

Alma Mater Studiorum – Università di Bologna

Dipartimento di Fisica e Astronomia

Corso di Laurea in Astronomia

L'atomo di idrogeno: righe, serie e sua importanza in astrofisica

Tesi di Laurea

Presentata da:

Anna Giordani

Relatore:

Chiar.ma Prof. Marcella Brusa

Anno Accademico 2025–2026



Disegno originale dello spettro solare di J. von Fraunhofer (ca. 1814), che mostra per la prima volta la mappatura sistematica delle righe di assorbimento [5].

Introduzione

Questa tesi si apre con una descrizione quantistica dell'atomo di idrogeno. Esso è semplice dal punto di vista atomico, ma proprio grazie alla sua enorme abbondanza e alle sue transizioni osservabili costituisce uno strumento fondamentale per indagare l'Universo. In particolare viene approfondita la struttura iperfine, fondamentale per comprendere l'origine della celebre riga a 21 cm dell'idrogeno. L'attenzione viene poi spostata sulle serie spettrali originate dall'interazione tra l'atomo e la radiazione, presenti negli spettri stellari e importanti per comprenderne la struttura. Viene spiegata brevemente l'origine dello spettro continuo del Sole. Inoltre viene riportato il caso dell'eclissi solare vista in Australia il 20 aprile 2023, in cui è stato possibile osservare righe in emissione della serie di Balmer. Viene poi discussa l'importanza dell'idrogeno su scala galattica, descrivendo il mezzo interstellare, dove l'elemento in esame si trova in diverse forme. L'esempio riportato riguarda la nostra Galassia, la Via Lattea, in cui la curva di rotazione del gas $H\text{ I}$, diventa un tracciante della materia oscura. Il percorso proposto mostra quindi come le proprietà quantistiche dell'atomo di idrogeno possano tradursi in strumenti osservativi fondamentali per lo studio di strutture e fenomeni su scala astronomica.

Indice

1	L'atomo di idrogeno	1
1.1	Descrizione quantistica dell'atomo	1
1.2	Interazione atomo-radiazione ed approssimazione di dipolo	2
1.3	Struttura fine	3
1.4	Struttura iperfine	4
1.5	Coefficienti di Einstein	5
1.5.1	Riga 21 cm	6
2	Righe spettrali	6
2.1	Atmosfera solare	10
3	Mezzo interstellare	11
3.1	Via Lattea	12
3.2	Curva di rotazione	13
4	Conclusioni	15
A	Soluzione all'equazione di Schrödinger	16
B	Interazione atomo-radiazione	17
C	Struttura fine e iperfine	18
D	Costanti fisiche e unità di misura	19
D.1	Costanti fisiche fondamentali	19
D.2	Costanti atomiche e quantistiche	20
D.3	Unità astronomiche	20
D.4	Fattori di conversione	20

Nota. Salvo quando diversamente specificato, il valore numerico delle costanti fisiche utilizzate nel testo è riportato, nei sistemi CGS e SI, nell'Appendice D.

1 L'atomo di idrogeno

Nel 1913 Bohr propose un modello per descrivere l'atomo di idrogeno, basato sulla quantizzazione del momento angolare orbitale dell'elettrone, assumendo che esso si muova su orbite circolari attorno al nucleo. Da questa trattazione concluse che i livelli energetici dell'elettrone sono quantizzati, trovando la celebre formula di Bohr:

$$E_n = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 a_0} \frac{Z^2}{2n^2} \quad (1.1)$$

Nonostante il modello semiclassico utilizzato da Bohr, lo spettro energetico trovato è analogo a quello che emerge dalla trattazione quantistica rigorosa, discussa in seguito. Grazie a questa scoperta fu possibile interpretare la formula empirica, nota già da tempo, usata per determinare il numero d'onda $\tilde{\nu}$ della radiazione emessa o assorbita durante una transizione elettronica tra due livelli n_1 e n_2 in funzione della costante di Rydberg R_∞ (calcolata assumendo infinita la massa nucleare):

$$\tilde{\nu} = R_\infty \left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right) \quad (1.2)$$

1.1 Descrizione quantistica dell'atomo

Una descrizione più accurata dell'atomo di idrogeno viene proposta con l'avvento della meccanica quantistica, risolvendo l'equazione di Schrödinger indipendente dal tempo, ovvero un'equazione agli autovalori dell'hamiltoniana. Quest'ultimo operatore si può scrivere come:

$$\hat{H} = \frac{\vec{p}_e^2}{2m_e} + \frac{\vec{p}_N^2}{2M_N} + V(r) \quad (1.3)$$

dove è presente il potenziale centrale $V(r)$:

$$V(r) = -\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r}_e - \vec{r}_N|} \quad (1.4)$$

Per una semplificazione del problema è necessario spostarsi nel sistema di riferimento del centro di massa, come si vede in Figura 1.1, introducendo la distanza relativa tra elettrone e nucleo $\vec{r} = \vec{r}_e - \vec{r}_N$ e la massa ridotta $\mu = m_e M_N / (m_e + M_N)$. In questo modo otteniamo un problema a simmetria sferica, per cui sarà necessario risolvere l'equazione di Schrödinger in coordinate polari, la cui trattazione viene approfondita nell'Appendice A.

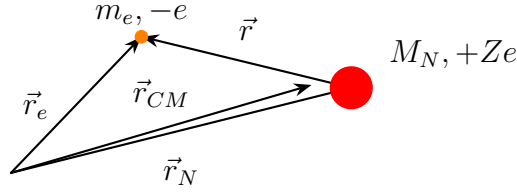


Figura 1.1: Coordinate del sistema elettrone–nucleo.

Dalla risoluzione della parte angolare emergono due numeri quantici, associati a due operatori ricavati da $\vec{L}$, $l \in [0, n - 1]$ e $m \in [-l, l]$.

Gli autovalori dell'energia coincidono esattamente con quelli trovati da Bohr, riportati nell'equazione (1.1). Si può notare che essi dipendono unicamente dal numero quantico principale $n \geq 1$, trovando quindi infiniti livelli discreti di energia. È dunque presente una degenerazione rispetto a n stesso, che potrà essere parzialmente rimossa con l'introduzione della struttura fine.

1.2 Interazione atomo-radiazione ed approssimazione di dipolo

L'interazione tra atomo e campo elettromagnetico può essere descritta tramite l'approccio semi-classico, ovvero il campo viene trattato classicamente mentre l'atomo viene trattato quantisticamente, come appena mostrato. Inoltre il potenziale vettore che definisce il campo con pulsazione ω e vettore d'onda $\vec{k}$, che rispetta il gauge di Coulomb, può essere scritto come:

$$\vec{A} = \frac{A_0}{2} \left[\vec{\epsilon} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} + \vec{\epsilon}^* e^{-i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \right] \quad (1.5)$$

