

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI BOLOGNA

Dipartimento di Fisica e Astronomia

Corso di Laurea in Astronomia

TESI DI LAUREA

Classificazione spettrale delle stelle

Modelli di atmosfere, fisica dello spettro e conseguenti classificazioni

Relatore:

Prof. Marcella Brusa

Candidato:

Francesca Pesci

Matricola: 0001116987

Anno Accademico 2025–2026

Indice

Introduzione	1
1 Modello e parametri della struttura stellare	1
1.1 Gravità superficiale e pressione	2
2 Lo spettro stellare	2
2.1 Il continuo	2
2.2 Le righe di assorbimento	4
3 Equazioni di Boltzmann e Saha	6
3.1 Equazione di Boltzmann	7
3.2 Equazione di Saha	8
3.3 Comportamento della serie di Balmer	9
4 Classificazione spettrale	10
4.1 Cenni storici	10
4.2 Classificazione di Harvard	10
4.3 Classificazione di Yerkes(MKK)	12
5 Il Diagramma Hertzsprung-Russell (H-R)	13
5.1 Interpretazione Evolutiva delle Regioni del Diagramma H-R	13
6 Analisi dello Spettro Solare	14
6.1 Continuo e Temperatura Efficace	14
6.2 Caratteristiche delle righe spettrali	15
6.3 Effetti di Pressione e classe di Luminosità	15
Bibliografia	16

Introduzione

La spettroscopia è ad oggi il principale strumento dell'astrofisica moderna per analizzare gli astri. Infatti, visto che l'osservazione diretta degli interni stellari ci è preclusa per via delle condizioni estreme e delle grandi distanze, tutte le informazioni che abbiamo su massa, temperatura, composizione e stato evolutivo delle stelle provengono dall'analisi della radiazione elettromagnetica da loro emessa.

Comprendere le principali caratteristiche dello spettro stellare richiede l'utilizzo di diverse branche della scienza, quali la fisica atomica, la termodinamica e la meccanica statistica.

In questo elaborato viene trattato il percorso teorico che porta alla strutturazione di un modello dell'atmosfera stellare fino ad arrivare alla classificazione spettrale che ne consegue e alla posizione occupata sul diagramma H-R. L'elaborato è strutturato come segue:

Nella prima sezione vengono fornite le assunzioni fondamentali del modello sferico in quasi-equilibrio idrodinamico, si delineano le differenze tra interni ed atmosfera, e si pongono le basi fisiche della gravità superficiale g e della pressione nella fotosfera P_{fot} .

Successivamente si esamina lo spettro stellare, fornendo la descrizione dello spettro continuo tramite il modello del corpo nero di Planck, la legge di Wien e la legge di Stefan-Boltzmann. Vengono poi analizzati i meccanismi che stanno alla base della formazione delle righe di assorbimento e della loro misurazione (larghezza equivalente W_λ) e i vari profili di allargamento (naturale, Doppler-termico e Stark).

Nella terza sezione dell'elaborato è sviluppata la trattazione matematica per il calcolo delle popolazioni degli stati eccitati e dei gradi di ionizzazione nelle equazioni di Boltzmann e Saha. Si dimostra teoricamente il comportamento della serie di Balmer dell'idrogeno e il fenomeno del Balmer Jump.

Viene ripercorsa brevemente l'evoluzione storica delle classificazioni spettrali, dai lavori pionieristici di Padre Angelo Secchi fino al sistema di classificazione di Harvard (basato su T_{eff}) e al sistema di Yerkes MKK (che introduce le classi di luminosità legate a $\log g$).

Nella penultima sezione è trattato il diagramma H-R, si ricavano le relazioni geometriche che individuano le rette a raggio costante sul piano $\log L - \log T_{\text{eff}}$ e si fornisce un'interpretazione evolutiva delle diverse regioni occupate dalle stelle, legate alla classificazione della luminosità (Sequenza Principale, Ramo delle Giganti Rosse, Ramo Orizzontale, AGB e Nane Bianche).

Per verificare il modello teorico illustrato nei capitoli precedenti e fornire un riscontro empirico, vengono applicate le equazioni per la popolazione dei livelli di energia e la legge di Stefan-Boltzmann alla fotosfera del Sole, spiegando l'origine della sua classificazione spettrale completa (**G2V**).

1 Modello e parametri della struttura stellare

Una stella è definita in ambito astrofisico come una sfera di gas auto-gravitante in cui la mutua attrazione gravitazionale, che favorisce il collasso della struttura stellare, è bilanciata dalla pressione esercitata dal gas e dalla radiazione, che invece favorisce la disgregazione per agitazione termica.

L'analisi della struttura stellare prevede l'utilizzo di tre assunzioni fondamentali che vanno a semplificare il modello:

1. Viene adottata l'ipotesi di simmetria sferica, tutte le grandezze fisiche dipendono pertanto dalla sola distanza radiale
2. Vengono trascurate in prima approssimazione le forze elettromagnetiche e gli effetti del campo magnetico, assumendo che l'unica forza presente nel sistema sia la forza di gravità
3. Il tempo di rilassamento per piccole deviazioni dello stato di equilibrio idrodinamico è estremamente più breve del tempo necessario per produrre variazioni a livello macroscopico, si parla quindi di quasi-equilibrio.

La struttura stellare è divisibile in due regioni, ovvero gli interni stellari e l'atmosfera stellare. Gli interni stellari costituiscono la quasi totalità del volume della stella e in essi la materia si trova nello stato di plasma ionizzato. In questa regione sono presenti il nucleo, nel quale avvengono le reazioni termonucleari responsabili della produzione di energia, e le zone di trasporto radiativo e convettivo

che portano l'energia verso l'esterno

L'atmosfera stellare rappresenta una minima frazione della massa totale, tuttavia è l'unica regione accessibile per l'osservazione dello spettro elettromagnetico. Si divide in tre regioni, la fotosfera che è lo strato fondamentale da cui ci arriva il flusso continuo e ha una profondità ottica τ dell'ordine dell'unità ($\tau \sim 2/3$), la cromosfera, caratterizzata da un'inversione del gradiente termico e responsabile di emissioni a lunghezze d'onda specifiche (es. $H\alpha$) e la corona, la parte più esterna nonché quella più estesa che presenta densità bassissime e temperature estremamente elevate (10^6K) dovute alle onde sonore e al campo magnetico.

1.1 Gravità superficiale e pressione

La fotosfera viene considerata come la superficie stellare, pertanto per una stella di massa M e raggio R , possiamo scrivere la gravità sulla superficie della fotosfera come la gravità superficiale :

$$g = \frac{GM}{R^2} \quad (1)$$

Per l'equazione dell'equilibrio idrostatico dell'atmosfera, stimando la pressione media P_{fot} alla profondità ottica $\tau \sim 2/3$ con opacità calcolata tramite la media di Rosseland¹ κ :

$$P_{\text{fot}} \approx \frac{2}{3} \frac{g}{\kappa} \quad (2)$$

Dato che il raggio di una stella gigante ($R \sim 10 - 100 R_{\odot}$) o supergigante ($R \sim 100 - 1000 R_{\odot}$) è molto maggiore di quello di una stella nana di pari massa ($R \sim 1 R_{\odot}$), la gravità superficiale g nelle supergiganti risulta di 3 – 5 ordini di grandezza più bassa rispetto alle nane. Di conseguenza, anche la pressione nella fotosfera P_{fot} e la densità numerica di elettroni e ioni N_e risultano proporzionalmente ridotte. Questa distinzione tra i due tipi di stelle tornerà anche nell'equazione di Saha e sarà fondamentale per la comprensione della classificazione di Yerkes.

2 Lo spettro stellare

Avendo definito i parametri fisici che caratterizzano le atmosfere stellari occorre ora esaminare la radiazione emessa da queste ultime, che costituisce un importante tramite osservativo. Lo spettro di una stella è suddivisibile in due sezioni che si possono analizzare separatamente: l'emissione di continuo e le righe di assorbimento.

