu pubblicata nel 1822, e la seconda vide la luce circa quarant'anni dopo.* (Coolidge, 1968)

---

Poncelet fu il primo a separare nettamente le proprietà proiettive, ovvero quelle invarianti per proiezioni, da quelle non proiettive. Seguendo Desargues, Poncelet partì dall'idea che le rette parallele si incontrassero all'infinito, concetto che gli permise di trattare le proiezioni con grande generalità.
Tra i risultati più notevoli di Poncelet, anche se non sufficientemente approfondito dall'autore, fu l'introduzione di una trasformazione quadratica particolare: ogni punto veniva sostituito dal suo coniugato rispetto alle circonferenze passanti per due punti dati. Questa trasformazione permetteva di proiettare una conica e un suo punto interno in un cerchio e nel suo centro, e di trasformare due coniche con due intersezioni reali in due cerchi.
Sempre in questo trattato, Poncelet ipotizzò che tutte le costruzioni euclidee potessero essere fatte solo con la riga (escludendo il compasso) a patto che si tracciasse nel piano una sola circonferenza e se ne fissasse il centro. Colui che dimostrò la validità di questa supposizione fu Jakob Steiner (1796-1863), «*considerato come il più grande studioso di geometria dei tempi moderni, paragonabile ad Apollonio nei tempi antichi*» (Boyer, 1980).
Il nome è legato soprattutto allo studio delle proprietà di particolari punti che prendono il suo nome (Boyer, 1980):

---

*Se si uniscono in tutti i modi possibili i sei punti dell'esagono inscritto in una conica (*hexagramme mystique *di Pascal), si ottengono sessanta rette di Pascal che si in-*

*tersecano a tre a tre in venti punti, detti punti di Steiner.*

---

Parallelamente agli studi proiettivi (sintetici), altri autori preferirono concentrarsi su metodi analitici, studiando le equazioni delle coniche e loro caratterizzazioni. Riassumendo alcuni risultati notevoli, si hanno le seguenti:

---

**Definizione**
In un sistema di riferimento $Oxy$, una conica è il luogo dei punti $(x, y)$ che soddisfano la seguente:

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0 \tag{1.5}$$

con $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$ e $a, b, c,$ non tutti nulli.

**Teorema (Caratterizzazione delle coniche non degeneri)**
Data una conica non degenere di equ. 1.5, si consideri il discriminante $\Delta = b^2 - 4ac$. Se l'equazione 1.5 ammette soluzioni, allora rappresenta:

- un'ellisse se $\Delta < 0$;
- una parabola se $\Delta = 0$;
- un'iperbole se $\Delta > 0$.

**Osservazione.** Per studiare una conica, si elimina prima il termine misto $bxy$ tramite una rotazione:

$$x' = x\cos\theta - y\sin\theta,\ y' = x\sin\theta + y\cos\theta$$

dove l'angolo $\theta$ soddisfa $\tan(2\theta) = \frac{b}{a-c}$.
Successivamente si eliminano i termini lineari mediante una traslazione degli assi.

Il risultato è un'equazione canonica della conica:

- Ellisse: $\frac{X^2}{A^2} + \frac{Y^2}{B^2} = 1$

- Parabola: $Y^2 = 2pX$

- Iperbole: $\frac{X^2}{A^2} - \frac{Y^2}{B^2} = 1$

con $A, B \in \mathbb{R}^*$, $p$ distanza vertice-fuoco.

---

### 1.1.1 La circonferenza

Un discorso a parte merita la *circonferenza*, la curva per eccellenza, definita come il luogo dei punti equidistanti da un punto, chiamato *centro*.

Difficile, se non impossibile, è risalire a chi per primo l'abbia disegnata e studiata. Ciò che è certo è il fatto che le costruzioni delle più antiche civiltà della Storia (Egizi, Babilonesi, Etruschi, ...) esigevano l'utilizzo del compasso e la conoscenza di alcune semplici proprietà del cerchio.
In uno dei reperti egizi più antichi di nostra conoscenza, il *Papiro di Rhind* (XVII secolo a.C.) è presente una soluzione approssimata del problema sulla quadratura del cerchio, che conduce a un valore approssimato del rapporto tra lunghezza e diametro della circonferenza (che fu chiamato poi $\pi$) pari a $(\frac{16}{9})^2 \approx 3,1604....$

Il problema della quadratura del cerchio divenne di cruciale importanza presso l'Antica Grecia. Il primo (di cui si ha notizia) che provò a risolverlo, tramite un problema simile, fu Ippocrate che, secondo Eudemo, riuscì a determinare la quadratura delle lunule.
Pare che Ippocrate conoscesse il metodo di riduzione di un teorema in altri teoremi più semplici e la dimostrazione per assurdo. Solo così avrebbe potuto dimostrare il teorema a lui attribuito: «*segmenti di cerchio simili stanno tra loro nello stesso rapporto che intercorre tra i quadrati costruiti sulle loro basi*» (Boyer, 1980).

Da questo teorema, riuscì a quadrare le lunule[15]. Ippocrate iniziava con un semicerchio circoscritto a un triangolo isoscele e sulla base del triangolo costruiva un segmento circolare simile ai segmenti circolari costruiti sui due cateti [Figura 1.4]. Dato che i segmenti circolari stanno tra loro come i quadrati costruiti sulle loro basi[16], utilizzando il teorema di Pitagora, si ha che la somma dei due segmenti circolari costruiti sui due cateti risulta uguale al segmento circolare maggiore. Dunque, se $A = B + C$, allora $Semicerchio - A = Semicerchio - (B + C)$, ovvero $Area_{Lunula} = Area_{Triangolo}$.

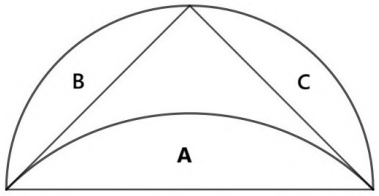



Figura 1.4: Quadratura di una lunula.

Il problema della quadratura del cerchio fu, poi, risolto solo un secolo dopo da Dinostrato (IV secolo a.C.), fratello di Menecmo. Per risolverlo, Dinostrato si rese conto che non era possibile restare nell'ambito della geometria della "riga e compasso", così utilizzò la prima curva introdotta nella matematica, oltre alla retta e alla circonferenza: la *quadratrice di Ippia*, introdotta da Ippia di Elide (V-IV secolo a.C.) qualche decennio prima. In breve, a partire da un quadrato $ABCD$, si fa traslare $AB$ verticalmente verso il basso fino ad arrivare a $CD$ e si fa ruotare $AD$ rispetto a $D$ in senso orario, in moto uniforme, ovvero i due moti avvengono nello stesso intervallo di tempo. La quadratrice di Ippia $AQ$ è il luogo dei punti di intersezione tra i segmenti trasformati durante i due moti [Figura 1.5]. Dinostrato dimostrò che il lato $AB$ $(a)$ del quadrato è medio proporzionale tra $DQ$ e il quarto di circonferenza $\widehat{AC}$, ovvero $\frac{\widehat{AC}}{AB} = \frac{AB}{DQ}$.
A partire da questa proporzione, si può tracciare un segmento $b$ che sia uguale in lunghezza a $\widehat{AC}$. Tracciando un rettangolo con lati $2b$ e $a$, si ottiene un rettangolo

[15] figure delimitate da due archi di circonferenza di raggio diverso.
[16] per il suo teorema

di area uguale all'area del cerchio di raggio $a$. Prendendo il quadrato di lato $l = \sqrt{2ab}$ si risolve il problema.

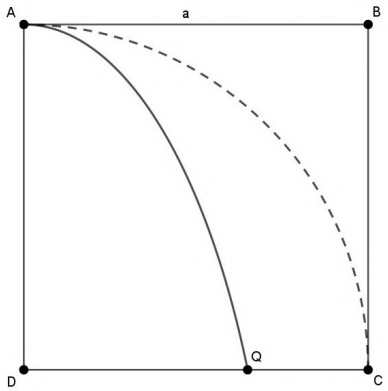



Figura 1.5: Quadratura del cerchio (Dinostrato).

Non tutti gli studiosi greci si focalizzarono sulle proprietà metriche del cerchio (come la misura della lunghezza della circonferenza o della sua area).
Per esempio, a Talete di Mileto (VI secolo a.C.), il primo matematico della storia occidentale, si fa risalire la proprietà secondo cui un cerchio viene bisecato da ogni suo diametro. Lo stesso Ippocrate era riuscito a ipotizzare alcune semplici proprietà; ma colui che, per primo, raccolse e dimostrò tutti questi risultati fu Euclide nei suoi *Elementi*.
L'importanza che il cerchio assunse in Euclide è già evidente dal terzo postulato, che permette di costruire sempre un cerchio, noti centro e raggio. Come fa notare Loria (1930a), questo postulato «*considerò lecito l'uso del compasso, come quello della riga, anzi si ritenne accettabile la soluzione di un problema di geometria soltanto quando potesse eseguirsi mediante questi due strumenti*». Successivamente, Euclide dedicò ben due libri degli *Elementi* allo studio delle proprietà del cerchio. Nel dettaglio, il libro III contiene 37 proposizioni sulle corde, sulle posizioni reciproche retta-circonferenza e tra circonferenze; in particolare le proposizioni 16-19 sono dedicate alle tangenti a una circonferenza. Da notare che il problema delle tangenti, che mise al lavoro i più illustri matematici nei secoli successivi, per la circonferenza era già risolto. Nel libro IV si trattano le proprietà dei poligoni in-

scritti e circoscritti; in particolare, vengono costruiti i poligoni regolari di 4, 5, 6, 10, 15 lati.

L'estrema facilità nel definire e disegnare per intero una circonferenza portò numerosi studiosi al volerne misurare la lunghezza (la quadratura del cerchio rientrava in questo bisogno). Colui che più di tutti si ingegnò in tal senso fu Archimede di Siracusa (287 ca-212 a.C.).
Da sempre considerato un membro d'onore nell'Olimpo della geometria greca, accanto a Euclide d'Alessandria e Apollonio di Perga, Archimede ha conosciuto una vera riscoperta delle sue invenzioni e delle sue scoperte solo negli ultimi secoli; infatti, «*i trattati di Archimede sono pervenuti a noi per il tramite di una tradizione manoscritta molto esile. Quasi tutte le copie derivano da un unico originale greco che era ancora esistente all'inizio del XVI secolo e che era stato a sua volta copiato da un originale più antico risalente al IX o X secolo circa. [...] Vi sono stati periodi in cui poche o addirittura nessuna delle opere di Archimede era conosciuta. Ai tempi di Eutocio, [...] VI secolo d.C., si conoscevano generalmente soltanto tre delle molte opere di Archimede [...]. In tali condizioni è stupefacente che sia sopravvissuta sino a noi una quantità così grande degli scritti di Archimede*» (Boyer, 1980).
Nel 1906 lo studioso danese J. L. Heiberg rinvenne a Costantinopoli una pergamena che conteneva una raccolta di preghiere del XIII secolo. Quel manoscritto, però, era in realtà un palinsesto: la pergamena aveva ospitato in origine altri testi, poi cancellati con la pietra pomice per far spazio alle nuove scritture devozionali. La cancellazione, tuttavia, era stata solo parziale. Grazie a tecniche fotografiche d'avanguardia per l'epoca, Heiberg riuscì a far riemergere gli scritti nascosti. Così vennero alla luce numerosi trattati di Archimede, alcuni già noti attraverso altre tradizioni manoscritte, ma soprattutto apparve l'unica copia esistente di un'opera fondamentale: *Il Metodo*, un testo che rivela il procedimento euristico con cui Archimede giungeva alle sue scoperte.
Nel suo trattato intitolato *Sulla misurazione del cerchio*, Archimede arrivò a dimostrare, attraverso il metodo di esaustione, l'area del cerchio. Per fare questo, lo

scienziato approssimò il cerchio con poligoni regolari inscritti con numero di lati via via maggiore e per ognuno di questi andò a calcolare l'area. Osservando che le aree iniziavano ad assumere valori sempre più vicini ad un particolare risultato, ($\frac{\mathcal{C}r}{2}$, con $\mathcal{C}$ lunghezza della circonferenza), dimostrò per assurdo che il valore fosse effettivamente corretto.
Calcolando la formula per la misura della circonferenza, inoltre, era riuscito ad approssimare il valore di $\pi$ a $3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{10}{70}$, un valore decisamente più preciso rispetto a quello dei babilonesi e degli egizi.

Nei secoli successivi in tanti si divertirono a trovare valori sempre più approssimati di $\pi$ credendo che prima o poi si dovesse finire (arrivando a un numero razionale finito o al più periodico). Tutto questo fino a quando nel 1761 fu presentata all'Accademia di Berlino la prima dimostrazione che $\pi$ è irrazionale. Lo scienziato svizzero Johann Heinrich Lambert (1728-1777) dimostrò che «*se* $x$ *era un numero razionale diverso da zero, allora* $\tan x$ *non poteva essere razionale. Poiché* $\tan \frac{\pi}{4} = 1$, *un numero razionale, ne seguiva che* $\frac{\pi}{4}$ *non poteva essere un numero razionale, e pertanto non poteva esserlo neppure* $\pi$» (Boyer, 1980).
Nel 1794, poi, il matematico francese Adrien-Marie Legendre (1752-1833) dimostrò che anche $\pi^2$ è irrazionale, ma questo non mise fine al problema della quadratura del cerchio. La questione fu risolta solo nel 1882 nell'articolo "*Ueber die Zahl* $\pi$ (*Sul numero* $\pi$)" del matematico tedesco Ferdinand von Lindemann (1852-1939). In questo trattato l'autore dimostrò che il numero $\pi$ è trascendente, ovvero non può essere soluzione di un'equazione algebrica (a coefficienti interi). Innanzitutto, Lindemann dimostrò che l'equazione $e^{ix} + 1 = 0$ non ammetteva soluzioni algebriche. Dato che Eulero, prima di lui, aveva dimostrato che $x = \pi$ è soluzione di tale equazione, si concludeva che $\pi$ era trascendente. Così si concludeva negativamente il millenario problema della quadratura del cerchio; infatti, affinché fosse possibile con riga e compasso, «*il numero* $\pi$ *dovrebbe essere soluzione di un'equazione algebrica con una radice esprimibile mediante radici quadrate. Poiché* $\pi$ *non è un numero algebrico, il cerchio non può essere quadrato secondo le regole classiche*» (Boyer, 1980).

### Il cerchio come modello di geometria non euclidea

Il cerchio risultò fondamentale alla fine del XIX secolo per dimostrare la coerenza della nuova geometria iperbolica (non euclidea).
Per oltre due millenni, matematici di epoche e culture diverse tentarono di dimostrare il V postulato di Euclide[17] a partire dagli altri quattro assiomi, considerati più intuitivi e auto evidenti. Nei primi decenni dell'Ottocento, i matematici János Bolyai (1802-1860) e Nikolaj Lobačevskij (1793-1856), in modo indipendente, negarono il postulato, in particolare negarono l'unicità della parallela: scoprirono così che non solo non emergevano contraddizioni, ma che si delineava una nuova geometria coerente, con proprietà spesso diverse da quelle euclidee. Questa nuova geometria, inizialmente accolta con scetticismo, fu dimostrata coerente grazie alla creazione di alcuni modelli che ne rappresentavano il piano. Tra questi, si ricorda il modello di Jules-Henri Poincaré (1854-1912): sia dato, in un piano euclideo, un cerchio euclideo $\mathcal{C}$ di raggio $R$. Si immagina che all'interno di questo cerchio viva una popolazione di essere bidimensionali che vengono osservati da fuori (rappresentano i punti del piano iperbolico). All'interno di $\mathcal{C}$ avviene uno strano fenomeno che provoca la contrazione dell'unità della lunghezza man mano che ci si allontana dal centro. In questo universo il percorso più breve non sarà sempre una retta: infatti, sarà più conveniente muoversi tramite archi (con concavità verso il centro). Si dimostra che questi cammini, se non si tratta di cammini su un diametro che sono rettilinei, sono archi di circonferenza ortogonali a $\mathcal{C}$. Gli abitanti di questo universo non si renderanno conto di vivere all'interno di un cerchio: per quante volte riportino consecutivamente un metro di lunghezza fissata, non raggiungeranno mai il bordo, perché il metro si accorcia troppo velocemente. Dunque, per coloro che vivono al suo interno, il cerchio $\mathcal{C}$ si estende all'infinito in tutte le direzioni e costituisce il piano.

[17] In linguaggio moderno: *Dati nel piano una retta e un punto che non le appartiene, allora esiste ed è unica la retta passante per quel punto e parallela alla retta data.*

## 1.2 Le coniche nell'arte

Le coniche, nate come oggetti matematici nella Grecia ellenistica, solo in un secondo momento furono utilizzate nell'architettura antica.

Il teatro greco, sviluppatosi tra il VII e il IV secolo a.C., rappresenta uno dei primi esempi di architettura in cui la forma dello spazio viene definita attraverso scelte geometriche precise. Nella loro progettazione, assunsero un ruolo centrale le coniche, in particolare il cerchio e l'ellisse, che modellavano la cavea[18] e l'orchestra e contribuivano alla funzionalità dell'edificio.
A partire dal V secolo a.C., la cavea assunse una pianta curvilinea, generalmente una semi-circonferenza o una semi-ellisse. La scelta non fu casuale: da una parte, una cavea circolare garantiva che la distanza tra gli spettatori e il centro dell'orchestra fosse complessivamente costante; dall'altra, una cavea ellittica permetteva una migliore distribuzione del pubblico lungo un asse maggiore, aumentando la capienza e migliorando la visibilità. Dal punto di vista geometrico, la cavea ellittica è particolarmente interessante: essa, infatti, produceva una distribuzione armonica delle linee di vista e una propagazione del suono più uniforme.
Un esempio emblematico è il teatro di Dioniso ad Atene [Figura 1.6]. Ricostruito in pietra nel IV secolo a.C., la cavea era suddivisa in settori verticali, separati da due corridoi orizzontali e aveva una capienza di circa 17.000 spettatori. La geometria complessiva era quella di un grande settore ellittico, scavato nella roccia per garantire una maggiore stabilità strutturale. L'orchestra, originariamente rettangolare, assunse nel V secolo a.C. una forma circolare. La circonferenza era una soluzione geometrica funzionale, dato che permetteva una propagazione uniforme del suono, poiché il centro della circonferenza diventava un punto focale acustico. La *skené*, ovvero la scenografia, divenne con il tempo un edificio in pietra, dotato di porte, decorazioni e colonne. La scenografia, quindi, introdusse nel teatro una linearità che si contrapponeva alle forme curvilinee della cavea e dell'orchestra.

Con la conquista romana della penisola balcanica, tutte le tecniche artistiche

[18] = zona riservata al pubblico

e architettoniche del mondo greco vennero assorbite e implementate. I Romani non si limitarono a replicare i teatri greci: li ricodificarono secondo le proprie esigenze urbane, politiche e ingegneristiche. Il risultato fu la nascita di un nuovo modello teatrale, non più scavato nella roccia come quello greco, ma concepito come struttura autonoma sopraelevata. A differenza di quella greca, la cavea romana fu sempre una semicirconferenza, poiché era più semplice da costruire con archi e volte rispetto all'ellisse; infatti, permetteva una distribuzione regolare delle spinte dovute al peso della struttura e inoltre si integrava perfettamente con il semicerchio dell'orchestra.

Ma la maestria architettonica romana non si esaurì ai teatri: l'anfiteatro romano rappresenta una delle più alte espressioni della capacità ingegneristica della civiltà romana. È un'invenzione tutta romana e veniva usato per i *giochi gladiatori* o tra gladiatori e animali. I giochi gladiatori, «*in origine, si svolgevano in connessione con i funerali [...]. Le cerimonie si svolgevano nella piazza del mercato ed erano adoperate come strumento di propaganda politica [...]. Vista la sua occasionalità, non si rendeva necessaria una costruzione fissa [...]. In seguito si perse progressivamente il collegamento tra giochi gladiatori e le occasioni di lutto e questi spettacoli [...] furono assunti sia dalle amministrazioni pubbliche sia da personaggi di rilievo [...]. Pertanto, nelle città di nuova fondazione [...] la serie di edifici pubblici venne completata anche con un anfiteatro*» (Sala & Cappellato, 2003).
Una questione tutt'oggi aperta risulta essere la curva che delinea la pianta dell'anfiteatro. Gli studiosi, nel corso dei secoli, si sono divisi tra chi crede che la forma sia un'ellisse e chi crede che sia un generico ovale. Come nota Valerio (Giugno 1993) «*quando in architettura [...] si parla di ellisse non si sa mai bene se si sta parlando della nota figura geometrica studiata da Apollonio [...] o semplicemente una figura curvilinea, chiusa, a simmetria multipla*». Inoltre aggiunge: «*mi sentirei di affermare che l'ellisse è una forma poco architettonica, non solo perché difficile da immaginare e da disegnare ma soprattutto, perché poco naturale [...]. L'ellisse non si incontra in natura [...] a meno che non ci si riferisca, per esempio, all'ombra di una forma circolare*» (Valerio, Giugno 1993), ma in questo caso ci si riconduce

agli studi proiettivi svolti in modo formale solo a partire dal XIX secolo. Persino il grande artista e studioso rinascimentale Albrecht Dürer (1471-1528) «*mostra chiaramente di essere tratto in inganno sulla effettiva forma della sezione ellittica del cono [...]. Toccò al Panofsky, nel 1943, chiarire in maniera definitiva l'effettivo punto di vista del Dürer, che semplicemente ignorava quale forma avesse l'ellisse*» (Valerio, Giugno 1993).
In particolare, sul Colosseo a Roma, sono stati svolti innumerevoli rilievi e studi, ma il dilemma resta [Figure 1.7 e 1.8]: da un lato, Docci (1999) scrive che «*le misurazioni [...] effettuate ci consentono di sostenere che, allo stato attuale delle conoscenze, la forma del Colosseo che trova i maggiori riscontri è quella ovoidale*»; dall'altro, secondo Rubertis (1999) «*l'ellisse è l'elegante perfezione dello scorcio proiettivo del cerchio [...]; è la forma esatta a cui tende la circonferenza se omogeneamente deformata [...]. L'ellisse è dunque un concetto puro e universale che doveva essere presente in un monumento di così alto significato [...]. Altri anfiteatri hanno andamento meno rigoroso, per incuria, per ignoranza o superficialità dei loro maestri costruttori: il Colosseo doveva essere perfetto*».

Da abili costruttori quali erano, i Romani portarono innumerevoli innovazioni nelle costruzioni architettoniche, come ad esempio l'utilizzo massiccio degli archi e le coperture a cupola.

L'arco romano è probabilmente una delle invenzioni più importanti nella storia dell'architettura. In realtà, i Romani non hanno inventato l'arco, infatti era già noto in Mesopotamia e dagli Etruschi, ma essi furono i primi a comprenderne pienamente le sue potenzialità statiche e a integrarlo nelle loro costruzioni.
Un arco è costituito solitamente da conci, cioè pietre tagliate, solitamente di forma trapezoidale. Negli archi classici, ogni concio spinge sul concio vicino, e la chiave di volta in alto blocca la struttura, trasformando la spinta verticale in spinte laterali che vengono assorbite dai piedritti, ovvero le basi. I Romani utilizzarono principalmente l'arco a tutto sesto (dalla copertura semicircolare) anche se non mancano esempi di coperture paraboliche, che a volte sostituivano il semicerchio per ridurre le altezze e rendere le strutture più stabili. L'arco era presente in tutte



Figura 1.6: Teatro di Dioniso (V-IV secolo a.C.). Acropoli, Atene.

Foto di dronepicr, licenza CC BY 2.0, via Wikimedia Commons (consultato il 29 luglio 2026)



Figura 1.7: Colosseo (I secolo). Roma.

Foto di FeaturedPics, licenza CC BY-SA 4.0, via Wikimedia Commons (consultato il 29 luglio 2026)

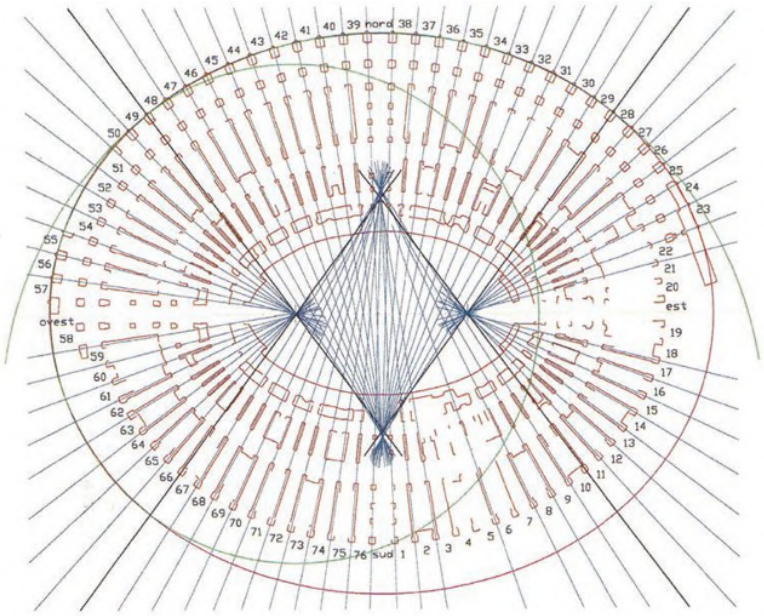



Figura 1.8: Colosseo (I secolo), sovrapposizione in pianta di ellisse e ovale (in verde). (De Carlo & Paris, 2019)

le loro costruzioni, come teatri, anfiteatri, ponti e acquedotti [Figure 1.9 e 1.10].

Riprendendo alcuni studi greci, i Romani costruirono anche templi a base circolare che si alternavano ai classici a base rettangolare. L'impostazione a pianta centrale fu poi ripresa anche per alcune prime costruzioni paleocristiane, soprattutto «*per quelle costruzioni che sorgevano sul luogo del martirio di un santo o sulla sua tomba [...]. Successivamente fu impiegata anche per i battisteri*» (Cricco & Di Teodoro, 2012a). Alcuni esempi notevoli si trovano a Roma:

- Il *Mausoleo di Santa Costanza* fu costruito a metà del IV secolo per Costanza, la figlia dell'imperatore Costantino, primo imperatore cristiano. Costruito in mattoni rossi, «*l'edificio è a pianta circolare [...]. Lo spazio centrale è coperto da una cupola che si imposta su un tamburo sorretto da archi*» (Cricco & Di Teodoro, 2012a) a tutto sesto, che a loro volta poggiano su delle colonne binate poste in cerchio [Figura 1.11].

- La chiesa di *Santo Stefano Rotondo* risale alla seconda metà del V secolo, sotto il pontificato di papa Simplicio. L'edificio, privato di alcune zone nel XV secolo, presentava una pianta alquanto articolata, in cui spazi chiusi si alternavano a spazi aperti. Inoltre, «*il passaggio dall'uno all'altro non avveniva bruscamente, ma con la mediazione della luce*» (Cricco & Di Teodoro, 2012a). La struttura, infatti, si configurava attorno a un «*grande vano centrale [...], crescendo come per irraggiamento e sommatoria di corone concentriche di colonnati, arcate e muri pieni, che si organizzavano in ambienti chiusi e in cortili*» (Cricco & Di Teodoro, 2012a) [Figura 1.12].

Tra il IV e il V secolo si diffusero in tutto l'Impero romano i mosaici, per decorare pavimenti e murature, spesso in sostituzione degli affreschi. In queste opere diventò predominante il contrasto tra la linea retta delle tessere e la linea curva delle figure che si volevano rappresentare. Non era di certo facile riuscire a rappresentare qualsiasi tipo di soggetti utilizzando delle tessere poligonali, eppure gli esempi notevoli non sono pochi. Eccone alcuni in Italia:



Figura 1.9: Acquedotto romano (I-II secolo). Segovia, Spagna.

Foto di Bernard Gagnon, licenza CC BY-SA 3.0, via Wikimedia Commons (consultato il 30 luglio 2026)



Figura 1.10: Ponte Milvio (110-109 a.C.). Roma.

Foto di Kyle Van Horn, licenza CC BY 2.0, via Wikimedia Commons (consultato il 30 luglio 2026)

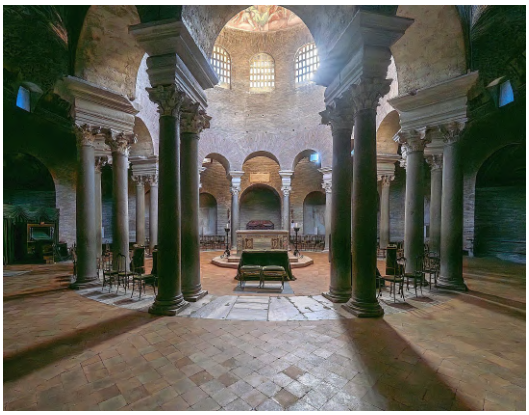


Figura 1.11: Mausoleo di Santa Costanza (IV secolo), interno. Roma.

Foto di Grosseto2, licenza CC BY-SA 4.0, via Wikimedia Commons (consultato il 30 luglio 2026)

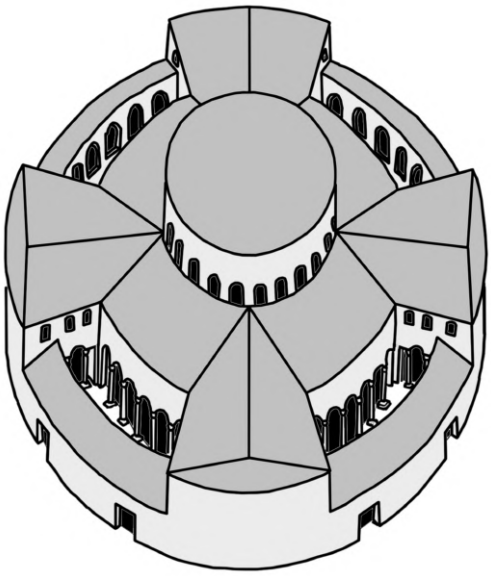


Figura 1.12: Santo Stefano Rotondo (468-483 circa), interpretazione prospettica della chiesa originale. Roma.

Disegno di MM, sulla base di una ricostruzione grafica di Spencer Corbett, via Wikimedia Commons (consultato il 30 luglio 2026)

- Ravenna fu forse la città che più di tutte si riempì di opere mosaicate, probabilmente grazie alle influenze orientali. Un celebre esempio è il *Mausoleo di Galla Placidia* il cui interno è completamente decorato da mosaici di assoluta precisione e bellezza. L'interno della cupola al centro del monumento raffigura un grande cielo blu pieno di stelle [Figura 1.13]. Queste, posizionate lungo dei cerchi concentrici, sembrano nascere direttamente dalla grande croce dorata posta al centro e rappresentante Cristo.

- La *Basilica di Santa Maria Maggiore* a Roma, tra le basiliche paleocristiane meglio conservate, è riccamente decorata da mosaici che scorrono lungo le trabeazioni delle navate, ma soprattutto decorano l'intero presbiterio, compreso il catino absidale. In particolare, i mosaici dell'arco trionfale[19] narrano alcuni episodi dell'infanzia di Gesù [Figura 1.14]. Al centro, in corrispondenza del punto di massimo dell'arco di circonferenza, è raffigurato, all'interno di un cerchio azzurro, un trono decorato da gemme. Esso «*evoca Cristo senza rappresentarlo in modo figurativo, suggerendo la continua, invisibile presenza di Dio nel mondo [...]. Sul trono [...] una croce gemmata proclama la vittoria di Cristo sulla morte. Infine, le figure di San Pietro e di San Paolo entro tondi*» (Cricco & Di Teodoro, 2012a) indicano tutta la Chiesa su cui regna Dio, da Occidente a Oriente.
  Il tema del trono gemmato fu ripreso a distanza di secoli da Iacopo Torriti (XIII secolo), per la monumentale decorazione del catino absidale in cui raffigurò l'incoronazione della Vergine [Figura 1.15]. All'interno di un cerchio stellato che simboleggia la volta celeste, un doppio trono gemmato accoglie il Cristo nell'atto di posare un diadema sul capo della Madre, seduta al suo fianco.

- Costruito tra l'XI e XII secolo, il *Battistero di San Giovanni* a Firenze rappresenta uno dei massimi esempi di arte romanica nella città. A pianta ottagonale, è sormontato da una doppia copertura: la cupola interna fu decorata nel XIII secolo da uno stupefacente mosaico dorato che ne ricopre l'intera

[19] É l'arco che separa la navata dalla zona più sacra del luogo di culto: il presbiterio e l'abside.

superficie interna [Figura 1.16]. Il ciclo decorativo si organizza in sei registri che, dall'alto al basso, coprono una superficie di circa $1000m^2$. Il mosaico può essere suddiviso un due parti: i cinque spicchi dell'emisfero orientale raffigurano scene della Genesi e delle vite di Giuseppe, Maria, Cristo e san Giovanni Battista, mentre gli altri tre sono dominati da un'unica, immensa rappresentazione del *Giudizio Universale*, che ruota intorno al cerchio centrale di $8m$ di diametro, «*all'interno del quale troneggia la potente figura di* Cristo giudice. *Egli [...] è assiso, in segno di potenza, sui sette cieli*[20] *(simbolicamente rappresentati come un arcobaleno turchino) e sull'empireo*[21] *(in forma di un arco splendidamente decorato)*» (Cricco & Di Teodoro, 2012a).

