

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

Dipartimento di Fisica e Astronomia “Augusto Righi”
Corso di Laurea in Fisica

Ruolo e struttura delle simmetrie continue in meccanica classica, quantistica e teoria dei campi classici

Relatore:
Prof. Francesco Ravanini

Presentata da:
Davide Paganelli

Anno Accademico 2025/2026

“Si può affermare, senza grande esagerazione, che la fisica è lo studio della simmetria.”

— Philip W. Anderson, *More is Different*

“La simmetria, per quanto ampio o ristretto sia il significato che le si attribuisce, è un’idea mediante la quale l’uomo, attraverso i secoli, ha cercato di comprendere e creare ordine, bellezza e perfezione.”

— Hermann K. H. Weyl, *Symmetry*

Sommario

La tesi analizza il ruolo delle trasformazioni di simmetria continue e la loro struttura attraverso i tre importanti formalismi della meccanica classica, della meccanica quantistica e della teoria dei campi classici.

Nell'**Introduzione** si espone l'evoluzione storica del concetto di simmetria nel panorama della fisica, riportando gli eventi chiave che ne hanno determinato infine il ruolo di protagonista nello sviluppo delle teorie moderne.

Il **Capitolo 1** è dedicato alle simmetrie nella meccanica classica. A partire dal principio variazionale, si definiscono le trasformazioni e le condizioni di invarianza. Viene poi introdotto e dimostrato il teorema di Noether, che mette in relazione le simmetrie continue con gli integrali primi del moto. Si estende poi il formalismo lagrangiano delle simmetrie introducendo il formalismo hamiltoniano e il formalismo covariante.

Il **Capitolo 2** è dedicato alle simmetrie in meccanica quantistica. Introdotto il formalismo degli spazi di Hilbert, si studiano le trasformazioni di simmetria nello spazio degli stati attraverso il teorema di Wigner e con gli strumenti della teoria dei gruppi e delle rappresentazioni, con particolare attenzione ai gruppi e le algebre di Lie. Sono introdotte le simmetrie negli spazi interni.

Il **Capitolo 3** estende l'analisi alla teoria dei campi classici. Dopo la formulazione lagrangiana e hamiltoniana dei sistemi continui e l'introduzione dei campi scalari e vettoriali, si dimostrano i teoremi di Noether nella loro forma per i campi, con le correnti e le cariche conservate, tra cui il tensore energia-impulso, discutendo le costruzioni non canoniche che ne migliorano le proprietà. Il capitolo si conclude con lo studio delle simmetrie interne e delle simmetrie di gauge, introducendo il secondo teorema di Noether.

Il **Capitolo 4** affronta la rottura spontanea di simmetria, fenomeno in particolare analizzato per campi scalari, giungendo al teorema di Goldstone. Si discute quindi il caso dei sistemi a un numero finito di gradi di libertà, in cui la rottura spontanea non può verificarsi. Si conclude infine con la rottura spontanea delle simmetrie di gauge, alla base del meccanismo di Higgs, utilizzando l'esempio di un campo scalare complesso.

All'interno della tesi vengono studiate come casi esemplari le simmetrie spazio-temporali di traslazione, rotazione e di scala nei formalismi classico e quantistico, per essere infine generalizzate alle simmetrie di Poincaré, di scala e conformi con formalismo covariante in teoria dei campi classici.

Indice

Introduzione	1
1 Simmetrie nella meccanica classica	4
1.1 Principio variazionale e Leggi del moto	4
1.2 Trasformazioni e Invarianze	6
1.3 Simmetrie dei sistemi inerziali	8
1.4 Teorema di Noether	9
1.5 Simmetrie notevoli	10
1.5.1 Traslazioni spaziali	10
1.5.2 Rotazioni	11
1.5.3 Traslazioni temporali	12
1.5.4 Variazioni di scala	13
1.6 Formalismo hamiltoniano	14
1.7 Oltre la meccanica classica	16
2 Simmetrie nella meccanica quantistica	18
2.1 Formalismo e Leggi degli stati quantistici	18
2.2 Trasformazioni nello spazio degli stati	20
2.3 Gruppi e Rappresentazioni	21
2.4 Trasformazioni di Simmetria	22
2.5 Simmetrie continue delle coordinate	24
2.5.1 Traslazioni spaziali	24
2.5.2 Rotazioni	24
2.5.3 Traslazioni temporali	25
2.5.4 Variazioni di Scala	25
2.6 Simmetrie interne	26
3 Simmetrie nella teoria dei campi classici	27
3.1 Leggi dei Sistemi continui	27
3.2 Campi scalari e vettoriali	29
3.3 Simmetrie e Noether in teoria dei campi	30

3.4	Simmetrie spazio-temporali	33
3.4.1	Gruppo di Poincaré	33
3.4.2	Trasformazioni di Scala	35
3.4.3	Gruppo conforme	36
3.5	Tensori energia-impulso non canonici	37
3.6	Simmetrie interne e di gauge	37
4	Rottura spontanea di simmetria	40
4.1	Simmetria delle leggi e Asimmetria degli stati	40
4.2	Rottura spontanea di campi scalari reali	42
4.3	Teorema di Goldstone	45
4.4	Sistemi a finiti gradi di libertà	46
4.5	Rottura spontanea di simmetrie di gauge	47
	Conclusioni	49
	Bibliografia	52

Introduzione

Il termine **Simmetria** deriva dal greco *symmetrìa*, che indica la commensurabilità di due grandezze. In ambito estetico il termine assunse però il significato di giusta proporzione, armonia e regolarità delle parti. Con quest'ultima accezione, l'utilizzo delle simmetrie per spiegare fenomeni naturali precede la nascita stessa della fisica: esempi classici in tal senso si trovano nelle argomentazioni di Aristotele sull'inesistenza del vuoto (*Physica*, libro IV) e in quelle di Anassimandro riguardo all'immobilità della Terra (riportata da Aristotele nel *De caelo*), nei primi modelli cosmologici di Keplero (*Mysterium Cosmographicum*) e nelle relazioni tra dimensioni e resistenza di una macchina studiate da Galileo (*Discorsi attorno a due nuove scienze*, tra i primi esempi di applicazione fisica della simmetria di scala).

L'introduzione del concetto di simmetria nella fisica avvenne in modo graduale e incontrò inizialmente scarso consenso, dovuto anche all'elevato grado di astrazione della sua trattazione matematica formale fondata sulla Teoria dei Gruppi, sviluppata da Évariste Galois nella prima metà dell'Ottocento e che trovò la sua prima applicazione pratica negli studi delle strutture cristalline. Il ruolo delle simmetrie nello sviluppo delle teorie fisiche può dirsi tuttavia inevitabile: come esposto da Vincenzo Barone ne *L'Ordine del Mondo* [5] «Senza le simmetrie, l'immagine del mondo fisico, basata su poche, semplici leggi unificanti, si dissolverebbe, e il mondo risulterebbe condannato alla contingenza e inesplicabile». La capacità di una legge fisica di descrivere le relazioni tra grandezze fisiche in fenomeni riproducibili, a parità di condizioni necessarie, è il prodotto ed espressione di una natura fondamentalmente simmetrica, i cui meccanismi fisici sono invarianti rispetto a variazioni delle condizioni accidentali e non necessarie.

È proprio con il significato di invarianza che le simmetrie entrano nel panorama della fisica. Un primo esempio è dato dal principio di relatività di Galileo, per cui gli osservatori in moto relativo rettilineo uniforme verificano le medesime leggi meccaniche (*Dialogo sopra i due massimi sistemi del mondo*). Se in un primo momento le simmetrie furono considerate proprietà emergenti, deducibili dagli esperimenti empirici o dalle leggi fisiche, il primo esempio di simmetria come principio fondamentale si ha con il principio di relatività di Einstein (*Sull'elettrodinamica dei corpi in movimento*), che estende il principio di Galileo a tutte le leggi fisiche, divenendo il primo esempio di simmetria elevata al rango di postulato che vincola la forma delle leggi fisiche. Con le teorie della Relatività

Speciale (1905) e Generale (1915), Einstein inaugurò così l'uso dei principi di simmetria come fondamento delle teorie fisiche moderne, sebbene sarebbe stato necessario molto tempo prima che tale impostazione divenisse una metodologia comune.

Agli inizi del XX secolo si collocano altri risultati fondamentali per l'uso delle simmetrie: la relazione tra principi di conservazione e simmetrie dimostrata da Emmy Noether nel 1918 e le applicazioni della teoria dei gruppi alla meccanica quantistica sviluppate da Hermann Weyl ed Eugene Wigner tra il 1927 e il 1931, che permisero di classificare i livelli atomici e le loro degenerazioni a partire dai soli gruppi di simmetria del sistema, indipendentemente dalla soluzione esplicita dell'equazione di Schrödinger. Anche questi risultati, tuttavia, ebbero in un primo momento visibilità e consenso limitati nella comunità dei fisici. Tali rivelano però l'importante valore operativo dei principi di simmetria. In meccanica classica ogni simmetria continua fornisce, attraverso il teorema di Noether, un integrale primo del moto che riduce l'ordine del problema dinamico, fino a renderlo in alcuni casi integrabile per sole quadrature. In meccanica quantistica le simmetrie determinano ad esempio le regole di selezione delle transizioni, spiegano le degenerazioni dei livelli energetici e ne consentono la classificazione sistematica, ancor prima di risolvere esplicitamente la dinamica.

Fu con lo sviluppo della teoria quantistica dei campi (QFT) e della fisica delle particelle che l'uso delle simmetrie divenne sistematico. A partire dalla relazione tra la teoria elettromagnetica e le simmetrie di fase individuata da Weyl, che introdusse il concetto di Simmetria di Gauge e mostrò come da essa si possa riderivare la forma delle interazioni, presero avvio numerosi studi sulle relazioni tra le simmetrie più importanti e le particelle, che proprio in quegli anni venivano scoperte in numero crescente. Ne derivarono risultati di grande portata: la teoria di Yang-Mills (1954), nata come teoria di gauge dell'isospin e divenuta poi la base della descrizione delle interazioni forti e deboli; la scoperta della violazione delle simmetrie di parità e coniugazione di carica nelle interazioni deboli, prevista da Tsung-Dao Lee e Chen Ning Yang e verificata sperimentalmente da Chien-Shiung Wu; il teorema CPT, scoperto da Lüders e Pauli, che lega la combinazione delle simmetrie di parità, coniugazione di carica e inversione temporale all'invarianza sotto trasformazioni di Lorentz e alla causalità locale della teoria di campo, risultando nell'unica simmetria discreta esatta nota; la classificazione delle particelle come rappresentazioni irriducibili dei gruppi di simmetria, inaugurata da Wigner che nel 1939 dimostrò come le particelle elementari siano identificabili con le rappresentazioni unitarie irriducibili del gruppo di Poincaré, e le loro proprietà intrinseche di massa e spin emergono come gli invarianti che etichettano tali rappresentazioni.

Non tutte le simmetrie osservate in natura sono però esatte, ovvero accanto alle simmetrie rigorose delle leggi fondamentali esistono simmetrie approssimate, violate debolmente dalla dinamica: un esempio è dato dal caso dell'isospin, introdotto da Werner Heisenberg nel 1932 per descrivere la quasi-degenerazione in massa tra protone e neutrone, e della sua estensione alla simmetria di sapore $SU(3)$, che permise a Murray Gell-Mann e Yuval Ne'eman di organizzare gli adroni in multipletti e di predire nuove particelle.

Una simmetria può inoltre essere rotta esplicitamente, da termini della dinamica che non la rispettano. Nel 1894 Pierre Curie, studiando i fenomeni elettrici e magnetici nei cristalli, formulò quello che oggi è noto proprio come principio di Curie: «Quando una causa produce un effetto, gli elementi di simmetria della causa devono ritrovarsi nell'effetto». Tale principio risulta in parte smentito da fenomeni come la magnetizzazione spontanea, studiata dallo stesso Curie, in cui la simmetria delle leggi risulta "nascosta" nella loro realizzazione. Fenomeni di questo tipo, noti nella fisica della materia come rottura spontanea di simmetria, furono in seguito introdotti anche nella fisica delle particelle: sono alla base del teorema di Goldstone e del meccanismo di Englert-Brout-Higgs, che spiega l'origine della massa dei bosoni mediatori delle interazioni deboli (e dei fermioni elementari attraverso l'interazione di Yukawa).

Si giunge così al Modello Standard delle particelle elementari, nel quale le particelle, le loro proprietà e le loro interazioni sono descritte in modo unificato da principi di simmetria che, nel formalismo della teoria quantistica dei campi, vincolano la forma delle equazioni e ne determinano la dinamica. La cosiddetta fisica oltre il modello standard prosegue proprio su tali modalità, ricercando principi di simmetria più fondamentali, formulati in strutture matematiche più generali o in un numero maggiore di dimensioni, con l'obiettivo di unificare ulteriormente le interazioni elementari e di rendere conto di fenomeni non ancora spiegati.

Tra tutte le simmetrie, un ruolo particolarmente importante è ricoperto dalle simmetrie continue, ovvero quelle trasformazioni che possono variare attraverso parametri o funzioni continue e descrivibili dalla teoria dei gruppi di Lie. Esse comprendono molti dei gruppi di simmetria più rilevanti, ad esempio per le coordinate le trasformazioni di traslazione, rotazione, dilatazione e di Lorentz, e ad esse si applicano gli importanti teoremi di Noether e di Goldstone. Sono inoltre continue le più importanti trasformazioni di simmetria di gauge, tra cui quelle che determinano le interazioni fondamentali del modello standard: $SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$.

Capitolo 1

Simmetrie nella meccanica classica

In questo capitolo si utilizzano le leggi della meccanica classica con formalismo lagrangiano (introducendo anche il formalismo hamiltoniano) per studiare il ruolo che le simmetrie dei sistemi fisici hanno nella loro descrizione, con particolare attenzione al Teorema di Noether, e nella descrizione dei sistemi inerziali. Vengono poi studiati alcuni fondamentali casi di simmetrie, con esempi di sistemi fisici notevoli. Infine vengono analizzati i cambiamenti di formalismo dei sistemi e delle simmetrie nel passaggio dalla meccanica classica alla meccanica relativistica (covariante).

1.1 Principio variazionale e Leggi del moto

Data una particella, la sua posizione nello spazio fisico euclideo viene descritta dal vettore posizione $\mathbf{r} \in \mathbb{E}^3$. Si definisce Spazio delle Configurazioni lo spazio astratto che descrive tutte le posizioni possibili: per sistemi meccanici costituiti da N particelle $(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N)$ esso corrisponde a $\mathbb{E}^{3N}$. Se il sistema ha s gradi di libertà, ovvero il numero minimo di variabili indipendenti sufficienti a descriverne la posizione, tale che $s < 3N$ (come per sistemi olonomi, che presentano dei vincoli integrabili della forma $f(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, t) = 0$ [10]), allora le posizioni assumibili dal sistema costituiscono un sottoinsieme dello spazio delle configurazioni $\mathbb{Q} \subset \mathbb{E}^{3N}$, detto Varietà delle Configurazioni, che ha struttura di varietà differenziabile di dimensione s ed è descrivibile dal sistema di coordinate generalizzate $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_s)$. Il moto di un sistema meccanico che si evolve nel tempo corrisponde ad una curva nello spazio $\mathbb{R} \times \mathbb{Q}$, di coordinate $(t, \mathbf{q})$, detta linea di universo, la cui proiezione su $\mathbb{Q}$ è la traiettoria, soluzione della legge oraria $\mathbf{q} = \mathbf{q}(t)$. Nel moto, la posizione risulta quindi funzione del tempo, sufficientemente regolare, per cui si può definire la velocità fisica della particella $\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$ e analogamente la velocità generalizzata $\dot{\mathbf{q}} = \frac{d\mathbf{q}}{dt}$. Si definisce Fibrato Tangente della varietà $\mathbb{Q}$ lo spazio $2s$ -dimensionale $\mathbb{T}\mathbb{Q} \subset \mathbb{E}_{\mathbf{r}}^{3N} \times \mathbb{E}_{\dot{\mathbf{r}}}^{3N}$ (quest'ultimo detto Spazio degli stati) di coordinate $(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ che descrive le posizioni e rispettive variazioni (velocità generalizzate) lungo ogni curva $\gamma \subset \mathbb{Q}$. [2]

Il Principio di Azione Stazionaria, noto anche come Principio di Hamilton, stabilisce che il moto di un sistema meccanico in un intervallo di tempo corrisponde alla curva $\gamma : [t_1, t_2] \rightarrow \mathbb{Q}, t \mapsto \mathbf{q}(t)$ che rende stazionario il funzionale Azione [10]:

$$S[\gamma] = \int_{t_1}^{t_2} L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) dt \quad (1.1)$$

con $L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) : \mathbb{TQ} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funzione di Lagrange, o lagrangiana.