L'analisi più dettagliata è argomento dell'Appendice B, dove si tratta l'interazione come una perturbazione, quindi utilizzando la teoria perturbativa dipendente dal tempo. Da questa trattazione ottengo gli elementi di matrice protagonisti della definizione dei transition rate, il primo per l'assorbimento e il secondo per l'emissione stimolata:

$$\begin{cases} M_{ba} = \langle b | e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} \vec{\epsilon} \cdot \vec{\nabla} | a \rangle \\ \tilde{M}_{ba} = \langle b | e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}} \vec{\epsilon}^* \cdot \vec{\nabla} | a \rangle \end{cases} \quad (1.6)$$

in cui gli stati considerati sono $|a\rangle$ e $|b\rangle$ con pulsazione associata $\omega_{ba} = (E_b - E_a)/\hbar$. Posso ora scrivere i transition rate per due processi, che saranno discussi meglio in seguito: assorbimento (W_{ba}) ed emissione stimolata ($\tilde{W}_{ba}$). Per facilitare la trattazione si introduce l'approssimazione di dipolo elettrico, basata sul fatto che le dimensioni

caratteristiche dell'atomo sono molto minori della lunghezza d'onda della radiazione:

$$\vec{k} \cdot \vec{r} = \frac{2\pi r}{\lambda} \ll 1 \quad (1.7)$$

Questa approssimazione consiste nell'espansione in serie di Taylor dell'esponenziale presente nell'elemento di matrice (1.6):

$$e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} \sim 1 \quad (1.8)$$

I transition rate in approssimazione di dipolo si scrivono nel seguente modo:

$$W_{ba}^D = \tilde{W}_{ba}^D = \frac{4\pi^2 c}{3\hbar} \alpha |r_{ba}|^2 \rho(\omega_{ba}) \quad [t^{-1}] \quad (1.9)$$

dove $r_{ba} = \langle b | \vec{r} | a \rangle$ è l'elemento di matrice dell'operatore posizione.

Una transizione di dipolo elettrico si dice permessa quando questo elemento di matrice è non nullo. Se la transizione è proibita, potrebbe comunque avvenire in quanto degli elementi di ordine superiore della serie (1.8) potrebbero non annullarsi. In particolare se il secondo termine è diverso da 0 ottengo delle transizioni di dipolo magnetico, come la riga osservata a 21 cm approfondita in seguito, e di quadrupolo elettrico. Esse sono meno probabili, quindi originano righe meno intense.

In seguito sono riportate le regole affinché una transizione sia permessa. Esse sono la regola di Laporte sulla parità, ovvero il fatto che l e l' , che caratterizzano i due stati in esame, devono avere parità opposta, dunque:

$$\Delta l = \pm 1 \quad (1.10)$$

La regola sul numero quantico m , invece, esprime l'esigenza che almeno una componente dell'elemento di matrice r_{ba} sia non nullo. Essa è:

$$\Delta m = 0, \pm 1 \quad (1.11)$$

1.3 Struttura fine

La trattazione sull'atomo di idrogeno appena fatta non include le correzioni relativistiche. Parte della degenerazione rispetto a n infatti viene rimossa.

Si osserva l'esistenza di un momento angolare intrinseco dell'elettrone, detto spin e descritto dall'operatore $\vec{S}$, al cui quadrato S^2 è associato il numero quantico $s = 1/2$. Il numero quantico associato alla proiezione lungo z di $\vec{S}$ è invece $m_s = \pm 1/2$. A questo operatore è associato un momento magnetico, ottenendo la cosiddetta interazione spin-orbita, causata proprio dall'accoppiamento di quest'ultimo momento magnetico e il campo magnetico generato dal nucleo nel sistema di riferimento dell'elettrone a causa

del moto relativo. Definisco il momento angolare totale dell'elettrone:

$$\vec{J} = \vec{L} + \vec{S} \quad (1.12)$$

con autovalori associati al suo quadrato J^2 e alla sua proiezione lungo z rispettivamente $j = l \pm 1/2$ e $m_j \in [-j, j]$.

Grazie all'introduzione di questo operatore, esplicitando i passaggi salienti nell'Appendice C, posso infine scrivere la separazione tra due livelli energetici, in unità atomiche, con stesso valore di l e che differiscono per j :

$$\Delta E_{so} = E_{so} \left(l + \frac{1}{2} \right) - E_{so} \left(l - \frac{1}{2} \right) = \frac{\alpha^2 Z^4}{2n^3 l(l+1)} \quad (1.13)$$

L'insieme delle transizioni da un livello caratterizzato da n, l, j e uno caratterizzato da n', l', j' è detto multipletto di righe. Dato che l'approssimazione di dipolo non agisce sullo spin, la regola di selezione su l (1.10) continua a valere. In aggiunta ho l'invarianza dello spin ($\Delta s = 0$) e il teorema di Wigner-Eckart:

$$\begin{cases} \Delta j = 0, \pm 1 \\ \Delta m_j = 0, \pm 1 \end{cases} \quad (1.14)$$

1.4 Struttura iperfine

Un'ulteriore correzione ai livelli energetici è dovuta al fatto che il nucleo abbia anch'esso un momento angolare $\vec{I}$, detto spin nucleare, il cui quadrato I^2 ha autovalore associato dipendente dal numero quantico I . Dovrò quindi introdurre una correzione ai livelli elettronici causata dall'interazione magnetica tra nucleo e atomo. Questa risulta essere molto minore delle correzioni che definiscono la struttura fine.

Introducendo il momento angolare totale:

$$\vec{F} = \vec{J} + \vec{I} \quad (1.15)$$

ottengo la separazione tra livelli energetici:

$$E_{hf} = \frac{C}{2} [F(F+1) - I(I+1) - j(j+1)] \quad (1.16)$$

in cui ho citato l'autovalore associato a F^2 , F , che può assumere i seguenti valori: $|I-j|, |I-j|+1, \dots, I+j$.

Si può notare che C è indipendente da F , perciò si trova la regola degli intervalli:

$$E_{hf}(F) - E_{hf}(F-1) = CF \quad (1.17)$$

I passaggi algebrici principali, legati alla struttura dell'hamiltoniana, si possono trovare nell'Appendice C.

Un nucleo atomico con momento angolare $\vec{I}$ avrà quindi i livelli energetici di struttura fine separati in un multipletto di struttura iperfine, ognuno dei quali è a sua volta $2F + 1$ volte degenere rispetto al numero quantico M_F associato alla proiezione di $\vec{F}$ lungo z .

Le regole di selezione per l (1.10) e per j (1.14) continuano a valere, in aggiunta:

$$\Delta F = 0, \pm 1 \quad \text{con } 0 \rightarrow 0 \text{ proibita} \quad (1.18)$$

1.5 Coefficienti di Einstein

Considero due stati $|a\rangle$, con degenerazione g_a , e $|b\rangle$, con degenerazione g_b ed energia maggiore. Il sistema si trova in equilibrio termodinamico, ad una data temperatura, con la radiazione elettromagnetica. I coefficienti di Einstein sono utilizzati per descrivere la probabilità, ovvero i transition rate, che avvenga una transizione governata da uno dei seguenti meccanismi.

Il primo processo si basa sull'assorbimento di un fotone da parte dell'atomo, con conseguente transizione verso uno stato di energia maggiore ($a \rightarrow b$). Data la densità di energia della radiazione alla frequenza ω_{ba} , $\rho(\omega_{ba})$, la probabilità che avvenga questa transizione è espressa in termini del coefficiente di Einstein B_{ba} : $B_{ba}\rho(\omega_{ba})$ ($[t^{-1}]$).

Per quanto riguarda l'emissione stimolata, ovvero il processo con cui un atomo in uno stato eccitato transisce ad un livello di minor energia ($b \rightarrow a$) dopo aver emesso un fotone sotto influenza di una radiazione esterna, la probabilità è calcolata in modo analogo con il coefficiente B_{ab} : $B_{ab}\rho(\omega_{ba})$ ($[t^{-1}]$).