Osservando gli esempi precedenti, sorge spontanea una domanda: *come mai venivano utilizzate figure circolari per mettere in evidenza oggetti o personaggi sacri?*
Occorre ricordare che nei mosaici cristiani antichi, la scelta di inscrivere all'interno di cerchi Dio, il Cristo, le croci o i santi rispondeva a un codice simbolico fisso. Il cerchio, senza inizio né fine, è la forma che meglio poteva esprimere l'eternità e la perfezione divina. Quindi, inserire una figura sacra all'interno di un cerchio significava separarla dal mondo terreno, il cerchio rappresentava un recinto geometrico che dichiarava la natura a-spaziale e a-temporale del Divino.

Nell'architettura gotica, caratterizzata dal verticalismo e dalla slanciatezza delle strutture, l'arco a tutto sesto venne sostituito dall'arco a sesto acuto, costituito da due archi di circonferenza congruenti e simmetrici che si intersecano formando un punto angoloso. Inoltre, tutte le grandi cattedrali furono decorate da grandi rosoni vetrati [Figure 1.17 e 1.18]. Essi diventarono ben presto uno dei simboli più riconoscibili dell'architettura sacra: una grande finestra circolare posta sulla facciata o sul transetto, articolata in un simmetrico gioco di raggi, archi e vuoti. La sua forma richiamava la curva perfetta, il cerchio, mentre la suddivisione inter-

[20] del Paradiso

[21] Era nel Medioevo il più alto dei cieli, il luogo immateriale dove risiedevano Dio, gli angeli e le anime dei beati.



Figura 1.13: Mausoleo di Galla Placidia, mosaico della cupola (450 circa). Ravenna.

Foto di Commonists, licenza CC BY-SA 4.0, via Wikimedia Commons (consultato il 30 luglio 2026)

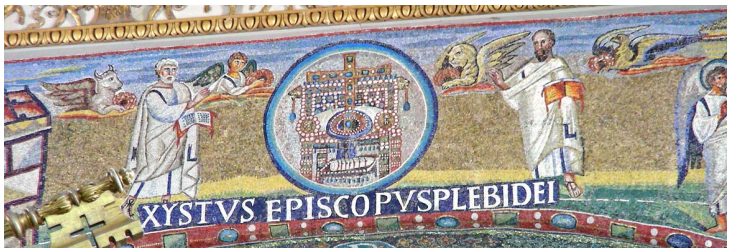



Figura 1.14: Santa Maria Maggiore, particolare del mosaico dell'arco trionfale (V secolo). Roma. Foto di MM, licenza CC BY-SA 3.0, via Wikimedia Commons (consultato il 30 luglio 2026)



Figura 1.15: Santa Maria Maggiore, mosaico del catino absidale (1296). Roma.

Foto di Jastrow, via Wikimedia Commons (consultato il 30 luglio 2026)



Figura 1.16: Battistero di San Giovanni, mosaico della cupola (1240-1310). Firenze.

Foto di Matthias Kabel, licenza CC BY-SA 3.0, via Wikimedia Commons (consultato il 30 luglio 2026)

na, spesso basata su moduli geometrici regolari, rappresentava l'idea di un cosmo ordinato e luminoso.

Come è stato visto, a partire dal XVII secolo, le coniche tornarono ad essere studiate e approfondite dai matematici, soprattutto in relazione alla nuova geometria proiettiva. In realtà, la geometria proiettiva non è nata grazie ai matematici, ma grazie al lavoro rivoluzionario di alcuni tra i più importanti artisti del Rinascimento italiano ed europeo, già due secoli prima. Tradizionalmente si fanno risalire i primi studi di prospettiva al fiorentino Filippo Brunelleschi (1377-1446), uno dei più grandi architetti nella storia dell'umanità. Le fonti storiche, infatti, concordano sul fatto che fu lui a scoprire alcune regole di base della rappresentazione prospettica, ma non è mai stato chiarito il metodo da lui utilizzato per disegnare in prospettiva.
La prima opera scritta in cui compare un metodo per il disegno prospettico (chiamato *costruzione abbreviata*) fu scritta dal contemporaneo Leon Battista Alberti (1404-1472). Nel *De Pictura* (1435), Alberti scrisse che «*il primo requisito per il pittore è conoscere la geometria. Le arti vengono apprese mediante la ragione e il metodo; esse sono padroneggiate mediante la pratica. Per quanto concerne la pittura, l'Alberti credeva che la natura potrebbe essere perfezionata con l'aiuto della matematica*» (Kline, 1976). In particolare, mostrò come un quadrato, visto di traverso, diventasse un trapezio e il cerchio un'ellisse. Inoltre, nelle sue architetture, il cerchio e sue curve derivate comparivano nelle volte e soprattutto nella costruzione delle facciate basate su rapporti e proporzioni "all'antica" [Figura 1.19].
Il più grande studioso di prospettiva del 1400 fu, però, un vero e proprio pittore: Piero della Francesca (1413-1492). Nel 1475 pubblicò il *De prospectiva pingendi*, in tre libri, dove l'autore andava a elencare una serie di esercizi prospettici via via più complicati, dalle figure piane alle figure solide, fino ad arrivare agli elementi architettonici e alla testa umana, «*tra i più difficili da realizzare dal momento che la testa è quanto di meno assimilabile ci sia a un insieme di piani per le sue infinite, complesse, variabili e modulate curve [...]. Ma questo dimostra quanto fosse grande la fiducia di Piero nella verità e nelle possibilità della scienza prospettica*» (Cricco

& Di Teodoro, 2012b). Essendo un pittore, egli poté utilizzare i suoi studi nelle sue opere, come risulta evidente nel suo capolavoro *Sacra conversazione* (1472-1474) [Figura 1.20]. La struttura architettonica in cui è inserita la rappresentazione consta di un'abside semicircolare sormontata da una conchiglia dalla forma ellittica al cui centro è appeso un uovo di struzzo ovale, simbolo di vita e rinascita. «*Qui, più che altrove, è dato cogliere la sapienza prospettica di Piero e la sua non comune conoscenza delle leggi fisiche riguardanti la luce. É questa che esalta l'architettura dipinta conferendole tridimensionalità*» (Cricco & Di Teodoro, 2012b).

Il rinnovato interesse per l'antichità portò diversi artisti rinascimentali a riprendere i canoni estetici ellenistici basati sulle proporzioni e sul cerchio. Donato Bramante (1444-1514) fu «*il primo a metter in luce la buona, e bella Architettura, che da gli Antichi fin'a quel tempo era stata nascosta*» (Palladio, 1570 in Cricco e Di Teodoro, 2012b). Ne è un chiaro esempio il *Tempietto di San Pietro in Montorio* (1502-1509 circa) che ricalca quasi integralmente, gli antichi templi classici circolari, così come viene richiamato anche nel nome. Da notare che ogni nicchia, a base semicircolare, scavata nella muratura è sormontata da una conchiglia ellittica, chiaro rimando all'opera di Piero della Francesca [Figura 1.21].

Al cerchio di Alberti e Bramante, Michelangelo Buonarroti (1475-1564) fu il primo in epoca moderna a preferire l'ellisse (o simili), soprattutto nell'ultima fase della sua vita. Considerato universalmente come uno dei più grandi e più completi artisti di tutti i tempi, Michelangelo «*riteneva che scopo dell'arte fosse l'imitazione della natura, solo indagando la quale si poteva arrivare alla bellezza [...]. Michelangelo credeva [...] che dalla natura occorresse scegliere i particolari migliori ma anche che con la fantasia l'artista fosse capace di dare vita a una bellezza superiore a quella esistente in natura. C'è, dunque, per lui un modello di bellezza che ogni artefice concepisce nella propria mente, cioè un modello ideale al quale conformare ogni propria creazione*» (Cricco & Di Teodoro, 2012b). Alcuni esempi notevoli:



Figura 1.17: Cattedrale (1200-1210 circa), particolare della facciata del transetto meridionale. Chartres.

Foto di Zairon, licenza CC BY-SA 4.0, via Wikimedia Commons (consultato il 31 luglio 2026)

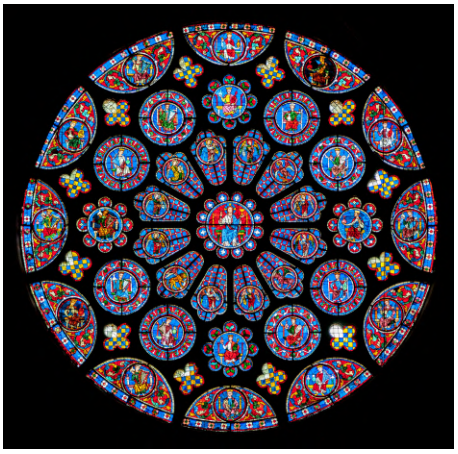


Figura 1.18: Cattedrale (1200-1210 circa), rosone del transetto meridionale. Chartres.

Foto di PtrQs, licenza CC BY-SA 3.0, via Wikimedia Commons (consultato il 31 luglio 2026)

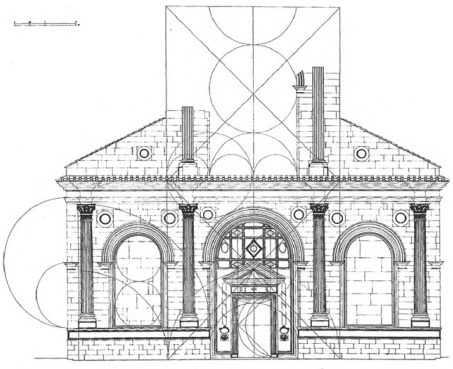


Figura 1.19: Studio delle proporzioni nella facciata del Tempio Malatestiano di L. B. Alberti. Rimini.

Foto di Benjamin Matthews, licenza CC BY-SA 4.0, via ResearchGate (consultato il 31 luglio 2026)

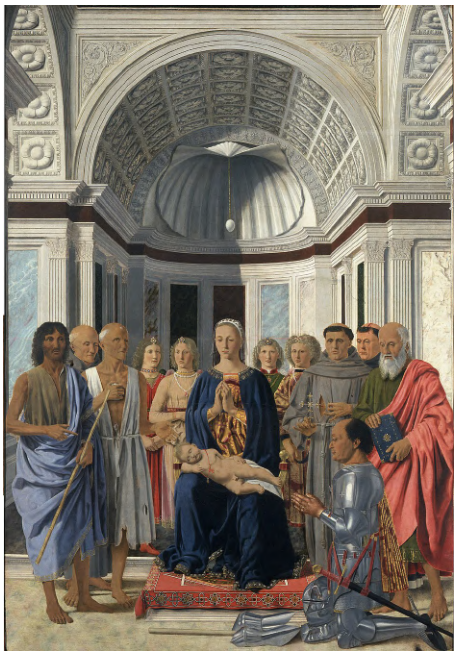


Figura 1.20: P. della Francesca. *Sacra conversazione* (1472-1474). Olio e tempera su tavola, Pinacoteca di Brera, Milano. https://pinacotecabrera.org (consultato il 31 luglio 2026)

- Tra il 1519 e il 1534 Michelangelo visse per l'ultima volta a Firenze. In questo periodo progettò e costruì la *Sagrestia Nuova di San Lorenzo*, che doveva accogliere alcune tombe dei Medici: quelle di Lorenzo il Magnifico, suo fratello Giuliano, suo figlio Giuliano duca di Nemours e suo nipote Lorenzo duca d'Urbino. Di queste quattro, solo le ultime due furono effettivamente realizzate. Contrastando l'architettura della sala fatta di pilastri, nicchie e archi ribassati (a parabola), «*si stagliano i plastici sarcofagi dai coperchi ellittici sui quali giacciono le allegorie del Giorno e della Notte [...], dell'Aurora e del Crepuscolo*» (Cricco & Di Teodoro, 2012b) [Figura 1.22].

- Negli stessi anni, fu chiamato a progettare la Biblioteca Laurenziana. Nell'esiguo vestibolo progettò uno scalone monumentale che forse rappresenta «*l'invenzione più stupefacente dell'intero complesso, presentandosi come la massa di un fiume in piena che, superata la soglia del salone della biblioteca, straripa e si allarga dando vita a tre vie . Le due laterali, con i gradini squadrati e senza balaustra si raccordano per mezzo di due volute ellittiche a quella centrale, dove domina [...] il tema della curva, lo stesso che ricorre anche nelle vicine tombe medicee*» (Cricco & Di Teodoro, 2012b). Qui, infatti, i gradini non sono più rettangolari, ma ellittici [Figura 1.23].

- Rientrato a Roma, a Michelangelo fu commissionata da papa Paolo III la ristrutturazione di due palazzi in Piazza del Campidoglio e il rifacimento dell'intera piazza. Nel 1539 gli venne commissionato anche il piedistallo per la statua di Marco Aurelio posta al centro. Gli interventi michelangioleschi e successivi resero la piazza una delle più iconiche della città. Innanzitutto venne progettato un terzo palazzo sul lato nord; così la piazza assunse una pianta trapezoidale. La pavimentazione della piazza fu realizzata solo nel 1940, utilizzando una stampa di Étienne Dupérac che riportava quello che doveva essere il progetto previsto da Michelangelo [Figura 1.24]. Il disegno a stella, costituito da tante spirali che partono dal piedistallo centrale, sono inserite all'interno di un ovale che occupa quasi tutto il lastricato della piazza. Questo ovale «*riconduce lo spazio trapezoidale - indifferenziato e*

*pluridirezionale - a una geometria accentrata, unidirezionale e più intima*» (Cricco & Di Teodoro, 2012b).

Nell'utilizzo della linea curva, Michelangelo fu in qualche modo un precursore dei successivi artisti barocchi. Un esempio fondamentale risulta essere il colonnato di *Piazza San Pietro* (1657-1665), progettato da Gian Lorenzo Bernini (1598-1680), mastro architetto della Santa Sede per gran parte della sua vita. Commissionato da papa Alessandro VII, esso consta di 284 colonne e 88 pilastri disposti lungo quattro file [Figura 1.25]. A differenza di quanto si creda, la forma della piazza non è una vera ellisse, ma un ovale: una forma che, come si è visto, risultava molto più semplice da concepire e disegnare. Bernini scelse la forma ovale per ragioni armoniche e perché così i due bracci del colonnato si aprivano come in un abbraccio avvolgente, un po' come la Chiesa con i fedeli. Non essendo un'ellisse, quindi, la forma era costruita a partire da due centri distinti che furono evidenziati sulla piazza. Da questi punti privilegiati, erroneamente confusi con i fuochi dell'ellisse, le quattro file di colonne si allineano perfettamente, rivelando l'intelligenza ottica del progetto. Il colonnato, poi, «*si congiunge alla facciata della basilica vaticana grazie a due ali laterali fra loro vistosamente divergenti. Se tali ali fossero state parallele [...], sarebbero apparse - a causa della deformazione prospettica - convergenti al centro e, di conseguenza, la facciata della Basilica [...] sarebbe sembrata prospetticamente più lontana, quasi distaccata*» (Cricco & Di Teodoro, 2012c).

Un altro artista barocco che fece della linea curva il suo marchio di fabbrica fu Guarino Guarini (1624-1683), attivo principalmente a Torino. Entusiasmato dai lavori dei suoi contemporanei a Roma, egli iniziò ben presto a effettuare numerose ricerche in ambito matematico, geometrico e architettonico. Il suo capolavoro è, senza dubbio, la *Cappella della Santa Sindone* all'interno del duomo, che doveva conservare un lenzuolo di lino che si credeva potesse essere il sudario nel quale venne avvolto Gesù dopo la morte [Figura 1.26]. Fortemente compromessa a causa di un incendio nel 1997, la Cappella rappresenta un vero e proprio trionfo della linea curva, in particolare del cerchio: infatti, «*l'impianto circolare della cappella, che collega la Cattedrale al Palazzo Ducale, viene trasformato da Guarini in*



Figura 1.21: D. Bramante. *Tempietto di san Pietro in Montorio* (1502-1509 circa). Roma.

Foto di Quinok, licenza CC BY-SA 3.0, via Wikimedia Commons (consultato l' 1 agosto 2026)



Figura 1.22: M. Buonarroti. *Tomba di Giuliano duca di Nemours* (1524-1534). Marmo, Sagrestia Nuova di San Lorenzo, Firenze. Foto di Francesco Bini, licenza CC BY-SA 4.0, via Wikimedia Commons (consultato l' 1 agosto 2026)



Figura 1.23: M. Buonarroti. *Biblioteca Laurenziana* (1524-1559), veduta del vestibolo. Firenze.

Foto di Richard Mortel, licenza CC BY-SA 2.0, via Wikimedia Commons (consultato l' 1 agosto 2026)



Figura 1.24: M. Buonarroti. *Piazza del Campidoglio* (1539-1940). Roma.

Foto di Orioloromano observatory, licenza CC BY-SA 4.0, via Wikimedia Commons (consultato l' 1 agosto 2026)

*modo da trovare riscontro anche in una soluzione triangolare [...]. I tre vertici di un triangolo individuano in pianta tre spazi secondari: due ambienti circolari [...] e uno ad arco di cerchio. I primi due hanno la funzione di collegare la cappella al presbiterio della cattedrale tramite due scalinate i cui gradini ripetono il tema del cerchio. Il terzo ambiente, infine, immette direttamente nel Palazzo Ducale*» (Cricco & Di Teodoro, 2012c). Anche sul soffitto continua la fusione tra triangolo e cerchio, dal momento che tre grandi archi individuano altrettanti pennacchi sui quali si poggia un anello circolare da cui parte il tamburo della cupola.
Un altro esempio di notevole interesse è *Palazzo Carignano*, sempre a Torino. In questo caso, il fulcro del palazzo è una torre a base ellittica che corrisponde all'ingresso. L'ellisse, poi, ritorna anche nelle finestre dell'ultimo piano [Figura 1.27].

Passando al XX secolo, colui che più di tutti si distinse, non solo per le sue opere, ma soprattutto per le sue idee e i suoi studi geometrici fu, senza alcun dubbio, il pittore russo Vasilij Kandinskij (1866-1944). In forte contrasto con l'ideale classico di arte intesa come riproduzione della natura, nel 1911 pubblicò *Lo spirituale nell'arte* in cui sosteneva che l'opera d'arte non deve limitarsi a rappresentare il mondo visibile, ma deve esprimere una necessità interiore, la spiritualità, dell'artista. Secondo lui, l'artista è un "messaggero" che attraverso colori, linee e forme può risvegliare la dimensione più profonda dell'essere umano. Come la musica, «*la pittura [...] deve essere astratta, abbandonando la* mimesis, *cioè l'imitazione di un modello, di ascendenza classica [...]. Solamente una pittura astratta, cioè non figurativa, dove le forme non hanno attinenza con alcunché di riconoscibile, liberata dalla dipendenza con l'oggetto fisico, può dare vita alla spiritualità*» (Cricco & Di Teodoro, 2012d). In particolare, riteneva che «*la forma, anche se è completamente astratta e somiglia a una figura geometrica, ha un suono interiore [...]. Ogni triangolo [...] ha un suo profumo spirituale. Paragonato ad altre forme, questo profumo si differenzia, acquista delle sfumature, ma rimane fondamentalmente immutabile [...]. Lo stesso accade per il cerchio, il quadrato e tutte le altre forme*» (Emmer, 2006). Nasce così un dualismo fondamentale in Kandinskij tra forma e colore: «*certi colori sono potenziati da certe forme e indeboliti da altre.*



Figura 1.25: G. L. Bernini. Colonnato di *Piazza San Pietro* (1657-1665). Vaticano, Roma. Foto di David Iliff, licenza CC BY-SA 3.0, via Wikimedia Commons (consultato l' 1 agosto 2026)

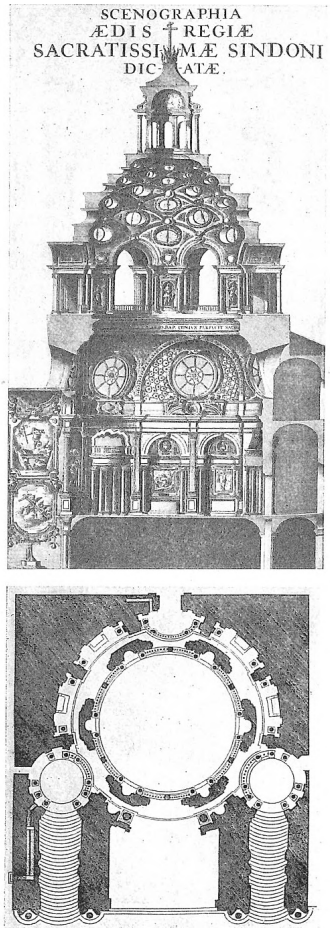



Figura 1.26: G. Guarini. *Cappella della Santa Sindone* (1667-1690), disegni di G. T. Borgonio (*Theatrum Sabaudiae*, 1682).

Foto da Wikimedia Commons (consultato il 2 agosto 2026)



Figura 1.27: G. Guarini. *Palazzo Carignano* (1679-1685), facciata interna. Torino.

Foto di Zairon, licenza CC BY-SA 4.0, via Wikimedia Commons (consultato il 2 agosto 2026)

*In ogni caso, i colori squillanti si intensificano se sono posti entro forme acute (per esempio il giallo in un triangolo); i colori che amano la profondità sono rafforzati da forme tonde (l'azzurro per esempio di un cerchio) [...]. Se una forma è inadatta a un colore [...] siamo di fronte [...] a una nuova possibilità, cioè a una nuova armonia. Se il numero dei colori e delle forme è infinito, sono infinite anche le loro combinazioni e i loro effetti*» (Kandinskij, 1989).
Nel dipinto *Alcuni cerchi* del 1926, l'artista rappresenta perfettamente il potenziale espressivo delle forme circolari [Figura 1.28]. Su uno sfondo scuro si dispongono cerchi di diverse dimensioni e trasparenze: alcuni isolati, altri raccolti in piccoli raggruppamenti, come se fossero attratti dal grande cerchio azzurro avvolto da un alone bianco. Il formato quadrato della tela, inoltre, crea un equilibrio tra ordine geometrico e vibrazione interna. Come è ormai chiaro, la scelta dei colori non è casuale; infatti, aveva scritto: «*la profondità la troviamo nel blu [...]. Più il blu è profondo e più richiama l'idea di infinito, suscitando la nostalgia della purezza e del soprannaturale [...]. Se è molto scuro da un'idea di quiete. Se precipita nel nero acquista una nota di tristezza struggente [...] Se tende ai toni più chiari [...] diventa invece indifferente e distante [...]. Più è chiaro, meno è eloquente, fino a giungere a una quiete silenziosa: il bianco*» (Kandinskij, 1989).

Negli stessi anni in cui Kandinskij attuava nei suoi dipinti le riforme da lui teorizzate, due artisti americani, Morgan Russell (1886-1953) e Stanton Macdonald-Wright (1890-1973), diedero vita ad un'altra corrente astrattista: il *Sincromismo*. Riprendendo l'idea di Kandinskij (ma indipendentemente da lui), essa partiva dal presupposto che suono e colore si equivalgono e dunque il colore crea sia la forma che il contenuto dell'opera; «*questo tipo di dipinti suggerisce forme geometriche definite da scale di colore: una volta fissato il tono generale di un'opera, lo spazio viene generato aumentando o riducendo le varie tinte, ricorrendo alle teorie del contrasto simultaneo*» (Cricco & Di Teodoro, 2012d).
Ne è un esempio *Sincromia n. 7 in 4 parti* (1914-1915) di Russell [Figura 1.29], che unisce quattro tele in un'unica opera, sostenuta da regole geometriche e delle pro-

porzioni; nelle tele, «*ciascuna contenente una forma dominante - circonferenze*[22]; *ovali e poliedri*[23]; *triangoli*[24]; *linee spezzate*[25] - *piramidi, prismi, coni, superfici ellittiche e curvilinee si rincorrono, racchiudendo su tre lati uno spazio azzurro e omogeneo*» (Cricco & Di Teodoro, 2012d).

L'incisore olandese Maurits Cornelis Escher (1898-1972) fu profondamente attratto dagli studi matematici e soprattutto dalla geometria. Pur non essendo matematico, si interessò a simmetrie, tassellazioni, prospettive impossibili, trasformazioni continue. Le sue erano opere dove l'occhio era costretto a ripensare ciò che vedeva. Negli anni Cinquanta entrò in contatto con la geometria iperbolica grazie agli studi dell'amico Harold Coxeter (1907-2003), scoprendo che esisteva un modo rigoroso per rappresentare un mondo dove le forme si rimpicciolivano verso un bordo infinito, ovvero il disco di Poincaré per la geometria iperbolica. Da qui nacque la serie *Limite al cerchio*, il culmine dei suoi esperimenti: in *Limite al cerchio IV* [Figura 1.30] un universo circolare popolato da angeli e demoni si alternano in una tassellazione perfetta, sempre più piccola man mano che ci si avvicina al bordo del cerchio.

A partire dagli anni '60, gli effetti ottici geometrici attirarono l'interesse di diversi artisti, che fondarono una vera e propria corrente artistica: la *Optical Art*. In queste opere «*appaiono centrali i processi percettivi dell'occhio umano, con i loro fenomeni di illusioni*» (Cricco & Di Teodoro, 2012d). Tra i primi e più importanti artisti della *Op Art* c'è l'ungherese Victor Vasarely (1906-1997) che, nella serie di quadri *Vega*, «*assume come fonte di ispirazione la natura, contemplata nei suoi aspetti più estremi come l'estensione e l'espansione dell'universo*» (Cricco & Di Teodoro, 2012d). In particolare, nell'opera *Vega-Pal* (1969), su una grande superficie quadrata, una griglia di cerchi colorati crea l'impressione di una sfera che quasi fuoriesce dalla tela [Figura 1.31]. L'effetto nasce dalla variazione dei colori, più

[22] in basso a destra
[23] in basso a sinistra
[24] in alto a destra
[25] in alto a sinistra

intensi al centro, più chiari verso gli angoli, e dalla deformazione progressiva della griglia, studiata per generare un movimento apparente e una tridimensionalità illusoria.

L'uso di forme geometriche fondamentali, come quadrati e cerchi, fu alla base di un'altra corrente del secondo Novecento: il *Minimalismo*, termine che rinvia alla riduzione delle forme a quelle «*"minimal", cioè più semplici ed elementari, con la consapevolezza che semplicità della forma non significa assolutamente semplicità o scarsezza dei contenuti*» (Cricco & Di Teodoro, 2012d). Colui che anticipò questa corrente artistica fu Frank Stella (1936-2024) che negli anni '60 produsse il ciclo pittorico *Protactors* (= *goniometri*). A questa serie appartiene *Harran II* [Figura 1.32], che è una composizione di sei tele: due quadrate (che sono costituite da archi concentrici simmetrici rispetto a una diagonale) e quattro a quarto di cerchio (costituite da archi concentrici che seguono il profilo della tela). «*Le bande sono dipinte con una combinazione di pigmenti acrilici e fluorescenti, che generano un cromatismo [...] quasi psichedelico. L'unione [...] dà origine a un'opera che, oltre a essere pittura, è anche rilievo, componendosi, secondo un disegno geometrico, sulla parete nuda*» (Cricco & Di Teodoro, 2012d).

Passando all'architettura, negli ultimi decenni numerosi artisti hanno esplorato forme nuove o hanno riscoperto curve antiche, trasformandole in strumenti espressivi e strutturali. Tra questi, spiccano l'architetto svizzero Mario Botta (1943-) e l'architetto spagnolo Santiago Calatrava Vals (1951-).

Le opere di Botta danno forma a organismi architettonici complessi costruiti a partire da moduli geometrici elementari, organizzati secondo un ricorso sistematico alla simmetria. Le superfici, spesso caratterizzate dall'impiego del laterizio a vista, contribuiscono a definire con essenzialità la loro resa estetica. Per esempio, la *chiesa di San Giovanni Battista* a Mogno (Canton Ticino) è un chiaro esempio dell'utilizzo della geometria da parte di Botta. La struttura, apparentemente semplice, si basa su un'ellisse, individuata come la forma più adatta a resistere all'impatto di una possibile valanga. Da questa figura è possibile ricavare, tramite



Figura 1.28: V. Kandinskij. *Alcuni cerchi* (1926). Olio su tela, The Solomon R. Guggenheim Museum, New York.

Foto del Solomon R. Guggenheim Museum, via Wikimedia Commons (consultato il 3 agosto 2026)

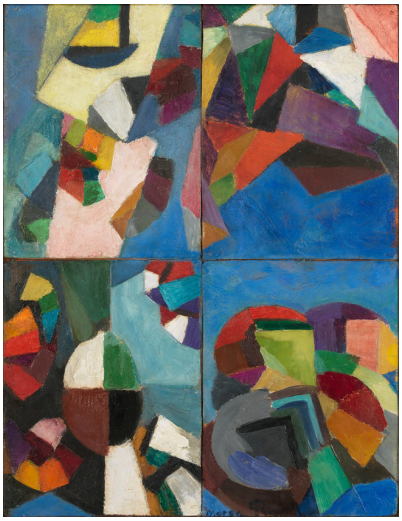


Figura 1.29: M. Russell. *Sincromia n. 7 in 4 parti* (1914-1915). Olio su tela, Whitney Museum of American Art, New York.

Foto del Whitney Museum of American Art, via Wikimedia Commons (consultato il 3 agosto 2026)



Figura 1.30: M. C. Escher. *Limite del cerchio IV* (1960).

All M.C. Escher works ©2026 The M.C. Escher Company - The Netherlands. All rights reserved. Used by permission. www.mcescher.com

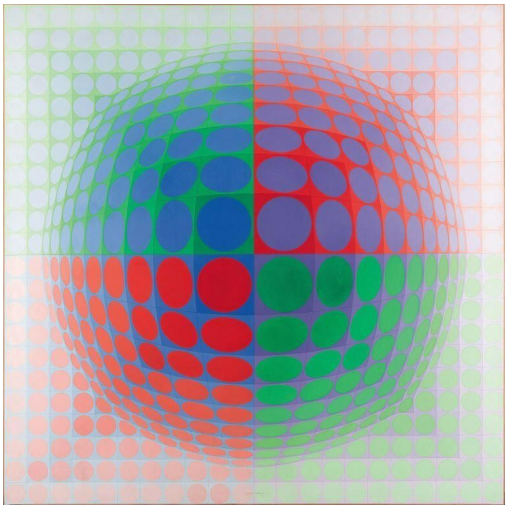


Figura 1.31: V. Vasarely. *Vega-Pal* (1969). Vernice su tela, Musée Unter Linden, Colmar.

Foto del Musée Unter Linden, https://www.musee-unterlinden.com (consultato il 3 agosto 2026)

un taglio obliquo, una circonferenza perfetta che si apre verso l'alto, creando un rapporto diretto con il cielo [Figura 1.33].

L'architettura di Calatrava nasce dall'idea che le strutture debbano comportarsi come organismi viventi, capaci di esprimere movimento e continuità. In questo contesto dinamico, le linee curve diventano strumenti fondamentali. Calatrava, in particolare, utilizza la parabola per ottenere slancio e distribuzione naturale delle forze: è la curva che gli permette di creare ponti sottili, inclinati, capaci di sostenere carichi con assoluta eleganza. L'opera di Calatrava, quindi, diventa un ponte tra ingegneria e scultura, tra geometria e movimento. Un esempio dell'uso della parabola nel linguaggio strutturale di Calatrava è il *Ponte Europa* a Orléans [Figura 1.34]. L'elemento principale è un arco parabolico inclinato, che sostiene la passerella tramite un sistema di tiranti disposti secondo traiettorie curve coerenti con la geometria dell'arco. La parabola permette di ottenere una struttura leggera e slanciata; l'inclinazione dell'arco genera una tensione visiva che accompagna il movimento dei pedoni. L'intera struttura è sostenuta «*da grandi basamenti in calcestruzzo a tre braccia, dello stesso colore bianco applicato alle parti metalliche [...]. Il ponte diventa così un puro oggetto plastico, proiettato al di là della sua modernità tecnologica, funzionale, strutturale, in un dialogo con l'orizzonte dell'intera città*» (Cricco & Di Teodoro, 2012d).

Si conclude con un'opera dell'artista Peter Rostovsky (1970-), esponente del *Supereal*: «*andando oltre l'Iperrealismo, ci si propone di esplorare il super reale, cioè una dimensione mentale che, prendendo le mosse da una rappresentazione fotografica [...], la rielabora e la arricchisce secondo gli intendimenti e la sensibilità dell'artista*» (Cricco & Di Teodoro, 2012d).
L'installazione *Epiphany Model 2* [Figura 1.35] si compone di una grande tela circolare, raffigurante un cielo acceso dalle luci del tramonto e una statuetta di una persona che osserva estasiato il panorama della tela. L'interpretazione di Rostovsky «*è ricca di fascino evocativo e tende a restituire l'idea del sublime, a conferma di come lo sgomento e la meraviglia dell'uomo di fronte alla natura siano [...] sentimenti universali e senza tempo*» (Cricco & Di Teodoro, 2012d).

