

Alma Mater Studiorum - Università di Bologna

Dipartimento di Fisica e Astronomia
Corso di Laurea in Astronomia

**Dinamica delle Galassie a Spirale e delle
Galassie Ellittiche**

Presentata da:
Bianca Muccinelli

Relatore:
**Chiar.ma Prof.ssa
Marcella Brusa**

Appello III
Anno Accademico 2025-2026

A Franco

Indice

1	Classificazione di Hubble	3
1.1	Galassie ellittiche	4
1.2	Galassie a spirale	4
1.3	Galassie irregolari	5
2	Dinamica stellare	6
2.1	Rilassamento dei sistemi stellari	6
2.1.1	Tempo di rilassamento	8
2.1.2	Sistemi non collisionali	9
2.2	Piano del viriale	10
3	Dinamica delle galassie ellittiche	12
3.1	Massa viriale	12
3.2	Legge di de Vaucouleurs	12
3.3	Piano fondamentale	13
3.3.1	Leggi di scala	14
4	Dinamica delle galassie a spirale	15
4.1	Curva di rotazione	15
4.2	Legge di Tully-Fisher	16
4.3	Accenni sulla dinamica dei bracci	17

Capitolo 1

Classificazione di Hubble

Verso la metà del XVIII secolo, Kant e Wright ipotizzarono che la Via Lattea fosse in realtà un sistema finito di stelle, con una forma simile a quella di un disco. Questa discussione indusse poi Kant a pensare che, se la Via Lattea era un sistema finito, allora le "nebulose ellittiche" osservate potevano essere sistemi simili al nostro, ma oltre i suoi limiti.

Successivamente, la discussione riguardante la natura di queste nebulose portò alcuni astronomi a pensare che si trattasse di oggetti situati ai confini della Via Lattea, mentre altri favorirono invece l'ipotesi di Kant.

Il dibattito fu sostanzialmente risolto negli anni Venti, quando Edwin Hubble rilevò delle Cefeidi in M31. Misurando la loro magnitudine apparente e determinando la loro magnitudine assoluta, poté calcolare la distanza di Andromeda usando il modulo di distanza, provando che si trattava effettivamente di un sistema separato dalla Via Lattea. [4]

Ad oggi, il numero di galassie osservato è estremamente elevato e, grazie ai dati raccolti, è possibile stimare alcune delle loro proprietà principali. Possiamo ragionevolmente supporre, da queste osservazioni, che il numero di stelle presenti in una generica galassia, N_* , sia:

$$10^6 < N_* < 10^{12}, \quad (1.1)$$

che le sue dimensioni siano:

$$100 \text{ pc} < R_g < 100 \text{ kpc}, \quad (1.2)$$

e che la velocità delle stelle al suo interno sia

$$50 \text{ km s}^{-1} < v < 400 \text{ km s}^{-1}. \quad (1.3)$$

Dalle osservazioni fatte, è stato inoltre possibile classificare morfologicamente le galassie in base alla loro struttura. La classificazione più celebre è quella di Hubble, che può essere vista sia come classificazione morfologica che evolutiva.

Hubble propose che le galassie venissero divise in tre categorie principali: galassie ellittiche, galassie a spirale e galassie irregolari, che arrangiò poi in un diagramma a diapason. [1]

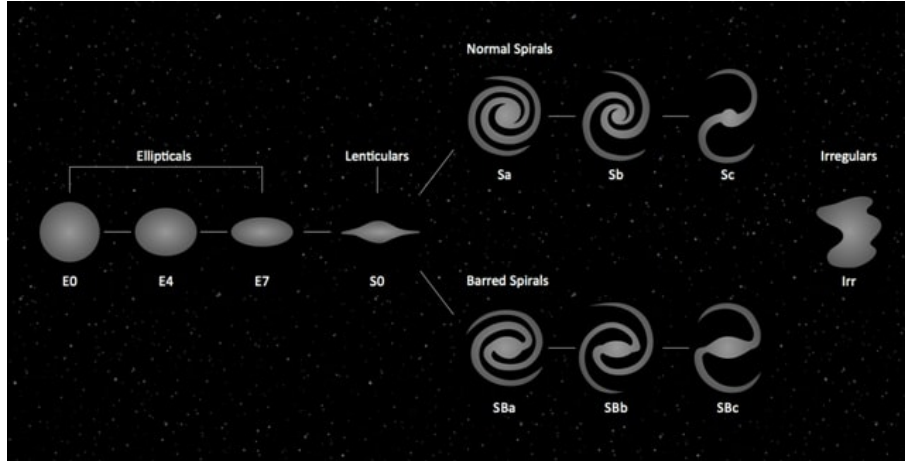


Figura 1.1: Schema che raffigura come Hubble classificò le galassie. Fonte: ConceptDraw – Tuning-fork style diagram of the Hubble sequence

1.1 Galassie ellittiche

Le galassie ellittiche hanno isofote molto simili ad ellissi, e possono essere più o meno schiacciate. In particolare, ad ognuno di questi corpi può essere associato un numero, chiamato ellitticità, che si ricava applicando la seguente formula:

$$\epsilon = 1 - b/a \quad (1.4)$$

dove b e a sono rispettivamente il semiasse minore e il semiasse maggiore dell'isofota ellittica osservata.

Associando il numero così ottenuto alla lettera "E", si può costruire una sotto-classificazione delle galassie ellittiche, che si dividono quindi in E0, E1, E2, E3, E4, E5, E6 ed E7. Le galassie E0 hanno forma sostanzialmente sferica, mentre le galassie E7 sono le più schiacciate; infatti, non sono state osservate galassie con ellitticità maggiore.

In generale, le galassie ellittiche sono oggetti vecchi e rossi, popolati principalmente da stelle antiche e super metal rich. Contengono enormi quantità di gas caldo, a temperature intorno ai $10^7 K$, probabilmente per via di un effetto di selezione. Se infatti la temperatura fosse ancora più alta, le particelle di gas avrebbero una velocità maggiore e la quantità di gas osservato sarebbe minore. Invece, se avesse temperature minori, il gas collasserebbe al centro della struttura aumentando il suo star formation rate.

