

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

Dipartimento di Fisica e Astronomia “Augusto Righi”
Corso di Laurea in Fisica

Teoria di gauge dell'elettromagnetismo e delle interazioni nucleari

Relatore:
Prof. Fiorenzo Bastianelli

Presentata da:
Daniele di Bari

Anno Accademico 2025/2026

Sommario

Le quattro interazioni fondamentali note possono essere studiate come teorie di gauge. Tale approccio consiste nell'imporre che la lagrangiana della teoria sia invariante sotto una data trasformazione locale, con conseguente introduzione dei campi mediatori per l'interazione. Questa tesi si propone di ricavare attraverso questo metodo la lagrangiana dell'interazione elettromagnetica, dell'interazione nucleare forte e dell'interazione nucleare debole. Si mostrerà in particolare come l'elettromagnetismo possa essere trattato come una teoria di gauge abeliana e si estenderà questa trattazione al caso non abeliano, il che permetterà la derivazione della lagrangiana dell'interazione nucleare forte. Infine si mostrerà la necessità di considerare l'interazione elettromagnetica e quella debole come aspetti diversi della stessa interazione e, a seguito dell'introduzione del meccanismo di Higgs, si ricaverà una lagrangiana dell'interazione elettrodebole che prevede lo spettro di massa osservato sperimentalmente.

Indice

Introduzione	3
1 Formalismo lagrangiano	5
1.1 Variazioni dei campi	5
1.2 Equazioni di Eulero-Lagrange	6
1.2.1 Lagrangiana di Klein-Gordon per un campo reale	7
1.2.2 Lagrangiana di Klein-Gordon per un campo complesso	8
1.2.3 Lagrangiana di Dirac	8
2 Nozioni di teoria dei gruppi	10
2.1 Gruppi e rappresentazioni	10
2.2 Gruppi di Lie	12
2.2.1 Gruppo $U(1)$	13
2.2.2 Gruppo $SO(3)$	14
2.2.3 Gruppo $SU(N)$	15
2.2.4 Gruppo $SO(3, 1)$	17
3 Interazione elettromagnetica	20
3.1 Simmetria di gauge in elettromagnetismo	20
3.2 Gauge invarianza in meccanica quantistica	21
3.3 Lagrangiana dell'elettromagnetismo	22
3.3.1 Lagrangiana del campo elettromagnetico	22
3.3.2 Lagrangiana dell'elettrodinamica scalare	25
4 Interazione nucleare forte	27
4.1 Teoria di Yang-Mills	27
4.2 Lagrangiana dell'interazione nucleare forte	30
5 Interazione nucleare debole	32
5.1 Elicità e chiralità	32
5.2 Rottura spontanea di simmetria e meccanismo di Higgs	34

5.3	Simmetria $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$	37
5.4	Lagrangiana dell'interazione elettrodebole	38
Conclusione		43

Introduzione

La natura è descritta dalla meccanica quantistica a piccole distanze e dalla relatività ristretta a grandi velocità, tuttavia la prima non tiene conto degli effetti relativistici e la seconda non include gli effetti quantomeccanici. La teoria quantistica dei campi nasce a seguito della necessità di conciliare queste due teorie, e offre un quadro teorico che permette di descrivere la fisica delle particelle elementari. L'idea alla base di questa teoria è che le entità fisiche fondamentali non siano le particelle, bensì i campi: ad ogni particella è associato un campo, e le particelle emergono come quanti di eccitazione del campo corrispondente attorno alla configurazione di energia minima. È bene distinguere due tipi di campo: i campi di materia e i campi di forza. I quanti di eccitazione dei primi sono le particelle che costituiscono la materia, mentre i quanti di eccitazione dei secondi sono le particelle che mediano l'interazione fondamentale di riferimento, che è dunque descritta come uno scambio di particelle e non più classicamente tramite l'azione a distanza di un campo. In particolare, le particelle a spin 0 sono descritte da campi scalari, le particelle a spin $\frac{1}{2}$ sono descritte da campi cosiddetti spinoriali, mentre le particelle a spin 1 sono descritte da campi vettoriali.

È di interesse lo studio del comportamento di tali campi a seguito di una trasformazione, eventualmente dipendente dalle coordinate, e in particolare delle possibili simmetrie associate. Il principio di gauge prevede in effetti che tramite l'imposizione di una simmetria locale sul sistema sia possibile introdurre i campi mediatori di un'interazione fondamentale.

Le teorie di gauge offrono quindi un quadro teorico che permette di ricavare ogni interazione fondamentale e le corrispondenti particelle mediatrici a partire da un semplice principio di simmetria. Tale tesi si propone di ricavare tramite questo approccio l'azione dell'interazione elettromagnetica, dell'interazione nucleare forte e dell'interazione nucleare debole. La trattazione di queste tre interazioni come teorie di gauge ha portato alla nascita del Modello Standard, l'attuale teoria delle particelle elementari. Tale modello prevede l'esistenza di dodici particelle materiali, suddivise in sei quark e sei leptoni, descritte da dodici campi quantizzati massivi a spin $\frac{1}{2}$ portatori di cariche interne che determinano l'accoppiamento con dodici campi di forza, a loro volta descritti da altrettanti campi quantizzati a spin 1, e una venticinquesima particella, descritta da un campo quantizzato massivo a spin 0. Per riprodurre correttamente il comportamento

dei quark sotto l'interazione nucleare forte, è necessario che ogni quark sia descritto da un multipletto con un indice che può assumere tre valori; nell'ambito dell'interazione debole, invece, i leptoni sono descritti da doppietti oppure da singoletti. I dettagli di questa modellizzazione saranno discussi in seguito.

Capitolo 1

Formalismo lagrangiano

L'obiettivo principale della teoria dei campi è quello di trovare le equazioni del moto per i campi che sono oggetto di studio. Per fare ciò si utilizza il formalismo lagrangiano, che è introdotto in questo capitolo.

1.1 Variazioni dei campi

Supponendo di avere un campo ϕ reale o complesso definito sullo spazio-tempo di Minkowski, si vuole studiare come questo varia a seguito di un cambio delle coordinate. A una variazione infinitesima delle coordinate corrisponderà una variazione del campo:

$$x \rightarrow x' = x + \delta x \implies \phi(x) \rightarrow \phi'(x') = \phi'(x + \delta x).$$

Esplicitiamo tale variazione usando uno sviluppo in serie di Taylor:

$$\phi'(x + \delta x) = \phi'(x) + \delta x^\alpha \partial_\alpha \phi(x),$$

per cui conviene definire la variazione totale della funzione come

$$\delta\phi(x) = \phi'(x) + \delta x^\alpha \partial_\alpha \phi(x) - \phi(x) \equiv \delta_0\phi + \delta x^\alpha \partial_\alpha \phi(x).$$

Nel caso in cui la trasformazione delle coordinate sia una traslazione, il campo non varia e dunque si comporta come uno scalare. Infatti per definizione un campo vettoriale A^α si trasforma secondo:

$$A'^\alpha(x') = \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\beta} A^\beta(x), \quad (1.1)$$

e se si considera una trasformazione delle coordinate del tipo

$$x^\alpha \rightarrow x'^\alpha = x^\alpha + a^\alpha$$

è evidente dalla (1.1) che la variazione totale di A^α è nulla.

1.2 Equazioni di Eulero-Lagrange

Le equazioni del moto per i campi possono essere ricavate a partire dal funzionale dell'azione, definito come

$$S = \int_{\Omega} dx^0 L = \int_{\Omega} d^4x \mathcal{L},$$

ove $\mathcal{L}$ è detta densità di lagrangiana o, per semplicità, lagrangiana e Ω è un volume quadridimensionale finito o infinito. È necessario che le equazioni del moto siano covarianti per trasformazioni di Poincaré, ovvero composizioni di trasformazioni di Lorentz e traslazioni, e che l'azione S sia un numero reale; affinché ciò valga, si impongono le seguenti condizioni:

- la lagrangiana $\mathcal{L}$ può dipendere dalle coordinate solo attraverso i campi e le loro derivate prime. Visto che qualsiasi campo si comporta come uno scalare sotto traslazioni, ciò garantisce l'invarianza di S sotto tali trasformazioni;
- S deve essere un invariante di Lorentz. Essendo la misura d^4x già uno scalare, si conclude che tale condizione è equivalente a imporre che $\mathcal{L}$ sia uno scalare;
- $\mathcal{L}$ deve essere un numero reale a meno di quadridivergenze additive.

Ora è possibile ricavare le equazioni del moto per ϕ .

Il principio di azione stazionaria stabilisce che la configurazione del campo è quella che estremizza l'integrale

$$S = \int_{\Omega} d^4x \mathcal{L}(\phi, \partial_{\alpha}\phi).$$

Consideriamo una variazione funzionale infinitesima di ϕ :

$$\phi(x) \rightarrow \phi(x) + \delta_0\phi(x),$$

con la condizione

$$\delta_0\phi(x) = 0 \quad \text{su } \partial\Omega. \quad (1.2)$$

Estremizziamo dunque il funzionale S imponendo

$$\delta_0 S = \int_{\Omega} d^4x \delta_0 \mathcal{L}(\phi, \partial_{\alpha}\phi) = \int_{\Omega} d^4x \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta_0\phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_{\alpha}\phi)} \delta_0(\partial_{\alpha}\phi) \right) = 0. \quad (1.3)$$

Il secondo termine dell'integrale può essere riscritto considerando che gli operatori δ_0 e ∂_{α} commutano e usando la regola di Leibniz:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_{\alpha}\phi)} (\partial_{\alpha} \delta_0\phi) = \partial_{\alpha} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_{\alpha}\phi)} \delta_0\phi \right) - \partial_{\alpha} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_{\alpha}\phi)} \delta_0\phi. \quad (1.4)$$

Sostituendo la (1.4) nella (1.3):

$$\delta_0 S = \int_{\Omega} d^4x \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_{\alpha} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\alpha} \phi)} \right) \delta_0 \phi + \int_{\partial \Omega} d\sigma_{\alpha} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\alpha} \phi)} \delta_0 \phi,$$

dove per l'ultimo termine si è usato il teorema di Gauss per rendere l'integrale di volume un integrale di superficie. Dalla (1.2) segue che questo termine è nullo e dunque la variazione del funzionale diventa

$$\delta_0 S = \int_{\Omega} d^4x \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_{\alpha} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\alpha} \phi)} \right) \delta_0 \phi.$$

È possibile mostrare che perché tale integrale sia nullo per ogni valore di $\delta_0 \phi$ devono valere le equazioni di Eulero-Lagrange:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = \partial_{\alpha} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\alpha} \phi)}, \quad (1.5)$$

ovvero le equazioni del moto per il campo ϕ .

È allora evidente come le informazioni riguardanti la dinamica di un campo siano interamente contenute all'interno della sua lagrangiana. Presentiamo dunque alcuni esempi di lagrangiane ed equazioni del moto corrispondenti.