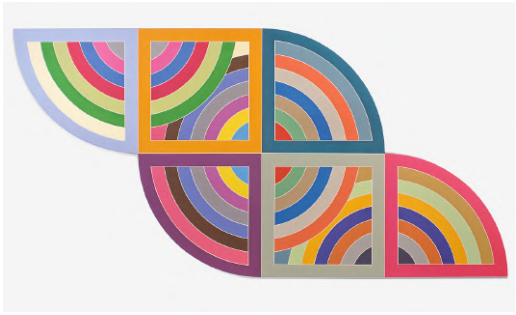


Figura 1.32: F. Stella. *Harran II* (1967). Polimeri su tela, The Solomon R. Guggenheim Museum, New York.

Foto del Solomon R. Guggenheim Museum, https://www.guggenheim.org (consultato il 3 agosto 2026)



Figura 1.33: M. Botta. *Chiesa di San Giovanni Battista* (1986-1996). Mogno, Lavizzara, Svizzera.

Foto di Monster4711, licenza CC BY-SA 4.0, via Wikimedia Commons (consultato il 4 agosto 2026)



Figura 1.34: S. Calatrava Vals. *Ponte Europa* (1996-2000). Orléans, Francia.

Foto di U4you, licenza CC BY-SA 3.0, via Wikimedia Commons (consultato il 4 agosto 2026)



Figura 1.35: P. Rostovsky. *Epiphany Model 2* (2001). Olio su tela, plastica, argilla auto-indurente.

Foto di P. Rostovsky. Used by permission. https://www.peterrostovsky.com (consultato il 4 agosto 2026)

## 1.3 Dal piano allo spazio: le quadriche

Le superfici quadriche rappresentano la naturale estensione tridimensionale delle coniche del piano. Come è stato visto, una conica è descritta da un'equazione di secondo grado nelle variabili $x$ e $y$; analogamente, una quadrica viene definita come il luogo dei punti dello spazio $(x, y, z)$ che soddisfano una qualsiasi equazione algebrica di secondo grado, che nella forma più generale è data dalla seguente:

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + exz + fyz + gx + hy + iz + j = 0 \tag{1.6}$$

con $a, b, c, d, e, f, g, h, i, j \in \mathbb{R}$.
In forma matriciale, l'equazione 1.6 può essere riscritta nel seguente modo:

$$\begin{pmatrix} x & y & z & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & \frac{d}{2} & \frac{e}{2} & \frac{g}{2} \\ \frac{d}{2} & b & \frac{f}{2} & \frac{h}{2} \\ \frac{e}{2} & \frac{f}{2} & c & \frac{i}{2} \\ \frac{g}{2} & \frac{h}{2} & \frac{i}{2} & j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = 0.$$

**Classificazione delle quadriche.** Sia $A$ la matrice che compare nell'equazione precedente e $A^*$ la matrice 3x3 ottenuta eliminando la quarta riga e la quarta colonna. Se $\det(A) \neq 0$, allora la quadrica è *non degenere* e può essere una sola delle seguenti:

| **tipo di quadrica** | $\det(A)$ | $\det(A^*)$ | **autovalori di** $A^*$ |
|---|---|---|---|
| ellissoide immaginario | $> 0$ | $\neq 0$ | concordi |
| ellissoide reale | $< 0$ | $\neq 0$ | concordi |
| iperboloide a una falda | $> 0$ | $\neq 0$ | discordi |
| iperboloide a due falde | $< 0$ | $\neq 0$ | discordi |
| paraboloide ellittico | $< 0$ | $= 0$ | uno nullo e due concordi |
| paraboloide iperbolico | $> 0$ | $= 0$ | uno nullo e due discordi |

Se $\det(A) = 0$, allora la quadrica è *degenere* e può essere una sola delle seguenti:

| **tipo di quadrica** | **rg di A** | $\det(A^*)$ | **autovalori di** $A^*$ |
|---|---|---|---|
| cono reale | 3 | $\neq 0$ | discordi |
| un punto | 3 | $\neq 0$ | concordi |
| cilindro ellittico | 3 | $= 0$ | concordi (quelli di $A$ discordi) |
| cilindro iperbolico | 3 | $= 0$ | uno nullo e due discordi |
| cilindro parabolico | 3 | $= 0$ | due nulli |
| cilindro immaginario | 3 | $= 0$ | concordi (quelli di $A$ concordi) |
| due piani reali distinti incidenti | 2 | $= 0$ | uno nullo e due discordi |
| due piani complessi coniugati | 2 | $= 0$ | uno nullo e due concordi |
| due piani distinti paralleli | 2 | $= 0$ | due nulli |
| un piano contato due volte | 1 | $= 0$ | due nulli |

Da osservare che la sfera può essere considerata come un particolare ellissoide, così come la circonferenza è vista in geometria piana rispetto all'ellisse.

Storicamente, il primo vero studioso delle superfici fu Archimede, che le vide come superfici di rotazione di una retta o di una conica rispetto ad un asse. É noto che dedicò almeno due sue opere a questo tema.
Una prima osservazione da fare riguarda i nomi dati da Archimede ad alcune di queste superfici che derivano dal suo modo di definirle a partire dalle coniche: «*si ricorderà che nelle prime [...] coniche si supponeva che il piano di taglio fosse perpendicolare a una generatrice del cono, e quindi la suddivisione avveniva rispetto alle sezioni del cono rettangolo, del cono acutangolo e del cono ottusangolo. Quindi il paraboloide [...] veniva chiamato conoide rettangolo, l'iperboloide [...] non regolato*[26] *era il conoide ottuso, gli ellissoidi [...] erano [...] lo sferoide oblungo e lo sferoide piatto*» (Coolidge, 1968).
Archimede, in particolare, si concentrò sulle misure di aree e volumi individuati da queste superfici. Per esempio, nel trattato *Sui conoidi e sferoidi* trovò il volume di segmenti tagliati su un ellissoide, su un paraboloide o su un iperboloide. Nel

[26] a due falde.

trattato *Sulla sfera e sul cilindro* dimostrò delle proprietà metriche notevoli della sfera: per esempio, fu il primo a dimostrare che l'area di una superficie sferica è pari a quattro volte l'area del suo cerchio massimo; dimostrò, inoltre, che l'area di una superficie sferica è anche uguale alla superficie laterale di un cilindro che ha diametro di base e altezza uguali al diametro della sfera. Si crede che questa proprietà era così cara ad Archimede da volerla incisa sulla propria tomba.
Inoltre, Archimede dimostrò la correttezza della formula per il volume di una sfera, anche se per due millenni ci si è chiesti come vi era arrivato. In realtà, il procedimento archimedeo si trovava in un'altra opera, il *Metodo*, riscoperto solo nel 1906.

Non risultano studi degni di nota sulle superfici fino al XIX secolo; come nota Coolidge (1968): «*è sorprendente che i geometri sintetici [...], così interessati alle sezioni coniche, non mostrarono particolare interesse per le superfici quadriche. Il motivo, immagino, era che non esisteva una definizione immediata di queste, paragonabile alla definizione di conica come proiezione di un cerchio*». L'unico piccolo spiraglio si ebbe con Fermat, che nell'*Introduzione ai luoghi di superficie* (1643) enunciò tre lemmi:

i) Se tutte le sezioni di una superficie sono linee rette, la superficie è un piano.

ii) Se tutte le sezioni sono cerchi, si tratta di una sfera.

iii) Se tutte le sezioni sono cerchi o ellissi, si tratta di uno sferoide.

Non è chiaro se Fermat definisse lo sferoide come Archimede; di certo risulterebbe esserci un'ambiguità tra il secondo e il terzo lemma, dal momento che Archimede non riteneva la sfera un particolare sferoide.

Il primo a studiare seriamente le superfici quadriche in tempi moderni fu Brianchon, che iniziò studiando il piano polare di una quadrica. Da qui arrivò ad enunciare due importanti risultati:

- Se un cono e una quadrica si intersecano in alcuni punti che appartengono a una conica, allora l'intera intersezione tra le due superfici è necessariamente quella stessa conica.

- Se da un punto esterno a una quadrica si tracciano tutte le tangenti alla quadrica, i punti di tangenza non sono distribuiti a caso, ma appartengono tutti a una conica.

Quando Poncelet andò a studiare le coniche per la neonata geometria proiettiva, si trovò ad affrontare gli stessi studi anche per dimensioni maggiori, come nel caso delle quadriche. Poncelet usò l'omologia, da lui introdotta, ovvero una trasformazione proiettiva dello spazio che lascia fisso un punto e un piano, mentre tutti gli altri punti si muovono lungo le rette che li collegano al punto fisso. Con questo metodo osservò che una quadrica viene sempre trasformata in un'altra quadrica (fatto che non dimostrò) e che due quadriche collegate da un'omologia risultano inscritte nello stesso cono, incontrandosi in due coniche. Poncelet, inoltre, ricavò gli assi principali di una quadrica e andò a studiare le possibili intersezioni tra quadriche.

Mentre lo studio delle coniche, fin dall'antichità, si sviluppò soprattutto attraverso il metodo sintetico, la teoria delle quadriche nacque e si consolidò grazie al metodo analitico, che permise una classificazione completa delle diverse superfici. Un ruolo decisivo lo ebbe l'*Introductio in analysin infinitorum* di Leonhard Euler (1707-1783), il cui contributo fu determinante nel dare una struttura unitaria all'intera teoria. L'appendice dell'opera, infatti, «*rappresenta [...] la prima esposizione manualistica della geometria analitica solida. Superfici, sia algebriche sia trascendenti, vengono considerate dapprima in generale e poi suddivise in categorie. Troviamo qui, [...] per la prima volta, il concetto che le superfici di secondo grado costituiscono una famiglia di quadriche nello spazio analoghe alle sezioni coniche della geometria piana*» (Boyer, 1980). A partire, quindi, dall'equazione 1.6, Euler trovò che si otteneva un cono se si annullavano i termini di primo grado e il termine noto; inoltre, tramite le equazioni di traslazioni e rotazioni degli assi, riuscì a ricondurre una qualsiasi quadrica (non degenere) a cinque forme canoniche: ellissoide reale, paraboloide ellittico o iperbolico, iperboloide a una o a due falde [Figura 1.36].

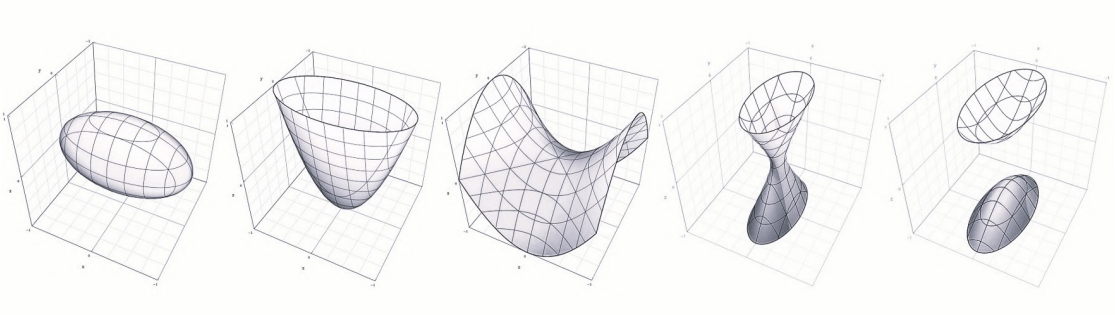


Figura 1.36: Grafici di quadriche non degeneri.

Foto di Sam Derbyshire, licenza CC BY-SA 3.0, via Wikimedia Commons (consultato il 7 agosto 2026)

### 1.3.1 Le quadriche nell'arte

In quanto superfici dello spazio tridimensionale, le quadriche hanno trovato il loro massimo impiego nella progettazione di numerose strutture architettoniche.
Un primo esempio di pregio assoluto risulta essere il *Pantheon* a Roma, opera di magnificente maestria ed equilibrio che risulta essere un manifesto delle straordinarie abilità tecniche e matematiche dei Romani.
Costruito tra il 112 e il 128 per volere dell'imperatore Adriano, è costituito da un cilindro in muratura sormontato da una cupola emisferica [Figura 1.37]. Mentre la superficie interna della cupola è decorata da cassettoni per alleggerirne il peso, la superficie esterna somiglia ad un tronco di cono che provoca un aumento considerevole dello spessore della calotta nella parte più bassa. Questo dimostra quanto i Romani sapevano di spinte e pesi delle strutture architettoniche; infatti, era noto che una cupola doveva «*sopportare il proprio peso e il carico accidentale, inclusi la pressione e il risucchio del vento, e, nei climi freddi, il peso della neve. [...] Tutti questi carichi vanno trasferiti sul terreno e, [...] ciò avviene lungo le linee verticali, o meridiani. La cupola assomiglia a una serie di archi [...] impostati attorno a una base circolare, che convergono nel punto più alto [...]. É l'azione che ne deriva lungo le sezioni orizzontali, o paralleli, a far sì che i meridiani non si aprano*» (Salvadori, 2007) [Figura 1.38]. I paralleli, agendo in compressione o in trazione per impedire che la cupola si deformi, producono due effetti: da una parte aumentano la rigidità dell'intera struttura, evitando che i meridiani, sot-

toposti alla compressione, si incurvino (permettendo di ridurre lo spessore della calotta) e dall'altra impediscono l'apertura della cupola alla base (eliminando così la necessità di contrafforti o tiranti).

Il senso di perfezione e magnificenza nel Pantheon viene dato dalla precisione geometrica che lo caratterizza: secondo alcune interpretazioni (si veda ad esempio Esposito e Michetti, Dicembre 1996), tutte le misure si basano su un numero in particolare, il numero aureo $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. C'è da chiedersi come fosse possibile per i mastri muratori del tempo eseguire operazioni con numeri irrazionali utili alla costruzione: qui risiede la forza dell'ingegno Romano. Nell'Urbe, infatti, era stato introdotto un sistema di misura ad hoc che permetteva di lavorare su questi particolari numeri che comparivano nella geometria[27]. L'elaborato algoritmo geometrico che permise ai Romani di costruire il tempio è dettagliatamente spiegato da Esposito e Michetti (Dicembre 1996): si inizia dalla misura del raggio esterno del cilindro pari a 18 *passus* (circa 27,6 m). Da questa misura si possono ricavare tutte le altre del tempio [Figura 1.39]: il raggio interno ($CD$), che coincide con il raggio della semisfera, si ottiene dividendo il raggio esterno ($CE$) per $\sqrt{\phi}$, un numero chiaramente irrazionale, ma che i Romani sapevano manipolare: $CD$ è, infatti, pari a 18·(1 *ulna* - 1 *digitus*). Da qui si innalza il cilindro di altezza pari al raggio minore ($BE = CD$). A seguire, si costruisce il triangolo diofantino $FGH$ (ovvero $\frac{FH}{GH} = \frac{GH}{GF} = \sqrt{\phi}$): da qui si ricava $GF$ = 18·(1 *ulna* - 1 *digitus*), $GH$ = 18 *passus* = 18 x 5 *pedes*, $FH$ = 18·(1 *passus* + 1 *sequipes* - 1 *digitus* - 1 *uncia*). Resta da determinare solo la curva di estradosso $NOO'N'$; si osserva che $NO$ e $N'O'$ sono segmenti paralleli a $GH$ e $G'H'$ (e sono i generatori del tronco di cono esterno), $OO'$, invece, è un arco di circonferenza centrata in C e di raggio $CO$: trovando la misura di $GO$ si possono ottenere le altre: $GO$ = 18·(2 *digiti* + 2 *unciae*), $CO$ = 18·(1 *ulna* + 1 *digitus* + 2 *unciae*).

Alcune osservazioni (Esposito & Michetti, Dicembre 1996):

---

[27] L'unità di misura era il *pes* (0,295-0,296 m). I principali multipli erano il *sequipes* (1,5 *pes*), il *bipes* (2 *pedes*), il *cubitus* (2,5 *pedes*), il *tripes* (3 *pedes*), l'*ulna* (4 *pedes*), il *passus* (5 *pedes*), il *decempeda* (10 *pedes*). I principali sottomultipli erano l'*uncia* (1/12 *pes*), la *semiuncia* (1/24 *pes*), il *digitus* (1/16 *pes*), il *semidigitus* (1/32 *pes*).

a) *la compagine muraria viene fedelmente delimitata in ogni sua parte dal tracciato grafico dell'algoritmo;*

b) *la retta GH intercetta il vertice del triangolo rappresentativo della sezione verticale dell'ambulacro;*

c) *la retta OO′ segna la linea d'attacco dei lacunari.*

---

Costruita all'inizio del VI secolo in appena cinque anni sotto l'impero di Giustiniano, *Haghìa Sophìa* ad Istanbul (Turchia) rappresenta appieno la fusione tra arte classica e bizantina che caratterizzò il periodo tardo-antico. Inizialmente pensata come basilica cristiana, nel corso dei secoli ha subito innumerevoli cambi d'uso, diventando chiesa ortodossa, moschea islamica e museo, per poi tornare ad essere una moschea dal 2020.
Il progetto si fonda su un grande spazio quadrato, ampio circa 62 metri per lato che contiene al suo interno un secondo quadrato, di dimensioni dimezzate, che funge da ambiente di sostegno per la cupola soprastante. Ai vertici di questo quadrato interno si innalzano quattro massicci pilastri, incaricati di reggere l'intera calotta. La trasformazione della base quadrata in una superficie circolare è ottenuta attraverso quattro pennacchi, che collegano i pilastri alla circonferenza di appoggio della cupola [Figure 1.40 e 1.41].
Focalizzando l'attenzione sulla cupola, si osserva che, almeno in origine, sarebbe stata una semisfera; tuttavia, «*subì un primo crollo nel 558 d.C. e fu interamente ricostruita nel 563; [...] in questa occasione venne realizzata una copertura [...] che era di circa 6 metri più ribassata. Poiché oggi la cupola presenta una forma molto prossima a una mezza sfera, con il centro posto a circa 7,93 metri sotto il piano di imposta [...] è probabile che la precedente cupola fosse emisferica ma avesse il centro di curvatura più in basso di quello attuale*» (Docci, Luglio 2003). La forma



Figura 1.37: *Pantheon* (112-128), interno. Roma.

Foto di Sarahhoa, licenza CC BY-SA 2.0, via Wikimedia Commons (consultato l' 8 agosto 2026)

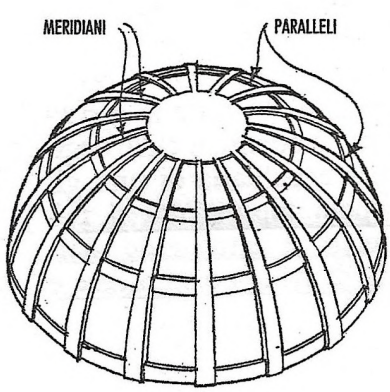



Figura 1.38: Meridiani e paralleli di una cupola.

(Salvadori, 2007)

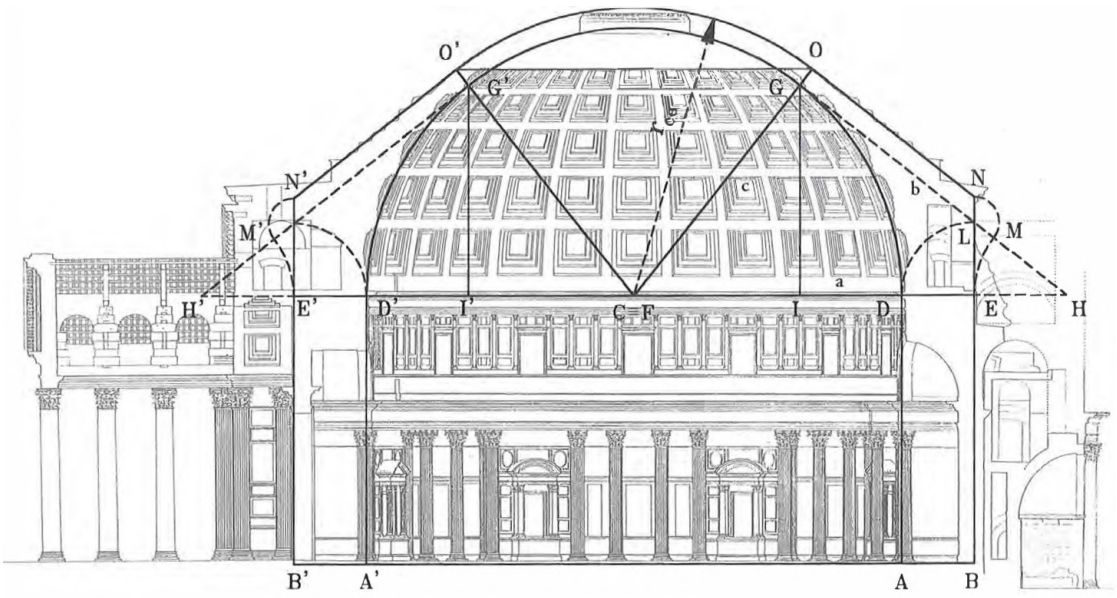



Figura 1.39: Sovrapposizione dello schema matematico sulla sezione longitudinale del Pantheon. (Esposito & Michetti, Dicembre 1996)

della cupola ha subito delle modifiche nel tempo: diversi crolli e cedimenti strutturali, infatti, hanno fatto sì che nel corso dei secoli il suo centro si sia abbassato di due metri circa. Il perimetro inoltre non risulta più circolare, quanto piuttosto un ovale.

Furono gli studi sulle architetture antiche che portarono F. Brunelleschi a spingersi oltre quello che si credeva potesse essere il limite umano e che gli permise di ultimare un compito ritenuto ormai impossibile: costruire la cupola di Santa Maria del Fiore a Firenze [Figura 1.42].
A chi ha impressa nella mente una sua immagine, potrebbe risultare strano che in una trattazione sulle quadriche si parli della cupola del Brunelleschi che non appare né una semisfera né una semi ellisse; eppure di motivazioni sulla sua presenza in questo capitolo ce ne sono almeno due: da un lato, essa rappresenta il più alto riferimento nella storia sull'ingegnosità tecnica dell'uomo, fonte primaria di tutte le coperture a cupola dei secoli successivi; dall'altro, come sarà chiaro a breve, non è possibile studiarne la statica senza tener conto di cerchi e coni.
Nel 1418 venne indetto dal comune di Firenze un concorso per il progetto della cupola del duomo. Nel concepirla occorreva tenere in considerazione che il tamburo su cui doveva poggiare era ottagonale e, inoltre, «*il modello in mattoni dell'intera chiesa [...] mostrava che le nervature d'angolo della cupola proposta avevano un profilo [...] "a quinto acuto"*[28]» (Salvadori, 2007).
Due anni dopo l'*Opera del Duomo* assegnò a Brunelleschi il compito di costruirla seguendo un suo progetto rivoluzionario. Innanzitutto progettò due cupole distinte, una interna più spessa e una esterna più sottile. Le due calotte erano legate da 8 costoloni (meridiani) rivestiti in marmo bianco e visibili dall'esterno e 16 costole più sottili non visibili. La cupola fu costruita contemporaneamente, un livello dopo l'altro, e ciò la rese una struttura autoportante; di conseguenza, «*nessuna struttura lignea fu usata per sorreggerla durante la costruzione [...]. La possibilità di costruire l'immensa mole di mattoni è dovuta a due fattori: all'impiego della*

[28] costituito da due archi circolari simmetrici i cui centri si trovano a un quinto di distanza dai due vertici della base.

*muratura a spinapesce; all'aver costruito una cupola di rotazione e non una semplice volta a padiglione*» (Cricco & Di Teodoro, 2012b). I mattoni, infatti, non sono posati orizzontalmente: ciascuno è inclinato verso un proprio centro di curvatura e si dispone lungo delle superfici coniche. Se si osserva la geometria di una calotta sferica, la si immagina come il risultato della rotazione nello spazio di un raggio (raggio di curvatura) [Figura 1.43a]: a ogni quota, il raggio genera un cono e la superficie di quel cono definisce l'inclinazione dei mattoni nella costruzione reale [Figura 1.43b]. Le intersezioni tra la semisfera ideale e i molteplici coni aventi il vertice sull'asse della cupola producono una serie di circonferenze. Nel caso di una cupola a pianta ottagonale, ogni livello non si legge come una singola curva, ma come un insieme di otto archi, corrispondenti ai diversi coni che partecipano alla costruzione complessiva [Figura 1.43c-d].

La cupola fiorentina ispirò enormemente Michelangelo, quando un secolo dopo fu chiamato da papa Paolo III a continuare la costruzione della nuova *Basilica di San Pietro in Vaticano*. Egli progettò una basilica a pianta centrale dominata da una gigantesca cupola che, come quella di Brunelleschi, è costituita da due calotte: quella interna emisferica, quella esterna (rivestita da lastre di piombo) allungata verso l'alto, per renderla più slanciata alla vista [Figura 1.44].

Come è stato già detto, il Barocco fu caratterizzato dalla riscoperta della linea curva e dalle forme geometriche innovative che fino ad allora erano rimaste quasi sconosciute. Se le circonferenze divennero ellissi (o al più ovali), le cupole divennero degli ellissoidi. Si citano due esempi esaustivi:

- Negli anni '30 del XVII secolo, a Francesco Borromini (1599-1667) vennero commissionati il dormitorio, il chiostro e la *Chiesa di San Carlo alle Quattro Fontane*. Iniziata nel 1638, la chiesa «*ha una pianta, basata sull'ellisse, costituita dal succedersi di rientranze e sporgenze [...]. Quattro arconi [...] riconducono la struttura alla perfetta imposta ovale della cupola. Nel complesso disegno [...] che la decora, croci, esagoni e ottagoni si fondono [...] con un potente effetto scultoreo*» (Cricco & Di Teodoro, 2012c) [Figura 1.46].

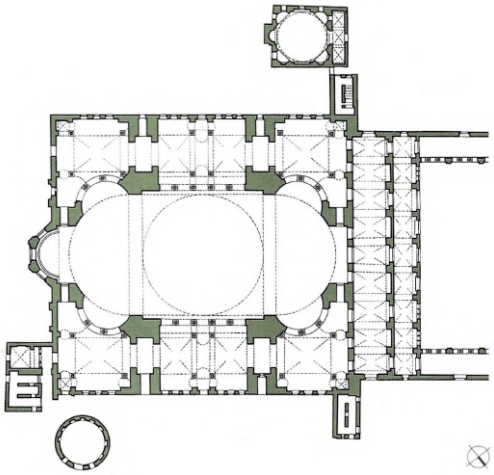


Figura 1.40: Pianta di *Haghìa Sophìa* (532-537). Istanbul.

(Cricco & Di Teodoro, 2012a)

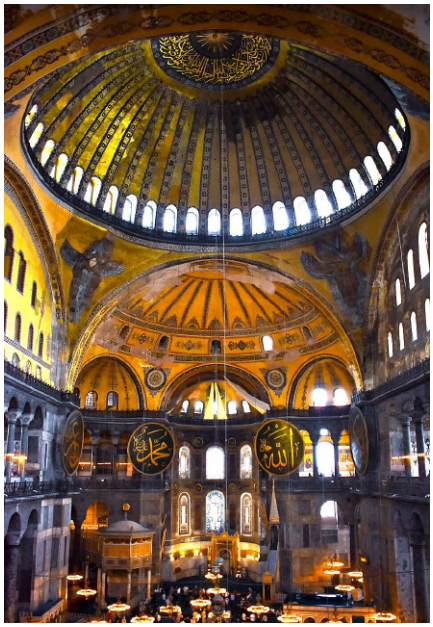


Figura 1.41: *Haghìa Sophìa* (532-537), interno. Istanbul.

Foto di Julian Lupyan, licenza CC0 1.0, via Wikimedia Commons (consultato il 10 agosto 2026)



Figura 1.42: F. Brunelleschi. *Cupola di Santa Maria del Fiore* (1420-1471). Firenze. Foto dell'autore, gennaio 2022

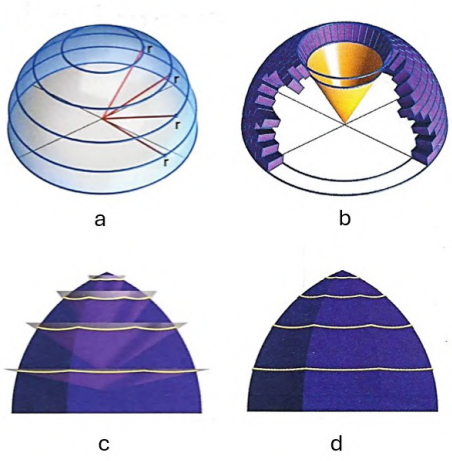



Figura 1.43: Parallelismo tra curva emisferica e cupola ottagonale.

(Cricco & Di Teodoro, 2012b)

Di notevole pregio risulta essere la facciata, solo iniziata da Borromini. Il profilo ondulato, che richiama l'andamento di una sinusoide, continua in altezza attraverso quattro colonne che ne scandiscono il ritmo verticale. Su di esse poggia una trabeazione che riprende e traduce la stessa curva del fronte [Figura 1.47].

- Uno dei capolavori del Barocco romano è la *Chiesa di Sant'Andrea al Quirinale* progettata da G. L. Bernini che, ispirandosi alla Chiesa di San Carlo di Borromini, scelse di basarsi su una pianta ellittica; rispetto al collega, però, inserì l'ingresso in corrispondenza del suo asse minore: «*questa scelta progettuale ha per conseguenza che il visitatore, entrando all'interno, si sente subito proiettato in uno spazio straordinariamente dilatato e avvolgente*» (Cricco & Di Teodoro, 2012c). L'aula liturgica è circondata da otto cappelle di cui quattro a loro volta ellittiche e da un'abside semiellittica. La cupola ne riprende la geometria, sviluppandosi come un ellissoide di rotazione ribassato che accompagna e amplifica la direzione longitudinale dello spazio. L'uso dell'ellissoide permette alla luce di scorrere sulle superfici in modo continuo e contribuisce a quell'effetto di "spazio in movimento" che caratterizza l'edificio [Figura 1.45].

In forte contrapposizione al Barocco, con l'Illuminismo l'arte si orientò verso la razionalità e l'ordine, privilegiando equilibri compositivi e riferimenti all'antichità classica. Tra i suoi massimi rappresentanti vi fu il francese Étienne-Louis Boullée (1728-1799). Grande ammiratore delle forme geometriche più semplici, egli esaltò in ogni modo possibile la perfezione della sfera. Il suo obiettivo era quello di "prendere in prestito" un soggetto classico e antico al fine di poterlo «*snaturare, ricreare, interpretare, rivitalizzare e piegare ad altri usi*» (Cricco & Di Teodoro, 2012c); convinto che ogni ornamento fosse superfluo, sosteneva che l'unica vera decorazione dovesse nascere dalle ombre profonde prodotte dall'incidenza della luce sulle strutture architettoniche: arrivò così a dichiarare di aver ideato una nuova "*architettura delle ombre e delle tenebre*".
Il suo progetto più emblematico è il *Cenotafio di Newton* [Figura 1.48]. La strut-



Figura 1.44: M. Buonarroti e continuatori. *Cupola della Basilica di San Pietro* (1588-1590). Vaticano, Roma.

Foto di Wolfgang Stuck, via Wikimedia Commons (consultato l' 11 agosto 2026)

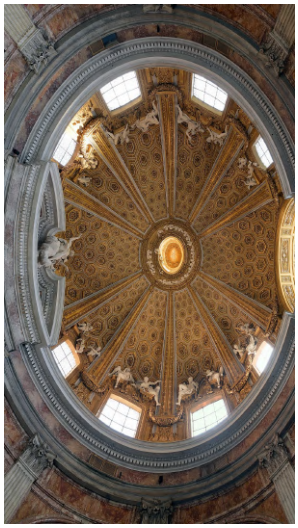


Figura 1.45: G. L. Bernini. *Sant'Andrea al Quirinale* (1658-1676), interno della cupola. Roma.

Foto di Architas, licenza CC BY-SA 4.0, via Wikimedia Commons (consultato l' 11 agosto 2026)



Figura 1.46: F. Borromini. *San Carlo alle Quattro Fontane* (1638-1667), interno della cupola. Roma.

Foto di Architas, licenza CC BY-SA 4.0, via Wikimedia Commons (consultato l' 11 agosto 2026)



Figura 1.47: F. Borromini. *San Carlo alle Quattro Fontane* (1638-1667), facciata. Roma.