È stato inoltre osservato che, al centro di queste galassie, è presente un buco nero supermassivo con massa $\sim 10^{-3}$ volte la massa della galassia stessa. [1]

1.2 Galassie a spirale

Le galassie a spirale sono caratterizzate da una forma che, frontalmente (face on), ricorda quella di un disco con dei bracci che partono dal suo centro.

Prima di parlare effettivamente delle galassie a spirale vere e proprie, però, è necessario ricordare le galassie lenticolari. Si tratta di strutture che fanno parte di una

classe intermedia tra le galassie ellittiche e le galassie a spirale, e hanno un bulge prominente e spesso rispetto al disco, il quale, nonostante sia ben definito, non mostra segni evidenti della presenza di bracci.

Tornando alle galassie a spirale, internamente esse sono caratterizzate da un bulge più rosso rispetto al resto della galassia, infatti esso contiene stelle generalmente più vecchie. Esternamente al bulge, è presente invece un disco che può essere diviso in due sezioni: quella più interna e più sottile, chiamata *thin disk*, che ha uno spessore di qualche centinaio di parsec, e quella più esterna e spessa, chiamata *thick disk*, che ha uno spessore di qualche chiloparsec. Nel disco inoltre, si trova molto gas freddo, e infatti è principalmente lì che si formano nuove stelle.

Ancora più esternamente, si trova un alone abitato da stelle più vecchie e a bassissima metallicità, che attraversano il disco ad alte velocità. Sia all'interno che all'esterno del disco si trovano inoltre degli ammassi globulari contenenti dalle 1000 alle 10000 stelle.

È possibile classificare le galassie a spirale in spirali normali e spirali barrate, in base alla forma del loro bulge. La prima categoria ha un bulge con forma simile a quella di una sfera e, in base alle sue dimensioni rispetto al disco, si divide in tre ulteriori sottocategorie: galassie Sa, Sb ed Sc. Le Sa hanno il bulge molto più grosso rispetto al disco mentre per le Sc vale il contrario. Inoltre, la quantità di gas HI generalmente aumenta da Sa ad Sc.

La seconda categoria di galassie invece, è caratterizzata da un bulge con forma simile ad un rettangolo, e si divide anch'essa in tre sottocategorie: SBa, SBb ed SBc, sempre in base alle dimensioni del nucleo rispetto al disco. [1]

1.3 Galassie irregolari

Le restanti galassie, cioè quelle che non rientravano nelle due categorie precedenti, vennero considerate da Hubble come parte di una terza nuova categoria: le galassie irregolari. Queste strutture furono poi divise da Hubble stesso in due ulteriori sottocategorie: le galassie Irr I e le Irr II. Le seconde sono caratterizzate da una struttura completamente disordinata, mentre le prime mostrano almeno qualche accenno ad una struttura organizzata, come ad esempio dei bracci a spirale. Successivamente però, vennero proposte diverse modifiche a questa classificazione.

Generalmente, galassie di questo tipo hanno masse tra $10^8 M_\odot$ e $10^{10} M_\odot$. Esistono tuttavia galassie irregolari ancora più piccole, con $N_\star < 10^6$, che, sebbene siano state osservate in grande quantità, tendono ad avere una massa complessiva molto piccola. [4][1]

Capitolo 2

Dinamica stellare

Le galassie sono composte principalmente da gas e stelle, e per capire come si comportano queste ultime, sarebbe necessario risolvere un problema agli N corpi. Visto che il numero di stelle all'interno del sistema è particolarmente elevato, e quindi un problema del genere sarebbe impossibile da risolvere, si considerano due stelle per volta, come se si stesse resolvendo un problema a due corpi.

Si osserva quindi che la prima stella, a causa di un urto con la seconda, percorre un'orbita iperbolica. Ripetendo il ragionamento con tutte le altre stelle del sistema, si ottiene un fascio di orbite iperboliche, le quali vengono combinate per capire il comportamento originale della stella.

2.1 Rilassamento dei sistemi stellari

Inizialmente si lavora quindi con un sistema di due sole stelle.

Si consideri un generico sistema inerziale S_0 e si chiami la prima stella "stella di test". Ad essa saranno associate una posizione $\vec{x}_t$, una massa m_t e una velocità $\vec{v}_t$. La seconda stella viene invece chiamata "stella di field" e ha una posizione $\vec{x}_f$, una massa m_f e una velocità $\vec{v}_f$. Si consideri ora il sistema di riferimento dell'orbita relativa, nel quale la stella di field è assunta ferma e la stella di test si muove lungo una traiettoria determinata dall'interazione gravitazionale con essa.

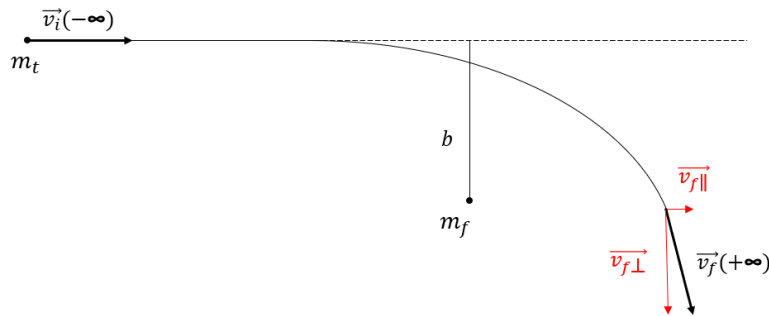


Figura 2.1: Comportamento della stella di test e della stella di field nel sistema dell'orbita relativa. b rappresenta la distanza minima tra le due stelle nel caso in cui non interagissero. Inoltre, si può calcolare che $\|\vec{v}_i\| = \|\vec{v}_f\|$, mentre si osserva che $\Delta v_{\perp} = v_{\perp}$.