1.2.1 Lagrangiana di Klein-Gordon per un campo reale

Dato ϕ campo scalare reale, la lagrangiana di Klein-Gordon ha la seguente forma:

$$\mathcal{L}_{KG} = \partial_{\alpha} \phi \partial^{\alpha} \phi - \mu^2 \phi^2,$$

dove $\mu = \frac{mc}{\hbar}$ e si è utilizzata una metrica di Lorentz della forma $\eta^{\alpha\beta} = \text{diag}(+1, -1, -1, -1)$. Questa lagrangiana è utilizzata per la descrizione di particelle a spin 0. Risolvendo le equazioni di Eulero-Lagrange si ottiene la seguente equazione:

$$(\square + \mu^2)\phi = 0, \quad (1.6)$$

che è detta equazione di Klein-Gordon. Andando a sostituire in (1.6) una soluzione del tipo di un'onda piana $\phi \propto e^{-ik_{\beta}x^{\beta}}$, dove $k^{\beta} = (\frac{\omega}{c}, \vec{k})$, si ottiene:

$$-k_{\beta}k^{\beta} + \mu^2 = 0 \iff -\frac{\omega^2}{c^2} + |\vec{k}|^2 + \mu^2 = 0. \quad (1.7)$$

Se poi nella (1.7) si sostituiscono le relazioni di Planck-Einstein:

$$E = \hbar\omega,$$

$$\vec{p} = \hbar \vec{k},$$

si ottiene la seguente equazione:

$$\frac{E^2}{c^2} = |\vec{p}|^2 + m^2 c^2,$$

che è la relazione energia-impulso per una particella libera. Dunque la lagrangiana di Klein-Gordon per un campo scalare reale descrive una particella libera a spin 0.

1.2.2 Lagrangiana di Klein-Gordon per un campo complesso

Consideriamo ora un campo scalare ϕ complesso. La lagrangiana di Klein-Gordon assume in questo caso la forma

$$\mathcal{L}_{KG} = \partial_\alpha \phi^* \partial^\alpha \phi - \mu^2 \phi^* \phi \quad (1.8)$$

che notiamo essere un numero reale. Considerando i campi ϕ e ϕ^* indipendenti, si ottiene un'equazione del moto per ogni campo:

$$(\square + \mu^2)\phi = 0,$$

$$(\square + \mu^2)\phi^* = 0.$$

Introducendo le opportune interazioni, sarà possibile mostrare che i campi ϕ e ϕ^* corrispondono a particelle a spin 0 con carica opposta.

1.2.3 Lagrangiana di Dirac

Consideriamo un campo $\psi \in \mathbb{C}^2$, esprimibile come

$$\psi = \begin{pmatrix} \phi_R \\ \phi_L \end{pmatrix}, \quad \psi^\dagger = (\phi_R^*, \phi_L^*).$$

ψ è detto campo di Dirac. Si definiscono ora le matrici γ tramite la seguente algebra:

$$\{\gamma^\alpha, \gamma^\beta\} \equiv \gamma^\alpha \gamma^\beta + \gamma^\beta \gamma^\alpha = 2\eta^{\alpha\beta} \mathbb{1}.$$

Una rappresentazione di tale algebra è data dalle quattro matrici 4×4

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix},$$

dove σ^i indica la matrice di Pauli i -esima

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Per scrivere lagrangiana del campo è necessario introdurre l'operazione di aggiunta di Dirac:

$$\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0,$$

tale per cui la quantità $\bar{\psi}\psi$ è uno scalare di Lorentz. La lagrangiana di ψ è

$$\mathcal{L}_D = -i\bar{\psi}\gamma^\alpha\partial_\alpha\psi - m\bar{\psi}\psi,$$

dove m è la massa della particella associata al campo.

Risolvendo le equazioni di Eulero-Lagrange per il campo ψ si ottiene l'equazione di Dirac

$$(i\gamma^\alpha\partial_\alpha + m)\psi = 0, \tag{1.9}$$

che descrive le particelle massive di spin $\frac{1}{2}$.

Capitolo 2

Nozioni di teoria dei gruppi

Come si vedrà successivamente, la dinamica delle interazioni fondamentali può essere derivata imponendo una particolare simmetria sulla lagrangiana libera. Per comprendere meglio la natura di tale simmetria è necessario introdurre alcuni concetti di teoria dei gruppi.

2.1 Gruppi e rappresentazioni

Struttura di gruppo

Un gruppo G è un insieme dotato di un'operazione interna, indicata con $\cdot$, tale che valgono le seguenti proprietà:

- Chiusura: $\forall g_1, g_2 \in G \quad g_1 \cdot g_2 \in G$.
- Associatività: $\forall g_1, g_2, g_3 \in G \quad (g_1 \cdot g_2) \cdot g_3 = g_1 \cdot (g_2 \cdot g_3)$.
- Esistenza dell'elemento neutro: $\exists g_0 \in G \mid \forall g \in G \quad g_0 \cdot g = g \cdot g_0 = g$. g_0 è detto elemento neutro o identità.
- Esistenza dell'elemento inverso: $\forall g \in G \quad \exists g^{-1} \in G \mid g^{-1} \cdot g = g \cdot g^{-1} = g_0$. g^{-1} è detto inverso di g .

Un gruppo G può godere anche della seguente proprietà:

- Commutatività: $\forall g_1, g_2 \in G \quad g_1 \cdot g_2 = g_2 \cdot g_1$,

nel qual caso prende il nome di commutativo o abeliano.

Un omomorfismo tra due gruppi G e G' è un'applicazione $\varphi : G \rightarrow G'$ che preserva l'operazione del gruppo, ovvero:

$$\forall g_1, g_2 \in G \quad \varphi(g_1 \cdot g_2) = \varphi(g_1) \cdot \varphi(g_2).$$

Rappresentazioni di un gruppo

Una rappresentazione di un gruppo G in uno spazio vettoriale V è un omomorfismo $D : G \rightarrow GL(V)$, dove $GL(V)$ è il gruppo delle trasformazioni lineari invertibili in V . Dunque $D(g)$ è un operatore lineare in V e gode delle seguenti proprietà:

- $D(g_1 \cdot g_2) = D(g_1) \cdot D(g_2)$,
- $D(g_0) = \mathbb{1}$,
- $D(g^{-1}) = [D(g)]^{-1}$,

dove le ultime due proprietà seguono dalla prima. La dimensione di V è detta dimensione della rappresentazione. Talvolta un gruppo è definito utilizzando direttamente una sua rappresentazione, che è quindi detta rappresentazione definente o fondamentale.

Due rappresentazioni $D(g)$ e $\tilde{D}(g)$ si dicono equivalenti se esiste una matrice A tale per cui

$$\tilde{D}(g) = AD(g)A^{-1} \quad \forall g \in G,$$

cioè $D(g)$ e $\tilde{D}(g)$ sono legati da una relazione di similitudine. In questo modo possiamo considerare rappresentazioni equivalenti come la stessa rappresentazione, poiché una trasformazione di similitudine corrisponde semplicemente a un cambio di base nello spazio vettoriale della rappresentazione, e dunque le due rappresentazioni equivalenti identificano lo stesso operatore espresso in basi diverse.

Una rappresentazione riducibile è una rappresentazione equivalente a una rappresentazione diagonale a blocchi; ad esempio $D(g)$ è riducibile se esiste una matrice A tale per cui

$$\tilde{D}(g) = AD(g)A^{-1} = \begin{pmatrix} D_1(g) & 0 & 0 \\ 0 & D_2(g) & 0 \\ 0 & 0 & D_3(g) \end{pmatrix} \quad \forall g \in G$$

e in questo caso si dice che $D(g)$ è riducibile alle rappresentazioni $D_1(g)$, $D_2(g)$, $D_3(g)$. Lo spazio vettoriale V su cui agisce la rappresentazione $D(g)$ è decomposto come somma diretta degli spazi vettoriali su cui agiscono $D_1(g)$, $D_2(g)$ e $D_3(g)$, indicati rispettivamente con V_1 , V_2 , V_3 :

$$V = V_1 \oplus V_2 \oplus V_3.$$

È possibile ottenere altre rappresentazioni tramite il prodotto tensoriale delle rappresentazioni appena descritte.

Trasformazioni di vettori

Consideriamo un gruppo G e una sua rappresentazione n -dimensionale $D(g)$. Dato un vettore v^a (dove $a = 1, \dots, n$ indicizza le componenti del vettore) appartenente allo spazio vettoriale su cui agisce la rappresentazione, possiamo definire la seguente legge di

trasformazione delle sue componenti:

$$v^a \rightarrow v'^a = [D(g)]^a_b v^b.$$

Un vettore che si trasforma in questo modo è detto controvariante e per convenzione ha gli indici in alto.

A partire dalla rappresentazione $D(g)$ se ne possono costruire altre tre, la complesso coniugata $D(g)^*$, l'inversa trasposta $D(g)^{-1\ T}$ e l'inversa hermitiana $D(g)^{-1\ \dagger}$. Le leggi di trasformazione per tali rappresentazioni assumono la forma

$$\begin{aligned} v^{\dot{a}} &\rightarrow v'^{\dot{a}} = [D(g)^*]^{\dot{a}}_{\dot{b}} v^{\dot{b}}, \\ v_a &\rightarrow v'_a = [D(g)^{-1\ T}]^b_a v_b, \\ v_{\dot{a}} &\rightarrow v'_{\dot{a}} = [D(g)^{-1\ \dagger}]^{\dot{b}}_{\dot{a}} v_{\dot{b}}, \end{aligned}$$

dove i vettori che si trasformano secondo ciascuna delle leggi hanno per convenzione, rispettivamente, gli indici puntati in alto, gli indici in basso e gli indici puntati in basso. È possibile che alcune di queste rappresentazioni siano equivalenti; per esempio per le rappresentazioni reali vale $D(g) = D(g)^*$ e dunque vale l'equivalenza $v^a \sim v^{\dot{a}}$, o per quelle unitarie vale $D(g)^{-1} = D(g)^{\dagger}$ e vale $v^a \sim v_{\dot{a}}$.

2.2 Gruppi di Lie

Un gruppo di Lie è un gruppo di trasformazioni che dipende in modo continuo da alcuni parametri. Studiando le trasformazioni infinitesime del gruppo, ovvero quelle che differiscono di poco dall'identità, si ottiene quella che è chiamata algebra di Lie del gruppo. Dato un gruppo di Lie G dipendente dai parametri α_i e data una sua rappresentazione continua $D(g)$, indichiamo con $D(\alpha)$ l'operatore lineare che corrisponde all'elemento $g(\alpha)$, dove $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$; possiamo definire i generatori del gruppo come gli operatori:

$$T^a = \frac{1}{i} \frac{\partial D(\alpha)}{\partial \alpha^a} \Big|_{\alpha=0}. \quad (2.1)$$

L'elemento $g(\alpha)$ del gruppo di Lie si può parametrizzare usando i generatori nel seguente modo:

$$g(\alpha) = e^{i\alpha_a T^a}, \quad a = 1, \dots, \dim G, \quad (2.2)$$

dove $\dim G$ è per definizione il numero di parametri necessari per caratterizzare la trasformazione.

Le trasformazioni infinitesime assumono allora la forma:

$$g(\alpha) = 1 + i\alpha_a T^a + \dots, \quad (2.3)$$

dove è stato usato uno sviluppo di Taylor al primo ordine per la funzione esponenziale. 1 indica l'elemento identità del gruppo. Dai generatori si ottiene l'algebra di Lie del gruppo:

$$[T^a, T^b] = if^ab_c T^c, \quad (2.4)$$

dove le costanti f^ab_c sono dette costanti di struttura e non dipendono dalla rappresentazione del gruppo.

Vale inoltre

$$\text{tr}(T^a T^b) = \frac{1}{2} \gamma^{ab}, \quad (2.5)$$

dove γ^{ab} definisce la cosiddetta metrica di Killing.

Nel seguito sono presentati degli esempi applicativi di questa teoria.

