

Dipartimento di Fisica e Astronomia “Augusto Righi”  
Corso di Laurea in Fisica

## **Il problema della misura: decoerenza e modelli di collasso**

**Relatore:**  
**Prof. Francesco Ravanini**

**Presentata da:**  
**Ludovico Occhipinti**

Anno Accademico 2025/2026

# Indice

|                                                                             |           |
|-----------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>Introduzione</b>                                                         | <b>3</b>  |
| <b>1 Il problema della misura</b>                                           | <b>4</b>  |
| I postulati della meccanica quantistica                                     | 5         |
| Schema di misura di von Neumann                                             | 6         |
| <b>2 Sistemi quantistici aperti</b>                                         | <b>10</b> |
| 2.1 Descrizione statistica di sistemi quantistici                           | 10        |
| 2.1.1 Teorema spettrale                                                     | 11        |
| Esempi                                                                      | 11        |
| 2.1.2 Stati puri e miscele statistiche                                      | 13        |
| 2.1.3 Matrice densità                                                       | 13        |
| Proprietà                                                                   | 14        |
| Dinamica                                                                    | 15        |
| 2.1.4 Sistemi composti ed entanglement                                      | 16        |
| Decomposizione di Schmidt                                                   | 16        |
| Matrice densità ridotta                                                     | 17        |
| 2.1.5 Entropia di von Neumann                                               | 19        |
| 2.2 Misura a valori operatoriali positivi                                   | 20        |
| Teorema di Neumark                                                          | 21        |
| Esempio                                                                     | 23        |
| <b>3 Decoerenza</b>                                                         | <b>26</b> |
| 3.1 Dipendenza dell'interferenza dall'informazione trasferita nell'ambiente | 27        |
| 3.2 Monitoraggio dell'ambiente                                              | 30        |
| 3.3 Pointer states                                                          | 32        |
| Criterio di commutazione                                                    | 32        |
| Predictability-sieve                                                        | 32        |
| 3.4 Decoerenza collisionale                                                 | 34        |

|          |                                           |           |
|----------|-------------------------------------------|-----------|
| <b>4</b> | <b>Modelli di collasso dinamico e GRW</b> | <b>39</b> |
| 4.1      | Il modello GRW                            | 40        |
| 4.1.1    | Dinamica macroscopica                     | 40        |
|          | Problema delle traiettorie                | 40        |
|          | Equazione del moto                        | 41        |
|          | Confronto con la meccanica quantistica    | 43        |
| 4.1.2    | Dinamica microscopica                     | 43        |
| 4.1.3    | Meccanismo di amplificazione              | 44        |
| 4.1.4    | Scelta delle nuove costanti fondamentali  | 46        |
| 4.1.5    | Considerazioni                            | 47        |
|          | Riproduzione della regola di Born         | 47        |
|          | Non-conservazione dell'energia            | 48        |
|          | Coerenze nei gradi di libertà interni     | 48        |
|          | Ontologia                                 | 49        |
| 4.2      | Cenni su modelli successivi               | 49        |
|          | <b>Conclusioni</b>                        | <b>52</b> |

# Introduzione

La tesi discute il problema della misura in meccanica quantistica, mostra la rilevanza che l'interazione tra sistema e ambiente assume nell'affrontarlo e introduce una classe di soluzioni, i modelli di collasso della funzione d'onda, concentrandosi in particolare sul modello GRW.

Nel capitolo 1 si formula il problema a partire dai postulati della teoria, illustrando il ruolo dell'entanglement tra sistema e apparato di misura. Nel capitolo 2 si presenta il formalismo dei sistemi quantistici aperti, necessario per trattare gli argomenti dei capitoli seguenti: si spiega come descrivere sistemi quantistici attraverso la matrice densità, di cui si verificano le proprietà principali, e si introduce un framework alternativo per la descrizione del processo di misura. Nel capitolo 3 si illustra il processo di decoerenza, prima in termini generali, poi attraverso un modello specifico, e se ne discute il ruolo nell'ambito del problema della misura. Nel capitolo 4 si descrive l'idea fisica alla base dei modelli di collasso, e si approfondisce il modello GRW.

Nel seguito si assume che il lettore conosca le basi della meccanica quantistica e della teoria degli spazi di Hilbert.

# Capitolo 1

## Il problema della misura

La natura probabilistica della meccanica quantistica (MQ) ha sempre posto problemi interpretativi. I primi sforzi per determinarne certe caratteristiche fondamentali - completezza, realismo, località, natura statistica, etc. - hanno evidenziato la rilevanza del processo di misura nella comprensione di tali problemi, dando origine a un campo di studi a esso dedicato, che si compone di idee e approcci disparati, privi di un'organizzazione sistematica universalmente condivisa. Nei capitoli seguenti esploreremo il problema da un punto di vista puramente fisico, strettamente legato all'emergere della fisica classica da quella quantistica, con un formalismo analogo a quello impiegato negli usi pratici della teoria; tuttavia, riportiamo per completezza che il problema della misura viene affrontato anche con gli strumenti della logica proposizionale, indagando la coerenza logica dell'attribuzione di proprietà definite a sistemi quantistici interagenti con un apparato [1]. Dallo stesso approccio era emersa in precedenza la formalizzazione della *logica quantistica* con regole distinte da quella classica, ad opera di Birkhoff e von Neumann.

Un altro aspetto del problema che esula da una trattazione prettamente fisica, e che certamente non si presta a essere trattato con gli strumenti tipici del fisico teorico, ha natura semantica, e riguarda la definizione dei concetti sui quali la meccanica quantistica si fonda, tra cui strumenti e processi di misura.

Per comprendere la necessità (o meno, in effetti molti fisici tra cui lo stesso Dirac [2] si sono spesi sostenendo che fosse troppo presto per occuparsi di simili problemi "di prima classe", che sarebbero divenuti più chiari con il tempo... ma in effetti queste considerazioni avranno presto un secolo, e molti dei problemi "di seconda classe" indicati come più urgenti sono stati risolti dalla teoria dei campi) di approcci risolutivi così numerosi e diversi, occorre anzitutto chiarire cosa si intende quando si parla di *problema della misura*, e sebbene una formulazione precisa sia tutt'altro che banale, un buon punto di partenza sono senz'altro i postulati della meccanica quantistica, così come compaiono nei moderni libri di testo.

## I postulati della meccanica quantistica

### I – Postulato (Stati)

A un sistema fisico corrisponde uno spazio di Hilbert  $\mathcal{H}$ . Lo stato del sistema è descritto da un vettore normalizzato  $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$ .

### II – Postulato (Osservabili)

A un osservabile, cioè una grandezza fisica misurabile del sistema, corrisponde un operatore lineare autoaggiunto  $\hat{R}$  su  $\mathcal{H}$ .

### III – Postulato (Evoluzione unitaria)

Uno stato  $|\psi(t)\rangle$  evolve nel tempo secondo l'equazione di Schrödinger:

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi\rangle = \hat{H} |\psi\rangle, \quad (1.1)$$

dove l'operatore autoaggiunto  $\hat{H}$  è l'hamiltoniana del sistema.

### IV – Postulato (Misura)

Se sul sistema viene misurato un osservabile  $\hat{R}$ , lo stato viene proiettato su uno degli autovettori  $|r\rangle$  di  $\hat{R}$ . L'esito della misura è l'autovalore  $r$  corrispondente, e la probabilità (o densità di probabilità) di osservarlo è

$$\mathcal{P}(r) = \langle \psi | \hat{P}_r | \psi \rangle. \quad (1.2)$$

### V – Postulato (Sistemi composti)

Un sistema composto da due sottosistemi 1 e 2 con rispettivi spazi di Hilbert  $\mathcal{H}_1$  e  $\mathcal{H}_2$  ha per spazio di Hilbert il loro prodotto tensoriale (vd. [capitolo 2](#) per la definizione)

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2. \quad (1.3)$$

Il cuore concettuale del problema della misura risiede nel IV postulato, il quale introduce un nuovo tipo di evoluzione temporale che si sostituisce all'equazione di Schrödinger qualora abbia luogo un non meglio specificato processo di misura. Inutile dire che non si tratta di un problema sperimentale, non essendoci molti dubbi su cosa possa costituire un apparato di misura in un laboratorio, e cosa no; in questo senso, un primo tentativo di porre fine alla questione potrebbe consistere nel limitare la validità della MQ a oggetti microscopici, e chiamare processo di misura la loro interazione con oggetti macroscopici. Ma già a questo primo livello di analisi, due problemi emergono naturalmente: anzitutto, occorre trovare il

confine - sia esso in termini di massa, numero di particelle, etc. - tra mondo microscopico e macroscopico: come vedremo nel [capitolo 3](#), una soluzione a questo problema può essere trovata senza apportare modifiche alla teoria, oltre che per vie sperimentali; ma soprattutto, a meno di insignire gli oggetti macroscopici di uno status ontologico a sé stante, essi sono in ultima analisi costituiti da atomi e molecole, che dovrebbero ubbidire all'equazione di Schrödinger e dunque evolvere deterministicamente, in modo unitario e senza collassi. In effetti, la tensione tra la natura suppostamente fondamentale della meccanica quantistica e il suo appoggiarsi su oggetti classici non emerge soltanto in questo contesto, ma è evidente e fa storcere il naso anche nel processo di (prima) quantizzazione.

Queste prime considerazioni rendono conto di due desideri espressi da Bell [3] per il futuro della MQ: in primo luogo, l'abbandono del termine *misura* per descrivere un fenomeno che - qualsiasi sia la sua natura - certamente non si limita a operazioni di laboratorio effettuate da osservatori coscienti, ma ha luogo con frequenza molto maggiore in ogni angolo dell'universo; inoltre, e ben più ambiziosamente, la realizzazione di una formulazione della meccanica quantistica in termini puramente matematici, che non si affidi alla discrezione del fisico per stabilire quale di due evoluzioni tra loro incompatibili debba avere luogo a un dato istante.

Compreso il conflitto concettuale insito nei postulati, proviamo a scomporre il problema in parti più rigorosamente delineate. Notiamo anzitutto che le seguenti tre affermazioni sono incompatibili, cioè non possono essere tutte vere contemporaneamente:

- (A) Lo stato di un sistema quantistico introdotto dal I postulato è completo, ovvero descrive tutte le proprietà fisiche del sistema.
- (B) Lo stato di un sistema chiuso evolve unitariamente secondo l'equazione di Schrödinger.
- (C) La misura di un osservabile sul sistema ha sempre un unico esito definito.

### Schema di misura di von Neumann

Consideriamo infatti un setup sperimentale tipo Stern-Gerlach, in cui un dispositivo pronto a misurare lo spin lungo la direzione  $z$  interagisca con un elettrone in uno stato iniziale di spin definito verso l'alto. Seguendo lo schema introdotto per la prima volta da von Neumann [4], consideriamo lo stato quantistico totale del sistema elettrone più apparato<sup>1</sup>, che evolverà secondo:

$$|\uparrow\rangle|ready\ z\rangle \xrightarrow{U} |\uparrow\rangle|“UP”\rangle, \quad (1.4)$$

restituendo così un esito definito (l'apparato viene a trovarsi nello stato quantistico che rileva spin verso l'alto); ora, se misuriamo sullo stesso elettrone lo spin lungo le  $x$ , poiché

<sup>1</sup>Si noti il ruolo giocato dal [V postulato](#), anch'esso centrale nel problema della misura, nel ragionamento che segue.

ovviamente

$$|\uparrow\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\rightarrow\rangle + |\leftarrow\rangle)$$

in base a (B) avremo:

$$|\uparrow\rangle|ready\ x\rangle \xrightarrow{U} \frac{1}{\sqrt{2}}|\rightarrow\rangle|\text{“RIGHT”}\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|\leftarrow\rangle|\text{“LEFT”}\rangle, \quad (1.5)$$

cioè dopo una misura l'apparato si trova in uno stato di sovrapposizione, e se anche (A) è vera e tale stato contiene tutte le informazioni sull'apparato, questo non indica un esito definito e falsifica così (C). Lo stesso schema di misura può essere facilmente generalizzato a osservabili con un arbitrario numero di esiti possibili.

Considerare il problema della misura in questi termini è anche utile a organizzare le possibili soluzioni a seconda di quale delle tre affermazioni sacrifichino: teorie a variabili nascoste, e più implicitamente interpretazioni statistiche della MQ, rinunciano ad (A); modelli di collasso e modifiche non lineari all'equazione di Schrödinger rinunciano a (B); interpretazioni come *many-worlds* rinunciano a (C). Per una presentazione chiara e concisa di queste teorie, si veda [5].

Ad ogni modo, l'incompatibilità tra queste tre caratteristiche che la MQ sembrerebbe possedere contemporaneamente non esaurisce certo il problema della misura: teorie come quelle menzionate che provino a eliminare la contraddizione devono fare i conti con altri aspetti del problema [6]. Uno di questi riguarda la riproduzione, almeno entro una certa precisione, della regola di Born. In effetti, da un punto di vista puramente logico nulla impedisce di interpretare lo stato di sovrapposizione (1.5) dell'apparato come corrispondente a un esito definito; il vero problema di una simile proposta sta nella comprovata validità della regola di Born, per cui se anche si provassero a salvare le proposizioni (A), (B) e (C) con un'interpretazione *ad hoc* come questa, comunque gli esperimenti farebbero presto a smentirla, data la sua natura necessariamente deterministica. Per questo motivo, sembra ragionevole (e nel senso che segue, tautologico) affermare che qualsiasi teoria che sia disposta a rinunciare all'affermazione (C) non possa che entrare in contrasto con la regola di Born, dato che questa prevede per ogni misura un esito unico e definito. D'altra parte, che le misure abbiano esiti unici e definiti è di per sé un dato sperimentale.

Infine, un ulteriore aspetto da tenere in considerazione è l'effetto della misura sullo stato del sistema; anche questo, come la regola di Born, è un fatto consolidato sperimentalmente così come descritto dalla MQ: dopo una misura, il sistema collassa su un autostato dell'operatore corrispondente all'osservabile misurato, e misure successive danno sempre il medesimo esito. Dunque, una teoria che ambisca a derivare il processo di misura tramite qualche meccanismo, liberandosi dell'insoddisfacente natura primitiva che esso assume nella formulazione standard della MQ, deve anche riprodurre questa evidenza. In questo falliscono alcune teorie a variabili nascoste, dette *modali*, in cui lo stato del sistema non subisce mai

alcun collasso [6].

Tra le varie classi di soluzioni, soltanto i modelli di collasso e un sottoinsieme delle teorie a variabili nascoste (ulteriormente ridotto da risultati quali le disuguaglianze di Bell [7] e affini) soddisfano tutti i requisiti qui elencati.

# Bibliografia

- [1] P. Busch, P. J. Lahti, P. Mittelstaedt, *The Quantum Theory of Measurement*, Springer, 2nd ed. (1996)
- [2] P. A. M. Dirac, *The Evolution of the Physicist's Picture of Nature*, Scientific American (1963)
- [3] J. S. Bell, *Against Measurement*, Physics World (1990)
- [4] J. von Neumann, *Mathematical Foundations of Quantum Mechanics*, Princeton University Press (1955)
- [5] A. Bassi et al., *Models of Wave-function Collapse, Underlying Theories, and Experimental Tests*, Reviews of Modern Physics (2012)
- [6] T. Maudlin, *Three Measurement Problems*, Topoi (1995)
- [7] J. S. Bell, *On the Einstein Podolsky Rosen Paradox*, Physics (1964)

## Capitolo 2

# Sistemi quantistici aperti

Nello studio dei sistemi aperti si considera l'interazione con l'ambiente esterno. Un sistema quantistico reale è sempre da considerarsi aperto: in primo luogo, come in fisica classica, un certo grado di interazione con i dintorni è inevitabile; ma soprattutto, il processo di misura da un punto di vista fisico è proprio un'interazione con un apparato esterno, che può essere considerato come l'ambiente. In questo senso, solo un sistema aperto può rendere conto della natura fondamentalmente probabilistica della meccanica quantistica, perché ogni sistema chiuso evolverebbe deterministicamente seguendo l'equazione di Schrödinger. Pertanto, oltre ad avere numerose applicazioni pratiche, la teoria dei sistemi quantistici aperti è necessaria anche per affrontare il problema della misura.

In linea di principio si potrebbe comprendere nella definizione di sistema anche l'ambiente esterno, ma nella pratica il numero di variabili richiesto da questo approccio sarebbe proibitivo. Pertanto, lo studio dei sistemi aperti fa largo uso della teoria della probabilità per ridurre i gradi di libertà e descrivere agevolmente sistemi estremamente complessi.

### 2.1 Descrizione statistica di sistemi quantistici

I postulati della meccanica quantistica assicurano che lo stato di un sistema  $S$  è completamente specificato da un vettore  $|\psi\rangle$  in uno spazio di Hilbert  $\mathcal{H}$ . Tuttavia, quando lo stato del sistema non è noto, conviene piuttosto descriverlo tramite un operatore che tenga conto in modo conveniente delle probabilità quantistiche che entrano in gioco durante una misura, e di quelle classiche dovute alla nostra ignoranza sullo stato esatto del sistema. Tale operatore prende il nome di *matrice densità* o *operatore statistico*.

### 2.1.1 Teorema spettrale

Ricordiamo anzitutto il teorema spettrale, che garantisce l'esistenza e l'unicità per un operatore autoaggiunto  $\hat{R}$  su uno spazio di Hilbert  $\mathcal{H}$  della decomposizione spettrale:

$$\hat{R} = \int_{-\infty}^{\infty} r d\hat{E}_r \quad (2.1)$$

dove  $\{\hat{E}_r | r \in \mathbb{R}\}$  è la famiglia spettrale definita assiomaticamente da

1. Monotonia:  $\hat{E}_r \leq \hat{E}_s \quad \forall r < s$ , dove l'ordinamento parziale è definito da  $\hat{E}_r - \hat{E}_s \leq 0$  in senso operatoriale,
2. Continuità da destra:  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \hat{E}_{r+\epsilon} = \hat{E}_r$ ,
3. Condizioni al contorno:  $\lim_{r \rightarrow -\infty} \hat{E}_r = \hat{0} \quad \text{e} \quad \lim_{r \rightarrow +\infty} \hat{E}_r = \hat{1}$ .