2.1 Il continuo

Per lo spettro continuo viene utilizzato il modello della radiazione di corpo nero di Planck alla temperatura efficace T_{eff} della stella. Per definire il corpo nero introduciamo la radiazione termica, che è la radiazione emessa da un corpo in funzione della propria temperatura. Se consideriamo l'assorbimento spettrale $\mu(\nu)$, la riflessione spettrale $\rho(\nu)$ e la trasmissione spettrale $\tau(\nu)$ abbiamo che vale la seguente relazione:

$$\mu(\nu) + \rho(\nu) + \tau(\nu) = 1$$

Un corpo nero è un corpo che assorbe tutta la radiazione incidente senza rifletterla ed è in equilibrio con la radiazione stessa. Da queste condizioni e dalla legge di Kirchhoff per cui in un corpo all'equilibrio l'emissività spettrale $\epsilon(\nu)$ è uguale all'assorbimento spettrale $\mu(\nu)$, risulta $\epsilon(\nu) = \mu(\nu) = 1$

Per un corpo nero è possibile dimostrare che l'intensità di radiazione $I(\nu)$ dipende esclusivamente dalla temperatura e dalla frequenza, in particolare:

$$I(\nu) = B(\nu, T)$$

¹La media di Rosseland è calcolata come la trasparenza pesata sulla derivata della funzione di Planck rispetto alla temperatura

dove $B(\nu, T)$ è chiamata funzione di Planck e per un corpo nero assume la seguente forma:

$$B_\nu(\nu, T) = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{k_B T}} - 1}$$

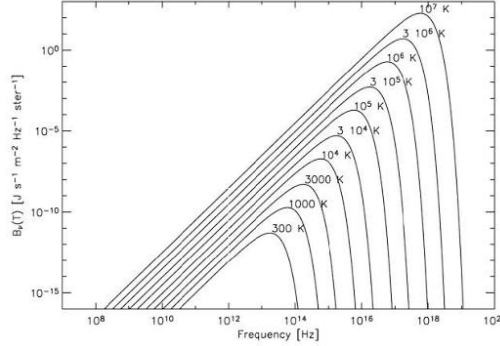


Figura 1: Grafico in scala logaritmica che rappresenta spettri di corpo nero a diverse temperature.

La proprietà fondamentale degli spettri di corpo nero è che non si intersecano mai, lo spettro di un corpo più caldo sarà sempre sopra allo spettro di un corpo più freddo. La frequenza a cui corrisponde il massimo di emissione di corpo nero si può trovare derivando l'espressione di Planck e la sua espressione è chiamata legge di spostamento di Wien:

$$\nu_{max} = 5.88 \cdot 10^{10} \text{ THz} \cdot \text{K}^{-1}$$

Il flusso totale uscente che si ottiene integrando su tutte le frequenze costituisce la legge di Stefan-Boltzmann:

$$F = \int_0^\infty \pi B_\nu(T) d\nu = \sigma T_{\text{eff}}^4, \quad \sigma = \frac{2\pi^5 k^4}{15c^2 h^3} \quad (3)$$

Si può notare che il picco della funzione si sposta linearmente con la temperatura. L'emissione di continuo delle stelle ci fornisce informazione sulla temperatura di brillantezza del corpo celeste, ad esempio osservando lo spettro del sole che ha un picco di emissione a 500 nm possiamo calcolare la temperatura efficace, questo processo può essere applicato a tutte le stelle di cui osserviamo lo spettro. Si può notare che l'andamento reale dello spettro continuo devia dalla funzione teorica di corpo nero a causa della dipendenza dell'opacità κ_ν dalla frequenza.

Una parte importante per andare a strutturare correttamente il modello della fotosfera e studiare lo spettro continuo consiste nel determinare i coefficienti di opacità per le varie frequenze o lunghezze d'onda κ_λ . L'interpretazione del continuo delle stelle di tipo solare è stata un problema per molto tempo poiché non si riusciva a comprendere come l'idrogeno potesse creare un'opacità tale nell'atmosfera da non permettere il passaggio della maggior parte della radiazione proveniente dall'interno stellare. Infatti l'idrogeno nello stato fondamentale ($n = 1$) ha un'energia di ionizzazione pari a $E = 13.6 \text{ eV}$ e quindi necessita di fotoni con lunghezza d'onda $\lambda \leq 912 \text{ \AA}$ (limite di Lyman) per essere ionizzato, mentre per gli atomi nel primo stato eccitato $n = 2$ l'energia di ionizzazione è 3.4 eV che si traduce in una lunghezza d'onda per i fotoni $\lambda \leq 3646 \text{ \AA}$. L'idrogeno atomico neutro non è quindi in grado di spiegare l'opacità dell'atmosfera nella zona del visibile e dell'infrarosso ($4000 \text{ \AA} \leq \lambda \leq 10000 \text{ \AA}$)

La soluzione a questo problema fu trovata nel 1939 da Rupert Wild e si basa sul ruolo dello ione idrogeno negativo H^- [8]. Tale ione è costituito da un sistema legato costituito da un protone e due elettroni, uno legato al protone come nell'idrogeno atomico, l'altro legato in modo molto debole a causa della schermatura parziale della carica del nucleo ad opera del primo elettrone. L'energia di legame del secondo elettrone è pari a:

$$\chi_{H^-} \approx 0.754 \text{ eV} \quad (4)$$

Lo ione H^- necessita di specifiche condizioni fisiche affinché si possa formare e possa rimanere stabile nell'atmosfera stellare. Risulta necessaria la presenza di elettroni liberi, che nella fotosfera sono dovuti alla ionizzazione dei metalli con bassa energia di ionizzazione, circa 6 – 8 eV, quali sodio, magnesio, alluminio, silicio e calcio. L'idrogeno non contribuisce in quanto risulta principalmente neutro alla temperatura della fotosfera, che risulta sufficientemente bassa da far sì che lo ione non si dissocia immediatamente a causa delle collisioni e della radiazione ultra-energetica.

Ci sono tre meccanismi di interazione tra i fotoni e le particelle che causano l'assorbimento del fotone e l'aumento di energia della particella:

- **Transizioni Legato-Legato (*Bound-Bound*):** Un fotone incidente viene assorbito dall'elettrone nel livello di energia E_1 e si sposta a un livello di energia superiore E_2 . Per far avvenire questa transizione il fotone deve avere energia pari alla differenza di energia tra i due livelli: $E_2 - E_1 = h\nu$

Questo tipo di transizione è rilevante nello studio delle righe spettrali, ma non è un processo che definisce l'opacità della fotosfera.

- **Transizioni Legato-Libero (*Bound-Free*):** Processo in cui il fotone incidente presenta un'energia superiore o uguale all'energia di ionizzazione necessaria per strappare un elettrone nel livello legato E_i , il quale si muoverà con un'energia cinetica pari alla differenza tra l'energia dello stato legato e quella del fotone. Nel nostro caso un fotone incidente viene assorbito dall'elettrone più debolmente legato e ne causa la dissociazione dallo ione:



Poiché l'energia minima che deve avere il fotone incidente è $\chi_{H^-} = 0.754$ eV, questo processo richiede fotoni con lunghezza d'onda inferiore rispetto a quelli necessari per ionizzare l'idrogeno neutro:

$$\lambda_{\text{lim}} = \frac{hc}{\chi_{H^-}} \approx 16440 \text{ \AA} \quad (1.644 \text{ }\mu\text{m}) \quad (6)$$

Alla lunghezza d'onda di ≈ 8500 \AA la sezione d'urto e quindi l'efficienza di questo processo raggiunge il suo massimo, questo è dunque il processo principale che causa l'opacità dell'atmosfera solare nel visibile e nel vicino infrarosso.

- **Transizioni Libero-Libero (*Free-Free*):** In questo processo un elettrone libero che si trova nel campo magnetico di uno ione (conservazione dell'energia) assorbe un fotone di qualsiasi energia, acquistando energia cinetica. Per il caso dello ione H^- abbiamo un elettrone libero che si muove nel campo elettrico di un atomo di idrogeno neutro (H), l'elettrone assorbe un fotone aumentando la propria energia cinetica:



Dato che questo processo non presenta alcuna soglia di energia è fondamentale per spiegare l'opacità nelle lunghezze d'onda superiori a $\lambda > 1.64 \text{ }\mu\text{m}$, ovvero nell'infrarosso medio e lontano.