2.2.1 Gruppo $U(1)$

La rappresentazione definente del gruppo $U(1)$ è

$$U(1) = \{e^{i\alpha} \mid \alpha \in \mathbb{R}\},$$

che è quindi la rappresentazione di un cambio di fase e dipende solo dal parametro α . Lo spazio vettoriale della rappresentazione definente è unidimensionale e complesso e la legge di trasformazione per un vettore v appartenente a tale spazio è

$$v \rightarrow v' = e^{i\alpha} v,$$

per cui le matrici della rappresentazione sono matrici 1×1 complesse, ovvero numeri complessi. È possibile costruire un oggetto che si trasformi come un prodotto tensoriale di q vettori v , dove q è un numero intero; la legge di trasformazione è

$$v_{(q)} \rightarrow v'_{(q)} = e^{iq\alpha} v_{(q)}. \quad (2.6)$$

Gli oggetti che si trasformano secondo la (2.6) sono i vettori nello spazio su cui agiscono le rappresentazioni di carica q di $U(1)$.

La trasformazione infinitesima dell'elemento della rappresentazione definente di $U(1)$ è

$$e^{i\alpha} = 1 + i\alpha + \dots,$$

dunque il generatore della trasformazione è $T = 1$, e l'algebra di Lie di $U(1)$ assume la forma

$$[T, T] = 0,$$

per cui $U(1)$ è un gruppo abeliano.

2.2.2 Gruppo $SO(3)$

Il gruppo $SO(3)$ è il gruppo delle rotazioni tridimensionali. Una generica rotazione agente su un vettore $\vec{x} = (x, y, z)$ in $\mathbb{R}^3$ può essere scritta in questo modo:

$$\vec{x}' = R\vec{x},$$

dove R è la matrice di rotazione. Le rotazioni hanno la proprietà di lasciare invariato il modulo del vettore, ovvero

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = x^2 + y^2 + z^2,$$

che in forma vettoriale è

$$\vec{x}^T R^T R \vec{x} = \vec{x}^T \vec{x} \implies R^T R = \mathbb{1}. \quad (2.7)$$

La relazione (2.7) definisce la proprietà di ortogonalità della matrice R . Calcolandone il determinante ad entrambi i membri si ottiene

$$(\det R)^2 = 1 \implies \det R = \pm 1.$$

La rappresentazione definente del gruppo $SO(3)$ è quella delle matrici 3×3 ortogonali con determinante uguale a 1.

Date le matrici di rotazione attorno a ciascuno dei tre assi cartesiani si possono calcolare i corrispondenti generatori usando la (2.1):

$$R_x(\phi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\phi) & \sin(\phi) \\ 0 & -\sin(\phi) & \cos(\phi) \end{pmatrix} \implies T^1 = \frac{1}{i} \frac{dR_x(\phi)}{d\phi} \Big|_{\phi=0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.8)$$

$$R_y(\psi) = \begin{pmatrix} \cos(\psi) & 0 & -\sin(\psi) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(\psi) & 0 & \cos(\psi) \end{pmatrix} \implies T^2 = \frac{1}{i} \frac{dR_y(\psi)}{d\psi} \Big|_{\psi=0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.9)$$

$$R_z(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \implies T^3 = \frac{1}{i} \frac{dR_z(\theta)}{d\theta} \Big|_{\theta=0} = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.10)$$

La corrispondente algebra di Lie è

$$[T^a, T^b] = i\epsilon^{abc}T^c,$$

dove ϵ^{abc} è il tensore di Levi-Civita.

Consideriamo ora una rotazione infinitesima di un angolo $\delta\theta$ attorno all'asse z:

$$R_z(\delta\theta) = \mathbb{1} + iT^3\delta\theta.$$

Una rotazione attorno all'asse z di un angolo θ può essere pensata come una successione di N rotazioni di angolo $\delta\theta$ attorno allo stesso asse, con $N \rightarrow \infty$, di modo che $(\delta\theta)^N = \theta$. Dunque

$$R_z(\theta) = (\mathbb{1} + iT^3\delta\theta)^N = (\mathbb{1} + iT^3\frac{\theta}{N})^N = e^{iT^3\theta},$$

dove nell'ultima uguaglianza si è usata la definizione del numero di Nepero. Questa relazione può essere generalizzata per una rotazione attorno a un generico asse:

$$R_n(\theta) = e^{i\vec{T}\cdot\vec{\theta}},$$

dove $\vec{n}$ è il versore che identifica l'asse di rotazione, $\vec{T} = (T^1, T^2, T^3)$ e $\vec{\theta} = \vec{n}\theta$.

2.2.3 Gruppo $SU(N)$

$SU(N)$ è il gruppo di matrici $N \times N$ complesse U tali che $U^\dagger U = \mathbb{1}$ e $\det U = 1$. Questo gruppo mantiene invariato il prodotto scalare tra due vettori $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{C}^N$ definito come $\vec{v}^* \cdot \vec{w} = \delta_a^b v_a^* w^b$. Due rappresentazioni di questo gruppo sono quella fondamentale, corrispondente ai vettori v^a e indicata con N , e quella coniugata, corrispondente ai vettori $v^{\dot{a}} \sim v_a$ e indicata con $\bar{N}$. Possiamo studiare un'altra rappresentazione considerando il prodotto tensoriale

$$N \otimes N = \frac{N(N+1)}{2} \oplus \frac{N(N-1)}{2}.$$

La rappresentazione risulta quindi ridotta in due rappresentazioni che agiscono separatamente sulla parte simmetrica e antisimmetrica di un tensore $N \times N$. Se invece si considera il prodotto tensoriale

$$N \otimes \bar{N} = 1 \oplus (N^2 - 1),$$

le rappresentazioni derivanti dalla riduzione agiscono sulla traccia di un tensore e sulla sua parte a traccia nulla. La rappresentazione $N^2 - 1$ è detta rappresentazione aggiunta.

I generatori di questo gruppo sono matrici $N \times N$ hermitiane a traccia nulla. Consideriamo infatti l'espressione della trasformazione infinitesima (2.3) sulla componente di un vettore $\vec{v}$

$$v'_a = (\delta_a^b + iX_a^b)v_b,$$

dove X_a^b è una matrice che può essere scritta come combinazione lineare di generatori di $SU(N)$ con coefficienti reali. Si considera dunque l'espressione del prodotto scalare $\vec{v}^* \cdot \vec{w}$ a seguito di una trasformazione $SU(N)$ infinitesima:

$$v_a^* w^{a'} = [\delta_a^b - i(X_a^b)^*](\delta_c^a + iX_c^a)v_b^* w^c \simeq [\delta_a^b \delta_c^a + i\delta_a^b X_c^a - i\delta_c^a (X_a^b)^*]v_b^* w^c,$$

dove si sono trascurati i termini del secondo ordine in X . Imponendo che tale prodotto sia conservato

$$v_a^* w^a + i[X_c^b - (X_c^b)^*]v_b^* w^c = v_a^* w^a \implies X_c^b = (X_c^b)^*,$$

ovvero X_a^b è una matrice hermitiana e dunque anche i generatori di $SU(N)$ lo sono. Ora imponiamo che il determinante della matrice sia uguale a 1 e sviluppiamo i termini fino al primo ordine in X :

$$\det(\mathbb{1} + iX) = 1 + iX_1^1 + iX_2^2 + \dots + iX_N^N = 1 \implies X_a^a = 0,$$

per cui X ha traccia nulla e dunque vale la stessa proprietà per i generatori di $SU(N)$.

Per questo gruppo si scrive la (2.5) scegliendo la seguente normalizzazione:

$$\text{tr}(T^a T^b) = \frac{1}{2} \delta^{ab}. \quad (2.11)$$

Analizziamo il caso specifico del gruppo $SU(2)$. La forma generale di una matrice $U \in SU(2)$ è

$$U = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{C}.$$

Imponendo le condizioni $U^{-1} = U^\dagger$ e $\det U = 1$ si ottiene la seguente condizione:

$$|a|^2 + |b|^2 = 1,$$

che rappresenta un vincolo sui parametri a, b, c, d che definiscono la matrice, per cui U è individuata da $2^2 - 1 = 3$ parametri indipendenti e i generatori di $SU(2)$ sono 3. Gli oggetti sui quali agiscono queste matrici sono vettori complessi bidimensionali detti spinori, che possono essere scritti nel seguente modo:

$$\xi = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}, \quad \xi^\dagger = (\xi_1^*, \xi_2^*), \quad \xi_1, \xi_2 \in \mathbb{C}.$$

È possibile stabilire una corrispondenza tra le rotazioni $SO(3)$ e le trasformazioni $SU(2)$. Consideriamo infatti la matrice h 2×2 costruita nel seguente modo:

$$h = \vec{\sigma} \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} z & x - iy \\ x + iy & -z \end{pmatrix},$$

dove $\vec{x} = (x, y, z)$ e $\vec{\sigma} = (\sigma^1, \sigma^2, \sigma^3)$ e le matrici σ^i sono le matrici di Pauli, che ricordiamo essere

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

La matrice h è hermitiana e a traccia nulla. Consideriamo ora la seguente trasformazione della matrice:

$$h \rightarrow h' = U h U^\dagger.$$

È possibile verificare che la matrice risultante è ancora hermitiana e a traccia nulla. Inoltre, sfruttando il fatto che $\det U = 1$ si ha che

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = x^2 + y^2 + z^2,$$

ovvero una condizione analoga a quella delle rotazioni $SO(3)$. Si può mostrare che la corrispondenza tra i due gruppi prende la seguente forma:

$$R_n(\theta) = e^{i\vec{T} \cdot \vec{\theta}} \longleftrightarrow U(\theta) = e^{i\frac{\vec{\sigma}}{2} \cdot \vec{\theta}}.$$

Questa corrispondenza implica che i gruppi $SO(3)$ e $SU(2)$ hanno una struttura simile e dunque i loro generatori seguono le stesse relazioni di commutazione; infatti per le matrici di Pauli vale

$$\left[\frac{\sigma^a}{2}, \frac{\sigma^b}{2}\right] = i\epsilon^{abc}\frac{\sigma^c}{2}, \quad (2.12)$$

che è la stessa algebra di Lie di $SO(3)$. Dalla (2.12) segue che i generatori di $SU(2)$ assumono la forma $T^a = \frac{\sigma^a}{2}$.