Foto di Architas, licenza CC BY-SA 4.0, via Wikimedia Commons (consultato l' 11 agosto 2026)

tura è costituita da una gigantesca sfera cava «*sorretta da un terrazzamento che ha la funzione di assorbire le spinte eventuali della metà superiore e di sostenere l'emisfero inferiore [...]. L'interno, occupato dal solo sarcofago commemorativo, avrebbe offerto [...]: un cielo stellato durante il giorno (per l'esistenza di aperture sulla calotta che avrebbero filtrato i raggi del sole [...]); un effetto diurno, invece, durante la notte, quando il sarcofago [...] sarebbe stato illuminato da un grandissimo globo [...] sospeso*» (Cricco & Di Teodoro, 2012c). Così, all'interno del monumento veniva ricreato un universo in miniatura, modellato secondo le leggi che Newton aveva rivelato con la teoria della gravitazione universale.

Fino a questo momento sono state viste solo opere architettoniche, questo risulta inevitabile quando si parla di superfici nello spazio tridimensionale. Non volendo tralasciare, tuttavia, la pittura e la scultura si citano, a mo' di rappresentanti onorari, un pittore e uno scultore del secolo scorso che hanno utilizzato le quadriche (in particolare la sfera) nelle loro opere.

Tra i più celebri protagonisti del surrealismo, Salvador Dalí (1904-1989) si distinse per la capacità di fondere un'immaginazione visionaria e un interesse sempre crescente per la scienza. A partire dagli anni Cinquanta, la sua ricerca si orientò verso la struttura atomica della materia e le forme pure, aprendo la strada a opere in cui la figura si dissolve in elementi geometrici autonomi; è questo il caso dell'opera *Galatea delle sfere* [Figura 1.49]. In quest'opera il volto di Gala, la sua musa, viene frammentato in una costellazione di sfere perfette, come se l'immagine emergesse da una struttura tridimensionale. Le sfere, sospese nello spazio, costruiscono un volume virtuale che richiama la solidità delle superfici quadriche, trasformando il ritratto in un organismo geometrico tra figurazione e astrazione.

Tra i più rinomati scultori italiani del secolo scorso vi è Arnaldo Pomodoro (1926-2025) autore di numerose opere metalliche dalle più svariate forme geometriche: sfere, piramidi, prismi e dischi, «*la cui levigatissima superficie, come una pelle delicata, è squarciata da crepe e aperture che mettono in mostra un interno ispido e minutamente frastagliato, come di acuminati ingranaggi*» (Cricco & Di Teodoro, 2012d). In *Sfera con sfera* [Figura 1.50] collocata dinanzi alla se-

de dell'ONU a New York, all'involucro esterno perfettamente liscio e a specchio si contrappone l'interno «*irto di rilievi e asperità, sorta di frammenti di materia frantumati da poderose ruote dentate [...]. La doppia sfera, allora, uniformemente luminosa in superficie e densa d'ombre al suo interno, diventa una grandiosa metafora dell'animo umano, che dietro un'apparenza di serenità può spesso celare i tormenti più terribili e segreti*» (Cricco & Di Teodoro, 2012d).

Tornando all'architettura, i primi anni del XX secolo furono caratterizzati dall'*Art Nouveau*, un movimento che rifiutava la rigidità degli stili classici per abbracciare linee più fluide, motivi naturali e una concezione più organica dello spazio. In questo clima di rinnovamento, l'architettura iniziò a esplorare forme nuove e strutture che sembravano crescere come organismi viventi, anticipando una sensibilità nuova verso la geometria più complessa. A questa corrente artistica apparteneva il genio catalano Antoni Gaudí (1852-1926), artista visionario che portò l'*Art Nouveau* a una radicalità senza precedenti: la sua architettura, pur condividendo l'interesse per la linea naturale, si spinse oltre: egli sviluppò, infatti, un linguaggio basato su superfici curve complesse, molte delle quali riconducibili a paraboloidi, iperboloidi e superfici rigate.
Il suo capolavoro è senza dubbio il *Tempio Espiatorio della Sagrada Familia*, sul cui progetto lavorò per oltre 40 anni, dedicandogli completamente i suoi ultimi quindici anni di vita. L'opera è un trionfo di sperimentazione spaziale e innovazione strutturali; la ricerca non si limita alla linea organica o alla decorazione ispirata alla natura: qui Gaudí costruisce un vero e proprio sistema architettonico autonomo, fondato su geometrie complesse e su una concezione dello spazio che anticipa la modernità. Con una pianta a croce latina, l'aspetto che più contraddistingue l'opera è la verticalità; l'autore progettò una struttura culminante in un sistema di 18 torri a forma di paraboloide ellittico: dodici dedicate agli apostoli, distribuite in gruppi di quattro sulle tre facciate (otto delle quali già completate); quattro riservate agli evangelisti, disposte attorno al presbiterio; una torre sopra il catino absidale dedicata alla Vergine Maria; infine la torre centrale, consacrata a Gesù Cristo, inaugurata il 10 giugno scorso. Con i suoi 172 metri di altezza,

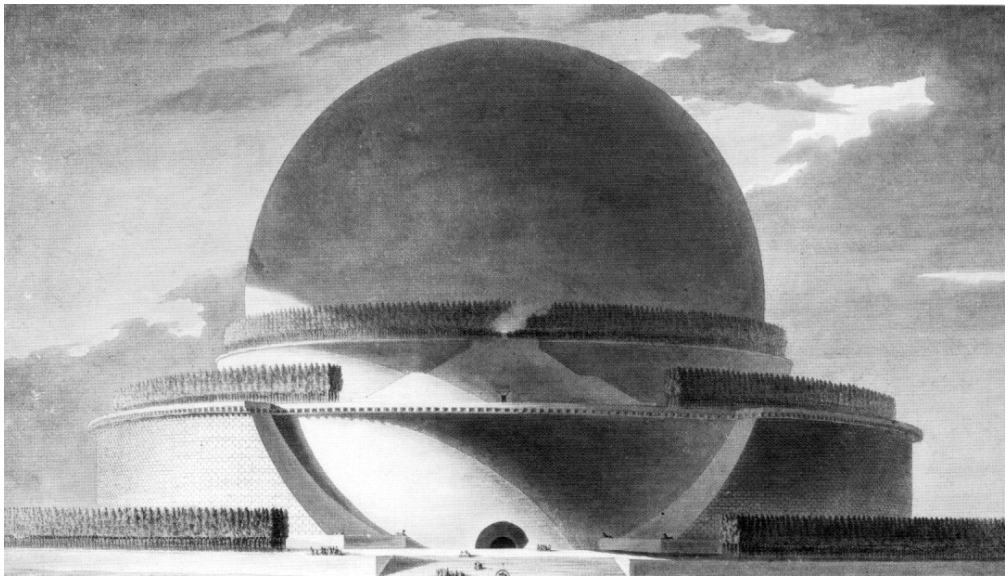


Figura 1.48: É.-L. Boullée. *Cenotafio di Newton. Esterno di notte* (1784). Inchiostro e acquerello, Bibliothèque Nationale, Cabinet des Estampes, Parigi.

Foto via Wikimedia Commons (consultato l' 11 agosto 2026)



Figura 1.49: S. Dalì. *Galatea delle Sfere* (1952). Dalí Theatre and Museum, Figueres (Spagna).

Foto via https://www.salvador-dali.org (consultato il 12 agosto 2026)



Figura 1.50: A. Pomodoro. *Sfera con sfera* (1991). Sede del'ONU, New York.

Foto di ikiya, licenza CC BY-SA 2.0, via Wikimedia Commons (consultato il 12 agosto 2026)

quest'ultima ha reso la basilica la chiesa più alta del mondo, portando a termine l'ambiziosa visione verticale di Gaudí [Figura 1.51].

Le fusioni geometriche risultano caratterizzanti per i pinnacoli sormontanti le torri degli apostoli, come mostrato in figura [1.52]: ciascuno di questi è «*in pietra, rivestito di "mosaico di Venezia" [...]. Si tratta di una costruzione [...] formata da un fusto che culmina, ad un'altezza di circa 100 metri in due piastre, l'una inclinata rispetto all'altra [...]. Nel fusto possono essere individuate tre parti. Quella inferiore è caratterizzata da tre grandi stelle [...] e da una serie di piani triangolari e quadrangolari [...]. Questa parte va a terminare in un nodo centrale formato da calotte sferiche che emergono da quadrati o esagoni secondo una costruzione simmetrica rispetto a un piano inclinato [...]. Da questo nodo nasce la parte finale [...] sinuosa [...], formata da piani triangolari [...]. Le piastre sono raccordate [...] da una superficie paraboloide*[29] *e presentano incassati [...] all'esterno tre petali, anch'essi risultati da un alternarsi di superfici paraboloidi concave e convesse*» (Mezzetti, Dicembre 1992).

Diversa è la geometria della torre della Vergine Maria; qui Gaudí e i progettisti che ne hanno proseguito la costruzione hanno adottato gli iperboloidi a una falda, sia come base per la stella luminosa che sormonta la torre [Figura 1.53], sia per questioni fisiche all'interno della torre. L'iperboloide, essendo una superficie rigata, può essere costruito a partire da una retta che ruotando rispetto a un asse genera la superficie. Da un punto di vista strutturale, essa permette di avere una resistenza elevata con spessori ridotti; inoltre, genera delle cavità regolari che favoriscono la ventilazione naturale e soprattutto modulano la luce che filtra attraverso la struttura [Figura 1.54].

La stessa superficie, per le stesse motivazioni, viene più volte ripetuta per coprire interamente le tre navate della basilica; come è ormai chiaro, gli iperboloidi «*riproducono quel dinamismo della natura che l'architetto andava cercando, ma anche il rigore geometrico che contraddistingue l'ordine e la proporzione nella scansione ritmica che governa l'impianto architettonico*» (Crescenzi, 2025) [Figura 1.55].

Come se questo non bastasse, anche nella nuovissima torre di Gesù Cristo l'i-

[29] iperbolico

perboloide è la superficie dominante: al suo interno, per tutta la sua altezza un gigantesco e sottile paraboloide contiene al suo interno una scala a chiocciola che porta fino in cima; inoltre, all'interno del braccio superiore della croce posta sulla sommità, quindi nel punto più alto della basilica, è stata posta un'opera scultorea dell'artista italiano Andrea Mastrovito (1978-). Essa è una scultura in vetro dell'*Agnello di Dio*, avvolta da ventiquattro raggi che generano l'iperboloide [Figura 1.56]. Coma afferma l'artista stesso, gli iperboloidi «*sono forme matematiche [...] capaci di diffondere la luce in modo dinamico, e costituiscono uno dei fondamenti della Sagrada Familia; rappresentano però anche qualcosa di ulteriore, come ho compreso grazie all'astrofisico Marco Bersanelli quando afferma che la luce è il principio che rende visibile il cosmo e, al tempo stesso, uno degli elementi portanti della basilica. È lui a notare, esaminando i disegni dell'edificio, come il profilo della torre richiami sorprendentemente la curva di Friedmann-Lemaître, che descrive l'evoluzione dell'espansione dell'universo nel tempo*» (Arenzi, 9 giugno 2026).

Per concludere si passano in rassegna alcune architetture contemporanee i cui profili si fondano sulle superfici quadriche.

Félix Candela (1910–1997), architetto e ingegnere spagnolo, è una delle figure più importanti nella storia dell'architettura del Novecento per aver trasformato una superficie matematica, il paraboloide iperbolico, in linguaggio costruttivo. Candela trovò nel cemento armato un materiale capace di costruire forme complesse con mezzi semplici, sfruttando la logica delle superfici rigate, che permettevano di ottenere curvature doppie tramite elementi rettilinei; questa caratteristica gli consentiva di realizzare strutture sufficientemente economiche, leggere e veloci da montare, ottenendo coperture sottili ma molto resistenti. Egli dimostrò che quella forma era una soluzione ingegneristica che distribuiva i carichi in modo continuo, evitando concentrazioni di tensione e permettendo di coprire grandi spazi con quantità minime di materiale. Tra le sue opere più celebri vi è il ristorante *Los Manantiales*, manifesto di questa sua ricerca [Figura 1.57]. Situata a Xochimilco, nei pressi di Città del Messico, la struttura è composta da quattro paraboloidi iperbolici che si intersecano formando una copertura sospesa a "fiore di loto". Ogni



Figura 1.51: A. Gaudì. *Sagrada Familia* (1882-presente). Barcellona.

Foto della Fondazione Sagrada Família, https://sagradafamilia.org (consultato il 13 agosto 2026)

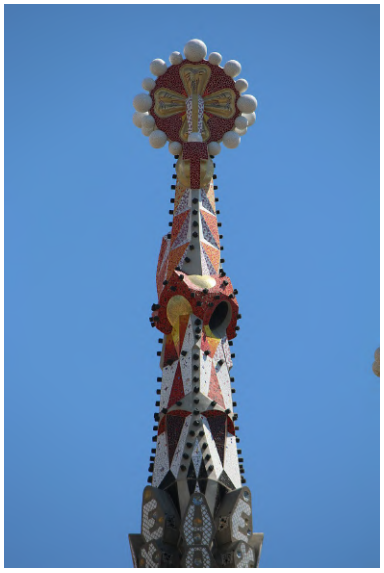


Figura 1.52: A. Gaudì. *Sagrada Familia* (1882-presente), particolare di un pinnacolo. Barcellona.

Foto di FrDr, licenza CC BY-SA 4.0, via Wikimedia Commons (consultato il 13 agosto 2026)



Figura 1.53: A. Gaudì. *Sagrada Familia* (1882-presente), pinnacolo della torre della Vergine Maria. Barcellona.

Foto di Fondazione Sagrada Família, https://sagradafamilia.org (consultato il 13 agosto 2026)



Figura 1.54: A. Gaudì. *Sagrada Familia* (1882-presente), interno della torre della Vergine Maria. Barcellona.

Foto della Fondazione Sagrada Família, https://sagradafamilia.org (consultato il 13 agosto 2026)

guscio è costituito da una lamina sottile di cemento armato, modellata da rette che generano una curvatura complessa: la forma, quindi, contribuisce alla stabilità dell'intera struttura; infatti, l'intersezione dei paraboloidi crea delle nervature naturali, senza bisogno di travi aggiuntive, mentre la continuità della superficie garantisce una distribuzione omogenea dei pesi.

La *Cattedrale metropolitana* di Brasília, progettata da Oscar Niemeyer (1907-2012) e inaugurata nel 1970, è uno dei capolavori del modernismo brasiliano [Figura 1.58]. L'edificio è costituito da sedici colonne di cemento armato, ciascuna del peso di circa 90 tonnellate e legate da un anello, che si innalzano con una forma iperbolica fino a formare una struttura aperta verso il cielo. L'iperboloide a una falda che si viene a creare permette di ottenere una doppia curvatura, conferendo alla cattedrale una sorprendente leggerezza visiva e una notevole efficienza strutturale: le colonne, disposte radialmente, sostengono l'intero edificio senza bisogno di pareti portanti, creando un vasto spazio interno privo di pilastri. Tra le colonne si inseriscono grandi pannelli di vetro blu, verdi e bianchi che filtrano la luce naturale, trasformando la navata in un ambiente luminoso e quasi etereo, in netto contrasto con il tunnel sotterraneo che porta all'ingresso e che prepara il visitatore al "passaggio" simbolico dalla terra alla luce. La grande novità della *Cattedrale* di Niemeyer risiede nel fatto che essa «*è una delle prime cattedrali moderne concepite come struttura pura. Dove le chiese storiche avvolgevano le loro cornici in muratura, immagini e ornamenti, Niemeyer spogliava tutto fino a farne rimanere solo la geometria portante — e poi trasformò quella geometria nell'intera esperienza architettonica e spirituale. Struttura, simbolo e spazio divennero un unico atto*» (Amogh, 2026).

Anche nei primi decenni del XXI secolo le quadriche rivestono un ruolo fondamentale per la progettazione di nuovi edifici. Ne è un esempio il grattacelo sito in 30 St Mary Axe a Londra, progettato dalla Foster + Partners, studio di architettura leader in Europa fondato dal luminare Norman Foster (1935-). Il grattacielo, inaugurato nel 2004 e soprannominato *The Gherkin* ("Il cetriolo"), è costituito da un grande volume ellissoidale che si restringe verso l'alto, generando una forma aerodinamica che riduce le turbolenze del vento (grazie a una pannellizzazione



Figura 1.55: A. Gaudì. *Sagrada Familia* (1882-presente). Barcellona.

Foto della Fondazione Sagrada Família, https://sagradafamilia.org (consultato il 13 agosto 2026)



Figura 1.56: A. Mastrovito. *Agnus Dei* (2026). Sagrada Familia, Barcellona.

Foto di Fondazione Sagrada Familia, https://sagradafamilia.org (consultato il 13 agosto 2026)



Figura 1.57: F. Candela. *Ristorante Los Manantiales* (1951-1958). Xochimilco, Messico.

Foto di Dge, licenza CC BY-SA 3.0, via Wikimedia Commons (consultato il 13 agosto 2026)



Figura 1.58: O. Niemeyer. *Cattedrale metropolitana* (1958-1970). Brasilia.

Foto di Tissiana de A. de Souza, licenza CC BY-SA 4.0, via Wikimedia Commons (consultato il 14 agosto 2026)

triangolare dei vetri) e migliora l'efficienza energetica della struttura (grazie alla creazione di sei pozzi interni che fungono da camini per aria calda e fredda) [Figura 1.59].

L'ellissoide è anche la forma a cui è ricorso l'architetto italiano Massimiliano Fuksas (1944-) per la realizzazione del *Nardini Research Centre and Auditorium* a Bassano del Grappa, opera commissionata dalla famiglia Nardini, rinomata per la produzione di grappa [Figura 1.60]. Fuksas, appunto, ha riprodotto un «*grande alambicco di vetro dedicato alla distilleria di grappa*» (Emmer, 2009), costituito in superficie da due strutture ellissoidali, realizzate con involucri trasparenti ad alta prestazione che ospitano i laboratori del centro di ricerca e un ambiente sotterraneo, configurato come una cavità utilizzata come auditorium. Nessuno potrebbe spiegare meglio dell'autore stesso l'idea progettuale (Emmer, 2009):

---

*La superficie di bolle è composta da una doppia pelle completamente trasparente che permette di focalizzare la vista a 360 gradi sullo splendido scenario del paesaggio montano del Montegrappa.*
*Due segni: uno raffinato, elegante, tecnologico, immateriale. L'altro brutale, dove la materia, il cemento armato, diventa epifania della forma.*
*Un contenente e un contenuto, positivo e negativo in continua tensione [...] immersi nella loro energia di segno contrario che spinge verso l'alto le bolle vitree dei laboratori e sprofonda nel sottosuolo l'auditorium con la sua pesante corposità.*

---

Per concludere questo capitolo, si ritorna alla superficie eccellente, la «*Divina Sfera*» (Emmer, 2009), andando ad analizzare due opere rappresentative:

- La chiesa madre di Gibellina si inserisce all'interno del processo di ricostruzione del paese a seguito del terremoto del Belice (1968). Riprendendo le idee illuministe di Boullée, l'architetto Ludovico Quaroni (1911-1987) progettò una struttura che fondeva forme quadrate e forme circolari; «*il rapporto umano e divino viene affidato alle forme simboliche: il quadrato, frammentato, replicato e articolato in una complessità che è tipica dell'uomo, si confronta con la*

*purezza assoluta della sfera, rappresentazione "dell'eternità senza principio e senza fine" che [...] richiama la purezza stereometrica delle cupole arabe siciliane*» (Colistra & Mediati, Giugno 2022). Dunque, al quadrato della pianta complessiva e dell'aula liturgica, si contrappone un'enorme sfera centrale a simboleggiare l'elevamento verso il divino [Figura 1.61]. L'architetto, inoltre, giocò con le proporzioni e il numero aureo; infatti, se si suddivide il lato dell'aula liturgica in rapporti aurei, il segmento minore che si ottiene coincide con il raggio della sfera e la diagonale dell'aula coincide con il lato del quadrato circoscritto all'anfiteatro esterno che circonda la sfera. In altezza, si osserva che l'altezza dell'aula coincide con la sezione aurea del diametro della sfera.

- Appena tre anni fa è stato inaugurato *Sphere* a Las Vegas, una struttura iper-tecnologica e immersiva che combina un involucro sferico con un sistema di *media*-facciata ad altissima risoluzione, capace di trasformare l'intera superficie esterna in un display LED continuo. All'interno, la sala principale è configurata come una semisfera dotata di uno gigantesco schermo *high tech* che avvolge completamente gli spettatori, integrato con sistemi avanzati di acustica e simulazioni ambientali [Figura 1.62].



Figura 1.59: N. Foster e K. Shuttleworth. *30 St Mary Axe* (2001-2003). Londra. Foto di Paste, via Wikimedia Commons (consultato il 14 agosto 2026)

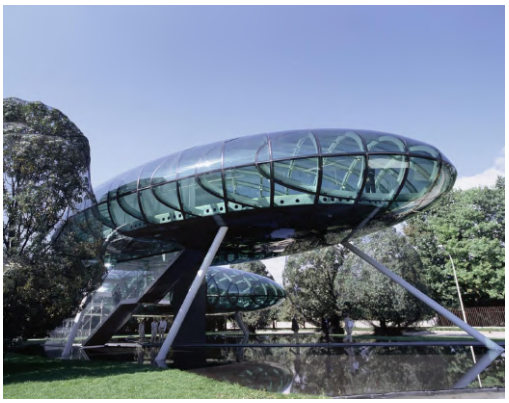


Figura 1.60: M. e D. Fuksas. *Nardini Research Centre and Auditorium* (2002-2004). Bassano del Grappa, Vicenza.

Foto dall'Archivio Fuksas, https://fuksas.com (consultato il 14 agosto 2026)



Figura 1.61: L. Quaroni. *Chiesa madre* (1970-1972). Gibellina, Trapani.

Foto della D. G. Creatività Contemporanea, https://censimentoarchitetturecontemporanee.cultura.gov.it (consultato il 14 agosto 2026)

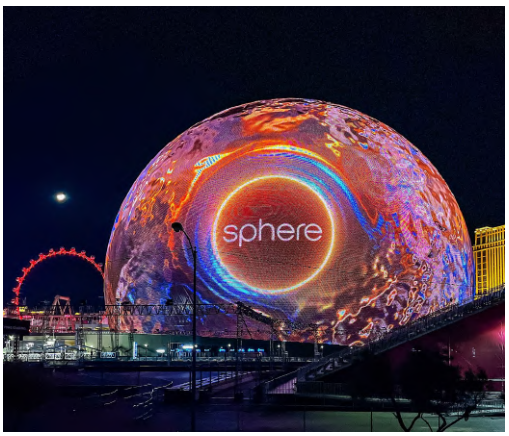



Figura 1.62: Populous. *Sphere* (2019-2023). Las Vegas, USA.

Foto di Harold Litwiler, licenza CC BY-SA 2.0, via Wikimedia Commons (consultato il 14 agosto 2026)

# Capitolo 2

# La dinamica delle spirali

Sin dall'alba dei tempi dell'umanità, la spirale appare come un segno ricorrente: incisa sulla pietra, dipinta sui vasi, scolpita nei monumenti megalitici. La sua forza simbolica attraversa epoche e culture diverse, come se l'umanità avesse riconosciuto in questa forma un principio universale di movimento e trasformazione. È una figura che non si chiude mai, che invita lo sguardo a seguirla verso un centro oppure verso l'infinito.

Già nella Preistoria, infatti, insieme a raffigurazioni concrete di oggetti, persone, animali, comparivano figure astratte, geometriche che assumevano un valore forse mistico o semplicemente decorativo. Tra queste figure assumono una discreta importanza le spirali, soprattutto «*a Malta, nel bacino mediterraneo in generale, nella penisola balcanica, in tutta l'Europa centrale*» (D'Amore, 2015). Le più antiche spirali ritrovate sono probabilmente «*quelle raffigurate in una grotta di La Pileta (13.000-10.000 a.C.) vicino a Gibilterra. Si tratta forse della primitiva raffigurazione di un serpente*» (Filocamo, 2017); questa rappresentazione mostra probabilmente la più antica associazione nota come «*"simbolismo del serpente": la doppia spirale infatti può esser vista come la raffigurazione di un serpente arrotolato su se stesso in due sensi contrari*» (Sala & Cappellato, 2003).

Facendo un salto di alcuni millenni, si arriva alle rappresentazioni, permeate di esoterismo, della popolazione Egizia (soprattutto dal 2000 a.C. in poi), per cui l'uso della spirale è legato alle decorazioni delle tombe sepolcrali dei faraoni. Si

arriva poi alle civiltà cicladiche e cretese, nelle quali la spirale inizia a perdere il proprio valore mistico, per diventare una scelta puramente decorativa ed estetica. Ne sono esempi, le anfore di stile Kamares [Figura 2.1], databili nel XIX secolo a.C.



(a) (b)

Figura 2.1: Anfore in stile Kamares del XIX secolo a.C. con decorazioni a spirale.
Foto di ArchaiOptix, licenza CC BY-SA 4.0, via Wikimedia Commons (consultato il 21 luglio 2026)

Tutt'oggi non è chiaro come tali decorazioni si siano diffuse tra le civiltà antiche; infatti, «*attorno al III millennio a.C. la spirale è diffusa pressoché su tutto il mondo abitato [...]. Il bacino del Mediterraneo ne è ricco, ma anche l'Europa interna lo è (Trajan, nell'attuale Romania, per esempio; ma anche tutta la penisola scandinava); e che dire delle ceramiche con fregi spiraliformi del Belucistan e dell'Asia sud-orientale (risalenti al 3100 a.C.)?*» (D'Amore, 2015). Secondo D'Amore (2015) «*potrebbe essere la dimostrazione da tempo cercata delle massicce migrazioni avvenute dall'Europa nord-orientale verso tutto il resto del mondo*».

## 2.1 Le spirali nella matematica

Il primo trattato matematico sulle spirali risale allo scienziato siracusano Archimede.
Tra i trattati recuperati da Heiberg nel manoscritto di Costantinopoli figurava anche l'opera *Sulle Spirali*, una delle testimonianze più importanti della geometria

archimedea dedicata a questa affascinante curva. «*É consuetudine antica legare al nome di Archimede la spirale da lui studiata [...]. Pappo, 500 anni più tardi, fu indotto ad attribuire erroneamente a Conone di Samo, amico di Archimede, la scoperta. In effetti, Archimede narra di avere inviato a Conone gli enunciati di alcuni teoremi sulla spirale, ma non c'è motivo per togliere ad Archimede la paternità della curva*» (Cresci, 1998).

Fisicamente, la **spirale di Archimede** può essere definita nel seguente modo (Loria, 1930b):

---

*Se una retta si muove in un piano rotando attorno ad un punto fisso con velocità uniforme e se un punto mobile percorre questa retta pure*[1] *con velocità uniforme partendo da quel punto fisso, il punto mobile descriverà una curva passante per il punto origine del movimento e facente infinite circonvoluzioni attorno ad esso.*

---

In un piano cartesiano $Oxy$, utilizzando le coordinate polari, la curva può essere espressa tramite l'equazione:

$$\rho = a\theta \tag{2.1}$$

dove $\rho$ rappresenta la distanza del «*punto mobile*» dall'origine $O$, $a$ una costante positiva e $\theta$ l'angolo che si forma tra la retta che ruota e il semiasse positivo delle ascisse.

Come si evince dall'equazione (2.1), $\rho$ e $\theta$ sono grandezze direttamente proporzionali. Di conseguenza, se consideriamo, per esempio, i punti A e B della figura 2.2 si ha che $\rho_B = 2\rho_A$. In generale, la distanza tra due punti successivi, allineati sulla stessa retta passante per il polo $O$ è costante e vale $2\pi a$.
L'interesse di Archimede sulla spirale sembra essere scaturito dalla volontà di risolvere almeno uno dei tre famosi problemi della geometria greca; in particolare, l'introduzione della spirale di Archimede permetteva di risolvere (senza riga e com-

[1] = anch'essa

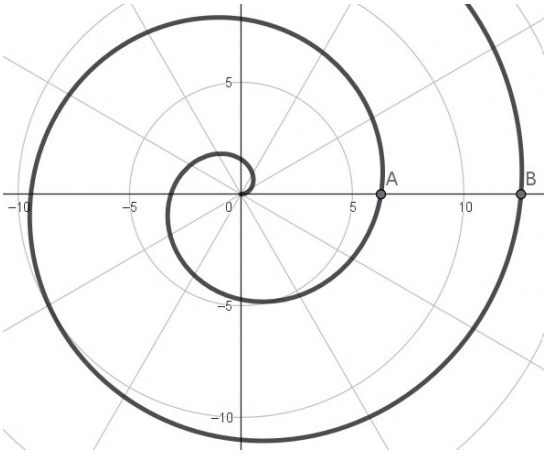



Figura 2.2: Grafico della spirale di Archimede con a=1.

passo) l'annoso problema della trisezione di un angolo [Figura 2.3].
Si vuole suddividere l'angolo $B\hat{O}A$ in tre angoli congruenti: si dispone l'angolo così che abbia il vertice in $O$ e uno dei lati coincidenti con la semiretta $OA$. Sia $B$ l'intersezione tra l'altro lato dell'angolo e la spirale e si triseca il segmento $OB$ in tre segmenti congruenti (procedimento noto già a Euclide): si trovano così i punti $G$ e $H$. Si tracciano ora gli archi di circonferenza centrati in $O$ e di raggi $OG$ e $OH$. Gli archi intersecheranno la spirale nei punti $K$ e $J$, rispettivamente. Le semirette $OJ$ e $OK$ sono le semirette che trisecano l'angolo di partenza $B\hat{O}A$.

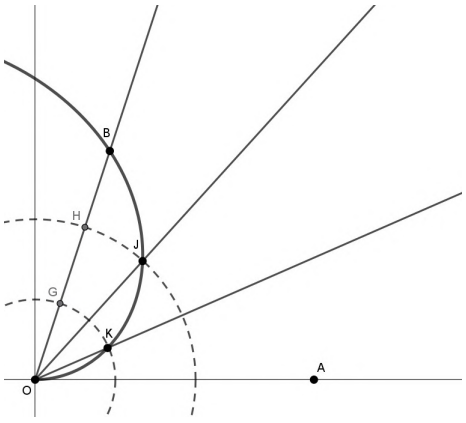



Figura 2.3: Trisezione di un angolo tramite una spirale.

Per introdurre nuovi tipi di spirale occorre fare un balzo di alcuni secoli nella storia, per arrivare a studiosi illustri come Fermat, Descartes, i Bernoulli, Eulero.

Fermat, di cui si sono già visti gli studi sulle coniche, visse tutta la sua vita nella provincia di Tolosa, impiegando il tempo libero nello studio dei testi classici, inclusi quelli a carattere scientifico e matematico. Questa consuetudine lo portò ad approfondire la geometria e la teoria dei numeri, ambiti nei quali riuscì a ottenere risultati di straordinaria originalità. Fermat «*non amava pubblicare i risultati dei suoi svaghi matematici; essi sono generalmente annotati a margine dei libri [...]. Per lo più i teoremi da lui scoperti sono semplicemente enunciati, con la dichiarazione di avere trovato la loro dimostrazione, che tralascia. É un modo di procedere quasi da oracolo*» (Cresci, 1998), eppure «*l'autore merita credito senza riserve: infatti tutti i teoremi che Fermat enuncia possono essere, e sono stati, rigorosamente dimostrati*» (Cresci, 1998); tra questi teoremi, non si può non citare il cosiddetto "Ultimo teorema di Fermat" che occupò i pensieri di molti matematici successivi; solo nel 1994 Andrew Wiles (1953-) ha dimostrato che non è possibile trovare tre numeri interi $a, b, c$ positivi che risolvono l'equazione $a^n + b^n = c^n$ con $n > 2$.
Il *modus operandi* di Fermat è ben evidente dalle sue stesse parole (Tannery & Henry, 1894): «*Questo è, per sommi capi, il resoconto di quanto ho presunto attorno ai numeri. L'ho scritto solo perché temo mi mancherà il piacere di stendere e mettere a punto tutte queste dimostrazioni e questi metodi. In ogni caso questa indicazione potrà essere utile agli studiosi perché trovino da se stessi ciò su cui non mi dilungo... Può darsi che i posteri mi saranno grati di aver fatto loro sapere che gli studiosi dell'antichità non sapevano tutto!*».
La curiosità di Fermat non si ridusse alla teoria dei numeri, ma permeò anche la geometria, come si è visto. In particolare, Fermat provò a generalizzare lo studio di alcune curve come coniche e, appunto, spirali.