2.2 Le righe di assorbimento

I fotoni emessi dalla fotosfera, lo strato stellare responsabile della formazione del continuo, attraversano le regioni più esterne dell'atmosfera, interagendo con gli atomi e gli ioni. Questa interazione si traduce nell'assorbimento di radiazione a specifiche lunghezze d'onda, dando origine alle righe spettrali di assorbimento tramite transizioni legato-legato. Di conseguenza, il profilo e l'intensità di ciascuna riga forniscono informazioni dirette sulle condizioni fisiche e le abbondanze chimiche dello specifico strato atmosferico in cui il processo ha avuto luogo. Mentre le singole righe sono legate a transizioni tra stati discreti, la trattazione delle transizioni legato-libero troverà applicazione nell'analisi di discontinuità come il Balmer Jump.

La quantità che esprime l'intensità della riga spettrale rispetto al continuo è calcolata come il rapporto tra il valore del flusso che il continuo avrebbe in quel punto, F_c e il valore che il flusso assume a quella data lunghezza d'onda F_λ .

$$1 - \frac{F_c}{F_\lambda} \quad \text{è la profondità della riga}$$

L'intensità della riga spettrale è calcolata univocamente tramite la larghezza a metà altezza (FWHM), ovvero la larghezza di un rettangolo di altezza unitaria con area uguale all'area sottesa dalla riga spettrale rispetto al continuo, definita come segue:

$$W_\lambda = \int \frac{F_c - F_\lambda}{F_c} d\lambda$$

Il centro della riga corrisponde alla lunghezza d'onda λ_0 alla quale vi è il maggior assorbimento, la parte centrale della riga è chiamata core, mentre la regione più esterna è formata dalle ali. Il core viene generato in regioni dell'atmosfera più esterne rispetto a quella in cui si forma il continuo, quindi con un valore di τ minore

Allargamento intrinseco Una riga di assorbimento presenta un profilo $I(\lambda)$ esteso, essa non può essere infinitamente sottile, ovvero apparire come transizione monocromatica infinitesimale, a causa del principio di indeterminazione di Heisenberg:

$$\Delta E \Delta t \geq \frac{h}{2\pi}$$

Siccome parliamo di transizioni che coinvolgono stati eccitati il tempo di permanenza dell'elettrone su un livello eccitato Δt è un valore piccolo.

$$E_{fotone} = \frac{hc}{\lambda} \quad \text{da cui} \quad dE_{fotone} = \frac{hc}{\lambda^2} d\lambda$$

$$\text{Dunque} \quad \Delta E \approx \frac{hc}{\lambda^2} \Delta \lambda \quad \Delta \lambda \frac{hc}{\lambda^2} \approx \frac{h}{2\pi \Delta t}$$

$$\Delta \lambda \approx \frac{\lambda^2}{2\pi c \Delta t}$$

Allargamento Doppler Termico e Turbolento In un corpo fermo rispetto all'osservatore gli atomi si muovono per agitazione termica, dunque le frequenze dei singoli atomi sono spostate o verso il rosso o verso il blu a seconda della direzione della velocità radiale dell'atomo v_r .

A causa dell'effetto Doppler relativistico si ha

$$\nu_{oss} = \nu_{em}(1 + \beta \cos \theta) = \nu_{em}(1 + \frac{v_r}{c})$$

Da cui

$$\Delta \nu_D = \nu_{oss} - \nu_{em} = \nu_{em} \frac{v_r}{c}$$

Ipotizzando una distribuzione di Maxwell-Boltzmann per la velocità radiale possiamo riscrivere la larghezza Doppler $\Delta \nu_D$ come :

$$\Delta \nu_D = \frac{\nu_0}{c} v_{th} = \frac{\nu_0}{c} \sqrt{\frac{2kT}{m_a} + v_{turb}^2} \quad (8)$$

Dove m_a rappresenta la massa dell'atomo assorbente e v_{turb} è la velocità associata alla turbolenza atmosferica. Il profilo di assorbimento assume la seguente forma Gaussiana:

$$\phi_D(\nu) = \frac{1}{\sqrt{\pi} \Delta\nu_D} \exp\left(-\frac{(\nu - \nu_0)^2}{\Delta\nu_D^2}\right) \quad (9)$$

tenendo conto simultaneamente sia dell'allargamento naturale che dell'allargamento Doppler si ottiene una funzione che a livello matematico è la convoluzione della Lorentziana con la Gaussiana, ovvero la funzione di profilo di Voigt $H(a, u)$:

$$\phi(\nu) = \frac{1}{\sqrt{\pi} \Delta\nu_D} H(a, u) \quad (10)$$

$$H(a, u) = \frac{a}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-y^2}}{(u - y)^2 + a^2} dy \quad (11)$$

Le due variabili adimensionali presenti sono il parametro di smorzamento a e la distanza dalla frequenza centrale u :

$$a = \frac{\gamma}{4\pi \Delta\nu_D}, \quad u = \frac{\nu - \nu_0}{\Delta\nu_D} \quad (12)$$

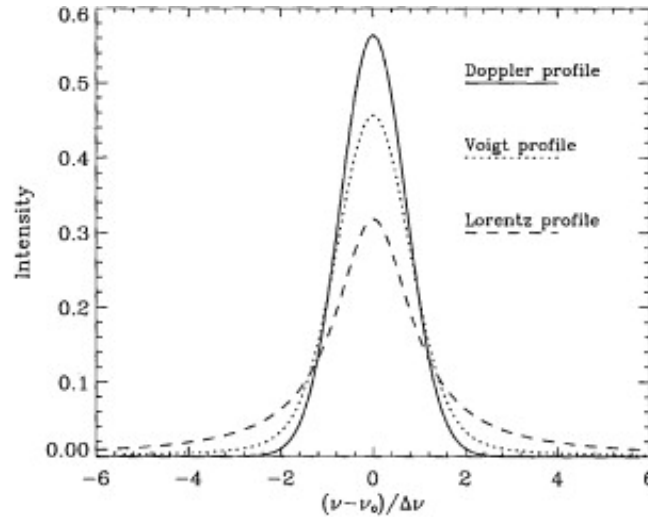


Figura 2: Profilo di Voigt per una riga spettrale

Allargamento Stark Nelle atmosfere stellari che presentano un'alta densità i livelli energetici vengono perturbati dagli urti con le altre particelle che diventano significativamente numerosi. L'interazione tra gli atomi assorbenti e i campi elettrici associati ad elettroni e ioni liberi genera un allargamento della riga. Il potenziale di interazione cambia a seconda dell'atomo considerato, si parla di Stark lineare $\Delta E \propto r^{-2}$ per l'idrogeno e di Stark quadratico $\Delta E \propto r^{-4}$ per atomi più complessi. Per quanto riguarda l'idrogeno l'allargamento delle ali del profilo viene stimato dalla teoria di Holtsmark della perturbazione statistica:

$$\kappa(\Delta\lambda) \propto N_e \cdot (\Delta\lambda)^{-5/2} \quad (13)$$

Poichè questo tipo di allargamenti dipende da N_e esso sarà un'altra discriminante tra stelle di dimensioni diverse, le righe delle stelle nane risulteranno molto soggette a questo tipo di allargamento, quelle di giganti o supergiganti saranno più strette.