Allora, sapendo che l'orbita relativa è definita in S0 come $\vec{r} = \vec{x}_t - \vec{x}_f$, e che il risultato rimane identico per ogni sistema di riferimento inerziale, si può scrivere $\vec{r} = \vec{x}_t - \vec{x}_f = \vec{x}'_t - \vec{x}'_f$, con $\vec{x}'_t$ e $\vec{x}'_f$ appartenenti al sistema del centro di massa. Inoltre, sempre nel sistema del centro di massa, vale che $m_t \vec{x}'_t + m_f \vec{x}'_f = 0$. Da qui, svolgendo i calcoli, si trova che:

$$\vec{x}'_t = \frac{\mu}{m_t} \vec{r}, \quad \vec{x}'_f = -\frac{\mu}{m_f} \vec{r}, \quad \text{da cui} \quad \vec{v}'_t = \frac{\mu}{m_t} \vec{v}, \quad \vec{v}'_f = -\frac{\mu}{m_f} \vec{v} \quad (2.1)$$

In questo modo è possibile calcolare $\vec{x}_t$ e $\vec{x}_f$ in S0 mediante le relazioni $\vec{x}_t = v_{CM} t + \vec{x}'_t$ e $\vec{x}_f = v_{CM} t + \vec{x}'_f$.

Siccome poi $\vec{v}_t = v_{cm} + \frac{\mu}{m_t} \vec{v}$, alla fine risulta:

$$\Delta \vec{v}_t = \frac{\mu}{m_t} \Delta \vec{v} \quad (2.2)$$

Questa relazione vale anche per le componenti ortogonali e parallele della velocità nel sistema di riferimento dell'orbita relativa. Quindi, $\Delta v_{t\perp} = \frac{\mu}{m_t} \Delta v_{\perp}$, $\Delta v_{t\parallel} = \frac{\mu}{m_t} \Delta v_{\parallel}$.

Utilizzando l'approssimazione impulsiva però, si può arrivare ad avere un'ulteriore informazione su $\Delta v_{\perp}$; infatti, si ottiene che

$$\mu \|\vec{v}_{\perp}\| = \frac{2Gm_t m_f}{b \|\vec{v}\|} \quad (2.3)$$

Dalla componente perpendicolare dell'equazione (2.2) e dall'equazione (2.3), si ricava infine che per due stelle che interagiscono all'interno di una galassia $\|\Delta v_{t\perp}\|^2 = \frac{4G^2 m_f^2}{b^2 \|\vec{v}\|^2}$.

Detto questo, bisogna considerare che la stella di test, trovandosi dentro una galassia, interagisce con moltissime altre stelle. Tenendo quindi conto del fatto che, rispetto ad ogni famiglia di stelle con velocità di field $\vec{v}_f$, la stella di test assume una certa velocità $\vec{v}$, considerando ogni famiglia possibile si ha che:

$$\sum \|\Delta v_{t\perp}\|^2 \sim 8\pi G^2 m_f^2 n_f \ln(\Lambda) \Psi(\|\vec{v}_t\|) \Delta t \quad (2.4)$$

Con un ragionamento simile, può essere calcolata anche la componente parallela:

$$\sum \|\Delta v_{t\parallel}\|^2 \sim -4\pi G^2 m_f (m_f + m_t) n_f \ln(\Lambda) \frac{\chi(\|\vec{v}_t\|) \vec{v}_t}{\|\vec{v}_t\|^3} \Delta t \quad (2.5)$$

In questo modo si può capire come si muove la stella di test, il cui moto si considera essere perturbato da tutte le altre stelle all'interno della galassia. Le equazioni (2.4) e (2.5) possono poi essere utilizzate per calcolare il coefficiente di diffusione della variazione di energia cinetica della stella di test $D[\Delta T_t]$:

$$D[\Delta T_t] = \frac{m_t}{2} (D[\|\Delta \vec{v}_t\|^2] + 2\langle \vec{v}_t, D[\Delta \vec{v}_{t\parallel}] \rangle) \quad (2.6)$$

Usando $D[\Delta T_t]$ per dividere T_t si ottiene il tempo caratteristico con cui le fluttuazioni di energia sentono la termodinamica: $t = \frac{T_t}{D[\Delta T_t]}$. [1]

2.1.1 Tempo di rilassamento

In un sistema di N corpi come quello trattato, è necessario introdurre una grandezza molto importante: il tempo di rilassamento. Il tempo di rilassamento di un sistema indica il tempo necessario affinché la sua energia totale subisca una variazione pari alla sua energia iniziale, a causa degli urti tra stelle. Si tratta di un tempo scala che permette di definire il sistema come collisionale, se è minore dell'età del sistema stesso, o non collisionale se è superiore.

Utilizzando l'equazione (2.4), si può quindi calcolare il tempo di rilassamento a due corpi t_{2b} come segue:

$$t_{2b} = \frac{\|\vec{v}_t\|^2}{8\pi G^2 m_f^2 n_f \ln \Lambda \Psi(\|\vec{v}_t\|)} \quad (2.7)$$

Per capire se, calcolando un eventuale risultato numerico, si tratta di una quantità di tempo grande o piccola, diventa utile confrontare il tempo di rilassamento con un'altra quantità, che diciamo essere il tempo dinamico della galassia. Considerando quindi che:

- $\|\vec{v}_t\| = \sigma$
- $t_{dyn} = \frac{2R}{\sigma}$
- $\Psi(\|\vec{v}_t\|) = \frac{1}{\|\vec{v}_t\|}$
- vale $2T = -U$, da cui $M\sigma^2 = \frac{GM^2}{R}$

allora si può calcolare il rapporto tra il tempo di rilassamento a due corpi e il tempo dinamico della galassia, che risulta essere:

$$\frac{t_{2b}}{t_{dyn}} = \frac{N}{12 \ln \Lambda} = \frac{N}{12 \ln N} \quad (2.8)$$

Numericamente, considerando una generica galassia ellittica con $N_\star = 10^{11}$, risulta $t_{dyn} = 10^8$ anni e $\frac{t_{2b}}{t_{dyn}} \sim 10^8 - 10^9$. Considerando invece un ammasso globulare con $N_\star = 10^6$, e $t_{dyn} = 10^6$ anni, risulta $\frac{t_{2b}}{t_{dyn}} \sim 10^4$. Per questo, si trova che un ammasso globulare avrebbe $t_{2b} \sim 10^{10}$ anni, a differenza della galassia ellittica, che avrebbe invece $t_{2b} \sim 10^{16}$ anni.