In un piano cartesiano $Oxy$, utilizzando le coordinate polari, la **spirale di Fermat** può essere espressa tramite l'equazione:

$$\rho^2 = a^2\theta \tag{2.2}$$

Come si nota immediatamente, la spirale di Fermat si distingue dalla spirale di

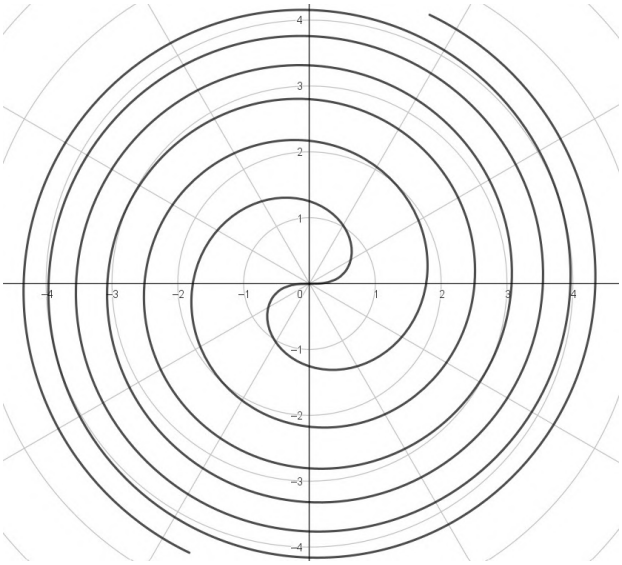


Figura 2.4: Grafico della spirale di Fermat con a=1.

Archimede per la sua legge di crescita quadratica di $\theta$ rispetto a $\rho$. Infatti, l'equazione (2.2) implica che il raggio aumenti proporzionalmente alla radice quadrata dell'angolo, conferendo alla curva una struttura via via più compressa rispetto alla spirale di Archimede, la cui crescita è lineare. La spirale di Fermat presenta inoltre una evidente simmetria centrale: emergono due rami speculari che si avvolgono in direzioni opposte attorno al polo, generando una configurazione perfettamente simmetrica rispetto a $O$.

La spirale di Fermat è, in realtà, un caso particolare di **spirale parabolica**, che ha equazione generica

$$\rho^n = a^n \theta \tag{2.3}$$

Fermat scrive delle spirali paraboliche «*in una lettera diretta a Padre Mersenne, addì 3 giugno 1636, nella quale, non soltanto ne promette una trattazione completa, ma enuncia alcune proprietà di quella corrispondente all'ipotesi* $n = 2$*, da lui supposta essere la* curva ammirabile *che, al dire di Pappo, venne inventata dal geometra Menelao d'Alessandria*» (Loria, 1930b).

Si consideri ora l'equazione

$$\rho = \frac{a}{\theta} \tag{2.4}$$

che a differenza delle precedenti ha l'angolo $\theta$ al denominatore (e $a > 0$). Anch'essa è una spirale che si incontra per la prima volta in una memoria del matematico francese Pierre Varignon (1654-1722), che la presentò all'Accademia di Parigi nel 1704, ma venne pubblicata solo nel 1722. Questa curva fu poi scoperta anche da Jean Bernoulli (1667-1748), che in una lettera scritta al collega J. Hermann nel 1710 la chiamò **spirale iperbolica** [2.5].

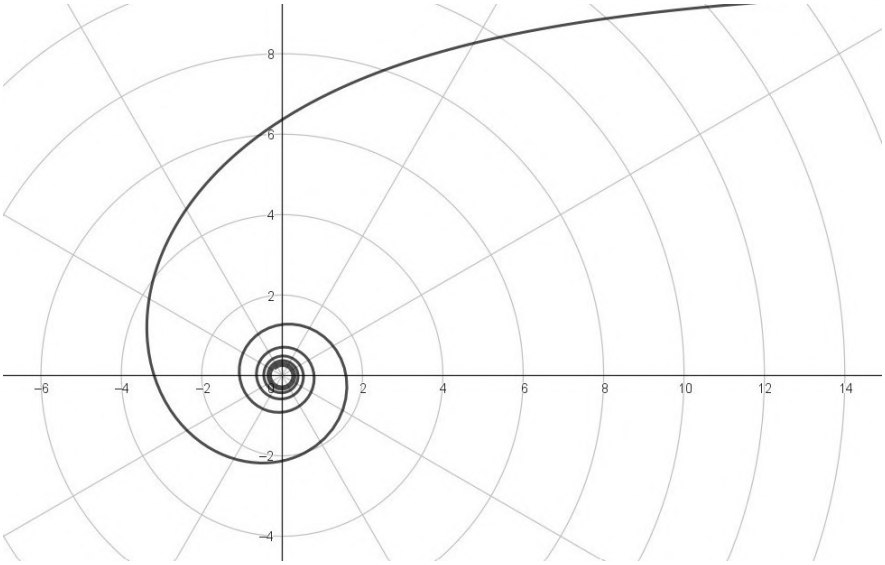



Figura 2.5: Grafico della spirale iperbolica con a=10.

Tre anni dopo, Bernoulli (1742) scrisse:

---

*... cosicché non a sproposito questa spirale può essere chiamata iperbolica, oppure anche archimedea inversa; poiché essa ha in comune con la spirale archimedea ordinaria questo fatto: che in entrambe le curve le distanze dei punti dal polo sono proporzionali agli angoli percorsi. Nella spirale archimedea classica tale proporzionalità è diretta, mentre nella nostra è inversa.*

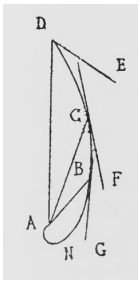
---

Si osserva che per $\theta$ che tende a $+\infty$, il raggio vettore $\rho$ diventerà sempre più piccolo, avvicinandosi asintoticamente a 0. Una grande differenza con la spirale di Archimede è dunque l'impossibilità di stabilire il punto di partenza della spirale iperbolica. Inoltre, poiché $\lim_{\theta\to 0^+} \tan\theta = 0$, segue che la curva tende alla direzione angolare $\theta = 0$. In termini di geometria polare, ciò implica che la spirale possiede un asintoto polare di direzione $\theta = 0$[2].

### 2.1.1 La spirale logaritmica

---

12 settembre 1638




*Se A è il centro della Terra, e ANBCD è la spirale, tracciate le rette AB, AC, AD e le altre simili: vi è la stessa proporzione tra la curva ANB e la retta AB, che tra la curva ANBC e la retta AC, o tra ANBCD e AD, e così via. E, se si tracciano le tangenti DE, CF, BG, ecc., gli angoli $A\hat{D}E$, $A\hat{C}F$, $A\hat{B}G$, ecc. saranno uguali.*

---

In questa lettera indirizzata a Padre Mersenne (Adam & Tannery, 1898), il matematico francese R. Descartes spiegava una proprietà fondamentale di una nuova spirale da lui studiata e che successivamente verrà chiamata da Varignon **spirale logaritmica** a causa della sua particolare equazione in coordinate polari:

$$\rho = ae^{\theta\cot(\alpha)} \tag{2.5}$$

con $a > 0$, $\alpha$ l'angolo formato da $\rho$ con la tangente alla spirale in quel punto, che, come ricorda Descartes, è costante per ogni punto della spirale logaritmica.

[2] Una curva polare $\rho(\theta)$ ammette un asintoto polare di direzione $\theta_0$ se $\lim_{\theta\to\theta_0} \rho(\theta) = +\infty$

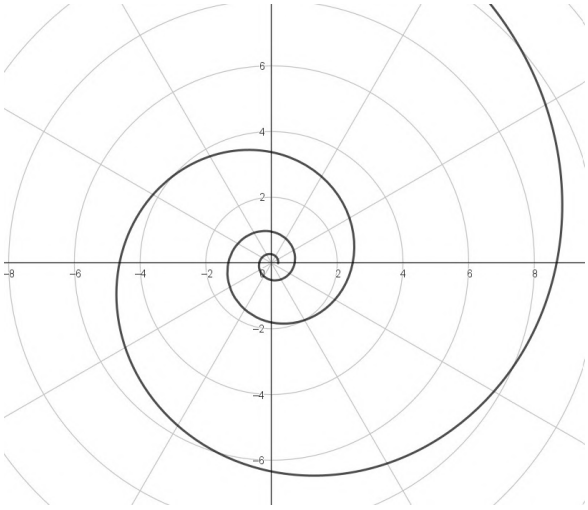


Figura 2.6: Grafico della spirale logaritmica con a=1/5 e $\cot(\alpha) = 1/5$.

Alcune spirali logaritmiche hanno origini molto antiche: si deve tornare al tempo di Euclide (III secolo a.C. circa) e dei suoi Elementi. Nel II libro, infatti, Euclide riuscì a risolvere con metodi geometrici l'equazione $ax+x^2 = a$, costruendo una figura molto particolare utilizzata ancora oggi [Figura 2.7]:

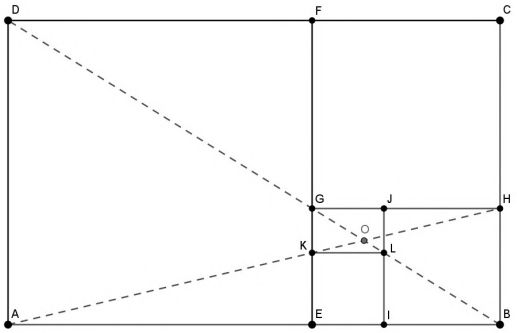



Figura 2.7: Costruzione iterativa di rettangoli aurei.

1. Si consideri un rettangolo aureo[3] $ABCD$ e sia E il punto su AB tale che $AD \cong AE$. Si manda la perpendicolare ad $AB$, passante per $E$, che interseca

[3] = tale che il rapporto tra lato maggiore e lato minore sia $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

$CD$ in $F$. Così, si è ottenuto il quadrato $AEFD$ e il rettangolo (ancora aureo) $EBCF$.

2. Si considera ora il rettangolo aureo $EBCF$ e si determina il punto G che divide FE in proporzioni auree[4]. Si manda la perpendicolare a $FE$, passante per $G$, che interseca $BC$ in $H$. Così, si è ottenuto il quadrato $GHCF$ e il rettangolo (ancora aureo) $EBHG$.

3. Si considera il rettangolo aureo $EBHG$ e ripetendo le costruzioni precedenti, si formeranno il quadrato $IBHJ$ e il rettangolo aureo $EIJG$, e così via...

Se si tracciano i segmenti $AH$ e $BD$, si può dimostrare che il loro punto di intersezione $O$ è polo di una particolare spirale logaritmica, passante per i punti $A$, $F$, $H$, $I$, $K$, ... Supponendo che $O$ sia l'origine di un sistema di riferimento, la suddetta **spirale aurea** ha equazione:

$$\rho = a\phi^{\frac{2\theta}{\pi}} \tag{2.6}$$

con $a > 0$, $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ numero aureo.

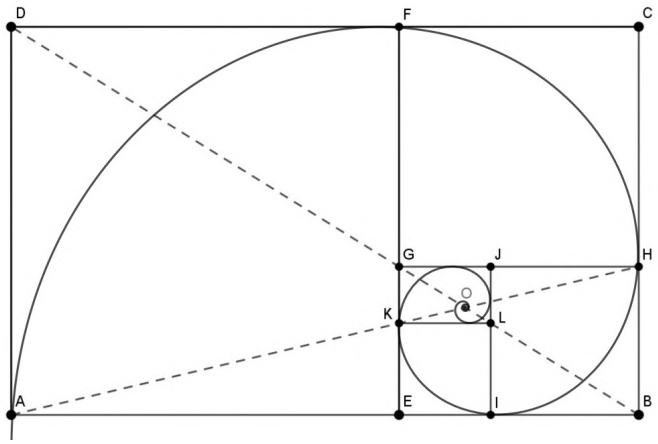



Figura 2.8: Grafico della spirale aurea con a=1.

Per come è stata costruita, risulta immediato osservare che il polo O è un punto asintotico, così come accadeva per la spirale iperbolica; infatti, se $\theta$ tende a $-\infty$

[4] Analogamente, tale che $FC \cong FG$.

allora $\rho$ tenderà a 0.

Come si è detto, Descartes era riuscito a trovare l'equazione della spirale logaritmica considerando la sua proprietà caratterizzante, secondo cui in tutti i suoi punti, l'angolo $\alpha$ formato dal raggio vettore $\rho$ e dalla tangente è costante; contemporaneamente, l'italiano Evangelista Torricelli (1608-1647) era riuscito a dimostrare che la lunghezza totale della spirale logaritmica, misurata a partire dal punto $P$ in cui $\theta = 0$ e $\rho = a$, lungo il suo svolgimento a ritroso verso il polo $O$ (nel caso $\cot(\alpha) > 0$), è esattamente uguale alla lunghezza della tangente polare[5] della spirale nel punto $P$.

Ma colui che, più di tutti, ne rimase particolarmente affascinato fu sicuramente Jacques Bernoulli (1655-1705), che «*dimostrò parecchie inedite proprietà della spirale: ad esempio che l'evoluta di una spirale logaritmica è una spirale logaritmica uguale*» (Cresci, 1998). Bernoulli arrivò addirittura a riaccendere il valore mistico ed esoterico celato nella spirale. Infatti, scrisse (Bernoulli, maggio 1692):

---

*Ma poiché questa meravigliosa spirale mi affascina tanto per le sue peculiari e ammirevoli proprietà, al punto che la sua contemplazione mi diletta a tal punto da non saziarmi, ho pensato che non potesse essere usata impropriamente per rappresentare simbolicamente diverse cose. Poiché produce sempre una spirale simile a sé stessa, indipendentemente da come venga girata, srotolata o irradiata, potrebbe essere un emblema simile in tutto e per tutto alla prole dei suoi genitori; una figlia che somiglia moltissimo alla madre; oppure (se non è proibito adattare la questione ai misteri dell'eterna Verità della Fede) un'ombra di una sorta di generazione eterna del Figlio, che è come l'immagine del Padre e da lui, come Luce che emana dalla Luce, esiste nella stessa forma. Oppure, se preferite, dato che la nostra* curva mirabilis *in sé rimane sempre costantemente uguale a sé stessa, potrebbe essere un simbolo di forza e costanza nelle avversità; o persino della nostra Carne dopo varie trasformazioni, e infine persino della morte stessa, un simbolo della sua resurrezio-*

[5] = segmento $PT$ dove $T$ è il punto d'intersezione tra la tangente $t$ alla spirale in $P$ e la retta $n$, perpendicolare a $OP$ passante per $O$.

*ne nello stesso numero; tanto che, se oggi si usasse imitare Archimede, sarei lieto di far incidere questa spirale sulla mia tomba con l'epigrafe:* Trasformato nella stessa dimensione, risorgerò.

---

Ciò che Bernoulli non aveva previsto è che lo scalpellino incaricato dell'esecuzione della pietra tombale avrebbe realizzato un'incisione della spirale in forma approssimativa, tale da non poter essere qualificata come spirale logaritmica, ma, nel migliore dei casi, come una spirale di Archimede [Figura 2.9].




Figura 2.9: Particolare della tomba di Jacques Bernoulli, Basilea.

Foto di Wladyslaw Sojka, Licenza Arte Libera, via Wikimedia Commons (consultato il 21 luglio 2026)

### 2.1.2 Altre curve spiraliformi

Per concludere, si passano in rassegna altre due curve spiraliformi: il *lituo* e la *clotoide*.

«*Un bastone ricurvo e senza nodi, che chiamarono lituo*»(Cresci, 1998): così Tito Livio descrive il lituo, il bastone cerimoniale degli àuguri, caratterizzato dalla tipica estremità ricurva. La stessa forma ricorre anche nel pastorale dei vescovi.

La curva matematica che descrive il profilo di tali oggetti fu chiamata **lituo** nel 1722 dal matematico inglese Colin Maclaurin (1698-1746). In verità, questa curva è nota anche con il nome *tromba*, così chiamata da Girolamo Saccheri (1667-1733), in onore di Orazio e Virgilio che chiamavano *lituus* una tromba di ottone ricurva.

In un piano $Oxy$, la sua equazione in coordinate polari è la seguente:

$$\rho^2\theta = a^2 \tag{2.7}$$

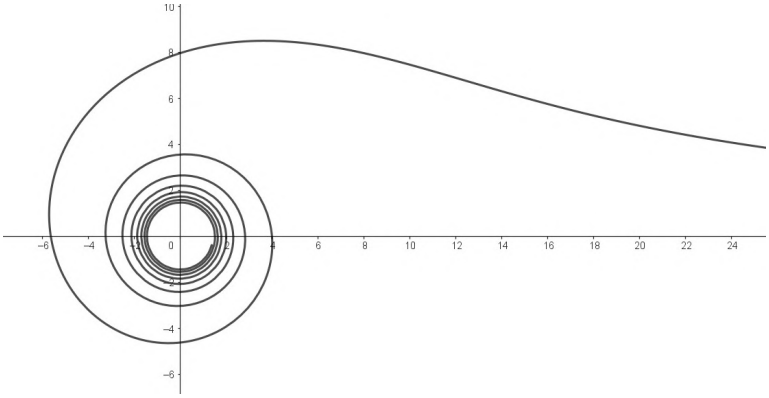


Figura 2.10: Grafico del lituo con a=10

Si può osservare che, anche in questo caso, il polo $O$ è un punto asintotico.

Jacques Bernoulli aveva lasciato in sospeso un problema, ovvero quello di trovare una curva la cui curvatura in ogni punto fosse proporzionale alla lunghezza dell'arco. Questo problema fu risolto nel 1744 da Euler che trovò la curva che soddisfaceva la richiesta.

Nel 1818 Augustin-Jean Fresnel (1788-1827) introdusse gli integrali che oggi portano il suo nome per descrivere la diffrazione della luce. Senza sapere del lavoro di Euler, egli scoprì che la rappresentazione grafica di tali integrali produceva esattamente la stessa curva trovata da Eulero, che è quindi rappresentata dalle seguenti

equazioni:

$$\begin{cases} x = \int_0^t \cos(\frac{\pi u^2}{2})\, du \\ y = \int_0^t \sin(\frac{\pi u^2}{2})\, du \end{cases} \tag{2.8}$$

Nel 1874 il fisico francese Alfred Marie Cornu (1841-1902) formalizzò questa connessione e utilizzò la spirale come strumento grafico per calcolare l'intensità di diffrazione. Per questo motivo, la curva fu chiamata *spirale di Cornu*.

Qualche anno dopo, il matematico italiano Ernesto Cesàro (1859-1906) propose il nome **clotoide**, derivato da Cloto, la Parca che tiene il filo della vita. Il nome non è causale: la curva, infatti, sembra un filo che si avvolge progressivamente, con curvatura crescente [Figura 2.11]. Cesaro fu il primo a dare una interpretazione geometrica moderna della curva e a introdurre il termine nella matematica.

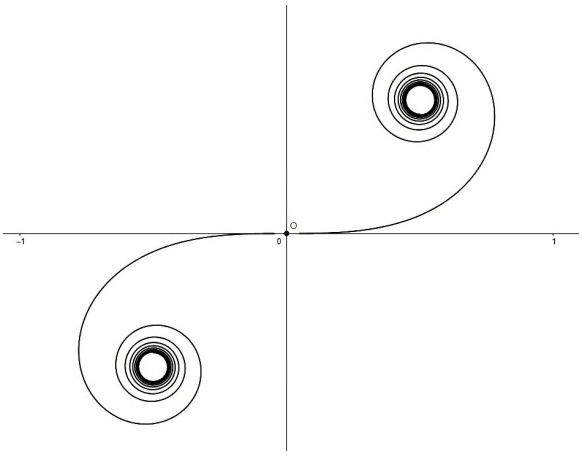


Figura 2.11: Grafico della clotoide

In questo caso, è evidente la simmetria rispetto all'origine $O$, che è anche un punto di flesso per la curva. Essa presenta inoltre due punti asintotici; infatti, portando $t$ a $+\infty$ si ha:

$$\int_0^{+\infty} \cos\left(\frac{\pi u^2}{2}\right)\, du = \int_0^{+\infty} \sin\left(\frac{\pi u^2}{2}\right)\, du = \frac{1}{2} \tag{2.9}$$

Quindi il punto $(\frac{1}{2};\frac{1}{2})$ è punto asintotico. Analogamente, per $t \to -\infty$ si ottiene il simmetrico $(-\frac{1}{2};-\frac{1}{2})$.

## 2.2 Le spirali nell'arte

Le spirali sono tra le forme più ricorrenti in natura; rappresentano spesso un modo con cui molti sistemi naturali si organizzano. Per questo motivo, nel corso della storia, diverse culture hanno attribuito alla spirale significati simbolici legati alla crescita, al movimento, al cambiamento e all'armonia della natura. La spirale non è solo una figura decorativa, ma un modello che emerge spontaneamente quando un sistema ruota, si espande o si organizza in modo efficiente (si ricordi, per esempio, la spirale di Archimede).
Nel caso dei cicloni, ad esempio, la forma spiraliforme nasce dalla rotazione delle masse d'aria e dalla distribuzione dell'energia. È sorprendente osservare come un fenomeno atmosferico terrestre possa ricordare, nella sua struttura, le galassie a spirale: due realtà lontane che, però, sembrano seguire principi matematici simili.
In biologia, le spirali compaiono in molte forme. La conchiglia del *Nautilus* è uno degli esempi più noti: cresce seguendo proporzioni costanti, che le permettono di mantenere stabilità e funzionalità. Non stupisce che diversi studiosi l'abbiano considerata un modello di perfezione naturale: per esempio, il grande architetto statunitense Frank Lloyd Wright (1867-1959) ha affermato:«*Io sono un ateo. Non capisco quanti vedono la presenza di Dio nella Natura, la sospetto nelle conchiglie*» (Sala & Cappellato, 2003).
Anche la spirotromba[6] delle farfalle, arrotolata su sé stessa quando non è in uso, mostra come la spirale possa essere una soluzione pratica per proteggere una struttura delicata. Nel mondo vegetale, la disposizione dei semi nei girasoli, nelle margherite e in molte altre piante segue spesso schemi spiraliformi. Queste configurazioni permettono di sfruttare al meglio lo spazio e la luce, mostrando come la

[6] = tubo lungo e sottile che permette alle farfalle di succhiare il nettare dai fiori.

spirale sia anche un principio di efficienza biologica.



Figura 2.12: Spirali in natura.
Foto in alto a sinistra di J Brew, licenza CC BY-SA 2.0, via Wikimedia Commons (consultato il 21 luglio 2026)
Foto in alto a destra della NASA, via Wikimedia Commons (consultato il 21 luglio 2026)
Foto in basso a sinistra di Chris 73, licenza CC BY-SA 3.0, via Wikimedia Commons (consultato il 21 luglio 2026)
Foto in basso a destra di ESA/Hubble, licenza CC BY-SA 3.0, via Wikimedia Commons (consultato il 21 luglio 2026)

Come si è detto, la particolare forma della spirale le ha permesso di diffondersi in tutto il globo terrestre sin dalla preistoria. Si possono citare le incisioni rupestri ritrovate nella grotta di Djerat (Algeria del Sud) risalente al 6000 a.C. [Figura 2.13] e le incisioni di Nazca (Perù) [Figura 2.14], «*dove sono presenti un numero incredibile di linee (oltre 13.000) tracciate sul terreno dai popoli precolombiani. Le linee formano più di 800 disegni; si tratta soprattutto di profili stilizzati di animali comuni nell'area [...]. É presente anche una scimmia, la cui coda forma una spirale di Fermat*» (Filocamo, 2017) . Secondo l'archeologa Maria Reiche (1903-1998), le rappresentazioni di Nazca costituiscono una «*mappa stellare impostata su "basi fisse" di geometria megalitica. Questa mappa utilizzerebbe le spirali al fine di segnalare delle costellazioni raggruppate in modo immaginario e che i Peruviani*

*antichi concepivano [...] corredandole simbolicamente ad animali e piante*» (Sala & Cappellato, 2003).

Un altro esempio di spirale, nuovamente utilizzata per rappresentare la coda di un animale (questa volta un pavone), ma sicuramente più precisa delle precedenti, è presente nella porta est dello Stupa di Sanchi (India), risalente al tempo del re-imperatore Aśoka Moriya il Grande (304-232 a.C.) [Figura 2.15].

Tornando all'America Latina, nel Museo del Oro di Bogotà (Colombia) sono esposti innumerevoli oggetti e tesori in oro che le popolazioni autoctone riuscirono a sottrarre alla razzia europea durante l'età coloniale. Molti manufatti raffigurano figure antropomorfe o richiamano animali reali e mitologici; altri, invece, presentano forme geometriche, tra cui spiccano spirali singole e doppie [Figura 2.16]. Nelle culture precolombiane, la spirale singola veniva spesso associata al soffio vitale che regola il mondo. La spirale doppia, invece, richiamava una certa dualità (vita e morte, maschile e femminile, ...) e rifletteva una concezione ciclica del tempo, in cui ogni trasformazione è parte di un processo continuo di rinascita.

Anche in Europa, le curve spiraliformi hanno avuto una notevole diffusione nella storia dell'arte. Per esempio, la figura [2.17] mostra una sfinge etrusca «*il cui profilo a spirale presente nell'ala ha il magico potere di trasformare il mostro in figura quasi mistica e di straordinaria bellezza*» (Sala & Cappellato, 2003).

In ultimo, non si può non citare l'utilizzo, forse, più conosciuto della spirale nell'arte antica: le volute nei capitelli dell'antica Grecia. Il capitello[7] ionico è caratterizzato da due grandi volute simmetriche terminanti in un "occhio centrale". Si può notare come il profilo possa essere approssimato a una spirale di Cornu, con la voluta destra simmetrizzata rispetto all'asse orizzontale[8].
Nel Rinascimento, grandi artisti, attratti dallo studio dell'antichità, cercarono di trovare delle possibili costruzioni delle volute dei capitelli ionici; tra questi, si cita la costruzione trovata da Andrea Palladio (1508-1580), nel suo trattato del 1570 *I*

[7] = elemento architettonico che costituisce la parte terminale di una colonna, con funzione di collegamento fra la colonna stessa e la struttura soprastante.

[8] In realtà, le volute non sono spirali propriamente dette, quanto, invece, archi di circonferenze di raggi e centri diversi. Questo è studiato successivamente da diversi artisti, tra cui Palladio.



Figura 2.13: Incisione rupestre nella grotta di Djerat (Algeria del Sud).

Foto di Fondazione Passaré, licenza CC BY-SA 3.0, via Wikimedia Commons (consultato il 21 luglio 2026)



Figura 2.14: Incisione su terreno raffigurante una scimmia a Nazca (Perù).

Foto di Diego Delso, licenza CC BY-SA 4.0, via Wikimedia Commons (consultato il 21 luglio 2026)



Figura 2.15: Particolare della Porta Est dello Stupa di Sanchi (India).

Foto di Photo Dharma, licenza CC BY-SA 2.0, via Wikimedia Commons (consultato il 21 luglio 2026)



Figura 2.16: Pettorale spiraliforme in oro (1300-1600 circa), Museo del Oro, Bogotà. (D'Amore, 2015)



Figura 2.17: Sfinge in pietra (570-560 a.C.), Museo archeologico nazionale di Chiusi, Siena. Foto di riccardo, licenza CC BY-SA 2.0, via Wikimedia Commons (consultato il 21 luglio 2026)

*quattro libri dell'Architettura* [Figura 2.18]:

---

*Su un reticolo* $70x80mm$ *con moduli da* $10mm$*, si traccia un cerchio di diametro* 10*. Al suo interno si disegna una successione di quattro quadrati inscritti uno nell'altro [...]. Si prolungano i lati* 12, 23, 34, 41, 56, 67, 78 *e* 85*. Quindi con centro in 1 si traccia l'arco da* 1a *fino a* 2a*; analogamente si disegnano gli archi della prima spirale centrando nei punti* $2, 3, ...8$*. L'ultimo arco di questa serie termina nel punto* 0a*, da cui parte la seconda spirale ottenuta centrando in* $4, 3, 2$ *e* 1 *fino ai rispettivi punti* 4b, 3b, 2b *e* 1b*. Si conclude con il cerchio di centro* 0 *passante per* 0a. (Sammarone, 2010)

---

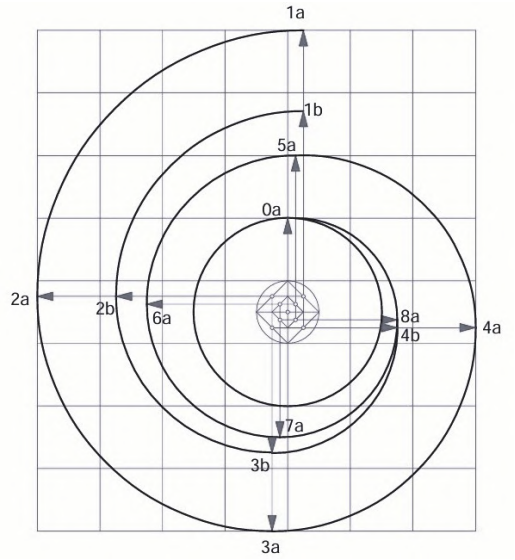



Figura 2.18: Costruzione delle volute di un capitello ionico secondo Palladio. (Sammarone, 2010)

Come si evince dalla costruzione appena svolta, Palladio va ad individuare ben 12 centri per costruire le volute ioniche; ma egli non fu l'unico a studiare le volute di epoca greco-romana (seguendo le orme del sommo maestro antico Vitruvio). La difficoltà maggiore risiedeva proprio nella ricerca dei centri degli archi, dal momen-

to che lo stesso Vitruvio era rimasto molto vago in tal senso.
Uno studio recente ha riproposto l'annosa questione sulla ricerca di indizi da cui far risalire il livello di conoscenza dei romani in merito alla costruzione approssimata della voluta. Il mistero, tuttavia, resta insoluto; dunque «*è lecito pensare che nella realizzazione dei capitelli ionici e delle relative volute si facesse ricorso a regole predefinite, a proporzionamenti dati, a costruzioni geometriche ricorrenti ma che [...] alla teoria dovesse accompagnarsi l'esperienza dello scalpellino chiamato a risolvere problemi di natura geometrico-proporzionali su manufatti di dura pietra*» (Inglese, Dicembre 2017).

Nel corso dei secoli la spirale ha suscitato notevole interesse anche tra i pittori; un esempio significativo in epoca moderna è rappresentato da Vincent Van Gogh (1853–1890), un artista caratterizzato da una personalità molto forte e a tratti contraddittoria. Van Gogh era complessivamente «*un uomo solitario e istintivo, dai sentimenti forti e violenti e che, forse, solo il fratello Theo seppe sempre capire e amare di un amore dolce e incondizionato [...]. La consapevolezza di essere incompreso, l'ansia di capire se stesso e di trovare i modi attraverso cui esprimere la propria interiorità [...] lo fecero piombare dapprima in una profonda depressione e, in secondo tempo, lo condussero a una forma di alienazione mentale che gli procurava tremende crisi durante le quali perdeva ogni contatto con la realtà e che, ulteriormente aggravatasi, lo portò al suicidio in un giorno di luglio del 1890*» (Cricco & Di Teodoro, 2012c).

Tra la primavera del 1887 e l'inverno del 1889, Van Gogh dipinse innumerevoli autoritratti seguendo correnti impressioniste e divisioniste, dalle quali era rimasto particolarmente colpito per l'uso della luce e dei colori. L'utilizzo di pennellate spiraliformi è ben manifesto nel suo *Autoritratto* del 1889, oggi conservato al Museo d'Orsay di Parigi [Figura 2.19]. In quest'opera le curve spiraliformi nello sfondo sembrano essere quasi lame di fuoco grigio-verdi e «*potrebbero rappresentare l'atmosfera ossessiva che attanagliava la sua mente e che lo condusse al suicidio*» (Sala

& Cappellato, 2003), nonostante lui stesso scrisse al fratello Theo di notare che «*la mia fisionomia si è calmata, benché lo sguardo sia più vago di prima*» (Van Gogh, 1984).

Un altro esempio emblematico è, probabilmente, la più famosa opera di Van Gogh: *Notte stellata* sempre del 1889 [Figura 2.20]. É un'opera che «*si coglie con immediatezza, di grande fascino, dal forte potere evocatore, apparentemente semplice, ma di natura assai complessa*» (Cricco & Di Teodoro, 2012c). Il paesaggio rappresentato, con un cipresso in primo piano a rappresentare probabilmente la ricerca dell'artista per una pace consolatrice, anche se «*a prima vista idilliaco e riconciliante, in effetti parla anche un'altra lingua, quella potente delle visioni romantiche di una natura terribilmente grandiosa*» (Cricco & Di Teodoro, 2012c). Il cielo sembra animato da sfere infuocate di stelle, trascinate in una massa densa e cupa che si increspa in onde enormi e spiraliformi, come se fosse mossa da una forza irresistibile.

Qualche anno dopo, un altro pittore europeo fu profondamente affascinato dalla spirale: l'austriaco Gustav Klimt (1862-1918), le cui opere sono facilmente riconoscibili dall'utilizzo di foglie d'oro per decorare gli sfondi. Questa scelta venne adottata dall'artista «*dopo il viaggio a Ravenna e la visione dei mosaici bizantini dell'ultima capitale dell'Impero romano d'Occidente [...]. L'oro elargito nei dipinti di Klimt sembra suggellare in un sepolcro prezioso la fine di un'epoca segnando gli ultimi giorni dell'Impero asburgico*» (Cricco & Di Teodoro, 2012d).