Più intuitivamente,  $\hat{E}_r$  può essere visto come il proiettore sull'unione degli autospazi  $\mathbb{V}_s$  con autovalore  $s \leq r$ , sicché l'integrale (2.1) - anche senza perderci nei dettagli matematici della sua definizione<sup>1</sup> - esprime  $\hat{R}$  come somma di "proiettori infinitesimi" sugli autospazi  $\mathbb{V}_s$  con  $s \in [r, r + dr]$ , pesati dai rispettivi autovalori. Questa lettura si rispecchia nel fatto che il proiettore sugli autospazi corrispondenti a un generico borelliano  $B \subseteq \mathbb{R}$  si scrive

$$\hat{P}(B) = \int_B d\hat{E}_r.$$

Abbiamo comunque preferito una definizione più astratta della famiglia spettrale per metterne in luce la somiglianza con le proprietà di una distribuzione cumulativa, che per definizione deve essere monotona, continua da destra, annullarsi a  $-\infty$  e tendere a 1 a  $+\infty$ .

### Esempi

Per familiarizzare con la famiglia spettrale  $\hat{E}_r$ , vediamo alcuni esempi:

- se lo spettro di  $\hat{R}$  è discreto, possiamo denotare i suoi autostati con  $|r_n\rangle$  al variare di  $n$  in  $\mathbb{N}$  (tenendo conto di eventuali degenerazioni) e scrivere

$$\hat{E}_r = \sum_{s_n \leq r} |s_n\rangle \langle s_n| = \sum_n |s_n\rangle \langle s_n| \Theta(r - s_n),$$

- per l'operatore posizione - nello spazio delle coordinate dove la sua azione  $\hat{x}\psi(x) = x\psi(x)$  è semplicemente moltiplicativa - possiamo scrivere

$$\hat{E}_r \psi(x) = \Theta(r - x) \psi(x) = \begin{cases} \psi(x) & \text{se } x \leq r \\ 0 & \text{se } x > r \end{cases}$$

<sup>1</sup>Si tratta di un integrale di Riemann-Stieltjes [6].

- per l'impulso, sappiamo che gli autostati sono le onde piane, rispetto alle quali le coordinate di un vettore sono date dalla sua trasformata di Fourier, quindi sarà

$$\hat{E}_p \psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{p/\hbar} e^{ikx} \tilde{\psi}(k) dk \quad \text{con} \quad \tilde{\psi}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} \psi(x) dx.$$

La famiglia spettrale consente di esprimere il **IV postulato** associando all'esito di una misura di  $\hat{R}$  su uno stato  $|\psi\rangle$  una distribuzione cumulativa

$$F_R(r) = \langle \psi | \hat{E}_r | \psi \rangle, \quad (2.2)$$

che è ben definita come cumulativa proprio in virtù delle proprietà della famiglia spettrale. Dunque, rifacendoci ai nostri esempi, le distribuzioni di probabilità dell'esito della misura saranno:

- nel caso discreto, la cumulativa è a gradini, dunque

$$d\hat{E}_r = \sum_n |s_n\rangle \langle s_n| \delta(r - s_n) dr$$

e quindi ritroviamo la decomposizione di  $\hat{R}$  nella solita forma:

$$\hat{R} = \int_{-\infty}^{\infty} r \sum_n |s_n\rangle \langle s_n| \delta(r - s_n) dr = \sum_n |s_n\rangle \langle s_n| \int_{-\infty}^{\infty} r \delta(r - s_n) dr = \sum_n s_n |s_n\rangle \langle s_n|,$$

e la regola di Born:

$$\mathcal{P}(r) = \frac{d}{dr} F_R(r) = \sum_n |\langle s_n | \psi \rangle|^2 \delta(s_n - r),$$

- nel caso della posizione, poiché formalmente

$$\frac{d}{dr} \Theta(r - x) = \delta(r - x),$$

avremo la PDF:

$$\mathcal{P}(r) = \frac{d}{dr} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\psi}(x) \Theta(r - x) \psi(x) dx = |\psi(r)|^2,$$

- per l'impulso, abbiamo trovato la cumulativa

$$F_P(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\psi}(x) \int_{-\infty}^{p/\hbar} \tilde{\psi}(k) e^{ikx} dk,$$

quindi grazie al teorema fondamentale del calcolo integrale, ricordando che la trasformata di Fourier si annulla all'infinito:

$$\mathcal{P}(p) = \frac{d}{dp} F_P(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\psi}(x) \frac{1}{\hbar} \tilde{\psi}(p/\hbar) e^{\frac{i}{\hbar} px} dx = \frac{1}{\hbar} |\tilde{\psi}(p/\hbar)|^2.$$

### 2.1.2 Stati puri e miscele statistiche

Consideriamo il caso in cui non sia noto con esattezza lo stato del sistema  $S$ , ma si abbia invece un *ensemble*

$$\mathcal{E} = \left\{ (|\psi_\alpha\rangle, w_\alpha) \mid |\psi_\alpha\rangle \in \mathcal{H}; w_\alpha \in [0, 1] : \sum_\alpha w_\alpha = 1; \alpha = 1, 2, \dots, M \right\} \quad (2.3)$$

di  $M \in \mathbb{N}$  stati nei quali  $S$  può trovarsi con una certa probabilità  $w_\alpha$ . In questo caso, l'esito di una misura sarà descritto da:

$$F_R(r) = \sum_\alpha w_\alpha F_R^{(\alpha)}(r) = \sum_\alpha w_\alpha \langle \psi_\alpha | \hat{E}_r | \psi_\alpha \rangle. \quad (2.4)$$

Chiameremo *puro* lo stato del sistema se  $M = 1$ , o equivalentemente se  $\exists \bar{\alpha}$  tale che  $w_{\bar{\alpha}} = 1$  e quindi certamente  $S$  si trova in  $\psi_{\bar{\alpha}}$ ; altrimenti, diremo che il sistema si trova in una *miscela statistica*. Per quanto riguarda il problema della misura, è importante notare che una tipica situazione in cui il sistema è descritto da una miscela si verifica quando su uno stato iniziale noto viene effettuata una misura di cui non conosciamo l'esito; in tal caso, sapremo solo che lo stato sarà collassato su uno dei possibili autovettori, e i pesi dell'ensemble saranno determinati dalla regola di Born.

### 2.1.3 Matrice densità

A questo punto, possiamo introdurre l'operazione di *traccia*<sup>2</sup> di un operatore:

$$\text{Tr}\{\hat{O}\} = \sum_j \langle e_j | \hat{O} | e_j \rangle \quad \text{con } \{e_j\} \text{ base di } \mathcal{H}. \quad (2.5)$$

Si tratta evidentemente di un'operazione lineare, ed è facile verificarne l'indipendenza dalla base scelta per calcolarla:

$$\text{Tr}^{(e)}\{\hat{O}\} = \sum_j \langle e_j | \hat{O} | e_j \rangle = \sum_j \langle e_j | \hat{O} \left( \sum_k |f_k\rangle \langle f_k| \right) | e_j \rangle = \sum_k \langle f_k | \hat{O} | f_k \rangle = \text{Tr}^{(f)}\{\hat{O}\}. \quad (2.6)$$

Sempre dalla relazione di completezza segue la proprietà di ciclicità della traccia:

$$\text{Tr}\{\hat{O}\hat{P}\} = \sum_j \sum_k \langle e_j | \hat{O} | e_k \rangle \langle e_k | \hat{P} | e_j \rangle = \text{Tr}\{\hat{P}\hat{O}\}, \quad (2.7)$$

che in particolare implica che la traccia di un commutatore è sempre nulla.

Definiamo finalmente la matrice densità:

$$\rho \equiv \sum_\alpha w_\alpha |\psi_\alpha\rangle \langle \psi_\alpha|, \quad (2.8)$$

<sup>2</sup>Questa definizione presuppone che la dimensione di  $\mathcal{H}$  sia numerabile, comunque nel caso continuo ne useremo la versione integrale.

in modo da poter esprimere

$$F_R(r) = \text{Tr}\{\hat{E}_r \rho\}. \quad (2.9)$$

Infatti

$$\text{Tr}\{\hat{E}_r \rho\} = \sum_j \langle e_j | \hat{E}_r \rho | e_j \rangle = \sum_\alpha w_\alpha \sum_j \langle e_j | \hat{E}_r | \psi_\alpha \rangle \langle \psi_\alpha | e_j \rangle = \sum_\alpha w_\alpha \langle \psi_\alpha | \hat{E}_r | \psi_\alpha \rangle. \quad (2.10)$$

La probabilità/densità di probabilità di un esito si scrive quindi

$$\mathcal{P}(r) = \frac{d}{dr} F_R(r) = \text{Tr}\{|r\rangle\langle r| \rho\}, \quad (2.11)$$

mentre il valor medio è

$$\mathbb{E}(R) = \text{Tr}\{\hat{R} \rho\}, \quad (2.12)$$

infatti

$$\text{Tr}\{\hat{R} \rho\} = \sum_j \langle e_j | \hat{R} \sum_\alpha w_\alpha | \psi_\alpha \rangle \langle \psi_\alpha | e_j \rangle = \sum_\alpha w_\alpha \langle \psi_\alpha | \hat{R} | \psi_\alpha \rangle; \quad (2.13)$$

la varianza è quindi

$$\text{Var}(R) = \text{Tr}\{\hat{R}^2 \rho\} - \text{Tr}^2\{\hat{R} \rho\}. \quad (2.14)$$

Dunque, tramite l'operazione di traccia, la statistica di  $\mathcal{E}$  è completamente descritta da  $\rho$ .

## Proprietà

Studiamo le principali proprietà della matrice densità:

1. Limitatezza, usando la disuguaglianza triangolare e Cauchy-Schwarz:

$$\|\rho\psi\| = \left\| \sum_\alpha w_\alpha | \psi_\alpha \rangle \langle \psi_\alpha | \psi \rangle \right\| \leq \sum_\alpha w_\alpha | \langle \psi_\alpha | \psi \rangle | \| \psi_\alpha \| \leq \left( \sum_\alpha w_\alpha \| \psi_\alpha \|^2 \right) \|\psi\| = \|\psi\|,$$

quindi in particolare

$$\|\rho\| \leq 1.$$

2. Autoaggiunzione, dalla simmetria coniugata del prodotto scalare:

$$\langle \phi | \rho \psi \rangle = \sum_\alpha w_\alpha \langle \phi | \psi_\alpha \rangle \langle \psi_\alpha | \psi \rangle = \sum_\alpha \overline{w_\alpha} \overline{\langle \psi | \psi_\alpha \rangle} \overline{\langle \psi_\alpha | \phi \rangle} = \langle \rho \phi | \psi \rangle$$

3. Non-negatività:

$$\langle \psi | \rho | \psi \rangle = \sum_\alpha w_\alpha | \langle \psi_\alpha | \psi \rangle |^2 \geq 0$$

4. Normalizzazione, dalla condizione sulle probabilità dell'ensemble:

$$\text{Tr}\{\rho\} = \sum_j \langle e_j | \sum_\alpha w_\alpha | \psi_\alpha \rangle \langle \psi_\alpha | e_j \rangle = \sum_\alpha w_\alpha \| \psi_\alpha \|^2 = 1$$

5. Solo nel caso puro, idempotenza, essendo semplicemente un proiettore:

$$\rho^2 = |\psi\rangle\langle\psi|\psi\rangle\langle\psi| = \rho$$

6. Decomposizione: si può mostrare che la finitezza della traccia di  $\rho$  ne implica la compattezza [1]. È noto dal teorema di Riesz-Schauder [1] che un operatore compatto ha spettro discreto, con al più un punto di accumulazione in 0, dunque si può scrivere

$$\rho = \sum_j \lambda_j |\phi_j\rangle\langle\phi_j|$$

con  $\{|\phi_j\rangle\}$  autovettori di  $\rho$ . Inoltre i  $\lambda_j$  soddisfano

$$\sum_j \lambda_j = 1,$$

come è evidente dalla condizione sulla traccia calcolata con la base ottenuta completando i  $|\phi_j\rangle$ .

7.  $\text{Tr}\{\rho^2\} \leq 1$  e  $\text{Tr}\{\rho^2\} = 1 \iff$  stato puro, infatti:

$$\begin{aligned} \text{Tr}\{\rho^2\} &= \sum_j \langle\phi_j|\rho\rho|\phi_j\rangle = \sum_j \langle\phi_j|\left(\sum_k \lambda_k |\phi_k\rangle\langle\phi_k|\right)\left(\sum_i \lambda_i |\phi_i\rangle\langle\phi_i|\right)|\phi_j\rangle = \\ &= \sum_{j,k,i} \lambda_k \lambda_i \delta_{jk} \delta_{ki} \delta_{ij} = \sum_j \lambda_j^2 \leq 1. \end{aligned}$$

## Dinamica

Possiamo ricavare un'equazione per l'evoluzione della matrice densità: sappiamo che

$$|\psi_\alpha(t)\rangle = \mathcal{U}_t |\psi_\alpha(0)\rangle, \quad (2.15)$$

quindi

$$\rho(t) = \sum_\alpha w_\alpha |\psi_\alpha(t)\rangle\langle\psi_\alpha(t)| = \mathcal{U}_t \rho(0) \mathcal{U}_t^\dagger. \quad (2.16)$$

Poiché  $\mathcal{U}_t = e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H} t}$  (supponendo  $\frac{\partial}{\partial t} \hat{H} = \hat{0}$ ), derivando rispetto al tempo si trova

$$\frac{d}{dt} \rho(t) = -\frac{i}{\hbar} \hat{H} \mathcal{U}_t \rho(0) \mathcal{U}_t^\dagger + \frac{i}{\hbar} \mathcal{U}_t \rho(0) \hat{H} \mathcal{U}_t^\dagger; \quad (2.17)$$

ricordando che  $\mathcal{U}_t$  e  $\hat{H}$  commutano, otteniamo l'equazione di Liouville-von Neumann:

$$\frac{d\rho}{dt} = -\frac{i}{\hbar} [\hat{H}, \rho]. \quad (2.18)$$

Tuttavia, come anticipato nell'introduzione a questo capitolo, nella pratica dello studio dei sistemi aperti spesso non si conoscono i dettagli dell'evoluzione interna dell'ambiente, e si ricorre a equazioni approssimate per descrivere l'evoluzione non unitaria del sistema separatamente dall'ambiente. Queste equazioni sono dette *master equations*, ne ricaveremo una nell'ultima sezione del prossimo capitolo.

### 2.1.4 Sistemi composti ed entanglement

Anche il [V postulato](#) riveste un ruolo centrale nello studio dei sistemi quantistici aperti. Esso afferma che un sistema composto da due sottosistemi  $S^{(1)}$  e  $S^{(2)}$  ha come spazio di Hilbert lo spazio prodotto

$$\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2 = \left\{ \sum_{ij} c_{ij} |e_j^{(1)}\rangle \otimes |e_i^{(2)}\rangle \mid c_{ij} \in \mathbb{C}, |e_j^{(1)}\rangle \in \mathcal{H}_1, |e_i^{(2)}\rangle \in \mathcal{H}_2 \right\} = \overline{\text{span}}(|e_j^{(1)}\rangle \otimes |e_i^{(2)}\rangle), \quad (2.19)$$

dove  $\{|e_j^{(1)}\rangle\}$  e  $\{|e_i^{(2)}\rangle\}$  sono basi dei rispettivi spazi. Si verifica che lo spazio prodotto è uno spazio di Hilbert<sup>3</sup>, con prodotto interno definito da

$$(\langle e_j^{(1)} | \otimes \langle e_i^{(2)} |) (|e_k^{(1)}\rangle \otimes |e_m^{(2)}\rangle) = \delta_{jk} \delta_{im} \quad (2.20)$$

ed esteso per linearità. Essendo chiaramente  $\{|e_j^{(1)}\rangle \otimes |e_i^{(2)}\rangle\}$  una base, la dimensione è

$$\dim(\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2) = \dim(\mathcal{H}_1) \cdot \dim(\mathcal{H}_2). \quad (2.21)$$

Un generico operatore sullo spazio prodotto si scrive come serie

$$\hat{O} = \sum_j \hat{O}_j^{(1)} \otimes \hat{O}_j^{(2)}, \quad (2.22)$$

dove l'azione degli operatori *semplici* è definita da

$$(\hat{O}^{(1)} \otimes \hat{O}^{(2)}) |e_j^{(1)}\rangle \otimes |e_i^{(2)}\rangle = \hat{O}^{(1)} |e_j^{(1)}\rangle \otimes \hat{O}^{(2)} |e_i^{(2)}\rangle. \quad (2.23)$$

#### Decomposizione di Schmidt

Dimostriamo ora l'esistenza per un qualsiasi stato  $|\psi\rangle \in \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$  della *decomposizione di Schmidt*:

$$|\psi\rangle = \sum_j c_j |\chi_j^{(1)}\rangle \otimes |\chi_j^{(2)}\rangle, \quad (2.24)$$

con  $\{|\chi_j^{(1)}\rangle\}$  e  $\{|\chi_j^{(2)}\rangle\}$  basi (eventualmente con l'aggiunta di vettori nulli) dei rispettivi spazi di Hilbert, e  $c_j$  reali non negativi.

Anche se i due spazi hanno dimensione diversa, la matrice dei coefficienti  $c_{ij}$  di  $|\psi\rangle$  può essere resa quadrata aggiungendo eventualmente delle righe/colonne di zeri, e quindi decomposta tramite SVD per dare

$$C = UDV^\dagger \implies |\psi\rangle = \sum_{ijk} u_{ij} d_j v_{jk}^\dagger |e_i^{(1)}\rangle \otimes |e_k^{(2)}\rangle; \quad (2.25)$$

non resta che mostrare che i vettori

$$|\chi_j^{(1)}\rangle \equiv \sum_i u_{ij} |e_i^{(1)}\rangle \quad \text{e} \quad |\chi_j^{(2)}\rangle \equiv \sum_k v_{jk}^\dagger |e_k^{(2)}\rangle \quad (2.26)$$

<sup>3</sup>In particolare, la completezza è garantita dall'aver preso la chiusura dello span nella definizione (2.19).

formano una base<sup>4</sup> di  $\mathcal{H}_1$  e  $\mathcal{H}_2$  rispettivamente: l'ortonormalità segue dall'unitarietà delle matrici  $U$  e  $V$ , ad esempio

$$\langle \chi_j^{(1)} | \chi_k^{(1)} \rangle = \sum_{im} \langle e_i^{(1)} | u_{ij}^\dagger u_{mk} | e_m^{(1)} \rangle = \delta_{jk}; \quad (2.27)$$

la completezza si verifica ricordando che una trasformazione unitaria è per definizione suriettiva, dunque  $\forall |\psi^{(1)}\rangle \in \mathcal{H}_1 \exists |\omega^{(1)}\rangle \in \mathcal{H}_1, a_j \in \mathbb{C}$  tali che

$$|\psi^{(1)}\rangle = U|\omega^{(1)}\rangle = \sum_j a_j U|e_j^{(1)}\rangle = \sum_j a_j |\chi_j^{(1)}\rangle, \quad (2.28)$$

Abbiamo così dimostrato il risultato (2.24) nel caso finito dimensionale: i coefficienti di Schmidt  $c_j = d_j$  sono per costruzione reali e non negativi, essendo i valori singolari della matrice dei coefficienti. Una dimostrazione analoga funziona anche in spazi di Hilbert infinito-dimensionali separabili, in cui la matrice dei coefficienti diventa un operatore e i coefficienti di Schmidt i suoi valori singolari.