Si osserva quindi che una galassia è un sistema non collisionale, a differenza di un ammasso globulare, e che al diminuire del numero di stelle il sistema tende ad essere sempre più collisionale. Una conclusione di questo tipo sembrerebbe un assurdo, visto che più oggetti ci sono nel sistema, maggiore è il numero di urti che essi possono fare. In realtà, si osserva che $\Delta T_t \propto \frac{1}{N^2}$, ovvero che l'energia cinetica scambiata tra due corpi a seguito di un'interazione è inversamente proporzionale al quadrato del numero di oggetti che popolano il sistema. Per questo, non è un assurdo dire che una galassia sia un sistema non collisionale, infatti, essendo composta da un altissimo numero di stelle, l'energia scambiata durante ogni urto deve essere molto bassa. [1]

2.1.2 Sistemi non collisionali

Le componenti di un sistema non collisionale, che in questo caso sono le stelle della galassia, si muovono sotto un potenziale medio generato da tutte le altre componenti del sistema stesso. Considerando un sistema di questo tipo quindi, è possibile associargli una funzione, chiamata funzione di distribuzione $f(\vec{x}, \vec{v}, t)$, che riesce a descrivere molte delle sue proprietà. In particolare, svolgendo l'integrale $\int_{\mathbb{R}^3} f(\vec{x}, \vec{v}, t) d^3\vec{v}$ si ottiene la densità numerica di stelle in $\vec{x}$ al tempo t . Inoltre, conoscendo le coordinate di spazio e velocità di una stella ad un tempo t_0 , ovvero $f(\vec{x}, \vec{v}, t_0)$, si hanno informazioni sufficienti per conoscere $f(\vec{x}, \vec{v}, t)$.

Equazione di Boltzmann

Si consideri adesso il flusso dei punti nello spazio delle fasi che si genera mentre le stelle si muovono lungo le loro orbite. Le loro coordinate possono essere scritte attraverso il vettore $\vec{w} \equiv (\vec{x}, \vec{v})$, mentre la velocità del flusso si può scrivere come $\dot{\vec{w}} = (\dot{\vec{x}}, \dot{\vec{v}}) = (\vec{v}, -\nabla\Phi)$. Il flusso $\vec{w}$ conserva le stelle, quindi, a meno di incontri con altri corpi, esse procedono senza problemi nello spazio. Questa conservazione significa anche che $f(\vec{w}, t)$ soddisfa un'equazione di continuità analoga a quella soddisfatta da $\rho = (\vec{x}, t)$ per il flusso di un fluido ordinario:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{\alpha=1}^6 \frac{\partial(f\dot{w}_{\alpha})}{\partial w_{\alpha}} = 0 \quad (2.9)$$

Dove w_{α} , con α da 1 a 6, sono le componenti di $\vec{w}$. Inoltre, il flusso $\dot{\vec{w}}$ vanta anche la seguente proprietà:

$$\sum_{i=1}^6 \frac{\partial \dot{w}_{\alpha}}{\partial w_{\alpha}} = \sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_i} + \frac{\partial \dot{v}_i}{\partial v_i} \right) = - \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial v_i} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \right) = 0 \quad (2.10)$$

Dove Φ è il potenziale gravitazionale. Utilizzando le equazioni (2.9) e (2.10), si può quindi ottenere l'equazione di Boltzmann, che vettorialmente risulta essere:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla f - \nabla \Phi \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{v}} = 0 \quad (2.11)$$

Attraverso questa equazione è quindi possibile capire come varia la distribuzione di stelle nello spazio e nelle velocità a causa del loro moto e del campo gravitazionale della galassia. In particolare, estendendo il concetto di derivata lagrangiana a 6 dimensioni, si arriva a capire che il flusso dei punti nello spazio delle fasi è incompressibile. [2]

Equazioni di Jeans

L'equazione di Boltzmann (2.11) può anche essere scritta nel seguente modo:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{i=1}^3 \left(v_i \frac{\partial f}{\partial x_i} - \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial v_i} \right) = 0 \quad (2.12)$$

Trovare tutte le sue soluzioni può essere molto difficile. Tuttavia, è possibile ricavare informazioni utili usando i momenti dell'equazione di Boltzmann non collisionale. In particolare, integrando l'equazione (2.12) su tutte le possibili velocità e sviluppando poi i calcoli, si ottiene quella che viene chiamata prima equazione di Jeans:

$$\frac{\partial \nu}{\partial t} + \frac{\partial(\nu \bar{v}_i)}{\partial x_i} = 0 \quad (2.13)$$

con $\nu \equiv \int f dv^3$ e $\bar{v}_i \equiv \frac{1}{\nu} \int f v_i dv^3$. L'equazione (2.13) corrisponde all'equazione di continuità per ν .

Moltiplicando invece l'equazione (2.12) per la velocità v_i e integrando su tutte le velocità, si ottiene la seconda equazione di Jeans:

$$\frac{\partial(\nu \bar{v}_j)}{\partial t} + \frac{\partial(\nu \bar{v}_j \bar{v}_i)}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} = 0 \quad (2.14)$$

con $\bar{v}_i \bar{v}_j \equiv \frac{1}{\nu} \int f v_i v_j d\vec{v}^3$.