L'azione è stazionaria lungo la traiettoria reale tra $[t_1, t_2]$ se la variazione δS è identicamente nulla al primo ordine rispetto ad una generica variazione virtuale della traiettoria $\delta \mathbf{q}(t)$ regolare e nulla agli estremi:

$$\begin{aligned} \delta S[\gamma] &= \int_{t_1}^{t_2} L(\mathbf{q} + \delta \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}} + \delta \dot{\mathbf{q}}, t) - L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) dt = \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} \delta \mathbf{q} + \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \delta \dot{\mathbf{q}} \right) dt = 0 \end{aligned}$$

Poiché $\delta \dot{\mathbf{q}} = \frac{d}{dt} \delta \mathbf{q}$, integrando per parti:

$$\begin{aligned} \delta S[\gamma] &= \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \delta \mathbf{q} \Big|_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) \delta \mathbf{q} dt = \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) \delta \mathbf{q} dt = 0 \end{aligned}$$

per definizione della variazione $\delta \mathbf{q}(t)$. Dal Lemma fondamentale del Calcolo variazionale, l'integrale risulta identicamente nullo per ogni arbitraria variazione infinitesima della traiettoria tra gli estremi se e solo se la funzione continua integranda è nulla [2]. Si ottengono così le Equazioni di Eulero-Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} \quad (1.2)$$

Tale è un sistema di s equazioni differenziali del secondo ordine, che ha soluzione particolare $\gamma = \mathbf{q}(t)$ determinata da $2s$ condizioni iniziali $(\mathbf{q}(t_0), \dot{\mathbf{q}}(t_0))$. Se il sistema è divisibile in n parti non interagenti, o la cui interazione reciproca è trascurabile per la soluzione del sistema, la lagrangiana totale deve soddisfare la proprietà di additività: $L = \sum_i^n L_i$ [14], dove L_i contiene coordinate e variabili che descrivono solamente l' i -esima componente. Si definiscono Impulso (o momento) coniugato $\mathbf{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}$ e Forza generalizzata $\mathbf{F} = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}}$, per cui le equazioni Eq. 1.2 assumono la forma dell'Equazione di Newton: $\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}$ [14].

Se la lagrangiana dipende da una velocità $\dot{q}_i$ ma non dalla sua coordinata relativa q_i , quest'ultima è detta coordinata ciclica del sistema, e si ha $\frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$, dunque dalla Eq. 1.2 e dalla definizione di impulso si ha $p_i(t) = \text{cost.}$. Per sistemi meccanici isolati la lagrangiana ha forma [14]: $L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - U(\mathbf{q})$, con $T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2} \sum_{i,j} a_{ij}(\mathbf{q}) \dot{q}_i \dot{q}_j$ forma

quadratica detta energia cinetica, corrispondente al termine di moto libero delle componenti del sistema, e $U(\mathbf{q})$ energia potenziale, corrispondente al termine di interazione tra le componenti o con enti fisici esterni al sistema. In coordinate euclidee, per un sistema di N particelle [14]:

$$L(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_N) = \sum_i^N \frac{1}{2} m_i v_i^2 - U(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) \quad (1.3)$$

Da cui le equazioni di Lagrange: $\frac{d}{dt}(m_i \mathbf{v}_i) = -\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}_i}$, o equivalentemente $m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{F}_i$.

1.2 Trasformazioni e Invarianze

In meccanica classica si definiscono trasformazioni di coordinate (dette anche trasformazioni passive) le mappe diffeomorfe $\mathcal{T} : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}, \mathbf{q} \mapsto \mathbf{Q} = \mathbf{Q}(\mathbf{q}, t)$ che variano i parametri con cui si descrive il sistema fisico [2]. Dato che $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}(\mathbf{q}, t)$ è diffeomorfa $\exists \mathcal{T}^{-1} : \mathbf{Q} \mapsto \mathbf{q}$, per cui $\dot{\mathbf{q}} = \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \mathbf{Q}} \dot{\mathbf{Q}} + \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t}$, dunque:

$$\frac{\partial \dot{\mathbf{q}}}{\partial \dot{\mathbf{Q}}} = \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \mathbf{Q}} \quad \frac{\partial \dot{\mathbf{q}}}{\partial \mathbf{Q}} = \frac{\partial^2 \mathbf{q}}{\partial \mathbf{Q} \partial \mathbf{Q}} \dot{\mathbf{Q}} + \frac{\partial^2 \mathbf{q}}{\partial \mathbf{Q} \partial t} = \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \mathbf{Q}}$$

Si dimostra che le equazioni di Eulero-Lagrange sono covarianti (invarianti in forma) rispetto alle trasformazioni di coordinate.

Dim.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{\mathbf{Q}}} - \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \mathbf{Q}} &= \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \frac{\partial \dot{\mathbf{q}}}{\partial \dot{\mathbf{Q}}} \right] - \left[\frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \mathbf{Q}} + \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \frac{\partial \dot{\mathbf{q}}}{\partial \mathbf{Q}} \right] = \\ &= \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \mathbf{Q}} \right] - \left[\frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \mathbf{Q}} + \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \mathbf{Q}} \right] = \\ &= \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \mathbf{Q}} \left[\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} \right] \end{aligned}$$

□

Dunque se la Eq. 1.2 vale nel sistema di coordinate $(t, \mathbf{q})$ vale anche nel sistema $(t, \mathbf{Q})$. Si definiscono invece trasformazioni del sistema meccanico (o trasformazioni attive) le mappe $\phi : \mathbb{R} \times \mathbb{TQ} \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{TQ}, \Gamma(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \mapsto \Gamma(t', \mathbf{q}', \dot{\mathbf{q}}')$, corrispondenti allo spostamento del sistema nello spazio degli stati generalizzato [10]. Possono essere:

- Trasformazioni continue, se dipendono da parametri ϵ che possono variare in un continuo ed essere resi infinitesimi:
 $(t, \mathbf{q}) \rightarrow (t + \epsilon \tau(t), \mathbf{q} + \epsilon \boldsymbol{\eta}(\mathbf{q}, t))$
 es. Traslazioni: $(t, \mathbf{r}) \rightarrow (t + \delta t, \mathbf{r} + \delta \mathbf{r})$, Rotazioni: $\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r} + \delta \theta \hat{\mathbf{n}} \wedge \mathbf{r}$

- Trasformazioni discrete, se non dipendono da parametri continui
es. Parità: $\mathbf{q} \rightarrow -\mathbf{q}$, Inversione temporale: $t \rightarrow -t$
- Trasformazioni globali, se il parametro non dipende dalle coordinate, dunque è applicata identicamente in ogni punto del sistema
- Trasformazioni locali, se il parametro dipende dalle coordinate

Si può definire una classe di equivalenza dei funzionali azione $[S] = \{S' \sim \alpha S + k\}$, con $\alpha \neq 0$ e k costanti reali, tale per cui tutti i funzionali equivalenti determinano le stesse leggi del moto: si ha infatti che $\delta S'[\gamma] = \delta(S[\gamma] + k) = \delta S[\gamma]$ con $k \in \mathbb{R}$, dunque le azioni definite a meno di termine costante hanno lo stesso differenziale, e sono definite a meno di un fattore moltiplicativo costante $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ [14] (adimensionale e indipendente dai parametri del moto) in quanto le equazioni Eq. 1.2 sono covarianti per tale prodotto. Data la definizione di azione (Eq. 1.1), una trasformazione modifica l'azione e la lagrangiana come:

$$S' = \int_{t'_1}^{t'_2} L(\mathbf{q}', \dot{\mathbf{q}}', t') dt' = \int_{t_1}^{t_2} [L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) + \delta L] dt$$

Si definiscono Simmetrie di un sistema meccanico tutte quelle trasformazioni ad esso applicabili che ne lasciano invariata l'azione S , a meno di costante detta termine di bordo (o a meno di fattore costante) [14]. Ciò avviene se:

$$\delta L = \frac{dF}{dt} \quad (1.4)$$

con F funzione reale regolare.

$$\text{Dim.} \quad S' = \int_{t_1}^{t_2} \left[L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) + \frac{dF}{dt}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) \right] dt = \int_{t_1}^{t_2} L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) dt + F(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) \Big|_{t_1}^{t_2} = S + k \quad \square$$

Dato un funzionale azione $S[\gamma]$ si definisce lo spazio delle soluzioni $\mathcal{S} = \{\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Q} : \delta S[\gamma] = 0\}$. Per una lagrangiana regolare (hessiano cinetico $\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{\mathbf{q}}_i \partial \dot{\mathbf{q}}_j}$ non degenerare, come per la lagrangiana naturale Eq. 1.3), il teorema di esistenza e unicità di Cauchy-Lipschitz [1] garantisce che a fissato t_0 la mappa $\Psi_{t_0} : \mathbb{TQ} \rightarrow \mathcal{S}, (\mathbf{q}(t_0), \dot{\mathbf{q}}(t_0)) \mapsto \gamma$ sia biettiva, allora le curve $\gamma \in \mathcal{S}$ possono essere identificate dalle condizioni iniziali a cui corrispondono. Variando anche il parametro $t_0 \in \mathbb{R}$, tale identificazione non risulta più univoca (ad esempio più condizioni possono determinare la medesima curva a meno di traslazione della parametrizzazione temporale). Data una trasformazione di simmetria, poiché l'azione trasformata è equivalente all'azione originale esse presentano lo stesso spazio delle soluzioni. Di conseguenza le nuove soluzioni stazionarie costituiscono il medesimo insieme delle soluzioni originali: applicando la trasformazione su una curva $\gamma = \Psi_{t_0}(\mathbf{q}(t_0), \dot{\mathbf{q}}(t_0))$ ne deriva una curva $\gamma' = \Psi_{t'_0}(\mathbf{q}'(t'_0), \dot{\mathbf{q}}'(t'_0))$. La traiettoria ottenuta trasformando una soluzione mediante una simmetria del sistema coincide dunque con la traiettoria che il sistema avrebbe percorso a partire dalle condizioni iniziali trasformate, ovvero le simmetrie costituiscono endomorfismi dello spazio delle soluzioni $\mathcal{S}$ (automorfismi se invertibili).

1.3 Simmetrie dei sistemi inerziali

I sistemi di riferimento sono quei sistemi rispetto a cui vengono effettuate le misure delle grandezze fisiche, in particolar modo rispetto a cui si definisce il sistema di coordinate spazio-temporali. In meccanica classica esiste una classe di sistemi di riferimento, detti Inerziali, per cui vale la Legge d’Inerzia [10]: una particella nel vuoto (non sottoposta ad interazioni) si muove di moto rettilineo uniforme. Dal presupposto che esista sempre tale sistema, esistono infiniti altri sistemi inerziali [14]. Le uniche trasformazioni che legano sistemi inerziali sono le Trasformazioni di Galileo [2]:

$$\mathcal{G}(t, \mathbf{r}) = (t + t_0, \mathcal{R}(\mathbf{r}) + \mathbf{v}t + \mathbf{r}_0) \quad (1.5)$$

ovvero composizione di traslazione delle coordinate spazio-temporali, rotazione degli assi cartesiani e un moto relativo rettilineo uniforme di velocità $\mathbf{v}$ tra i sistemi (traslazione lineare dipendente dal tempo). Oltre a lasciare invariati gli intervalli temporali (questa in realtà costituisce una richiesta iniziale per ricavare le trasformazioni $\mathcal{G}$) e gli intervalli spaziali, tali trasformazioni descrivono che lo spazio vuoto risulta omogeneo e isotropo (ogni punto e direzione sono fisicamente equivalenti agli altri) e il tempo risulta omogeneo (ogni istante è fisicamente equivalente) [14].

Queste sono Simmetrie dello spazio-tempo per gli osservatori inerziali: tali non sono propriamente né simmetrie che emergono da trasformazioni passive delle coordinate né da trasformazioni attive sul sistema, infatti i sistemi inerziali costituiscono dei riferimenti per le coordinate, ma sono definiti sulla base di ipotesi fisiche. Si dimostra che ridefinendo i sistemi inerziali proprio come quei sistemi che soddisfano tali simmetrie dello spazio-tempo, insieme al principio di minima azione si riottiene la legge d’inerzia [14]. Imponendo inoltre un altro principio di simmetria non sulle proprietà fisiche dei sistemi bensì sulle equazioni meccaniche, detto Principio di Relatività di Galileo, per cui nel passaggio tra sistemi inerziali le leggi fisiche devono mantenere la medesima forma, si riottengono le trasformazioni di Galileo. Da queste si ottiene inoltre che la lagrangiana di moto libero deve proprio essere $L = \frac{1}{2}mv^2$ ([14] §3-4).

Tali simmetrie dello spazio-tempo vengono quindi elevate a postulati basati su ipotesi fisiche che vincolano la forma della lagrangiana, risultando dunque anche in simmetrie dei sistemi stessi: la mancanza di queste nella lagrangiana del sistema risulta nella mancanza di completezza nella descrizione del sistema, come la presenza di sistemi esterni interagenti di cui non si considera il moto proprio ma solo l’effetto sul potenziale di interazione del sistema. Con il passaggio alla meccanica relativistica, che non richiede l’invarianza degli intervalli temporali bensì la costanza della velocità della luce c , si otterranno nuove trasformazioni, dette di Lorentz-Poincaré. Questo è un primo esempio di come delle simmetrie che emergono dalle equazioni (o da osservazioni empiriche) possano essere poste come Principi primi della teoria, che assieme al principio di minima azione permettono di ricavare e generalizzare le medesime leggi fisiche. Tale nuovo modo di strutturare le teorie fisiche costituisce il punto di partenza della fisica moderna.