Definiamo *semplice* uno stato del sistema composto con un solo coefficiente di Schmidt non nullo:

$$|\psi\rangle = |\psi^{(1)}\rangle \otimes |\psi^{(2)}\rangle; \quad (2.29)$$

altrimenti, diremo che i due sistemi  $S^{(1)}$  e  $S^{(2)}$  sono correlati o *entangled*. Uno stato *massimamente entangled* è uno stato i cui coefficienti di Schmidt sono tutti uguali tra loro.

### Matrice densità ridotta

A questo punto, è opportuno porsi il problema della descrizione di uno dei sottosistemi isolatamente dal resto, per poter effettuare previsioni circa l'esito di misure effettuate soltanto su una porzione del sistema composto, ad esempio della forma

$$\hat{M} = \hat{M}^{(1)} \otimes \hat{\mathbb{I}}^{(2)}. \quad (2.30)$$

Introduciamo a questo scopo l'operazione di traccia parziale

$$\text{Tr}^{(2)}_{\{\cdot\}} : \mathcal{B}(\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2) \longrightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H}_1) \quad (2.31)$$

che manda operatori sullo spazio prodotto in operatori su uno degli spazi più piccoli. Essa è definita, tramite gli operatori di embedding

$$\hat{\mathbb{I}}^{(1)} \otimes |e_i^{(2)}\rangle \equiv |e_i^{(2)}\rangle : \mathcal{H}_1 \longrightarrow \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2 \quad (2.32)$$

<sup>4</sup>In realtà, se ad esempio  $\dim \mathcal{H}_1 < \dim \mathcal{H}_2$ , allora la somma in  $i$  ha termini tutti nulli per  $i > \dim \mathcal{H}_1$ , e poiché i  $|\chi_j^{(1)}\rangle$  sono di più della dimensione dello spazio in cui vivono, l'ortonormalità implica  $\forall j > \dim \mathcal{H}_1 : |\chi_j^{(1)}\rangle = \vec{0}$ . Quindi, nella decomposizione la sommatoria ha in realtà un numero di termini pari alla dimensione minima, perché i termini successivi sono tutti nulli.

e di proiezione

$$\hat{\mathbb{I}}^{(1)} \otimes \langle e_i^{(2)} | \equiv \langle e_i^{(2)} | : \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2 \longrightarrow \mathcal{H}_1 \quad (2.33)$$

da

$$\text{Tr}^{(2)}\{\hat{O}\} = \sum_i \left( \hat{\mathbb{I}}^{(1)} \otimes \langle e_i^{(2)} | \right) \hat{O} \left( \hat{\mathbb{I}}^{(1)} \otimes | e_i^{(2)} \rangle \right) \equiv \sum_i \langle e_i^{(2)} | \hat{O} | e_i^{(2)} \rangle. \quad (2.34)$$

Si noti che gli operatori di embedding e proiezione possono essere composti anche nell'ordine inverso, con un operatore  $\hat{O}^{(1)} \in \mathcal{H}_1$ :

$$\left( \hat{\mathbb{I}}^{(1)} \otimes | e_i^{(2)} \rangle \right) \hat{O}^{(1)} \left( \hat{\mathbb{I}}^{(1)} \otimes \langle e_i^{(2)} | \right) = \hat{O}^{(1)} \otimes | e_i^{(2)} \rangle \langle e_i^{(2)} |. \quad (2.35)$$

Equivalentemente [2], la traccia parziale può essere definita in modo assiomatico richiedendo

$$\forall \hat{O}, \hat{P} \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2), \alpha, \beta \in \mathbb{C}, \hat{O}^{(1)} \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1), \hat{O}^{(2)} \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_2) :$$

1. Linearità:  $\text{Tr}^{(2)}\{\alpha\hat{O} + \beta\hat{P}\} = \alpha\text{Tr}^{(2)}\{\hat{O}\} + \beta\text{Tr}^{(2)}\{\hat{P}\},$
2. Fattorizzazione su operatori semplici:  $\text{Tr}^{(2)}\{\hat{O}^{(1)} \otimes \hat{O}^{(2)}\} = \text{Tr}\{\hat{O}^{(2)}\}\hat{O}^{(1)}.$

Grazie alla traccia parziale, possiamo definire la *matrice densità ridotta* del sistema  $S^{(1)}$

$$\rho^{(1)} = \text{Tr}^{(2)}\{\rho\} \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1). \quad (2.36)$$

Nel caso in cui lo stato composto sia semplice:

$$|\psi\rangle = |\psi^{(1)}\rangle \otimes |\psi^{(2)}\rangle, \quad (2.37)$$

essa coincide con la descrizione nota del sistema:

$$\begin{aligned} \rho^{(1)} &= \sum_i \langle e_i^{(2)} | \left( |\psi^{(1)}\rangle |\psi^{(2)}\rangle \langle \psi^{(1)}| \langle \psi^{(2)}| \right) | e_i^{(2)} \rangle \\ &= \sum_i \langle \psi^{(2)} | e_i^{(2)} \rangle \langle e_i^{(2)} | \psi^{(2)} \rangle |\psi^{(1)}\rangle \langle \psi^{(1)}| = |\psi^{(1)}\rangle \langle \psi^{(1)}|; \end{aligned} \quad (2.38)$$

se invece lo stato è entangled, la matrice densità ridotta assume la forma di una miscela statistica, come si vede dalla decomposizione di  $\rho$  usando la base di Schmidt  $\{|\chi_j^{(2)}\rangle\}$  per calcolare la traccia parziale:

$$\rho^{(1)} = \text{Tr}^{(2)}\left\{ \sum_{jk} c_j |\chi_j^{(1)}\rangle |\chi_j^{(2)}\rangle \langle \chi_k^{(1)}| \langle \chi_k^{(2)}| c_k \right\} = \sum_j c_j^2 |\chi_j^{(1)}\rangle \langle \chi_j^{(1)}|, \quad (2.39)$$

dove i coefficienti  $c_j^2$  sommano correttamente a 1 per la normalizzazione di  $|\psi\rangle$ .

Un simile stato è detto *miscela impropria*, perché a differenza della miscela propria definita nella sezione precedente, descrive probabilità  $c_j^2$  introdotte dall'operazione di traccia parziale, cioè dall'aver volontariamente trascurato parte dell'informazione contenuta nello stato globale del sistema composto, che rimane puro. Dunque, solo in una miscela propria il sistema si trova *davvero* in uno degli stati  $\psi_\alpha$ , mentre nel caso improprio la miscela è solo una descrizione conveniente quando si voglia studiare un sottosistema isolatamente.

### 2.1.5 Entropia di von Neumann

Come in termodinamica, anche nella teoria dell'informazione quantistica l'entropia gioca un ruolo centrale. Nel capitolo seguente accenneremo a un'applicazione dell'entropia di von Neumann, definita da

$$S = -\text{Tr}\{\rho \log \rho\}, \quad (2.40)$$

dove s'intende

$$\log \rho = \log \left( \sum_j \lambda_j |\phi_j\rangle\langle\phi_j| \right) \equiv \sum_j \log \lambda_j |\phi_j\rangle\langle\phi_j|. \quad (2.41)$$

Questa grandezza misura l'incertezza su quale autostato il sistema occupi dopo una misura nella base  $\{|\phi_j\rangle\}$  che diagonalizza  $\rho$ , e coincide con l'entropia di Shannon per la distribuzione  $\{\lambda_j\}$  degli indici  $j$ :

$$S = - \sum_j \lambda_j \log \lambda_j, \quad (2.42)$$

scrittura in cui includiamo anche il caso  $0 \cdot \log 0 \equiv 0$ .

L'entropia di von Neumann soddisfa le seguenti proprietà:

1.  $S(\rho) \geq 0$  e  $S(\rho) = 0 \iff$  stato puro.
2.  $S(\rho) = S(U\rho U^\dagger) \forall U$  operatore unitario,
3.  $S(\sum_\alpha w_\alpha \rho_\alpha) \geq \sum_\alpha w_\alpha S(\rho_\alpha) \forall \{w_\alpha\}$  tali che  $\sum_\alpha w_\alpha = 1$ , cioè  $S$  è un funzionale concavo in  $\rho$ . L'uguaglianza vale solo se i  $\rho_\alpha$  con pesi non nulli sono tutti uguali tra loro. Dal punto di vista fisico, significa che l'incertezza sullo stato complessivo è maggiore o uguale di quella media sugli stati che compongono la miscela.
4. Per un sistema composto  $\rho \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2)$ , vale la subadditività:  $S(\rho) \leq S(\rho^{(1)}) + S(\rho^{(2)})$ . Cioè, prendere la traccia parziale fa perdere informazioni, aumentando l'entropia. L'uguaglianza vale solo per uno stato semplice  $\rho = \rho^{(1)} \otimes \rho^{(2)}$ .

## 2.2 Misura a valori operatoriali positivi

Alcuni testi di teoria dell'informazione quantistica [2] accorpano il II e il IV postulato in un unico enunciato, apparentemente più generale dei due che sostituisce:

### II/IV – Postulato (Osservabili e Misura)

A una misura quantistica corrisponde un insieme

$$\{\hat{M}_m \mid \sum_m \hat{M}_m^\dagger \hat{M}_m = \hat{\mathbb{I}}\} \quad (2.43)$$

di *operatori di misura* sullo spazio di Hilbert del sistema osservato, etichettati dal rispettivo esito  $m$ . Su uno stato  $|\psi\rangle$ , la probabilità di trovare  $m$  è

$$\mathcal{P}(m) = \langle \psi | \hat{M}_m^\dagger \hat{M}_m | \psi \rangle \quad (2.44)$$

e in seguito il sistema si trova in

$$\frac{\hat{M}_m |\psi\rangle}{\sqrt{\langle \psi | \hat{M}_m^\dagger \hat{M}_m | \psi \rangle}}. \quad (2.45)$$

Si noti che la condizione di normalizzazione (2.43) è equivalente a richiedere che le probabilità sommino a 1 su uno stato qualsiasi.

Per ricondurci da questa formulazione a quella nota, dovremmo richiedere in più che gli operatori  $\hat{M}_m$  siano autoaggiunti e idempotenti - cioè che siano dei proiettori ortogonali - sicché alla misura si possa associare equivalentemente l'operatore autoaggiunto

$$\hat{O} = \sum_m m \hat{P}_m \quad (2.46)$$

e la distribuzione

$$\mathcal{P}(m) = \langle \psi | \hat{P}_m^\dagger \hat{P}_m | \psi \rangle = \langle \psi | \hat{P}_m^2 | \psi \rangle = \langle \psi | \hat{P}_m | \psi \rangle. \quad (2.47)$$

Una simile misura si dice *proiettiva* o PVM (*projection-valued measure*).

Una PVM è dunque un caso particolare delle misure ammesse da questa nuova formulazione, dette POVM (*positive-operator-valued measure*)<sup>5</sup>. Infatti, gli operatori  $\hat{O}_m = \hat{M}_m^\dagger \hat{M}_m$  sono per costruzione positivi e autoaggiunti, ma non necessariamente ortogonali, e tramite la (2.44) descrivono la distribuzione dell'esito di una misura. Tuttavia, poiché  $\hat{O}_m$  è evidentemente

<sup>5</sup>Una POVM può essere intesa come una misura anche nel senso matematico del termine: lo spazio di misura in questione è costituito dall'insieme degli esiti  $\{m\}$  con una opportuna  $\sigma$ -algebra  $\mathcal{A}$ ; la misura è definita come mappa da  $\mathcal{A}$  allo spazio degli operatori positivi autoaggiunti, che sia - analogamente a una misura a valori reali -  $\sigma$ -additiva in senso operatoriale. D'altra parte, già nel [teorema spettrale](#) abbiamo incontrato la misura PVM  $d\hat{E}_r$ , definita in modo analogo ma con codominio ristretto ai proiettori.

invariante sotto trasformazioni unitarie

$$\hat{M}_m \longrightarrow \mathcal{U} \hat{M}_m, \quad (2.48)$$

la sua decomposizione in operatori di misura non è unica e contiene informazioni fisiche, in quanto determina tramite la (2.45) lo stato del sistema dopo la misura.

Anche in questo caso, il processo di misura può essere descritto tramite la matrice densità:

$$\mathcal{P}(m) = \text{Tr}\{\hat{M}_m \rho \hat{M}_m^\dagger\} = \text{Tr}\{\hat{O}_m \rho\}, \quad \rho \longrightarrow \frac{\hat{M}_m \rho \hat{M}_m^\dagger}{\text{Tr}\{\hat{O}_m \rho\}}. \quad (2.49)$$

In questo modo, oltre al processo *selettivo* (2.49), si può descrivere lo stato del sistema dopo un processo *non selettivo*, ovvero del quale non si conosce l'esito:

$$\rho \longrightarrow \sum_m \mathcal{P}(m) \frac{\hat{M}_m \rho \hat{M}_m^\dagger}{\text{Tr}\{\hat{O}_m \rho\}} = \sum_m \hat{M}_m \rho \hat{M}_m^\dagger. \quad (2.50)$$

### Teorema di Neumark

A questo punto, occorre affrontare il problema della liceità, nel contesto della meccanica quantistica, di una simile generalizzazione della nozione di misura. A tal proposito, il *teorema di Neumark* garantisce che per ogni POVM  $\{\hat{O}_m\}$  su uno spazio di Hilbert  $\mathcal{H}$ , esistono uno spazio di Hilbert  $\mathcal{H}_a$  con uno stato  $|a\rangle \in \mathcal{H}_a$  e un set di proiettori  $\{\hat{P}_m\}$  su  $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}_a$  tali che  $\forall m$

$$\hat{O}_m = \left( \hat{\mathbb{I}}_{\mathcal{H}} \otimes \langle a| \right) \hat{P}_m \left( \hat{\mathbb{I}}_{\mathcal{H}} \otimes |a\rangle \right). \quad (2.51)$$

Cioè, una misura POVM su un certo sistema si realizza come misura proiettiva su un sistema più grande, che comprende una componente aggiuntiva detta *ancilla*.

La dimostrazione di questo teorema è in generale piuttosto elaborata, ma nel caso finito-dimensionale risulta più semplice e comunque istruttiva [3]. Supponiamo dunque

$$\dim \mathcal{H} = n \in \mathbb{N} \quad \text{e} \quad \#\{m\} = M \in \mathbb{N}; \quad (2.52)$$

in questo caso, poiché ciascun  $\hat{O}_m$  è autoaggiunto e positivo, si potrà decomporre:

$$\hat{O}_m = \sum_{k=1}^{N_m} \lambda_k^{(m)} |\lambda_k^{(m)}\rangle \langle \lambda_k^{(m)}| \equiv \sum_{k=1}^{N_m} |u_k^{(m)}\rangle \langle u_k^{(m)}| \quad (2.53)$$

con  $\lambda_k^{(m)}$  positivi,  $N_m \leq n$  numero di autovalori non nulli, e  $|u_k^{(m)}\rangle \equiv \sqrt{\lambda_k^{(m)}} |\lambda_k^{(m)}\rangle$ . Inoltre si potrà considerare una base ortonormale  $\{|e_1\rangle, |e_2\rangle, \dots, |e_n\rangle\} = \{|e_j\rangle\}$  di  $\mathcal{H}$ .

A questo punto, scegliamo

$$\dim \mathcal{H}_a = \sum_m^M N_m - n + 1 \equiv n_a \quad \implies \quad \mathcal{H}_a \cong \mathbb{C}^{n_a}. \quad (2.54)$$

Prendiamo quindi un generico vettore normalizzato  $|a\rangle \in \mathcal{H}_a$  e completiamolo a una base

$$\{|a\rangle, |a_1\rangle, \dots, |a_{n_a-1}\rangle\}, \quad (2.55)$$

quindi definiamo

$$|\psi_k^{(m)}\rangle \equiv |u_k^{(m)}\rangle \otimes |a\rangle + \sum_{i=1}^{n_a-1} c_{ki}^{(m)} |e_1\rangle \otimes |a_i\rangle, \quad (2.56)$$

con  $c_{ki}^{(m)} \in \mathbb{C}$  coefficienti qualsiasi. In questo modo, il set di operatori

$$\hat{P}_m = \sum_{k=1}^{N_m} |\psi_k^{(m)}\rangle \langle \psi_k^{(m)}| \quad (2.57)$$

soddisfa la tesi (2.51), grazie all'ortogonalità  $|a_i\rangle \perp |a\rangle$ :

$$\begin{aligned} (\hat{\mathbb{I}}_{\mathcal{H}} \otimes \langle a|) \hat{P}_m (\hat{\mathbb{I}}_{\mathcal{H}} \otimes |a\rangle) &= (\hat{\mathbb{I}}_{\mathcal{H}} \otimes \langle a|) \sum_{k=1}^{N_m} |\psi_k^{(m)}\rangle \langle \psi_k^{(m)}| (\hat{\mathbb{I}}_{\mathcal{H}} \otimes |a\rangle) \\ &= \sum_{k=1}^{N_m} (\hat{\mathbb{I}}_{\mathcal{H}} \otimes \langle a|) |\psi_k^{(m)}\rangle \langle \psi_k^{(m)}| (\hat{\mathbb{I}}_{\mathcal{H}} \otimes |a\rangle) \\ &= \sum_{k=1}^{N_m} (|u_k^{(m)}\rangle \langle a|a\rangle + \sum_{i=1}^{n_a-1} c_{ki}^{(m)} |e_1\rangle \langle a_i|a\rangle) \langle u_k^{(m)}| = \sum_{k=1}^{N_m} |u_k^{(m)}\rangle \langle u_k^{(m)}| = \hat{O}_m. \end{aligned} \quad (2.58)$$

Non resta che verificare che, per una opportuna scelta dei coefficienti  $c_{ki}^{(m)}$ , i  $\hat{P}_m$  siano effettivamente proiettori ortogonali, o equivalentemente che gli stati  $|\psi_k^{(m)}\rangle$  siano ortonormali. Imporre l'ortonormalità porta a un sistema di  $N^2 = (\sum_m N_m)^2$  equazioni:

$$\begin{aligned} \delta_{mm'} \delta_{kk'} &= \langle \psi_{k'}^{(m')} | \psi_k^{(m)} \rangle = \langle u_{k'}^{(m')} | u_k^{(m)} \rangle + \sum_{i,j=1}^{n_a-1} \bar{c}_{k'j}^{(m')} c_{ki}^{(m)} \langle a_j | a_i \rangle \\ &= \langle u_{k'}^{(m')} | u_k^{(m)} \rangle + \sum_{i=1}^{n_a-1} \bar{c}_{k'i}^{(m')} c_{ki}^{(m)}. \end{aligned} \quad (2.59)$$