Di maggior interesse è invece il caso dell'emissione spontanea, ovvero la transizione spontanea da uno stato eccitato ad uno di energia inferiore tramite l'emissione di un fotone. In questo caso il solo coefficiente di Einstein A_{ab} ($[t^{-1}]$) descrive la probabilità di transizione. Il suo inverso caratterizza invece il tempo di vita medio dell'atomo nello stato eccitato considerato:

$$\bar{t} = \frac{1}{A_{ab}} \quad (1.19)$$

Come ipotesi di lavoro è presente il fatto che il sistema si trovi in equilibrio con la radiazione, in queste condizioni la popolazione dei livelli energetici segue la distribuzione di Boltzmann:

$$\frac{N_a}{N_b} = \frac{g_a}{g_b} e^{-\frac{E_a - E_b}{k_B T}} \quad (1.20)$$

Trovo dunque una relazione importante che lega il coefficiente per l'emissione spontanea e stimolata:

$$A_{ab} = \frac{\hbar \omega_{ba}^3}{\pi^2 c^3} B_{ab} \quad (1.21)$$

Per una descrizione più approfondita è consigliato consultare le dispense del corso di Processi di Radiazione e MHD [4] e del corso di Struttura della Materia [13].

1.5.1 Riga 21 cm

Come abbiamo visto nella Sezione 1.2, le transizioni che non rispettano la regola di Laporte sulla parità possono, con minor probabilità, avvenire ugualmente. Di particolare interesse è la transizione di dipolo magnetico che genera la celebre riga 21 cm. Avendo introdotto la struttura fine, lo stato fondamentale dell'idrogeno è descritto dai seguenti numeri quantici: $n = 1$, $l = 0$, $m = 0$, $m_s = 1/2$, $j = 1/2$ ($1s_{1/2}$). Studiandone la struttura iperfine, lo stesso livello si separa in due livelli che differiscono per il numero quantico F che può valere 0 (nuovo stato fondamentale) o $+1$, l'ultimo dei quali risulta essere degenere. Per le regole di selezione riportate nella Sezione 1.4, la transizione tra questi due livelli è permessa, in quanto $\Delta F = 1$.

La differenza energetica tra i due livelli è minima, essa vale:

$$\nu = 1420 \text{ MHz} \longleftrightarrow \lambda = 21 \text{ cm} \quad (1.22)$$

Perciò l'emissione si trova nella regione del radio. La rilevazione è dunque semplice in quanto la polvere interstellare è trasparente in quella regione.

Il coefficiente di Einstein che descrive questa transizione è $A_{10} = 2.9 \cdot 10^{-15} \text{ s}^{-1}$, il quale corrisponde a un tempo di vita medio nello stato eccitato pari a $\bar{t} \sim 3.45 \cdot 10^{14} \text{ s}$, ovvero 10^7 anni, dunque risulta essere una transizione altamente proibita. Di seguito è riportato il diagramma della struttura del livello fondamentale dell'idrogeno, con evidenziata la transizione proibita appena descritta:

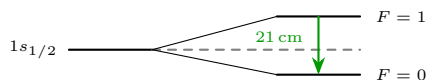


Figura 1.2: Struttura iperfine del livello fondamentale $1s_{1/2}$: la riga tratteggiata rappresenta il livello imperturbato, che si separa nei due sottolivelli $F = 1$ e $F = 0$. La transizione tra essi dà origine alla riga a 21 cm.

L'importanza in ambito astrofisico di questa riga verrà discussa in seguito nella Sezione 3.

2 Righe spettrali

Nel 1814 Fraunhofer catalogò più di 400 righe di assorbimento nello spettro solare, che ancora ad oggi prendono il suo nome, determinandone anche la lunghezza d'onda corrispondente. Nel 1885 Balmer scoprì sperimentalmente la formula per riprodurre le righe

spettrali dell'atomo di idrogeno. Ad oggi la formula è nota come formula di Rydberg (1.2). In generale essa descrive il numero d'onda della radiazione emessa o assorbita che ha permesso la transizione da un livello caratterizzato da n_1 ad uno denotato da n_2 . In seguito il chimico Bunsen e il fisico Kirchhoff fondarono la spettroscopia, affermando che ogni elemento produce specifiche righe spettrali. Inoltre Kirchhoff formulò tre leggi empiriche, che portano il suo nome, riguardanti l'origine degli spettri:

1. un corpo denso e caldo produce uno spettro continuo
2. un gas rarefatto e caldo produce uno spettro a righe di emissione
3. un gas freddo posto tra una sorgente di spettro continuo e l'osservatore produce uno spettro a righe di assorbimento

Considero il regime in assorbimento, per cui $n_1 < n_2$, e l'atomo di idrogeno. Si possono definire delle serie, ovvero un insieme di righe spettrali, identificate dal valore del numero quantico principale del livello iniziale n_1 . In particolare le tre serie di maggiore importanza sono:

n_1	Nome	Simbolo	Regione dello spettro
1	Lyman	Ly	Ultravioletto
2	Balmer	H	Visibile
3	Paschen	Pa	Infrarosso

Tabella 2.1: Le serie dell'idrogeno di maggior interesse.

Considerando ad esempio la serie di Balmer e definendo $\Delta n = n_2 - n_1$, posso differenziare le diverse righe in base alla differenza tra i due numeri quantici a partire da $\Delta n = 1$ chiamata $H\alpha$, $\Delta n = 2$ chiamata $H\beta$, ecc.

Queste serie si possono osservare nello spettro delle stelle, di particolare interesse sarà lo spettro del Sole, discusso in seguito.

Per poter studiare lo spettro continuo e in assorbimento di una stella è necessario spiegare come la radiazione attraversa l'atmosfera. Considero dunque un raggio di luce che si propaga al suo interno, nonostante sia un'approssimazione grossolana in quanto il libero cammino medio del fotone nell'ambiente considerato è corto. Considero in particolare l'assorbimento, in particolare l'assorbimento bound-bound, ovvero il caso in cui un elettrone con energia E_1 transisce ad un livello caratterizzato da $E_2 > E_1$ a causa dell'assorbimento di un fotone di lunghezza d'onda λ tale che $hc/\lambda = E_2 - E_1$. Si tratta dunque di un processo selettivo in frequenza, perciò il coefficiente che descrive l'opacità k_λ dipenderà dalla lunghezza d'onda considerata. Il coefficiente di opacità k_λ introdotto in questa sezione è legato, a livello microscopico, alla probabilità di assorbimento di un singolo atomo descritta dal coefficiente di Einstein B_{ba} (Sezione 1):

sommando il contributo di tutti gli atomi assorbenti lungo il cammino della radiazione si ottiene infatti la relazione $k_\lambda \propto n B_{ba}$, dove n è la densità numerica di atomi nello stato assorbente.

Definisco ora delle quantità utili per poter continuare la trattazione:

- I_λ : intensità specifica della radiazione
- ρ : densità del gas nell'atmosfera
- ds : elemento infinitesimo di cammino percorso dalla radiazione
- j_λ : emissività specifica
- $S_\lambda = j_\lambda/k_\lambda$: funzione sorgente

Scrivo quindi l'equazione del trasporto radiativo nell'atmosfera:

$$-\frac{1}{k_\lambda \rho} \frac{dI_\lambda}{ds} = I_\lambda - S_\lambda \quad (2.1)$$

Definisco la profondità ottica come $d\tau_\lambda = -k_\lambda \rho ds$. La soluzione all'equazione (2.1) si può dunque scrivere come:

$$I_\lambda = I_\lambda(0)e^{-\tau_\lambda} \quad (2.2)$$

È di particolare interesse lo strato atmosferico caratterizzato da profondità ottica $\tau_\lambda = 2/3$, in cui la temperatura presente si chiama temperatura effettiva T_e . Questo strato è chiamato fotosfera ed è la regione in cui si forma lo spettro continuo di corpo nero caratteristico della stella. Gli atomi più esterni a questo strato assorbono la radiazione qui formata, creando le righe spettrali di assorbimento osservate.