1.4 Teorema di Noether

Come definito in Sez. 1.2, le simmetrie sono trasformazioni del sistema che ne lasciano invariata la dinamica. Tali non costituiscono solo un'osservazione di carattere unicamente matematico, o un modo per ridefinire delle strutture fisiche elevandole a postulati come visto in Sez. 1.3, bensì hanno un effetto sulla dinamica fisica propria del sistema: vi è infatti un profondo legame con gli Integrali primi del moto, ovvero una quantità che si conserva nel tempo lungo la traiettoria del sistema. Tale è il Teorema di Noether [10]:

"Se una trasformazione infinitesima $\phi_\epsilon : \mathbb{R} \times \mathbb{TQ} \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{TQ}$, $(t, \mathbf{q}) \rightarrow (t + \epsilon\tau(t), \mathbf{q} + \epsilon\boldsymbol{\eta}(t, \mathbf{q}))$ rispetto ad un parametro continuo reale ϵ è una simmetria del sistema lagrangiano $(\mathbb{Q}, L)$, che determina una variazione $\delta L = \epsilon \frac{dF}{dt}$, allora esiste un integrale primo del moto, definito lungo tutta la curva estrema γ , $I(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) : \mathbb{R} \times \mathbb{TQ} \rightarrow \mathbb{R}$ "

$$\frac{d}{dt} I(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \boldsymbol{\eta} + \left(L - \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \dot{\mathbf{q}} \right) \tau - F \right] = 0 \quad (1.6)$$

Dim. Nell'ipotesi che sia la trasformazione dei tempi che delle coordinate dipenda dallo stesso parametro infinitesimo ϵ , la velocità generalizzata subisce una trasformazione al primo ordine di:

$$\dot{\mathbf{q}}' = \frac{\dot{\mathbf{q}} + \epsilon \dot{\boldsymbol{\eta}}}{1 + \epsilon \dot{\tau}} = \dot{\mathbf{q}} + \epsilon (\dot{\boldsymbol{\eta}} - \dot{\mathbf{q}} \dot{\tau}) + O(\epsilon^2)$$

Dunque l'azione trasformata ha integranda:

$$\begin{aligned} L(\mathbf{q}', \dot{\mathbf{q}}', t') dt' &= L(\mathbf{q} + \epsilon \boldsymbol{\eta}, \dot{\mathbf{q}} + \epsilon (\dot{\boldsymbol{\eta}} - \dot{\mathbf{q}} \dot{\tau}), t + \epsilon \tau) dt' \\ &= \left\{ L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) + \epsilon \left[\frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} \boldsymbol{\eta} + \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} (\dot{\boldsymbol{\eta}} - \dot{\mathbf{q}} \dot{\tau}) + \frac{\partial L}{\partial t} \tau \right] \right\} (1 + \epsilon \dot{\tau}) dt \\ &= \left\{ L + \epsilon \left[\frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} \boldsymbol{\eta} + \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} (\dot{\boldsymbol{\eta}} - \dot{\mathbf{q}} \dot{\tau}) + \frac{\partial L}{\partial t} \tau + L \dot{\tau} \right] \right\} dt + O(\epsilon^2) \end{aligned}$$

La variazione della lagrangiana al primo ordine in ϵ è dunque:

$$\delta L = \epsilon \left[\frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} \boldsymbol{\eta} + \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \dot{\boldsymbol{\eta}} + \frac{\partial L}{\partial t} \tau + \left(L - \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \dot{\mathbf{q}} \right) \dot{\tau} \right]$$

Imponendo l'invarianza dell'azione (Eq. 1.4) e dividendo per ϵ :

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} \boldsymbol{\eta} + \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \dot{\boldsymbol{\eta}} + \frac{\partial L}{\partial t} \tau + \left(L - \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \dot{\mathbf{q}} \right) \dot{\tau} = \frac{dF}{dt}$$

Date le equazioni di Eulero-Lagrange (Eq. 1.2), il primo termine si riscrive come:

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} \boldsymbol{\eta} + \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \dot{\boldsymbol{\eta}} = \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right] \boldsymbol{\eta} + \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \dot{\boldsymbol{\eta}} = \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \boldsymbol{\eta} \right]$$

Per il termine in τ , dalla derivata totale di L si ha:

$$\frac{dL}{dt} = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}} + \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \ddot{\mathbf{q}} + \frac{\partial L}{\partial t} \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial t} = \frac{d}{dt} \left[L - \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \dot{\mathbf{q}} \right]$$

Sostituendo e raccogliendo sotto un'unica derivata totale:

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \boldsymbol{\eta} \right] + \frac{d}{dt} \left[\left(L - \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \dot{\mathbf{q}} \right) \tau \right] = \frac{dF}{dt}$$

Poiché ogni termine è una derivata totale, si ottiene l'integrale del moto:

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \boldsymbol{\eta} + \left(L - \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \dot{\mathbf{q}} \right) \tau - F \right] = 0$$

La dimostrazione è equivalente nel caso in cui τ dipenda dalle coordinate. $\square$

Si definisce la funzione Energia, o Energia di Jacobi, $\mathcal{E}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \dot{\mathbf{q}} - L$. Data anche la definizione di impulso, allora l'integrale primo del moto ha forma:

$$I(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \mathbf{p} \boldsymbol{\eta} - \mathcal{E} \tau - F \quad (1.7)$$

Se il sistema ammette simmetria per una trasformazione infinitesima ϕ pari alla combinazione lineare di r trasformazioni infinitesime $\{\phi_1, \dots, \phi_r\}$, linearmente indipendenti tra loro, che dipendono dai parametri $\{\epsilon_1, \dots, \epsilon_r\}$, allora il sistema ammette r integrali primi $I_1, \dots, I_r$ [10]. Data la trasformazione Φ generata dalla composizione continua di una trasformazione infinitesima ϕ , essa è sempre una simmetria del sistema e ammette lo stesso integrale primo del moto.

1.5 Simmetrie notevoli

In questo paragrafo si espongono alcuni casi di simmetrie continue e relativi esempi concreti. Tali simmetrie trattate sono tra le più comuni nei sistemi classici, per cui l'azione risulta totalmente invariante, ovvero rimane invariato il prodotto $L(\mathbf{q}', \dot{\mathbf{q}}', t') dt' = L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) dt$. Nei casi più comuni tale coincide con l'invarianza sia della lagrangiana che degli intervalli di tempo. Gli integrali del moto hanno dunque forma $I(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \mathbf{p} \boldsymbol{\eta} - \mathcal{E} \tau$.

1.5.1 Traslazioni spaziali

Siano le traslazioni rigide, ovvero lo spostamento delle coordinate euclidee del sistema di un vettore $\mathbf{a}$: $\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r} + \mathbf{a}$. Tale traslazione risulta infinitesima per $a = |\mathbf{a}|$ parametro della trasformazione, per cui $\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r} + \epsilon \boldsymbol{\eta} = \mathbf{r} + a \hat{\mathbf{a}}$. Se la lagrangiana è invariante sotto traslazione, si ha integrale primo del moto $I = \mathbf{p} \hat{\mathbf{a}}$, con $\mathbf{p}$ impulso euclideo: si conserva

dunque la componente dell'impulso lungo la direzione di traslazione. Se il sistema è invariante per simmetria di traslazione lungo 3 componenti euclidee ortogonali, allora si conserva il vettore $\mathbf{p}$.

Es. Sistema di due particelle cariche che interagiscono per potenziale coulombiano

$$L(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 - k\frac{q_1q_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|}$$

$$\mathbf{r}_i \rightarrow \mathbf{r}_i + \mathbf{a}, \quad \mathbf{v}_i = \frac{d}{dt}\mathbf{r}_i \rightarrow \frac{d}{dt}\mathbf{r}_i + \frac{d}{dt}\mathbf{a} = \frac{d}{dt}\mathbf{r}_i = \mathbf{v}_i$$

$$L(\mathbf{r}_1 + \mathbf{a}, \mathbf{r}_2 + \mathbf{a}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 - k\frac{q_1q_2}{|\mathbf{r}_1 + \mathbf{a} - \mathbf{r}_2 - \mathbf{a}|} = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 - k\frac{q_1q_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|}$$

Si conserva $I = \mathbf{p}\boldsymbol{\eta} = (\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2) \cdot \hat{\mathbf{a}}$, ovvero si ha la conservazione dell'impulso totale $\mathbf{P} = m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2$.

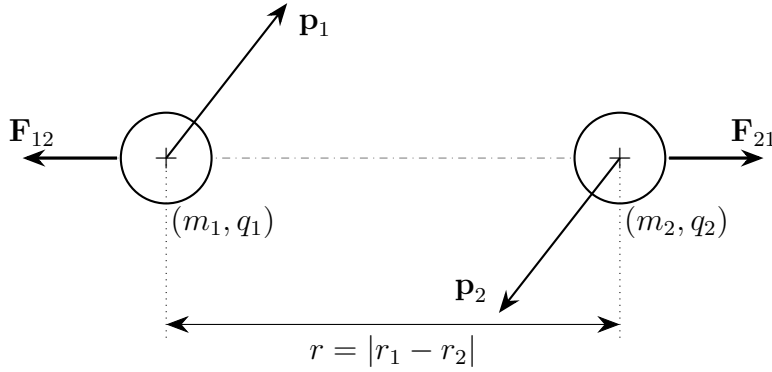


Fig. 1.1: Due particelle cariche q_1 e q_2 di impulsi $\mathbf{p}_1$ e $\mathbf{p}_2$ interagenti tramite forza di Coulomb $\mathbf{F}_{12} = -\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}_1}\hat{\mathbf{r}}_1$ e $\mathbf{F}_{21} = -\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}_2}\hat{\mathbf{r}}_2$ dirette lungo la congiungente.

1.5.2 Rotazioni

Siano le rotazioni rigide, ovvero la rotazione delle coordinate euclidee del sistema rispetto ad un asse $\hat{\mathbf{n}}$ di un angolo θ . Portando l'angolo ad essere un parametro infinitesimo, la rotazione è una trasformazione della forma: $\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r} + \delta\theta\hat{\mathbf{n}} \wedge \mathbf{r}$ [10]. Se la lagrangiana è invariante sotto rotazione, l'integrale primo del moto è: $I = \mathbf{p}(\hat{\mathbf{n}} \wedge \mathbf{r}) = \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{r} \wedge \mathbf{p}) = \mathbf{L}\hat{\mathbf{n}}$, con $\mathbf{L}$ momento angolare: si conserva dunque la componente di $\mathbf{L}$ lungo l'asse di rotazione. In coordinate polari (r, φ, θ) , con r il modulo del vettore $\mathbf{r}$, φ l'angolo tra $\mathbf{r}$ e la direzione $\hat{\mathbf{n}}$ e θ l'angolo tra il vettore $\mathbf{r}_\perp = \mathbf{r} - (\mathbf{r}\hat{\mathbf{n}})\hat{\mathbf{n}}$ e una direzione ortogonale a $\hat{\mathbf{n}}$, allora la trasformazione diviene $\theta \rightarrow \theta + \delta\theta$, di conseguenza si ha l'integrale primo $I = \mathbf{p}\boldsymbol{\eta} = p_\theta$ in quanto $\boldsymbol{\eta} = (0, 0, 1)$ in coordinate polari, dunque $p_\theta = L_{\hat{\mathbf{n}}}$ (motivo per cui $\mathbf{L}$ è chiamato momento angolare). Se il sistema è invariante per simmetria di rotazione rispetto a 3 assi ortogonali, allora si conserva il vettore $\mathbf{L}$.

Es. Sistema di una particella in un potenziale kepleriano con centro $\mathbf{r}_0$

$$L(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{k}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|}$$

In coordinate polari: $r = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0| = |\tilde{\mathbf{r}}|$, $v^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 + r^2\dot{\theta}^2 \sin^2 \varphi$ ([14] §4)

$$\Rightarrow L(r, \dot{r}, \varphi, \dot{\varphi}, \dot{\theta}) = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 + r^2\dot{\theta}^2 \sin^2 \varphi) + \frac{k}{r}$$

Poiché L non dipende da θ , allora si conserva $p_\theta = L_{\hat{\mathbf{n}}}$.

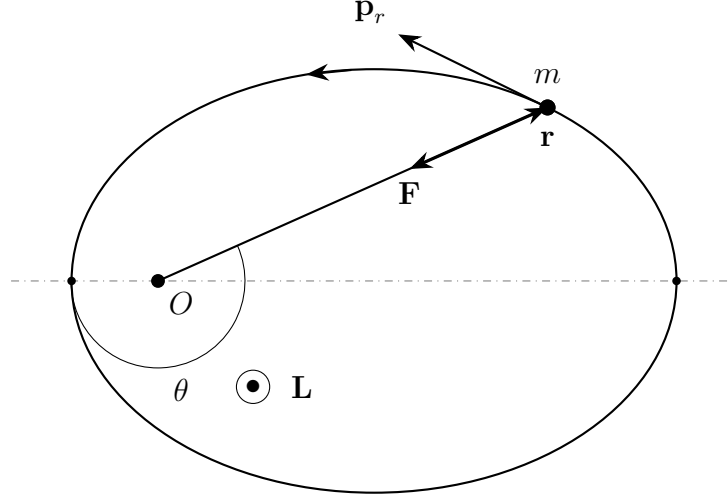


Fig. 1.2: Particella di massa m in un campo kepleriano, con forza $\mathbf{F} = -\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}}\hat{\mathbf{r}}$ centrale e diretta verso il centro di forza O , posto in un fuoco dell'ellisse.

1.5.3 Traslazioni temporali

Siano le traslazioni temporali di un intervallo di tempo infinitesimo $t \rightarrow t + \delta t$. Se la lagrangiana è invariante sotto traslazione temporale, l'integrale primo del moto è: $I = -\mathcal{E}$, o equivalentemente $I = \mathcal{E}$ energia del sistema: infatti, data la lagrangiana meccanica $L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - U(\mathbf{q})$ in coordinate euclidee, la funzione di Jacobi $\mathcal{E}$ equivale a:

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= \sum_i^N \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_i} \cdot \mathbf{v}_i - L = \sum_i^N \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_i} \left[\sum_j^N \frac{1}{2} m_j v_j^2 \right] \mathbf{v}_i - \left[\sum_j^N \frac{1}{2} m_j v_j^2 - U(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) \right] = \\ &= \sum_i^N m_i \mathbf{v}_i \mathbf{v}_i - \sum_j^N \frac{1}{2} m_j v_j^2 + U(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) = \sum_i^N \frac{1}{2} m_i v_i^2 + U(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) \end{aligned}$$

Dunque $\mathcal{E} = T + U$ pari all'energia meccanica del sistema [14].

Es. Sistema di una particella in un potenziale elastico con centro $\mathbf{r}_0$

$$L(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}k|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^2$$

Poiché L non dipende esplicitamente dal tempo, allora si conserva l'energia $\mathcal{E}$.

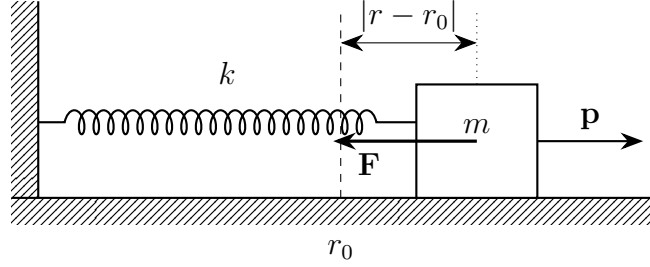


Fig. 1.3: Particella di massa m vincolata a una molla di costante elastica k . La forza di richiamo $\mathbf{F} = -\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}} \hat{\mathbf{r}}$ è diretta verso la posizione di equilibrio r_0 .

1.5.4 Variazioni di scala

Le trasformazioni di scala sono costituite da dilatazioni e contrazioni delle coordinate spazio-temporali e hanno forma [14]: $(t, \mathbf{r}) \rightarrow (\lambda^\beta t, \lambda^\alpha \mathbf{r})$ con $\lambda \in \mathbb{R}^+$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. In forma infinitesima si ha $\lambda = 1 + \epsilon$, per cui $(t, \mathbf{r}) \rightarrow (t + \beta \epsilon t, \mathbf{r} + \alpha \epsilon \mathbf{r})$. Se il sistema è invariante per variazione di scala (λ, β, α) , allora si ha un integrale del moto: $I = \alpha \mathbf{p} \mathbf{r} - \beta \mathcal{E} t$, o equivalentemente $\tilde{I} = \mathbf{p} \mathbf{r} - \frac{\beta}{\alpha} \mathcal{E} t$ (per $\alpha \neq 0$). Tali sono ad esempio presenti nei materiali in regime di transizione di fase di seconda specie, come nei sistemi di spin dei ferromagneti alla temperatura di Curie.

Es. Sistema di particelle in un potenziale omogeneo di grado k nelle coordinate:

$$U(\lambda^\alpha \mathbf{r}_1, \dots, \lambda^\alpha \mathbf{r}_N) = \lambda^{k\alpha} U(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N), \quad \mathbf{v}_i = \frac{d}{dt} \mathbf{r}_i \rightarrow \lambda^{\alpha-\beta} \frac{d}{dt} \mathbf{r}_i = \lambda^{\alpha-\beta} \mathbf{v}_i$$

$$\Rightarrow L(\lambda^\alpha \mathbf{r}_1, \dots, \lambda^\alpha \mathbf{r}_N, \lambda^{\alpha-\beta} \mathbf{v}_1, \dots, \lambda^{\alpha-\beta} \mathbf{v}_N, \lambda^\beta t) = \lambda^{2(\alpha-\beta)} \left[\sum_i^N \frac{1}{2} m v_i^2 \right] - \lambda^{k\alpha} U(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N)$$

Per essere invariante, dato $L' dt' = L' \lambda^\beta dt$, si devono avere i fattori:

$$\begin{cases} 2\alpha - \beta = 0 \\ k\alpha + \beta = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2\alpha - \beta = k\alpha + \beta \\ k\alpha + \beta = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (2+k)\alpha = 0 \\ \beta = -k\alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k = -2 \\ \beta = 2\alpha \end{cases} \vee \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \end{cases}$$

ovvero si ha invarianza per potenziali omogenei di grado $k = -2$ e con fattore di scala temporale pari a due volte il fattore di scala spaziale, e si conserva $I = \mathbf{p} \mathbf{r} - 2\mathcal{E} t$ (per $\alpha, \beta \neq 0$). Un esempio di tale potenziale è dato dal potenziale di dipolo (in approssimazione a grandi distanze) $U(r, \theta) = q \frac{P \cos \theta}{4\pi \epsilon_0 r^2}$.