3 Equazioni di Boltzmann e Saha

L'intensità finale di una riga spettrale dipende in maniera critica dalla densità numerica di atomi $N_{i,j}$ nello stato di ionizzazione i e nel livello energetico j da cui parte la transizione. Risulta pertanto importante trattare della meccanica statistica che si trova alla base dell'analisi per i diversi livelli di energia e che possiamo applicare sotto assunzione di equilibrio termodinamico locale (LTE)

3.1 Equazione di Boltzmann

Se consideriamo la probabilità che un elettrone si trovi in un dato livello energetico P_a essa sarà pari, in base all'equazione di Maxwell-Boltzmann a:

$$P_a = g_a e^{-\frac{E_a}{kT}}$$

Dove

- g_a è un fattore statistico per il livello considerato dato dal numero di livelli energetici degeneri, $g_n = 2n$ per gli atomi idrogenoidi
- E_a è l'energia del livello di eccitazione a
- k è la costante di Boltzmann, corrispondente a $1.380649 \cdot 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$

Allo stesso modo la probabilità che l'elettrone si trovi in un altro livello energetico P_b sarà pari a

$$P_b = g_b e^{-\frac{E_b}{kT}}$$

Facendo il rapporto tra le due equazioni otteniamo il rapporto delle probabilità

$$\frac{P_a}{P_b} = \frac{g_a}{g_b} e^{-\frac{E_a - E_b}{kT}}$$

In generale la forma più usata di questa equazione è quella che ci permette di ricavare il numero di atomi in un dato livello di eccitazione rispetto al numero di atomi dello stesso elemento che si trovano in un qualsiasi altro livello di eccitazione. Consideriamo il numero di atomi nello stato di eccitazione i nello stato di ionizzazione j , N_{ij} .

Il numero di atomi nello stato di eccitazione i rispetto al numero di atomi nello stato di ionizzazione j sarà dato dall'equazione:

$$\frac{N_{ij}}{N_j} = \frac{g_i e^{-\frac{x_i}{kT}}}{U_j(T)}$$

Dove $U_j(T) = \sum_i g_i e^{-\frac{x_i}{kT}}$ è la funzione di partizione

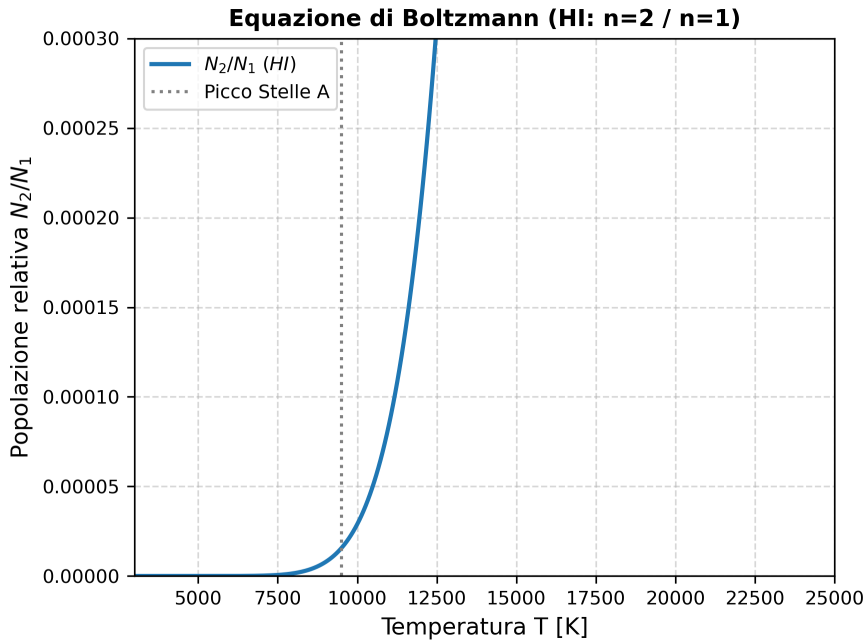


Figura 3: Grafico dell'equazione di Boltzmann per la popolazione di idrogeno nel primo stato di eccitazione rispetto all'idrogeno neutro

3.2 Equazione di Saha

L'equazione di Saha serve ad esprimere il numero di atomi di una data specie nel livello di ionizzazione $j+1$ rispetto agli atomi della stessa specie nel livello di ionizzazione j . Se consideriamo un atomo nel livello fondamentale che viene ionizzato avremo come risultato uno ione e un elettrone libero che si muove a una data velocità v . L'energia necessaria per questa transizione risulta essere

$$\chi_i + \frac{1}{2}mv^2$$

Inserendo questa energia nella distribuzione di Maxwell-Boltzmann per il numero di ioni nel livello di eccitazione fondamentale, N_{01} , e il numero di atomi neutri nel livello di eccitazione fondamentale, N_{00} , otteniamo il seguente rapporto

$$\frac{N_{01}(v)}{N_{00}} = \frac{g}{g_{00}} e^{-\frac{\chi_i + \frac{1}{2}mv^2}{kT}}$$

- g_{00} è il peso statistico dell'atomo con l'elettrone nello stato fondamentale
- g è il peso statistico corrispondente alla configurazione finale ed è la somma di due termini $g = g_{ione} \cdot g_e$, dato che l'atomo si separa in ione ed elettrone

Il peso dello ione non è alto che g_{01} , mentre quello dell'elettrone è più complesso e può essere ricavato considerando il numero di elettroni nello spazio delle fasi con una data velocità.

$$g = \frac{g_{01}}{N_e} \frac{4\pi m^3 v^2 dv}{h^3} \quad \text{Sostituendo nell'equazione e integrando} \quad \frac{N_{01}N_e}{N_{00}} = \left(\frac{2\pi m_e kT}{h^2} \right)^{3/2} \frac{2g_{01}}{g_{00}} e^{-\frac{\chi_j}{kT}}$$

Tramite l'uso della funzione di partizione è possibile scrivere l'equazione di Saha per il numero di atomi in due livelli di ionizzazione consecutivi in tutti i possibili stati di eccitazione:

$$\frac{N_{j+1}}{N_j N_e} = \left(\frac{2\pi m_e kT}{h^2} \right)^{3/2} \frac{2U_{j+1}(T)}{U_j(T)} e^{-\frac{\chi_j}{kT}}$$

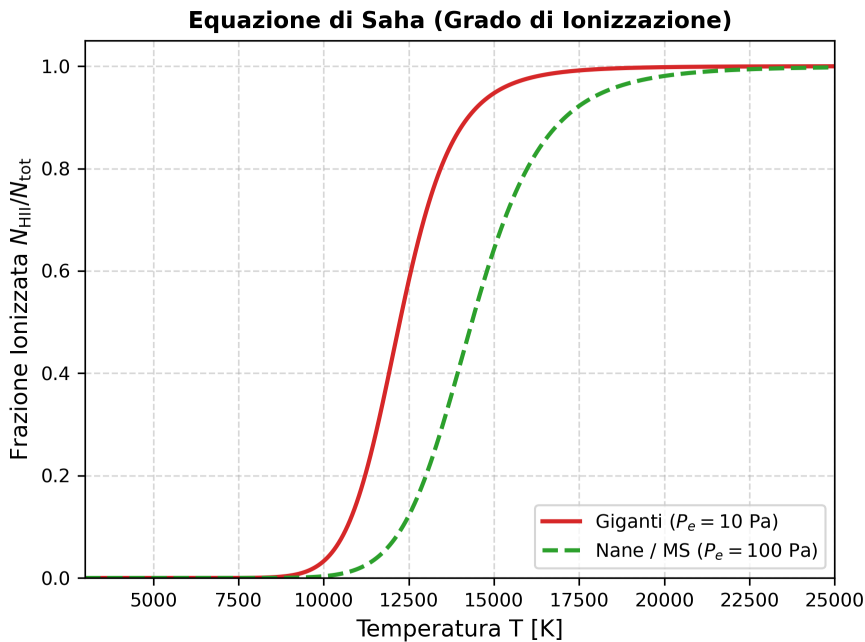


Figura 4: Grafico dell'equazione di Saha per la popolazione di idrogeno ionizzato rispetto alla popolazione totale di idrogeno

Possiamo notare dal grafico che vi è una significativa differenza tra il risultato ottenuto per stelle giganti o supergiganti rispetto a quello che osserviamo per stelle nane. Questa differenza è dovuta al fattore N_e presente nel denominatore dell'equazione che essendo una densità numerica aumenta con l'aumentare della pressione nella fotosfera, che è significativamente maggiore per le stelle nane rispetto alle giganti. La conseguenza è che il rapporto d'intensità tra righe di metalli ionizzati (es. Fe II, Ti II) e metalli neutri (Fe I) aumenta notevolmente nelle giganti rispetto alle nane di pari temperatura.