Riscrivendo l'equazione (2.14) come $\nu \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial t} - \bar{v}_j \frac{\partial \nu \bar{v}_i}{\partial x_i} + \frac{\partial \nu \bar{v}_j \bar{v}_i}{\partial x_i} = -\nu \frac{\partial \Phi}{\partial x_j}$ e sostituendo al suo interno $\sigma_{ij}^2 \equiv \overline{(v_i - \bar{v}_i)(v_j - \bar{v}_j)} = \bar{v}_i \bar{v}_j - \bar{v}_i \bar{v}_j$, si può ottenere la terza equazione di Jeans:

$$\nu \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial t} - \nu \bar{v}_i \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_i} = -\nu \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} - \frac{\partial(\nu \sigma_{ij}^2)}{\partial x_i} \quad (2.15)$$

Il tensore di dispersione delle velocità σ_{ij}^2 descrive la distribuzione delle velocità stellari attorno alla velocità media locale. Il tensore può essere infatti diagonalizzato, individuando tre direzioni principali e le corrispondenti dispersioni di velocità, che definiscono un ellissoide di dispersione. Se le dispersioni sono uguali in tutte le direzioni, l'ellissoide degenera in una sfera e il sistema è isotropo; al contrario, una diversa dispersione nelle varie direzioni indica la presenza di anisotropia cinematica.

Studiando i momenti dell'equazione di Boltzmann successivi, è possibile ottenere un'insieme infinito di altre equazioni. Infatti, si ricaverebbe un sistema che potrebbe essere chiuso vincolando il tensore di dispersione di velocità attraverso opportune ipotesi sulla struttura dinamica del sistema. [2]

2.2 Piano del viriale

Il teorema del viriale è dato da un numero infinito di identità, che collegano le proprietà cinetiche del sistema alle sue proprietà strutturali. Esse possono essere ricavate dalle equazioni di Jeans e permettono di avere informazioni relative all'intero sistema.

Considerando un sistema autogravitante, virializzato e dominato dalla forza di gravità classica $F \propto \frac{1}{r^2}$, il teorema del viriale si presenta nella forma:

$$2T = -U \quad (2.16)$$

e permette di ottenere diverse informazioni sull'energia di un sistema di questo tipo.

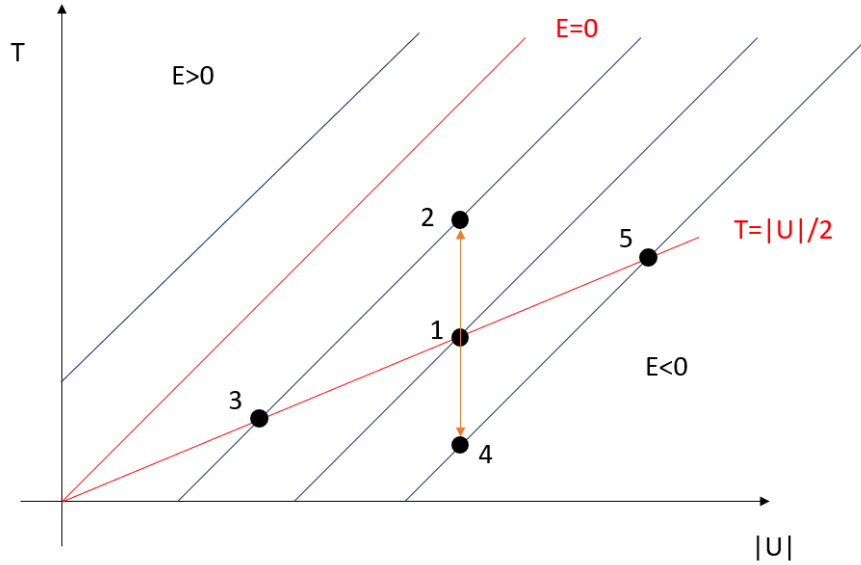


Figura 2.2: Piano del viriale: si tratta di un grafico che mostra, sull'asse delle x, il modulo dell'energia potenziale U del sistema, e sull'asse delle y l'energia cinetica T . Ogni sistema può essere rappresentato come un punto su questo grafico in base ai suoi valori di T e U .

L'energia totale del sistema è data dalla somma della sua energia cinetica e della sua energia potenziale, cioè $E = T + U = T - |U|$, da cui $T = E + |U|$. Da questa equazione è possibile ricavare un insieme di rette che, nonostante mostrino una variazione di T e U , conservano ciascuna la propria E . Questo fascio di rette viene detto fascio della conservazione dell'energia.

I sistemi che si trovano sulla bisettrice del grafico hanno $T = |U|$, quindi hanno E nulla. Invece, i sistemi che si trovano all'equilibrio hanno $T = \frac{|U|}{2}$. Da qui si può quindi osservare una cosa molto importante: i sistemi all'equilibrio hanno $E < 0$. Inoltre, un sistema che si trova sulla generica retta $T = E + |U|$, per essere all'equilibrio deve trovarsi anche sulla retta $T = \frac{|U|}{2}$. Questo significa che, per essere all'equilibrio, il sistema tenderà a spostarsi sull'intersezione delle due rette, siccome può muoversi solo sulla sua retta di conservazione dell'energia.

Si consideri quindi un sistema all'equilibrio (posizione (1) in Figura 2.2). Se la sua energia cinetica viene fatta aumentare, allora si troverà su una nuova retta di conservazione dell'energia (posizione 2), e per tornare all'equilibrio si sposterà sull'intersezione tra la sua nuova retta di conservazione dell'energia e la retta $T = \frac{|U|}{2}$ (posizione 3), dove i valori di U e T sono minori. Al contrario, se l'energia del sistema dovesse diminuire (posizione 4), per tornare all'equilibrio esso si dovrebbe spostare in un punto con T e $|U|$ maggiori (posizione 5). Quindi, più il sistema si raffredda, più tende comprimersi e viceversa. Tale meccanismo però, deve essere messo in moto da una variazione di E . Siccome l'universo in cui si trova il sistema è generalmente più freddo di esso, solitamente si tratta di una perdita di energia, che poi suscita una variazione di T e $|U|$ secondo le equazioni: [1]

$$\begin{cases} \Delta T = -\Delta E \\ \Delta U = 2\Delta E \end{cases} \quad (2.17)$$

Capitolo 3

Dinamica delle galassie ellittiche

Nelle galassie ellittiche, a differenza di quello che si osserva nelle spirali, le stelle che compongono il sistema seguono orbite casuali, senza una rotazione coerente fra le varie componenti. Per misurare le velocità di un sistema di questo tipo si utilizza la dispersione di velocità, che può essere ricavata dallo spessore delle righe di assorbimento o di emissione dello spettro della galassia.