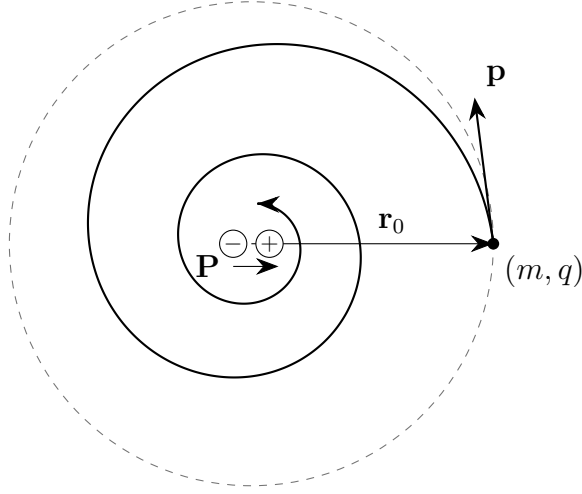


Fig. 1.4: Particella carica di massa m nel potenziale di un dipolo fisso $U(\mathbf{r}) = q \frac{\mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{r}}}{4\pi\epsilon_0 r^2}$.

1.6 Formalismo hamiltoniano

Oltre che con le equazioni di Eulero-Lagrange, le leggi del moto possono essere ricavate dal principio di minima azione con un altro formalismo, detto hamiltoniano, per cui le equazioni del moto passano dall'essere un sistema di s equazioni differenziali del secondo ordine definite sulla varietà degli stati $\mathbb{T}\mathbb{Q} \subset \mathbb{E}_{\mathbf{r}}^{3N} \times \mathbb{E}_{\dot{\mathbf{r}}}^{3N}$ ad essere un sistema di $2s$ equazioni differenziali al primo ordine definite sulla Varietà delle Fasi $\mathbb{T}^*\mathbb{Q} \subset \mathbb{E}_{\mathbf{r}}^{3N} \times \mathbb{E}_{\mathbf{p}}^{3N}$, detto Spazio delle Fasi [2]. Si definisce la funzione di Hamilton, o hamiltoniana, la trasformata di Legendre della lagrangiana rispetto alle velocità $\dot{\mathbf{q}}$:

$$H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) = \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \dot{\mathbf{q}}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) - L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}(\mathbf{q}, \mathbf{p}), t) = \mathbf{p} \dot{\mathbf{q}}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) - L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}(\mathbf{q}, \mathbf{p}), t) \quad (1.8)$$

pari all'energia di Jacobi $\mathcal{E}$ espressa in funzione degli impulsi coniugati $\mathbf{p}$ al posto delle velocità generalizzate $\dot{\mathbf{q}}$. Dati i differenziali delle funzioni di Lagrange e Hamilton:

$$\begin{aligned} dL &= \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} d\mathbf{q} + \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} d\dot{\mathbf{q}} + \frac{\partial L}{\partial t} dt = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) d\mathbf{q} + \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} d\dot{\mathbf{q}} + \frac{\partial L}{\partial t} dt = \dot{\mathbf{p}} d\mathbf{q} + \mathbf{p} d\dot{\mathbf{q}} + \frac{\partial L}{\partial t} dt \\ dH &= \frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}} d\mathbf{q} + \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} d\mathbf{p} + \frac{\partial H}{\partial t} dt = d(\mathbf{p} \dot{\mathbf{q}}) - dL = -\dot{\mathbf{p}} d\mathbf{q} + \dot{\mathbf{q}} d\mathbf{p} - \frac{\partial L}{\partial t} dt \end{aligned}$$

Si ottengono così le Equazioni di Hamilton (o canoniche):

$$\dot{\mathbf{q}} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} \quad \dot{\mathbf{p}} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}} \quad (1.9)$$

Inoltre, la variazione nel tempo della funzione di Hamilton è:

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}} + \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} \dot{\mathbf{p}} + \frac{\partial H}{\partial t} = -\dot{\mathbf{p}} \dot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{q}} \dot{\mathbf{p}} + \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}$$

Ovvero l'energia del sistema si conserva solo se la lagrangiana e l'hamiltoniana non dipendono esplicitamente dal tempo. Di conseguenza, il sistema è invariante per traslazione temporale se e solo se il sistema è conservativo. Come per il tempo, in generale se la lagrangiana e l'hamiltoniana dipendono da un parametro λ si ha [14]:

$$\left(\frac{\partial H}{\partial \lambda} \right)_{\mathbf{q}, \mathbf{p}} = - \left(\frac{\partial L}{\partial \lambda} \right)_{\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}}$$

L'azione ha dunque anche la forma: $S[\gamma] = \int_{t_1}^{t_2} [\mathbf{p} \dot{\mathbf{q}} - H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)] dt$. Si dimostra ([14], §43) che per l'azione lungo traiettorie reali $\gamma(\mathbf{q}(t))$ si ha:

$$dS(\mathbf{q}, t) = \mathbf{p} d\mathbf{q} - H dt \quad \frac{\partial S}{\partial \mathbf{q}} = \mathbf{p}(\mathbf{q}, t) \quad , \quad \frac{\partial S}{\partial t} = -H(\mathbf{q}, \frac{\partial S}{\partial \mathbf{q}}, t) \quad (1.10)$$

Si definiscono Osservabili le grandezze fisiche funzioni delle variabili canoniche $f(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$. Date due osservabili, si definiscono le Parentesi di Poisson:

$$\{f, g\} = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{q}} \frac{\partial g}{\partial \mathbf{p}} - \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} \frac{\partial g}{\partial \mathbf{q}} = \sum_k \left(\frac{\partial f}{\partial q_k} \frac{\partial g}{\partial p_k} - \frac{\partial f}{\partial p_k} \frac{\partial g}{\partial q_k} \right) \quad (1.11)$$

Tali formano una nuova osservabile $\{f, g\}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$, e hanno le seguenti proprietà [14, 2]:

- Sono bilineari: $\{\alpha f + \beta g, \lambda h + \gamma z\} = \alpha \lambda \{f, h\} + \alpha \gamma \{f, z\} + \beta \lambda \{g, h\} + \beta \gamma \{g, z\}$
- Sono antisimmetriche: $\{f, g\} = -\{g, f\}$
- Si annullano per osservabili costanti: $\{f, k\} = \{k, f\} = 0$
- Soddisfano l'identità di Jacobi: $\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} = 0$
- Soddisfano la regola di Leibniz del prodotto: $\{fg, h\} = f\{g, h\} + g\{f, h\}$

Data una osservabile, la sua variazione nel tempo è:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}} + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} \dot{\mathbf{p}} + \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{q}} \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} - \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} \frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}} + \frac{\partial f}{\partial t}$$

Dunque dalla Eq. 1.11 si ha che:

$$\frac{df}{dt}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) = \{f, H\} + \frac{\partial f}{\partial t} \quad (1.12)$$

Se una osservabile non dipende esplicitamente dal tempo, essa si conserva se $\{f, H\} = 0$, ovvero si dice che l'osservabile è in involuzione con l'hamiltoniana. Di conseguenza, ogni

integrale primo in variabili canoniche indipendente dal tempo $I(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ che emerge per simmetria del sistema è in involuzione con l'hamiltoniana del sistema stesso.

Inoltre, dal Teorema di Poisson [14], la parentesi di Poisson di due integrali primi del moto è essa stessa un integrale primo del moto (non assicura però che sia indipendente da quelli emergenti da simmetrie note):

$$\frac{d}{dt}\{I_1, I_2\} = 0 \quad (1.13)$$

1.7 Oltre la meccanica classica

Con lo sviluppo della teoria dell'elettromagnetismo nel corso del XIX secolo, furono introdotte due importanti novità nel pensiero fisico [17]:

- Il concetto di Campo come ente fisico responsabile della trasmissione delle interazioni a distanza tra le particelle (si veda Cap. 3)
- La costanza della velocità della luce c in ogni sistema inerziale

Quest'ultima in ovvia contraddizione con le trasformazioni di Galileo. Nel 1905 [17] Einstein pose la costanza della velocità della luce come postulato fondante, che assieme al principio di Relatività costituiscono i postulati della Relatività Ristretta. Ne consegue che le trasformazioni tra sistemi inerziali in moto relativo uniforme non hanno più una forma $\mathcal{G}(t, \mathbf{r}) = (t, \mathbf{r} + \mathbf{v}t)$, ma sono sostituite dalle Trasformazioni di Lorentz [10]:

$$\begin{cases} \mathbf{r}' = \mathbf{r} + (\gamma - 1)\frac{(\mathbf{v}\mathbf{r})\mathbf{v}}{v^2} - \gamma\mathbf{v}t \\ t' = \gamma(t - \frac{\mathbf{v}\mathbf{r}}{c^2}) \end{cases} \quad \gamma = (1 - \frac{v^2}{c^2})^{-\frac{1}{2}} \quad (1.14)$$

per cui cade il postulato di absolutezza del tempo. In meccanica relativistica si impone che l'azione sia invariante per trasformazioni di Lorentz [17]. Tale meccanica può essere svolta anche con nuovo formalismo, detto covariante: le linee di universo sono viste come curve dello Spazio di Minkowski $\mathbb{M}$ di coordinate $(ct, \mathbf{r})$ con metrica pseudo-euclidea ds per cui $ds^2 = c^2dt^2 - |d\mathbf{r}|^2$. Si definiscono quadrivettori controvarianti le osservabili che si trasformano come $X^\mu = (ct, \mathbf{r})$ tra sistemi inerziali: $X'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu X^\nu$, con $\Lambda^\mu{}_\nu$ matrice di Lorentz, mentre si definiscono quadrivettori covarianti le osservabili che si trasformano come X_μ con la matrice inversa trasposta $\Lambda_\mu{}^\nu$ [4]. La metrica dello spazio $\mathbb{M}$ risulta $ds^2 = \eta_{\mu\nu}dX^\mu dX^\nu = dX^\mu dX_\mu$, con $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(+1, -1, -1, -1)$ tensore metrico, per cui il prodotto scalare è definito come $X^\mu Y_\mu = \eta_{\mu\nu}X^\mu Y^\nu$ [4].

Data la quadrivelocità $\mathcal{U}^\mu = \frac{dX^\mu}{d\lambda}$ [4], con λ come parametro della curva, la formulazione lagrangiana covariante diviene [17, 10]:

$$\mathcal{S} = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \mathcal{L}(X^\mu(\lambda), \mathcal{U}^\mu(\lambda))d\lambda \quad \frac{d}{d\lambda} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathcal{U}^\mu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X^\mu} \quad (1.15)$$

La lagrangiana della particella libera diviene dunque [10]: $\mathcal{L}(X^\mu, \mathcal{U}^\mu) = -mc\sqrt{\mathcal{U}^\mu \mathcal{U}_\mu}$. Dalla Eq. 1.10 si definisce Quadrimpulso il vettore:

$$\mathcal{P}_\mu = -\frac{\partial S}{\partial X^\mu} = \left(-\frac{1}{c}\frac{\partial S}{\partial t}, -\frac{\partial S}{\partial \mathbf{r}}\right) = \left(\frac{\mathcal{E}}{c}, -\mathbf{p}\right) = \left(\mathbf{p}\frac{\mathbf{v}}{c} - \frac{L}{c}, -\frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}}\right) \quad (1.16)$$

con L lagrangiana fisica del sistema per cui $S = \int L dt$ [17]. Per la particella libera si hanno $\mathbf{p} = \gamma m \mathbf{v}$, $\mathcal{E} = \gamma mc^2$. Si dimostra che tale coincide con il quadrimpulso $\mathcal{P}_\mu = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathcal{U}^\mu}$. Il Teorema di Noether in meccanica relativistica garantisce che il sistema, per una trasformazione infinitesima $X^\mu \rightarrow X^\mu + \epsilon \xi^\mu$ che genera una variazione $\delta \mathcal{L} = \epsilon \frac{d\mathcal{F}}{d\lambda}$, ammette un integrale primo del moto.

Dim. La variazione della lagrangiana risulta:

$$\delta \mathcal{L} = \epsilon \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X^\mu} \xi^\mu + \epsilon \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathcal{U}^\mu} \frac{d\xi^\mu}{d\lambda} = \epsilon \frac{d}{d\lambda} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathcal{U}^\mu} \right] \xi^\mu + \epsilon \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathcal{U}^\mu} \frac{d\xi^\mu}{d\lambda} = \epsilon \frac{d}{d\lambda} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathcal{U}^\mu} \xi^\mu \right]$$

Dunque, data $\delta \mathcal{L} = \epsilon \frac{d\mathcal{F}}{d\lambda}$, si ha

$$\frac{d}{d\lambda} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathcal{U}^\mu} \xi^\mu - \mathcal{F} \right] = 0$$

Dunque si ha integrale primo del moto: $I = -\mathcal{P}_\mu \xi^\mu - \mathcal{F} = \mathbf{p}\boldsymbol{\xi} - \frac{\mathcal{E}}{c}\xi^0 - \mathcal{F}$. Per $\xi^\mu = (c\tau, \boldsymbol{\eta})$, si riottiene l'integrale $I = \mathbf{p}\boldsymbol{\eta} - \mathcal{E}\tau - \mathcal{F}$. $\square$

All'inizio del XX secolo un'altra rivoluzione cambiò il modo di descrivere la realtà fisica, e di conseguenza il modo con cui descrivere le simmetrie e il loro ruolo nella comprensione dei sistemi: la meccanica quantistica (si veda Cap. 2).

Capitolo 2

Simmetrie nella meccanica quantistica

In questo capitolo viene estesa la descrizione delle simmetrie al contesto della meccanica quantistica. Per studiare tali trasformazioni viene introdotto il formalismo della teoria dei gruppi, in particolare i gruppi di Lie per le trasformazioni continue, e delle loro rappresentazioni nello spazio degli stati. Vengono poi analizzate le simmetrie continue più importanti nello spazio delle coordinate, confrontate con le controparti nel caso classico, da cui vengono ottenute le stesse leggi di conservazione. Infine, si introduce il concetto di simmetria negli spazi interni.

2.1 Formalismo e Leggi degli stati quantistici

In meccanica quantistica, lo stato di un sistema fisico è totalmente definito da un raggio, ovvero classe di equivalenza di vettori che differiscono per un fattore complesso non nullo, in uno Spazio di Hilbert: $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$, che contiene tutte le informazioni del sistema. Si ha che il vettore del raggio utilizzato per descrivere il sistema è quello di norma unitaria $\langle\tilde{\psi}|\tilde{\psi}\rangle = 1$, con $\langle\cdot|\cdot\rangle$ prodotto scalare interno e $\langle\psi|$ vettore dello spazio duale $\mathcal{H}^*$ [22]. Le osservabili fisiche divengono degli operatori hermitiani $\hat{F}$ che agiscono sui vettori di stato, per cui se $|\psi\rangle$ è un autostato dell'operatore si ha $\hat{F}|\psi\rangle = \lambda|\psi\rangle$, con λ autovalore. Lo spettro di un operatore, ovvero l'insieme dei suoi autovalori, può essere continuo $k \in [a, b]$ oppure discreto $\{k_i\}_i$, $i \in \{1, \dots, n\}$, che per gli operatori hermitiani corrispondono a valori reali [16]. L'insieme degli autostati di un operatore $\{|k_1\rangle, \dots, |k_n\rangle\}$ (o $[|k_a\rangle, |k_b\rangle]$ se continui) può costituire una base dello spazio $\mathcal{H}$ se soddisfa [22]:

- Relazione di Ortonormalità: $\langle k_i | k_j \rangle = \delta_{ij}$ (o $\langle k_a | k_b \rangle = \delta(k_a - k_b)$)
- Relazione di Completezza: $\sum_i |k_i\rangle\langle k_i| = \hat{I}$ (o $\int_{k_a}^{k_b} |k'\rangle\langle k'| dk' = \hat{I}$), con $\hat{I}$ operatore identità e $|k_i\rangle\langle k_i| = \hat{P}_{k_i}$ proiettore sul vettore $|k_i\rangle$ della base

Dunque un qualsiasi stato $|\psi\rangle$ è descrivibile come sovrapposizione di autostati della base spettrale completa di un operatore [22]:

$$|\psi\rangle = \sum_i^n c_i |k_i\rangle \quad |\psi\rangle = \int_{k_a}^{k_b} c(k') |k'\rangle dk'$$

I coefficienti corrispondono alle proiezioni dello stato sui vettori della base: $c_i = \langle k_i | \psi \rangle \in \mathbb{C}$ ($c(k') = \langle k' | \psi \rangle$). Per uno stato normalizzato: $\sum_i |c_i|^2 = 1$ ($\int_{k_a}^{k_b} |c(k')|^2 dk' = 1$).