Klimt decorò tantissime opere con le spirali, mettendole in relazione simbolica con la figura della donna. Le spirali di Klimt non si limitano a decorare lo sfondo o gli abiti, ma diventano un'estensione simbolica dell'energia interiore delle donne che l'artista rappresenta. Nelle sue opere, la donna è spesso concepita come presenza magnetica e vitale: le spirali traducono visivamente questa dimensione, rendendo percepibile un movimento che è non solo corporeo, ma cosmico.
Un primo esempio fondamentale risulta essere il *Fregio Stoclet*, commissionato

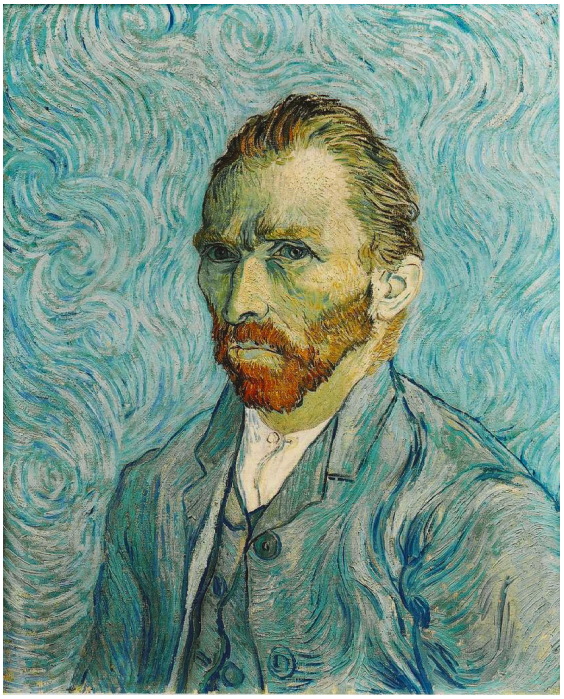


Figura 2.19: V. Van Gogh. *Autoritratto* (1889). Olio su tela, Museo d'Orsay, Parigi. Foto di Musée d'Orsay, via Wikimedia Commons (consultato il 21 luglio 2026)



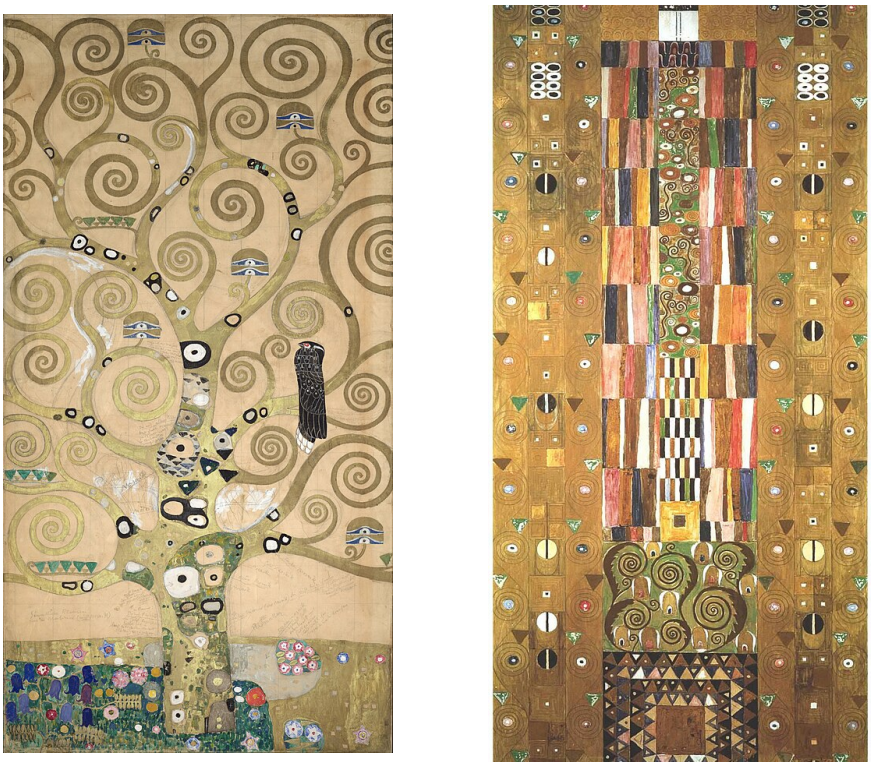
Figura 2.20: V. Van Gogh. *Notte stellata* (1889). Olio su tela, MoMA, New York. Digitalizzazione di Google Art Project, via Wikimedia Commons (consultato il 21 luglio 2026)

dall'industriale Adolphe Stoclet come decorazione per la sala da pranzo della sua nuova residenza a Bruxelles. In particolare, le spirali che avvolgono la figura della Donna Attesa [Figura 2.21a] esprimono la tensione emotiva tra controllo e abbandono. La spirale diventa un segno che vibra attorno al corpo, quasi a suggerire un campo energetico che lo circonda. Allo stesso modo, nella Donna Abbracciata [Figura 2.21b], le spirali si intrecciano con i motivi geometrici, creando un contrasto tra la rigidità dell'ordine e la fluidità del movimento, che riflette la complessità femminile secondo Klimt. Filocamo (2017) osserva che nella figura sulla destra, «*l'uomo ha la tunica decorata da ellissi. Sulla sinistra la donna con una tunica ornata da triangoli guarda la coppia con espressione gelosa [...]. I triangoli aguzzi sul vestito della donna gelosa ci fanno ricordare che [...] tra i platonici la forma composta da quattro triangoli con angoli appuntiti è il simbolo del fuoco. Sulla tunica dell'uomo invece troviamo le ellissi che, oltre a trasmettere un'idea di tranquillità e morbidezza, sono state scelte al posto del cerchio forse perché hanno due fuochi e quindi richiamano l'idea di coppia*».
Ma la spirale assume ancora più risonanza nell'Albero della Vita [Figura 2.21c], un albero composto da decine di rami aventi la forma a spirale, incastonato tra la figura della Donna abbracciata sulla destra e la Donna attesa sulla sinistra. In tal caso, le spirali costituiscono il fulcro simbolico e strutturale dell'intera composizione. I rami dell'albero si avvolgono in vortici ampi e complessi, che evocano l'energia vitale della natura e la dimensione astratta tipica della Secessione viennese. La spirale diventa così una forma-simbolo che unisce passato e presente: richiama le tradizioni antiche, ma allo stesso tempo incarna la modernità klimtiana, fondata sulla fusione tra decorazione e simbolismo.
Sulla parete più corta, poi, compare un cavaliere [Figura 2.21d] che sembra vigilare sul giardino armonico dei pannelli principali, proteggendolo da eventuali interferenze esterne. La figura, fortemente stilizzata secondo un registro geometrico e quasi astratto, conserva tuttavia alcuni tratti riconoscibili: l'elmo bianco e il mantello policromo, ornato da una fitta trama di spirali.

Il tema delle spirali torna spesso in Klimt, che le utilizza in quasi tutte le sue opere più famose. Si presentano alcuni esempi:



(a) (b)



(c) (d)

Figura 2.21: G. Klimt. Particolari del *Fregio Stoclet* (1905–1909). Mosaico, Museo delle arti applicate, Vienna.

Digitalizzazione di Google Art Project, via Wikimedia Commons (consultato il 21 luglio 2026)

- In *Giuditta II (Salomè)* del 1909 [Figura 2.22], «*il soggetto biblico*[9] *è decisamente posto in subalternità, mentre il corpo seminudo dell'eroina [...] e il potere incantatore dello sguardo, sono un inno alla bellezza femminile, l'invenzione della* femme fatale*, cioè di una personalità femminile seducente, forte e dominatrice [...]. Le forme della donna, dal corpo quasi snodato, proteso verso sinistra in una cornice lunga e stretta, rivelano, nel seno nudo, un definitivo passaggio dalla prescelta dal Cielo per compiere una missione salvifica (Giuditta) all'incarnazione della passione che sconfina nella morte (Salomè)*» (Cricco & Di Teodoro, 2012d).

- Nel primo *Ritratto di Adele Bloch-Bauer* del 1907 [Figura 2.23], l'oro presente in tutte le tele precedenti «*lascia il posto a un fondo che pare pulviscolo dorato e che [...] rende la sensazione di una superficie a mosaico, variopinta, ricca e splendente [...]. La figura si smaterializza così in un insieme in cui l'abito con motivi a occhi entro triangoli (evidente allusione all'occhio di Horus*[10] *della pittura egizia), quadrati, spirali e piccoli triangoli a mo' di goccia si amalgama con la tappezzeria a successioni di girali*[11] *dei braccioli della poltrona*» (Cricco & Di Teodoro, 2012d).

- Nell'opera più nota di Klimt, *Il bacio* [Figura 2.24], vengono mostrati due amanti che si abbracciano. Inginocchiati su uno sperone coperto di fiori, quasi sul bordo di un ampio vuoto dorato, essi sono avvolti da un bagliore d'oro a spirali che, con sottili filamenti, si mescola ai fiori che ricoprono la roccia. Escludendo teste, mani e piedi, tutto è oro, «*con un trattamento diverso però. Infatti, nel caso dell'uomo [...] piegato verso la giovane donna, la lunga veste che lo copre interamente è trattata con un ornamento a rettangoli ora scuri, ora grigi, ore colorati che si interpongono fra i rettangoli dorati. Nel*

[9] Giuditta era una vedova ebrea che salva il suo popolo seducendo e decapitando il generale assiro Oloferne. Salomè, invece, è la figura evangelica che chiese la testa di Giovanni Battista dopo aver danzato per Erode, diventando simbolo di seduzione pericolosa e desiderio distruttivo.

[10] L'occhio di Horus è un simbolo legato a protezione e rigenerazione. Klimt utilizza l'occhio come ornamento con funzione simile: vigilanza, energia vitale, potere femminile, sacralità del corpo.

[11] = spirali

*caso della donna [...] il corpo è reso identificabile per un trattamento dell'oro a onde parallele e per l'inserzione di ovali di colore con ornamenti ad anelli*» (Cricco & Di Teodoro, 2012d).

Anche nell'ultimo secolo la spirale ha continuato ad affascinare numerosi artisti. Tra questi si distinguono Robert Smithson (1938-1973) e Jim Denevan (1961), due tra i più affermati artisti della Land Art, corrente artistica nata negli anni '60 che «*prende in considerazione spazi vastissimi, all'interno dei quali l'uomo lascia il proprio segno artistico [...]. Il paesaggio diventa, in questo caso, materiale artistico e occasione di recupero del rapporto dell'uomo con la natura*» (Cricco & Di Teodoro, 2012d).

La più celebre opera di R. Smithson è, senza dubbio, *Spiral Jetty* (*Banchina spiraliforme*) che dal 1970 decora una riva del Great Salt Lake in Utah [Figura 2.25]. La gigantesca opera ($460 \times 1450$ m) altro non è che una banchina a forma di spirale archimedea, costituita da terra, cristalli di sale e massi di basalto, spostati e posizionati grazie a imponenti mezzi meccanici. La spirale «*da un lato è intesa come simbolo ancestrale della vita e dei processi di crescita naturale, dall'altro si riferisce a una leggenda del luogo che narra di un vortice al centro del lago collegato direttamente al mare, spiegando la salinità dell'acqua*» (Cricco & Di Teodoro, 2012d). Posizionata in un luogo deturpato dalla presenza di miniere e impianti petroliferi, l'opera «*realizza appieno la concezione dell'arte di Smithson, quella di una risorsa in grado di mediare tra ecologia e industria*» (Cricco & Di Teodoro, 2012d).

Da vent'anni, l'artista californiano J. Denevan si occupa di Sand Art, l'arte di incidere figure sulla sabbia, «*realizzando complesse opere geometriche sulle spiagge di tutto il mondo servendosi di poco più di un rastrello o di un bastone trovato sul posto. Le opere durano solo poche ore – o iniziano a svanire mentre l'artista è ancora all'opera – poiché le maree cancellano rapidamente ogni disegno, lasciando dietro di sé soltanto un ricordo o una fotografia*» (Jobson, 27 marzo 2017). Le figure 2.26 e 2.27 mostrano due sue opere realizzate rispettivamente nel 2010 e nel



Figura 2.22: G. Klimt. *Giuditta II* (1909). Olio su tela, Galleria d'Arte Moderna, Venezia.

Foto di Didier Descouens, licenza CC BY-SA 4.0, via Wikimedia Commons (consultato il 21 luglio 2026)



Figura 2.23: G. Klimt. *Ritratto di Adele Bloch-Bauer* (1907). Olio su tela, Neue Galerie, New York.

Foto di Neue Galerie, via Wikimedia Commons (consultato il 21 luglio 2026)



Figura 2.24: G. Klimt. *Il bacio* (1907-1908). Olio su tela, Osterreichische Galerie Belvedere, Vienna.

Digitalizzazione di Google Art Project, via Wikimedia Commons (consultato il 21 luglio 2026)

2023, raffiguranti delle spirali logaritmiche.

Si conclude la trattazione sulle spirali (nel piano) con un'opera di Bruce Nauman (1941-), un artista poliedrico, che oltre all'arte ha studiato anche matematica, fisica, filosofia e musica. Questa poliedricità si rispecchia nelle sue opere che non possono essere univocamente classificate in una particolare corrente artistica, dal momento che toccano diversi mezzi espressivi: dalla scultura alla video art, dalla performance all'installazione. L'opera in questione è *The True Artist Helps the World by Revealing Mystic Truths* del 1967 [Figura 2.28].

---

*Utilizzando i mezzi della cultura di massa (insegne al neon) e dell'esposizione (inizialmente appese l'insegna nella vetrina del suo studio), Nauman cercò di portare domande normalmente considerate solo dall'élite culturale alta, come il ruolo e la funzione dell'arte e dell'artista nella società, a un pubblico più ampio [...]. Per Nauman, sia il mezzo che il messaggio erano ugualmente importanti; così, utilizzando una forma di comunicazione facilmente comprensibile da tutti (i cartelli al neon erano diffusi nella società industriale moderna) e mettendo questo messaggio alla luce pubblica, Nauman permise a tutti di porre e rispondere alla domanda [...]. L'insegna al neon di Nauman non è solo un oggetto, è un processo, qualcosa che continua a farci riflettere sull'arte, sull'artista e sul ruolo che il linguaggio gioca nella nostra concezione di entrambi. Le parole continuano a chiedere questo a ogni osservatore che le incontra. L'artista, il "vero artista", rivela davvero "verità mistiche"?* (McMahon, 9 agosto 2015)

---



Figura 2.25: R. Smithson. *Spiral Jetty* (1970). Utah, Great Salt Lake.

Foto di Netherzone, licenza CC BY-SA 4.0, via Wikimedia Commons (consultato il 21 luglio 2026)



Figura 2.26: J. Denevan. *Senza titolo* (2010). California, Santa Cruz.

(Jobson, 27 marzo 2017)



Figura 2.27: J. Denevan. *Self Similar* (2023). Manar Abu Dhabi.

https://abudhabiculture.ae (consultato il 21 luglio 2026)




Figura 2.28: B. Nauman. *The True Artist Helps the World by Revealing Mystic Truths* (1967). Neon trasparente, Philadelphia Museum of Art.

(McMahon, 9 agosto 2015)

## 2.3 Spirali tridimensionali: le eliche

Se, idealmente, si prova ad allungare lungo la terza dimensione una spirale (o un suo ramo) a partire da due suoi punti, si ottiene una nuova curva, chiaramente non più piana, che viene chiamata **elica** (o **spirale sghemba**).
A voler essere precisi, eliche e spirali sghembe non sono la stessa curva. Entrambe «*sono determinate dal moto di un punto che ruota intorno a un asse e che, durante la rotazione, trasla secondo una direzione assegnata*» (De Carlo & Paris, 2019); tuttavia, un'elica è una curva a pendenza costante, la cui tangente, in ogni suo punto, forma un angolo costante con un piano perpendicolare all'asse di rotazione passante per il punto stesso. Una spirale sghemba, invece, è una curva a passo costante, ovvero la distanza tra i due estremi di una spira dell'elica si mantiene costante.

É possibile costruire queste curve su innumerevoli superfici, ma in questo contesto ci si focalizzerà sulle eliche i cui punti appartengono alle quadriche.
La figura 2.29 mostra la spirale sghemba e l'elica costruite su un cono; mentre una spirale conica, «*mantenendo un passo costante, ha una pendenza che varia lungo la sua estensione e che aumenta progressivamente avvicinandosi al vertice della superficie*» (De Carlo & Paris, 2019), l'elica conica, «*avendo una pendenza costante, ha un passo che varia lungo la sua estensione riducendosi progressivamente man mano che ci si avvicina al vertice della superficie*» (De Carlo & Paris, 2019). Risulta evidente che la proiezione della spirale conica su un piano ortogonale all'asse è una spirale archimedea, mentre la proiezione dell'elica conica è una spirale logaritmica.

Un caso notevole è l'elica cilindrica, molto presente in ciò che ci circonda: basti pensare alle viti, alle molle e alle scale a chiocciola. In particolare, le viti «*possono scorrere su sè stesse, un'idea geniale e semplice allo stesso tempo che ha determinato il loro indubbio successo nella storia artigianale*» (D'Amore, 2015). Non tutti sono concordi nel dire chi ha inventato la vite come oggetto meccanico. Alcuni la fanno risalire al matematico Archita di Taranto (IV secolo a.C.); secondo

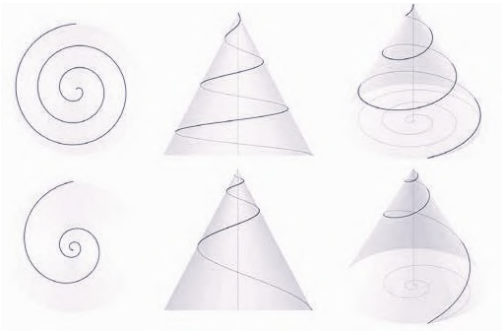


Figura 2.29: Confronto tra spirale conica ed elica conica. (De Carlo & Paris, 2019)

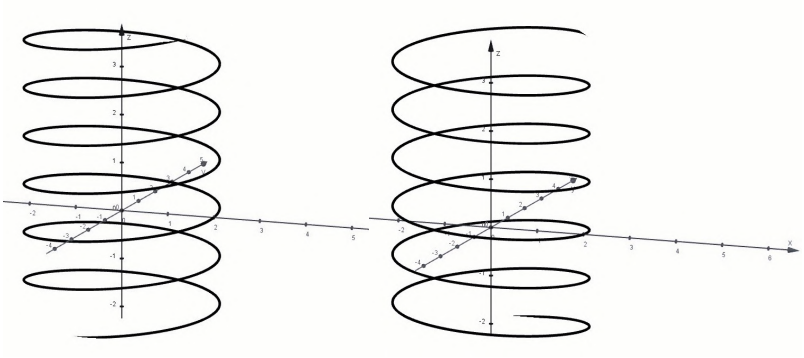
lo storico Proclo, le proprietà matematiche della vite sono state studiate per la prima volta da Apollonio; ben nota, poi, è la vite di Archimede: ad Alessandria, «*si interessò del problema tecnico di ricavare dal fiume Nilo l'acqua per irrigare i terreni arabili della vallata: a tal fine inventò [...] la vite [...], fatta di canali o tubi avvolti elicoidalmente attorno a un asse inclinato, munita di una manovella per farla girare*» (Boyer, 1980).

Una prima proprietà fondamentale dell'elica cilindrica risiede nel fatto che l'elica e la spirale sghemba vanno a coincidere; questo significa che l'elica cilindrica conserva non solo la pendenza, ma anche il passo: ecco spiegato il motivo per cui le scale a chiocciola hanno un profilo elicoidale cilindrico. D'ora in poi, quindi, non si farà più distinzione tra elica e spirale sghemba.

L'equazione parametrica di un'elica cilindrica con raggio di base $r$ e asse coincidente con l'asse $z$ è:

$$\begin{cases} x = r\cos(2\pi t) \\ y = r\sin(2\pi t) \\ z = ct \end{cases} \tag{2.10}$$

dove $t$ è un parametro reale e $c$ è il passo che può assumere valori sia positivi che negativi: nel primo caso [Figura 2.30a], "si sale" in senso antiorario lungo l'elica; nel secondo [Figura 2.30b], "si sale" in senso orario.
Inoltre, si osserva che $x(t) = x(t+1)$ e $y(t) = y(t+1)$, ovvero i punti di una singola spira sono tutti e soli i punti in $[t; t+1]$.



(a) (b)

Figura 2.30: Grafici di eliche cilindriche con $r = 2$ e $c = \pm 1$.

Resta da chiedersi quale spirale è strettamente collegata all'elica cilindrica. A differenza del cono, se si taglia un cilindro con piani ortogonali all'asse, l'intersezione é una circonferenza che resta identica per ogni piano scelto. Dunque, se andassimo a tracciare le proiezioni ortogonali sul piano della spirale otterremmo nient'altro che la circonferenza d'intersezione tra piano e cilindro[12]. Nel caso dell'elica cilindrica occorre osservarla in modo "*proiettivo*".
Quando l'elica viene osservata da un punto situato sull'asse del cilindro, la componente verticale $ct$ risulta allineata alla direzione di vista e viene pertanto "compressa" dalla prospettiva, mentre la componente rotazionale $(r\cos(2\pi t); r\sin(2\pi t))$ rimane pienamente visibile. Ne deriva che l'osservatore non percepisce più l'elica, bensì una curva piana che si avvolge attorno al centro. La trasformazione non è più una proiezione ortogonale, ma una proiezione centrale, nella quale i punti dell'elica vengono inviati sul piano visivo mediante raggi che passano per l'occhio dell'osservatore. In questo tipo di proiezione, il raggio apparente della curva non rimane costante, ma varia secondo una legge inversa rispetto al parametro del moto. Si produce così una curva piana la cui distanza dal centro varia come una funzione iperbolica dell'angolo, generando una spirale iperbolica.

[12]Si ricorda che nel caso del cono si otteneva o la spirale archimedea o la spirale logaritmica.

### Dall'elica all'elicoide

Per concludere, è doveroso fare una breve digressione sulla superficie strettamente correlata alle eliche: l'**elicoide**.

L'elicoide è la superficie descritta da una curva che compie, contemporaneamente, una rotazione rispetto a un asse e una traslazione lungo la direzione dell'asse stesso. Si osserva che la definizione richiama in tutto e per tutto quella dell'elica, ciò che cambia è il fatto che a muoversi non è più un punto, ma un'intera curva.
Se l'elicoide è generato da una retta, allora è una superficie rigata. In particolare, se la retta generatrice è perpendicolare all'asse, l'elicoide è retto.
Una parametrizzazione dell'elicoide retto (con asse di rotazione $z$) è data dalla seguente:

$$\begin{cases} x = \rho\cos(\theta) \\ y = \rho\sin(\theta) \\ z = h\theta \end{cases} \tag{2.11}$$

dove $\rho$ e $\theta$ rappresentano le coordinate polari della proiezione del punto dell'elicoide sul piano $xy$ e $h$ è un parametro reale tale che $2\pi h$ sia il passo dell'elicoide.

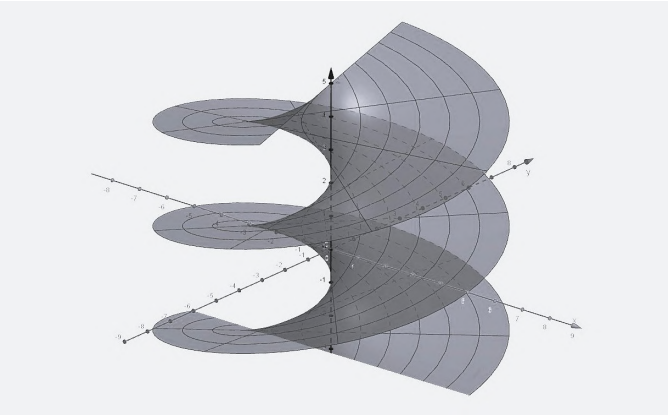


Figura 2.31: Grafico di un elicoide retto con $h = 1$.

Chiaramente, gli elicoidi possono essere generati anche da altre curve, come una circonferenza. In particolare, «*se la circonferenza appartiene ad un piano*

*perpendicolare all'asse, l'elicoide prende il nome di [...] colonna tortile, dai fusti delle colonne di età barocca che hanno questa forma*» (Migliari et al., 2014-2015).

### 2.3.1 Le eliche nell'arte

Così come per le spirali, anche per le eliche, si possono trovare numerosi esempi in natura: dalle corna delle antilopi alle conchiglie. Un esempio interessante è sicuramente la fillotassi, ovvero la disposizione delle foglie di una pianta lungo lo stelo; le foglie, infatti, per poter svolgere al meglio la fotosintesi clorofilliana, non sono disposte a caso, ma seguono un ordine preciso, elicoidale, per evitare di farsi ombra a vicenda. L'esempio sicuramente più noto resta, però, il DNA, che attraverso la sua struttura a doppia elica, contiene le informazioni più preziose della vita [Figura 2.32].

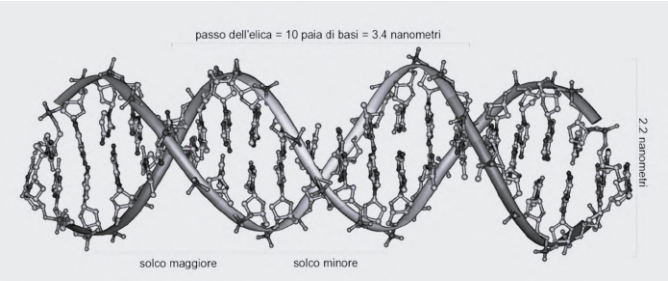



Figura 2.32: Doppia elica del DNA.

Immagine di Mstroeck, licenza CC-BY-SA-3.0, via Wikimedia Commons (consultato il 21 luglio 2026)

Le eliche sono da sempre associate principalmente all'architettura. I primi esempi di eliche coniche si trovano in Medio Oriente; infatti, «*l'andamento elicoidale conico ci riconduce alla nota iconografia della "Torre di Babele", l'emblema della follia umana*» (Di Paola & Pedone, Ottobre 2016). Tra le sue innumerevoli rappresentazioni, degno di nota è il dipinto *La grande torre di Babele* [Figura 2.33] del pittore fiammingo Pieter Bruegel il Vecchio (1525 circa - 1569). In quest'opera, l'artista volle rappresentare la società del suo tempo in modo allegorico. Il

grande cantiere della torre rappresentato «*allude alla multiculturalità della laboriosa città mercantile di Anversa*» (Cricco & Di Teodoro, 2012b). Dal punto di vista architettonico, la torre è formata da vari piani sovrapposti, che si restringono man mano che salgono. L'intero edificio si sviluppa lungo un percorso ellittico che gira su sé stesso, come un'elica conica, ricordando la forma delle antiche ziggurat mesopotamiche.
Un'opera che richiama fortemente la torre di Babele è il *Minareto della Grande Moschea di al-Mutawakkil* a Samarra (Iraq) [Figura 2.34].

Tornando in Europa, due esempi fondamentali risultano essere le colonne coclidi[13] di Traiano [Figura 2.35] e di Marco Aurelio [Figura 2.36].
L'andamento elicoidale è sottolineato da una *corda* in rilievo che separa le immagini rappresentate in una specie di fregio in bassorilievo che si attorciglia lungo l'intera colonna. All'interno delle due colonne, poi, è presente una scala a chiocciola che consente di raggiungerne la sommità dove sono presenti le statue dei due imperatori.
La colonna Traiana (così come la successiva colonna di Marco Aurelio) «*non è solo il gioco di un geniale progettista [...], ma di più è l'omaggio filosofico e morale ad un sovrano: un monumento di geometria, un congegno meccanico a scala di colosso bloccato nel tempo*» (Martines, 1983). Secondo Martines (1983), il congegno meccanico di riferimento per la costruzione delle colonne altro non è che la vite di Archimede che, come già detto, si basa sulle eliche. Dunque, «*il nesso tra colonna coclide e spirale [...] assume qui una doppia valenza: motore nascosto [...], funzionale nello sviluppo della scala elicoidale interna; linea visibile della narrazione retorica in omaggio alle gesta dell'imperatore in cui il racconto [...] diventa solo uno degli infiniti racconti possibili sulla magnificenza della civiltà romana*» (De Carlo & Paris, 2019). Una caratteristica che contraddistingue le due colonne riguarda la corda elicoidale che si arrotola lungo di esse: nella colonna Traiana l'altezza del fregio aumenta progressivamente man mano che si sale, così da compensare la deformazione prospettica verso l'alto. Di conseguenza, la linea che avvolge il fusto

[13] = colonne celebrative Romane decorate da fregi decorativi attorcigliati sopra

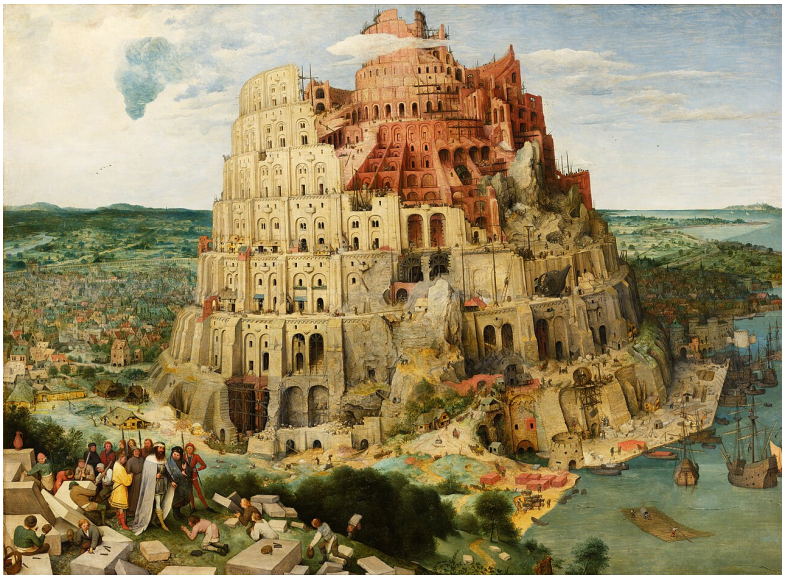


Figura 2.33: P. Bruegel il Vecchio. *La grande torre di Babele* (1563). Olio su tavola, Kunsthistorisches Museum, Vienna.

Digitalizzazione di Google Art Project, via Wikimedia Commons (consultato il 21 luglio 2026)



Figura 2.34: *Minareto della Grande Moschea di al-Mutawakkil* (848-852). Samarra, Iraq.

Foto di Chris Hoare, licenza CC BY-SA 4.0, via Wikimedia Commons (consultato il 21 luglio 2026)

non segue l'andamento di un'elica regolare: la sua inclinazione varia e il percorso si sviluppa con una sorta di accelerazione verticale; nella colonna di Marco Aurelio, invece, il fregio ha un'altezza costante di un metro, quindi è a tutti gli effetti un'elica.
Le colonne coclidi sono state, poi, riprese in numerose opere successive: per esempio, a Vienna il portale della chiesa barocca di San Carlo Borromeo [Figura 2.37] è incastonato tra due colonne coclidi progettate dall'italiano Lorenzo Mattielli (1687-1748) e raffiguranti alcuni episodi di vita del Santo.

Si passa ora a studiare l'evoluzione artistica delle scale elicoidali.
Già Vitruvio aveva disegnato scale anche se i suoi disegni non sono giunti a noi; anche nel Medioevo è possibile trovare diversi esempi di scale elicoidali legate alla costruzione di torri difensive e campanili; «*ma è a partire dal Rinascimento che la scala elicoidale assume anche un ruolo con una forte connotazione estetico-architettonica. In questo periodo vengono realizzate alcune scale diventate dei capisaldi nella storia dell'architettura*» (De Carlo & Paris, 2019).

Tra i primi a dare una propria interpretazione estetica alla scala a chiocciola è Donato Bramante (1444-1514), a cui venne commissionata nel 1505 da papa Giulio II una scala da inserire in una torre del palazzo apostolico per collegare il nuovo Cortile Belvedere con l'esterno. Bramante scelse di inserire all'interno di una torre quadrata un cilindro in muratura e costruirvi dentro una rampa elicoidale (evitando così i problemi di pendenza tipici di una scala). In totale si contano 4 spire e mezzo, ciascuna delle quali formata da 8 colonne di ordini diversi (toscano, dorico, ionico e composito). Tutte le colonne hanno la stessa altezza, ma diametri diversi «*con l'utilizzo di un artificio al tempo stesso metrico e percettivo che nasconde visivamente la discontinuità tra un ordine e quello successivo*» (De Carlo & Paris, 2019). Una soluzione a dir poco sorprendente risulta essere la doppia elica utilizzata nella trabeazione[14] interna [Figura 2.38]: nella rampa, infatti, solo la parte

[14] = elemento orizzontale degli ordini architettonici classici che poggia sulle colonne o sui pilastri e sostiene la copertura. È composta da architrave, fregio e cornice.



Figura 2.35: *Colonna traiana* (113). Roma.

Foto di NikonZ7II, licenza CC BY-SA 4.0, via Wikimedia Commons (consultato il 21 luglio 2026)



Figura 2.36: *Colonna di Marco Aurelio* (192-196). Roma.