2.2.4 Gruppo $SO(3, 1)$

Trattiamo ora il gruppo di Lorentz $SO(3, 1)$. Dato il quadrivettore posizione x^α , un boost lungo un asse generico ha la forma

$$x^\alpha \rightarrow x'^\alpha = \Lambda^\alpha_\beta x^\beta,$$

dove la matrice di Lorentz Λ^α_β è definita da

$$\Lambda^0_0 = \gamma, \quad \Lambda^a_0 = -\gamma\beta^a, \quad \Lambda^0_a = -\gamma\beta_a, \quad \Lambda^a_b = \delta^a_b + \frac{(\gamma - 1)}{\beta^2}\beta^a\beta_b,$$

dove $\vec{\beta} = \frac{1}{c} \frac{d\vec{x}}{dt}$ e $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$. Possiamo considerare una trasformazione di Lorentz come la composizione di una rotazione e un boost, ciascuna riferita al rispettivo asse; i generatori della parte di rotazione hanno la stessa forma delle (2.8), (2.9), (2.10) fatta eccezione per una riga e una colonna di zeri:

$$J^1 = -i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad J^2 = -i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$J^3 = -i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Per quanto riguarda invece la parte di boost, consideriamo la forma della matrice Λ^α_β per un boost lungo l'asse x

$$\Lambda^\alpha_\beta \equiv B_x = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.13)$$

Per definizione vale $\gamma^2 - \gamma^2\beta^2 = 1$ e dunque è possibile usare la parametrizzazione

$$\begin{aligned} \gamma &= \cosh(\phi), \\ \gamma\beta &= \sinh(\phi), \end{aligned}$$

dove il parametro ϕ è detto rapidità. Si può allora riscrivere la (2.13) come

$$B_x = \begin{pmatrix} \cosh(\phi) & \sinh(\phi) & 0 & 0 \\ \sinh(\phi) & \cosh(\phi) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Avendo riscritto la matrice del boost in funzione del parametro continuo ϕ è possibile definire i generatori per un boost lungo l'asse x:

$$K^1 = \frac{1}{i} \frac{dB_x}{d\phi} \Big|_{\phi=0} = -i \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Con un procedimento analogo per gli altri due assi si possono ricavare le espressioni dei generatori lungo i tre assi:

$$\begin{aligned} K^1 &= -i \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & K^2 &= -i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ K^3 &= -i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

L'algebra di Lie del gruppo è

$$[K^a, K^b] = -i\epsilon^{abc} J^c, \quad [J^a, K^b] = i\epsilon^{abc} K^c, \quad [J^a, J^b] = i\epsilon^{abc} J^c. \quad (2.14)$$

In maniera del tutto analoga a quanto fatto per $SO(3)$ si può trovare una rappresentazione di dimensione 2 per $SO(3, 1)$ e quindi studiare come si trasformano gli spinori sotto una trasformazione di Lorentz. Visto che il calcolo per le rotazioni è già stato fatto, rimane da trovare una rappresentazione di dimensione 2 per i boost. Le (2.14) sono rispettate da

$$K^a = \pm i \frac{\sigma^a}{2}, \quad (2.15)$$

e definendo $N^a = \frac{1}{2}(J^a + iK^a)$ si ottiene la seguente algebra:

$$[N^a, N^{b\dagger}] = 0, \quad [N^a, N^b] = i\epsilon^{abc}N^c, \quad [N^{a\dagger}, N^{b\dagger}] = i\epsilon^{abc}N^{c\dagger}.$$

per cui l'algebra di Lie di $SO(3, 1)$ è la stessa di $SU(2) \otimes SU(2)$. Dalla (2.15) si ha che gli spinori possono trasformarsi in due modi sotto trasformazioni di Lorentz e dunque si possono definire due tipi di spinori:

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{2}, 0\right) : \xi &\rightarrow \xi' = e^{(i\frac{\vec{\sigma}}{2} \cdot \vec{\theta} + \frac{\vec{\sigma}}{2} \cdot \vec{\phi})} \xi, \\ \left(0, \frac{1}{2}\right) : \eta &\rightarrow \eta' = e^{(i\frac{\vec{\sigma}}{2} \cdot \vec{\theta} - \frac{\vec{\sigma}}{2} \cdot \vec{\phi})} \eta, \end{aligned}$$

detti spinori di Weyl. Si noti che queste due rappresentazioni non sono equivalenti.

Sotto una trasformazione di parità il segno della velocità $\vec{v}$ cambia: $\vec{v} \rightarrow -\vec{v}$. Di conseguenza anche il segno dei generatori del boost cambia: $\vec{K} \rightarrow -\vec{K}$, mentre rimane invariato il segno dei generatori delle rotazioni $\vec{J}$. Segue che sotto trasformazione di parità si ha la trasformazione $(\frac{1}{2}, 0) \longleftrightarrow (0, \frac{1}{2})$ e dunque non c'è motivo di considerare gli spinori separatamente; si introducono allora i cosiddetti spinori di Dirac:

$$\psi = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \xi' \\ \eta' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{i\frac{\vec{\sigma}}{2} \cdot (\vec{\theta} - i\vec{\phi})} & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\vec{\sigma}}{2} \cdot (\vec{\theta} + i\vec{\phi})} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}. \quad (2.16)$$

Uno spinore di Dirac corrisponde esattamente al campo di Dirac definito nella sezione 1.2.3.

Capitolo 3

Interazione elettromagnetica

Trattato il formalismo matematico che sarà utilizzato, ora è possibile introdurre il concetto fondamentale di simmetria di gauge nel caso dell'elettromagnetismo, che permetterà di ricavare la lagrangiana dell'elettrodinamica scalare.

3.1 Simmetria di gauge in elettromagnetismo

Le equazioni di Maxwell in unità CGS sono:

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{x}, t) &= 4\pi\rho(\vec{x}, t), \\ \vec{\nabla} \wedge \vec{B}(\vec{x}, t) - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}(\vec{x}, t) &= \frac{4\pi}{c} \vec{j}(\vec{x}, t), \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B}(\vec{x}, t) &= 0, \\ \vec{\nabla} \wedge \vec{E}(\vec{x}, t) + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}(\vec{x}, t) &= 0,\end{aligned}$$

dove $\vec{E}$ e $\vec{B}$ sono rispettivamente il campo elettrico e il campo magnetico e ρ e $\vec{j}$ rispettivamente la densità di carica e la densità di corrente. È possibile scrivere il campo elettrico $\vec{E}$ e il campo magnetico $\vec{B}$ in funzione del potenziale scalare φ e di quello vettoriale $\vec{A}$:

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A}, \tag{3.1}$$

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}. \tag{3.2}$$

Visto che il rotore di un gradiente è identicamente nullo, il campo magnetico non varia sotto la trasformazione del potenziale vettoriale

$$\vec{A}(\vec{x}, t) \rightarrow \vec{A}'(\vec{x}, t) = \vec{A}(\vec{x}, t) + \vec{\nabla}\chi(\vec{x}, t) \tag{3.3}$$

dove χ è una funzione scalare arbitraria. Sostituendo la (3.3) nella (3.2) e imponendo che anche il campo elettrico non vari, si trovano le seguenti trasformazioni per entrambi i potenziali:

$$\vec{A}(\vec{x}, t) \rightarrow \vec{A}'(\vec{x}, t) = \vec{A}(\vec{x}, t) + \vec{\nabla}\chi(\vec{x}, t), \quad (3.4)$$

$$\varphi(\vec{x}, t) \rightarrow \varphi'(\vec{x}, t) = \varphi(\vec{x}, t) - \frac{1}{c} \frac{\partial \chi}{\partial t}(\vec{x}, t), \quad (3.5)$$

che sono dette trasformazioni di gauge.

Possiamo scrivere le trasformazioni di gauge in forma manifestamente covariante introducendo il quadripotenziale $A^\alpha = (\varphi, \vec{A})$, dunque la (3.4) e la (3.5) diventano:

$$A^\alpha(x) \rightarrow A'^\alpha(x) = A^\alpha(x) - \partial^\alpha \chi(x). \quad (3.6)$$

3.2 Gauge invarianza in meccanica quantistica

Ora vogliamo mostrare come sia possibile derivare le equazioni di Maxwell a partire da un principio di gauge. Per iniziare, consideriamo uno stato quantomeccanico descritto da una funzione d'onda ψ soluzione dell'equazione di Schrödinger con potenziale V :

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi + V\psi.$$

Gli osservabili quantistici coinvolgono prodotti interni della forma:

$$\langle O \rangle = \int d^n x \psi^* O \psi,$$

dove O è un operatore Hermitiano autoaggiunto. Questa espressione è invariante sotto un cambio di fase globale, ovvero una trasformazione $U(1)$:

$$\psi \rightarrow \psi' = e^{ie\theta} \psi,$$

dove si è introdotta la costante di accoppiamento e . Ci domandiamo ora se è possibile scegliere il parametro di fase dipendente dalla posizione, ovvero se si può formulare la meccanica quantistica in modo che sia invariante per trasformazioni di fase locali:

$$\psi \rightarrow \psi' = e^{ie\theta(x)} \psi. \quad (3.7)$$

L'equazione di Schrödinger, così come molti osservabili, contiene derivate della funzione d'onda ψ , che, sotto una trasformazione del tipo (3.7) diventano:

$$\partial_\alpha \psi \rightarrow \partial_\alpha \psi' = e^{ie\theta(x)} [\partial_\alpha \psi + ie \partial_\alpha \theta(x) \psi], \quad (3.8)$$

che però non è un semplice cambio di fase. Dunque perché la meccanica quantistica sia una teoria invariante sotto trasformazioni di fase locali è necessario introdurre un nuovo operatore differenziale D_α che si trasformi secondo:

$$D_\alpha \psi \rightarrow D'_\alpha \psi' = e^{ie\theta(x)} D_\alpha \psi. \quad (3.9)$$

La forma di questo operatore, detto derivata covariante, è la seguente:

$$D_\alpha = \partial_\alpha - ieA_\alpha(x), \quad (3.10)$$

dove si è introdotto un nuovo campo A_α . Utilizzando la (3.9) si può ricavare la legge di trasformazione del campo A_α :

$$D'_\alpha \psi' = (\partial_\alpha - ieA'_\alpha) e^{ie\theta(x)} \psi = e^{ie\theta(x)} D_\alpha \psi \implies A'_\alpha(x) = A_\alpha(x) + \partial_\alpha \theta(x),$$

ma questa è una trasformazione analoga alla trasformazione di gauge (3.6). Dunque la sola imposizione dell'invarianza della meccanica quantistica per trasformazioni $U(1)$ locali ha permesso di introdurre in maniera del tutto naturale un campo analogo al quadripotenziale elettromagnetico.

3.3 Lagrangiana dell'elettromagnetismo

L'introduzione del quadripotenziale elettromagnetico attraverso l'imposizione dell'invarianza di gauge locale mostra che la simmetria di gauge può essere utilizzata come un principio dinamico. Adesso siamo interessati ad applicare questo approccio al formalismo lagrangiano in modo da derivare una lagrangiana che descriva l'interazione tra i fotoni e le particelle massive a spin 0. Prima di fare ciò è necessario derivare la lagrangiana del campo elettromagnetico.

3.3.1 Lagrangiana del campo elettromagnetico

Il tensore elettromagnetico è definito dalle seguenti relazioni:

$$\begin{aligned} F^{\alpha\beta} &= -F^{\beta\alpha}, \\ F^{0a} &= -E_a, \\ F^{ab} &= -\epsilon^{abc} B_c, \end{aligned}$$

mentre il suo duale è

$$\tilde{F}^{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} F_{\gamma\delta}. \quad (3.11)$$

Le equazioni di Maxwell in forma covariante assumono la forma

$$\partial_\alpha F^{\alpha\beta} = \frac{4\pi}{c} J^\alpha, \quad (3.12)$$

$$\partial_\alpha \tilde{F}^{\alpha\beta} = 0, \quad (3.13)$$

dove J^α è la quadricorrente ed è definita come $J^\alpha = (c\rho, \vec{j})$. È possibile mostrare che la (3.13) ha una soluzione della forma

$$F^{\alpha\beta} = \partial^\alpha A^\beta - \partial^\beta A^\alpha. \quad (3.14)$$

Si possono costruire due quantità Lorentz-invarianti a partire dal tensore elettromagnetico e dal suo duale, che sono

$$\begin{aligned} F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} &= -2(|\vec{E}|^2 - |\vec{B}|^2), \\ \tilde{F}^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} &= -4\vec{E} \cdot \vec{B}. \end{aligned}$$