Per poter studiare gli spettri stellari è importante anche definire degli strumenti che permettano di conoscere la popolazione dei livelli energetici al variare della temperatura, ovvero l'equazione di Boltzmann e l'equazione di Saha.

Definisco il peso statistico del livello energetico caratterizzato da n_i come il numero di livelli energetici degeneri presenti $g_i = 2n_i^2$ e l'energia di eccitazione χ_i . Posso definire quindi ora la funzione di partizione:

$$U_j(T) = \sum_i g_i e^{-\frac{\chi_i}{k_B T}} \quad (2.3)$$

che descrive la distribuzione di atomi (o ioni) nello stato di ionizzazione j tra i diversi livelli energetici accessibili alla temperatura T . Posso quindi scrivere la prima equazione utile, ovvero l'equazione di Boltzmann:

$$\frac{N_{ij}}{N_j} = \frac{g_i}{U_j(T)} e^{-\frac{\chi_i}{k_B T}} \quad (2.4)$$

Essa permette di determinare il numero di atomi nell' i -esimo stato eccitato N_{ij} rispetto al numero totale di atomi nel j -esimo livello di ionizzazione N_j . La seconda equazione, invece, permette di determinare quanti atomi di una certa specie sono in un dato livello di ionizzazione. Chiamando la pressione elettronica presente nell'atmosfera P_e , posso scrivere l'equazione di Saha in forma logaritmica (in base 10), introducendo il potenziale di ionizzazione χ :

$$\log \frac{N_{j+1}}{N_j} = -0.176 - \log P_e + \log \frac{U_{j+1}(T)}{U_j(T)} + 2.5 \log T - \frac{5040}{T} \chi \quad (2.5)$$

Un'applicazione diretta delle due equazioni, che sarà utile in seguito, si può trovare nello studio della serie di Balmer nello spettro solare. Vogliamo infatti studiare la popolazione del livello $n = 2$ al variare della temperatura, perciò ci serviamo dell'equazione di Boltzmann per stimare $N_2/(N_1 + N_2)$. Omettendo i calcoli, si trova che cresce lentamente all'aumentare della temperatura, fino a trovare un regime di popolamento significativo ad una temperatura $T \sim 85\,000$ K. Si osserva però un picco di intensità di queste righe nelle stelle di tipo A0, ovvero stelle la cui emissione è descritta dal profilo di emissione di un corpo nero a $T = 9500$ K. Questo accade poiché, utilizzando anche l'equazione di Saha, si trova che a temperature dell'ordine 10^4 K l'idrogeno è ionizzato, perciò il livello $n = 2$ non sarà popolato come previsto da Boltzmann. Applicando questo risultato al caso specifico del Sole, la cui fotosfera ha temperatura effettiva $T_e = 5770$ K, ci troviamo in una regione ben al di sotto del picco a 9500 K. A questa temperatura la ionizzazione dell'idrogeno prevista dall'equazione di Saha è trascurabile, per cui la quasi totalità dell'idrogeno fotosferico si trova in forma neutra; tuttavia, per l'equazione di Boltzmann, la popolazione del livello $n = 2$ risulta ancora estremamente ridotta, essendo T_e molto minore della temperatura $T \sim 85\,000$ K necessaria per un popolamento significativo. Ne consegue che le righe di Balmer nello spettro solare, per quanto osservabili e ben note fin dal catalogo di Fraunhofer, sono relativamente deboli se confrontate con quelle di una stella di tipo A0: il fattore limitante nel caso del Sole non è la ionizzazione, come accade invece per stelle molto più calde, bensì lo scarso popolamento del livello $n = 2$ stesso.

Questo risultato mostra come la stessa coppia di equazioni permetta di interpretare in modo coerente sia il picco di intensità osservato nelle stelle A0 sia l'intensità relativamente contenuta delle medesime righe nello spettro solare, rafforzando il ruolo di Boltzmann e Saha come strumenti diagnostici universali per lo studio delle atmosfere stellari.

2.1 Atmosfera solare

L'atmosfera solare si può suddividere in tre zone. La prima è la fotosfera, ovvero lo strato più basso, le cui caratteristiche di interesse saranno discusse in seguito. Dopodiché c'è la cromosfera e infine la corona solare, lo strato più esterno formato da gas rarefatto.

La fotosfera è la regione dove sono originati i fotoni ottici osservati. Ha una temperatura effettiva $T_e = 5770\text{ K}$ e produce uno spettro continuo simile a quello di corpo nero a cui si sovrappongono le righe di assorbimento. In particolare possiamo affermare che il Sole irradia come corpo nero nella regione dello spettro elettromagnetico compresa tra il visibile e l'infrarosso. Lo spettro in emissione stesso è caratterizzato dalla presenza di una sorgente di opacità continua su un intervallo di lunghezze d'onda. Questa sorgente non è altro che lo ione H^- :



Si tratta dunque di un atomo di idrogeno con un elettrone in più debolmente legato, in quanto la presenza del normale elettrone schermo parzialmente l'attrazione del protone. A causa di ciò, l'energia di ionizzazione risulta essere molto minore rispetto a quella del normale atomo di idrogeno, infatti è $E_{H^-} = 0.75\text{ eV}$. Se un fotone γ ha energia maggiore di E_{H^-} , avviene il cosiddetto fotodistacco:



Questo processo è interessante in quanto il fotone non deve avere una precisa energia, poiché l'energia in eccesso viene ceduta all'elettrone sotto forma di energia cinetica, perciò vengono assorbiti fotoni di intervalli continui di lunghezze d'onda. In particolare possiamo calcolare le regioni dello spettro più toccate dal processo:

$$E_\gamma = \frac{hc}{\lambda_\gamma} = 0.75\text{ eV} \implies \lambda_\gamma \sim 16\,500\text{ \AA} \quad (2.8)$$

Perciò ogni fotone con $\lambda > \lambda_\gamma$ ha energia sufficiente per slegare l'elettrone, rendendo il processo più significativo nell'infrarosso.

Una nota importante è che solamente 1 su 10^7 atomi di idrogeno formano uno ione H^- , perciò pochi. L'idrogeno neutro nella fotosfera però non contribuisce all'opacità, rendendo lo ione H^- l'unica sorgente di opacità.

Per quanto riguarda la cromosfera, invece, essa è composta da gas molto più rarefatto. Per la seconda legge di Kirchhoff, introdotta nella precedente sezione, un gas caldo a bassa densità produce righe in emissione, ed è proprio quello che accade. Purtroppo però la fotosfera è talmente luminosa che osservare la cromosfera risulta impossibile, se non durante le eclissi totali di Sole in cui il disco fotosferico viene coperto dalla

Luna. È possibile quindi osservare la cromosfera, e in particolare si osserva il cosiddetto flash spectrum, ovvero uno spettro caratterizzato da molte righe in emissione. La riga particolarmente evidente è la riga rossastra facente parte della serie di Balmer $H\alpha$. Essa corrisponde alla transizione $n = 3 \rightarrow n = 2$ e ha lunghezza d'onda associata $\lambda_{H\alpha} = 6563 \text{ \AA}$. Utilizzando quindi filtri centrati di questa lunghezza d'onda è possibile studiare la struttura della cromosfera, in quanto la si isola dalle componenti più luminose provenienti dalla fotosfera.