3.3 Comportamento della serie di Balmer

Le righe di assorbimento che si originano dal livello di energia $n = 2$ nell'atomo di idrogeno neutro (HI) costituiscono la serie di Balmer e vengono indicate dalla lettera H seguita dalla lettera greca corrispondente alla transizione (es. $H\alpha = 6563 \text{ \AA}$, $H\beta = 4861 \text{ \AA}$). Tramite l'uso delle equazioni di Saha e Boltzmann si può ricavare la popolazione relativa $N_{1,2}/N_{\text{tot}}$, espressa dal prodotto:

$$\frac{N_{1,2}}{N_{\text{tot}}} = \left(\frac{N_{1,2}}{N_1} \right) \times \left(\frac{N_1}{N_1 + N_2} \right) \quad (14)$$

Se l'idrogeno si trova a una temperatura relativamente bassa ($T < 5000 \text{ K}$) esso sarà quasi totalmente neutro, si avrà quindi $N_1 \approx N_{\text{tot}}$, tuttavia se guardiamo il contributo dell'equazione di Boltzmann $\exp(-E_{1,2}/kT)$, dove l'energia ha un valore molto piccolo $E_{1,2} = 10.2 \text{ eV}$, risulta che $N_{1,2}$ è trascurabile e di conseguenza le righe di Balmer sono molto deboli.

Se invece andiamo a svolgere il calcolo per temperature molto elevate ($T > 20000 \text{ K}$) abbiamo un'energia più elevata, ma il termine di Saha domina rispetto a quello di Boltzmann e l'idrogeno risulta quasi interamente ionizzato III ($N_2 \gg N_1$). L'assenza di atomi neutri fa sì che anche in questo caso le linee di Balmer presentino un'intensità ridotta.

La situazione ottimale si ha per temperature di circa $9500 - 10000 \text{ K}$, infatti a queste temperature si trova il picco della funzione di popolazione $N_{1,2}$. Questa è la motivazione matematica per cui le righe dell'idrogeno raggiungono la massima intensità assoluta nelle stelle di tipo A.

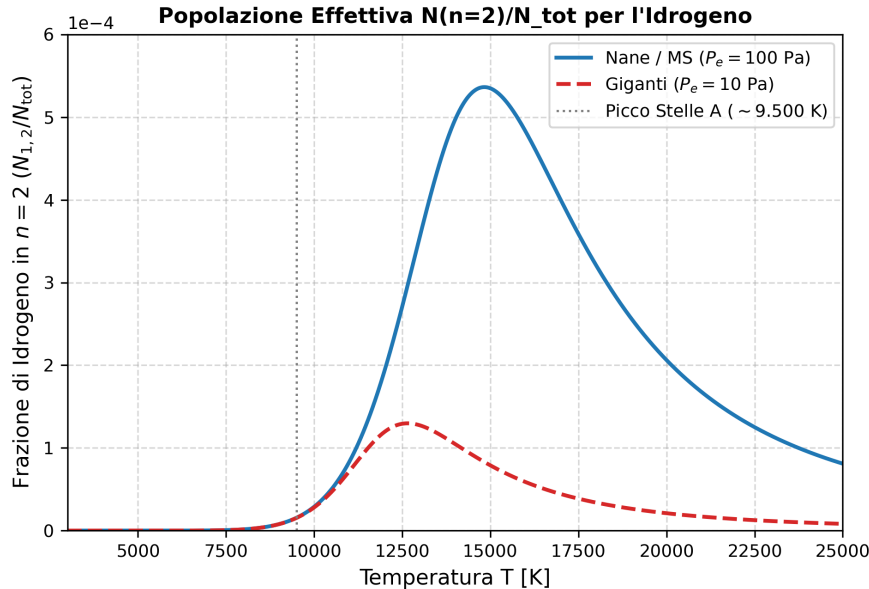


Figura 5: Grafico della popolazione frazionaria del primo livello eccitato di idrogeno in funzione della temperatura

Notiamo che anche questo grafico cambia a seconda del tipo di stella, in quanto risente del termine di Saha, pertanto il popolamento dei vari livelli energetici, essendo dipendente dalla pressione, dipende anche dal tipo di stella considerata.

Mentre la serie di Balmer rappresenta righe di assorbimento associate a transizioni elettroniche di tipo legato-legato, il limite fisico di questa sequenza è da ricercarsi nella transizione legato-libero e da luogo al fenomeno del Balmer Jump. Esiste infatti una lunghezza d'onda di soglia, $\lambda = 3646\text{\AA}$ oltre alla quale l'energia del fotone incidente supera l'energia di ionizzazione per lo stato eccitato $n=2$, che corrisponde a 3.40 ev. Questo provoca uno scalino nello spettro stellare in corrispondenza della lunghezza d'onda di soglia poiché si apre un nuovo canale per l'assorbimento dei fotoni.

4 Classificazione spettrale

Dai risultati ottenuti con le equazioni di Boltzmann e Saha risulta evidente che l'aspetto di uno spettro è determinato dai parametri di pressione e temperatura. Questa conclusione ci consente di comprendere l'evoluzione della classificazione spettrale su base empirica, nonché i riscontri teorici.

4.1 Cenni storici

Tra il 1863 e il 1870 studi pionieristici sugli spettri stellari furono realizzati dall'astronomo vaticano Padre Angelo Secchi, il quale riuscì a compiere un'analisi sistematica degli spettri di un campione di 4000 stelle [1]. I suoi primi risultati furono pubblicati nel 1867 sulle *"Memorie della Società italiana delle Scienze"*. Questa prima classificazione divideva le stelle osservate in tre classi spettrali:

- **Tipo I:** Stelle di un colore bianco azzurrognolo, presentano uno spettro quasi continuo solcato da quattro intense righe scure dell'idrogeno, si nota anche la presenza di righe di magnesio, sodio e ferro. Queste stelle sono assai numerose e tra di esse vi sono Sirio, Vega ed Altair.
- **Tipo II:** Stelle di colore giallo, presentano righe dell'idrogeno più sottili delle stelle di *Tipo I*, oltre che a righe sottili del ferro e del magnesio. Sono anch'esse molto numerose e il Sole ricade in questa classe.
- **Tipo III:** Sono stelle di colore rosso o arancione nei quali spettri si osservano larghe bande di assorbimento e righe dei metalli, le bande diventano particolarmente spesse nell'ultravioletto. Sono stelle meno numerose di cui fanno parte Arturo e Polluce.

In un secondo articolo del 1869 Padre Secchi introdusse una quarta classe:

- **Tipo IV:** Stelle rossastre in cui sono presenti le tre righe larghe e continue del carbonio, non sono presenti righe dei metalli, ma vi sono molte righe nella parte infrarossa dello spettro. Sono stelle piccole e di bassa luminosità, vengono inserite in questa classe Betelgeuse, Antares e Mira Ceti.

4.2 Classificazione di Harvard

Un primo passo verso la classificazione corrente fu la classificazione spettrale implementata all'Harvard College Observatory sotto la supervisione di Edward Charles Pickering, direttore dell'osservatorio del 1877 al 1919. A livello operativo questa classificazione venne messa a punto e utilizzata dalle donne computer di Harvard, infatti fu introdotta per la prima volta nell'introduzione all'Harry Draper Catalog, catalogo contenente 10000 stelle delle quali si era occupata la prima delle suddette donne computer, Wilamina Stevens Fleming. Questa prima classificazione era alfabetica e veniva fatta in funzione della presenza e della rilevanza delle righe di idrogeno osservabili negli spettri stellari. La nostra classificazione spettrale è una variante della classificazione originale della Fleming proposta da Annie Jump Cannon. Furono rimosse le classi C e D e furono introdotti numeri da 0 a 9 come sottoclassi, ma la modifica fondamentale fu quella di riordinare le classi in funzione della lunghezza d'onda in cui il continuo ha valore massimo in ordine decrescente. Dato che il picco di emissione per il corpo nero dipende esclusivamente dalla temperatura, come messo in evidenza da Wien, la classificazione attuale parte dalle stelle con temperatura efficace maggiore e va in ordine decrescente.