Sappiamo che la lagrangiana del campo elettromagnetico $\mathcal{L}_{EM}$ deve essere Lorentz-invariante, per cui deve necessariamente dipendere da $F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta}$ e $\tilde{F}^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta}$. Tuttavia, $\tilde{F}^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta}$ si può scrivere come una quadridivergenza, infatti sostituendo la (3.14) nella (3.11) si trova che l'espressione di $\tilde{F}^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta}$ è

$$\begin{aligned} \tilde{F}^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2} \epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} (\partial_\gamma A_\delta - \partial_\delta A_\gamma) (\partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha) = \\ &= \frac{1}{2} \epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} (\partial_\gamma A_\delta \partial_\alpha A_\beta - \partial_\gamma A_\delta \partial_\beta A_\alpha - \partial_\delta A_\gamma \partial_\alpha A_\beta + \partial_\delta A_\gamma \partial_\beta A_\alpha). \end{aligned}$$

La somma degli ultimi tre termini è uguale al primo, infatti vale

$$\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} \partial_\gamma A_\delta \partial_\beta A_\alpha = \epsilon^{\beta\alpha\gamma\delta} \partial_\gamma A_\delta \partial_\alpha A_\beta = -\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} \partial_\gamma A_\delta \partial_\alpha A_\beta,$$

dove nell'ultima uguaglianza si è usata l'antisimmetria del tensore di Levi-Civita. Con operazioni analoghe per ciascuno dei termini si ottiene la seguente uguaglianza:

$$\tilde{F}^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} = 2\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} \partial_\gamma A_\delta \partial_\alpha A_\beta$$

che si può riscrivere utilizzando la regola di Leibniz:

$$2\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} \partial_\gamma A_\delta \partial_\alpha A_\beta = 2\partial_\gamma (\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} A_\delta \partial_\alpha A_\beta) - 2\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} A_\delta \partial_\gamma \partial_\alpha A_\beta = 2\partial_\gamma (\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} A_\delta \partial_\alpha A_\beta),$$

dove nell'ultima uguaglianza si è sfruttato il fatto che il secondo termine è la contrazione di un tensore simmetrico con un tensore antisimmetrico ed è perciò nullo.

Visto che lo scalare $\tilde{F}^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta}$ si può scrivere come una quadridivergenza esso non contribuisce alle equazioni del moto, poiché una quadridivergenza integrata su un volume

quadrimensionale si annulla per la condizione (1.2), e quindi l'azione corrispondente è nulla.

Concludiamo quindi che la lagrangiana del campo elettromagnetico deve contenere solo lo scalare $F^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta}$. Nel caso non siano presenti sorgenti, la forma che essa assume è la seguente:

$$\mathcal{L}_{EM} = -\frac{1}{16\pi}F^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta} = -\frac{1}{16\pi}(\partial^\alpha A^\beta - \partial^\beta A^\alpha)(\partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha). \quad (3.15)$$

Le equazioni di Eulero-Lagrange sono

$$\partial_\gamma \frac{\partial \mathcal{L}_{EM}}{\partial(\partial_\gamma A_\delta)} - \frac{\partial \mathcal{L}_{EM}}{\partial A_\delta} = 0. \quad (3.16)$$

Il secondo termine è nullo, poiché $\mathcal{L}_{EM}$ non dipende da A_δ . Il primo termine invece è la quadridivergenza di

$$\frac{\partial \mathcal{L}_{EM}}{\partial(\partial_\gamma A_\delta)} = \frac{\partial \mathcal{L}_{EM}}{\partial F_{\alpha\beta}} \frac{\partial F_{\alpha\beta}}{\partial(\partial_\gamma A_\delta)}.$$

Esplicitiamo i due fattori:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}_{EM}}{\partial F_{\alpha\beta}} &= -\frac{\partial}{\partial F_{\alpha\beta}} \left(\frac{1}{16\pi} \eta^{\alpha\epsilon} \eta^{\beta\zeta} F_{\epsilon\zeta} F_{\alpha\beta} \right) = -\frac{1}{8\pi} F^{\alpha\beta}, \\ \frac{\partial F_{\alpha\beta}}{\partial(\partial_\gamma A_\delta)} &= \frac{\partial}{\partial(\partial_\gamma A_\delta)} (\partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha) = \delta^\alpha_\gamma \delta^\beta_\delta - \delta^\beta_\gamma \delta^\alpha_\delta, \end{aligned}$$

da cui

$$\frac{\partial \mathcal{L}_{EM}}{\partial F_{\alpha\beta}} \frac{\partial F_{\alpha\beta}}{\partial(\partial_\gamma A_\delta)} = -\frac{1}{4\pi} F^{\gamma\delta}$$

a causa dell'antisimmetria del tensore elettromagnetico. Dunque le equazioni di Eulero-Lagrange assumono la seguente forma:

$$\partial_\gamma F^{\gamma\delta} = 0,$$

che è esattamente la forma covariante delle equazioni di Maxwell non omogenee in assenza di sorgenti.

Volendo includere l'effetto delle sorgenti, si può scrivere la lagrangiana

$$\mathcal{L}_{EM} = -\frac{1}{16\pi}F^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta} - \frac{1}{c}J_\alpha A^\alpha,$$

Scrivendo le equazioni di Eulero-Lagrange si ottiene

$$\partial_\gamma F^{\gamma\delta} = \frac{4\pi}{c}J^\delta,$$

ovvero le equazioni di Maxwell non omogenee in presenza di sorgenti.

3.3.2 Lagrangiana dell'elettrodinamica scalare

Consideriamo la lagrangiana di Klein-Gordon per un campo complesso (1.8):

$$\mathcal{L}_{KG} = \partial_\alpha \phi^* \partial^\alpha \phi - \mu^2 \phi^* \phi.$$

Questa possiede una simmetria $U(1)$ globale:

$$\phi \rightarrow \phi' = e^{ie\theta} \phi.$$

Seguendo lo stesso approccio adottato in precedenza, si impone che tale simmetria sia locale, dunque che la lagrangiana non cambi sotto trasformazioni della forma

$$\phi \rightarrow \phi' = e^{ie\theta(x)} \phi.$$

In base a quanto visto, perché questa condizione sia rispettata è necessario sostituire l'operatore derivata ∂_α con la derivata covariante D_α definita in (3.10), che riscriviamo:

$$D_\alpha = \partial_\alpha - ieA_\alpha(x).$$

Dunque la lagrangiana diventa

$$\mathcal{L} = (D_\alpha \phi)^* (D^\alpha \phi) - \mu^2 \phi^* \phi.$$

Per ottenere la lagrangiana completa bisogna includere i termini cinetici per il campo A_α , ovvero la lagrangiana del campo elettromagnetico (3.15):

$$\mathcal{L} = (D_\alpha \phi)^* (D^\alpha \phi) - \mu^2 \phi^* \phi - \frac{1}{16\pi} F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta}. \quad (3.17)$$

Questa è nota come lagrangiana dell'elettrodinamica scalare.

Scrivendo esplicitamente le derivate covarianti si può riscrivere la (3.17) in questo modo:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{KG} - \frac{1}{16\pi} F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} + \mathcal{L}_{int}.$$

Il primo termine descrive la propagazione libera del campo ϕ , quindi della particella e della relativa antiparticella, il secondo termine la propagazione libera del campo A_α , ovvero dei fotoni, mentre $\mathcal{L}_{int}$ descrive l'interazione tra le particelle e il campo elettromagnetico e ha la seguente forma:

$$\mathcal{L}_{int} = ieA^\alpha (\phi^* \partial_\alpha \phi - \phi \partial_\alpha \phi^*) + e^2 A_\alpha A^\alpha \phi^* \phi.$$

È possibile schematizzare le interazioni descritte in questo modo:

$$\mathcal{L} = \partial_\alpha \phi^* \partial^\alpha \phi - \mu^2 \phi^* \phi - \frac{1}{16\pi} F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} \\ + ieA^\alpha (\phi^* \partial_\alpha \phi - \phi \partial_\alpha \phi^*) + e^2 A_\alpha A^\alpha \phi^* \phi$$

$$= \text{---}\blacktriangleright\text{---} + \text{---}\text{---} + \text{---}\text{---} + \text{---}\text{---}$$

Capitolo 4

Interazione nucleare forte

L'obiettivo di questo capitolo è applicare il principio di gauge per ricavare la lagrangiana dell'interazione nucleare forte. Per fare ciò è necessario prima generalizzare il procedimento visto nello scorso capitolo, ovvero mostrare come ricavare la lagrangiana di un'interazione per un campo con simmetria di gauge locale $SU(N)$.

4.1 Teoria di Yang-Mills

Consideriamo N campi di Dirac liberi di uguale massa m . Possiamo scriverli con la seguente notazione:

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \vdots \\ \psi_N \end{pmatrix}, \quad \psi^\dagger = (\psi_1^*, \psi_2^*, \dots, \psi_N^*).$$

La lagrangiana di Dirac per i campi è la seguente:

$$\mathcal{L}_D = -i\bar{\psi}\gamma^\alpha\partial_\alpha\psi - m\bar{\psi}\psi,$$

dove gli operatori ∂_α e γ^α sono da intendersi moltiplicati per $\mathbb{1}_{N \times N}$. Questa lagrangiana gode di simmetria globale $SU(N)$, ovvero è invariante per trasformazioni dei campi della forma

$$\psi \rightarrow \psi' = U\psi, \tag{4.1}$$

$$\psi^\dagger \rightarrow \psi'^\dagger = \psi^\dagger U^\dagger, \tag{4.2}$$

dove $U \in SU(N)$ e dunque $U^{-1} = U^\dagger$, $\det U = 1$. Ricordiamo che per il gruppo $SU(N)$ valgono le relazioni (2.4) e (2.11):

$$\begin{aligned} [T^a, T^b] &= if^{ab}_c T^c, \\ \text{tr}(T^a T^b) &= \frac{1}{2} \delta^{ab}, \end{aligned} \quad a, b, c = 1, \dots, N^2 - 1,$$

dove T^a sono i generatori di $SU(N)$. La trasformazione globale $SU(N)$ può essere scritta in termini dei generatori usando la (2.2):

$$U = e^{ig\theta_a T^a}, \quad (4.3)$$

in cui si è introdotta la costante di accoppiamento per l'interazione nucleare forte g .

In maniera analoga a quanto fatto per il caso abeliano, richiediamo ora che la simmetria $SU(N)$ sia locale e definiamo l'operatore derivata covariante:

$$D_\alpha = \partial_\alpha - igW_\alpha(x),$$

dove il campo di gauge W_α è una matrice $N \times N$ hermitiana a traccia nulla.

Dalla richiesta di covarianza

$$D_\alpha \psi \rightarrow D'_\alpha \psi' = U(x) D_\alpha \psi, \quad (4.4)$$

si ottiene la legge di trasformazione del campo:

$$W_\alpha(x) \rightarrow W'_\alpha(x) = U(x) W_\alpha(x) U^{-1}(x) + \frac{i}{g} U(x) \partial_\alpha U^{-1}(x). \quad (4.5)$$

Utilizzando la (4.3) la trasformazione di W_α diventa

$$W'_\alpha(x) = W_\alpha(x) + \partial_\alpha \theta_a(x) T^a,$$

che è analoga alla trasformazione del campo A_α (3.6).