3.1 Massa viriale

Misurando la dispersione di velocità, è possibile ottenere la massa del sistema utilizzando il teorema del viriale. Infatti, come già accennato nel sottocapitolo relativo al piano del viriale, per un sistema autogravitante, virializzato e dominato dalla forza di gravità classica $F \propto \frac{1}{r^2}$, il teorema del viriale si presenta nella forma

$$2T = -U \quad (3.1)$$

Approssimando poi la galassia ad un sistema composto da N stelle, ognuna con massa m , allora $T = \frac{M_{tot}\sigma^2}{2}$. L'energia potenziale gravitazionale U invece, può essere calcolata come $U = -\frac{3GM_{tot}^2}{5R}$, dove il fattore $\frac{3}{5}$ è il coefficiente relativo ad una sfera omogenea. Da cui:

$$M_{tot} = \frac{5R\sigma^2}{3G} \quad (3.2)$$

La massa ottenuta prende il nome di massa viriale e aumenta all'aumentare della dispersione di velocità. [3]

3.2 Legge di de Vaucouleurs

Un'altra proprietà importante da definire per una galassia ellittica è il suo raggio. Strutture di questo tipo però, non hanno confini ben definiti, per cui è stato introdotto il concetto di raggio effettivo R_e .

Dall'immagine della galassia è possibile ottenere la luminosità proiettata all'interno di un raggio R , $L_p(R)$. Per $R = \infty$, $L_p(\infty) = L(\infty) = L_{tot}$, dove L è la luminosità di volume, mentre L_{tot} è la luminosità assoluta totale della galassia. Chiaramente, esisterà una distanza dal nucleo, un raggio, tale per cui il valore della luminosità

proiettata è metà di quella totale. Questo raggio prende il nome di raggio effettivo R_e ed è definito come segue:

$$L_p(R_e) = \frac{L_{tot}}{2} \quad (3.3)$$

Affinchè il raggio della galassia sia effettivamente il raggio effettivo, l'equazione (3.3) deve essere rispettata, per cui R_e non può essere un parametro di fit. Osservando poi i profili di brillantezza $I(R)$ di un campione di galassie ellittiche, i de Vaucouleurs si resero conto di una cosa molto importante: graficando l'andamento di $\frac{I(R)}{I(0)}$, in funzione di $\frac{R}{R_e}$, ad ogni galassia del campione corrispondevano rette molto simili. In particolare, esse erano descritte dalla legge

$$I(R) = I(0)e^{-7.67(\frac{R}{R_e})^{1/4}} \quad (3.4)$$

detta legge di de Vaucouleurs. Sérsic la riscrisse poi nella sua forma più generale, chiamata legge di Sérsic:

$$I(R) = I(0)e^{-b(m)(\frac{R}{R_e})^{1/m}} \quad (3.5)$$

Con $b(m) \sim 7.67$ e $m \sim 4$. In particolare, $m > 4$ per le galassie più luminose e $m < 4$ per le galassie meno luminose. [1]

3.3 Piano fondamentale

Per capire il comportamento delle galassie ellittiche, diventa utile a questo punto capire quali, tra le loro proprietà, sono correlate. A questo proposito, Djorgovski e Davis analizzarono un campione composto da un centinaio di galassie ellittiche e osservarono che, tra le loro proprietà, solo luminosità assoluta L , raggio effettivo R_e e dispersione di velocità σ erano correlate tra loro. In particolare, è stato osservato che queste tre grandezze possono formare uno spazio parametrico tridimensionale, nel quale ogni galassia viene rappresentata come un puntino.

In questo spazio, tutte le galassie si dispongono su un piano inclinato, chiamato poi piano fondamentale, con una dispersione circa del 5%.

L'equazione che descrive il piano è la seguente:

$$\alpha \log L + \beta \log \sigma + \gamma \log R_e = \delta \quad (3.6)$$

Le tre proiezioni del piano fondamentale sui piani $\log L - \log R_e$, $\log L - \log \sigma$ e $\log R_e - \log \sigma$ permettono di osservare tre relazioni, chiamate leggi di scala. Esse erano state scoperte già prima del piano fondamentale, ma con questo nuovo strumento è stato possibile spiegare da dove derivano e per quale motivo la loro dispersione è così alta. [1] [7]

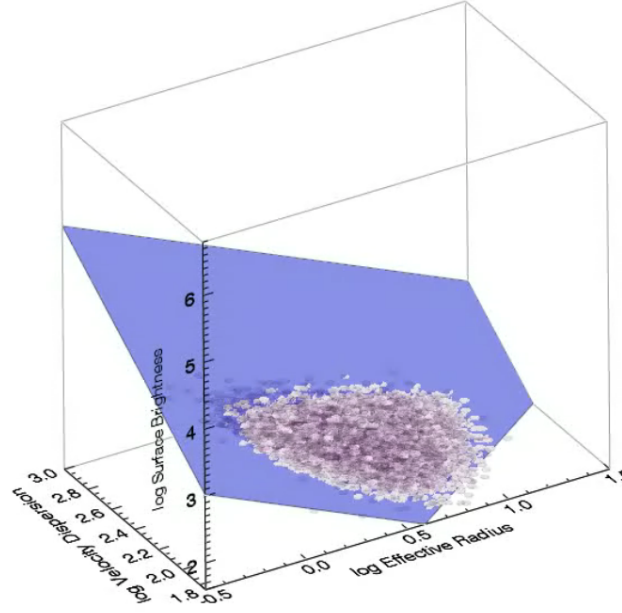


Figura 3.1: Piano fondamentale.

Fonte: <https://jacobpilawa.github.io/galaxies/pages/ellipticals.html>

3.3.1 Leggi di scala

Le leggi di scala sono 3 e mettono in relazione tra loro alcune importanti proprietà delle galassie ellittiche.

La prima legge da ricordare è la **Faber-Jackson**, secondo cui: $L \propto \sigma^4$.