Il risultato fu una classificazione con sette classi, in ordine 'O-B-A-F-G-K-M', e dieci sottoclassi per ognuna di esse. Di seguito le caratteristiche per ogni classe spettrale:

- **Stelle di Classe O:** Le stelle di Classe O sono quelle con la temperatura superficiale più alta, maggiore di 30000 K, il picco della curva di corpo nero si trova nella regione che va dai 60 ai 95 nm, dunque nell'ultravioletto lontano. Avendo uno spettro continuo molto spostato verso le alte frequenze queste stelle appaiono di colore blu ad occhio nudo, proprio perché la maggior parte dell'emissione non ricade nel visibile. A causa delle alte temperature le linee di assorbimento osservate sono di atomi ionizzati più volte, come elio HeII, carbonio CIII, azoto NIII, ossigeno OIII e silicio SiIV. Sono presenti anche linee associate all'idrogeno neutro, ma con intensità minore delle classi successive, questo perché la maggior parte dell'idrogeno è ionizzato.
- **Stelle di Classe B:** Hanno una temperatura superficiale di 30000-10000 K, il picco dello spettro ricade quindi in una zona compresa tra 95 e 290 nm, ovvero nell'ultravioletto. Data la maggiore vicinanza del picco al visibile queste stelle hanno una colorazione meno blu delle stelle di classe O, tendono più al bianco-azzurro. Sono presenti righe di ioni metallici come l'ossigeno OII, il silicio SiII e il magnesio MgII, tuttavia non sono già più visibili le righe dell'elio ionizzato HeII. Le righe associate all'elio neutro HeI raggiungono la loro massima intensità nelle stelle di classe B2, per poi non essere più visibili nelle stelle di classe B9. Le righe di idrogeno neutro sono più intense di quelle per le stelle di classe O a causa della temperatura minore.
- **Stelle di Classe A:** Le stelle di Classe A hanno una temperatura superficiale di 7500-10000 K, il loro picco di emissione si trova a 290-390 nm, nel vicino ultravioletto al limite del visibile, pertanto tendono ad avere una colorazione sul bianco. Le stelle di classe A0 sono quelle in cui le righe associate all'idrogeno neutro HI raggiungono la massima intensità, per poi andare a diminuire. Sono presenti righe *H* e *K* del calcio ionizzato CaII, oltre che a righe del ferro FeII, del magnesio MgII e del silicio SiII.
- **Stelle di Classe F:** La loro temperatura superficiale si aggira attorno ai 6000-7500 K, il conseguente picco dello spettro ricade tra 390 e 480 nm, nel visibile blu-viola. Il loro colore appare tendente al bianco-argento dato che il loro spettro è distribuito nel visibile in maniera tale da coprire quasi tutte le lunghezze d'onda. In queste stelle si ha un'intensità significativa per le righe *H* e *K* del calcio CaII, sono presenti anche intense righe dei metalli ionizzati come il ferro FeII, il cromo CrII e il titanio TiII, e a queste temperature cominciano ad apparire le righe dei metalli neutri.
- **Stelle di Classe G:** Le stelle di classe G hanno una temperatura superficiale di 5200-6000 K, il picco dell'emissione di corpo nero cade nella regione dello spettro visibile, 480-560 nm, il loro picco sarebbe nel verde, ma vista la distribuzione dell'emissione nelle varie frequenze hanno un colore tendente al giallo. I loro spettri presentano righe di idrogeno neutro molto deboli, mentre raggiungono il massimo della loro intensità nelle stelle G0 le righe *H* e *K* del calcio CaII. Una caratteristica di queste stelle è la banda-G, una sezione in cui il continuo è particolarmente assorbito da molecole formate da CH e metalli. Il Sole appartiene a questa classe, infatti è classificato come stella G2.
- **Stelle di Classe K:** Stelle di colore arancione-rosso che hanno una temperatura superficiale di 3700-5200 K, con picco di emissività a 560-780 nm, nel visibile. A queste temperature gli atomi dei metalli sono principalmente neutri, pertanto le righe dei metalli ionizzati sono molto deboli e lo spettro è dominato dalle righe di ferro FeI, calcio CaI, magnesio MgI, silicio SiI. Cominciano ad essere visibili le righe molecolari, ad esempio per l'ossido di titanio TiO. Si osserva la banda-G.
- **Stelle di Classe M:** Con una temperatura superficiale di 2400-3700 K, queste stelle hanno il picco di emissività nel vicino infrarosso, a 780-1200 nm, dunque sono di un rosso più scuro delle stelle di classe K. A queste temperature le righe dei metalli ionizzati e dell'idrogeno sono del tutto assenti. Le righe principali sono quelle dei metalli neutri, come il calcio CaI e delle molecole come TiO.

Spettri stellari

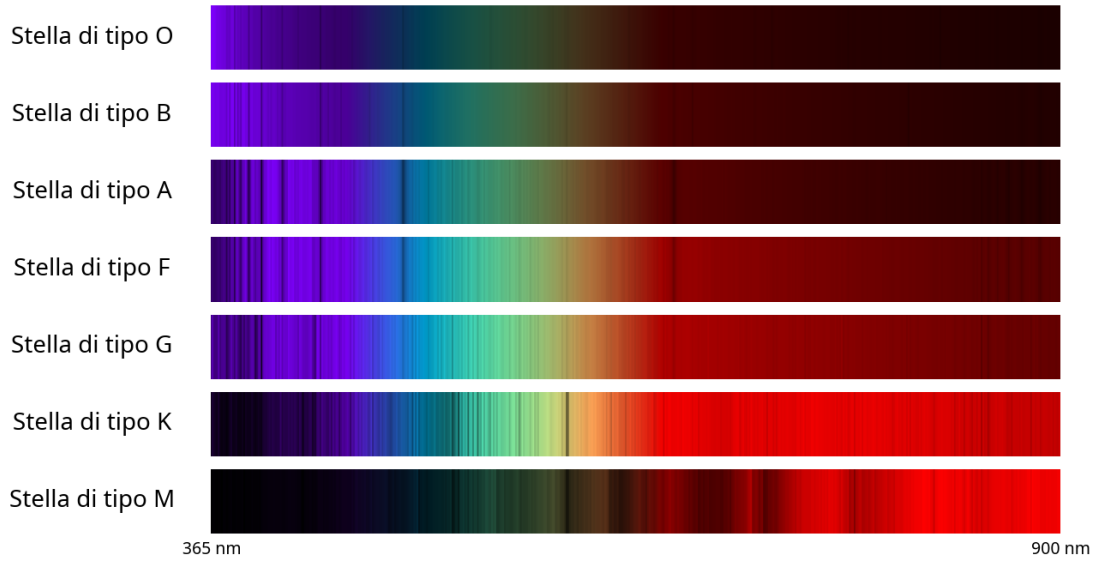


Figura 6: Spettri stellari per le varie classi di Harvard

4.3 Classificazione di Yerkes(MKK)

La classificazione di Harvard ha sicuramente rappresentato uno dei pilastri nell'evoluzione della classificazione stellare, ordinando gli spettri stellari in modo tale che la temperatura efficace T_{eff} fosse decrescente. Tuttavia tale sistema risulta limitato nella sua assegnazione in quanto viene usata la stessa classe spettrale a stelle che presentano la medesima temperatura, senza tenere conto della massa, del raggio o della luminosità intrinseca, risultando così un sistema monodimensionale non completo.

A livello sperimentale si osserva che due stelle aventi stessa T_{eff} mostrano differenze significative nella morfologia delle righe spettrali. Ciò avviene per tutte le differenze associate alla diversa pressione della fotosfera già viste in precedenza, ovvero il diverso popolamento dei livelli energetici e la diversa magnitudine dell'allargamento Stark.