È ora necessario introdurre un termine cinetico per W_α , dunque definiamo il campo di forza

$$F_{\alpha\beta} = \frac{i}{g} [D_\alpha, D_\beta] = \partial_\alpha W_\beta - \partial_\beta W_\alpha - ig[W_\alpha, W_\beta]. \quad (4.6)$$

Dalla (4.4) sappiamo che, sotto una trasformazione di gauge,

$$F_{\alpha\beta} \rightarrow F'_{\alpha\beta} = U(x) F_{\alpha\beta} U^{-1}(x).$$

Questo termine deve essere inserito nella lagrangiana in modo che sia soddisfatta l'invarianza di gauge e l'invarianza di Lorentz. Un termine che soddisfa questi requisiti è

$$\mathcal{L}_{kin} = -\frac{1}{2} \text{tr}(F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta}). \quad (4.7)$$

Visto che abbiamo considerato W_α hermitiano e a traccia nulla possiamo espanderlo in termini dei generatori:

$$W_\alpha(x) = W_\alpha^a(x)T^a. \quad (4.8)$$

Dopodiché usando la convenzione (2.11) della metrica di Killing per il gruppo $SU(N)$ possiamo invertire la (4.8):

$$W_\alpha^a(x) = 2\text{tr}(W_\alpha(x)T^a).$$

In maniera analoga si ha

$$F_{\alpha\beta} = F_{\alpha\beta}^a T^a, \quad (4.9)$$

$$F_{\alpha\beta}^a = 2\text{tr}(F_{\alpha\beta}T^a). \quad (4.10)$$

Sostituendo la (4.9) e la (4.8) nella (4.6) si ottiene

$$\begin{aligned} F_{\alpha\beta}^c T^c &= (\partial_\alpha W_\beta^c - \partial_\beta W_\alpha^c)T^c - igW_\alpha^a W_\beta^b [T^a, T^b] \\ &= (\partial_\alpha W_\beta^c - \partial_\beta W_\alpha^c + gf^{abc}W_\alpha^a W_\beta^b)T^c. \end{aligned}$$

dove nell'ultima uguaglianza si è usata la relazione di commutazione dei generatori (2.4). Usando poi la (4.10) e di nuovo la (2.11) si ha

$$F_{\alpha\beta}^c = \partial_\alpha W_\beta^c - \partial_\beta W_\alpha^c + gf^{abc}W_\alpha^a W_\beta^b.$$

Infine sostituendo ancora la (4.9) e la (2.11) in (4.7) otteniamo

$$\mathcal{L}_{kin} = -\frac{1}{4}F^{\alpha\beta c}F_{\alpha\beta}^c.$$

Dunque la lagrangiana totale è

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^{\alpha\beta c}F_{\alpha\beta}^c - \bar{\psi}(i\gamma^\alpha D_\alpha + m)\psi.$$

L'espressione della trasformazione di gauge $SU(N)$ locale infinitesima è

$$U(x) = \mathbb{1} + ig\theta_a(x)T^a. \quad (4.11)$$

Questa può essere usata per scrivere le trasformazioni infinitesime dei campi ψ e W_α . Infatti sostituendo la (4.11) in (4.1) si ha

$$\delta\psi(x) = ig\theta_a(x)T^a\psi(x).$$

Facendo lo stesso per la (4.5) si ottiene

$$\begin{aligned} W_\alpha' &= (\mathbb{1} + ig\theta_a(x)T^a)W_\alpha(\mathbb{1} - ig\theta_a(x)T^a) + \frac{i}{g}(\mathbb{1} + ig\theta_a(x)T^a)\partial_\alpha(\mathbb{1} - ig\theta_a(x)T^a) \\ &\simeq W_\alpha - igW_\alpha\theta_a(x)T^a + ig\theta_a(x)T^aW_\alpha + \partial_\alpha\theta_a(x)T^a, \end{aligned}$$

dove si è sviluppata l'espressione al primo ordine in θ . Utilizzando la (4.8) insieme alla relazione di commutazione dei generatori (2.4) la trasformazione infinitesima per il campo W_α diventa

$$\delta W_\alpha(x) = -gf^{abc}\theta_a(x)W_\alpha^b(x)T^c + \partial_\alpha\theta_a(x)T^a.$$

4.2 Lagrangiana dell'interazione nucleare forte

Possiamo applicare la teoria di Yang-Mills al caso della simmetria $SU(3)$, su cui è basata la descrizione dell'interazione nucleare forte. In questo caso il campo fermionico ha forma

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \end{pmatrix}, \quad \psi^\dagger = (\psi_1^*, \psi_2^*, \psi_3^*).$$

dove ogni componente del campo è uno spinore di Dirac.

Gli otto generatori di $SU(3)$ nella rappresentazione fondamentale sono definiti tramite le matrici di Gell-Mann λ^a (che generalizzano le matrici di Pauli σ^a per $SU(2)$):

$$T^a = \frac{\lambda^a}{2}, \quad a = 1, \dots, 8,$$

dove

$$\lambda^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\lambda^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda^5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\lambda^6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda^7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda^8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

La lagrangiana dell'interazione nucleare forte dunque è

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} &= -\frac{1}{4}F_{\alpha\beta}^c F^{\alpha\beta c} - \sum_{f=1}^6 \bar{\psi}_f (i\gamma^\alpha D_\alpha + m_f) \psi_f \\
&= -\frac{1}{4}F_{\alpha\beta}^c F^{\alpha\beta c} - \sum_{f=1}^6 \bar{\psi}_f (i\gamma^\alpha \partial_\alpha + m_f) \psi_f - \frac{g}{2} W_\alpha^c \sum_{f=1}^6 \bar{\psi}_f \gamma^\alpha \lambda^c \psi_f \quad (4.12) \\
&= \text{diagrammi} .
\end{aligned}$$

I campi fermionici ψ corrispondono ai quark, ciascuno dei quali può avere sei sapori: *up*, *down*, *charm*, *strange*, *top*, *bottom*. L'indice f in (4.12) indica il sapore del quark. Ogni sapore di quark trasforma nella rappresentazione fondamentale di $SU(3)$, mentre i corrispondenti antiquark trasformano nella rappresentazione coniugata. Si dice che i quark trasportano una carica di colore che è di tre tipi, per convenzione denotati rosso, verde e blu, uno per ognuno dei tre campi indipendenti da cui è caratterizzato un quark. Al campo di gauge W_α^c sono poi associate otto particelle senza massa e a spin 1 dette gluoni, che si trasformano nella rappresentazione aggiunta di $SU(3)$, di dimensione 8.

Questa lagrangiana contiene altre simmetrie oltre a quella $SU(3)$. Un esempio è la simmetria per trasformazioni $U(1)$ che ruotano tutti i campi dei quark della stessa fase; a tale simmetria è associata una carica conservata chiamata numero barionico. Ci sono poi altre simmetrie $U(1)$ che ruotano indipendentemente i campi dei quark e danno luogo alla conservazione dei rispettivi numeri fermionici (per esempio la carica di stranezza S , la carica di charm C , ecc...).

Capitolo 5

Interazione nucleare debole

L'ultima interazione qui trattata con il principio di gauge è l'interazione nucleare debole, a cui sono soggetti sia leptoni che quark. Limiteremo la trattazione ai leptoni. La fenomenologia suggerisce che, a differenza delle interazioni elettromagnetica e nucleare forte, per ricavare l'azione dell'interazione debole non è possibile introdurre semplicemente un gruppo e imporre la simmetria di gauge locale rispetto a tale gruppo, ma è necessario trattare l'interazione elettromagnetica e quella debole come un'unica interazione, nota come interazione elettrodebole. Prima di illustrare con maggior dettaglio questa teoria introduciamo dei concetti necessari a comprendere la natura dell'interazione debole.

5.1 Elicità e chiralità

In fisica classica si definisce elicità di un sistema la proiezione del suo momento angolare intrinseco $\vec{S}$ lungo la direzione della quantità di moto $\vec{p}$:

$$h = \frac{\vec{S} \cdot \vec{p}}{|\vec{p}|}.$$

Tale definizione può essere estesa naturalmente alla meccanica quantistica sostituendo le grandezze classiche con i corrispondenti operatori quantomeccanici di spin e di momento angolare. Per una particella di massa nulla la direzione della quantità di moto è "fisicamente privilegiata", nel senso che non esiste nessun sistema di riferimento in cui tale particella è ferma, e dunque la sua elicità è invariante. Ciò non vale nel caso di particelle massive, in cui l'elicità non è più una grandezza fisica assoluta ma relativa; per questo motivo si introduce una grandezza nota come chiralità che è invece invariante anche per particelle massive. Per comprendere il significato fisico di questa grandezza consideriamo un campo di Dirac

$$\psi = \begin{pmatrix} \phi_R \\ \phi_L \end{pmatrix}.$$

Dalla sezione 2.2.4 sappiamo che sotto trasformazioni di Lorentz il campo segue la (2.16):

$$\begin{pmatrix} \phi_R \\ \phi_L \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \phi'_R \\ \phi'_L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\frac{i}{2}\vec{\sigma}\cdot(\vec{\theta}-i\vec{\phi})} & 0 \\ 0 & e^{\frac{i}{2}\vec{\sigma}\cdot(\vec{\theta}+i\vec{\phi})} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_R \\ \phi_L \end{pmatrix}.$$

Questa legge permette di definire la chiralità: la componente ϕ_R dello spinore ha chiralità destrorsa, mentre la componente ϕ_L ha chiralità sinistrorsa.

Possiamo definire un operatore agente su ψ che permetta di selezionare la sua componente destrorsa o sinistrorsa. Per farlo definiamo la matrice γ^5 :

$$\gamma^5 = -i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3,$$

per cui valgono

$$\{\gamma^5, \gamma^\alpha\} = 0, \quad (\gamma^5)^2 = 1.$$

Definiamo poi gli operatori di proiezione

$$P_\pm = \frac{1}{2}(1 \pm \gamma^5),$$

da cui segue che

$$P_\pm^2 = P_\pm, \quad P_+P_- = 0.$$

Dalla definizione delle matrici γ (1.2.3) che ricordiamo essere

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix},$$

si ottiene che l'operatore $P_\pm$ proietta lo spinore di Dirac nei corrispondenti spinori di Weyl:

$$P_\pm\psi = \psi_\pm,$$

dove si è indicato con ψ_+ la componente a chiralità destrorsa dello spinore e con ψ_- la componente a chiralità sinistrorsa.

Questo concetto è fondamentale poiché dalle evidenze sperimentali si evince che soltanto la componente sinistrorsa di un campo di Dirac è soggetta all'interazione debole. Inoltre la fenomenologia suggerisce che il campo che descrive i fermioni soggetti a questa interazione sia dato da un doppietto neutrino-leptone. Consideriamo per esempio il decadimento β , mediato dall'interazione debole:

$$n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e.$$

Notiamo come in questa interazione sia coinvolto un leptone (l'elettrone) e il corrispondente antineutrino. Questa è una considerazione che può essere estesa in maniera generale e permette di affermare che il campo soggetto all'interazione debole è descritto da doppietti di carica della forma

$$L = \begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}_L, \quad (5.1)$$

dove il pedice L sta a indicare che solo le componenti sinistrorse dei singoli campi fermionici sono soggette all'interazione. La scrittura (5.1) può essere estesa anche alle altre coppie neutrino-leptone.