Per soddisfare questa condizione, spostiamoci a lavorare in  $\mathbb{C}^N$  e consideriamo una sua base  $\{|\nu\rangle \mid \nu = 1, 2, \dots, N\}$ ; rinumeriamo quindi le coppie  $(m, k) \rightarrow (m_\nu, k_\nu)$  e usiamo le componenti  $u_{kj}^{(m)} \equiv \langle e_j | u_k^{(m)} \rangle$  per definire  $n$  vettori

$$|v_j\rangle = \sum_{\nu=1}^N u_{k_\nu j}^{(m_\nu)} |\nu\rangle \in \mathbb{C}^N. \quad (2.60)$$

A questo punto, occorre sfruttare la completezza della POVM, che tenuto conto della decomposizione (2.53) si scrive:

$$\hat{\mathbb{I}}_{\mathcal{H}} = \sum_{mk} |u_k^{(m)}\rangle \langle u_k^{(m)}| = \sum_{\nu=1}^N |u_{k_\nu}^{(m_\nu)}\rangle \langle u_{k_\nu}^{(m_\nu)}|, \quad (2.61)$$

quindi per componenti:

$$\delta_{ij} = \sum_{\nu=1}^N u_{k_\nu j}^{(m_\nu)} \bar{u}_{k_\nu i}^{(m_\nu)}, \quad (2.62)$$

che confrontata con la (2.60) mostra chiaramente che i vettori  $|v_j\rangle$  sono ortogonali. Quindi possiamo completarli a una base aggiungendo  $N - n = n_a - 1$  vettori  $|c_i\rangle$ , sicché la risoluzione dell'identità in  $\mathbb{C}^N$  diventa:

$$\hat{\mathbb{I}}_{\mathbb{C}^N} = \sum_{j=1}^n |v_j\rangle\langle v_j| + \sum_{i=1}^{n_a-1} |c_i\rangle\langle c_i| = \sum_{\nu=1}^N \sum_{j=1}^n u_{k_\nu j}^{(m_\nu)} \bar{u}_{k_\nu j}^{(m_\nu)} |v\rangle\langle v| + \sum_{i=1}^{n_a-1} |c_i\rangle\langle c_i|, \quad (2.63)$$

ovvero per componenti, sfruttando l'ortonormalità della base  $\{v\}$ :

$$\delta_{\nu\nu'} = \langle u_{k_{\nu'}}^{(m_{\nu'})} | u_{k_\nu}^{(m_\nu)} \rangle + \sum_{i=1}^{n_a-1} c_{i\nu'} \bar{c}_{i\nu}. \quad (2.64)$$

Confrontando questa espressione con la condizione (2.59), si nota che esse coincidono esattamente in virtù della numerazione  $(m_\nu, k_\nu)$ , e quindi i coefficienti  $c_{i\nu}$  trovati soddisfano la tesi.

## Esempio

Infine, mostriamo un esempio di POVM non proiettiva [4], che consente di descrivere una misura approssimativa il cui esito è noto con una qualche incertezza: in uno spazio di Hilbert con dimensione numerabile e base  $|e_j\rangle$ , consideriamo l'insieme di esiti  $\{j \mid j \in \mathbb{Z}\}$ , e definiamo

$$\hat{M}_j = N \sum_k e^{-\frac{(k-j)^2}{2\sigma^2}} |e_k\rangle\langle e_k| \quad (2.65)$$

con  $N = \left( \sum_j e^{-\frac{j^2}{2\sigma^2}} \right)^{-1}$  costante di normalizzazione dipendente dal parametro  $\sigma$  (si noti che la traslazione della variabile all'esponente è superflua, perché la sommatoria va da  $-\infty$  a  $+\infty$ ).

Verifichiamo che risolvano l'identità:

$$\begin{aligned} \sum_j \hat{M}_j^\dagger \hat{M}_j &= \sum_j N^2 \sum_{kk'} e^{-\frac{(k-j)^2}{2\sigma^2}} e^{-\frac{(k'-j)^2}{2\sigma^2}} |e_k\rangle\langle e_k| e_{kk'} \langle e_{k'}| \\ &= \sum_k N^2 \sum_j e^{-\frac{j^2}{\sigma^2}} |e_k\rangle\langle e_k| = \hat{\mathbb{I}}. \end{aligned} \quad (2.66)$$

Quindi, partendo da uno stato di massima ignoranza sulla base  $|e_j\rangle$ , cioè da una miscela con tutti gli elementi  $\langle e_j | \rho | e_j \rangle \equiv \rho_{jj} \approx c$  circa della stessa entità, e con  $\langle e_j | \rho | e_k \rangle \approx 0$ , la misura dà:

$$\rho \longrightarrow \frac{\hat{M}_j \rho \hat{M}_j^\dagger}{\text{Tr}\{\hat{O}_j \rho\}} = \frac{\sum_k N^2 e^{-\frac{(k-j)^2}{\sigma^2}} \rho_{kk} |e_k\rangle\langle e_k|}{\sum_k N^2 e^{-\frac{(k-j)^2}{\sigma^2}} \rho_{kk}} \approx N^2 \sum_k e^{-\frac{(k-j)^2}{\sigma^2}} |e_k\rangle\langle e_k|, \quad (2.67)$$

cioè lo stato finale è una combinazione lineare dei diversi autostati, con pesi gaussiani centrati intorno alla media  $j$ , cui è pertanto associata un'incertezza  $\Delta j = \frac{\sigma}{\sqrt{2}}$ .

La generalizzazione a esiti  $m$  reali è immediata, anche se rende i calcoli appena svolti più elaborati, in quanto impedisce di sfruttare la simmetria per traslazione menzionata. Nel [capitolo 4](#) faremo largo uso di operatori di misura gaussiani, anche nella loro versione continua, del tutto analoga ma con l'integrale al posto della serie. Essi permettono infatti di descrivere una misura approssimativa di un operatore

$$\hat{A} = \sum_m m |m\rangle \langle m| \quad (2.68)$$

tramite

$$\hat{M}_m = N e^{-\frac{(\hat{A}-m)^2}{2\sigma^2}}. \quad (2.69)$$

# Bibliografia

- [1] M. Reed, B. Simon, *Methods of Modern Mathematical Physics*, Academic Press, Revised and Enlarged Edition (1980)
- [2] M. A. Nielsen, I. L. Chuang, *Quantum Computation and Quantum Information*, Cambridge University Press (2010)
- [3] L. Casarin, P. Marchetti, *Il Teorema di Neumark per le Misure Quantistiche*, Università degli Studi di Padova (2015)  
[https://thesis.unipd.it/retrieve/6dd0270f-c88a-4eb2-b782-0140eddc5786/casarin\\_lorenzo.pdf](https://thesis.unipd.it/retrieve/6dd0270f-c88a-4eb2-b782-0140eddc5786/casarin_lorenzo.pdf)
- [4] D. A. Steck, *Measurements and POVMs*, University of Oregon (2009)  
<https://atomoptics.uoregon.edu/~dsteck/teaching/09spring/phys610/notes/povms.pdf>
- [5] J. J. Sakurai, J. Napolitano, *Modern Quantum Mechanics*, Cambridge University Press, 2nd ed. (2010)
- [6] H. P. Breuer, F. Petruccione, *The Theory of Open Quantum Systems*, Oxford University Press (2002)

## Capitolo 3

### Decoerenza

Un sistema quantistico realistico non è mai completamente isolato dall'ambiente, e interagendo con esso diviene tipicamente entangled con molti dei suoi gradi di libertà. Tale entanglement influenza l'informazione che è possibile estrarre con misure locali, vale a dire effettuate solo sul sistema, e in particolare determina la possibilità di osservare interferenza tra gli autostati di un dato osservabile.

La decoerenza è il processo dinamico che descrive la selezione tramite l'interazione con l'ambiente di una base di osservabili in cui l'interferenza è soppressa. Matematicamente, consiste nel passaggio da uno stato iniziale puro a una miscela statistica, in cui il sistema di stati selezionati, detti *pointer states*, diagonalizza la matrice densità ridotta. I *pointer states* sono caratterizzati come gli stati più stabili sotto l'interazione, e risultano essere autostati di certi osservabili. Infatti, si può mostrare che l'interazione con l'ambiente agisce sul sistema come una misura non distruttiva, perciò il processo di decoerenza è spesso descritto come "monitoraggio" dell'ambiente sul sistema. In questo senso, essendo i *pointer states* meno influenzati dall'interazione, essi sono anche quelli che rimangono più puri mentre vengono monitorati.

Poiché la decoerenza rende conto dell'assenza di interferenza macroscopica tra gli stati selezionati, che spesso sono stati di posizione definita, essa gioca un ruolo centrale nella comprensione della transizione dal mondo quantistico a quello classico e nel problema della misura. Infatti, risolve elegantemente l'arbitrarietà della distinzione tra sistema e apparato di misura, considerando quest'ultimo come un sistema quantistico aperto; tuttavia, pur eliminando gli effetti di interferenza, non spiega in generale l'assenza di sovrapposizioni macroscopiche.

### 3.1 Dipendenza dell'interferenza dall'informazione trasferita nell'ambiente

È ben noto che nell'esperimento della doppia fenditura misurare da quale parte passi la particella distrugge completamente l'interferenza sullo schermo. Mostriamo qui più in generale che esiste un trade-off tra l'informazione che si può estrarre dall'ambiente sulla traiettoria e quella che si può estrarre localmente sulla fase. A tale scopo, con un approccio analogo allo [schema di misura](#) esposto nel primo capitolo, chiamiamo  $|s_0\rangle$  lo stato iniziale del sistema ( $S$ ), e  $|E_0\rangle$  quello dell'ambiente/apparato ( $E$ ). Detti  $|s_1\rangle$  e  $|s_2\rangle$  gli stati corrispondenti al passaggio della particella nelle fenditure 1 e 2, l'interazione con la barriera porterà  $|s_0\rangle$  in una loro qualche combinazione lineare, e l'evoluzione unitaria darà uno stato composto entangled:

$$|s_0\rangle|E_0\rangle \xrightarrow{U_t} \alpha|s_1\rangle|E_1\rangle + \beta|s_2\rangle|E_2\rangle \quad (3.1)$$

dove  $|E_1\rangle$  e  $|E_2\rangle$  indicano gli stati in cui  $E$  è portato dall'interazione con i rispettivi rami della funzione d'onda del sistema. La statistica dell'esito di una misura su  $S$  è descritta da:

$$\rho_S = \text{Tr}^{(E)}\{\rho_{SE}\} = \sum_j \langle e_j | (\alpha|s_1\rangle|E_1\rangle + \beta|s_2\rangle|E_2\rangle) (\langle s_1|\langle E_1|\bar{\alpha} + \langle s_2|\langle E_2|\bar{\beta}) | e_j \rangle, \quad (3.2)$$

dove  $\{|e_j\rangle\}$  è una qualche base dello spazio di Hilbert  $\mathcal{H}_E$  dell'ambiente. Distribuendo il prodotto ket-bra e usando la relazione di completezza, otteniamo

$$\begin{aligned} \rho_S &= \sum_j \langle e_j | \left( |\alpha|^2 |s_1\rangle\langle s_1| \langle E_1|\langle E_1| + |\beta|^2 |s_2\rangle\langle s_2| \langle E_2|\langle E_2| + \right. \\ &\quad \left. + \alpha\bar{\beta} |s_1\rangle\langle s_2| \langle E_1|\langle E_2| + \bar{\alpha}\beta |s_2\rangle\langle s_1| \langle E_2|\langle E_1| \right) | e_j \rangle \\ &= \sum_j \langle e_j | \left( |\alpha|^2 |s_1\rangle\langle s_1| \otimes |E_1\rangle\langle E_1| + |\beta|^2 |s_2\rangle\langle s_2| \otimes |E_2\rangle\langle E_2| + \right. \\ &\quad \left. + \alpha\bar{\beta} |s_1\rangle\langle s_2| \otimes |E_1\rangle\langle E_2| + \bar{\alpha}\beta |s_2\rangle\langle s_1| \otimes |E_2\rangle\langle E_1| \right) | e_j \rangle \\ &= |\alpha|^2 |s_1\rangle\langle s_1| + |\beta|^2 |s_2\rangle\langle s_2| + \alpha\bar{\beta} \langle E_2|E_1\rangle |s_1\rangle\langle s_2| + \bar{\alpha}\beta \langle E_1|E_2\rangle |s_2\rangle\langle s_1|. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Si noti che nel caso  $|s_1\rangle \perp |s_2\rangle$  si può quindi scrivere

$$\rho_S = \begin{pmatrix} |\alpha|^2 & \alpha\bar{\beta}\langle E_2|E_1\rangle & 0 & \dots \\ \bar{\alpha}\beta\langle E_1|E_2\rangle & |\beta|^2 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \quad (3.4)$$

Possiamo dunque esprimere la distribuzione degli esiti di una misura di posizione su questo stato:

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}(x) &= \text{Tr}_S\{|x\rangle\langle x|\rho_S\} = \langle x|\rho_S|x\rangle \\
&= |\alpha|^2|\langle x|s_1\rangle|^2 + |\beta|^2|\langle x|s_2\rangle|^2 + 2\text{Re}\left\{\alpha\bar{\beta}\langle E_2|E_1\rangle\langle x|s_1\rangle\langle s_2|x\rangle\right\} \\
&= |\alpha|^2|\psi_1(x)|^2 + |\beta|^2|\psi_2(x)|^2 + 2\text{Re}\left\{\alpha\bar{\beta}\langle E_2|E_1\rangle\psi_1(x)\bar{\psi}_2(x)\right\}
\end{aligned} \tag{3.5}$$

dove nella prima riga abbiamo preso proprio la posizione come base per calcolare agevolmente la traccia.

Nell'espressione (3.5) notiamo in particolare che il termine d'interferenza è proporzionale al prodotto  $\langle E_2|E_1\rangle$ .

Dunque, se gli stati  $E_1$  e  $E_2$  dell'ambiente sono ortogonali - nel qual caso saranno perfettamente distinguibili, cioè sarà possibile discernarli con probabilità 1 con una singola misura proiettiva nella loro base - non si osserverà alcuna interferenza. Cioè, la presenza nell'ambiente, anche solo in linea di principio, dell'informazione necessaria a sapere da quale fenditura è passata la particella, rende localmente inaccessibile qualsiasi informazione sulla fase relativa tra  $|s_1\rangle$  e  $|s_2\rangle$ . Tale informazione non è andata distrutta, ma è stata trasferita nell'ambiente, e gli stati complessivi  $|s_1\rangle|E_1\rangle$  e  $|s_2\rangle|E_2\rangle$  rimangono coerenti.

Nell'altro caso limite si ha  $|\langle E_2|E_1\rangle| = 1$ , cioè si tratta dello stesso stato fisico, e chiaramente l'informazione di fase è completamente ritenuta entro  $S$ , infatti lo stato complessivo è, a meno di una fase globale:

$$|\Psi\rangle = A|s_1\rangle|E\rangle + Be^{i\phi}|s_2\rangle|E\rangle = (A|s_1\rangle + Be^{i\phi}|s_2\rangle) \otimes |E\rangle \tag{3.6}$$

con  $|E\rangle \equiv |E_1\rangle = z|E_2\rangle$  ( $z \in \mathbb{C}$ ) e  $A, B, \phi \in \mathbb{R}$ . Dunque il sistema rimane completamente coerente.

Altrimenti, se  $0 < |\langle E_2|E_1\rangle| \leq 1$ , la probabilità di distinguere i due stati con una singola misura locale (dunque proiettiva, cfr. il [teorema di Neumark](#)) è<sup>1</sup>  $1 - |\langle E_2|E_1\rangle|^2$ . In questo caso, dunque, nell'ambiente è trasferita meno informazione sul percorso preso, e nel sistema è rimasta informazione di fase, essendo il termine di interferenza nella (3.5) non nullo.

Dal punto di vista del problema della misura, ciò suggerisce che l'arbitrarietà della distinzione tra sistema e apparato di misura può essere risolta definendo apparato qualsiasi sistema fisico  $E$  che sia portato - nella sua interazione con i diversi rami dello stato di  $S$  - in stati tra loro ortogonali.

Generalizzando questo esempio a un sistema qualsiasi, vediamo già senza un modello dinamico specifico che l'evoluzione tende a creare correlazioni con l'ambiente. Se quest'ultimo è costituito da poche particelle, o in generale da pochi gradi di libertà, la correlazione è tipicamente insufficiente a risolvere i diversi rami della funzione d'onda; quando invece l'ambiente, com'è realistico, è costituito da un numero di particelle dell'ordine di  $10^{23}$ , allora

<sup>1</sup>Supponiamo infatti di misurare il proiettore  $|E_1\rangle\langle E_1|$ , e che il sistema si trovi in  $|E_2\rangle$ . Allora poiché  $|E_2\rangle = \langle E_1|E_2\rangle|E_1\rangle + c|\psi\rangle$  per qualche  $|\psi\rangle \in \text{span}^\perp(|E_1\rangle)$  e  $c \in \mathbb{C}$ , esiste comunque una probabilità  $|\langle E_2|E_1\rangle|^2$  che l'esito della misura sia 1.

esiste una base in cui l'overlap  $\langle E_i | E_j \rangle \propto (\rho_S)_{ij}$  viene soppresso velocemente (in molti modelli  $\langle E_i(t) | E_j(t) \rangle \propto e^{-\frac{t}{\tau}}$ ).