Per far fronte alla limitazione del sistema di Harvard William W. Morgan, Philip C. Keenan e Edith Kellman svilupparono nel 1943 il sistema MK, o sistema di e, nome dell'osservatorio in cui è stato ideato.

In questo sistema si vanno ad affiancare alla classificazione in base alla temperatura delle classi di luminosità, indicate con numeri romani da I a IV. La classificazione completa di una stella richiede quindi che ne venga indicato sia il tipo spettrale sia la classe di luminosità (es. *G2V* per il Sole, *K5III* per Aldebaran, *A0Ib* per Rigel).

Tabella 1: Classi di luminosità del sistema Yerkes (MK).

Classe MK	Denominazione	Caratteristica Fisica	Valore Tipico $\log g$
Ia-O / 0	Ipergiganti o Supergiganti molto luminose	Atmosfere estremamente estese	$\sim 0.0 - 0.5$
Ia	Supergiganti brillanti	Pressione fotosferica minima	$\sim 0.5 - 1.5$
Ib	Supergiganti meno luminose	Density di massa trascurabile	$\sim 1.5 - 2.0$
II	Giganti brillanti	Transizione verso le giganti	$\sim 2.0 - 2.5$
III	Giganti ordinarie	Atmosfere espanse e rarefatte	$\sim 2.5 - 3.5$
IV	Subgiganti	Fase di uscita dalla Sequenza	$\sim 3.5 - 4.0$
V	Sequenza Principale (Nane)	Stelle con fusione di H nel core	$\sim 4.0 - 4.5$
VI / sd	Subnane	Carenza di metalli (Popolazione II)	$\sim 4.5 - 5.0$
VII / WD	Nane Bianche (*White Dwarfs*)	Oggetti degeneri ad alta densità	$\sim 7.0 - 8.5$

5 Il Diagramma Hertzsprung-Russell (H-R)

La suddivisione delle stelle in classi spettrali e classi di luminosità consente la mappatura delle due grandezze associate, ovvero temperatura effettiva e luminosità. Il diagramma che ne risulta è il diagramma Hertzsprung-Russell, essenziale per collocare i parametri atmosferici all'interno di un contesto evolutivo. Questo diagramma fu ideato separatamente da Ejnar Hertzsprung nel 1905 e da Henry Norris Russell nel 1914 e prende entrambi i loro cognomi. Esso si può trovare in diverse forme e lega sempre una grandezza di emissione totale della stella ($\log L$, V oppure M_V) con una grandezza che è legata alla temperatura effettiva, come, ad esempio, $\log T_{\text{eff}}$, tipo spettrale (O, B, A, F, G, K, M) o $B - V$. A seconda dei dati disponibili è possibile avere il diagramma in tre forme diverse. La relazione geometrica fondamentale che è presente nel diagramma teorico si può ricavare dalla legge di Stefan-Boltzmann integrata sulla superficie sferica di una stella di raggio R :

$$L = 4\pi R^2 \sigma T_{\text{eff}}^4 \quad (15)$$

Se passiamo poi alla forma logaritmica e riordiniamo i termini otteniamo:

$$\log \left(\frac{L}{L_{\odot}} \right) = 2 \log \left(\frac{R}{R_{\odot}} \right) + 4 \log \left(\frac{T_{\text{eff}}}{T_{\odot}} \right) \quad (16)$$

Questa equazione fondamentale implica che nel diagramma $\log L$ vs $\log T_{\text{eff}}$ le linee a **raggio costante** ($\bar{R} = \text{cost}$) sono rette parallele orientate diagonalmente con indice di pendenza pari a -4 . Risulta quindi possibile mappare direttamente le dimensioni fisiche delle stelle sul diagramma.

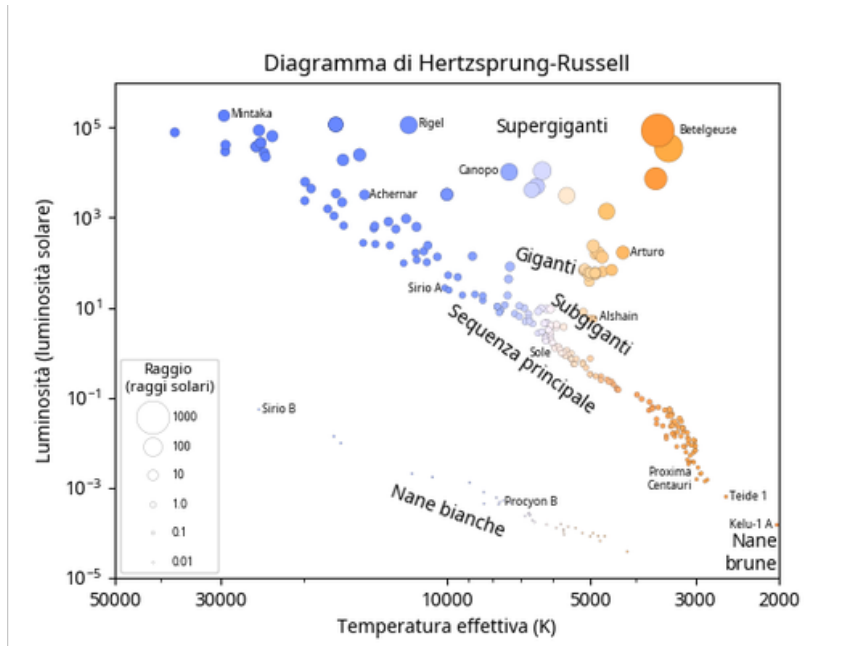


Figura 7: Diagramma Hertzsprung-Russell in cui la luminosità $L/L_{\odot}$ è espressa in funzione della temperatura effettiva T_{eff}

5.1 Interpretazione Evolutiva delle Regioni del Diagramma H-R

Osservando il diagramma possiamo notare che la distribuzione delle stelle non è uniforme, ciò è spiegato dall'evoluzione della struttura stellare, in quanto il numero di stelle in una data regione dipenderà dai tempi scala di permanenza in quella specifica fase evolutiva. Possiamo distinguere cinque diverse regioni nel diagramma analizzabili dal punto di vista dell'evoluzione strutturale della stella:

1. **La Sequenza Principale (MS - Classe V):** Banda diagonale che attraversa il diagramma dall'alto a sinistra (stelle O/B calde e luminose) al basso a destra (stelle M fredde e deboli). Rappresenta la fase di equilibrio idrostatico e termico durante la quale le reazioni termonucleari

fondono l'idrogeno in elio nel nucleo. Poiché il tempo di scala nucleare dell'idrogeno τ_{nuc} costituisce circa il 90% della vita totale di una stella, oltre l'80% delle stelle osservabili si trova nella Sequenza Principale.

2. **Il Ramo delle Giganti Rosse (RGB - Classe III):** Quando l'idrogeno nel nucleo si esaurisce, il centro collassa e gli strati esterni si espandono raffreddandosi. La stella si muove quindi verso destra, a temperature minori, e verso l'alto, a luminosità maggiori, nel diagramma H-R, andando a posizionarsi sul ramo delle giganti con un nucleo degenere di elio che viene fuso in carbonio e un guscio più esterno composto da idrogeno.
3. **Il Ramo Orizzontale (HB) e la Striscia di Instabilità:** Fase in cui la contrazione del nucleo della stella innesca la fusione dell'elio (processo tre alfa). Le stelle che attraversano questa regione diventano pulsanti (es. Cefeidi, RR Lyrae) a causa del meccanismo κ legato all'opacità dell'elio ionizzato.
4. **Il Ramo Asintotico delle Giganti (AGB):** Regione ad alta luminosità e bassa T_{eff} occupata da stelle con nucleo degenere di carbonio-ossigeno circondato da doppie shell di bruciamento (He ed H). Qui si trovano le stelle che originariamente erano di medie dimensioni giunte alla fine del loro ciclo vitale, esse daranno origine a stelle nane bianche.
5. **Il Dominio delle Nane Bianche (Classe VII):** Situato in basso a sinistra ($\log L/L_{\odot} \sim -2 \div -4$, $T_{\text{eff}} \sim 10000 \div 30000$ K). Costituisce il punto d'arrivo evolutivo delle stelle di massa piccola e intermedia ($M \lesssim 8 M_{\odot}$). Questi oggetti non producono più energia nel nucleo, sono abbastanza compatti ($R \sim R_{\oplus}$) e si raffreddano gradualmente irraggiando la loro riserva di energia termica residua.