Nella teoria standard delle particelle il neutrino è considerato a massa nulla. Un'importante conseguenza di ciò è evidenziata considerando l'equazione di Dirac (1.9)

$$(i\gamma^\alpha \partial_\alpha + m)\psi = \begin{pmatrix} m & i\partial_0 \mathbb{1} + i\vec{\sigma} \cdot \vec{\nabla} \\ i\partial_0 \mathbb{1} - i\vec{\sigma} \cdot \vec{\nabla} & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_+ \\ \psi_- \end{pmatrix} = 0.$$

Imponendo $m = 0$ si ottiene la coppia di equazioni

$$\begin{aligned} (\partial_0 \mathbb{1} - \vec{\sigma} \cdot \vec{\nabla})\psi_+ &= 0, \\ (\partial_0 \mathbb{1} + \vec{\sigma} \cdot \vec{\nabla})\psi_- &= 0, \end{aligned}$$

per cui esistono solo due tipi di neutrino. Dalle evidenze sperimentali si conclude che questi sono il neutrino a chiralità sinistrorsa e l'antineutrino a chiralità destrorsa. Dunque esiste un singoletto destrorso sul quale agisce solamente l'interazione elettromagnetica, che può essere scritto come

$$R = e_R = \frac{1}{2}(1 + \gamma_5)e.$$

Un'altra considerazione fondamentale riguarda la massa dei portatori dell'interazione debole: gli esperimenti evidenziano che le particelle mediatrici dell'interazione sono massive, il che è in contrasto con le interazioni trattate finora. Per comprendere come i mediatori possano acquisire massa è necessario introdurre il meccanismo di Higgs.

5.2 Rottura spontanea di simmetria e meccanismo di Higgs

Si considera la lagrangiana relativa a due campi scalari ϕ_1 e ϕ_2 con potenziale V

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\alpha \phi_1 \partial^\alpha \phi_1 + \partial_\alpha \phi_2 \partial^\alpha \phi_2) - V(\phi_1^2 + \phi_2^2).$$

Tale lagrangiana è invariante sotto il gruppo $SO(2)$. Si sceglie il potenziale

$$V(\phi_1^2 + \phi_2^2) = \frac{1}{2}\mu^2(\phi_1^2 + \phi_2^2) + \frac{1}{4}\lambda(\phi_1^2 + \phi_2^2)^2, \quad \lambda > 0.$$

Se vale $\mu^2 > 0$ allora il minimo del potenziale V , detto anche ground state, è unico ed è

$$\phi_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

che a sua volta gode di simmetria $SO(2)$. Si parla in questo caso di simmetria preservata.

Se invece si considera $\mu^2 < 0$ allora il ground state non è più unico, infatti si ha

$$\begin{aligned}\frac{\partial V}{\partial \phi_1} &= -\mu^2 \phi_1 + 2\lambda \phi_1^* (\phi_1^2 + \phi_2^2) = 0, \\ \frac{\partial V}{\partial \phi_2} &= -\mu^2 \phi_2 + 2\lambda \phi_2^* (\phi_1^2 + \phi_2^2) = 0,\end{aligned}$$

che ammettono soluzione non solo quando $\phi_1 = \phi_2 = 0$ ma anche quando

$$\phi_1^2 + \phi_2^2 = \frac{\mu^2}{\lambda} \equiv v^2,$$

che è effettivamente la condizione di minimo. I punti di ground state sono dunque infiniti e sono tutti equivalenti dal punto di vista fisico, per cui è possibile scegliere la configurazione

$$\phi_0 = \begin{pmatrix} v \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Questo ground state però non rispetta la simmetria $SO(2)$ della lagrangiana, dunque in questo caso si parla di rottura spontanea di simmetria.

Definendo ora il campo di fluttuazioni

$$\phi' \equiv \phi - \phi_0 \equiv \begin{pmatrix} \eta \\ \xi \end{pmatrix},$$

e sostituendo ϕ_1 e ϕ_2 in termini di η e ξ la lagrangiana diventa

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\alpha \eta \partial^\alpha \eta + 2\mu^2 \eta^2) + \frac{1}{2}\partial_\alpha \xi \partial^\alpha \xi$$

più una costante. Sono quindi presenti due particelle: una particella η la cui massa al quadrato è $-2\mu^2 > 0$ e una particella ξ senza massa, poiché sono assenti termini quadratici in ξ . Questa è una conseguenza di quello che è noto come teorema di Goldstone, che afferma che, a seguito della rottura spontanea di una simmetria continua, nello spettro di massa compaiono particelle a massa nulla, detti bosoni di Goldstone, e in particolare è presente un bosone di Goldstone per ogni generatore del gruppo della simmetria rotta.

Consideriamo ora un campo scalare complesso ϕ e la seguente lagrangiana:

$$\mathcal{L} = \partial_\alpha \phi \partial^\alpha \phi^* - \mu^2 \phi^* \phi - \lambda (\phi^* \phi)^2, \quad \lambda > 0, \quad (5.2)$$

che notiamo avere simmetria $U(1)$ globale. Il potenziale ha la forma

$$V(\phi^* \phi) = \mu^2 \phi^* \phi + \lambda (\phi^* \phi)^2. \quad (5.3)$$

Da un semplice calcolo deriva che se $\mu^2 > 0$ il ground state di V è

$$\phi_0 = \phi_0^* = 0,$$

che gode di simmetria $U(1)$ globale, perciò si è nel caso di simmetria preservata. Se invece $\mu^2 < 0$ allora

$$\begin{aligned}\frac{\partial V}{\partial \phi} &= -\mu^2 \phi^* + 2\lambda \phi^* (\phi^* \phi) = 0, \\ \frac{\partial V}{\partial \phi^*} &= -\mu^2 \phi + 2\lambda \phi (\phi^* \phi) = 0,\end{aligned}$$

che implica che il ground state ϕ_0 rispetta la relazione

$$\phi_0^* \phi_0 = \frac{\mu^2}{2\lambda} \equiv \frac{v^2}{2},$$

dunque ci sono infiniti punti di ground state. È possibile scegliere un ground state puramente reale

$$\phi_0 = \frac{v}{\sqrt{2}}.$$

Visto che tale configurazione non rispetta la simmetria $U(1)$ globale della lagrangiana si ha rottura spontanea di simmetria.

Ora introduciamo la condizione che la simmetria $U(1)$ della lagrangiana sia locale; come già visto, questo si ottiene sostituendo l'operatore ∂_α in (5.2) con la derivata covariante

$$D_\alpha = \partial_\alpha - ieA_\alpha,$$

dunque, introducendo anche un termine cinetico per il campo A_α , la lagrangiana diventa

$$\mathcal{L} = (D_\alpha \phi)(D^\alpha \phi)^* - \mu^2 \phi^* \phi - \lambda(\phi^* \phi)^2 - \frac{1}{4} F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta}.$$

Il ground state del potenziale risulta essere ancora $\phi_0 = \frac{v}{\sqrt{2}}$. Il campo ϕ può essere espanso attorno al punto di minimo e parametrizzato in modulo e fase:

$$\phi(x) = \frac{e^{i\frac{\xi(x)}{v}}(v + \eta(x))}{\sqrt{2}},$$

esplicitando la dipendenza dalle coordinate. Ricordando la forma delle trasformazioni $U(1)$ locali

$$\phi \rightarrow \phi' = e^{ie\theta(x)} \phi, \quad \phi^* \rightarrow \phi'^* = e^{-ie\theta(x)} \phi^*,$$

possiamo scegliere $\theta(x) = -\frac{\xi(x)}{ev}$ così che

$$\phi(x) \rightarrow \phi'(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}[\eta(x) + v]. \quad (5.4)$$

Questo è detto gauge unitario e riduce i gradi di libertà di ϕ da 2 a 1. Consideriamo adesso il primo termine della lagrangiana e utilizziamo la (5.4):

$$(D'_\alpha \phi')(D'^\alpha \phi')^* = \frac{\partial_\alpha \eta \partial^\alpha \eta}{2} + \frac{e^2}{2} A'_\alpha A'^\alpha (\eta^2 + v^2 + 2\eta v) - \frac{ie}{2} A'_\alpha \eta \partial^\alpha \eta - \frac{ie}{2} A'_\alpha v \partial^\alpha \eta,$$

che ha un termine quadratico in A'_α , dunque il campo mediatore dell'interazione risulta essere massivo. Lo spettro di massa allora include una particella η di massa al quadrato $-2\mu^2 > 0$ e un campo massivo A'_α con massa ev ; a causa della scelta di gauge effettuata il bosone di Goldstone ξ diventa la componente longitudinale del campo A'_α . Il processo descritto prende il nome di meccanismo di Higgs.

5.3 Simmetria $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$

Per descrivere correttamente l'interazione nucleare debole bisogna utilizzare sia il gruppo $SU(2)$ che il gruppo $U(1)$. Approfondiamo in che modo.

Le trasformazioni locali $SU(2)_L$ (dove il pedice L indica che le trasformazioni agiscono solo sulle componenti a chiralità sinistrorsa dei campi leptonici) sono generate da una terna di generatori T_1, T_2, T_3 che rispettano la nota algebra di Lie di $SU(2)$ (2.12). Introduciamo anche l'operatore

$$T^2 = T_1^2 + T_2^2 + T_3^2.$$

In analogia con la trattazione quantomeccanica del momento angolare, si può introdurre una base di stati nello spazio sul quale agiscono le matrici di $SU(2)$ usando gli autostati di T^2 e T_3 :

$$\Psi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \Psi_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ricordando che i generatori di $SU(2)$ sono dati da

$$T_a = \frac{\sigma_a}{2}$$

e imponendo che Ψ_1 e Ψ_2 siano autostati di T^2 e T_3 si trova che

$$\begin{aligned} T^2 \Psi_i &= I \Psi_i \implies I = \frac{1}{2}, \quad i = 1, 2, \\ T_3 \Psi_1 &= I_3 \Psi_1 \implies I_3 = \frac{1}{2}, \\ T_3 \Psi_2 &= I_3 \Psi_2 \implies I_3 = -\frac{1}{2}, \end{aligned}$$

dove I, I_3 sono gli autovalori rispettivamente di T^2 e T_3 e sono detti numeri quantici di isospin debole. Per convenzione si assegna ai neutrini $I_3 = \frac{1}{2}$ e agli altri leptoni $I_3 = -\frac{1}{2}$.

Tali numeri quantici non sono conservati; si può verificare esplicitamente però che se, detta Q la carica della particella, si introduce la cosiddetta relazione di Gell-Mann-Nishijima

$$Y = 2(Q - I_3), \quad (5.5)$$

tale numero quantico ha lo stesso valore per i doppietti leptonici e non è modificato da trasformazioni $SU(2)_L$. Per questo motivo la simmetria di riferimento diventa $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$, dove Y indica il generatore della trasformazione $U(1)$ e non identifica più la carica elettrica bensì quella che è chiamata ipercarica.

5.4 Lagrangiana dell'interazione elettrodebole

Si introducono i campi di gauge $b_\alpha^1, b_\alpha^2, b_\alpha^3$ per il gruppo $SU(2)_L$ e A_α per il gruppo $U(1)_Y$. Come già visto nelle sezioni precedenti, la lagrangiana della teoria può essere scritta come la somma di un termine cinetico per i campi di gauge e un termine per i leptoni:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{gauge} + \mathcal{L}_{leptoni}.$$

Il termine cinetico è

$$\mathcal{L}_{gauge} = -\frac{1}{4}F^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta} - \frac{1}{4}f^{\alpha\beta}f_{\alpha\beta},$$

dove si sono introdotti i campi di forza

$$F_{\alpha\beta}^c = \partial_\alpha b_\beta^c - \partial_\beta b_\alpha^c + g\epsilon^{abc}b_\alpha^a b_\beta^b,$$

$$f_{\alpha\beta} = \partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha,$$

dove g è la costante di accoppiamento per $SU(2)_L$ e ϵ^{abc} sono le costanti di struttura dello stesso gruppo (si veda l'equazione (2.12)).