Boe et al. [1] hanno osservato il flash spectrum durante l'eclissi totale del 20 aprile 2023 in Australia. Gli autori dell'articolo affermano che durante l'eclissi totale la cromosfera superiore, ovvero la parte più esterna della cromosfera dove si originano le righe in emissione presenti nel flash spectrum, e le protuberanze, ovvero strutture di plasma estese dalla superficie del Sole fino all'atmosfera esterna seguendo le righe del campo magnetico solare, sono risultate visibili grazie all'oscuramento fotosferico. Lo spettro osservato era caratterizzato dalle righe della serie di Balmer, in particolare dell' $H\alpha$, descritta come una brillante riga rossa. Sono state osservate anche righe di altri elementi più pesanti, come $He I$ a 587.6 nm e $Fe XIV$ a 530.3 nm . Lo spettro osservato ha la particolarità di essere slitless, ovvero estratto facendo passare la luce non da una fenditura ma direttamente attraverso un reticolo di diffrazione per disperderla.

Di seguito una foto dello slitless flash spectrum:

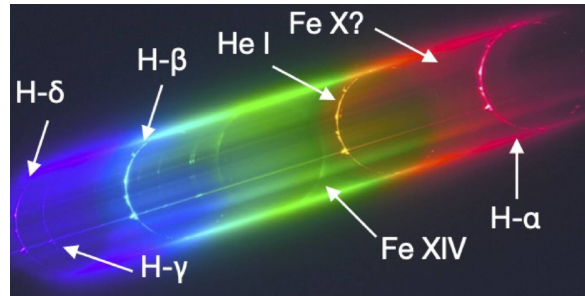


Figura 2.1: Slitless flash spectrum osservato durante l'eclissi totale del 20 aprile 2023 in Australia. Si osservano le principali righe in emissione di H , He e Fe . Adattata da Boe et al. (2026) [1]

3 Mezzo interstellare

Il mezzo interstellare (ISM) è costituito da materia, sotto forma di gas e polveri, distribuita nello spazio tra le stelle all'interno di una galassia. Esso è composto al 70% da idrogeno in varie forme: idrogeno neutro HI , idrogeno ionizzato HII e idrogeno molecolare H_2 .

Il tipo principale di idrogeno trovato nelle nubi interstellari è l'idrogeno neutro, che si trova nello stato fondamentale. Questo rende trascurabile la popolazione dei livelli eccitati e dunque impossibile la nascita di righe di emissione ottiche o della serie di

Lyman. Inoltre risulta anche complicato osservare righe di assorbimento, nonostante sia stato possibile rilevarle con l'Hubble Space Telescope sfruttando forti sorgenti ultraviolette. Wood et al. [14] hanno osservato lo spettro UV di una stella usata come sorgente di fondo (36 Oph A), misurando l'assorbimento causato dal gas $H\ I$ presente lungo la linea di vista, servendosi dello strumento Space Telescope Imaging Spectrograph (STIS) presente a bordo del telescopio. Hanno osservato l'assorbimento interstellare della radiazione $Ly\alpha$ ($\lambda_{Ly\alpha} = 1216\text{ \AA}$) della stella di fondo, non rilevabile da Terra a causa dell'atmosfera.

Per rilevare l'idrogeno neutro si utilizza solitamente la riga a 21 cm, la cui formazione è stata discussa nella Sezione 1.5.1. Nonostante sia una transizione estremamente improbabile per via radiativa spontanea, nelle regioni di $H\ I$ freddo il livello superiore $F = 1$ viene ripopolato in modo efficiente tramite urti tra atomi di idrogeno neutro (o con idrogeno molecolare), un processo detto eccitazione collisionale. È questo meccanismo, e non il pompaggio radiativo dal debole campo di radiazione di fondo a 1420 MHz, a rendere osservabile la riga a 21 cm nonostante il lunghissimo tempo di vita medio dello stato eccitato calcolato in Sezione 1.5.1. Grazie a questa riga è quindi possibile mappare l'idrogeno neutro e trovarne la densità, misurandone anche la velocità radiale sfruttando l'effetto Doppler.

3.1 Via Lattea

Nella nostra Galassia sono presenti gas e polveri con diverse masse, temperature e densità. In particolare il gas è composto al 90% da idrogeno, 9% da elio e il restante 1% da metalli. La componente più fredda è fatta di atomi e molecole, mentre la componente calda da ioni ed elettroni. La densità numerica è circa $n \sim 1\text{ cm}^{-3}$.

Utilizzando la riga 21 cm è stato possibile mappare la distribuzione del gas $H\ I$.

In particolare Lockman et al. [10] affermano che grazie a questa riga è stato possibile ricostruire gran parte della struttura galattica, compresi il disco, la struttura a spirale, lo spessore del disco e le regioni esterne. È stato osservato che l' $H\ I$ è distribuito prevalentemente in un sottile strato vicino al piano galattico (FWHM di circa 220 pc), e che tale spessore aumenta progressivamente procedendo verso l'esterno. Inoltre, dato che il gas in esame è principalmente in rotazione circolare attorno al centro galattico (le componenti non circolari della velocità corrispondono a meno del 5% della velocità di rotazione), è stato possibile ricavare la velocità radiale dalla riga 21 cm, collegandola così alla rotazione della Galassia. È interessante anche studiare il comportamento dell'idrogeno neutro a grandi distanze dal centro galattico, poiché permette di indagare le regioni esterne della Galassia. Oltre all'aumento di spessore, il gas presenta una deformazione rispetto al piano galattico, chiamata *warp*. Lo studio della cinematica e della distribuzione di questo gas in queste regioni è importante in quanto costituisce

un tracciante della materia oscura, discusso nella prossima sezione.

3.2 Curva di rotazione

La curva di rotazione, che riguarda principalmente le galassie a disco, è una caratteristica del potenziale a simmetria sferica o cilindrica, perciò è una proprietà del potenziale gravitazionale stesso. Di interesse in questa sezione è la regione esterna della Via Lattea, sede di un alone di materia oscura descritto da un potenziale assunto a simmetria sferica.

La curva di rotazione delle stelle che non si trovano nelle regioni centrali è una curva di rotazione piatta. Questo significa che le stelle ruotano con velocità costante, perciò il disco si dice trovarsi in rotazione differenziale. Poiché si estende molto oltre il disco stellare visibile, è più interessante studiare la curva di rotazione del gas $H\text{ I}$, la quale è spiegabile solamente con l'introduzione della materia oscura. In generale, per un potenziale a simmetria sferica come in questo caso, la velocità di rotazione si può scrivere come:

$$v_c(r) = \sqrt{r \frac{\partial \phi}{\partial r}} \quad (3.1)$$

dove ϕ è il potenziale mentre r è la coordinata radiale. Definisco la massa compresa tra il centro galattico e r come $M(r)$. Il potenziale si può espandere in multipoli, nonostante, per il gas considerato, domini il termine di monopolo a causa della grande distanza dal centro, perciò:

$$\frac{\partial \phi}{\partial r} = \frac{GM(r)}{r^2} \quad (3.2)$$

Perciò la curva che mi aspetto è kepleriana, anche se ne osservo una piatta. È quindi necessario introdurre una densità di materia oscura, considerando una costante positiva A :

$$\rho_{DM} = \frac{A}{r^2} \quad (3.3)$$

tale che, integrando la densità in gusci sferici, ottengo la massa:

$$M(r) = \int_0^r 4\pi x^2 \rho_{DM}(x) dx = 4\pi A r \quad (3.4)$$

Si ottiene $M(r) \propto r$. Utilizzando la scrittura della derivata del potenziale (3.2), essa ora risulta:

$$\frac{\partial \phi}{\partial r} \propto \frac{1}{r} \quad (3.5)$$

Perciò scrivo la velocità circolare come:

$$v_c(r) \propto \sqrt{r \frac{1}{r}} \quad (3.6)$$

ottenendo quindi una curva di rotazione piatta.