6 Analisi dello Spettro Solare

Il Sole rappresenta lo standard per l'astrofisica stellare, in quanto astro a noi più vicino e più estensivamente studiato. L'osservazione del Sole ci permette di verificare direttamente quanto le predizioni teoriche siano in accordo con gli effettivi parametri atmosferici osservati. Perciò al fine di vedere sinteticamente l'applicazione effettiva delle metodologie trattate per la classificazione stellare a partire dagli spettri andremo a considerare proprio lo spettro solare.

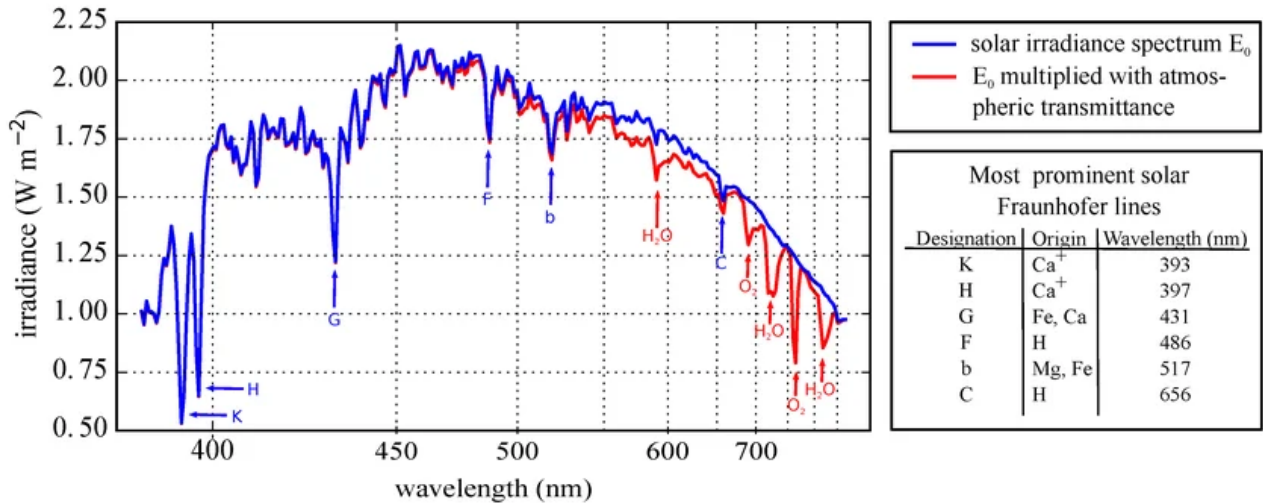


Figura 8: Spettro del Sole dove sono messe in evidenza le principali righe di assorbimento

6.1 Continuo e Temperatura Efficace

Se osserviamo lo spettro continuo solare possiamo facilmente individuare il picco dell'emissione, che ricade nello spettro visibile, in corrispondenza di una lunghezza d'onda $\lambda_{\text{max}} \approx 5000 \text{ \AA}$ (500 nm).

Applicando la legge di spostamento di Wien:

$$\lambda_{\max} \cdot T_{\text{eff}} \approx 2.898 \times 10^{-3} \text{ m} \cdot \text{K} \quad (17)$$

si ottiene una temperatura efficace nella fotosfera di $T_{\text{eff}} \approx 5778 \text{ K}$. Se integriamo il flusso totale su tutte le lunghezze d'onda mediante la legge di Stefan-Boltzmann ($F = \sigma T_{\text{eff}}^4$), si ottiene l'area sottesa dallo spettro continuo.

6.2 Caratteristiche delle righe spettrali

Inserendo la temperatura della fotosfera appena ricavata $T \approx 5780 \text{ K}$ e la pressione elettronica media $P_e \approx 1.5 \text{ N/m}^2$ nelle equazioni di Boltzmann e Saha, si ottengono i seguenti risultati per l'idrogeno e per i metalli:

1. **Idrogeno:** L'equazione di Boltzmann per l'idrogeno neutro (HI) ci fornisce una popolazione di atomi nel primo livello di eccitazione $n = 2$ pari a $N_{1,2}/N_1 \approx 10^{-8}$, un numero molto basso. L'equazione di Saha indica che l'idrogeno è quasi interamente neutro ($N_{\text{HII}}/N_{\text{tot}} \ll 1$). Di conseguenza, sebbene l'idrogeno costituisca circa il 73% della massa della fotosfera, la popolazione effettiva di atomi che potrebbero fare transizioni legate alla serie di Balmer $N_{1,2}/N_{\text{tot}}$ è estremamente bassa. Questo spiega per quale motivo le righe di questa serie ($H\alpha$, $H\beta$) appaiano nello spettro solare con un'intensità molto moderata rispetto al loro massimo.
2. **Metalli:** Gli elementi più pesanti dell'idrogeno hanno un potenziale di ionizzazione più bassi (es. $\text{Ca}\chi_j = 6.11 \text{ eV}$, $\text{Fe}\chi_j = 7.90 \text{ eV}$). Dall'equazione di Saha si calcola che a 5780 K il Calcio sia quasi totalmente nello stato una volta ionizzato (CaII). Poiché l'elettrone di valenza di CaII si trova nello stato fondamentale, la probabilità che avvengano transizione per assorbimento a stati di energia superiore è elevatissima. Questo giustifica la presenza di profonde righe di assorbimento H e K del Calcio ionizzato ($3968 \text{ \AA}$ e $3934 \text{ \AA}$), che dominano lo spettro solare nel vicino ultravioletto.

La presenza di queste righe spettrali e la loro intensità, oltre che alla comparsa della banda G-molecolare (CH) fa sì che il Sole venga collocato nella classe G2 del sistema di classificazione di Harvard.

6.3 Effetti di Pressione e classe di Luminosità

La gravità superficiale solare è pari a $\log g \approx 4.44$ (in unità cgs), valore caratteristico di stelle di medie dimensioni. Il Sole presenta quindi una pressione P_{tot} abbastanza significativa nella fotosfera, la quale rende gli effetti dell'allargamento Stark e Collisionale non trascurabili per le righe dei metalli neutri (FeI , CaI , MgI). L'effetto sull'equazione di Saha è un bilanciamento in favore degli stati neutri rispetto a quanto si osserva in atmosfere meno dense.

Da tutte queste considerazioni emerge che il Sole è assegnato alla classe di luminosità V (Sequenza Principale), pertanto la sua classificazione completa è **G2V**.

Riferimenti bibliografici

- [1] A. Pannekoek, *A History of Astronomy*, Dover Publications, New York, 1989.
- [2] B. W. Carroll e D. A. Ostlie, *An Introduction to Modern Astrophysics*, 2^a ed., Cambridge University Press, Cambridge, 2017.
- [3] M. S. Longair, *High Energy Astrophysics*, 3^a ed., Cambridge University Press, Cambridge, 2011.
- [4] H. Karttunen, P. Kröger, H. Oja, M. Poutanen e K. J. Donner (a cura di), *Fundamental Astronomy*, 6^a ed., Springer, Berlin-Heidelberg, 2017.
- [5] F. R. Ferraro, *Appunti del corso di Astrofisica Stellare*, Corso di Laurea in Astronomia/Astrofisica, Università di Bologna, A.A. 2025/2026.
- [6] D. Dallacasa, *Appunti del corso di Processi di Radiazione e MHD*, Corso di Laurea in Astronomia/Astrofisica, Università di Bologna, A.A. 2023/2024.
- [7] A. Cimatti, *Appunti del corso di Astronomia*, Corso di Laurea in Astronomia, Università di Bologna, A.A. 2025/2026.
- [8] R. Wildt, "Negative Ions of Hydrogen and the Opacity of Stellar Atmospheres" (1939), *Astrophysical Journal*