Il processo di misura di una osservabile di una particella corrisponde, in meccanica quantistica, alla proiezione dello stato non misurato $|\psi\rangle$ su un autostato dell'operatore associato a tale osservabile $|k_i\rangle$ restituendo come risultato della misura l'autovalore corrispondente k_i , con probabilità (o densità di probabilità) che lo stato collassi su un determinato autostato pari a: $\mathcal{P}_{k_i} = \langle \psi | \hat{P}_{k_i} | \psi \rangle = |\langle k_i | \psi \rangle|^2$ [22]. Tale è il motivo per cui lo stato di una particella è determinato dal vettore normalizzato del raggio dello spazio $\mathcal{H}$, infatti la somma delle probabilità su tutti gli autostati deve dare la probabilità globale 1.

Il valor medio di una osservabile è pari alla somma dei suoi autovalori pesati per la probabilità che lo stato collassi in quel autostato, pari a $\langle \hat{F} \rangle = \langle \psi | \hat{F} | \psi \rangle$ [22].

Invece che utilizzare lo stato dello spazio di Hilbert in forma astratta, si utilizza più comunemente la sua espressione in coordinate rispetto ad una certa base completa di autostati, in particolare rispetto agli autostati posizione descritti dalle coordinate spaziali $\mathbf{q}$: $\psi(\mathbf{q}) = \langle \mathbf{q} | \psi \rangle$, detta Funzione d'Onda. Su di essa, le osservabili sono costituite dalle rappresentazioni in coordinate degli operatori corrispondenti $\hat{F}_{(\mathbf{q})}$.

Es. L'operatore impulso in coordinate $\mathbf{x}$ è: $\hat{\mathbf{p}}_{(\mathbf{x})} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}$ [16]

Per studiare l'evoluzione temporale in meccanica quantistica esistono diverse rappresentazioni: la rappresentazione di Schrödinger, per cui sono gli stati quantistici $|\psi(t)\rangle$ ad evolversi nel tempo, e la rappresentazione di Heisenberg, per cui sono gli operatori delle osservabili ad evolversi nel tempo [16, 22]. La legge di evoluzione temporale degli stati prende il nome di Equazione di Schrödinger [22]:

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = \hat{H} |\psi(t)\rangle \quad (2.1)$$

con $\hat{H}$ operatore hamiltoniano. In coordinate: $i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\mathbf{q}, t) = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{q}^2} + U(\mathbf{q}) \right] \psi(\mathbf{q}, t)$ [3]. Si dimostra che essa corrisponde al caso classico nel limite per $\hbar \rightarrow 0$ [16]. I valori medi delle osservabili si evolvono secondo la legge nota come Teorema di Ehrenfest:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle \hat{F} \rangle &= \frac{d}{dt} \langle \psi | \hat{F} | \psi \rangle = \left\langle \frac{d}{dt} \psi | \hat{F} | \psi \right\rangle + \langle \psi | \frac{\partial}{\partial t} \hat{F} | \psi \rangle + \langle \psi | \hat{F} | \frac{d}{dt} \psi \rangle = \\ &= -\frac{1}{i\hbar} \langle \psi | \hat{H} \hat{F} | \psi \rangle + \frac{1}{i\hbar} \langle \psi | \hat{F} \hat{H} | \psi \rangle + \left\langle \frac{\partial \hat{F}}{\partial t} \right\rangle = \frac{1}{i\hbar} \langle [\hat{F}, \hat{H}] \rangle + \left\langle \frac{\partial \hat{F}}{\partial t} \right\rangle \end{aligned}$$

Con $[\hat{F}, \hat{G}] = \hat{F}\hat{G} - \hat{G}\hat{F}$ commutatore degli operatori [16]. Si dimostra che ponendo gli operatori delle osservabili come funzioni degli operatori posizione $\hat{\mathbf{q}}$ e impulso $\hat{\mathbf{p}}$ e del tempo si ha al primo ordine [16]:

$$\frac{1}{i\hbar}[\hat{F}, \hat{H}] = \{\hat{F}, \hat{H}\}_{\mathbf{q}, \mathbf{p}} \quad (2.2)$$

con $\{\}_{\mathbf{q}, \mathbf{p}}$ Parentesi di Poisson, detta Regola di quantizzazione canonica [22]. Si ottiene:

$$\frac{d}{dt}\langle \hat{F} \rangle = \langle \{\hat{F}, \hat{H}\}_{\mathbf{q}, \mathbf{p}} \rangle + \left\langle \frac{\partial \hat{F}}{\partial t} \right\rangle \quad (2.3)$$

Ovvero i valori medi delle osservabili seguono l'evoluzione classica.

2.2 Trasformazioni nello spazio degli stati

Nel formalismo della meccanica quantistica, le trasformazioni passive coincidono con il cambio di base con cui si descrivono gli stati in $\mathcal{H}$. A differenza del caso classico, in cui tali basi sono unicamente quelle dell'operatore posizione, nello spazio di Hilbert il cambio di parametrizzazione può avvenire anche in basi spettrali di operatori diversi. Date due basi diverse $\{|e_i\rangle\}$ e $\{|e'_i\rangle\}$, allora esiste un operatore unitario $\hat{U}$ che mappa una nell'altra: $\hat{U} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}, \{|e_i\rangle\} \mapsto \{|e'_i\rangle\}$ [22]. Un operatore $\hat{U}$ è detto unitario se [22]:

$$\hat{U}\hat{U}^\dagger = \hat{U}^\dagger\hat{U} = \hat{I} \quad \hat{U}^\dagger = \hat{U}^{-1}$$

Definendo $P(\mathcal{H}) = (\mathcal{H} \setminus \{0\}) / \sim$ lo spazio dei raggi $|\psi\rangle \sim \alpha|\psi\rangle$ dello spazio degli stati $\mathcal{H}$, $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, si definiscono trasformazioni attive le mappe $T : P(\mathcal{H}) \rightarrow P(\mathcal{H}), |\tilde{\psi}\rangle \mapsto |\tilde{\psi}'\rangle$ che portano uno stato in un altro [25]. Dalla definizione di raggio, la trasformazione può essere considerata una mappa sullo spazio $\mathcal{H}$ con operatore associato $\hat{A}(T)$ lineare [23]. Esprimendo gli stati rispetto ad una base $\{|e_i\rangle\}$, l'operatore associato corrisponde ad una matrice che agisce sulle coordinate del vettore di stato. Dato un insieme di trasformazioni $\{T_i\}$ (es. le trasformazioni di traslazione) si richiede che esso soddisfi [25]:

- La composizione di trasformazioni T_1, T_2 corrisponde ad una trasformazione T_3 dello stesso insieme
- Per ogni trasformazione T_i esiste la trasformazione inversa T_i^{-1} che mappa lo stato finale $|\psi'\rangle$ nello stato iniziale $|\psi\rangle$
- Esiste la trasformazione identica T_0 che mappa lo stato in sé stesso

Tali trasformazioni possono essere studiate attraverso il formalismo della Teoria dei Gruppi e delle Rappresentazioni.

2.3 Gruppi e Rappresentazioni

Dato un insieme G e una operazione binaria $\cdot : G \times G \rightarrow G$, la struttura $(G, \cdot)$ è definita Gruppo se soddisfa i seguenti assiomi [23]:

- L'operazione è associativa: $g_1 \cdot (g_2 \cdot g_3) = (g_1 \cdot g_2) \cdot g_3 \quad \forall g_1, g_2, g_3 \in G$
- Esiste l'elemento neutro $e \in G : e \cdot g = g \cdot e = g \quad \forall g \in G$
- Esiste l'elemento inverso $g^{-1} \in G \quad \forall g \in G : g^{-1} \cdot g = g \cdot g^{-1} = e$

La cardinalità dell'insieme G con struttura di gruppo è detta Ordine del gruppo, per cui si possono distinguere [23]:

- I gruppi discreti, che possono avere ordine finito (es. gruppo delle permutazioni su n elementi S_n che ha ordine $n!$) o infinito numerabile (es. gruppo degli interi $\mathbb{Z}$)
- I gruppi continui, con ordine non numerabile, parametrizzabili da un numero n , detto dimensione, di parametri continui (es. gruppo delle matrici $n \times n$ unitarie con determinante 1 $SU(n)$)

Un gruppo è detto Abelian se $g_1 \cdot g_2 = g_2 \cdot g_1 \quad \forall g_1, g_2 \in G$. Se un gruppo G ha anche struttura di varietà differenziabile, tale per cui l'operazione binaria $\cdot : G \times G \rightarrow G$ e la mappa $f(g) = g^{-1}$ sono funzioni lisce (di classe $\mathcal{C}^\infty$), allora è detto Gruppo di Lie [13]. Dato $\mathcal{H}$ uno spazio di Hilbert, una Rappresentazione di un gruppo G sullo spazio $\mathcal{H}$ è un omomorfismo $\Theta : G \rightarrow L(\mathcal{H}), g \mapsto \hat{T}(g)$ tra il gruppo e lo spazio degli operatori lineari sullo spazio di Hilbert tale per cui: $\hat{T}(g_1)\hat{T}(g_2) = \hat{T}(g_1 \cdot g_2)$ [27]. Si ottiene dunque che l'operatore associato all'elemento neutro è l'identità $\hat{T}(e) = \hat{I}$ e la composizione delle rappresentazioni di due elementi inversi è l'identità $\hat{T}(g)\hat{T}(g^{-1}) = \hat{I}$, di conseguenza la rappresentazione di un gruppo costituisce anch'essa un gruppo che ha come operazione binaria la composizione di operatori. Data $\{|e_i\rangle\}$ una base di $\mathcal{H}$, allora gli operatori $L(\mathcal{H})$ possono essere espressi come matrici che agiscono sulle coordinate dei vettori: la rappresentazione $\Theta(G)$ espressa come matrici costituisce la Rappresentazione matriciale del gruppo G che costituisce un gruppo che ha come operazione il prodotto tra matrici [27]. Una rappresentazione è detta fedele se è iniettiva [27].

Dato un gruppo di Lie, la sua rappresentazione è anch'essa un gruppo di Lie se l'omomorfismo Θ è differenziabile, per cui $\Theta(G) \subset L(\mathcal{H})$ eredita la struttura di varietà differenziabile. Tale differenziale costituisce una mappa tra i fibrati tangenti delle due varietà $d\Theta_g : T_g G \rightarrow TL_{\Theta(g)}(\mathcal{H})$ [13]. La Rappresentazione infinitesima è la rappresentazione dell'intorno dell'elemento neutro e , che corrisponde tramite l'omomorfismo Θ all'intorno dell'identità nel gruppo di Lie degli operatori lineari. Si definisce Generatore della rappresentazione infinitesima l'operatore corrispondente alla rappresentazione del vettore tangente all'elemento neutro [13]:

$$\hat{K} = d\Theta_e(k) = \left. \frac{d\Theta}{d\alpha}(\gamma(\alpha)) \right|_{\alpha=0}$$

con $\gamma(\alpha) : \mathcal{V}(0) \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{V}(e) \subset G$ curva differenziabile che mappa l'intorno reale di 0 nell'intorno dell'elemento neutro e tale che $\gamma(0) = e$ e $\dot{\gamma}(0) = k \in T_e G$. Tale permette di mappare gli operatori della rappresentazione infinitesima come [13]:

$$\hat{T} = e^{\alpha \hat{K}} \quad (2.4)$$

con α pari ad un parametro continuo che mappa gli elementi di $\mathcal{V}(e)$. Se $T_e G$ ha dimensione n , allora esisteranno n generatori indipendenti per cui si ha $\hat{\mathbf{K}} = (\hat{K}_1, \dots, \hat{K}_n)$ [13]. Dato uno Spazio Vettoriale V su un campo $\mathbb{K}$, esso ha struttura di Algebra di Lie $\mathfrak{a}$ se vi si definisce un'operazione binaria $[\cdot, \cdot] : V \times V \rightarrow V$ detta commutatore (o prodotto di Lie) che soddisfa le proprietà [13]:

- È bilineare: $[\alpha \mathbf{x} + \beta \mathbf{y}, \delta \mathbf{w} + \lambda \mathbf{z}] = \alpha \delta [\mathbf{x}, \mathbf{w}] + \alpha \lambda [\mathbf{x}, \mathbf{z}] + \beta \delta [\mathbf{y}, \mathbf{w}] + \beta \lambda [\mathbf{y}, \mathbf{z}], \forall \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{w}, \mathbf{z} \in \mathfrak{a}, \forall \alpha, \beta, \delta, \lambda \in \mathbb{K}$
- È antisimmetrica: $[\mathbf{x}, \mathbf{y}] = -[\mathbf{y}, \mathbf{x}] \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathfrak{a}$
- Soddisfa l'identità di Jacobi: $[\mathbf{x}, [\mathbf{y}, \mathbf{z}]] + [\mathbf{y}, [\mathbf{z}, \mathbf{x}]] + [\mathbf{z}, [\mathbf{x}, \mathbf{y}]] = \mathbf{0} \forall \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathfrak{a}$

Si dimostra che tale è alterna: $[\mathbf{x}, \mathbf{x}] = \mathbf{0}$ elemento neutro della somma vettoriale [13]. Nello spazio $L(\mathcal{H})$, il commutatore $[\hat{A}, \hat{B}] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}$ genera un'algebra di Lie $\mathfrak{L}(\mathcal{H})$ [13]. Dati i generatori $\{\hat{K}_i\}$ della rappresentazione infinitesima, essi costituiscono una base della rappresentazione differenziale $d\Theta(T_e G) \subset T_f L(\mathcal{H})$ e definiscono un'algebra di Lie con i commutatori degli operatori. Poiché $d\Theta$ è omomorfismo di algebre, esso soddisfa la relazione [13]: $[\hat{K}_i, \hat{K}_j] = [d\Theta(k_i), d\Theta(k_j)] = d\Theta([k_i, k_j]_{\mathfrak{g}})$, con $[\cdot, \cdot]_{\mathfrak{g}}$ commutatore che induce un'algebra di Lie sul gruppo G , per cui si ha [25]:

$$\begin{aligned} [\hat{K}_i, \hat{K}_j] &= C_{ij}^l \hat{K}_l \\ [k_i, k_j]_{\mathfrak{g}} &= C_{ij}^l k_l \end{aligned} \quad (2.5)$$

con C_{ij}^l dette Costanti di Struttura. Le algebre $\mathfrak{g}$ e $\mathfrak{L}(\mathcal{H})$ sono proprio gli spazi tangenti $T_e G$ e $T_f L(\mathcal{H})$, e gli elementi dei gruppi sono mappati dagli elementi delle loro algebre tramite l'esponenziale Eq. 2.4 [13].