## 3.2 Monitoraggio dell'ambiente

Mostriamo ora che, supponendo sistema e ambiente non correlati all'istante 0:

$$\rho_{SE}(0) = \rho_S(0) \otimes \rho_E(0), \quad (3.7)$$

l'interazione con l'ambiente agisce come una misura non distruttiva sul sistema. Consideriamo l'evoluzione  $\mathcal{U}_t = e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}_{SE}t}$  sotto l'hamiltoniana del sistema composto  $\hat{H}_{SE}$ :

$$\rho_{SE}(t) = \mathcal{U}_t \rho_{SE}(0) \mathcal{U}_t^\dagger = \mathcal{U}_t \left( \rho_S(0) \otimes \sum_j c_j |e_j\rangle\langle e_j| \right) \mathcal{U}_t^\dagger \quad (3.8)$$

dove abbiamo scritto  $\rho_E(0) = \sum_j c_j |e_j\rangle\langle e_j|$  con  $\{|e_j\rangle\}$  base di  $\mathcal{H}_E$ . L'evoluzione di  $S$  è descritta da

$$\begin{aligned} \rho_S(t) &= \text{Tr}^{(E)} \{ \rho_{SE}(t) \} = \sum_j \langle e_j | \mathcal{U}_t \left( \rho_S(0) \otimes \sum_i c_i |e_i\rangle\langle e_i| \right) \mathcal{U}_t^\dagger | e_j \rangle \\ &= \sum_{i,j} c_i \langle e_j | \mathcal{U}_t | e_i \rangle \rho_S(0) \langle e_i | \mathcal{U}_t^\dagger | e_j \rangle \end{aligned} \quad (3.9)$$

dove nell'ultima uguaglianza abbiamo usato l'**identità**:

$$\rho_S(0) \otimes |e_i\rangle\langle e_i| = (\hat{\mathbb{I}}_S \otimes |e_i\rangle\langle e_i|) \rho_S(0) (\hat{\mathbb{I}}_S \otimes \langle e_i|). \quad (3.10)$$

Possiamo scrivere la (3.9) in forma più compatta:

$$\rho_S(t) = \sum_{i,j} \hat{E}_{ij} \rho_S(0) \hat{E}_{ij}^\dagger \equiv \sum_n \hat{K}_n \rho_S(0) \hat{K}_n^\dagger. \quad (3.11)$$

introducendo gli *operatori di Kraus*<sup>2</sup>  $\hat{E}_{ij} \equiv \sqrt{c_{i_n}} \langle e_{j_n} | \mathcal{U}_t | e_{i_n} \rangle \equiv \hat{K}_n$ .

Dall'unitarietà dell'evoluzione e dalla normalizzazione di  $\rho_E$  discende la completezza del sistema di operatori  $\{\hat{O}_n = \hat{K}_n \hat{K}_n^\dagger\}$ , infatti:

$$\begin{aligned} \sum_n \hat{K}_n^\dagger \hat{K}_n &= \sum_{i,j} c_i \langle e_i | \mathcal{U}_t^\dagger | e_j \rangle \langle e_j | \mathcal{U}_t | e_i \rangle = \sum_i c_i \langle e_i | \mathcal{U}^\dagger \left( \sum_j |e_j\rangle\langle e_j| \right) \mathcal{U} | e_i \rangle \\ &= \sum_i c_i \langle e_i | e_i \rangle = \sum_i c_i \hat{\mathbb{I}}_S = \hat{\mathbb{I}}_S. \end{aligned} \quad (3.12)$$

I  $\hat{K}_n$  sono dunque operatori di misura, e l'espressione (3.11) è equivalente a un'evoluzione sotto continue misure POVM a ogni istante  $t$ .

Possiamo vederlo esplicitamente, considerando una misura indiretta di  $S$  tramite  $E$  (che

<sup>2</sup>Si noti che questi sono correttamente operatori su  $\mathcal{H}_S$ , dato che le scritture  $\langle e_j |$  e  $|e_i\rangle$  sono abbreviazioni per  $\hat{\mathbb{I}}_S \otimes \langle e_j |$  e  $\hat{\mathbb{I}}_S \otimes |e_i\rangle$ .

assume quindi il ruolo di ancilla), data da un'osservabile  $\hat{A} = \sum_{\alpha} \alpha |\alpha\rangle\langle\alpha| \equiv \sum_{\alpha} \alpha \hat{P}_{\alpha}$  su  $\mathcal{H}_E$ . La probabilità di ottenere  $\alpha$  è:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_t(\alpha) &= \text{Tr}^{(E)} \{ |\alpha\rangle\langle\alpha| \rho_E(t) \} = \text{Tr}^{(E)} \{ \hat{P}_{\alpha} \text{Tr}^{(S)} \{ \rho(t) \} \} \\ &= \text{Tr}^{(E)} \{ \hat{P}_{\alpha} \text{Tr}^{(S)} \{ \mathcal{U}_t \rho_S(0) \otimes \rho_E(0) \mathcal{U}_t^{\dagger} \} \} \end{aligned} \quad (3.13)$$

e dopo la misura, effettuata al tempo  $t$  e avente esito  $\alpha$ , il sistema si trova in:

$$\rho_S^{(\alpha)}(t + dt) = \text{Tr}^{(E)} \{ \rho_{SE}^{(\alpha)}(t + dt) \} = N \text{Tr}^{(E)} \{ (\hat{\mathbb{I}}_S \otimes \hat{P}_{\alpha}) \rho_{SE}(t) (\hat{\mathbb{I}}_S \otimes \hat{P}_{\alpha}) \} \quad (3.14)$$

dove abbiamo introdotto la costante di normalizzazione  $N = \frac{1}{\mathcal{P}_t(\alpha)}$ . Scrivendo  $\rho_{SE}(t)$  come in precedenza, si trova

$$\begin{aligned} \rho_S^{(\alpha)}(t + dt) &= N \text{Tr}^{(E)} \{ (\hat{\mathbb{I}}_S \otimes \hat{P}_{\alpha}) \mathcal{U}_t \left( \rho_S(0) \otimes \sum_n c_n |e_n\rangle\langle e_n| \right) \mathcal{U}_t^{\dagger} (\hat{\mathbb{I}}_S \otimes \hat{P}_{\alpha}) \} \\ &= N \sum_{\alpha'} \langle \alpha' | (\hat{\mathbb{I}}_S \otimes \hat{P}_{\alpha}) \mathcal{U}_t \left( \rho_S(0) \otimes \sum_n c_n |e_n\rangle\langle e_n| \right) \mathcal{U}_t^{\dagger} (\hat{\mathbb{I}}_S \otimes \hat{P}_{\alpha}) | \alpha' \rangle \\ &= N \langle \alpha | \mathcal{U}_t \left( \rho_S(0) \otimes \sum_n c_n |e_n\rangle\langle e_n| \right) \mathcal{U}_t^{\dagger} | \alpha \rangle \end{aligned} \quad (3.15)$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo usato le ovvie identità

$$\langle \alpha' | (\hat{\mathbb{I}}_S \otimes \hat{P}_{\alpha}) = (\hat{\mathbb{I}}_S \otimes \langle \alpha' |) (\hat{\mathbb{I}}_S \otimes \hat{P}_{\alpha}) = \delta_{\alpha, \alpha'} \langle \alpha | \quad (3.16)$$

e

$$(\hat{\mathbb{I}}_S \otimes \hat{P}_{\alpha}) | \alpha' \rangle = (\hat{\mathbb{I}}_S \otimes \hat{P}_{\alpha}) (\hat{\mathbb{I}}_S \otimes | \alpha' \rangle) = \delta_{\alpha, \alpha'} | \alpha \rangle. \quad (3.17)$$

Come prima, possiamo introdurre gli operatori di Kraus  $\hat{M}_n^{(\alpha)} = \sqrt{c_n} \langle \alpha | \mathcal{U}_t | e_n \rangle$  per scrivere

$$\rho_S^{(\alpha)}(t + dt) = N \sum_n \hat{M}_n^{(\alpha)} \rho_S(0) \hat{M}_n^{(\alpha)\dagger} \quad (3.18)$$

Analogamente, si può mostrare che sono operatori di misura, cioè che soddisfano

$$\sum_n \hat{M}_n^{(\alpha)\dagger} \hat{M}_n^{(\alpha)} = \hat{\mathbb{I}}_S.$$

Ora, se invece che effettuare una misura proiettiva su  $\hat{A}$ , consideriamo un processo non selettivo, lo stato sarà una miscela:

$$\rho_S(t + dt) = \sum_{\alpha} \mathcal{P}_t(\alpha) \rho_S^{(\alpha)}(t + dt) = \sum_{n, \alpha} \hat{M}_n^{(\alpha)} \rho_S(0) \hat{M}_n^{(\alpha)\dagger}. \quad (3.19)$$

Notiamo che l'espressione (3.19) è formalmente equivalente alla (3.11), cioè l'interazione con  $E$  agisce su  $S$  come una misura indiretta. Inoltre, la validità di tale equivalenza non dipende dall'effettiva realizzazione della misura proiettiva di  $\hat{A}$  sull'ambiente, ma solo dalla creazione di correlazioni che renderebbe possibile estrarne informazione sul sistema almeno in linea di principio.

### 3.3 Pointer states

Abbiamo anticipato che la dinamica di un sistema aperto tende a sopprimere i termini di interferenza nella distribuzione di probabilità del valore di un certo osservabile. Ciò è dovuto all'interazione con l'ambiente, che estrae dal sistema informazione sull'esito di una misura sotto forma di correlazioni. Gli autostati di tale osservabile sono detti *pointer states* e sono gli stati più stabili sotto l'hamiltoniana di interazione. Infatti, mentre le loro sovrapposizioni perdono coerenza durante la dinamica, i pointer states restano invariati e mantengono la correlazione con l'esito della misura (da cui il loro nome, sono gli stati preferiti dai puntatori dell'apparato di misura). Che il processo di selezione per decoerenza selezioni i pointer states e non si verifichi in altre basi può essere dimostrato in diversi modelli [1].

#### Criterio di commutazione

Consideriamo il caso di un sistema composto in cui valga l'approssimazione

$$\hat{H} = \hat{H}_S + \hat{H}_E + \hat{H}_{int} \approx \hat{H}_{int}, \quad (3.20)$$

altrimenti le evoluzioni interne complicherebbero sensibilmente il problema.

Assumiamo inoltre

$$\frac{\partial \hat{H}}{\partial t} = 0. \quad (3.21)$$

La condizione definitoria per un pointer state esatto  $|s_i\rangle$  è

$$|s_i\rangle|E_0\rangle \xrightarrow{\mathcal{U}_t} |s_i\rangle|E(t)\rangle, \quad (3.22)$$

che implica

$$e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}_{int}t}|s_i\rangle|E_0\rangle = \lambda_i|s_i\rangle e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}_{int}^{(E)}t}|E_0\rangle \equiv |s_i\rangle|E(t)\rangle. \quad (3.23)$$

Ora, poiché in generale  $\hat{H}_{int} = \sum_k \hat{S}_k \otimes \hat{E}_k$ , dovremmo richiedere che  $|s_i\rangle$  sia autostato di  $\hat{S}_k \forall k$ , il che può essere soddisfatto a patto che  $[\hat{S}_k, \hat{S}_j] = 0 \forall k, j$ . Dunque in generale non è garantita l'esistenza di pointer states esatti, e può essere necessario ricorrere a criteri più sofisticati per determinare la base selezionata dalla decoerenza.

#### Predictability-sieve

Ad esempio, nella strategia detta *predictability-sieve*, utile anche nel caso in cui non valga l'approssimazione (3.20), si considera il funzionale

$$\mathcal{F} : \mathcal{H}_S \times I_t \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \quad (3.24)$$

che fornisce una qualche misura della purezza dello stato al tempo  $t$ , in funzione dello stato puro<sup>3</sup> iniziale  $\psi$ . L'esempio più comune è l'entropia di von Neumann

$$\mathcal{F}(\psi, t) = -\text{Tr}\{\rho_\psi \log \rho_\psi\}. \quad (3.25)$$

<sup>3</sup>Il metodo può essere generalizzato a stati iniziali misti [1].

I pointer states si ottengono quindi minimizzando il funzionale  $\mathcal{F}$  al variare di  $\psi \in \mathcal{H}_S$ . Si noti che gli stati più puri sono anche i più "predicibili", nel senso che la loro evoluzione è perfettamente unitaria e non disperde informazioni nell'ambiente, da cui il nome della procedura. Il criterio così stabilito costituisce una generalizzazione di quello di commutazione, in quanto pointer states esatti rimangono puri, come è evidente dalla (3.23).

Nei casi in cui semplicemente  $\hat{H}_{int} = \hat{S} \otimes \hat{E}$  risulta separabile, gli osservabili selezionati sono quelli che commutano con  $\hat{S}$ . Più in generale, se il criterio di commutatività tra gli  $\hat{S}_k$  è soddisfatto, allora è garantita l'esistenza di una base  $\{|s_i\rangle\}$  di pointer states esatti ortogonali (quindi vale la decomposizione (3.4)). In tal caso, qualsiasi osservabile della forma  $\hat{O} = \sum_i c_i |s_i\rangle\langle s_i|$  è conservato dall'interazione:

$$[\hat{O} \otimes \hat{\mathbb{I}}_E, \hat{H}_{int}] = \sum_{k,i} [c_i |s_i\rangle\langle s_i| \otimes \hat{\mathbb{I}}_E, \hat{S}_k \otimes \hat{E}_k] = 0, \quad (3.26)$$

e monitorato da  $E$  con una certa precisione. Infatti, essendo l'ambiente correlato con gli  $|s_i\rangle$ , esso contiene informazioni sui valori di  $\hat{O}$ , che quindi avranno un comportamento classico se le coerenze sono soppresse.

Dunque, la risoluzione del monitoraggio ambientale su  $\hat{O}$  dipende dalla capacità dell'ambiente di distinguere tra gli stati  $|s_i\rangle$ . In particolare se un sottoinsieme  $\{|\tilde{s}_i\rangle\} \subseteq \{|s_i\rangle\}$  appartiene a un unico autospazio degli  $\hat{S}_k$  la cui degenerazione non è risolta, cioè  $\hat{S}_k |\tilde{s}_i\rangle = \tilde{s}_i^{(k)} |\tilde{s}_i\rangle \equiv \tilde{s}^{(k)} |\tilde{s}_i\rangle$ , allora dal punto di vista dell'interazione gli stati  $|\tilde{s}_i\rangle$  sono indistinguibili:

$$\mathcal{U}_{int}(t) \left( \sum_i c_i |\tilde{s}_i\rangle \otimes |E_0\rangle \right) = \left( \sum_i c_i |\tilde{s}_i\rangle \right) \otimes |E(t)\rangle \quad (3.27)$$

e l'intero sottospazio di cui sono una base costituisce un unico *pointer space*. Solo in questo caso sovrapposizioni di pointer states possono rimanere coerenti, cioè essere a loro volta dei pointer states. Così, misurando un osservabile che risolva la degenerazione del sottospazio, si osserverà interferenza. In tal senso, questi spazi si dicono immuni alla decoerenza.

Nella sezione seguente è illustrato un modello di decoerenza [2] in cui le coerenze nella base degli autostati di posizione tendono a zero esponenzialmente. Più in generale, in molti modelli l'interazione con l'ambiente consiste in urti tra particelle, e dipende tipicamente da qualche potenza della distanza. Se è così,  $\hat{H}_{int}$  commuta con l'operatore posizione e i pointer states sono autostati (eventualmente approssimativi) della posizione.

### 3.4 Decoerenza collisionale

Consideriamo un sistema generico (ad esempio un oggetto composto) immerso in un flusso di particelle leggere. Poiché non siamo interessati ai gradi di libertà interni, indichiamo con  $|\psi\rangle$  lo stato del centro di massa del sistema. Assumiamo inoltre che:

1. il sistema sia molto più massivo delle particelle dell'ambiente, così che negli urti il suo spostamento sia trascurabile,
2. gli urti siano elastici,
3. il tempo  $dt$  di interazione in un urto sia trascurabile rispetto a quello caratteristico dell'evoluzione interna del sistema  $\tau_S$ .

Sotto queste ipotesi, una reazione di scattering su uno stato localizzato  $|x\rangle$  è data da

$$|x\rangle|\phi\rangle \longrightarrow S|x\rangle|\phi\rangle = |x\rangle|\phi_x\rangle \quad (3.28)$$

dove  $S$  è l'operatore di evoluzione nell'urto,  $|\phi\rangle$  è l'onda incidente e  $|\phi_x\rangle$  è lo stato dell'onda dopo l'interazione con centro di scattering in  $x \in \mathbb{R}^3$ . Non siamo interessati alla forma specifica dell'interazione, che dipenderà - oltre che dalla posizione del centro di scattering - dal tipo di particella nel flusso. Richiederemo soltanto che sia invariante sotto parità, per usare la simmetria dei suoi elementi di matrice nella base degli impulsi.

Sul generico stato  $|\psi\rangle$  la reazione di scattering sarà quindi

$$|\psi\rangle|\phi\rangle = \left( \int_{\mathbb{R}^3} \psi(x)|x\rangle dx \right) |\phi\rangle \xrightarrow{S} \int_{\mathbb{R}^3} \psi(x)|x\rangle |\phi_x\rangle dx, \quad (3.29)$$

dunque dopo un urto il sistema è descritto da

$$\begin{aligned} \rho_S &= \text{Tr}^{(E)} \left\{ \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \psi(x) \bar{\psi}(x') |x\rangle |\phi_x\rangle \langle x'| \langle \phi_{x'}| dx dx' \right\} \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \psi(x) \bar{\psi}(x') \langle \phi_{x'} | \phi_x \rangle |x\rangle \langle x'| dx dx' \end{aligned} \quad (3.30)$$

dove nell'ultima uguaglianza abbiamo calcolato la traccia parziale con una base di  $E$  generica e usato la relazione di completezza. Quindi in un urto gli elementi di matrice evolvono secondo

$$\begin{aligned} \langle x | \rho_S | x' \rangle &\equiv \rho_S(x, x') = \langle x | \left( \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \psi(y) \bar{\psi}(y') |y\rangle \langle y'| dy dy' \right) | x' \rangle \\ &= \psi(x) \bar{\psi}(x') \xrightarrow{S} \langle \phi_x | \phi_{x'} \rangle \psi(x) \bar{\psi}(x') = \langle \phi_x | \phi_{x'} \rangle \rho_S(x, x'). \end{aligned} \quad (3.31)$$

Grazie alle ipotesi del modello sui tempi di interazione, possiamo considerare un intervallo di tempo  $\Delta\tau$  in cui avvenga un'unica collisione, e durante il quale l'evoluzione interna del sistema sia trascurabile. Si avrà dunque

$$\frac{\Delta\rho_S(x, x')}{\Delta\tau} = \frac{\langle\phi_{x'}|\phi_x\rangle - 1}{\Delta\tau}\rho_S(x, x'), \quad (3.32)$$

da cui già possiamo intravedere la soluzione esponenziale quando  $x \neq x'$ .