È interessante notare che $\rho_{DM} \propto r^{-2}$: questo profilo di densità è noto come *Singular Isothermal Sphere*, ovvero il modello più semplice che permette di riprodurre una curva di rotazione piatta coerente con l'ipotesi di simmetria sferica.

Questo risultato teorico trova conferma osservativa diretta nel lavoro di Iocco, Pato e Bertone [9], i quali hanno confrontato molte misure recenti della curva di rotazione della Via Lattea, ottenute da diversi traccianti cinematici (tra cui il gas $H\ I$ stesso, maser e stelle), con la curva attesa considerando esclusivamente la distribuzione di materia barionica nota (stelle e gas). Gli autori hanno osservato che la discrepanza tra le due curve non si limita alle regioni esterne della Galassia, come discusso finora, ma è presente anche entro il raggio solare ($r \sim 8\text{ kpc}$), fornendo così un'evidenza diretta della presenza di materia oscura anche nelle regioni più interne della Via Lattea. Un aspetto rilevante di questo studio è che la conclusione non dipende da alcuna assunzione sulla natura o sulla distribuzione spaziale della materia oscura, rendendo il risultato particolarmente solido dal punto di vista metodologico. Va sottolineato che, tra i traccianti utilizzati, il gas $H\ I$ osservato tramite la riga a 21 cm ricopre un ruolo di primo piano: essendo distribuito ben oltre il raggio ottico della Galassia, è l'unico tracciante in grado di vincolare la curva di rotazione proprio nelle regioni più esterne, dove la discrepanza con la materia barionica risulta più marcata. Un confronto qualitativo tra le due curve è mostrato schematicamente in Figura 3.1.

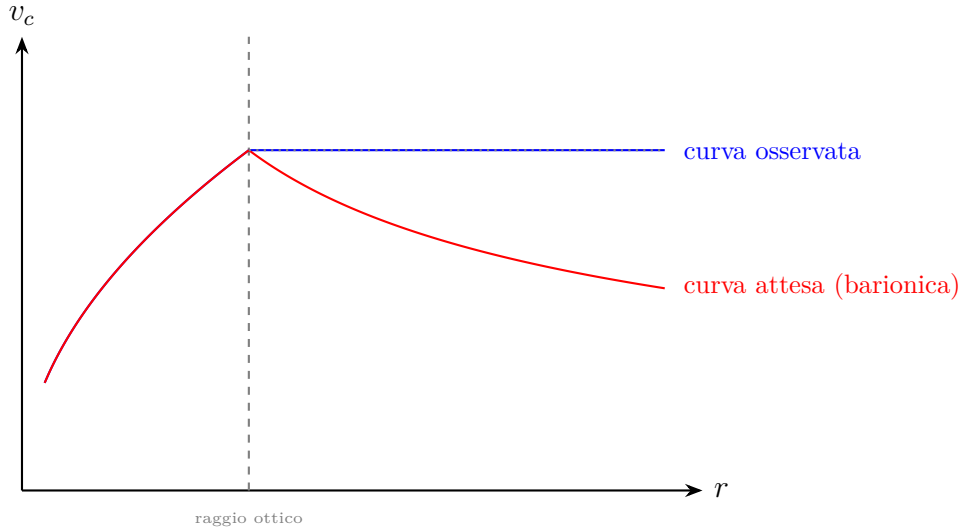


Figura 3.1: Confronto schematico tra la curva di rotazione osservata (in blu), approssimativamente piatta oltre il raggio ottico, e la curva kepleriana attesa (in rosso) considerando la sola distribuzione di materia barionica. La discrepanza tra le due curve nelle regioni esterne costituisce evidenza indiretta della presenza di un alone di materia oscura.

4 Conclusioni

In questa tesi si è mostrato come l'atomo di idrogeno, il più semplice e il più abbondante dell'Universo, costituisca uno strumento diagnostico fondamentale in astrofisica, capace di collegare fenomeni su scale fisiche estremamente diverse tra loro.

Nello studio delle atmosfere stellari, si è visto come le serie spettrali dell'idrogeno, e in particolare le righe di Balmer, costituiscano un potente strumento diagnostico: attraverso le equazioni di Boltzmann e Saha è stato possibile interpretare il picco di intensità di queste righe nelle stelle di tipo A0 e la loro relativa debolezza nello spettro solare, chiarendo il ruolo della temperatura fotosferica nel popolamento dei livelli energetici.

Inoltre, partendo dalla struttura quantistica dell'atomo, si è visto come l'interazione tra il momento magnetico nucleare e quello elettronico dia origine alla struttura iperfine e, in particolare, alla transizione a 21 cm: un fenomeno atomico che, per quanto estremamente improbabile su scala di singolo atomo, diventa osservabile su scala macroscopica grazie all'enorme quantità di idrogeno neutro presente nel mezzo interstellare. Questa stessa riga si è rivelata lo strumento osservativo fondamentale per mappare la distribuzione e la cinematica del gas $H\text{ I}$ nella Via Lattea, permettendo di ricostruirne la curva di rotazione. Il confronto tra la curva osservata e quella attesa dalla sola distribuzione di materia barionica ha infine fornito una delle evidenze più solide dell'esistenza della materia oscura, un problema ancora oggi al centro della ricerca in astrofisica e cosmologia.

Il percorso seguito mostra come lo stesso atomo descritto per la prima volta da Bohr nel 1913 rappresenti, più di un secolo dopo, uno strumento di indagine essenziale su scale spaziali che vanno dall'ambito atomico a quello galattico.

A Soluzione all'equazione di Schrödinger

Per trovare la descrizione quantistica dell'atomo di idrogeno nel caso non stazionario è necessario risolvere l'equazione di Schrödinger:

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \hat{H}\psi \quad (\text{A.1})$$

in cui l'hamiltoniana del sistema si scrive come in (1.3). Per risolverla, ovvero per trovare la scrittura per la funzione d'onda $\psi(r, t)$, si utilizza il metodo della separazione delle variabili, in cui si separa la componente spaziale da quella temporale. Mi limiterò a trattare il caso stazionario, risolvendo l'equazione di Schrödinger indipendente dal tempo, che non è altro che un'equazione agli autovalori dell'energia:

$$\hat{H}\psi(r) = E\psi(r) \quad (\text{A.2})$$

Nel caso in esame, dato che abbiamo un potenziale centrale, il problema si può scrivere in coordinate polari, caratteristiche della simmetria sferica. L'equazione da risolvere diventa dunque:

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{L^2}{2\mu r^2} - \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r} \right] \psi(r, \theta, \phi) = E\psi(r, \theta, \phi) \quad (\text{A.3})$$

in cui si è usato l'operatore momento angolare $\vec{L}$ scrivibile come:

$$L^2 = -\hbar^2 \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right] \quad (\text{A.4})$$

Anche per risolvere l'equazione (A.3) si utilizza il metodo della separazione delle variabili, scrivendo la funzione d'onda come il prodotto tra la parte angolare, descritta dalle armoniche sferiche $Y_l^m(\theta, \phi)$, e la parte radiale $R_{nl}(r)$:

$$\psi(r, \theta, \phi) = Y_l^m(\theta, \phi) R_{nl}(r) \quad (\text{A.5})$$

In particolare introduciamo i numeri quantici l e m come rappresentativi degli autovalori degli operatori ricavati dal momento angolare $\vec{L}$:

$$\begin{cases} L^2 Y_l^m(\theta, \phi) = \hbar^2 l(l+1) Y_l^m(\theta, \phi) \\ L_z Y_l^m(\theta, \phi) = \hbar m Y_l^m(\theta, \phi) \end{cases}$$

Per quanto riguarda la parte radiale, l'equazione, omessa, risulta descrivere il moto unidimensionale di una particella di massa μ che si muove sotto l'influenza di un potenziale coulombiano con l'aggiunta di un termine repulsivo dipendente da l . Per valori

di $l \neq 0$, questa barriera centrifuga tende a spostare l'elettrone lontano dal nucleo. Per una trattazione più esaustiva si rimanda a [7] e alle dispense del corso di Struttura della Materia [13].