2.4 Trasformazioni di Simmetria

Le ipotesi richieste per gli insiemi di trasformazioni soddisfano quindi gli assiomi dei gruppi, con operazione interna la composizione di trasformazioni. Tale gruppo di trasformazioni $\{T_i\}$ ha rappresentazione nell'insieme degli operatori lineari che agiscono sullo spazio degli stati $\{\hat{A}_i\}$. Poiché le trasformazioni non agiscono direttamente sui vettori di $\mathcal{H}$ bensì sugli stati descritti dai raggi, che appartengono allo spazio proiettivo $P(\mathcal{H})$, la rappresentazione nello spazio degli operatori ha legge di composizione più

generale $\hat{A}(T_1)\hat{A}(T_2) = e^{i\phi(T_1, T_2)}\hat{A}(T_1T_2)$, in quanto i vettori del raggio con medesima norma unitaria differiscono per un termine di fase $e^{i\phi}$ [25]. Nei casi più comuni ci si può ricondurre ad una rappresentazione ordinaria $\hat{A}(T_1)\hat{A}(T_2) = \hat{A}(T_1T_2)$ [25].

Dati i parametri da cui dipende il gruppo di trasformazione, l'ordine del gruppo è in corrispondenza con lo spazio dei parametri: se tali assumono valori discreti, finiti o al massimo infinito numerabile, il gruppo è discreto (es. Trasformazioni di Parità e Inversione temporale), mentre se assumono valori continui il gruppo è a sua volta continuo [23]. Se lo spazio dei parametri ha struttura di varietà differenziabile, allora dato l'omomorfismo che mappa i parametri nella corrispondente trasformazione del gruppo, esso induce la struttura di varietà differenziabile sul gruppo: se vengono soddisfatte le ipotesi di differenziabilità della composizione di trasformazioni e della funzione di inversione allora il gruppo di trasformazioni è di Lie [13]. Un gruppo di trasformazioni è detto Gruppo di Simmetria per il sistema se lascia invariato il modulo quadro del prodotto scalare dei vettori di stato. Dato lo stato $|\psi\rangle$ appartenente al raggio $|\tilde{\psi}\rangle$ e lo stato $|\xi\rangle \in |\tilde{\xi}\rangle$, una trasformazione S è una simmetria se, dati $|\psi'\rangle = \hat{A}(S)|\psi\rangle$ e $|\xi'\rangle = \hat{A}(S)|\xi\rangle$, si ha [25]:

$$|\langle\psi'|\xi'\rangle|^2 = |\langle\psi|\xi\rangle|^2 \quad (2.6)$$

Il Teorema di Wigner [3] dimostra che per ogni gruppo di simmetria del sistema la sua rappresentazione sullo spazio degli stati deve essere unitaria (lineare) o antiunitaria (antilineare), ovvero la rappresentazione è un sottogruppo del gruppo degli operatori unitari $\hat{U}$ e degli operatori antiunitari $\hat{C}\hat{U}$, con $\hat{C}$ operatore di coniugazione complessa. Se il gruppo di simmetria è di Lie connesso con parametri $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ allora ammette rappresentazione infinitesima unitaria e gli operatori nell'intorno di $\hat{I}$ hanno forma:

$$\hat{U} = e^{i\alpha\hat{\mathbf{K}}} = \hat{I} + i\alpha\hat{\mathbf{K}} + O(\alpha^2) \quad (2.7)$$

Si introduce il fattore immaginario i nella forma esponenziale in modo che l'unitarietà dell'operatore sia equivalente all'hermitianità del generatore $\hat{\mathbf{K}}$, ovvero esso potrà essere una osservabile del sistema. Solo simmetrie associate a rappresentazioni unitarie, e dunque lineari, possono avere rappresentazione infinitesima. Inoltre, le simmetrie più comuni si riconducono a rappresentazioni unitarie tranne che per l'inversione temporale $\mathcal{T} : t \mapsto -t$ che risulta antiunitaria e antilineare (conseguentemente, tutte le simmetrie riconducibili a composizioni di altre simmetrie e un numero dispari di inversioni temporali sono anch'esse antiunitarie e antilineari).

Data una trasformazione di simmetria S , i valori medi delle osservabili si trasformano come [3]: $\langle\hat{F}'\rangle = \langle\psi'|\hat{F}|\psi'\rangle = \langle\psi|\hat{U}^\dagger\hat{F}\hat{U}|\psi\rangle = \langle\hat{F}'\rangle$, dunque $\hat{F}' = \hat{U}^\dagger\hat{F}\hat{U}$.

Si definiscono Simmetrie dinamiche quelle simmetrie che lasciano invariato l'operatore hamiltoniano, ovvero $\hat{H} = \hat{U}^\dagger\hat{H}\hat{U}$, ma poiché $\hat{U}^\dagger = \hat{U}^{-1}$ allora si ha che $[\hat{U}, \hat{H}] = 0$, ovvero l'hamiltoniana commuta con l'operatore unitario: si ha dunque che l'Eq. 2.1 rimane invariata, dunque lo stato trasformato si evolve allo stesso modo dello stato originale. Se il gruppo di simmetria è di Lie, allora si ha dalla Eq. 2.7 che [3]:

$$[\hat{K}_i, \hat{H}] = 0 \quad \forall \hat{K}_i \in \hat{\mathbf{K}} = (\hat{K}_1, \dots, \hat{K}_n) \quad (2.8)$$

Se i generatori della simmetria $\hat{K}_i$ sono delle osservabili del sistema e non dipendono esplicitamente dal tempo, allora dalla Eq. 2.3 si ha che il valor medio $\langle \hat{K}_i \rangle$ è una costante della dinamica del sistema quantistico [3].

2.5 Simmetrie continue delle coordinate

Analogamente al caso classico (Sez. 1.5) in questo paragrafo vengono analizzate le simmetrie continue nello spazio delle coordinate e del tempo più importanti, dimostrando come siano legate agli stessi principi di conservazione osservati classicamente. Le trasformazioni nello spazio delle coordinate agiscono sullo stato variando le coordinate, e di conseguenza le probabilità, di tale stato rispetto alla base spettrale invariata dell'operatore posizione. Tali gruppi di simmetrie risultano connessi e abeliani o compatti, dunque la rappresentazione esponenziale descrive tutti gli elementi del gruppo [13].

2.5.1 Traslazioni spaziali

Il gruppo delle traslazioni di coordinate è un gruppo continuo di Lie i cui elementi $T(\Delta\mathbf{r})$ sono identificabili dallo spostamento delle coordinate spaziali. Data la funzione d'onda $\psi(\mathbf{r})$ rispetto all'autostato $|\mathbf{r}\rangle$, la traslazione ha rappresentazione:

$$\hat{U}_{trasl}(\Delta\mathbf{r}) : |\psi\rangle \mapsto |\psi'\rangle, \psi(\mathbf{r}) \mapsto \psi'(\mathbf{r}) = \psi(\mathbf{r} - \Delta\mathbf{r}), \text{ dunque } \hat{U}_{trasl(\mathbf{r})}(\Delta\mathbf{r})\psi(\mathbf{r}) = \psi(\mathbf{r} - \Delta\mathbf{r}).$$

Per spostamenti infinitesimi $d\mathbf{r}$, si hanno gli sviluppi al primo ordine:

$$\hat{U}_{trasl(\mathbf{r})}(d\mathbf{r})\psi(\mathbf{r}) = \hat{I}\psi(\mathbf{r}) + id\mathbf{r}\hat{\mathbf{K}}_{trasl(\mathbf{r})}\psi(\mathbf{r}), \quad \psi(\mathbf{r} - d\mathbf{r}) = \psi(\mathbf{r}) - d\mathbf{r}\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}}\psi(\mathbf{r})$$

dunque $i\hat{\mathbf{K}}_{trasl(\mathbf{r})} = -\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}} \Rightarrow \hbar\hat{\mathbf{K}}_{trasl(\mathbf{r})} = i\hbar\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}} = -\hat{\mathbf{p}}_{(\mathbf{r})}$. Il generatore delle traslazioni è quindi $\hat{\mathbf{K}}_{trasl} = -\frac{1}{\hbar}\hat{\mathbf{p}}$ e l'operatore traslazione ha forma:

$$\hat{U}_{trasl}(\Delta\mathbf{r}) = e^{-\frac{i}{\hbar}\Delta\mathbf{r}\cdot\hat{\mathbf{p}}} \quad (2.9)$$

Tale generatore costruisce un'algebra di Lie $[\hat{K}_i, \hat{K}_j] = \frac{1}{\hbar^2}[\hat{p}_i, \hat{p}_j] = 0$ [3]. Ciò significa che l'operazione binaria del gruppo $\{T(\Delta\mathbf{r})\}$ è commutativa e il gruppo è abeliano [13]: ne deriva che una traslazione composta $T(\Delta\mathbf{r}_1)...T(\Delta\mathbf{r}_n)$ non dipende dall'ordine con cui vengono applicate le singole traslazioni $T(\Delta\mathbf{r}_i)$. Se il gruppo delle traslazioni è un gruppo di simmetria dinamica del sistema, allora si conserva il valor medio $\langle\hat{\mathbf{p}}\rangle$.

2.5.2 Rotazioni

Il gruppo delle rotazioni è un gruppo continuo di Lie con elementi identificabili dall'asse di rotazione con versore $\mathbf{n}$ e dall'angolo di rotazione $\theta \in [0, 2\pi)$ e ha rappresentazione:

$$\hat{U}_{rot}(\mathbf{n}, \theta) : |\psi\rangle \mapsto |\psi'\rangle, \psi(\mathbf{r}) \mapsto \psi'(\mathbf{r}) = \psi(\mathcal{R}_{\mathbf{n}}^{-1}(\theta)\mathbf{r}), \text{ dunque } \hat{U}_{rot(\mathbf{r})}(\mathbf{n}, \theta)\psi(\mathbf{r}) = \psi(\mathcal{R}_{\mathbf{n}}^{-1}(\theta)\mathbf{r}).$$

Per rotazioni infinitesime $d\theta$, si hanno gli sviluppi:

$$\hat{U}_{rot(\mathbf{r})}(\mathbf{n}, d\theta)\psi(\mathbf{r}) = \hat{I}\psi(\mathbf{r}) + id\theta\mathbf{n}\hat{\mathbf{K}}_{rot(\mathbf{r})}\psi(\mathbf{r})$$

$$\psi(\mathcal{R}_{\mathbf{n}}^{-1}(d\theta)\mathbf{r}) = \psi(\mathbf{r} - d\theta\mathbf{n} \times \mathbf{r}) = \psi(\mathbf{r}) - d\theta(\mathbf{n} \times \mathbf{r}) \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\psi(\mathbf{r}) = \psi(\mathbf{r}) - d\theta\mathbf{n} \cdot (\mathbf{r} \times \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}})\psi(\mathbf{r})$$

dunque $\hat{\mathbf{K}}_{rot(\mathbf{r})} = i\mathbf{r} \times \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}$. Il generatore delle rotazioni è quindi $\hat{\mathbf{K}}_{rot} = -\frac{1}{\hbar}\hat{\mathbf{L}}$, con $\mathbf{L}$ momento angolare, e l'operatore rotazione ha forma:

$$\hat{U}_{rot}(\mathbf{n}, \theta) = e^{-\frac{i}{\hbar}\theta\mathbf{n} \cdot \hat{\mathbf{L}}} \quad (2.10)$$

Tale generatore costruisce un'algebra di Lie $[\hat{K}_i, \hat{K}_j] = \frac{1}{\hbar^2}[\hat{L}_i, \hat{L}_j] = \frac{i}{\hbar}\varepsilon_{ijk}\hat{L}_k = -i\varepsilon_{ijk}\hat{K}_k$ [3], ovvero il gruppo delle rotazioni non è abeliano. Se il gruppo delle rotazioni è un gruppo di simmetria dinamica del sistema, allora si conserva il valor medio $\langle \hat{\mathbf{L}} \rangle$.

2.5.3 Traslazioni temporali

Il gruppo delle traslazioni temporali è un gruppo continuo di Lie con elementi identificabili dallo spostamento temporale Δt dei vettori di stato: corrisponde dunque all'operatore di evoluzione temporale che mappa i vettori di stato di un raggio nella loro evoluzione futura o passata. Esso ha rappresentazione: $\hat{U}_{temp}(\Delta t) : |\psi(t)\rangle \mapsto |\psi(t + \Delta t)\rangle$.

Per traslazioni temporali infinitesime dt , si hanno gli sviluppi:

$$\hat{U}_{temp}(dt)|\psi(t)\rangle = \hat{I}|\psi(t)\rangle + idt\hat{K}_{temp}|\psi(t)\rangle$$

$$|\psi(t + dt)\rangle = |\psi(t)\rangle + dt\frac{d}{dt}|\psi(t)\rangle$$

dunque $\hat{K}_{temp} = -i\frac{d}{dt}$. Il generatore delle traslazioni temporali è quindi $\hat{K}_{temp} = -\frac{1}{\hbar}\hat{H}$, e l'operatore di evoluzione temporale ha forma:

$$\hat{U}_{temp}(\Delta t) = e^{-\frac{i}{\hbar}\Delta t\hat{H}} \quad (2.11)$$

Poiché vi è un solo parametro, il generatore costruisce l'algebra banale $[\hat{K}, \hat{K}] = 0$, per cui il gruppo è abeliano. Se il gruppo di evoluzione temporale è un gruppo di simmetria dinamica del sistema, allora si conserva il valor medio $\langle \hat{H} \rangle$.

2.5.4 Variazioni di Scala

Il gruppo delle trasformazioni di scala di grado (α, β) fissati (rispettivamente per le coordinate spaziali e temporali) è un gruppo continuo di Lie con elementi identificabili dal fattore di scala $\lambda > 0$ e ha rappresentazione:

$$\hat{U}_{scale}(\lambda; \alpha, \beta) : |\psi(t)\rangle \mapsto |\psi'(\lambda^\beta t)\rangle, \psi(\mathbf{r}, t) \mapsto \psi'(\mathbf{r}, t) = \psi(\lambda^{-\alpha}\mathbf{r}, \lambda^{-\beta}t)$$

$$\Rightarrow \hat{U}_{scale}(\lambda; \alpha, \beta)\psi(\mathbf{r}, t) = \psi(\lambda^{-\alpha}\mathbf{r}, \lambda^{-\beta}t)$$

Per variazioni di scala infinitesime $\lambda \approx 1 + \ln \lambda$ al primo ordine si hanno gli sviluppi:

$$\hat{U}_{scale}(\lambda; \alpha, \beta)\psi(\mathbf{r}, t) = \hat{I}\psi(\mathbf{r}, t) + i \ln \lambda \hat{K}_{scale(\mathbf{r})}\psi(\mathbf{r}, t)$$

$$\psi((1 + \ln \lambda)^{-\alpha}\mathbf{r}, (1 + \ln \lambda)^{-\beta}t) = \psi(\mathbf{r}, t) - \ln \lambda (\beta t \frac{\partial}{\partial t} + \alpha \mathbf{r} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}})\psi(\mathbf{r}, t)$$

dunque $\hat{K}_{scale(\mathbf{r})} = i\beta t \frac{\partial}{\partial t} + i\alpha \mathbf{r} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} = \frac{\beta t}{\hbar} \hat{H}(\mathbf{r}) - \frac{\alpha \mathbf{r}}{\hbar} \hat{\mathbf{p}}(\mathbf{r})$, che può essere ricondotto ad un generatore hermitiano $\hat{K}_{scale}^{sym}$ con l'anticommutatore $\{\hat{\mathbf{r}}, \hat{\mathbf{p}}\} = \hat{\mathbf{r}}\hat{\mathbf{p}} + \hat{\mathbf{p}}\hat{\mathbf{r}} = 2\hat{\mathbf{r}}\hat{\mathbf{p}} - 3i\hbar$, allora si sostituisce $\hat{\mathbf{r}}\hat{\mathbf{p}}$ con l'operatore $\frac{1}{2}\{\hat{\mathbf{r}}, \hat{\mathbf{p}}\}$ (il termine $+\frac{3}{2}i\hbar$ viene assorbito nella simmetrizzazione), e l'operatore di scala è:

$$\hat{U}_{scale}(\lambda; \alpha, \beta) = e^{-\frac{i}{\hbar} \ln \lambda (\frac{\alpha}{2}\{\hat{\mathbf{r}}, \hat{\mathbf{p}}\} - \beta t \hat{H})} \quad (2.12)$$

con il generatore che costruisce un'algebra $[\hat{K}, \hat{K}] = [\hat{K}^{sym}, \hat{K}^{sym}] = 0$. Tale costituisce un sottogruppo del gruppo di trasformazioni di scala in cui i parametri α e β sono liberi invece che vincolati ad una curva specifica parametrizzata da λ (nel quale si avrebbe un'algebra di Lie più complessa). Poiché $\hat{K}$ dipende esplicitamente dal tempo, esso si conserva se soddisfa la relazione $\frac{d\hat{K}}{dt} = 0 = \frac{\partial \hat{K}}{\partial t} + \frac{1}{i\hbar}[\hat{K}, \hat{H}]$. Dato $\frac{\partial \hat{K}}{\partial t} = \frac{\beta}{\hbar} \hat{H}$, allora si deve avere che $\beta \hat{H} = i[\hat{K}, \hat{H}]$. Se vale ciò, allora si conserva $D = \frac{\alpha}{2}\langle\{\hat{\mathbf{r}}, \hat{\mathbf{p}}\}\rangle - \beta t \langle\hat{H}\rangle$.