Essendo la proiezione del piano fondamentale sul piano $\log L - \log \sigma$, è ragionevole osservare una dispersione circa del 40% e può essere utilizzata per calcolare la distanza della galassia dal sistema solare. Infatti, osservando la dispersione di velocità σ di una galassia, si può ricavare, attraverso questa legge, la sua luminosità assoluta L . Sapendo poi che anche la sua luminosità apparente l è osservabile e che $l = \frac{L}{4\pi d^2}$, utilizzando la formula inversa si può trovare d .

La seconda legge, detta **legge di Kormendy** poichè scoperta da lui e dai suoi collaboratori, stabilisce che $L \propto R_e^a$, con $a \sim 1$.

Questa legge deriva dalla proiezione del piano fondamentale sul piano $\log L - \log R_e$ e può essere anche lei utilizzata per calcolare la distanza della galassia ellittica in kpc. Infatti, il raggio della galassia viene inizialmente osservato in arcsec. Sapendo poi che, per via di questa legge, si può dire che $\frac{L}{R_e^2} \propto \frac{R_e^{-1}}{R_e^2}$, e $\frac{L}{R_e^2} = \frac{L}{d^2} \frac{1}{\frac{R_e^2}{d^2}} = \frac{l}{R_{rad}^2}$, dove sia l che R_{rad} possono essere osservati. Conoscendo quindi il raggio effettivo sia in arcosecondi che in parsec è possibile calcolare la distanza del sistema. [1]

Infine, la terza legge è chiamata comunemente **legge $D_n - \sigma$** e prevede una correlazione tra le due grandezze del tipo: $D_n \propto \sigma^{1.2}$. D_n è il diametro della galassia entro cui la brillantezza superficiale media raggiunge il valore fissato di $25.75 \text{ mag} \cdot \text{arcsec}^{-2}$ in banda B. [6]

Capitolo 4

Dinamica delle galassie a spirale

Le stelle che fanno parte di una galassia a spirale tendono a muoversi orbitando attorno al suo centro. La velocità di rotazione delle stelle può però cambiare in base alla loro distanza da esso; per questo, diventa utile introdurre come strumento la curva di rotazione della galassia.

4.1 Curva di rotazione

Nel descrivere il concetto di curva di rotazione, occorre prima di tutto definire un potenziale gravitazionale $\Phi(R, z)$, generato dalla distribuzione di massa della galassia. Esso permette di calcolare la forza centripeta $\frac{\partial \Phi}{\partial R}$, per la quale vale che:

$$\frac{v_c^2(R)}{R} = \frac{\partial \Phi}{\partial R}, \quad \text{da cui} \quad v_c^2(R) = R \frac{\partial \Phi}{\partial R} \quad (4.1)$$

Avendo queste informazioni, è possibile capire quale tipo di curva di rotazione caratterizza la galassia in base alla sua densità.

Si consideri innanzitutto un oggetto a simmetria sferica, allora valgono il primo e il secondo teorema di Newton, secondo cui:

1. data una buccia a simmetria sferica e a densità costante, allora il campo di gravità prodotto da essa in qualsiasi punto al suo interno vale 0;
2. fuori dalla buccia, il campo di gravità che essa produce ha lo stesso valore di quello prodotto da tutta la massa della buccia stessa se venisse messa nell'origine, cioè $\bar{g} = -\frac{GM}{r^2}\hat{e}_r$.

Per questo, è possibile calcolare la massa di un sistema, caratterizzato da un certo raggio r , utilizzando la formula $M(r) = 4\pi \int_0^r x^2 \rho(x) dx$.

Sapendo quindi che, per un oggetto a simmetria sferica vale l'approssimazione $\frac{\partial \Phi}{\partial R} = \frac{GM(r)}{R^2}$, allora, dato un sistema con $M(r) = m$, si può dire che $v_c^2(R) = \frac{Gm}{R}$. Cioè, $v_c(R) \propto \frac{1}{\sqrt{R}}$. Un andamento di questo tipo per v_c da origine ad una curva di rotazione detta Kepleriana.

Considerando invece un sistema con $\rho_0 = \text{cost}$, si ottiene $v_c^2(R) = \frac{4\pi}{3}\rho_0 GR^2$, cioè $v_c \propto R$. Un andamento di questo tipo dà origine ad una curva di rotazione rigida, per la quale oggetti in orbite differenti percorrono l'orbita stessa con velocità che aumentano all'aumentare della distanza.

Considerando infine $\rho(r) = \frac{A}{r^2}$, allora $M(r) = 4\pi Ar$ e si ottiene $\frac{v_c^2}{R} = \frac{4\pi GA}{R}$, ovvero $v_c^2 = \text{cost}$. Si tratta in questo caso di una curva di rotazione piatta, il che implica che il disco sia in rotazione differenziale.

Si nota quindi che, dall'andamento della curva di rotazione di una galassia, ovvero dall'andamento della velocità di rotazione di una serie di stelle rispetto alla distanza dal centro della struttura, è possibile ricavare la massa necessaria per produrre il campo gravitazionale osservato, ma non è possibile capire come è distribuita geometricamente la materia tra bulge, disco e alone.

Per quanto riguarda la curva di rotazione della Via Lattea, è stato calcolato che, considerando una simmetria sferica, essa dovrebbe essere kepleriana. In realtà, viene però osservata piatta, e infatti una galassia a spirale è un sistema a simmetria cilindrica. Per questo, i ragionamenti fatti fino ad ora sarebbero corretti se descrivessero solo la curva di rotazione dell'alone della galassia, non del disco.