Per risolvere la (3.32) occorre valutare la sovrapposizione  $\langle\phi_{x'}|\phi_x\rangle$ . A tale scopo, chiamiamo  $\hat{p}$  l'operatore impulso del sistema, e  $\hat{q}$  quello della particella con cui collide. Supponendo che l'interazione di scattering  $\hat{H}_s$  tale che  $S = e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}_s\Delta\tau}$  sia simmetrica sotto traslazioni spaziali, varrà

$$[\hat{H}_s, \hat{p} + \hat{q}] = [S, \hat{p} + \hat{q}] = 0. \quad (3.33)$$

Inoltre, poiché  $\hat{p}$  è il generatore delle traslazioni spaziali del sistema, si potrà scrivere

$$|x\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{p}\cdot x}|0\rangle. \quad (3.34)$$

Infatti, lavorando nello spazio delle coordinate

$$e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{p}\cdot x}\psi(r) = e^{x\cdot\nabla}\psi(r) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x\cdot\nabla)^n}{n!}\psi(r) = \psi(r) + \nabla\psi(r)\cdot x + \dots = \psi(r+x), \quad (3.35)$$

avendo supposto  $\psi$  analitica in un intorno di  $r$  di raggio  $R > |x|$ .

Dunque, detto  $S_0$  l'operatore di scattering con centro situato in  $x = 0$ , che quindi agisce solo su  $\mathcal{H}_E$ , si può scrivere

$$\begin{aligned} |x\rangle|\phi_x\rangle &= S(|x\rangle|\phi\rangle) = e^{-\frac{i}{\hbar}(\hat{p}+\hat{q})\cdot x}S|0\rangle e^{\frac{i}{\hbar}\hat{q}\cdot x}|\phi\rangle \\ &= e^{-\frac{i}{\hbar}(\hat{p}+\hat{q})\cdot x}|0\rangle S_0 e^{\frac{i}{\hbar}\hat{q}\cdot x}|\phi\rangle = |x\rangle e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{q}\cdot x}S_0 e^{\frac{i}{\hbar}\hat{q}\cdot x}|\phi\rangle, \end{aligned} \quad (3.36)$$

dove nella seconda uguaglianza abbiamo scambiato  $S$  e  $e^{-\frac{i}{\hbar}(\hat{p}+\hat{q})\cdot x}$  in virtù della (3.33). Quindi,

$$\langle\phi_{x'}|\phi_x\rangle = \langle\phi|e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{q}\cdot x'}S_0^\dagger e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{q}\cdot(x-x')}S_0 e^{\frac{i}{\hbar}\hat{q}\cdot x}|\phi\rangle. \quad (3.37)$$

Ora, se l'onda incidente  $|\phi\rangle = |k\rangle$  ha impulso definito, soddisferà  $e^{\hat{q}}|k\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\hat{q}^n}{n!}|k\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{k^n}{n!}|k\rangle = e^k|k\rangle$ , quindi la (3.37) diventa

$$\begin{aligned} \langle\phi_{x'}|\phi_x\rangle &= \langle k|e^{-\frac{i}{\hbar}k\cdot x'}S_0^\dagger e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{q}\cdot(x-x')}S_0 e^{\frac{i}{\hbar}k\cdot x}|k\rangle \\ &= \langle k|e^{-\frac{i}{\hbar}k\cdot x'}S_0^\dagger \int_{\mathbb{R}^3} |k'\rangle\langle k'|dk' e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{q}\cdot(x-x')}S_0 e^{\frac{i}{\hbar}k\cdot x}|k\rangle \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} \langle k|e^{-\frac{i}{\hbar}k\cdot x'}S_0^\dagger |k'\rangle\langle k'|e^{-\frac{i}{\hbar}k'\cdot(x-x')}S_0 e^{\frac{i}{\hbar}k\cdot x}|k\rangle dk' \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} e^{\frac{i}{\hbar}(k-k')\cdot(x-x')} \langle k|S_0^\dagger |k'\rangle\langle k'|S_0|k\rangle dk' \\ &\equiv \int_{\mathbb{R}^3} e^{\frac{i}{\hbar}(k-k')\cdot(x-x')} S_{kk'}^\dagger S_{k'k} dk'. \end{aligned} \quad (3.38)$$

A questo punto, conviene scrivere tale espressione in termini dell'operatore  $\mathcal{T}_0 = \frac{\mathcal{S}_0 - \mathbb{I}}{i} \iff \mathcal{S}_0 = \mathbb{I} + i\mathcal{T}_0$ . Esso eredita da  $\mathcal{S}_0$  la simmetria sotto parità, e grazie alla sua unitarietà - vale a dire  $\mathcal{S}_0 \mathcal{S}_0^\dagger = (\mathbb{I} + i\mathcal{T}_0)(\mathbb{I} - i\mathcal{T}_0^\dagger) = \mathbb{I} + \mathcal{T}_0 \mathcal{T}_0^\dagger + i(\mathcal{T}_0 - \mathcal{T}_0^\dagger) = \mathbb{I}$  - gode della proprietà  $\mathcal{T}_0 \mathcal{T}_0^\dagger = i(\mathcal{T}_0^\dagger - \mathcal{T}_0)$ . Quindi

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}_{kk'}^\dagger \mathcal{S}_{k'k} &= \langle k | \mathcal{S}_0^\dagger | k' \rangle \langle k' | \mathcal{S}_0 | k \rangle \\
&= (\langle k | k' \rangle - i \langle k | \mathcal{T}_0^\dagger | k' \rangle) (\langle k' | k \rangle + i \langle k' | \mathcal{T}_0 | k \rangle) \\
&= \delta(k - k') + i \langle k | \mathcal{T}_0 - \mathcal{T}_0^\dagger | k \rangle \delta(k - k') + |\langle k | \mathcal{T}_0 | k' \rangle|^2 \\
&= \delta(k - k') - \langle k | \mathcal{T}_0 \mathcal{T}_0^\dagger | k \rangle \delta(k - k') + |\langle k | \mathcal{T}_0 | k' \rangle|^2 \\
&= \delta(k - k') - \langle k | \mathcal{T}_0 \left( \int_{\mathbb{R}^3} |\tilde{k}\rangle \langle \tilde{k}| d\tilde{k} \right) \mathcal{T}_0^\dagger | k \rangle \delta(k - k') + |\langle k | \mathcal{T}_0 | k' \rangle|^2 \quad (3.39) \\
&= \delta(k - k') - \left( \int_{\mathbb{R}^3} |\langle k | \mathcal{T}_0 | \tilde{k} \rangle|^2 d\tilde{k} \right) \delta(k - k') + |\langle k | \mathcal{T}_0 | k' \rangle|^2 \\
&\equiv \delta(k - k') - \left( \int_{\mathbb{R}^3} |\mathcal{T}_{k\tilde{k}}|^2 d\tilde{k} \right) \delta(k - k') + |\mathcal{T}_{kk'}|^2.
\end{aligned}$$

Inserendo questo termine nella (3.38) si trova

$$\begin{aligned}
\langle \phi_{x'} | \phi_x \rangle &= 1 - \int_{\mathbb{R}^3} e^{\frac{i}{\hbar}(k-k') \cdot (x-x')} \delta(k - k') dk' \cdot \int_{\mathbb{R}^3} |\mathcal{T}_{k\tilde{k}}|^2 d\tilde{k} + \int_{\mathbb{R}^3} e^{\frac{i}{\hbar}(k-k') \cdot (x-x')} |\mathcal{T}_{kk'}|^2 dk' \\
&= 1 + \int_{\mathbb{R}^3} \left( e^{\frac{i}{\hbar}(k-k') \cdot (x-x')} - 1 \right) |\mathcal{T}_{kk'}|^2 dk', \quad (3.40)
\end{aligned}$$

dove abbiamo rinominato  $\tilde{k} \rightarrow k'$  nel secondo termine per raccogliarlo con il terzo.

Possiamo ora considerare un intervallo di tempo  $\Delta t \gg \Delta \tau$  rispetto al quale l'evoluzione interna del sistema rimanga trascurabile. Allora, supponendo che le particelle portino un flusso isotropo di impulsi con intensità  $I(k) = I(|k|)$ , il numero di collisioni a impulso  $k$  in  $\Delta t$  è  $dN(k) = \sigma I(k) \Delta t dk$ , con  $\sigma$  sezione del bersaglio esposta al flusso<sup>4</sup>. Supponendo che gli urti siano scorrelati (vedi poi la [nota 6](#)), la (3.32) diventa quindi

$$\begin{aligned}
\frac{\Delta \rho_S(x, x')}{\Delta t} &= \int_{\mathbb{R}^3} dN(k) \frac{\langle \phi_{x'} | \phi_x \rangle(k) - 1}{\Delta t} \rho_S(x, x') \\
&= \sigma \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} I(k) \left( e^{\frac{i}{\hbar}(k-k') \cdot (x-x')} - 1 \right) |\mathcal{T}_{kk'}|^2 dk dk' \rho_S(x, x') \quad (3.41) \\
&\equiv -F(x - x') \rho_S(x, x').
\end{aligned}$$

<sup>4</sup>Poiché non siamo interessati ai dettagli della reazione, consideriamo costante questo parametro, che dipenderebbe in generale dall'energia della particella incidente e dalla geometria. Nel modello originale da cui è tratta questa esposizione ([3]) si definisce più precisamente l'ampiezza di scattering  $f(k, k')$  tale che, considerando la conservazione dell'energia,  $\mathcal{T}_{kk'} = \frac{i}{2\pi k} f(k, k') \delta(k - k')$ . La sezione d'urto  $\sigma(k)$  si ottiene integrando  $|f(k, k')|^2$  sull'angolo solido  $d\Omega'$ . Tutte le considerazioni seguenti rimangono valide a condizione che  $\sigma(k) = \sigma(-k)$ .

La condizione di isotropia garantisce che  $F(x - x')$  sia una funzione reale, non negativa e pari<sup>5</sup>. Infatti detto  $\theta \equiv \frac{(k-k')(x-x')}{\hbar}$

- $\text{Re}\{F\} \propto 1 - \cos \theta \geq 0 \longrightarrow$  l'integrale di una funzione positiva è positivo. Dalla dipendenza da  $x - x'$  nel coseno segue la parità.
- $\text{Im}\{F\} \propto \sin \theta \longrightarrow$  il dominio di integrazione è simmetrico, i termini  $(k, k')$  e  $(-k, -k')$  hanno lo stesso peso  $I(k)|\mathcal{T}_{kk'}|^2 = I(-k)|\mathcal{T}_{-k-k'}|^2$  per isotropia e per invarianza dell'interazione sotto parità. Quindi si elidono grazie alla disparità del seno, annullando l'integrale.

Passando al limite<sup>6</sup> e includendo la dinamica interna per completezza, otteniamo la master equation

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho_S(x, x') = -\frac{i}{\hbar} [\hat{H}_S, \rho_S]_{x, x'} - F(x - x') \rho_S(x, x'). \quad (3.42)$$

Quando domina il termine di decoerenza, la soluzione per i termini off-diagonal è un damping esponenziale:

$$\rho_S(x, x', t) = e^{-F(x-x')t} \rho_S(x, x', 0). \quad (3.43)$$

Si può verificare dalla sua definizione che  $F$  ha dimensioni  $(\text{tempo})^{-1}$ . Il suo inverso  $\tau_D$  rappresenta la scala di tempo tipica del processo di decoerenza.

Distinguiamo inoltre due comportamenti descritti dalla (3.42), fissando per semplicità a  $k_0$  l'impulso delle onde incidenti:

1. Se  $k_0 \Delta x \ll 1$ , cioè se  $\lambda_0 \gg \Delta x$ , si ha  $F \propto 1 - \cos \theta \approx \theta^2 \propto (\Delta x)^2$ . Quindi  $\tau_D \propto (\Delta x)^{-2}$ , la decoerenza cresce con la delocalizzazione  $\Delta x$ .
2. Se  $k_0 \Delta x \gg 1$ , cioè se  $\lambda_0 \ll \Delta x$ , l'onda incidente risolve già la differenza di posizione, dunque un aumento di  $\Delta x$  non porta nuova informazione e la decoerenza risulta saturata. Infatti  $\cos \theta$  oscilla velocemente nell'integrale mediando a 0 (è garantito dal teorema di Riemann-Lebesgue nel limite  $\Delta x \rightarrow \pm\infty$ ). Dunque in questo limite  $F$  è al suo valore massimo e indipendente da  $\Delta x$ .

<sup>5</sup>Si noti in particolare che la parità e la realtà di  $F$  implicano banalmente  $F(x - x') = \overline{F}(x' - x)$ , e dunque anche che  $\rho_S$  rimanga autoaggiunta nel tempo.

<sup>6</sup>Stiamo qui assumendo implicitamente che la dinamica di  $\rho_S$  sia determinata istante per istante, cioè che sia *memoryless*. Questa assunzione è giustificata se il tempo di rilassamento dell'ambiente è trascurabile rispetto al tempo tra due urti consecutivi. Il limite deve essere quindi effettuato tenendo conto della condizione  $\tau_E \ll \Delta\tau \ll \Delta t \ll \tau_S$ .

# Bibliografia

- [1] W. H. Zurek, *Decoherence, Einselection, and the Quantum Origins of the Classical*, Reviews of Modern Physics (2003)
- [2] H. P. Breuer, F. Petruccione, *The Theory of Open Quantum Systems*, Oxford University Press (2002)
- [3] M. R. Gallis, G. N. Fleming, *Environmental and Spontaneous Localization* Physical Review (1990)
- [4] M. Schlosshauer, *The Quantum-to-Classical Transition and Decoherence*, Springer (2007)

## Capitolo 4

### Modelli di collasso dinamico e GRW

L'approccio dei modelli di collasso al problema della misura consiste nella proposta di una dinamica universale comune a tutti i sistemi fisici, in accordo con le predizioni della meccanica quantistica e della meccanica classica nei rispettivi regimi. Matematicamente, si tratta di modificare l'equazione di Schrödinger aggiungendo un termine che governi il collasso della funzione d'onda. Il collasso è quindi trattato come un evento fisico, indipendente da qualsiasi processo di misura inteso nel senso dell'interpretazione standard della meccanica quantistica.

La dinamica così ottenuta deve avere le seguenti caratteristiche:

1. non-linearità e non-unitarietà, per evitare sovrapposizioni macroscopiche. Ovviamente queste caratteristiche devono risultare trascurabili nel dominio microscopico.
2. stocasticità, per poter riprodurre la casualità degli esiti di singole misure, e dare origine alla regola di Born. Si può inoltre mostrare che una dinamica non-lineare deterministica ammette canali di comunicazione superluminale [1].
3. deve esistere un meccanismo di amplificazione che spieghi l'emergenza del comportamento classico.

Il programma così delineato può essere soddisfatto, e in effetti è stata formulata una varietà di modelli, che si distinguono per la base di autostati in cui avviene il collasso, per la sua origine fisica e per le caratteristiche del processo stocastico coinvolto. Esistono inoltre *second quantized models*, cioè modelli formulati nel linguaggio della QFT e adatti a trattare anche sistemi di particelle identiche.

Il modello illustrato nella sezione seguente, sul quale si sono basati modelli successivi più sofisticati, fu tra i primi pubblicati a soddisfare i punti 1., 2. e 3., e la sua formulazione matematicamente accessibile lo rende ideale per comprendere la fisica sottostante.

## 4.1 Il modello GRW

Nell'articolo originale del 1986 [2], gli autori osservano che la meccanica quantistica predice l'esistenza di sovrapposizioni tra stati macroscopici di posizione definita, e si propongono di formulare una descrizione unificata della dinamica di tutti i sistemi fisici, che risolva questo conflitto con le osservazioni. In particolare si sottolinea che, sebbene gli spread  $\Delta q$  e  $\Delta p$  di posizione e impulso attorno al valor medio rimangano trascurabili per sistemi sufficientemente massivi, esistono casi in meccanica quantistica in cui l'evoluzione porta a sovrapposizioni di pacchetti localizzati in regioni distanti dello spazio.

Per caratterizzare il modello secondo i criteri menzionati sopra, anticipiamo che il collasso agisce come una misura approssimativa nella base della posizione, e che è detto "spontaneo" in quanto non ci si preoccupa della sua origine fisica, ma semplicemente se ne postula l'esistenza. Sono inoltre introdotte due nuove costanti fondamentali, una lunghezza  $r_C$  e una frequenza  $\lambda$ , che è possibile calibrare per ottenere predizioni in accordo con le osservazioni nel regime quantistico e in quello classico.

### 4.1.1 Dinamica macroscopica

La prima parte dell'articolo è dedicata allo studio della dinamica macroscopica, che sarà successivamente derivata da quella microscopica che viene postulata.

#### Problema delle traiettorie

Nella sezione II, la prima dopo l'introduzione, si mostra come le traiettorie in meccanica classica possano essere definite tramite un processo selettivo: per assegnare una probabilità a una singola traiettoria  $\{q(t), p(t)\}$  nello spazio delle fasi, si lascia evolvere la densità di stati secondo l'equazione di Liouville e si selezionano, tramite un sampling poissoniano nel tempo con frequenza  $\lambda \rightarrow \infty$ , solo gli stati che sono pescati entro un intorno tubolare della traiettoria (fissato da una scelta arbitraria di  $\Delta q$  e  $\Delta p$ , eventualmente  $\Delta q, \Delta p \rightarrow 0$ ). L'integrale sullo spazio delle fasi della densità di stati risultante da questo processo di selezione dà la probabilità che la traiettoria sia seguita entro l'errore stabilito.

Questo approccio naturale al problema della definizione delle traiettorie evidentemente non funziona nel caso quantistico, perché il processo di selezione è una misura, e modifica quindi la dinamica futura del sistema. Questo argomento è presentato come giustificazione della scelta di un operatore di localizzazione sul sistema che agisca come una misura non selettiva. Matematicamente, questa scelta si riflette nel fatto che l'operatore statistico viene localizzato in tutti i punti dello spazio, con il relativo peso, e non solo su un sottoinsieme misurabile qualsiasi. Equivalentemente, non c'è perdita di probabilità per effetto della selezione, e la traccia si conserva.

## Equazione del moto

Nella sezione III, si propone la dinamica per una particella macroscopica:

$$\frac{d}{dt}\rho(t) = -\frac{i}{\hbar}[\hat{H}, \rho(t)] + \lambda(\mathcal{T}[\rho(t)] - \rho(t)) \quad (4.1)$$

dove nel termine aggiuntivo l'operatore<sup>1</sup>

$$\mathcal{T}[\rho] = K^2 \int_{\mathbb{R}^3} e^{-\frac{(x-\hat{q})^2}{2\sigma^2}} \rho e^{-\frac{(x-\hat{q})^2}{2\sigma^2}} dx \equiv \int_{\mathbb{R}^3} \hat{\mathcal{N}}(x) \rho \hat{\mathcal{N}}(x) dx \quad (4.2)$$

rappresenta il processo di misura non selettiva<sup>2</sup> che avviene con probabilità  $\lambda$ .

Verifichiamo che l'equazione (4.1) preservi la traccia.