La lagrangiana dei leptoni si scrive

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{leptoni} &= -i\bar{R}\gamma^\alpha D_\alpha^{(R)}R - i\bar{L}\gamma^\alpha D_\alpha^{(L)}L \\ &= -\bar{R}\gamma^\alpha(i\partial_\alpha + \frac{g'}{2}YA_\alpha)R - \bar{L}\gamma^\alpha(i\partial_\alpha + \frac{g'}{2}YA_\alpha + \frac{g}{2}\vec{\sigma} \cdot \vec{b}_\alpha)L, \end{aligned}$$

dove $\vec{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$, $\vec{b}_\alpha = (b_\alpha^1, b_\alpha^2, b_\alpha^3)$, $D_\alpha^{(R)}$ e $D_\alpha^{(L)}$ sono le derivate covarianti agenti rispettivamente sul singoletto destrorso e sul doppietto sinistrorso e $\frac{g'}{2}$ è la costante di accoppiamento per il gruppo $U(1)_Y$. Una lagrangiana di questa forma ha però due problemi: prevede l'esistenza di quattro bosoni senza massa, dei quali solo il fotone è osservato sperimentalmente, e non include un termine massivo per l'elettrone. In effetti, un termine di massa sarebbe proporzionale a

$$\bar{e}e = \frac{1}{2}\bar{e}(1 - \gamma_5)e + \frac{1}{2}\bar{e}(1 + \gamma_5)e = \bar{e}_R e_L + \bar{e}_L e_R,$$

ma le componenti destrorse e sinistrorse dell'elettrone si trasformano in maniera diversa sotto l'azione di $SU(2)_L$ e $U(1)_Y$, dunque tale termine romperebbe la simmetria di gauge $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ richiesta. È dunque necessario modificare la teoria in modo che rimanga una sola quantità conservata, la carica elettrica, corrispondente a un solo bosone senza massa, il fotone, e in modo che l'elettrone acquisisca massa.

Si introduce a tale scopo un doppietto di campi scalari complessi

$$\phi = \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{pmatrix},$$

che si trasforma come un doppietto $SU(2)_L$. Sulla base della relazione di Gell-Mann-Nishijima (5.5) esso deve avere ipercarica

$$Y_\phi = +1.$$

Aggiungiamo ora alla lagrangiana un termine

$$\mathcal{L}_{scalare} = (D_\alpha^{(L)}\phi)(D^{(L)\alpha}\phi)^\dagger - V(\phi^\dagger\phi), \quad (5.6)$$

dove il potenziale ha una forma analoga alla (5.3):

$$V(\phi^\dagger\phi) = \mu^2\phi^\dagger\phi + \lambda(\phi^\dagger\phi)^2, \quad \lambda > 0.$$

È possibile aggiungere anche un termine di interazione tra gli scalari e i fermioni:

$$\mathcal{L}_{int} = -\zeta_e(\bar{R}\phi^\dagger L + \bar{L}\phi R), \quad (5.7)$$

dove ζ_e è detta costante di accoppiamento di Yukawa. Tale termine è uno scalare di Lorentz sotto trasformazioni $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ locali.

A questo punto supponiamo che valga $\mu^2 < 0$ e consideriamo le conseguenze della rottura spontanea di simmetria. La configurazione di ground state scelta è

$$\phi_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v}{\sqrt{2}} \end{pmatrix},$$

dove $v = \sqrt{-\frac{\mu^2}{\lambda}}$. Tale stato non ha né simmetria $SU(2)_L$ né $U(1)_Y$. Per definizione, un ground state ϕ_0 è lasciato invariante da un generatore $\mathcal{G}$ se vale

$$e^{ia\mathcal{G}}\phi_0 = \phi_0,$$

dove a è una costante. Sviluppando l'esponenziale in serie fino al primo ordine, l'equazione diventa

$$(1 + ia\mathcal{G})\phi_0 = \phi_0 \implies \mathcal{G}\phi_0 = 0.$$

Esplicitiamo dunque l'azione dei generatori sul ground state:

$$\begin{aligned}\sigma_1 \phi_0 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ v/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} \neq 0, \\ \sigma_2 \phi_0 &= \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ v/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i v/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} \neq 0, \\ \sigma_3 \phi_0 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ v/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -v/\sqrt{2} \end{pmatrix} \neq 0, \\ Y \phi_0 &= Y_\phi \phi_0 = +1 \phi_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ v/\sqrt{2} \end{pmatrix} \neq 0.\end{aligned}$$

Se però si definisce l'operatore di carica usando la relazione di Gell-Mann-Nishijima (5.5)

$$Q = \frac{1}{2}(\sigma_3 + Y),$$

si vede che tale operatore lascia il ground state ϕ_0 invariato, infatti

$$\begin{aligned}Q \phi_0 &= \frac{1}{2}(\sigma_3 + Y)\phi_0 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} Y_\phi + 1 & 0 \\ 0 & Y_\phi - 1 \end{pmatrix} \phi_0 \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ v/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},\end{aligned}$$

per cui i generatori che effettivamente rompono spontaneamente la simmetria sono $\frac{\sigma_1}{2}$, $\frac{\sigma_2}{2}$ e $\frac{1}{2}(\sigma_3 - Y)$, dove l'ultimo generatore è ortogonale all'operatore di carica. Sulla base del teorema di Goldstone è noto che a ogni generatore del gruppo di cui è rotta spontaneamente la simmetria corrisponde un bosone senza massa che tramite un'opportuna scelta di gauge può essere posto come componente longitudinale di un campo di gauge che quindi diventa massivo. Visto che l'unico generatore che lascia invariato il ground state è quello della carica, l'unico bosone non massivo risultante è il fotone, mentre gli altri tre campi di gauge hanno una massa.

Successivamente, in maniera analoga a quanto fatto nella sezione precedente, si parametrizza il campo ϕ in fase e in modulo:

$$\phi(x) = e^{i \frac{\vec{\xi}(x) \cdot \vec{\sigma}}{2v}} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v+\eta(x)}{\sqrt{2}} \end{pmatrix},$$

dove $\vec{\xi}$ contiene i campi dei bosoni di Goldstone associati ai generatori di $SU(2)_L$. Si sceglie ora il gauge unitario tale che

$$\phi \rightarrow \phi' = e^{-i \frac{\vec{\xi}(x) \cdot \vec{\sigma}}{2v}} \phi = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v+\eta(x)}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad (5.8)$$

$$L \rightarrow L' = e^{-i\frac{\tilde{\xi}(x)\cdot\vec{\sigma}}{2v}} L,$$

$$R \rightarrow R' = R.$$

Sostituendo il campo (5.8) nella lagrangiana scalare (5.6) si ottiene

$$\mathcal{L}_{scalare} = \frac{v^2}{8}[g^2|b_\alpha^1 - ib_\alpha^2|^2 + (g'A_\alpha - gb_\alpha^3)^2] + \frac{1}{2}[\partial_\alpha\eta\partial^\alpha\eta + 2\mu^2\eta^2] + \dots, \quad (5.9)$$

dove si è omessa la scrittura dei termini di interazione. Si definiscono ora i campi di gauge carichi

$$W_\alpha^\pm \equiv \frac{b_\alpha^1 \mp ib_\alpha^2}{\sqrt{2}},$$

che notiamo essere uno il coniugato dell'altro. Il termine proporzionale a g^2v^2 nella lagrangiana può essere riscritto in termini di tali campi:

$$\frac{g^2v^2}{4}W_\alpha^+W^{\alpha-} = \frac{g^2v^2}{8}(|W_\alpha^+|^2 + |W_\alpha^-|^2),$$

e dunque la massa dei bosoni mediatori carichi è

$$M_{W^\pm} \equiv M_W = \frac{gv}{2}.$$

Definendo poi i campi ortogonali

$$Z_\alpha \equiv \frac{-g'A_\alpha + gb_\alpha^3}{\sqrt{g'^2 + g^2}},$$

$$\mathcal{A}_\alpha \equiv \frac{gA_\alpha + g'b_\alpha^3}{\sqrt{g'^2 + g^2}},$$

dove ai campi A_α e b_α^i è stato implicitamente applicato il gauge unitario, si trova che il termine di massa per il bosone neutro Z^0 ha coefficiente pari a

$$M_{Z^0} = \frac{v}{2}\sqrt{g + g'^2} = M_W\sqrt{1 + \frac{g'^2}{g^2}},$$

mentre il campo $\mathcal{A}_\alpha$ rimane senza massa. Inoltre esaminando la lagrangiana (5.9) si trova che il campo η ha massa al quadrato

$$(M_H)^2 = -2\mu^2 > 0.$$

η è detto campo di Higgs. Infine, il termine di interazione tra fermioni e scalari (5.7) diventa

$$\mathcal{L}_{int} = -\zeta_e \frac{v + \eta}{\sqrt{2}} (\bar{e}_R e_L + \bar{e}_L e_R) = -\zeta_e \frac{v + \eta}{\sqrt{2}} \bar{e} e,$$

e considerando il valore del coefficiente quadratico nel campo elettronico, si conclude che l'elettrone acquisisce una massa

$$m_e = \frac{\zeta_e v}{\sqrt{2}}.$$

Dunque la modifica della teoria iniziale tramite la rottura spontanea di simmetria porta alla previsione di uno spettro di massa concorde con quello osservato sperimentalmente.

Conclusione

L'applicazione del principio di gauge, prima nel caso abeliano e poi nel caso non abeliano, ha permesso inizialmente di ricavare l'azione dell'interazione elettromagnetica e dell'interazione nucleare forte, i cui gruppi di riferimento sono rispettivamente $U(1)$ e $SU(3)$. Successivamente, per riprodurre correttamente la fenomenologia dell'interazione nucleare debole per i leptoni è stato necessario trattare questa e l'interazione elettromagnetica come un'unica interazione, l'interazione elettrodebole, introducendo una nuova grandezza, l'ipercarica; si è inoltre costruita la teoria considerando che una parte dell'interazione elettrodebole agisce solo sulle componenti sinistrorse dei leptoni. Ciò ha permesso di delineare il gruppo di simmetria della teoria, ovvero $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$; utilizzando ancora il principio di gauge per tale gruppo e introducendo la rottura spontanea di simmetria con il meccanismo di Higgs si è costruito un modello che effettua una previsione corretta dello spettro di massa osservato.

Da questa trattazione si conclude dunque che le teorie di gauge offrono un modello matematico fisicamente consistente e si evidenzia che la simmetria può essere utilizzata come un principio sulla base del quale costruire parte della fisica fondamentale. Rimane però un problema aperto: nonostante il principio di gauge sia applicabile all'ultima interazione fondamentale rimasta, la gravità, questo approccio porta a una teoria che non può essere quantizzata e che è dunque incompleta. Questa è una delle questioni irrisolte più rilevanti della fisica moderna ed è al centro di numerosi tentativi di ricerca di nuove leggi fisiche.

Bibliografia

- [1] V. Barone. *Relatività. Principi e applicazioni*. Bollati Boringhieri, 2004.
- [2] F. Bastianelli. *Appunti del corso di Teoria dei Campi*. 2010. URL: <https://www-th.bo.infn.it/people/bastianelli/qft1-09.html>.
- [3] C. Quigg. *Gauge Theories of the Strong, Weak and Electromagnetic Interactions*. 2^a ed. Princeton University Press, 2013.
- [4] Lewis H. Ryder. *Quantum Field Theory*. Cambridge University Press, 1985.
- [5] N. Semprini Cesari. *Appunti del corso di Fisica Nucleare e Subnucleare*. 2025.
- [6] M. Srednicki. *Quantum Field Theory*. 2006.
- [7] D. Tong. *Lectures on Quantum Field Theory*. 2006. URL: <https://davidtong.org/pdfs/teaching/quantum-field-theory/qft.pdf>.