Considerando questa correzione quindi, si può spiegare l'andamento piatto della curva di rotazione del disco della Via Lattea, così come quello di altre galassie a spirale. Quando però il raggio R inizia ad assumere valori superiori al raggio del disco, per quanto detto ci si aspetterebbe effettivamente una curva di rotazione kepleriana, mentre in realtà essa rimane piatta. Questo andamento viene spiegato attraverso la presenza di materia oscura e, sebbene siano state avanzate molte ipotesi alternative, nessuna si è rivelata altrettanto efficace. [1] [5]

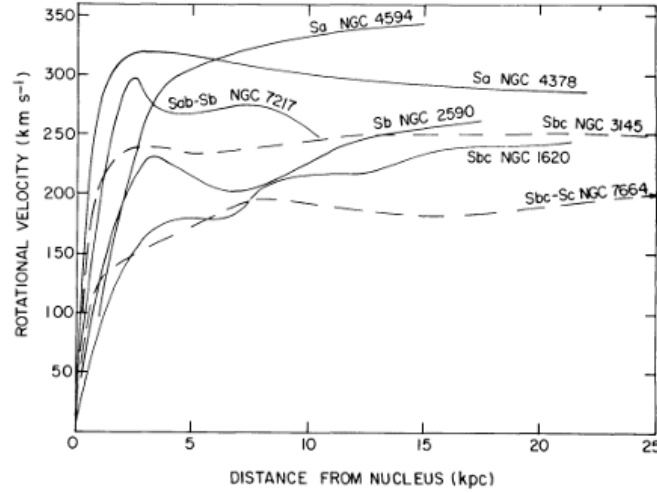


Figura 4.1: Andamenti delle velocità di rotazione stellare in funzione della distanza dal nucleo per sette galassie. [5]

4.2 Legge di Tully-Fisher

L'analisi delle curve di rotazione delle galassie a spirale rende necessario evidenziare una relazione empirica tra la velocità di rotazione del gas HI e la luminosità assoluta L della galassia, nota come relazione di Tully-Fisher. v_{HI} infatti, è legata ad L secondo la legge empirica

$$L \propto v_{HI}^4 \quad (4.2)$$

Questa legge ha una dispersione molto alta, ma è utilizzabile per calcolare la distanza di una galassia a spirale dal Sistema Solare. Infatti, come accennato nella sottosezione (3.3.1), la luminosità apparente di un corpo si può calcolare come $l = \frac{L}{4\pi d^2}$. Conoscendo quindi L attraverso la legge di Tully-Fisher, è possibile calcolare la distanza d . [1]

4.3 Accenni sulla dinamica dei bracci

Come già accennato nella sezione (1.2), le galassie a spirale sono caratterizzate da una struttura a bracci, che può essere più o meno marcata. All'interno dei bracci di una galassia vengono generalmente osservate stelle di tipo O e B, che hanno un tempo di vita minore rispetto a molte altre stelle, e sono quindi visibili in zone ad alta formazione stellare. Per questo, si pensa che i bracci siano i siti principali in cui tendono a formarsi nuove stelle. Inoltre, in base a dove punta l'esterno del braccio della spirale, quindi se nella stessa direzione della rotazione della galassia o in senso opposto, esso può essere classificato come progrado o retrogrado.

Relativamente al fenomeno che riesce a produrre strutture di questo tipo, sono state fatte varie ipotesi. Se il materiale che originariamente compone il braccio rimanesse dentro di esso mentre si muove, allora la rotazione differenziale della galassia farebbe avvolgere sempre di più il materiale su se stesso in tempi brevi rispetto all'età della galassia. Perciò, se si verificasse questo tipo di fenomeno, che prende il nome di winding problem, passata una certa quantità di tempo si verificherebbe la scomparsa della struttura a bracci.

A questo problema sono state presentate varie soluzioni. Ad esempio, è stato proposto che il pattern a spirale sia statisticamente stabile ma che i singoli bracci siano relativamente giovani. Un'altra ipotesi è la possibilità che il pattern a spirale sia un fenomeno temporaneo, causato da una recente perturbazione violenta. Un'altra ipotesi ancora, è che si tratti di un'onda di detonazione, prodotta da una stella in fase di formazione, che si sta propagando nel disco.

Un'altra possibilità è che il pattern ondulatorio sia presente nella densità e, di conseguenza, nel potenziale gravitazionale del disco stesso. Questa ipotesi costituisce la base della teoria delle onde di densità sviluppata da Lin e Shu negli anni Sessanta. Già Lindblad aveva studiato la possibilità che la struttura a spirale fosse il risultato dell'interazione tra le orbite stellari e le forze gravitazionali presenti nel disco. Successivamente, Lin e Shu svilupparono questa idea, proponendo che la struttura a spirale di galassie di questo tipo potesse essere vista come un'onda di densità, cioè un'oscillazione che si propaga lungo il disco della galassia stessa come un'onda. Ipotizzarono inoltre, come già Lindblad aveva fatto, che questi pattern rimanessero quasi inalterati nel tempo, cambiando molto lentamente. Tutto ciò portò quindi a pensare che i bracci delle galassie a spirale fossero delle onde di densità quasi stazionarie. Con l'avvicinarsi dell'onda di densità alla materia che compone la galassia, il gas tende a comprimersi e a collassare, formando nuovi corpi. In questo modo è possibile spiegare per quale motivo i bracci tendono ad essere popolati da stelle giovani e luminose, risaltando all'interno della galassia. È stato però osservato anche che molte delle stelle formate tendono ad avere una vita troppo corta per allontanarsi molto, prima di morire, dal luogo in cui si sono formate. [2]

Bibliografia

- [1] Luca Ciotti, *Appunti del corso "Astrofisica Extragalattica"*, 2026.
- [2] J. Binney, S. Tremaine, *Galactic Dynamics*, 1994.
- [3] *Astronomy 211*, Fall 2017.
- [4] B. W. Carrol, D. A. Ostlie, *An Introduction to Modern Astrophysics*, 2017.
- [5] Vera C. Rubin, W. Kent Ford, Jr., and Norbert Thonnard, *EXTENDED ROTATION CURVES OF HIGH-LUMINOSITY SPIRAL GALAXIES. IV. SYSTEMATIC DYNAMICAL PROPERTIES, $S_a - S_c$* , 1978.
- [6] Alan Dressler, *THE $D_n - \sigma$ RELATION FOR BULGES OF DISK GALAXIES: A NEW, INDEPENDENT MEASURE OF THE HUBBLE CONSTANT*, 1986.
- [7] S. Djorgovski, M. Davis, *FUNDAMENTAL PROPERTIES OF ELLIPTICAL GALAXIES*, 1986.