Notiamo anzitutto, considerando che  $\hat{\mathcal{N}}$  agisce sulla base della posizione come una semplice moltiplicazione per scalare, che gli elementi di matrice del suo quadrato sono

$$\langle q | \hat{\mathcal{N}}^2 | q' \rangle = \int_{\mathbb{R}^3} \langle q | \hat{\mathcal{N}} | r \rangle \langle r | \hat{\mathcal{N}} | q' \rangle dr = K^2 e^{-\frac{(x-q)^2}{2\sigma^2}} \int_{\mathbb{R}^3} e^{-\frac{(x-q')^2}{2\sigma^2}} \delta(q-r) \delta(r-q') dr, \quad (4.3)$$

ovvero

$$\langle q | \hat{\mathcal{N}}^2 | q' \rangle = K^2 e^{-\frac{(x-q)^2}{\sigma^2}} \delta(q-q'). \quad (4.4)$$

Quindi integrando su  $x$  si trova l'identità

$$\langle q | \int_{\mathbb{R}^3} \hat{\mathcal{N}}^2 dx | q' \rangle = K^2 \sigma^3 \pi^{\frac{3}{2}} \delta(q-q') \quad (4.5)$$

che implica, scegliendo  $K$  tale che  $K^2 \sigma^3 \pi^{\frac{3}{2}} = 1$ , l'importante relazione di normalizzazione

$$\int_{\mathbb{R}^3} \hat{\mathcal{N}} \hat{\mathcal{N}}^\dagger dx = \hat{\mathbb{I}}. \quad (4.6)$$

Usando la ciclicità della traccia, possiamo quindi valutare

$$\text{Tr}\{\mathcal{T}[\rho]\} = \int_{\mathbb{R}^3} \text{Tr}\{\hat{\mathcal{N}}(x) \rho \hat{\mathcal{N}}(x)\} dx = \text{Tr}\left\{\int_{\mathbb{R}^3} \hat{\mathcal{N}}^2(x) dx \rho\right\} = \text{Tr}\{\rho\} \quad (4.7)$$

e quindi, prendendo la traccia della (4.1):

$$\frac{d}{dt}\text{Tr}\{\rho\} = -\frac{i}{\hbar}\text{Tr}\{[\hat{H}, \rho]\} + \lambda(\text{Tr}\{\rho\} - \text{Tr}\{\rho\}) = 0, \quad (4.8)$$

cioè la traccia dell'operatore statistico è conservata.

Mostriamo ora che  $\frac{d}{dt}\text{Tr}\{\rho^2\} < 0$ , cioè che l'evoluzione tende a far diminuire la purezza dello

<sup>1</sup>La scrittura  $x - \hat{q}$  indica l'operatore definito da  $(x - \hat{q})|q\rangle = (x - q)|q\rangle$ .

<sup>2</sup>Un processo selettivo sarebbe stato dato da  $\mathcal{T}_B[\rho] = K^2 \int_B e^{-\frac{(x-\hat{q})^2}{2\sigma^2}} \rho e^{-\frac{(x-\hat{q})^2}{2\sigma^2}} dx$ , con  $B \subset \mathbb{R}^3$ .

stato iniziale, portandolo a una miscela statistica.

Per cominciare espandiamo

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\rho^2 &= \rho \frac{d\rho}{dt} + \frac{d\rho}{dt}\rho = -\frac{i}{\hbar}(\rho[\hat{H}, \rho] + [\hat{H}, \rho]\rho) + \lambda(\rho\mathcal{T}[\rho] - \rho^2 + \mathcal{T}[\rho]\rho - \rho^2) \\ &= -\frac{i}{\hbar}(\rho[\hat{H}, \rho] + [\hat{H}, \rho]\rho) + \lambda(\rho\mathcal{T}[\rho] + \mathcal{T}[\rho]\rho - 2\rho^2),\end{aligned}\quad (4.9)$$

quindi

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\text{Tr}\{\rho^2\} &= -\frac{i}{\hbar}2\text{Tr}\{\rho[\hat{H}, \rho]\} + 2\lambda\text{Tr}\{\rho\mathcal{T}[\rho] - \rho^2\} \\ &= -\frac{i}{\hbar}2(\text{Tr}\{\rho\hat{H}\rho\} - \text{Tr}\{\rho\rho\hat{H}\}) + 2\lambda\text{Tr}\{\rho\mathcal{T}[\rho] - \rho^2\} \\ &= 2\lambda\text{Tr}\{\rho\mathcal{T}[\rho] - \rho^2\}.\end{aligned}\quad (4.10)$$

Occorre dunque valutare i due termini:

$$\text{Tr}\{\rho^2\} = \int_{\mathbb{R}^3} \langle q|\rho^2|q\rangle dq = \int_{\mathbb{R}^3} \langle q|\rho \int_{\mathbb{R}^3} |q'\rangle\langle q'|dq'\rho|q\rangle dq = \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} |\rho_{qq'}|^2 dq dq' \quad (4.11)$$

e

$$\text{Tr}\{\rho\mathcal{T}[\rho]\} = \int_{\mathbb{R}^3} \langle q|\rho \int_{\mathbb{R}^3} |q'\rangle\langle q'|dq'\mathcal{T}[\rho]|q\rangle dq = \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \rho_{qq'}\mathcal{T}[\rho]_{q'q} dq dq'. \quad (4.12)$$

Possiamo calcolare, inserendo due relazioni di completezza:

$$\begin{aligned}\mathcal{T}[\rho]_{q'q} &= \int_{\mathbb{R}^3} \langle q'|\hat{\mathcal{N}}(x)\rho\hat{\mathcal{N}}(x)|q\rangle dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \mathcal{N}_{q'\tilde{q}}(x) \rho_{\tilde{q}q^*} \mathcal{N}_{q^*q}(x) d\tilde{q} dq^* dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} \mathcal{N}_{q'q'} \rho_{q'q} \mathcal{N}_{qq} dx\end{aligned}\quad (4.13)$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo sfruttato il fatto che  $\hat{\mathcal{N}}$  è ovviamente diagonale nella base delle posizioni, cioè  $\mathcal{N}_{q'\tilde{q}} \propto \delta(q' - \tilde{q})$ . Per proseguire nel conto, esprimiamo esplicitamente gli elementi di matrice dell'operatore gaussiano, e sfruttiamo l'identità

$$(q - x)^2 + (q' - x)^2 = 2\left(x - \frac{q + q'}{2}\right)^2 + \frac{(q - q')^2}{2}, \quad (4.14)$$

facilmente verificabile espandendo i quadrati. Otteniamo così

$$\begin{aligned}\mathcal{T}[\rho]_{q'q} &= \rho_{q'q} \cdot K^2 \int_{\mathbb{R}^3} e^{-\frac{(q'-x)^2 + (q-x)^2}{2\sigma^2}} dx \\ &= e^{-\frac{(q-q')^2}{4\sigma^2}} \rho_{q'q} \cdot K^2 \int_{\mathbb{R}^3} e^{-\frac{(x - \frac{q+q'}{2})^2}{\sigma^2}} dx \\ &= e^{-\frac{(q-q')^2}{4\sigma^2}} \rho_{q'q} \equiv f_{qq'} \rho_{q'q}\end{aligned}\quad (4.15)$$

con  $f_{qq'} \leq 1$  e  $f_{qq'} = 1 \iff q = q'$ . Quindi, dalla (4.11)

$$\text{Tr}\{\rho^2\} = \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} |\rho_{qq'}|^2 dq dq' > \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} f_{q'q} |\rho_{qq'}|^2 dq dq' = \text{Tr}\{\rho \mathcal{T}[\rho]\}, \quad (4.16)$$

che dimostra

$$\frac{d}{dt} \text{Tr}\{\rho^2\} < 0. \quad (4.17)$$

Il resto della sezione III, di cui qui non ci occupiamo, è dedicato alla risoluzione dell'equazione (4.1) per una particella libera.

### Confronto con la meccanica quantistica

Nella sezione IV, si mostra che continua a valere il teorema di Ehrenfest, e dunque che il termine di collasso della (4.1) non influenza i valori medi.

Al contrario, gli spread  $\Delta q$  e  $\Delta p$  risentono del termine non hamiltoniano, che accelera la loro crescita nel tempo. Comunque, nel caso di particella libera si identifica una scala di tempo  $T$  entro la quale gli spread rimangono simili a quelli previsti dall'equazione di Schrödinger, e dunque piccoli per sistemi macroscopici. Il tempo caratteristico  $T$  dipende dagli spread iniziali, dalla massa e dai parametri  $r_C$  e  $\lambda$  secondo

$$T \sim \min \left\{ \left( \frac{6m^2(\Delta q_0)^2 r_C^2}{\lambda \hbar^2} \right)^{\frac{1}{3}}, \frac{2(\Delta p_0)^2 r_C^2}{\lambda \hbar^2} \right\} \quad (4.18)$$

Senza discutere i dettagli di questa sezione, ci limitiamo a sottolineare che la compatibilità con gli spread previsti dall'equazione di Schrödinger per tempi  $t < T$  dipende dal fatto che l'azione di  $\mathcal{T}$  su  $\rho$  domina quando  $|q - q'| \gg r_C$ , mentre per  $|q - q'| \ll r_C$  risulta trascurabile.

Infine, nella sezione V si utilizza la dinamica introdotta per definire la traiettoria di un sistema macroscopico quantistico, tramite un processo selettivo analogo a quello esposto nella sezione II per il caso classico. Come è fisicamente intuitivo, questa definizione risulta possibile a condizione che l'intorno tubolare della traiettoria sia molto maggiore della scala di localizzazione  $r_C$ .

#### 4.1.2 Dinamica microscopica

La dinamica proposta è formulata in termini di un sistema di  $N$  particelle. Esse evolvono secondo l'equazione di Schrödinger

$$i\hbar \frac{d}{dt} \psi(r_1, \dots, r_N, t) = \hat{H} \psi(r_1, \dots, r_N, t), \quad (4.19)$$

ma hanno anche una probabilità  $\lambda_i$  (con  $i = 1, \dots, N$ ) per unità di tempo di collassare:

$$\mathcal{P}(\text{collasso } i \text{ in } [t, t + dt]) = \lambda_i dt. \quad (4.20)$$

La statistica discreta che governa i salti nel tempo dell' $i$ -esima particella è dunque una poissoniana<sup>3</sup> con media  $\lambda_i$ . Il processo di collasso è

$$\psi(r_1, \dots, r_N, t) \longrightarrow \frac{\mathcal{L}(x - \hat{q}_i)\psi(r_1, \dots, r_N, t)}{\|\hat{\mathcal{L}}_i(x)\psi\|}, \quad (4.21)$$

dove l'operatore di localizzazione  $\hat{\mathcal{L}}_i(x) = \mathcal{L}(x - \hat{q}_i)$  è scelto gaussiano:

$$\mathcal{L}(x) = K e^{-\frac{x^2}{2r_C^2}}. \quad (4.22)$$

La normalizzazione<sup>4</sup>:

$$\int_{\mathbb{R}^3} \hat{\mathcal{L}}(x) \hat{\mathcal{L}}^\dagger(x) dx = \int_{\mathbb{R}^3} \hat{\mathcal{L}}^2(x) dx = \hat{\mathbb{I}} \quad (4.23)$$

implica  $K = (\pi r_C^2)^{-\frac{3}{4}}$ .

Infine, il centro  $x \in \mathbb{R}^3$  del collasso è scelto secondo la PDF

$$\mathcal{P}(x) = \|\hat{\mathcal{L}}_i(x)\psi\|^2. \quad (4.24)$$

Questo modello può essere generalizzato per trattare anche gradi di libertà interni come lo spin [3], mentre è inadatto alla descrizione di sistemi di particelle indistinguibili, visto che  $\hat{\mathcal{L}}$  evidentemente non è simmetrico sotto permutazioni delle particelle.

### 4.1.3 Meccanismo di amplificazione

La dinamica universale proposta è intrinsecamente probabilistica, quindi conviene esprimerla in termini dell'operatore statistico. Nell'istante  $dt$  tra i tempi  $t$  e  $t + dt$ , essa stabilisce che:

- con probabilità  $\lambda_i dt \cdot \mathcal{P}(x) dx$  la particella  $i$ -esima viene localizzata tra  $x$  e  $x + dx$ :

$$\rho \xrightarrow{\text{collasso } i \text{ in } x} \frac{\hat{\mathcal{L}}_i(x)|\psi\rangle\langle\psi|\hat{\mathcal{L}}_i^\dagger(x)}{\|\hat{\mathcal{L}}_i(x)|\psi\rangle\|^2} \quad (4.25)$$

- con probabilità  $1 - \sum_i \lambda_i dt$  l'evoluzione è unitaria:

$$\rho \xrightarrow{\text{Schrödinger}} \mathcal{U}_{dt} |\psi\rangle\langle\psi| \mathcal{U}_{dt}^\dagger, \quad (4.26)$$

dunque considerando che  $\mathcal{U}_{dt} = e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H} dt} = \hat{\mathbb{I}} - \frac{i}{\hbar} \hat{H} dt + O(dt^2)$ , otteniamo

$$\begin{aligned} \rho(t + dt) &\stackrel{\text{Schr.}}{=} |\psi\rangle\langle\psi| - \frac{i}{\hbar} \hat{H} |\psi\rangle\langle\psi| dt + \frac{i}{\hbar} |\psi\rangle\langle\psi| \hat{H} dt + \frac{1}{\hbar^2} \hat{H} |\psi\rangle\langle\psi| \hat{H} dt^2 + O(dt^2) \\ &= \rho - \frac{i}{\hbar} [\hat{H}, \rho] dt + O(dt^2). \end{aligned} \quad (4.27)$$

<sup>3</sup>Questa scelta implica che la dinamica non dipenda dalla storia della particella, ma solo dal suo stato all'istante  $t$ , cioè che sia a perdita di memoria.

<sup>4</sup> $\hat{\mathcal{L}}$  è autoaggiunto in quanto funzione reale di un operatore autoaggiunto.

Quindi in generale

$$\begin{aligned}
\rho(t + dt) &= \sum_{i=1}^N \lambda_i dt \int_{\mathbb{R}^3} \mathcal{P}(x) \frac{\hat{\mathcal{L}}_i(x) \rho \hat{\mathcal{L}}_i^\dagger(x)}{\mathcal{P}(x)} dx + (1 - \sum_{i=1}^N \lambda_i dt) \left( \rho - \frac{i}{\hbar} [\hat{H}, \rho] dt \right) + O(dt^2) \\
&= \sum_{i=1}^N \lambda_i dt \int_{\mathbb{R}^3} \hat{\mathcal{L}}_i(x) \rho \hat{\mathcal{L}}_i^\dagger(x) dx + \rho - \frac{i}{\hbar} [\hat{H}, \rho] dt - \sum_i \lambda_i dt \rho + O(dt^2) \\
&\equiv \rho + \left( \sum_{i=1}^N \lambda_i (\mathcal{T}_i[\rho] - \rho) - \frac{i}{\hbar} [\hat{H}, \rho] \right) dt + O(dt^2),
\end{aligned} \tag{4.28}$$

avendo introdotto l'operatore gaussiano di localizzazione  $\mathcal{T}_i[\cdot]$  per la particella  $i$ -esima, dipendente dall'operatore posizione  $\hat{q}_i$  in modo analogo a quanto visto per la [dinamica macroscopica](#).

Possiamo dunque esprimere la dinamica microscopica tramite un'unica equazione:

$$\frac{d\rho}{dt} = -\frac{i}{\hbar} [\hat{H}, \rho] + \sum_{i=1}^N \lambda_i (\mathcal{T}_i[\rho] - \rho). \tag{4.29}$$

Per mostrare come questa legge per i costituenti elementari dia origine al comportamento macroscopico descritto dalla (4.1), supponiamo che l'hamiltoniana si possa separare in una parte sul centro di massa e una sulle coordinate relative<sup>5</sup>:

$$\hat{H} = \hat{H}_Q + \hat{H}_r. \tag{4.30}$$

Passiamo quindi alle coordinate:

$$(\hat{q}_1, \dots, \hat{q}_N) \longrightarrow (\hat{Q}, \hat{r}_1, \dots, \hat{r}_{N-1}) \tag{4.31}$$

definite - a meno della determinazione esatta di tutti gli  $N(N-1)$  coefficienti  $c_{ij}$  - da

$$\hat{q}_i = \hat{Q} + \sum_{j \neq i} c_{ij} \hat{r}_j \quad \forall i, \tag{4.32}$$

tali che l'operatore di collasso si scrive:

$$\mathcal{T}_i[\rho] = |K|^2 \int_{\mathbb{R}^3} e^{-\frac{(\hat{Q} + \sum_j c_{ij} \hat{r}_j - x)^2}{2r_C^2}} \rho e^{-\frac{(\hat{Q} + \sum_j c_{ij} \hat{r}_j - x)^2}{2r_C^2}} dx. \tag{4.33}$$

<sup>5</sup>Ciò è sempre possibile se il potenziale non dipende dalle coordinate assolute  $q_i$ .

Poiché lo stato del centro di massa è descritto da  $\rho_Q \equiv \text{Tr}^{(r)}\{\rho\}$ , siamo interessati a calcolare

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_Q[\rho_Q] &\equiv \text{Tr}^{(r)}\{\mathcal{T}_i[\rho]\} \\
&= |K|^2 \int_{\mathbb{R}^{3(N-1)}} \int_{\mathbb{R}^3} e^{-\frac{(\dot{Q} + \sum_j c_{ij} r_j - x)^2}{2r_C^2}} \langle r_1, \dots, r_{N-1} | \rho | r_1, \dots, r_{N-1} \rangle e^{-\frac{(\dot{Q} + \sum_j c_{ij} r_j - x)^2}{2r_C^2}} dx dr_1 \dots dr_{N-1} \\
&= |K|^2 \int_{\mathbb{R}^{3(N-1)}} \int_{\mathbb{R}^3} e^{-\frac{(\dot{Q} - y)^2}{2r_C^2}} \langle r_1, \dots, r_{N-1} | \rho | r_1, \dots, r_{N-1} \rangle e^{-\frac{(\dot{Q} - y)^2}{2r_C^2}} dy dr_1 \dots dr_{N-1} \\
&= |K|^2 \int_{\mathbb{R}^3} e^{-\frac{(\dot{Q} - y)^2}{2r_C^2}} \text{Tr}^{(r)}\{\rho\} e^{-\frac{(\dot{Q} - y)^2}{2r_C^2}} dy = |K|^2 \int_{\mathbb{R}^3} e^{-\frac{(\dot{Q} - x)^2}{2r_C^2}} \rho_Q e^{-\frac{(\dot{Q} - x)^2}{2r_C^2}} dx,
\end{aligned} \tag{4.34}$$

dove nel primo passaggio abbiamo usato  $f(\hat{r})|r\rangle = f(r)|r\rangle$  (per funzioni analitiche), e nel secondo abbiamo sostituito  $y = x - \sum_j c_{ij} r_j$ .