Foto di WikiRomaWiki, licenza CC BY-SA 4.0, via Wikimedia Commons (consultato il 21 luglio 2026)



Figura 2.37: Facciata della *Chiesa di San Carlo Borromeo* (XVIII secolo). Karlsplatz, Vienna. Foto di Thomas Ledl, licenza CC BY-SA 4.0, via Wikimedia Commons (consultato il 21 luglio 2026)

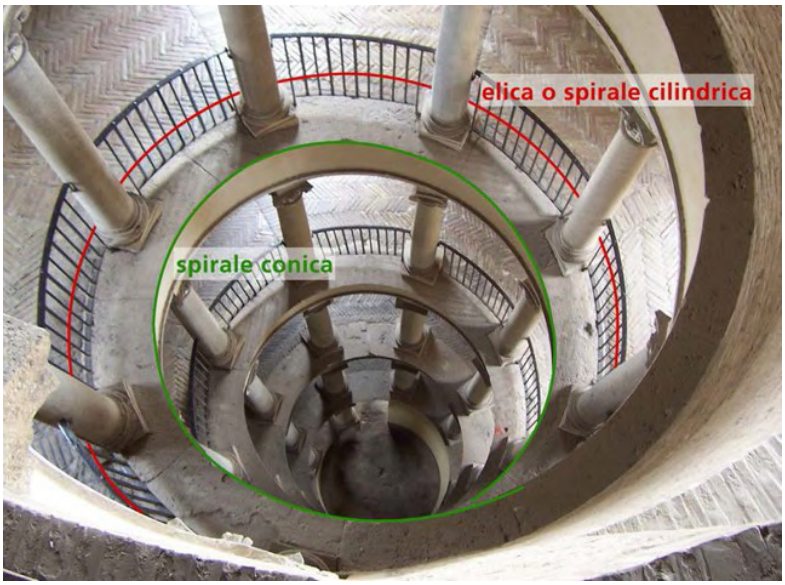



Figura 2.38: D. Bramante. *Rampa elicoidale del Belvedere* (1505). Palazzo Apostolico, Vaticano, Roma. (De Carlo & Paris, 2019)

interna delle basi delle colonne segue esattamente l'andamento dell'elica cilindrica. La parte esterna, invece, non può allinearsi allo stesso cilindro: per questo la trabeazione che corre sopra le colonne finisce per seguire una superficie conica, non cilindrica. In pratica, è come se il cilindro esterno si aprisse leggermente verso l'alto, formando un cono leggermente inclinato, con un'apertura di circa 1 grado. «*L'effetto percettivo di chi si affaccia nel vuoto centrale e che, inevitabilmente, è portato ad alzare lo sguardo verso l'alto è pertanto quello di una prospettiva rallentata*» (De Carlo & Paris, 2019).

Il punto di svolta si ha nel 1570 con la pubblicazione de *I quattro libri dell'Architettura* di Palladio, che dedica un intero capitolo a questo tema. Il capitolo è corredato da alcune figure che descrivono ben otto tipi di scale [Figura 2.39]. Come ricordano De Carlo e Paris (2019), «*le varianti introdotte da Palladio per le scale elicoidali [...], dipendono dalla forma della pianta, "ritonde" o "ovate", con la colonna nel mezzo oppure "vacue", con gradini retti o curvi*».

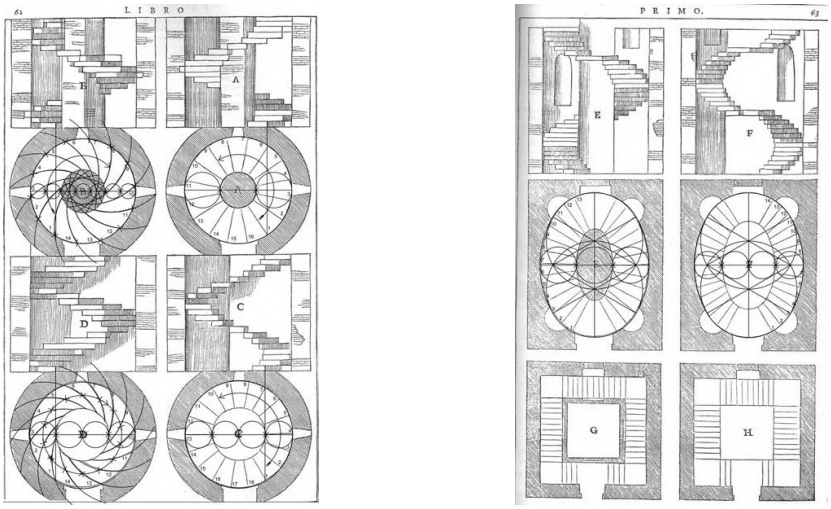



Figura 2.39: A. Palladio. Tavole tratte da *I quattro libri dell'Architettura* (1570). Venezia. (De Carlo & Paris, 2019)

Il primo passo verso la libertà e la leggiadria assoluta che caratterizzò il successivo periodo barocco, si ha nella scala elicoidale del Palazzo del Quirinale (1585),

progettata e realizzata dal Mascarino (1536-1606). Un segno di discontinuità dai precedenti riguarda la pianta della scala: non più circolare, ma ellittica, forma che tanto incuriosiva l'artista, nonostante l'enorme grado di difficoltà nel trasformare questa figura geometrica in uno sviluppo elicoidale [Figura 2.40]. La configurazione risulta profondamente innovativa rispetto a quella di Bramante. Ogni spira, infatti, è scandita da quattro coppie di colonne e da altrettanti spazi vuoti, disposti in modo che quattro di questi ultimi siano centrati sui due assi dell'ellisse. Il posizionamento delle colonne lungo il perimetro interno ha rappresentato la prima grande difficoltà del Mascarino: «*se infatti la divisione della circonferenza in parti uguali è facilmente risolvibile utilizzando poligoni regolari inscritti o circoscritti, nel caso della policentrica chiusa non era nota in quel periodo storico alcuna costruzione grafica esatta*» (De Carlo & Paris, 2019). Gli spazi tra le coppie di colonne risultano quindi diversi tra loro, a volte anche significativamente; Mascarino, infatti, non ha voluto suddividere gli spazi in modo perfettamente uguale, «*proponendo invece, volutamente, una soluzione che tenesse conto dei diversi aspetti percettivi dello spazio e della luce che un utente poteva avere percorrendo la scala*» (De Carlo & Paris, 2019).
Un secondo punto di novità riguarda la configurazione del fregio che percorre la trabeazione interna (De Carlo & Paris, 2019):

---

*Analizzando le misure della trabeazione ci si è accorti di [...] un vero e proprio artificio prospettico che introduce un ulteriore grado di difficoltà formale e costruttiva [...]. Mentre l'architrave e la cornice mantengono un'altezza costante per tutto lo sviluppo della scala, la misura del fregio aumenta progressivamente [...]. Ciò comporta l'introduzione di una seconda elica con pendenza di poco superiore a quella utilizzata per [...] i gradini [...]. Per riuscire a comprendere la raffinatezza del gioco formale bisogna osservare attentamente la scala soprattutto da un punto di vista interno, stando cioè sui gradini. Si individua [...] un'elica continua alla base del piedistallo sulla quale si poggiano tutti i gradini; alzando lo sguardo si nota anche un'elica continua, sulla quale si appoggia l'architrave.*

---

Misurando con attenzione le due eliche, si nota che la scala e la volta elicoidale seguono inclinazioni differenti. Questa divergenza genera tra la volta e il piano dei gradini una variazione dello spessore murario che, tuttavia, rimane completamente invisibile a chi percorre la scala, poiché la regolare continuità dell'ordine architettonico uniforma la percezione visiva [Figura 2.41].

Il rimando alla scala del Mascarino è evidente nella scala elicoidale di Palazzo Barberini (sempre a Roma), progettata dall'architetto ticinese F. Borromini, che fece della linea curva il suo marchio di fabbrica. A Palazzo Barberini, Borromini intervenne nella fase di trasformazione dell'edificio introducendo una variante al progetto originario del suo mentore Carlo Maderno: in particolare, propose una scala elicoidale basata su una pianta ovale. Pochi anni prima egli aveva lavorato al Quirinale, dove aveva avuto modo di studiare da vicino la scala ovale del Mascarino. Alla morte di Maderno, il cantiere passò sotto la direzione del collega-rivale Bernini, con il quale Borromini avviò una collaborazione destinata però a interrompersi rapidamente. Quando la scala fu effettivamente costruita nel 1633, Borromini aveva già ottenuto l'incarico di architetto dell'università La Sapienza, dietro raccomandazione di Bernini, che aveva fatto di tutto pur di allontanarlo dai suoi progetti[15].
Le principali differenze tra la scala di Borromini e quella del Mascarino riguardano le colonne [Figure 2.42 e 2.43]: innanzitutto Borromini scelse di allontanare le colonne binate, dal momento che riteneva che lo spazio lasciato dal Mascarino fosse troppo esiguo per lasciar filtrare luce sufficiente dalle finestre; inoltre lo spazio a disposizione a Palazzo Barberini era decisamente più piccolo e quindi occorreva ridimensionare l'intera scala: si passò così a 6 coppie di colonne per spira. In merito poi agli spazi vuoti tra coppie successive di colonne, a differenza del Mascarino, sembra che Borromini abbia studiato affinché gli spazi sembrassero il più possibile uguali tra loro (chiaramente impossibile per la curvatura non costante dell'ellisse).

La più alta manifestazione della libertà inventiva di Borromini, dove la sua

[15] Lo stesso Bernini progettò e fece costruire, sempre a Palazzo Barberini, uno scalone monumentale a pianta rettangolare, in forte antitesi al modello borrominiano.

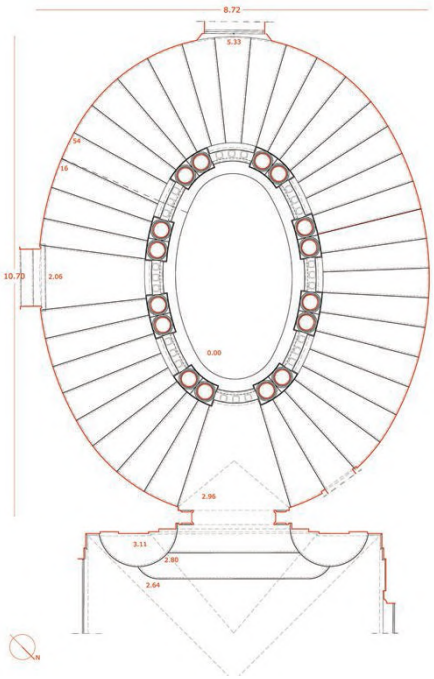


Figura 2.40: L. Paris. *Rilievo della scala elicoidale del Mascarino*. Palazzo del Quirinale, Roma. (De Carlo & Paris, 2019)



Figura 2.41: Il Mascarino. *Scala elicoidale* (1585). Palazzo del Quirinale, Roma.

Foto di Kent Wang, licenza CC BY-SA 2.0, via Wikimedia Commons (consultato il 21 luglio 2026)

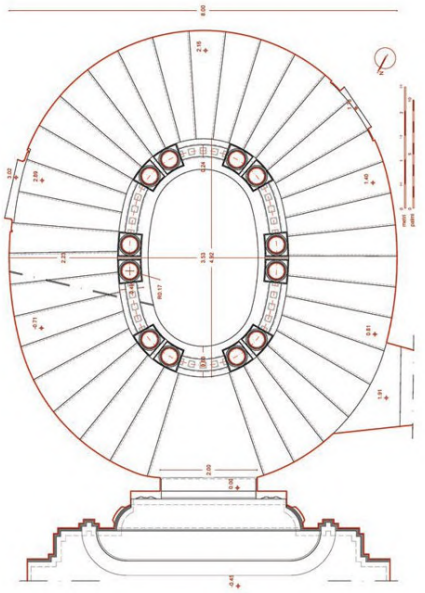


Figura 2.42: L. Paris. *Rilievo della scala elicoidale di Borromini*. Palazzo Barberini, Roma. (De Carlo & Paris, 2019)



Figura 2.43: F. Borromini. *Scala elicoidale* (1633). Palazzo Barberini, Roma.

Foto di Marcovarro, https://palazzobarberini.com (consultato il 21 luglio 2026)

profonda predilezione per la dinamica della linea sinuosa trova la sua massima espressione, è la *chiesa di Sant'Ivo alla Sapienza*, cappella dell'omonima università, costruita tra il 1642 e il 1660, ma progettata già a partire dai primi anni '30 [Figure 2.44 e 2.45].
Sin dalla pianta della basilica, l'architetto coniugò linee rette e curve; «*la forma della pianta prosegue in alzato senza variazioni [...] per culminare nella cupola la cui struttura ripete gli stessi spigoli e le medesime rientranze e sporgenze presenti nella pianta*» (Cricco & Di Teodoro, 2012c). Dei contrafforti sulla cupola aiutano a sorreggere una maestosa lanterna, la cui terminazione è un'elica conica, che, restringendosi verso l'alto, «*imprime all'edificio un senso di movimento rotatorio sempre più accelerato*» (Cricco & Di Teodoro, 2012c).

Tornando a Bernini, anche lui non fu esente dal fascino della linea curva, come è evidente nel *Baldacchino di San Pietro* [Figura 2.46]. Realizzato tra il 1624 e il 1633, il baldacchino doveva presentare proporzioni e caratteristiche tali da inserirsi in modo armonico sopra l'altare maggiore. Per evitare una pesante struttura in muratura l'artista fu costretto a ideare una tipologia del tutto nuova, capace di evocare ugualmente l'idea di un vero baldacchino in legno e tessuto. Le quattro colonne tortili in bronzo dorato, sormontate da capitelli compositi sorreggono un'imponente copertura, «*frutto della felice collaborazione, purtroppo mai più ripetutasi, con F. Borromini [...]. Vengono impiegate quattro enormi volute sagomate a dorso di delfino. Esse [...] convergono diagonalmente verso il centro, sorreggendo un elemento di raccordo sul quale poggia un grande globo (in realtà un ellissoide) sormontato da una croce*» (Cricco & Di Teodoro, 2012c). La straordinaria peculiarità del baldacchino risiede nella sua capacità di integrarsi con naturalezza nello spazio monumentale della basilica. Pur nelle sue dimensioni imponenti, la struttura appare sorprendentemente leggera: le colonne tortili conferiscono all'insieme un marcato slancio verticale, come se quattro giganteschi elicoidi si avvitassero, guidando lo sguardo verso l'alto.

Il vorticismo delle eliche non ha lasciato indifferenti neanche gli architetti moderni, che le hanno reinterpretate in modi diversi. L'architetto di Dio, Gaudí, non



Figura 2.44: F. Borromini. *Chiesa di Sant'Ivo alla Sapienza* (1642-1660). Roma.

Foto di Paris Orlando, licenza CC BY-SA 4.0, via Wikimedia Commons (consultato il 21 luglio 2026)



Figura 2.45: F. Borromini. *Chiesa di Sant'Ivo alla Sapienza* (1642-1660), particolare della lanterna. Roma.

Foto di MM, via Wikimedia Commons (consultato il 21 luglio 2026)



Figura 2.46: G. L. Bernini. *Baldacchino di San Pietro* (1624-1633). Basilica di San Pietro in Vaticano, Roma.

Foto di Jebulon, licenza CC0 1.0, via Wikimedia Commons (consultato il 21 luglio 2026)

poteva certo esimersi dall'utilizzare una delle curve più esemplari che la natura ci offre. L'artista catalano ricorse spesso alle eliche e alle superfici elicoidali per decorare torri e camini [Figura 2.47], trasformandole in elementi plastici che sembrano crescere direttamente dalle superfici. Notevole, ad esempio, la doppia elica iperbolica, quasi impercettibile a un primo sguardo, che avvolge la torre d'ingresso di Parc Güell [Figura 2.48].

Ma è nella *Sagrada Família* che Gaudí sprigionò davvero tutta la forza che solo spirali ed eliche sanno generare: qui la curva non è più soltanto ornamento, ma diventa struttura e simbolo di un percorso ascensionale verso l'Assoluto. Le scale elicoidali del tempio mostrano due modi radicalmente diversi di interpretare la spirale come forma architettonica. Da una parte degli *elicoidi compressi*, scavate nel muro, dall'altra *elicoidi espansi*, costruite attorno a un nucleo centrale .
I primi [Figura 2.49] vengono ricavati direttamente nello spessore del muro all'interno delle torri che costituiscono le facciate; sembra quasi di trovarsi all'interno del carapace di un mollusco. Il loro raggio risulta essere estremamente ridotto: l'elicoide si avvolge attorno a un vuoto centrale talmente piccolo da non avere una funzione strutturale: non è un cilindro portante, ma un semplice foro di alleggerimento. Il gradino, invece, è incastrato direttamente nel muro, che diventa l'unico elemento portante. Dal punto di vista matematico, queste scale non sono elicoidi "puri": la generatrice non è una retta che si muove con regolarità attorno a un asse, ma una sequenza di gradini che si adattano alla curvatura del muro. La loro geometria segue dalla loro funzione: sono scale tecniche, pensate per occupare il minimo spazio possibile.
Poi ci sono le scale all'interno della basilica [Figura 2.50], pensate per facilitare il deflusso dei fedeli tra i matronei e le navate. Queste scale non sono ricavate nel muro, ma costruite come un organismo autonomo che si avvolge attorno a un cilindro pieno che richiama la fantasia delle torri esterne. Il cilindro interno, in questo caso, è un elemento strutturale: distribuisce le forze e stabilizza la torsione. Il raggio è evidentemente molto più ampio rispetto alle precedenti, e l'elicoide si sviluppa con un passo regolare. La presenza del cilindro centrale crea un vuoto che è solo apparente: l'interno sembra cavo, ma in realtà è sostenuto da un nucleo

pieno; questa inversione percettiva è tipica di Gaudí: ciò che sembra vuoto è pieno, ciò che sembra pieno è vuoto.

Dopo che la Chiesa ebbe firmato i Patti Lateranensi nel 1929, iniziò una fase di rinnovamento all'interno del neonato Stato Vaticano. A coordinare la *Reverenda Fabbrica di San Pietro* fu chiamato l'architetto piemontese Giuseppe Momo (1875-1940) che contribuì massicciamente alla realizzazione di numerosi edifici della Curia romana. Il suo nome è legato al nuovo monumentale ingresso dei Musei Vaticani, dove progettò una maestosa doppia rampa elicoidale [Figura 2.51].
Per realizzare quest'opera l'artista progettò e realizzò «*appositamente una struttura cantieristica di grandi dimensioni composta da un braccio rotante variabile, denominato "compasso tracciatore"*» (Di Paola & Pedone, Ottobre 2016). La scala fu costruita in calcestruzzo armato all'interno di un vano che non è né cilindrico né conico (come potrebbe sembrare in un primo momento): in realtà, è costituito da tronchi cilindrici via via più larghi (dal basso verso l'alto) inseriti all'interno di un tronco conico. Studi hanno dimostrato che proiettando la trabeazione interna sul soffitto, si ottiene una spirale archimedea, «*confermando che la scelta operata da Momo è stata quella dell'impiego della spirale conica: [...] in questo modo è stato possibile realizzare la geometria della scala mediante un profilo le cui dimensioni sono rimaste costanti per tutto lo sviluppo*» (Di Paola & Pedone, Ottobre 2016). In verità, si ricorda che la spirale conica non mantiene costante la sua pendenza. Per risolvere questo problema, l'architetto modificò la naturale curvatura della scala laddove necessario: infatti, «*tramite l'impiego successivo di gradini e cordonate tutti diversi tra loro, permette di avere delle superfici sufficientemente ampie per permettere il riposo dei pellegrini, mantenendo comunque l'impostazione geometrica di base della scala nella sua globalità*» (Di Paola & Pedone, Ottobre 2016).

La doppia scala elicoidale di Momo fu probabilmente la più importante opera di riferimento per l'architetto statunitense F. L. Wright nella progettazione del *Solomon R. Guggenheim Museum* di New York [Figure 2.52 e 2.53]. Per progettare il corpo centrale del museo, Wright partì verosimilmente dallo studio di una



Figura 2.47: A. Gaudí. *Casa Milà* (1906-1912), particolare di un camino. Barcellona. Foto di Jaume Meneses, licenza CC BY-SA 2.0, via Wikimedia Commons (consultato il 21 luglio 2026)



Figura 2.48: A. Gaudí. *Parc Güell* (1900-1926), torre a doppia elica. Barcellona.

Foto di Craig Sunter, licenza CC BY 2.0, via Wikimedia Commons (consultato il 21 luglio 2026)



Figura 2.49: A. Gaudí. *Sagrada Família* (1882-presente), scala elicoidale. Barcellona. Foto di Matti Blume, licenza CC BY-SA 4.0, via Wikimedia Commons (consultato il 21 luglio 2026)



Figura 2.50: A. Gaudí. *Sagrada Família* (1882-presente), scala elicoidale. Barcellona. Foto di José L. B. Ribeiro, licenza CC BY-SA 3.0, via Wikimedia Commons (consultato il 21 luglio 2026)

conchiglia. Il museo, infatti, ruota attorno «*a una grande rampa elicoidale che, partendo dal basso, si avvita arditamente verso il cielo dilatandosi contemporaneamente fino a sbocciare in un'ampia, luminosa cupola vetrata [...]. La morbida spirale sembra espandersi dall'interno verso l'esterno, proiettandosi - quasi senza peso - in uno spazio che progressivamente si dilata mano a mano che si sale, crescendo allo stesso modo di come "lo spirito cresce verso l'alto e verso l'esterno"*» (Cricco & Di Teodoro, 2012d). Le superfici esterne, anch'esse modellate in un andamento elicoidale, ospitano l'intero percorso espositivo, trasformando la visita in un'esperienza più fluida. È una concezione museale radicalmente diversa dalla classicità: non più stanze affiancate, ma un percorso artistico che si manifesta un passo dopo l'altro.

Per concludere, si passano in rassegna alcune opere dell'ultimo secolo basate su sviluppi spiraliformi ed elicoidali:

- Il *Monumento alla Terza Internazionale* (1919-1920) è un progetto dell'artista russo Vladimir Tatlin (1885-1953). Sarebbe dovuta essere una "*torre proletaria*", «*concepita come una gigantesca emittente, audace monumento allo scambio di informazioni e alla comunicazione che, nel XX secolo, si sarebbe dimostrato il veicolo più importante della democrazia*» (Sala & Cappellato, 2003). In questo progetto è evidente il richiamo alla Torre di Babele, che a sua volta richiama il problema della comunicazione in lingue diverse. Il monumento, in realtà, non venne mai realizzato perché mancavano in Unione Sovietica acciaio, vetri e altri materiali per la sua costruzione [Figura 2.54].

- Un altro monumento di straordinaria bellezza, anche se poco noto, risulta essere la *Cappella del Thanks-Giving Park* a Dallas (1976), progettata da uno dei più grandi architetti americani del '900, Philip Johnson (1906-2005). La sua forma a elica conica simboleggia l'infinita elevazione dello spirito umano e trae ispirazione dalla Grande Moschea di Samarra. Il soffitto della cappella è costituto da innumerevoli mosaici colorati da cui filtra la luce esterna, seguendo l'andamento spiraliforme dell'architettura. Si può osservare, inoltre,



Figura 2.51: G. Momo. *Scalone d'ingresso ai Musei Vaticani* (1929-1933). Città del Vaticano, Roma. Foto di Colin, licenza CC BY-SA 3.0, via Wikimedia Commons (consultato il 21 luglio 2026)



Figura 2.52: F. L. Wright. *Solomon R. Guggenheim Museum* (1943-1959), rampa interna vista dal basso. New York.

Foto di David Heald, https://www.nyctourism.com (consultato il 21 luglio 2026)



Figura 2.53: F. L. Wright. *Solomon R. Guggenheim Museum* (1943-1959), esterno. New York. https://www.guggenheim.org (consultato il 21 luglio 2026)

che i pannelli di vetro presentano colori più caldi e luminosi man mano che la spirale raggiunge il suo apice al centro [Figura 2.55].

- Alcune opere architettoniche contemporanee utilizzano eliche su altri tipi di superfici, come ellissoidi o iperboloidi. Ne è un esempio la nuova *Cupola del Bundestag* a Berlino, realizzata nel 1999 dall'archistar N. Foster [Figure 2.56 e 2.57]. La cupola del Bundestag, il parlamento tedesco, è una grande cupola a forma di ellissoide in vetro e acciaio con una vista a 360° del paesaggio urbano circostante della città di Berlino. All'interno della cupola due eliche gemelle permettono di raggiungerne la cima. La sala consiliare del parlamento si trova esattamente al di sotto; un cono a specchio al centro della cupola indirizza la luce solare all'interno dell'edificio, permettendo ai visitatori di vedere il funzionamento della camera. La cupola di vetro fu progettata da Foster per poter essere efficiente dal punto di vista energetico; permettendo alla luce del giorno di filtrare attraverso il cono specchiato, l'uso dell'illuminazione artificiale viene significativamente ridotto e quindi anche le emissioni di carbonio. Un grande parasole traccia elettronicamente il movimento del sole e blocca la luce solare diretta.
  Le rampe elicoidali e il design ultramoderno sono state, poi, riprese da Foster per la realizzazione dell'edificio che ha ospitato dal 2002 al 2021 il Municipio di Londra [Figure 2.58 e 2.59]. L'edificio in questione si presenta con una forma "a casco" insolita, concepita presumibilmente per ridurne la superficie esterna e migliorarne così l'efficienza energetica; tuttavia, l'eccessivo consumo di energia dovuto all'uso esclusivo del vetro (in una doppia facciata) vanifica i vantaggi derivanti dalla forma. Una rampa elicoidale lunga 500 metri si snoda lungo tutti i piani dell'edificio. La rampa offre una vista sull'interno dell'edificio e intende simboleggiare la trasparenza nelle decisioni amministrative.

Come si è visto, le spirali e le eliche hanno da sempre affascinato matematici e artisti nella storia per la loro capacità di coniugare ordine e dinamismo, rigore geometrico e tensione narrativa. Non sorprende, dunque, che anche il design




Figura 2.54: V. Tatlin. *Monumento alla Terza Internazionale* (1919-1920). Mosca.

Foto di Nikolai Punin, via Wikimedia Commons (consultato il 21 luglio 2026)

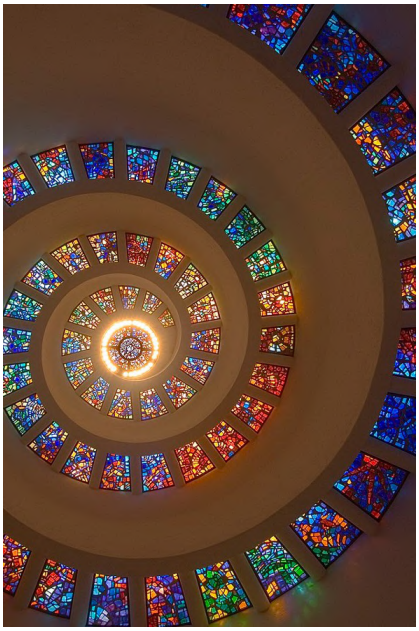


Figura 2.55: F. Johnson. *Cappella del Thanks-Giving Park* (1976). Dallas, Texas.

Foto di John McStravick, licenza CC BY 2.0, via Wikimedia Commons (consultato il 21 luglio 2026)



Figura 2.56: N. Foster. *Cupola del Bundestag* (1999). Berlino. Foto di F. Pascullo, licenza CC BY-SA 4.0, via Wikimedia Commons (consultato il 21 luglio 2026)



Figura 2.57: N. Foster. *Cupola del Bundestag* (1999), interno. Berlino.

Foto dell'autore, agosto 2023

contemporaneo continui a ricorrere a queste figure. Un esempio recente è il palco dell'*Eurovision Song Contest* 2026, svoltosi a Vienna, costruito attorno a un grande motivo elicoidale che avvolgeva la scena come un vortice di luci: una scelta che non è solo estetica, ma profondamente simbolica. La linea curva, ispirata alla Secessione viennese (di cui Klimt è stato il massimo esponente), risulta essere un'«*espressione di risonanza, sviluppo e movimento musicale, incarna connessione, emozione e fascino viennese*» (*Eurovision Song Contest*, 2026) [Figura 2.60].



Figura 2.58: N. Foster. *110 The Queen's Walk*, già *City Hall* (2002). Londra.

Foto di Garry Knight, licenza CC BY-SA 2.0, via Wikimedia Commons (consultato il 21 luglio 2026)



Figura 2.59: N. Foster. *110 The Queen's Walk*, già *City Hall* (2002), interno. Londra.

Foto di Colin, licenza CC BY-SA 4.0, via Wikimedia Commons (consultato il 21 luglio 2026)



Figura 2.60: F. Wieder, *Palco dell'Eurovision Song Contest* (2026). Wiener Stadthalle, Vienna.

https://www.eurovision.com (consultato il 21 luglio 2026)

# Conclusione

Le coniche e le spirali non esauriscono il panorama delle curve che hanno influenzato l'arte e la scienza. Sono state scelte perché sono curve che hanno fondato la storia umana, che hanno modellato edifici, strumenti, immagini, simboli; hanno permesso alla matematica di diventare linguaggio della natura e alla natura di diventare modello per la matematica.
I matematici, nel corso dei millenni, hanno studiato innumerevoli forme geometriche che nascono da principi diversi, come l'equilibrio, o l'ottimizzazione, o la gravità, o la curvatura... Alcune di queste forme, poi, hanno esercitato un'influenza profonda sull'arte, come ad esempio la catenaria e le superfici minime.

La catenaria è la curva descritta da una catena (da qui il nome) sospesa tra due punti e soggetta soltanto alla forza di gravità. La sua equazione fu ricavata nel XVII secolo in un momento storico in cui la matematica iniziava a confrontarsi con problemi di natura fisica e variazionale. La catenaria è una curva "naturale": nasce, infatti, da un principio fisico e non da una costruzione geometrica. Questa caratteristica l'ha resa un modello privilegiato per l'architettura: Gaudí la utilizzò sistematicamente in gran parte delle sue opere, per esempio per il profilo e le volte delle navate nella Sagrada Família e per il sottotetto di Casa Milà.

Una superficie minima è una superficie che minimizza l'area sotto dei vincoli assegnati: l'elicoide di cui si è già parlato ne è un esempio. Queste superfici hanno influenzato profondamente l'architettura contemporanea: le coperture a membrana e le tensostrutture di Frei Otto (1925-2015) si basano su superfici che richiamano l'andamento delle superfici minime.

Le curve e le superfici trattate mostrano che la relazione tra matematica e arte non è un semplice rapporto di imitazione, quanto piuttosto di trasformazione; per esempio la spirale diventa una voluta; l'elica diventa una scala; la conica diventa una copertura...
Si è ampiamente visto che una stessa curva può comparire in un edificio, in un dipinto o in un oggetto con ruoli profondamente diversi. In particolare, si possono considerare (almeno) quattro modi diversi in cui le forme matematiche sono utilizzate nell'arte:

- Innanzitutto, una curva o una superficie matematica può comparire così com'è, nella sua forma più rigorosa. In questo caso la matematica risulta essere una necessità strutturale: la forma è determinata da un'equazione o da una legge geometrica. Due chiari esempi sono la sfera che caratterizza la chiesa madre di Gibellina e la cupola ellissoidale del Bundestag a Berlino.

- Più frequentemente, le curve matematiche vengono prese come modelli ideali, come punti di riferimento che guidano la progettazione, ma che non vengono realizzate in modo rigoroso. In questi casi, se da una parte, la matematica fornisce una visione, dall'altra, la costruzione reale introduce adattamenti e compromessi. Per esempio, le volute ioniche sembrano tendere a spirali logaritmiche; eppure sono costituite da nient'altro che archi di cerchio con molteplici centri, come ricordano Vitruvio e Palladio. Stesso discorso vale per le piante ellittiche dall'Antica Roma al Barocco che tutto sono tranne che ellissi a causa delle enormi difficoltà nel disegnarle. Un caso particolare sono le colonne coclidi romane, dove l'andamento elicoidale presenta diverse imperfezioni (per esempio, lo spazio tra le spire non segue un andamento rigoroso).

- A volte, gli artisti puntano solo a una somiglianza intuitiva; in tal caso, la curva matematica non è né esatta né approssimata, ma semplicemente ricordata. L'occhio umano riconosce per assonanza un andamento che richiama una curva matematica, ma non vi è intenzione di riprodurla. Basti pensare

alle primissime spirali comparse già nella preistoria, senza che ci fossero degli studi matematici alla base.

- Inoltre, la curva matematica è stata spesso utilizzata come simbolo. Le forme geometriche diventano così un segno con un significato. Basti pensare alla molteplicità di significati che il cerchio ha assunto nel corso dei millenni, da simbolo del divino nel Medioevo all'astrazione pura di Kandinskij; oppure si pensi ai dipinti di Van Gogh o di Klimt: non sono noti loro studi matematici, eppure entrambi hanno rappresentato delle spirali (sarebbe meglio dire curve simili a spirali); come si è visto, però, la spirale nelle loro opere assume un significato profondo: in Van Gogh rappresenta il tormento interiore dell'artista, in Klimt diventa simbolo di vita e di crescita.