B Interazione atomo-radiazione

L'interazione tra atomo e campo elettromagnetico viene trattata, come esplicitato nel testo, tramite approccio semi-classico. Nell'analisi considererò il fatto che la massa nucleare sia molto maggiore di quella dell'elettrone ($M_N \gg m_e$) e trascurerò l'interazione tra il nucleo ed il campo.

Ci mettiamo nella condizione del gauge di Coulomb, la particella di carica e nella regione con un campo definito dal potenziale vettore A è descritta dalla seguente hamiltoniana:

$$\hat{H}' = \hat{H}_0 - \frac{i\hbar e}{m_e} \vec{A} \cdot \vec{\nabla} + \frac{e^2}{2m_e} A^2 \quad (\text{B.1})$$

dove $\hat{H}_0$ è definita come in (1.3). Utilizzando l'approssimazione di campo debole, il termine quadratico in $\vec{A}$ verrà trascurato.

Dalla scrittura dell'hamiltoniana si nota come l'interazione può essere vista come una perturbazione dell'hamiltoniana iniziale $\hat{H}_0$, perciò è applicabile la teoria perturbativa dipendente dal tempo per trovare le correzioni ai livelli energetici. Una soluzione dell'equazione di Schrödinger (A.1), caratterizzata da $\hat{H}_0$, si può scrivere come prodotto di una fase dipendente dal tempo e un autostato stazionario dell'energia $|m\rangle$ (come introdotto nell'Appendice A):

$$\psi_m(t) = e^{-\frac{iE_m t}{\hbar}} |m\rangle \quad (\text{B.2})$$

Dunque scrivo un autostato generico $|\alpha, t\rangle$ dell'hamiltoniana perturbata $\hat{H}'$ come combinazione lineare, con coefficienti dipendenti dal tempo, di $\psi_m(t)$:

$$|\alpha, t\rangle = \sum_m c_m(t) e^{-\frac{iE_m t}{\hbar}} |m\rangle \quad (\text{B.3})$$

I coefficienti all'ordine perturbativo zero danno origine agli autostati dell'hamiltoniana imperturbata $\hat{H}_0$.

Imponendo che esse siano soluzioni dell'equazione di Schrödinger con hamiltoniana $\hat{H}'$ e troncando al primo ordine perturbativo, trovo il valore dei vari $c_m^{(1)}$. Fissato lo stato iniziale $|a\rangle$ e ponendo $|m\rangle = |b\rangle$ per isolare il contributo relativo ad un generico stato finale, ottengo un'espressione che motiva l'introduzione degli elementi di matrice (1.6):

$$c_b^{(1)}(t) = \frac{eA_0}{2m_e} \left[\frac{1 - e^{i(\omega_{ba} - \omega)t}}{i(\omega_{ba} - \omega)} M_{ba} + \frac{1 - e^{i(\omega_{ba} + \omega)t}}{i(\omega_{ba} + \omega)} \tilde{M}_{ba} \right] \quad (\text{B.4})$$

Il coefficiente che moltiplica M_{ba} descrive l'assorbimento, in quanto è presente un massimo per $E_b - E_a = \hbar\omega$ (perciò lo stato finale $|b\rangle$ ha energia maggiore dello stato iniziale $|a\rangle$). Analogamente il coefficiente che moltiplica l'altro elemento di matrice descrive l'emissione stimolata, avendo un massimo per $E_a - E_b = \hbar\omega$.

Per una trattazione completa si consiglia di consultare le dispense del corso di Struttura della Materia [13].

C Struttura fine e iperfine

La trattazione della struttura fine richiede l'introduzione del momento magnetico di dipolo $\vec{M}_L$ associato all'orbita dell'elettrone e legato al suo momento angolare $\vec{L}$:

$$\vec{M}_L = -\frac{g_L\mu_B}{\hbar}\vec{L} \quad (\text{C.1})$$

dove sono stati introdotti il fattore giromagnetico orbitale g_L e il magnetone di Bohr μ_B . In modo analogo si associa un momento magnetico anche allo spin:

$$\vec{M}_S = -\frac{g_S\mu_B}{\hbar}\vec{S} \quad (\text{C.2})$$

L'interazione spin-orbita è quindi determinata dall'accoppiamento di quest'ultimo termine e il campo magnetico percepito dall'elettrone $\vec{B} \propto \vec{L}$. Si può dunque esprimere l'hamiltoniana di perturbazione $\hat{H}_{so}$ come l'energia potenziale di interazione tra i due termini:

$$\hat{H}_{so} = \xi(r) \vec{S} \cdot \vec{L} \quad (\text{C.3})$$

con $\xi(r) \propto r^{-3}$.

Per poter diagonalizzare la perturbazione, introduco il momento angolare totale $\vec{J}$ (1.12), da cui ricavo:

$$J^2 = L^2 + S^2 + 2\vec{S} \cdot \vec{L} \implies \vec{S} \cdot \vec{L} = \frac{1}{2}(J^2 - L^2 - S^2) \quad (\text{C.4})$$

Perciò l'hamiltoniana diventa diagonale sugli autostati $|nlsm_j\rangle$ descritti dal nuovo set di numeri quantici.

Per quanto riguarda la struttura iperfine il procedimento è analogo, dunque introduco il dipolo magnetico nucleare associato a $\vec{I}$:

$$\vec{M}_N = \frac{g_N\mu_N}{\hbar}\vec{I} \quad (\text{C.5})$$

con il fattore di Landé g_N e il magnetone nucleare μ_N . A causa del fatto che $\mu_N \ll \mu_B$, le correzioni ai livelli energetici sono molto inferiori rispetto a quelle introdotte con la struttura fine.

L'hamiltoniana di perturbazione è composta da due termini: il primo che descrive l'interazione, analoga a quella vista in Appendice B, tra l'elettrone e il potenziale vettore $\vec{A}_N$ generato dal momento magnetico nucleare, e il secondo riguardante l'energia potenziale di interazione tra lo spin elettronico e il campo magnetico nucleare $\vec{B}_N = \vec{\nabla} \times \vec{A}_N$, analoga alla struttura fine:

$$\hat{H}_{hf} = \hat{H}_{hf}^{(1)} + \hat{H}_{hf}^{(2)} = -\frac{ie\hbar}{m_e} \vec{A}_N \cdot \vec{\nabla} + \frac{g_S \mu_B}{\hbar} \vec{S} \cdot \vec{B}_N \quad (\text{C.6})$$

Per diagonalizzare la perturbazione si introduce quindi il momento angolare totale F (1.15), ottenendo la seguente hamiltoniana:

$$H_{hf} = \frac{C}{2\hbar^2} (F^2 - I^2 - J^2) \quad (\text{C.7})$$

con:

$$C = \frac{\mu_0}{2\pi} g_S \mu_B g_N \mu_N \frac{Z^3}{j(j+1)(2l+1)a_0^3 n^3} \quad (\text{C.8})$$

D Costanti fisiche e unità di misura

In questa appendice sono riportate le principali costanti fisiche utilizzate nella tesi. I valori sono espressi nel Sistema Internazionale (SI) e, ove applicabile, nel sistema CGS. I valori delle costanti fisiche sono tratti dai valori raccomandati da CODATA 2022 [11].