2.6 Simmetrie interne

Una novità introdotta dalla meccanica quantistica è la presenza di osservabili che caratterizzano lo stato del sistema e non dipendono dalle coordinate canoniche $(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ [26]. Prive di una controparte classica, sono rappresentate da operatori hermitiani che agiscono sullo spazio degli stati e costituiscono dei gradi di libertà interni del sistema: lo spazio degli stati può dunque essere espresso come prodotto tensoriale $\mathcal{H} = \mathcal{H}_{\mathbf{q}} \otimes \mathcal{H}_{f_1} \otimes \dots \otimes \mathcal{H}_{f_n}$ [22], con $\mathcal{H}_{\mathbf{q}}$ analogo allo spazio delle configurazioni e $\mathcal{H}_{f_i}$ spazio interno i -esimo. Anche rispetto agli spazi $\mathcal{H}_{f_i}$ possono venire applicate delle trasformazioni del sistema che possono risultare in simmetrie interne, e se ammettono basi finito-dimensionali di cardinalità n allora gli operatori sono rappresentabili da matrici $n \times n$, che dal teorema di Wigner appartengono al gruppo delle matrici unitarie $U(n)$, con determinante pari ad una fase $e^{i\phi}$. Poiché tali trasformazioni agiscono su $P(\mathcal{H}_{f_i})$, a descriverne fedelmente l'azione è il gruppo unitario proiettivo $PU(n) = U(n)/U(1) \cong SU(n)/\mathbb{Z}_n$, quoziente rispetto alle fasi globali [13]. Le rappresentazioni ordinarie del gruppo delle matrici unitarie speciali $SU(n)$, che presentano determinante $+1$, esauriscono tuttavia quelle proiettive di $PU(n)$: le simmetrie vengono quindi descritte da $SU(n)$, che ha $n^2 - 1$ parametri reali indipendenti, e si ha che l'algebra di Lie $\mathfrak{su}(n)$ ha $n^2 - 1$ generatori [25, 13]. Il fattore $U(1)$ eliminato nel quoziente costituisce a sua volta un gruppo di simmetria globale (Sez. 3.6).

- Es.* 1) La simmetria degli spin $s = \frac{1}{2}$ con base $\{|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle\}$ presenta un'algebra $\mathfrak{su}(2)$ generata da $\{\hat{\sigma}_i\}_i$, con $\{\hat{\sigma}_i\}_i$ matrici di Pauli, per cui $[\frac{\hat{\sigma}_i}{2}, \frac{\hat{\sigma}_j}{2}] = i\varepsilon_{ijk} \frac{\hat{\sigma}_k}{2}$ [22]
 2) La simmetria di colore con base $\{|R\rangle, |G\rangle, |B\rangle\}$ presenta un'algebra $\mathfrak{su}(3)$ [25]

Capitolo 3

Simmetrie nella teoria dei campi classici

Nei precedenti capitoli si sono studiate le simmetrie di sistemi di particelle, dunque aventi numero finito di gradi di libertà. Molti sistemi fisici vengono però modellizzati come sistemi continui, come i fluidi o i campi di interazione (il cui esempio classico è il campo elettromagnetico). In questo capitolo si introducono le leggi della teoria dei campi classici (in questo contesto col significato di "non quantistico"), con esempi notevoli, generalizzando la descrizione delle simmetrie nei sistemi continui, confrontando tali risultati con i precedenti. Vengono studiati dei casi esemplari di simmetrie delle coordinate e interne, introducendo anche le teorie di gauge. Si fa uso della notazione $\partial_t = \frac{\partial}{\partial t}$, $\partial_{\mathbf{r}} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}$, $\partial_i = \frac{\partial}{\partial r_i}$ e la convenzione di Einstein sugli indici ripetuti.

3.1 Leggi dei Sistemi continui

Si definiscono sistemi continui quei sistemi le cui proprietà sono definite attraverso dei Campi $\phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^n$ (o $\mathbb{C}^n$), $(t, \mathbf{r}) \mapsto \phi(t, \mathbf{r})$, ovvero grandezze fisiche funzioni dello spazio e del tempo. Mentre la dinamica delle particelle ha come parametro di evoluzione il tempo, nei sistemi continui anche le coordinate spaziali (euclidee o generalizzate) divengono parametri indipendenti per studiare l'evoluzione del sistema [10].

Il funzionale azione per un campo $\phi : \Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^n$ ha forma:

$$S[\phi] = \int_{\Omega} \mathcal{L}(\phi; \partial_t \phi, \partial_{\mathbf{r}} \phi; t, \mathbf{r}) d\Omega \quad (3.1)$$

con $\mathcal{L}$ detta densità di lagrangiana (per ragioni dimensionali) del campo, per cui il Principio di Minima Azione afferma che il campo fisico è la soluzione stazionaria di tale funzionale [10]. Analogamente alla Sez. 1.1, eseguendo una variazione virtuale regolare del campo $\delta\phi$, nulla sul bordo del dominio $\partial\Omega = [t_1, t_2] \times \partial V \cup \{t_1, t_2\} \times V$, si ha:

$$\begin{aligned}
\delta S &= \int_{\Omega} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta \phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_t \phi)} \delta (\partial_t \phi) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_i \phi)} \delta (\partial_i \phi) \right) d\Omega = \\
&= \int_{\Omega} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta \phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_t \phi)} \partial_t (\delta \phi) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_i \phi)} \partial_i (\delta \phi) \right) d\Omega = \\
&= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_t \phi)} \delta \phi \Big|_{t_1}^{t_2} + \int_{\partial V} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_i \phi)} \delta \phi d\Sigma_i + \int_{\Omega} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_t \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_t \phi)} \right) - \partial_i \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_i \phi)} \right) \right] \delta \phi d\Omega
\end{aligned}$$

con $i = 1, 2, 3$. Dalla definizione della variazione virtuale i primi due termini si annullano, dunque il differenziale è nullo $\forall \delta \phi$ se l'integranda dell'ultimo termine è identicamente nulla. Si ottengono così le Equazioni di Eulero-Lagrange del campo ϕ [10]:

$$\partial_t \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_t \phi)} \right) + \partial_i \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_i \phi)} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \quad (3.2)$$

che costituiscono n equazioni differenziali del secondo ordine. Anche nel caso dei campi, i funzionali Azione sono raggruppabili in classi di equivalenza che determinano la stessa legge del moto: dato S , allora $S' = \alpha S + \int \partial_j F_j d\Omega + k$ appartiene alla stessa classe di equivalenza $S' \sim S$ [4], con $F_j(\phi, t, \mathbf{r})$ campo quadridimensionale ($j = 0$ corrisponde a t) e $\alpha \neq 0$ e k costanti arbitrarie. Infatti le equazioni Eq. 3.2 sono covarianti per fattore α , $\delta k = 0$ e poiché la variazione virtuale lungo il bordo $\partial\Omega$ è nulla si ha $\delta \int_{\Omega} \partial_j F_j d\Omega = 0$. Si definisce la densità di impulso coniugato del campo [4]: $\boldsymbol{\pi} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_t \phi)}$.

Dunque si definisce la densità di hamiltoniana [4]:

$$\mathcal{H}(\phi; \boldsymbol{\pi}; t, \mathbf{r}) = \boldsymbol{\pi} \partial_t \phi(\phi, \boldsymbol{\pi}) - \mathcal{L}(\phi; \partial_t \phi(\phi, \boldsymbol{\pi}); t, \mathbf{r}) \quad (3.3)$$

La lagrangiana e l'hamiltoniana del sistema sono quindi i funzionali [10]:

$$L = \int_V \mathcal{L}(\phi; \partial_t \phi, \partial_r \phi, ; t, \mathbf{r}) dV \quad H = \int_V \mathcal{H}(\phi; \boldsymbol{\pi}; t, \mathbf{r}) dV \quad (3.4)$$

Per ricondursi al caso a finiti gradi di libertà, le funzioni $\mathcal{L}$ e $\mathcal{H}$ devono essere funzioni del campo fisico $\boldsymbol{\phi} = (\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N)$ ed essere proporzionali alle delta di Dirac $\delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i(t))$. Dato un funzionale $F = \int f(\phi, \partial_j \phi)$, si introduce l'operatore di Derivata Funzionale [4]:

$$\frac{\delta F}{\delta \phi} = \frac{\partial f}{\partial \phi} - \partial_j \frac{\partial f}{\partial (\partial_j \phi)} \quad (3.5)$$

Le leggi del moto dei sistemi continui sono rappresentabili nelle forme equivalenti [4]:

$$\frac{\delta S}{\delta \phi} = 0 \quad \longleftrightarrow \quad \begin{cases} \frac{\delta H}{\delta \boldsymbol{\pi}} = \partial_t \phi \\ \frac{\delta H}{\delta \phi} = -\partial_t \boldsymbol{\pi} \end{cases}$$

Date due osservabili del sistema continuo definite sullo spazio delle fasi infinito-dimensionale (ϕ, π) , si ridefiniscono le Parentesi di Poisson come [4]:

$$\{F, G\} = \int_V dV \left[\frac{\delta F}{\delta \phi} \frac{\delta G}{\delta \pi} - \frac{\delta F}{\delta \pi} \frac{\delta G}{\delta \phi} \right] \quad (3.6)$$

per cui si ha, analogamente a Eq. 1.12, che se una osservabile non dipende esplicitamente dal tempo allora è costante del moto se è in involuzione con l'hamiltoniana: $\{F, H\} = 0$. In formalismo covariante (Sez. 1.7) ϕ ha dominio $\Omega \subset \mathbb{M}$ e si ha [4]:

$$S[\phi] = \int_{\Omega} \mathcal{L}(\phi, \partial_{\mu}\phi, X_{\mu}) d\Omega \quad \partial_{\mu} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\mu}\phi)} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \quad S \sim \alpha S + \int_{\Omega} \partial_{\mu} F^{\mu} d\Omega + k$$

con $\partial_{\mu}\phi = \frac{\partial \phi}{\partial X^{\mu}} = (\frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t}, \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{r}})$. Il termine $\partial_{\mu} F^{\mu}$ è la quadridivergenza del campo quadri-vettoriale F^{μ} . Poiché l'elemento di ipervolume $d\Omega = c dt dx dy dz$ è Lorentz-invariante, l'azione è uno scalare relativistico solo se anche la densità di lagrangiana $\mathcal{L}$ è Lorentz-invariante [4]. La formulazione hamiltoniana in teoria dei campi classici non può essere resa covariante, in quanto differenzia la coordinata temporale da quelle spaziali [4]. Da ora in avanti si utilizzerà, ove non specificato altrimenti, il formalismo covariante.

3.2 Campi scalari e vettoriali

Il caso più naturale di campo è dato dal campo scalare reale $\phi : \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{R}$, per cui la più semplice densità di lagrangiana costituita solo dal termine cinetico $T(\partial_{\mu}\phi)$ Lorentz-invariante, detta di campo libero, presenta forma e conseguente legge del moto [4]:

$$\mathcal{L} = \frac{\alpha}{2} \partial_{\mu}\phi \partial^{\mu}\phi \quad \Rightarrow \quad \partial_{\mu} \partial^{\mu}\phi = \square\phi = 0$$

con α costante e $\square = \partial_{\mu} \partial^{\mu}$ operatore scalare di d'Alembert. Nel limite classico, si costruisce una densità di lagrangiana del tipo $\mathcal{L} = \frac{\rho}{2} (\frac{\partial \phi}{\partial t})^2 - \frac{Y}{2} (\frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{r}})^2$, con ρ densità di massa e Y Modulo di Young, che descrive un sistema continuo le cui parti interagiscono localmente in modo elastico (es. limite al continuo di una corda vibrante o un fluido che si comprime), da cui si ha la legge $\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = \frac{Y}{\rho} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \mathbf{r}^2}$ nota come Equazione di d'Alembert che descrive un'onda che si propaga con velocità $v = \sqrt{\frac{Y}{\rho}}$ [10]. In regime relativistico quindi il campo libero ϕ ha come soluzione un'onda che si propaga alla velocità c . Aggiungendo il termine potenziale $V(\phi)$ che dipende dal campo, si ha [4]:

$$\mathcal{L} = \frac{\alpha}{2} \partial_{\mu}\phi \partial^{\mu}\phi - V(\phi) \quad \Rightarrow \quad \square\phi = -\frac{1}{\alpha} \frac{\partial V}{\partial \phi}$$

Un esempio di potenziale è detto termine di massa: $V(\phi) = \beta \mu^2 \phi^2$.

- Es.* 1) Campo di Klein-Gordon reale [4] $\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{\mu^2}{2}\phi^2 \Rightarrow (\square + \mu^2)\phi = 0$
 2) Campo di sine-Gordon [10] $\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{\mu^2}{\beta^2}(1 - \cos(\beta\phi)) \Rightarrow \square\phi + \frac{\mu^2}{\beta}\sin(\beta\phi) = 0$, di cui il campo di Klein-Gordon reale costituisce un'approssimazione al primo ordine per $\beta\phi \ll 1$

Un altro caso fondamentale è dato dal campo quadrivettoriale (Sez. 1.7) $A^\nu : \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{R}^4$ (nel limite classico si possono studiare campi vettoriali $V : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$). Si ha dunque che la generica variazione del campo $\partial^\mu A^\nu$ costituisce un Tensore di Lorentz detto Tensore di campo associato, per cui il più semplice termine cinetico ha forma $T = \frac{\alpha}{2}(\partial_\mu A_\nu)(\partial^\mu A^\nu)$. Per diversi casi fisici, il tensore di campo associato risulta simmetrico o antisimmetrico per scambio degli indici μ e ν , dunque si costruiscono i termini cinetici:

$$T^{sym} = \frac{\alpha}{2}(\partial_\mu A_\nu + \partial_\nu A_\mu)(\partial^\mu A^\nu + \partial^\nu A^\mu) \quad T^{asym} = \frac{\alpha}{2}(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu)$$

definendo così i tensori associati $F^{(sym)\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu + \partial^\nu A^\mu$ e $F^{(asym)\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$. Un tipo di termine potenziale è dato dal termine di massa, similmente al caso del campo scalare, come quello presente nel Campo di Proca [4]:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{\mu^2}{2}A^\mu A_\mu$$

L'esempio principale di campo quadrivettoriale è il campo del quadripotenziale elettromagnetico $A^\mu = (\varphi, \mathbf{A})$ che ha lagrangiana (in unità gaussiane) [17]:

$$\mathcal{L}_{em} = -\frac{1}{16\pi}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{c}A^\mu J_\mu$$

con $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$ tensore del campo elettromagnetico per cui $F^{i0} = E^i$ mentre $F^{ij} = -\varepsilon^{ijk}B^k$ con $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$ campi elettrico e magnetico [4]. Il termine di interazione dipende dalla quadricorrente di carica $J^\mu = (c\rho, \mathbf{j})$ di un sistema di particelle (sarà proporzionale alle $\delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i(t))$ delle N particelle) o di una distribuzione continua [4].