### Verso l'infinito e oltre

Per chiudere questa trattazione sul rapporto tra curve e superfici nella matematica e nell'arte è interessante richiamare una forma che ha segnato in profondità l'evoluzione del pensiero matematico e che ancora oggi continua a essere rappresentata con messaggi e significati spesso impropri dalla gente comune: la **lemniscata** di Bernoulli (o simbolo dell'infinito $\infty$). Come si è visto, Bernoulli aveva dedicato alla spirale logaritmica la sua celebre frase "*Trasformato nella stessa dimensione, risorgerò*". Anche se riferita alla spirale logaritmica, in verità è la sua lemniscata che sembra incarnarne davvero il senso: una curva che, seppur finita, contiene in sé l'idea di movimento infinito, una curva che attraversa un centro e poi riparte, che si apre e si richiude, creando un loop continuo.
Concludere con la lemniscata significa riconoscere che la matematica e l'arte, anche se diverse, possono condividere lo stesso fine: la ricerca dell'infinito, qualsiasi esso sia. La lemniscata diventa la curva che ricorda che la matematica non è soltanto un linguaggio per descrivere il mondo, ma un modo per immaginare ciò che il mondo non può contenere: l'infinito (e oltre).



Figura 2.61: B. Thanner. *Infinity of Light* (2025). Votivkirche, Vienna.

Foto di Katharina Schiffl, https://www.billithanner.at (consultato l' 1 settembre 2026)

# Bibliografia


Adam, C., & Tannery, P. (1898). *Ouvres des Descartes* (Vol. II). Léopold Cerf, Imprimeur-Editeur.

Amogh, N. P. (2026). Cathedral of Brasília. *Studio Matrx - The architecture canon.*

Apollonio. (1924). *Les coniques.* Desclée de Brouwer.

Arenzi, F. (9 giugno 2026). Mastrovito: "Nel mio Agnello per la Sagrada Família risplende la luce del cosmo". *Avvenire.*

Bernoulli, J. (maggio 1692). Lineae cycloidales, evolutae, ant-evolutae, causticae, anticausticae, pericausticae; earum usus et simplex relatio ad se invicem; Spira mirabilis. *Acta Eruditorum.*

Bernoulli, J. (1742). *Opera omnia* (Vol. I). Marc-Michel Bousquet et Sociorum.

Boyer, C. B. (1980). *Storia della matematica.* Arnoldo Mondadori Editore.

Colistra, D., & Mediati, D. (Giugno 2022). Geometrie e proporzioni nelle architetture di Ludovico Quaroni e Francesco Venezia a Gibellina Nuova. *Disegnare idee immagini, 64.*

Coolidge, J. L. (1968). *A history of the conic sections and quadric surfaces.* Dover Publications.

Courant, R., & Robbins, H. (1941). *What is Mathematics.* Oxford University Press.

Crescenzi, C. (2025). Genesi delle forme complesse nell'architettura di Gaudì. *Tribelon, 2.3.*

Cresci, L. (1998). *Le curve celebri. Invito alla storia della matematica attraverso le curve piane più affascinanti.* Franco Muzzio Editore.

Cricco, G., & Di Teodoro, F. P. (2012a). *Il Cricco Di Teodoro. Itinerario nell'arte 2 - Dall'arte paleocristiana a Giotto.* Zanichelli Editore.

Cricco, G., & Di Teodoro, F. P. (2012b). *Il Cricco Di Teodoro. Itinerario nell'arte 3 - Dal Gotico Internazionale al Manierismo*. Zanichelli Editore.

Cricco, G., & Di Teodoro, F. P. (2012c). *Il Cricco Di Teodoro. Itinerario nell'arte 4 - Dal Barocco al Postimpressionismo*. Zanichelli Editore.

Cricco, G., & Di Teodoro, F. P. (2012d). *Il Cricco Di Teodoro. Itinerario nell'arte 5 - Dall'Art Nouveau ai giorni nostri*. Zanichelli Editore.

D'Amore, B. (2015). *Arte e matematica. Metafore, analogie, rappresentazioni, identità tra due mondi possibili*. Edizioni Dedalo.

De Carlo, L., & Paris, L. (2019). *Le linee curve per l'architettura e il design*. Franco Angeli.

Descartes, R. (1954). *Géométrie*. A cura di D.E. Smith e M.L. Latham. Dover Publications.

Di Paola, F., & Pedone, P. (Ottobre 2016). Genesi geometrica della scala di Momo ai Musei Vaticani. *Life Safety and Security*, *4*.

Docci, M. (1999). La forma del Colosseo: dieci anni di ricerche. Il dialogo con i gromatici romani. *Disegnare idee immagini*, *18/19*.

Docci, M. (Luglio 2003). Hagia Sophia. Analisi del rilevamento interno. *Disegnare idee immagini*, *26*.

Emmer, M. (1991). *La perfezione visibile*. Edizioni Theoria.

Emmer, M. (2006). *Visibili armonie. Arte, Cinema, Teatro e Matematica*. Bollati Boringhieri editore.

Emmer, M. (2009). *Bolle di sapone*. Bollati Boringhieri editore.

*Enciclopedia Treccani*. (2026). Istituto della enciclopedia italiana fondata da Giovanni Treccani S.p.A.

Esposito, F., & Michetti, A. (Dicembre 1996). Il Pantheon: teoria e tecnica della commodulatio. *Disegnare idee immagini*, *13*.

*Eurovision Song Contest*. (2026). eurovision.com.

Filocamo, G. (2017). *La matematica è un'opera d'arte. I numeri e le forme che ispirano la bellezza*. Gribaudo.

Inglese, C. (Dicembre 2017). Dalla pratica alla trattazione teorica: le incisioni delle volute ioniche. *Disegnare idee immagini*, *55*.

Jobson, C. (27 marzo 2017). Lines in the Sand: Artist Jim Denevan Turns Beaches into Temporary Geometric Artworks. *Colossal*.

Kandinskij, V. (1989). *Lo spirituale nell'arte*. SE.

Kline, M. (1976). *La matematica nella cultura occidentale*. Feltrinelli Editore.

Loria, G. (1930a). *Curve piane speciali: teoria e storia* (Vol. 1 - Curve algebriche). Hoepli.

Loria, G. (1930b). *Curve piane speciali: teoria e storia* (Vol. 2 - Curve trascendenti, curve dedotte da altre). Hoepli.

Martines, G. (1983). La struttura della Colonna Traiana: un'esercitazione di meccanica alessandrina. *Prospettiva, 32*.

McMahon, J. (9 agosto 2015). Bruce Nauman, The True Artist Helps the World by Revealing Mystic Truths. *smarthistory.com*.

Mezzetti, C. (Dicembre 1992). La Sagrada Familia di Gaudì. Ricerca di un'eredità. *Disegnare idee immagini, 5*.

Migliari, R., Baglioni, L., Romor, J., & Marta, S. (2014-2015). Appunti di Fondamenti e Applicazioni di Geometria Descrittiva. *Facoltà di Architettura - Università "La Sapienza", Roma*.

Palladio, A. (1570). *I Quattro Libri dell'Architettura*.

Rubertis, R. d. (1999). Un enigma avvincente: il tracciato planimetrico ellittico del Colosseo. *Disegnare idee immagini, 18/19*.

Sala, N., & Cappellato, G. (2003). *Viaggio matematico nell'arte e nell'architettura*. Franco Angeli.

Salvadori, M. (2007). *Perché gli edifici stanno in piedi*. Bompiani.

Sammarone, S. (2010). Il capitello ionico. In *Disegno e rappresentazione*. Zanichelli Editore.

Tannery, P., & Henry, C. (1894). *Œuvres de Fermat*. Gauthier Villars.

Valerio, V. (Giugno 1993). Sul disegno e sulla forma degli anfiteatri. *Disegnare idee immagini, 6*.

Van Gogh, V. (1984). *Lettere a Theo*. Ugo Guanda Editore.

# Elenco delle figure

1.1 Costruzione di Menecmo . . . . . 11

1.2 Teorema di Pascal applicato a un esagono inscritto in un'ellisse. . . 21

1.3 Applicazione del lemma XXI dei *Principia* di Newton. . . . . 23

1.4 Quadratura di una lunula. . . . . 29

1.5 Quadratura del cerchio (Dinostrato). . . . . 30

1.6 Teatro di Dioniso (V-IV secolo a.C.). Acropoli, Atene.
Foto di dronepicr, licenza CC BY 2.0, via Wikimedia Commons (consultato il 29 luglio 2026) 37

1.7 Colosseo (I secolo). Roma.
Foto di FeaturedPics, licenza CC BY-SA 4.0, via Wikimedia Commons (consultato il 29 luglio 2026) . . . . . 37

1.8 Colosseo (I secolo), sovrapposizione in pianta di ellisse e ovale (in verde). (De Carlo & Paris, 2019) . . . . . 37

1.9 Acquedotto romano (I-II secolo). Segovia, Spagna.
Foto di Bernard Gagnon, licenza CC BY-SA 3.0, via Wikimedia Commons (consultato il 30 luglio 2026) . . . . . 39

1.10 Ponte Milvio (110-109 a.C.). Roma.
Foto di Kyle Van Horn, licenza CC BY 2.0, via Wikimedia Commons (consultato il 30 luglio 2026) . . . . . 39

1.11 Mausoleo di Santa Costanza (IV secolo), interno. Roma.
Foto di Grosseto2, licenza CC BY-SA 4.0, via Wikimedia Commons (consultato il 30 luglio 2026) . . . . . 39

1.12 Santo Stefano Rotondo (468-483 circa), interpretazione prospettica della chiesa originale. Roma.
Disegno di MM, sulla base di una ricostruzione grafica di Spencer Corbett, via Wikimedia Commons (consultato il 30 luglio 2026) . . . . . 39

1.13 Mausoleo di Galla Placidia, mosaico della cupola (450 circa). Ravenna.
Foto di Commonists, licenza CC BY-SA 4.0, via Wikimedia Commons (consultato il 30 luglio 2026) . . . . . 42

1.14 Santa Maria Maggiore, particolare del mosaico dell'arco trionfale (V secolo). Roma. Foto di MM, licenza CC BY-SA 3.0, via Wikimedia Commons (consultato il 30 luglio 2026) . . . . . 42

1.15 Santa Maria Maggiore, mosaico del catino absidale (1296). Roma.
Foto di Jastrow, via Wikimedia Commons (consultato il 30 luglio 2026) . . . . . 42

1.16 Battistero di San Giovanni, mosaico della cupola (1240-1310). Firenze.
Foto di Matthias Kabel, licenza CC BY-SA 3.0, via Wikimedia Commons (consultato il 30 luglio 2026) . . . . . 43

1.17 Cattedrale (1200-1210 circa), particolare della facciata del transetto meridionale. Chartres.
Foto di Zairon, licenza CC BY-SA 4.0, via Wikimedia Commons (consultato il 31 luglio 2026) 46

1.18 Cattedrale (1200-1210 circa), rosone del transetto meridionale. Chartres.
Foto di PtrQs, licenza CC BY-SA 3.0, via Wikimedia Commons (consultato il 31 luglio 2026) 46

1.19 Studio delle proporzioni nella facciata del Tempio Malatestiano di L. B. Alberti. Rimini.
Foto di Benjamin Matthews, licenza CC BY-SA 4.0, via ResearchGate (consultato il 31 luglio 2026) . . . . . 46

1.20 P. della Francesca. *Sacra conversazione* (1472-1474). Olio e tempera su tavola, Pinacoteca di Brera, Milano. https://pinacotecabrera.org (consultato il 31 luglio 2026) . . . . . 46

1.21 D. Bramante. *Tempietto di san Pietro in Montorio* (1502-1509 circa). Roma.
Foto di Quinok, licenza CC BY-SA 3.0, via Wikimedia Commons (consultato l' 1 agosto 2026) 49

1.22 M. Buonarroti. *Tomba di Giuliano duca di Nemours* (1524-1534). Marmo, Sagrestia Nuova di San Lorenzo, Firenze. Foto di Francesco Bini, licenza CC BY-SA 4.0, via Wikimedia Commons (consultato l' 1 agosto 2026) . . . . . 49

1.23 M. Buonarroti. *Biblioteca Laurenziana* (1524-1559), veduta del vestibolo. Firenze.
Foto di Richard Mortel, licenza CC BY-SA 2.0, via Wikimedia Commons (consultato l' 1 agosto 2026) . . . . . 49

1.24 M. Buonarroti. *Piazza del Campidoglio* (1539-1940). Roma.
Foto di Orioloromano observatory, licenza CC BY-SA 4.0, via Wikimedia Commons (consultato l' 1 agosto 2026) . . . . . 49

1.25 G. L. Bernini. Colonnato di *Piazza San Pietro* (1657-1665). Vaticano, Roma. Foto di David Iliff, licenza CC BY-SA 3.0, via Wikimedia Commons (consultato l' 1 agosto 2026) . . . . . 51

1.26 G. Guarini. *Cappella della Santa Sindone* (1667-1690), disegni di G. T. Borgonio (*Theatrum Sabaudiae*, 1682).
Foto da Wikimedia Commons (consultato il 2 agosto 2026) . . . . . 51

1.27 G. Guarini. *Palazzo Carignano* (1679-1685), facciata interna. Torino.
Foto di Zairon, licenza CC BY-SA 4.0, via Wikimedia Commons (consultato il 2 agosto 2026) 51

1.28 V. Kandinskij. *Alcuni cerchi* (1926). Olio su tela, The Solomon R. Guggenheim Museum, New York.
Foto del Solomon R. Guggenheim Museum, via Wikimedia Commons (consultato il 3 agosto 2026) . . . . . 55

1.29 M. Russell. *Sincromia n. 7 in 4 parti* (1914-1915). Olio su tela, Whitney Museum of American Art, New York.
Foto del Whitney Museum of American Art, via Wikimedia Commons (consultato il 3 agosto 2026) . . . . . 55

1.30 M. C. Escher. *Limite del cerchio IV* (1960).

All M.C. Escher works ©2026 The M.C. Escher Company - The Netherlands. All rights reserved. Used by permission. www.mcescher.com . . . . . 55

1.31 V. Vasarely. *Vega-Pal* (1969). Vernice su tela, Musée Unter Linden, Colmar.

Foto del Musée Unter Linden, https://www.musee-unterlinden.com (consultato il 3 agosto 2026) 55

1.32 F. Stella. *Harran II* (1967). Polimeri su tela, The Solomon R. Guggenheim Museum, New York.

Foto del Solomon R. Guggenheim Museum, https://www.guggenheim.org (consultato il 3 agosto 2026) . . . . . 57

1.33 M. Botta. *Chiesa di San Giovanni Battista* (1986-1996). Mogno, Lavizzara, Svizzera.

Foto di Monster4711, licenza CC BY-SA 4.0, via Wikimedia Commons (consultato il 4 agosto 2026) . . . . . 57

1.34 S. Calatrava Vals. *Ponte Europa* (1996-2000). Orléans, Francia.

Foto di U4you, licenza CC BY-SA 3.0, via Wikimedia Commons (consultato il 4 agosto 2026) 57

1.35 P. Rostovsky. *Epiphany Model 2* (2001). Olio su tela, plastica, argilla auto-indurente.

Foto di P. Rostovsky. Used by permission. https://www.peterrostovsky.com (consultato il 4 agosto 2026) . . . . . 57

1.36 Grafici di quadriche non degeneri.

Foto di Sam Derbyshire, licenza CC BY-SA 3.0, via Wikimedia Commons (consultato il 7 agosto 2026) . . . . . 62

1.37 *Pantheon* (112-128), interno. Roma.

Foto di Sarahhoa, licenza CC BY-SA 2.0, via Wikimedia Commons (consultato l' 8 agosto 2026) 65

1.38 Meridiani e paralleli di una cupola.

(Salvadori, 2007) . . . . . 65

1.39 Sovrapposizione dello schema matematico sulla sezione longitudinale del Pantheon. (Esposito & Michetti, Dicembre 1996) . . . . . 65

1.40 Pianta di *Haghìa Sophìa* (532-537). Istanbul.

(Cricco & Di Teodoro, 2012a) . . . . . 68

1.41 *Haghìa Sophìa* (532-537), interno. Istanbul.
Foto di Julian Lupyan, licenza CC0 1.0, via Wikimedia Commons (consultato il 10 agosto 2026) 68

1.42 F. Brunelleschi. *Cupola di Santa Maria del Fiore* (1420-1471). Firenze. Foto dell'autore, gennaio 2022 . . . . . 68

1.43 Parallelismo tra curva emisferica e cupola ottagonale.
(Cricco & Di Teodoro, 2012b) . . . . . 68

1.44 M. Buonarroti e continuatori. *Cupola della Basilica di San Pietro* (1588-1590). Vaticano, Roma.
Foto di Wolfgang Stuck, via Wikimedia Commons (consultato l' 11 agosto 2026) . . . . . 70

1.45 G. L. Bernini. *Sant'Andrea al Quirinale* (1658-1676), interno della cupola. Roma.
Foto di Architas, licenza CC BY-SA 4.0, via Wikimedia Commons (consultato l' 11 agosto 2026) . . . . . 70

1.46 F. Borromini. *San Carlo alle Quattro Fontane* (1638-1667), interno della cupola. Roma.
Foto di Architas, licenza CC BY-SA 4.0, via Wikimedia Commons (consultato l' 11 agosto 2026) . . . . . 70

1.47 F. Borromini. *San Carlo alle Quattro Fontane* (1638-1667), facciata. Roma.
Foto di Architas, licenza CC BY-SA 4.0, via Wikimedia Commons (consultato l' 11 agosto 2026) . . . . . 70

1.48 É.-L. Boullée. *Cenotafio di Newton. Esterno di notte* (1784). Inchiostro e acquerello, Bibliothèque Nationale, Cabinet des Estampes, Parigi.
Foto via Wikimedia Commons (consultato l' 11 agosto 2026) . . . . . 73

1.49 S. Dalì. *Galatea delle Sfere* (1952). Dalí Theatre and Museum, Figueres (Spagna).
Foto via https://www.salvador-dali.org (consultato il 12 agosto 2026) . . . . . 73

1.50 A. Pomodoro. *Sfera con sfera* (1991). Sede del'ONU, New York.
Foto di ikiya, licenza CC BY-SA 2.0, via Wikimedia Commons (consultato il 12 agosto 2026) 73

1.51 A. Gaudì. *Sagrada Familia* (1882-presente). Barcellona.
Foto della Fondazione Sagrada Família, https://sagradafamilia.org (consultato il 13 agosto 2026) . . . . . 76

1.52 A. Gaudì. *Sagrada Familia* (1882-presente), particolare di un pinnacolo. Barcellona.
Foto di FrDr, licenza CC BY-SA 4.0, via Wikimedia Commons (consultato il 13 agosto 2026) 76

1.53 A. Gaudì. *Sagrada Familia* (1882-presente), pinnacolo della torre della Vergine Maria. Barcellona.
Foto di Fondazione Sagrada Família, https://sagradafamilia.org (consultato il 13 agosto 2026) 76

1.54 A. Gaudì. *Sagrada Familia* (1882-presente), interno della torre della Vergine Maria. Barcellona.
Foto della Fondazione Sagrada Família, https://sagradafamilia.org (consultato il 13 agosto 2026) . . . . . 76

1.55 A. Gaudì. *Sagrada Familia* (1882-presente). Barcellona.
Foto della Fondazione Sagrada Família, https://sagradafamilia.org (consultato il 13 agosto 2026) . . . . . 78

1.56 A. Mastrovito. *Agnus Dei* (2026). Sagrada Familia, Barcellona.
Foto di Fondazione Sagrada Familia, https://sagradafamilia.org (consultato il 13 agosto 2026) 78

1.57 F. Candela. *Ristorante Los Manantiales* (1951-1958). Xochimilco, Messico.
Foto di Dge, licenza CC BY-SA 3.0, via Wikimedia Commons (consultato il 13 agosto 2026) . 78

1.58 O. Niemeyer. *Cattedrale metropolitana* (1958-1970). Brasilia.
Foto di Tissiana de A. de Souza, licenza CC BY-SA 4.0, via Wikimedia Commons (consultato il 14 agosto 2026) . . . . . 78

1.59 N. Foster e K. Shuttleworth. *30 St Mary Axe* (2001-2003). Londra.
Foto di Paste, via Wikimedia Commons (consultato il 14 agosto 2026) . . . . . 81

1.60 M. e D. Fuksas. *Nardini Research Centre and Auditorium* (2002-2004). Bassano del Grappa, Vicenza.
Foto dall'Archivio Fuksas, https://fuksas.com (consultato il 14 agosto 2026) . . . . . 81

1.61 L. Quaroni. *Chiesa madre* (1970-1972). Gibellina, Trapani.
Foto della D. G. Creatività Contemporanea, https://censimentoarchitetturecontemporanee.cultura.gov.it (consultato il 14 agosto 2026) . . . . . 81

1.62 Populous. *Sphere* (2019-2023). Las Vegas, USA.
Foto di Harold Litwiler, licenza CC BY-SA 2.0, via Wikimedia Commons (consultato il 14 agosto 2026) . . . . . 81

2.1 Anfore in stile Kamares del XIX secolo a.C. con decorazioni a spirale. Foto di ArchaiOptix, licenza CC BY-SA 4.0, via Wikimedia Commons (consultato il 21 luglio 2026) . . . . . 84

2.2 Grafico della spirale di Archimede con a=1. . . . . 86

2.3 Trisezione di un angolo tramite una spirale. . . . . 86

2.4 Grafico della spirale di Fermat con a=1. . . . . 88

2.5 Grafico della spirale iperbolica con a=10. . . . . 89

2.6 Grafico della spirale logaritmica con a=1/5 e $\cot(\alpha) = 1/5$. . . . . 91

2.7 Costruzione iterativa di rettangoli aurei. . . . . 91

2.8 Grafico della spirale aurea con a=1. . . . . 92

2.9 Particolare della tomba di Jacques Bernoulli, Basilea.
Foto di Wladyslaw Sojka, Licenza Arte Libera, via Wikimedia Commons (consultato il 21 luglio 2026) . . . . . 94

2.10 Grafico del lituo con a=10 . . . . . 95

2.11 Grafico della clotoide . . . . . 96

2.12 Spirali in natura.
Foto in alto a sinistra di J Brew, licenza CC BY-SA 2.0, via Wikimedia Commons (consultato il 21 luglio 2026)
Foto in alto a destra della NASA, via Wikimedia Commons (consultato il 21 luglio 2026)
Foto in basso a sinistra di Chris 73, licenza CC BY-SA 3.0, via Wikimedia Commons (consultato il 21 luglio 2026)
Foto in basso a destra di ESA/Hubble, licenza CC BY-SA 3.0, via Wikimedia Commons (consultato il 21 luglio 2026) . . . . . 98

2.13 Incisione rupestre nella grotta di Djerat (Algeria del Sud). Foto di Fondazione Passaré, licenza CC BY-SA 3.0, via Wikimedia Commons (consultato il 21 luglio 2026) . . . . . 100

2.14 Incisione su terreno raffigurante una scimmia a Nazca (Perù). Foto di Diego Delso, licenza CC BY-SA 4.0, via Wikimedia Commons (consultato il 21 luglio 2026) . . . . . 100

2.15 Particolare della Porta Est dello Stupa di Sanchi (India). Foto di Photo Dharma, licenza CC BY-SA 2.0, via Wikimedia Commons (consultato il 21 luglio 2026) . . . . . 100

2.16 Pettorale spiraliforme in oro (1300-1600 circa), Museo del Oro, Bogotà. (D'Amore, 2015) . . . . . 101

2.17 Sfinge in pietra (570-560 a.C.), Museo archeologico nazionale di Chiusi, Siena. Foto di riccardo, licenza CC BY-SA 2.0, via Wikimedia Commons (consultato il 21 luglio 2026) . . . . . 101

2.18 Costruzione delle volute di un capitello ionico secondo Palladio. (Sammarone, 2010) . . . . . 102

2.19 V. Van Gogh. *Autoritratto* (1889). Olio su tela, Museo d'Orsay, Parigi. Foto di Musée d'Orsay, via Wikimedia Commons (consultato il 21 luglio 2026) . . 105

2.20 V. Van Gogh. *Notte stellata* (1889). Olio su tela, MoMA, New York. Digitalizzazione di Google Art Project, via Wikimedia Commons (consultato il 21 luglio 2026) 105

2.21 G. Klimt. Particolari del *Fregio Stoclet* (1905–1909). Mosaico, Museo delle arti applicate, Vienna. Digitalizzazione di Google Art Project, via Wikimedia Commons (consultato il 21 luglio 2026) 107

2.22 G. Klimt. *Giuditta II* (1909). Olio su tela, Galleria d'Arte Moderna, Venezia. Foto di Didier Descouens, licenza CC BY-SA 4.0, via Wikimedia Commons (consultato il 21 luglio 2026) . . . . . 110

2.23 G. Klimt. *Ritratto di Adele Bloch-Bauer* (1907). Olio su tela, Neue Galerie, New York. Foto di Neue Galerie, via Wikimedia Commons (consultato il 21 luglio 2026) . . . . . 110

2.24 G. Klimt. *Il bacio* (1907-1908). Olio su tela, Osterreichische Galerie Belvedere, Vienna.
Digitalizzazione di Google Art Project, via Wikimedia Commons (consultato il 21 luglio 2026) 110

2.25 R. Smithson. *Spiral Jetty* (1970). Utah, Great Salt Lake.
Foto di Netherzone, licenza CC BY-SA 4.0, via Wikimedia Commons (consultato il 21 luglio 2026) . . . . . 112

2.26 J. Denevan. *Senza titolo* (2010). California, Santa Cruz.
(Jobson, 27 marzo 2017) . . . . . 112

2.27 J. Denevan. *Self Similar* (2023). Manar Abu Dhabi.
https://abudhabiculture.ae (consultato il 21 luglio 2026) . . . . . 112

2.28 B. Nauman. *The True Artist Helps the World by Revealing Mystic Truths* (1967). Neon trasparente, Philadelphia Museum of Art.
(McMahon, 9 agosto 2015) . . . . . 112

2.29 Confronto tra spirale conica ed elica conica. (De Carlo & Paris, 2019) . 114

2.30 Grafici di eliche cilindriche con $r = 2$ e $c = \pm 1$. . . . . 115

2.31 Grafico di un elicoide retto con $h = 1$. . . . . 116

2.32 Doppia elica del DNA.
Immagine di Mstroeck, licenza CC-BY-SA-3.0, via Wikimedia Commons (consultato il 21 luglio 2026) . . . . . 117

2.33 P. Bruegel il Vecchio. *La grande torre di Babele* (1563). Olio su tavola, Kunsthistorisches Museum, Vienna.
Digitalizzazione di Google Art Project, via Wikimedia Commons (consultato il 21 luglio 2026) 119

2.34 *Minareto della Grande Moschea di al-Mutawakkil* (848-852). Samarra, Iraq.
Foto di Chris Hoare, licenza CC BY-SA 4.0, via Wikimedia Commons (consultato il 21 luglio 2026) . . . . . 119

2.35 *Colonna traiana* (113). Roma.
Foto di NikonZ7II, licenza CC BY-SA 4.0, via Wikimedia Commons (consultato il 21 luglio 2026) . . . . . 121

2.36 *Colonna di Marco Aurelio* (192-196). Roma.
Foto di WikiRomaWiki, licenza CC BY-SA 4.0, via Wikimedia Commons (consultato il 21 luglio 2026) . . . 121
2.37 Facciata della *Chiesa di San Carlo Borromeo* (XVIII secolo). Karlsplatz, Vienna. Foto di Thomas Ledl, licenza CC BY-SA 4.0, via Wikimedia Commons (consultato il 21 luglio 2026) . . . 122
2.38 D. Bramante. *Rampa elicoidale del Belvedere* (1505). Palazzo Apostolico, Vaticano, Roma. (De Carlo & Paris, 2019) . . . 122
2.39 A. Palladio. Tavole tratte da *I quattro libri dell'Architettura* (1570). Venezia. (De Carlo & Paris, 2019) . . . 123
2.40 L. Paris. *Rilievo della scala elicoidale del Mascarino.* Palazzo del Quirinale, Roma. (De Carlo & Paris, 2019) . . . 126
2.41 Il Mascarino. *Scala elicoidale* (1585). Palazzo del Quirinale, Roma.
Foto di Kent Wang, licenza CC BY-SA 2.0, via Wikimedia Commons (consultato il 21 luglio 2026) . . . 126
2.42 L. Paris. *Rilievo della scala elicoidale di Borromini.* Palazzo Barberini, Roma. (De Carlo & Paris, 2019) . . . 126
2.43 F. Borromini. *Scala elicoidale* (1633). Palazzo Barberini, Roma.
Foto di Marcovarro, https://palazzobarberini.com (consultato il 21 luglio 2026) . . . 126
2.44 F. Borromini. *Chiesa di Sant'Ivo alla Sapienza* (1642-1660). Roma.
Foto di Paris Orlando, licenza CC BY-SA 4.0, via Wikimedia Commons (consultato il 21 luglio 2026) . . . 128
2.45 F. Borromini. *Chiesa di Sant'Ivo alla Sapienza* (1642-1660), particolare della lanterna. Roma.
Foto di MM, via Wikimedia Commons (consultato il 21 luglio 2026) . . . 128
2.46 G. L. Bernini. *Baldacchino di San Pietro* (1624-1633). Basilica di San Pietro in Vaticano, Roma.
Foto di Jebulon, licenza CC0 1.0, via Wikimedia Commons (consultato il 21 luglio 2026) . . . 128
2.47 A. Gaudí. *Casa Milà* (1906-1912), particolare di un camino. Barcellona. Foto di Jaume Meneses, licenza CC BY-SA 2.0, via Wikimedia Commons (consultato il 21 luglio 2026) . . . 131

2.48 A. Gaudí. *Parc Güell* (1900-1926), torre a doppia elica. Barcellona. Foto di Craig Sunter, licenza CC BY 2.0, via Wikimedia Commons (consultato il 21 luglio 2026) 131

2.49 A. Gaudí. *Sagrada Família* (1882-presente), scala elicoidale. Barcellona. Foto di Matti Blume, licenza CC BY-SA 4.0, via Wikimedia Commons (consultato il 21 luglio 2026) . . . . . 131

2.50 A. Gaudí. *Sagrada Família* (1882-presente), scala elicoidale. Barcellona. Foto di José L. B. Ribeiro, licenza CC BY-SA 3.0, via Wikimedia Commons (consultato il 21 luglio 2026) . . . . . 131

2.51 G. Momo. *Scalone d'ingresso ai Musei Vaticani* (1929-1933). Città del Vaticano, Roma. Foto di Colin, licenza CC BY-SA 3.0, via Wikimedia Commons (consultato il 21 luglio 2026) . . . . . 133

2.52 F. L. Wright. *Solomon R. Guggenheim Museum* (1943-1959), rampa interna vista dal basso. New York. Foto di David Heald, https://www.nyctourism.com (consultato il 21 luglio 2026) . . . . . 133

2.53 F. L. Wright. *Solomon R. Guggenheim Museum* (1943-1959), esterno. New York. https://www.guggenheim.org (consultato il 21 luglio 2026) . . . . . 133

2.54 V. Tatlin. *Monumento alla Terza Internazionale* (1919-1920). Mosca. Foto di Nikolai Punin, via Wikimedia Commons (consultato il 21 luglio 2026) . . . . . 135

2.55 F. Johnson. *Cappella del Thanks-Giving Park* (1976). Dallas, Texas. Foto di John McStravick, licenza CC BY 2.0, via Wikimedia Commons (consultato il 21 luglio 2026) . . . . . 135

2.56 N. Foster. *Cupola del Bundestag* (1999). Berlino. Foto di F. Pascullo, licenza CC BY-SA 4.0, via Wikimedia Commons (consultato il 21 luglio 2026) . . . . . 135

2.57 N. Foster. *Cupola del Bundestag* (1999), interno. Berlino. Foto dell'autore, agosto 2023 . . . . . 135

2.58 N. Foster. *110 The Queen's Walk*, già *City Hall* (2002). Londra. Foto di Garry Knight, licenza CC BY-SA 2.0, via Wikimedia Commons (consultato il 21 luglio 2026) . . . . . 137

2.59 N. Foster. *110 The Queen's Walk*, già *City Hall* (2002), interno. Londra.
Foto di Colin, licenza CC BY-SA 4.0, via Wikimedia Commons (consultato il 21 luglio 2026) 137
2.60 F. Wieder, *Palco dell'Eurovision Song Contest* (2026). Wiener Stadthalle, Vienna.
https://www.eurovision.com (consultato il 21 luglio 2026) . . . . . 137
2.61 B. Thanner. *Infinity of Light* (2025). Votivkirche, Vienna.
Foto di Katharina Schiffl, https://www.billithanner.at (consultato l' 1 settembre 2026) . . . 142