D.1 Costanti fisiche fondamentali

Costante	Simbolo	SI	CGS
Velocità della luce nel vuoto	c	$2.998 \cdot 10^8 \text{ m s}^{-1}$	$2.998 \cdot 10^{10} \text{ cm s}^{-1}$
Costante di Planck ridotta	$\hbar$	$1.055 \cdot 10^{-34} \text{ J s}$	$1.055 \cdot 10^{-27} \text{ erg s}$
Carica elementare	e	$1.602 \cdot 10^{-19} \text{ C}$	$4.803 \cdot 10^{-10} \text{ statC}$
Costante di Boltzmann	k_B	$1.381 \cdot 10^{-23} \text{ J K}^{-1}$	$1.381 \cdot 10^{-16} \text{ erg K}^{-1}$
Costante gravitazionale	G	$6.674 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$	$6.674 \cdot 10^{-8} \text{ cm}^3 \text{ g}^{-1} \text{ s}^{-2}$
Costante di struttura fine	α	$7.297 \cdot 10^{-3}$	$7.297 \cdot 10^{-3}$
Permittività elettrica del vuoto	ϵ_0	$8.854 \cdot 10^{-12} \text{ F m}^{-1}$	—
Permeabilità magnetica del vuoto	μ_0	$1.2566 \cdot 10^{-6} \text{ N A}^{-2}$	1 (per definizione, sistema gaussiano)

Tabella D.1: Principali costanti fisiche fondamentali utilizzate nella tesi [11].

D.2 Costanti atomiche e quantistiche

Costante	Simbolo	SI	CGS
Massa dell'elettrone	m_e	$9.109 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$	$9.109 \cdot 10^{-28} \text{ g}$
Massa del protone	m_p	$1.673 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$	$1.673 \cdot 10^{-24} \text{ g}$
Raggio di Bohr	a_0	$5.292 \cdot 10^{-11} \text{ m}$	$5.292 \cdot 10^{-9} \text{ cm}$
Costante di Rydberg	R_∞	$1.097 \cdot 10^7 \text{ m}^{-1}$	$1.097 \cdot 10^5 \text{ cm}^{-1}$
Magnetone di Bohr	μ_B	$9.274 \cdot 10^{-24} \text{ J T}^{-1}$	$9.274 \cdot 10^{-21} \text{ erg G}^{-1}$
Magnetone nucleare	μ_N	$5.051 \cdot 10^{-27} \text{ J T}^{-1}$	$5.051 \cdot 10^{-24} \text{ erg G}^{-1}$
Fattore g orbitale	g_L	1	1
Fattore g dello spin elettronico	g_S	2.002	2.002
Fattore di Landé nucleare (protone)	g_N	5.586	5.586

Tabella D.2: Principali costanti atomiche e quantistiche utilizzate nella descrizione dell'atomo di idrogeno [11].

D.3 Unità astronomiche

Nella trattazione del mezzo interstellare e della Via Lattea (Sezione 3) sono utilizzate alcune unità di lunghezza tipiche dell'astronomia.

Unità	SI	CGS
Parsec	$3.086 \cdot 10^{16} \text{ m}$	$3.086 \cdot 10^{18} \text{ cm}$
Kiloparsec	$3.086 \cdot 10^{19} \text{ m}$	$3.086 \cdot 10^{21} \text{ cm}$
Angstrom	$1.000 \cdot 10^{-10} \text{ m}$	$1.000 \cdot 10^{-8} \text{ cm}$

Tabella D.3: Principali unità astronomiche utilizzate nella tesi [8].

D.4 Fattori di conversione

Sono riportati alcuni fattori di conversione utilizzati nella tesi per il passaggio tra differenti unità di misura.

Conversione	Valore
Elettronvolt	$1 \text{ eV} = 1.602 \cdot 10^{-19} \text{ J} = 1.602 \cdot 10^{-12} \text{ erg}$
Megahertz	$1 \text{ MHz} = 1.000 \cdot 10^6 \text{ Hz}$

Tabella D.4: Principali fattori di conversione utilizzati nella tesi [12].

Riferimenti bibliografici

- [1] Benjamin Boe et al. «The 2023 Australian Total Solar Eclipse: Line Emission of Fe XIV, Fe X, and Fe XI out to 6 Solar Radii». In: *The Astrophysical Journal* 997 (2026), p. 171. DOI: 10.3847/1538-4357/ae2658.
- [2] Bradley W. Carroll e Dale A. Ostlie. *An introduction to Modern Astrophysics*. Addison Wesley, 1996.
- [3] L. Ciotti. *Appunti del corso di Astrofisica Extragalattica*. Università di Bologna. 2026.
- [4] D. Dallacasa. *Slides del corso Processi di Radiazione e MHD*. Università di Bologna, materiale didattico disponibile sulla piattaforma Virtuale. 2025.
- [5] Deutsches Museum. *Fraunhofer Spectrum*. Deutsches Museum Archiv, BN 43952. Immagine disponibile tramite Wikimedia Commons, licenza CC BY-SA 4.0. 1814.
- [6] F. Ferraro. *Slides del corso Astrofisica Stellare*. Università di Bologna, materiale didattico disponibile sulla piattaforma Virtuale. 2025.
- [7] David J. Griffiths e Darrell F. Schroeter. *Introduction to Quantum Mechanics*. 3^a ed. Cambridge University Press, 2018.
- [8] International Astronomical Union. *IAU 2015 Resolution B2 on Recommended Zero Points for the Absolute and Apparent Bolometric Magnitude Scales*. XXIX General Assembly of the International Astronomical Union. 2015. URL: https://www.iau.org/static/resolutions/IAU2015_English.pdf.
- [9] Fabio Iocco, Miguel Pato e Gianfranco Bertone. «Evidence for dark matter in the inner Milky Way». In: *Nature Physics* 11.3 (2015), pp. 245–248. DOI: 10.1038/nphys3237. arXiv: 1502.03821.
- [10] Felix J. Lockman. «H I and Galactic Structure». In: *Seeing Through the Dust: The Detection of H I and the Exploration of the ISM in Galaxies*. A cura di A. R. Taylor, T. L. Landecker e A. G. Willis. Vol. 276. ASP Conference Series. 2002, pp. 107–122. eprint: astro-ph/0203210.
- [11] Peter J. Mohr et al. «CODATA Recommended Values of the Fundamental Physical Constants: 2022». In: *Reviews of Modern Physics* 97.2 (2025), p. 025002. DOI: 10.1103/RevModPhys.97.025002.
- [12] National Institute of Standards and Technology. *NIST Guide to the SI: Appendix B.8 – Factors for Units Listed Alphabetically*. NIST Special Publication 811. 2025. URL: <https://www.nist.gov/pml/special-publication-811/nist-guide-si-appendix-b-conversion-factors/nist-guide-si-appendix-b8>.
- [13] L. Pasquini. *Dispense del corso Struttura della Materia*. Università di Bologna, materiale didattico disponibile sulla piattaforma Virtuale. 2026.

- [14] Brian E. Wood, Jeffrey L. Linsky e Gary P. Zank. «Heliospheric, Astrospheric, and Interstellar Ly α Absorption toward 36 Ophiuchi». In: *The Astrophysical Journal* 537.1 (2000), p. 304. DOI: 10.1086/309026.