Prendendo la traccia della (4.29) sui gradi di libertà  $r$  interni si trova dunque

$$\begin{aligned}
\frac{d\rho_Q}{dt} &= -\frac{i}{\hbar} \text{Tr}^{(r)}\{[\hat{H}_Q + \hat{H}_r, \rho]\} + \sum_{i=1}^N \lambda_i (\mathcal{T}_Q[\rho_Q] - \rho_Q) \\
&= -\frac{i}{\hbar} [\hat{H}_Q, \rho_Q] + N \langle \lambda_i \rangle (\mathcal{T}_Q[\rho_Q] - \rho_Q),
\end{aligned} \tag{4.35}$$

formalmente equivalente alla (4.1) con  $\lambda = N \langle \lambda_i \rangle$ . Quest'equazione illustra chiaramente il meccanismo di amplificazione, in quanto il termine di collasso del centro di massa scala con la dimensione  $N$  dell'oggetto composto. È inoltre importante osservare che tale termine deriva dal meccanismo di collasso spontaneo, e non dall'operazione di traccia sui gradi di libertà interni, che avrebbe tenuto conto della nostra ignoranza su informazioni in linea di principio accessibili. Esso ha quindi una natura fondamentale, alla luce della quale le proprietà statistiche descritte dalla matrice densità - che sappiamo evolvere verso una miscela - vanno interpretate.

Rimarrebbe da verificare che la dinamica dei gradi di libertà interni risulti accettabile. Senza addentrarci nella dimostrazione (presente in [2]), riportiamo solo che assumendo trascurabile rispetto a  $r_C$  lo spostamento dei costituenti elementari dalla loro posizione di equilibrio<sup>6</sup>, la dinamica interna dell'oggetto composto non è influenzata dal termine non hamiltoniano.

#### 4.1.4 Scelta delle nuove costanti fondamentali

A questo punto, ci interessa fissare i valori delle nuove costanti in modo che siano riprodotti, per tempi sufficientemente lunghi, i risultati della meccanica quantistica e di quella classica nei rispettivi domini di applicazione. Un primo requisito da soddisfare è che per stati delocalizzati su distanze maggiori di  $r_C$  il tempo caratteristico di transizione a una miscela statistica  $(\lambda_{macro})^{-1} = (N\lambda)^{-1}$  sia estremamente breve. Al contempo, la localizzazione

<sup>6</sup>Quest'ipotesi è fisicamente ragionevole per un solido, scelto  $r_C \sim 10^{-5}\text{cm}$  come nel paragrafo seguente.

spontanea deve risultare trascurabile per sistemi microscopici.

Per quanto riguarda la scala di localizzazione  $r_C$ , essa deve essere maggiore delle dimensioni atomiche e degli spostamenti dalle posizioni di equilibrio nei reticoli cristallini, così che anche se si verificasse un collasso di un componente di questi sistemi, non ne altererebbe la struttura interna. Ovviamente  $r_C$  deve anche essere sufficientemente piccolo da impedire sovrapposizioni non osservate in sistemi macroscopici, e da rendere sensato il processo di definizione delle traiettorie cui abbiamo accennato.

Si sceglie

$$\lambda \sim 10^{-16} \text{ s}^{-1} \quad r_C \sim 10^{-7} \text{ m.} \quad (4.36)$$

Una singola particella, quindi, subisce il processo di localizzazione una volta ogni miliardo di anni circa, e quindi la sua dinamica è da un punto di vista pratico indistinguibile dalla meccanica quantistica standard. Invece per un oggetto composto da almeno un numero di Avogadro di particelle, la localizzazione ha un rate

$$\lambda_{macro} \sim 10^7 \text{ s}^{-1}. \quad (4.37)$$

Scelti questi valori per le nuove costanti, si verifica che gli spread in posizione e momento risultano stabili per centinaia di anni (contro le decine di miliardi predette dalla meccanica quantistica), sotto ipotesi iniziali ragionevoli ( $m \sim 1 \text{ g}$ ,  $\Delta q_0 \sim 10^{-5} \text{ cm}$ ). Inoltre, sovrapposizioni di stati localizzati in regioni più distanti di  $r_C$  sono soppresse esponenzialmente in un tempo caratteristico dell'ordine dei microsecondi. In uno scenario di misura, questo spiega perché l'interazione con lo strumento porti a un collasso della funzione d'onda, e lasci il puntatore dell'apparato in una posizione finale ben definita.

#### 4.1.5 Considerazioni

Sono opportune alcune osservazioni.

##### Riproduzione della regola di Born

Abbiamo detto che, in virtù del rate di collasso  $\lambda_{micro}$  estremamente basso, la non-linearità della nuova dinamica risulta trascurabile per sistemi di poche particelle, e quindi l'evoluzione temporale coincide con quella unitaria della meccanica quantistica. Non ci siamo soffermati invece sulla riproduzione della regola di Born per le probabilità del centro di collasso  $x$ , ma essa emerge naturalmente dalla forma della PDF (4.24) nel limite  $r_C \rightarrow 0$ . Infatti in tal caso si ha

$$\mathcal{P}(x) = \|\delta(x - r_i)\psi(r_1, \dots, r_N)\|^2 = \int_{R^{3(N-1)}} |\psi(r_1, \dots, r_{i-1}, x, r_{i+1}, \dots, r_N)|^2 \prod_{j \neq i}^N dr_j. \quad (4.38)$$

Ovviamente il limite è puramente formale essendo  $r_C$  costante, quindi la PDF veramente predetta da GRW è una versione *fuzzy* della regola di Born.

## Non-conservazione dell'energia

Un'altra importante caratteristica del modello GRW è che l'introduzione del termine non hamiltoniano viola la conservazione dell'energia. Ad esempio, nel caso di particella libera si trova

$$E(t) = E_0 + \frac{3\hbar^2\lambda}{4mr_C^2}t = E_0 + \Delta E(t), \quad (4.39)$$

dove  $E_0$  è l'energia conservata dalla parte hamiltoniana, e la differenza  $\Delta E$  cresce linearmente nel tempo. Ad esempio per  $m \sim 10^{-23}$  g:

$$\frac{\Delta E(t)}{t} \sim 10^{-25} \text{ eV s}^{-1}, \quad (4.40)$$

cioè l'energia aumenta di 1 eV ogni  $10^{18}$  anni. Inoltre, poiché il rate  $\lambda$  e la massa  $m$  scalano entrambe in proporzione alla dimensione  $N$  dell'oggetto, anche per sistemi macroscopici la non-conservazione dell'energia del centro di massa è di questo ordine di grandezza. Tenendo conto anche del contributo dei gradi di libertà interni, sostanziale per un numero di Avogadro di particelle, si può stimare per un oggetto composto

$$\frac{\Delta E(t)}{t} \sim 10^{-3} \text{ eV s}^{-1} \sim 10^{-14} \text{ erg s}^{-1}, \quad (4.41)$$

ad esempio per un gas ideale monoatomico si tratterebbe di un aumento di temperatura di  $10^{-15}$  K all'anno.

## Coerenze nei gradi di libertà interni

È il caso di menzionare anche una sottigliezza circa il ruolo dello stato del centro di massa  $\rho_Q$  nel meccanismo di amplificazione. Abbiamo infatti dimostrato che esso segue una dinamica che riproduce un comportamento classico, e in particolare che tende a una miscela statistica. Tuttavia, se i gradi di libertà interni e il centro di massa sono entangled, è possibile che la traccia sugli  $r_j$  "nasconda" delle coerenze entro  $\rho_r$ . Si consideri ad esempio lo stato

$$|\psi\rangle = |\psi_1\rangle + |\psi_2\rangle \quad |\psi_i\rangle = |\phi_i\rangle_Q \otimes |\chi_i\rangle_r, \quad (4.42)$$

in cui i  $|\phi_i\rangle$  rappresentano stati localizzati in regioni distanti dello spazio. Se  $\langle\chi_1|\chi_2\rangle = 0$ , la matrice densità ridotta  $\rho_Q$  non conterrà termini misti proporzionali a  $|\phi_i\rangle\langle\phi_j|$ , anche se lo stato totale si mantiene coerente a lunghe distanze. Chiaramente, il problema non si presenta per uno stato del tipo

$$|\psi\rangle = (|\phi_1\rangle_Q + |\phi_2\rangle_Q) \otimes |\chi\rangle_r \quad (4.43)$$

per il quale la sovrapposizione tra  $\phi_1$  e  $\phi_2$  è completamente ritenuta in  $\rho_Q$ . Ad ogni modo, anche se in generale parte della coerenza è contenuta nei gradi di libertà interni, l'equazione (4.29) assicura che eventi di decoerenza avvengano con una frequenza  $N\lambda$  sullo stato complessivo.

## Ontologia

Infine, accenniamo a un problema di natura più filosofica, circa l'ontologia<sup>7</sup> che il modello GRW implicherebbe. Una prima ontologia detta GRWm fu proposta da Ghirardi e altri collaboratori [4], e consiste in una distribuzione di massa

$$m(x, t) = \sum_{i=1}^N m_i \int_{\mathbb{R}^{3(N-1)}} |\psi(r_1, \dots, r_{i-1}, x, r_{i+1}, \dots, r_N, t)|^2 \prod_{j \neq i}^N dr_j, \quad (4.44)$$

da intendersi come la densità di materia nello spazio. In questo contesto, le  $x_i$  non rappresenterebbero le posizioni di particelle distinte, ma sarebbero semplicemente variabili utili alla descrizione del campo  $m$ . Anche se questa costruzione può risultare insoddisfacente, essa è consolidata da CSL, un modello derivato da GRW, in cui la densità di massa assume naturalmente un ruolo centrale. Quest'ontologia si pone in evidente continuità con l'idea iniziale di Schrödinger che la funzione d'onda fosse un campo continuo di materia, e nel contesto di GRW risolve il problema della dispersione della funzione d'onda nello spazio grazie alla presenza dei collassi spontanei.

Una seconda ontologia proposta da Bell [3] prende il nome di GRWf. Bell osserva che in GRW, come in meccanica quantistica standard, tutte le informazioni sono nella funzione d'onda, e quindi l'ontologia va ricercata in essa. Il vantaggio in GRW è che la funzione d'onda comprende anche i salti, che sono ben localizzati nel tempo e nello spazio, e possono pertanto essere proposti come i corrispondenti nella teoria degli enti fondamentali che costituiscono la realtà. La materia consisterebbe quindi di una moltitudine di questi eventi.

È superfluo sottolineare che le due teorie sono empiricamente del tutto equivalenti, cioè non esistono esperimenti in cui facciano predizioni distinte.

## 4.2 Cenni su modelli successivi

Il più avanzato dei modelli di collasso [1] deriva da GRW ed è noto come *continuous spontaneous localization model* (CSL). L'idea fisica alla base - ovvero la presenza di collassi spontanei - è la stessa, tuttavia in CSL i salti non sono governati da una statistica discreta, ma sono

---

<sup>7</sup>Usiamo qui questo termine per indicare "the stuff that things are made of", vale a dire l'insieme degli enti fondamentali descritti dalla teoria che vivono nello spazio-tempo. Ad esempio, per la meccanica classica si tratta dei punti materiali e delle loro traiettorie, mentre per la meccanica quantistica è decisamente più controverso. La richiesta che anche la meccanica quantistica debba avere una sua "ontologia primitiva" è argomentata in [5].

descritti da un processo stocastico continuo nel tempo. Questo consente di esprimere la dinamica in termini di un'unica equazione differenziale con incognita  $\psi(t)$ . Tale equazione si dice stocastica, in quanto la variabile  $t$  entra, oltre che in funzioni deterministiche, in un processo casuale<sup>8</sup> detto termine di rumore e responsabile dei collassi.

Ci sono diverse ragioni per cui questa descrizione è fisicamente preferibile: anzitutto, l'accoppiamento tra il sistema fisico e il termine di rumore avviene tramite l'operatore densità di massa  $\hat{M}(x) = \sum_j m_j \hat{N}_j(x)$ , con  $\hat{N}_j$  densità numerica di particelle della specie  $j$  in  $x$ . A differenza di  $\hat{\mathcal{L}}$ , quindi,  $\hat{M}$  dipende da una somma su tutte le particelle, ed è pertanto simmetrico sotto loro permutazioni. Questo rende naturale la generalizzazione per trattare sistemi di particelle indistinguibili, mentre rimane aperto [1] il problema di una formulazione relativistica di CSL o di altri modelli *second quantized*.

Inoltre, per quanto anche in CSL il collasso sia spontaneo, la presenza di un termine di rumore continuo dipendente anche dalla posizione suggerisce l'esistenza di un nuovo campo fondamentale, stocastico e presente in tutto l'universo. Questa interpretazione si presta a domande ancora più fondamentali, sull'origine fisica di questo campo. Possiamo riferirci con il termine *underlying theories* a teorie che tentino di affrontare tale questione. Tra queste, citiamo l'ipotesi sviluppata da Karolyhazy, Diósi e Penrose, che individua la causa dei collassi nell'azione della gravità su scale microscopiche, e in particolare nell'incompatibilità tra le curvature dello spazio-tempo che sarebbero prodotte da una sovrapposizione di autostati a diverse energie.

---

<sup>8</sup>Con processo casuale si intende qui una collezione  $\{X_t\}$  di variabili casuali associate a ciascun tempo  $t$ . In pratica, si tratta di una funzione dall'intervallo dei tempi a uno spazio di variabili casuali, per cui è possibile definire nozioni di differenziabilità e integrabilità.

# Bibliografia

- [1] A. Bassi et al., *Models of Wave-function Collapse, Underlying Theories, and Experimental Tests*, Reviews of Modern Physics (2012)
- [2] G. C. Ghirardi, A. Rimini, T. Weber, *Unified Dynamics for Microscopic and Macroscopic Systems*, Physical Review (1986)
- [3] J. S. Bell, *Are there quantum jumps?* in *Speakable and Unspeakable in Quantum Mechanics*, 2nd ed., Cambridge University Press (2004)
- [4] G. C. Ghirardi, R. Grassi, F. Benatti, *Describing the Macroscopic World: Closing the Circle within the Dynamical Reduction Program*, Foundations of Physics (1994)
- [5] V. Allori et al., *On the Common Structure of Bohmian Mechanics and the Ghirardi–Rimini–Weber Theory*, British Journal for the Philosophy of Science (2007)

## Conclusioni

Il processo di decoerenza è una diretta conseguenza dei postulati della meccanica quantistica e spiega l'assenza di fenomeni di interferenza nel mondo macroscopico, senza ricorrere a modifiche della teoria che potrebbero apparire artificiali. Per questo motivo, alcuni autori [1] ritengono che essa sia sufficiente a spiegare l'emergere della fisica classica da quella quantistica, attraverso il processo di selezione ambientale, che sostituirebbe l'entanglement tra apparato e sistema con correlazioni classiche. Critici di questa visione sottolineano che lo stato descritto da una matrice densità diagonale è pur sempre uno stato di sovrapposizione, e che una sua interpretazione come una miscela statistica propria, per quanto conveniente, non è giustificata dalla teoria. Tale forma, infatti, è assunta dall'operatore statistico solo a seguito dell'operazione di traccia parziale, attraverso la quale le probabilità classiche sono inserite artificialmente per tenere conto delle correlazioni con l'ambiente. L'idea che il sistema descritto da tale miscela si trovi *in realtà* in uno solo dei pointer states trascura questo passaggio, e si basa in fin dei conti su un argomento di somiglianza con una miscela propria, in cui le probabilità classiche sono introdotte a monte nella consapevolezza che il [primo postulato](#) garantisce che il sistema si trovi in uno solo degli stati che la compongono. Questa osservazione si pone in continuità con le considerazioni circa l'incompatibilità tra evoluzione unitaria e presenza di esiti definiti fatte nell'[Introduzione](#): l'unitarietà impedisce in linea di principio, qualsiasi sia la scala del sistema, che un ramo della sovrapposizione sia soppresso, e ne garantisce l'estendersi indefinito nel tempo.

Tuttavia, la decoerenza può costituire una soluzione più soddisfacente al problema qualora non si accetti come dato dell'esperienza la definitezza degli esiti di una misura. Essa assume infatti un ruolo centrale nella già menzionata interpretazione *many-worlds* della meccanica quantistica, fornendo una base naturale per la suddivisione dei mondi: in questa interpretazione non avviene mai nessun collasso, ma semplicemente lo stato dell'osservatore si divide a sua volta in rami, correlandosi con i diversi pointer states del sistema proprio come fa l'apparato nello [schema di misura](#) di von Neumann. Si tratta di una proposta evidentemente molto economica (in effetti, non aggiunge nulla di fisico o di testabile alla teoria), ma problematica sotto altri punti di vista, primo tra tutti la riproduzione della regola di Born.

I modelli di collasso costituiscono invece una classe di soluzioni più nette al problema della misura. Essi introducono un nuovo meccanismo fisico, il collasso spontaneo, postulando una dinamica fondamentale non-lineare e non-unitaria. L'obiettivo di tali modelli è riprodurre i risultati della meccanica quantistica a livello microscopico, giustificando al contempo l'emergere della fisica classica per sistemi macroscopici.

Un punto di forza dei modelli di collasso in generale è la previsione di fenomeni apprezzabilmente distinti da quelli descritti dalla MQ, in particolare nel regime mesoscopico nel quale le non-linearità comincerebbero a farsi misurabili. Diverse proposte di esperimenti si concentrano sull'identificare la zona di transizione dalla fisica microscopica lineare a

quella macroscopica non-lineare: l'interferometria molecolare consente di spingere il limite dal basso, tentando di osservare figure di interferenza prodotte da sistemi di dimensioni sempre maggiori; se eliminando in maniera convincente ogni forma di rumore ambientale, in modo da liberarsi della decoerenza, si osservasse interferenza in sistemi dalle dimensioni sufficientemente grandi, i parametri  $r_C$  e  $\lambda$  sarebbero costretti a valori in contrasto con le richieste teoriche, falsificando la teoria. Al contempo, si cerca di valutare il limite superiore tramite il raffreddamento di oscillatori meccanici di centinaia di nanometri, cercando di osservarne uno stato di sovrapposizione. I due approcci potrebbero incontrarsi nel range delle decine di nanometri. La cosmologia e l'ottica quantistica offrono altre possibilità per la verifica dei modelli di collasso, in particolare di CSL, e per la determinazione sperimentale dei parametri del modello. Per i dettagli, si consulti la sezione dedicata in [5]. Infine, anche per i modelli di collasso rimangono irrisolti alcuni problemi teorici, primo tra i quali la conciliazione con la relatività ristretta, per via della natura non-locale dei collassi.