Altri campi di interesse fisico sono il campo scalare complesso $\phi : \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{C}$, come il campo di Klein-Gordon complesso [4] $\mathcal{L} = \partial_\mu\phi^*\partial^\mu\phi - \mu^2\phi^*\phi$, con ϕ^* complesso coniugato, oppure il campo spinoriale di Dirac [21] $\psi : \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{C}^4$ che ha lagrangiana $\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi$, con $\bar{\psi}$ l'aggiunto (il campo coniugato e il campo aggiunto garantiscono che la lagrangiana, e di conseguenza l'azione, siano funzioni reali).

3.3 Simmetrie e Noether in teoria dei campi

Le trasformazioni attive in teoria dei campi si distinguono in due categorie [4]:

- Le Trasformazioni spazio-temporali del campo corrispondono a mappe diffeomorfe $T : \phi(\Omega) \rightarrow \phi(\Omega')$, $\phi(X^\mu) \mapsto \phi(X'^\mu)$, ovvero variazioni del campo per trasformazione dello spazio-tempo (come traslazioni o rotazioni)

- Le Trasformazioni interne sono mappe diffeomorfe $T : \Phi \rightarrow \Phi, \phi \mapsto \phi'$, ovvero trasformazioni che cambiano puntualmente la forma del campo

Come in Sez. 1.2, esse possono essere continue o discrete, globali o locali. Come invece in Sez. 2.4, le trasformazioni possono essere descritte come rappresentazioni, sullo spazio del campo o sullo spazio di Minkowski, di un gruppo di trasformazioni. Le trasformazioni appartenenti a gruppi di Lie, dipendenti quindi da parametri continui e connesse per archi all'identità, sono esprimibili attraverso la forma esponenziale (Eq. 2.7).

Una trasformazione è detta Simmetria se l'azione del sistema trasformato appartiene alla stessa classe di equivalenza dell'azione originale. In Sez. 1.4 si è dimostrato come le simmetrie continue corrispondano a principi di conservazione. La generalizzazione alla teoria dei campi, che prende il nome di Primo Teorema di Noether, afferma che [10, 19]: *"Se un gruppo di trasformazioni a r parametri continui indipendenti è una simmetria del sistema $(\phi, \mathcal{L})$, allora esistono r correnti caratteristiche del sistema che verificano l'equazione di continuità."*

Dim. Poiché le trasformazioni sono continue, al primo ordine si hanno:

$$\begin{aligned} X^\nu \mapsto X'^\nu &= X^\nu + \delta X^\nu & \phi(X) \mapsto \phi'(X') &= \phi(X) + \bar{\delta}\phi \\ \bar{\delta}\phi &= \phi'(X') - \phi(X) = \phi'(X') - \phi(X') + \phi(X') - \phi(X) = \delta\phi + \partial_\nu\phi\delta X^\nu \end{aligned}$$

in quanto la variazione totale del campo $\bar{\delta} = \delta + \delta X^\nu \partial_\nu$ corrisponde alla variazione in forma puntuale del campo e alla variazione per trasformazione delle coordinate. La trasformazione è una simmetria se $S' = S + \bar{\delta}S$ tale che $\delta(\bar{\delta}S) = 0$, ovvero:

$$\bar{\delta}S = \int_{\Omega'} \mathcal{L}' d\Omega' - \int_{\Omega} \mathcal{L} d\Omega = \int_{\Omega} \bar{\delta}\mathcal{L} d\Omega + \int_{\Omega} \mathcal{L} \bar{\delta}(d\Omega) = \int_{\Omega} \partial_\mu \tilde{\mathcal{F}}^\mu d\Omega$$

La trasformazione dell'ipervolume è $d\Omega' = |\det J| d\Omega$ con il jacobiano $J = \frac{\partial X'^\mu}{\partial X^\nu}$, che al primo ordine $J = \eta^\mu_\nu + \partial_\nu \delta X^\mu$, dunque:

$$\det J = e^{Tr[\ln(J)]} = e^{Tr[\ln(\eta^\mu_\nu + \partial_\nu \delta X^\mu)]} \approx e^{Tr[\partial_\nu \delta X^\mu]} \approx e^{\partial_\mu \delta X^\mu} \approx 1 + \partial_\mu \delta X^\mu$$

Quindi la variazione $\bar{\delta}(d\Omega) = \partial_\mu \delta X^\mu d\Omega$. La variazione di lagrangiana è pari a:

$$\begin{aligned} \bar{\delta}\mathcal{L} &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi}\delta\phi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\delta(\partial_\mu\phi) + \partial_\mu\mathcal{L}\delta X^\mu = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi}\delta\phi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\partial_\mu(\delta\phi) + \partial_\mu\mathcal{L}\delta X^\mu = \\ &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi}\delta\phi - \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\right)\delta\phi + \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\delta\phi\right) + \partial_\mu\mathcal{L}\delta X^\mu = \\ &= \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} - \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\right)\right]\delta\phi + \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\delta\phi\right) + \partial_\mu\mathcal{L}\delta X^\mu \end{aligned}$$

Dalle equazioni di Eulero-Lagrange, il primo termine è nullo. Si ha dunque:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \left[\partial_{\mu} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\mu} \phi)} \delta \phi \right) + \partial_{\mu} \mathcal{L} \delta X^{\mu} + \mathcal{L} \partial_{\mu} \delta X^{\mu} \right] d\Omega = \int_{\Omega} \partial_{\mu} \tilde{\mathcal{F}}^{\mu} d\Omega \\ \Rightarrow & \int_{\Omega} \left[\partial_{\mu} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\mu} \phi)} \delta \phi \right) + \partial_{\mu} (\mathcal{L} \delta X^{\mu}) - \partial_{\mu} \tilde{\mathcal{F}}^{\mu} \right] d\Omega = 0 \\ \Rightarrow & \int_{\Omega} \partial_{\mu} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\mu} \phi)} \delta \phi + \mathcal{L} \delta X^{\mu} - \tilde{\mathcal{F}}^{\mu} \right] d\Omega = 0 \end{aligned}$$

Le variazioni al primo ordine rispetto al medesimo parametro infinitesimo sono: $\delta X^{\nu} = \epsilon \chi^{\nu}$, $\delta \phi = \bar{\delta} \phi - \partial_{\nu} \phi \delta X^{\nu} = \epsilon (\Psi - \partial_{\nu} \phi \chi^{\nu})$, dunque dato $\tilde{\mathcal{F}}^{\mu} = \epsilon \mathcal{F}^{\mu}$:

$$\int_{\Omega} \epsilon \partial_{\mu} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\mu} \phi)} \Psi - \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\mu} \phi)} \partial_{\nu} \phi - \mathcal{L} \delta_{\nu}^{\mu} \right) \chi^{\nu} - \mathcal{F}^{\mu} \right] d\Omega = 0$$

Per arbitrarietà del parametro ϵ e del dominio Ω , esiste la corrente:

$$\mathcal{J}^{\mu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\mu} \phi)} \Psi - \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\mu} \phi)} \partial_{\nu} \phi - \mathcal{L} \delta_{\nu}^{\mu} \right) \chi^{\nu} - \mathcal{F}^{\mu} \quad t.c. \quad \partial_{\mu} \mathcal{J}^{\mu} = 0$$

ovvero soddisfa l'equazione di continuità. Per r parametri indipendenti si avrà la corrente $\mathcal{J}^{\mu} = (\mathcal{J}_1^{\mu}, \dots, \mathcal{J}_r^{\mu})$ per cui $\partial_{\mu} \mathcal{J}^{\mu} = 0$, ovvero $\partial_{\mu} \mathcal{J}_i^{\mu} = 0 \forall i$. $\square$

Si definisce il Tensore Energia-Impulso canonico del campo ϕ [4]:

$$\Theta^{\mu}_{\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\mu} \phi)} \partial_{\nu} \phi - \mathcal{L} \delta_{\nu}^{\mu} \quad (3.7)$$

La Corrente di Noether ha dunque forma:

$$\mathcal{J}^{\mu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\mu} \phi)} \Psi - \Theta^{\mu}_{\nu} \chi^{\nu} - \mathcal{F}^{\mu} \quad (3.8)$$

Data una corrente che soddisfa l'equazione di continuità si può ricavare una grandezza globale del sistema, detta Carica di Noether [4]:

$$Q(t) = \int_V dV \frac{1}{c} \mathcal{J}^0(t, \mathbf{r}) \quad (3.9)$$

Si dimostra che tale carica si conserva:

$$\frac{dQ}{dt} = \int_V dV \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{c} \mathcal{J}^0(t, \mathbf{r}) = \int_V dV \frac{\partial}{\partial (ct)} \mathcal{J}^0(t, \mathbf{r}) = - \int_V dV \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot \mathbf{j}(t, \mathbf{r}) = - \int_{\partial V} d\Sigma \mathbf{j}(t, \mathbf{r})$$

Il flusso di corrente $\mathbf{j}$ risulta nullo assumendo che il campo, sia spazialmente limitato che non, si annulli insieme alle sue derivate all'infinito in maniera sufficientemente rapida,

dunque integrando in $V \rightarrow \mathbb{R}^3$ (per campi limitati nello spazio si estendono all'infinito ponendoli identicamente nulli al di fuori del volume) si ottiene $\frac{dQ}{dt} = 0$, che rappresenta la versione globale (o integrale) della conservazione di Noether, mentre Eq. 3.8 rappresenta la versione locale (o differenziale).

Il tensore energia-impulso $\Theta^{\mu\nu}$ è costituito da [4, 10]:

- $\Theta^{00} = \pi \partial_t \phi - \mathcal{L} = \mathcal{H}$ ovvero è la densità di energia del sistema
- $\Theta^{0i} = -c\pi \partial_i \phi$ pari alla densità di impulso del campo in direzione r_i
- $\Theta^{i0} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_i \phi)} \partial_t \phi$ pari alla densità di flusso di energia del campo in direzione r_i
- $\Theta^{ij} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_i \phi)} \partial_j \phi + \mathcal{L} \delta_j^i$ pari al Tensore degli sforzi, con elementi diagonali le pressioni ed elementi non diagonali gli sforzi di taglio esercitati dal campo

3.4 Simmetrie spazio-temporali

In questo paragrafo si analizzano alcuni importanti gruppi di simmetrie continue dello spazio-tempo, corrispondenti alle generalizzazioni in teoria dei campi classici in formalismo relativistico delle trasformazioni analizzate nel caso classico (Sez. 1.5) e quantistico (Sez. 2.5) per le particelle.

3.4.1 Gruppo di Poincaré

Il gruppo di Poincaré $ISO(3, 1)$ è un gruppo continuo $g(b, \Lambda)$ costituito dalle trasformazioni isometriche dello spazio di Minkowski, che agisce sui suoi elementi come [25]:

$$X'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu X^\nu + b^\mu \quad (3.10)$$

con $\Lambda^\mu{}_\nu$ Matrice di Lorentz e b^μ quadrivettore di traslazione, dunque tale gruppo è il prodotto semidiretto dei sottogruppi di Lie $g(b, I)$, gruppo delle quadritraslazioni $T(3, 1)$, e $g(0, \Lambda)$, gruppo ortogonale $O(3, 1)$, per cui $g(b', \Lambda')g(b, \Lambda) = g(b' + \Lambda' b, \Lambda' \Lambda)$ [25, 9]. Dato il tensore metrico $\eta^{\mu\nu}$, la matrice di Lorentz soddisfa le proprietà: $\Lambda^\mu{}_\lambda \Lambda^\nu{}_\sigma \eta^{\lambda\sigma} = \eta^{\mu\nu}$, per cui $\det(\Lambda)^2 = 1 \Rightarrow \det(\Lambda) = \pm 1$ e $(\Lambda^0{}_0)^2 - \sum_i (\Lambda^i{}_0)^2 = 1$ [25]. Il gruppo di Poincaré è un gruppo di Lie non connesso costituito da 4 insiemi separati connessi. Date le matrici $\mathcal{T} = \text{diag}(-1, +1, +1, +1)$ di inversione temporale e $\mathcal{P} = \text{diag}(+1, -1, -1, -1)$ di parità, allora i 4 insiemi connessi sono dati da [25]:

$$\Lambda = \begin{cases} \Lambda^+ & \det = +1, \Lambda^0{}_0 \geq 1: \text{Trasformazioni proprie ortocrone} \\ \mathcal{T}\Lambda^+ & \det = -1, \Lambda^0{}_0 \leq -1: \text{Trasformazioni improprie anticrone} \\ \mathcal{P}\Lambda^+ & \det = -1, \Lambda^0{}_0 \geq 1: \text{Trasformazioni improprie ortocrone} \\ \mathcal{TP}\Lambda^+ & \det = +1, \Lambda^0{}_0 \leq -1: \text{Trasformazioni proprie anticrone} \end{cases}$$

L'insieme delle trasformazioni di Lorentz proprie costituisce il sottogruppo di Lie $SO(3, 1)$, di cui la componente $SO^+(3, 1)$ delle trasformazioni proprie ortocrone costituisce un gruppo di Lie connesso, in quanto ogni elemento può essere connesso per archi all'identità. Tale gruppo è dato dalla composizione delle rotazioni spaziali proprie $SO(3)$ e delle trasformazioni di Lorentz speciali, o Boost, descrivibili come rotazioni iperboliche tra le componenti miste di spazio e tempo [25, 21]. Il gruppo di Lorentz presenta quindi 6 parametri indipendenti, solitamente rappresentati dai 3 angoli di Eulero $\theta^1, \theta^2, \theta^3$ e dalle 3 rapidità ξ^1, ξ^2, ξ^3 , a cui si aggiungono i 4 parametri del gruppo delle traslazioni b^μ [4]. La forma esponenziale degli elementi del gruppo di Poincaré ristretto $g(b, \Lambda^+)$ è:

$$T(b) = e^{ib^\mu P_\mu} \quad \Lambda(\omega) = e^{i\frac{1}{2}\omega^{\mu\nu} \mathcal{J}_{\mu\nu}}$$

con $\omega^{\mu\nu}$ matrice antisimmetrica dipendente dai 6 angoli di Lorentz. L'algebra di Lie del gruppo è data dalle relazioni [25, 9]:

$$\begin{aligned} [P_\mu, P_\lambda] &= 0 & [P_\mu, \mathcal{J}_{\lambda\sigma}] &= i(\eta_{\mu\lambda}P_\sigma - \eta_{\mu\sigma}P_\lambda) \\ [\mathcal{J}_{\mu\nu}, \mathcal{J}_{\lambda\sigma}] &= i(\eta_{\nu\lambda}\mathcal{J}_{\mu\sigma} + \eta_{\mu\sigma}\mathcal{J}_{\nu\lambda} - \eta_{\mu\lambda}\mathcal{J}_{\nu\sigma} - \eta_{\nu\sigma}\mathcal{J}_{\mu\lambda}) \end{aligned}$$

Il gruppo $SO^+(3, 1)$ può anche avere rappresentazione $\Lambda(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\xi}) = e^{i(\boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{J} + \boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{K})}$, con generatori $J_i = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}\mathcal{J}_{jk}$ e $K_i = \mathcal{J}_{i0}$ che generano l'algebra [4]:

$$[J_i, J_j] = i\varepsilon_{ijk}J_k \quad [K_i, K_j] = -i\varepsilon_{ijk}J_k \quad [J_i, K_j] = i\varepsilon_{ijk}K_k$$

Data la rappresentazione dell'identità sullo spazio $\mathbb{M}$, $(I)^\mu{}_\nu X^\nu = \delta^\mu_\nu X^\nu = X^\mu$, la rappresentazione infinitesima del Gruppo di Poincaré su $\mathbb{M}$ è [4, 9]:

$$\begin{aligned} T(b)X^\nu &= (I)^\mu{}_\nu X^\nu + ib^\lambda (P_\lambda)^\mu{}_\nu X^\nu = X^\mu + b^\mu \Leftrightarrow (P_\lambda)^\mu{}_\nu = -i\delta^\mu_\nu \partial_\lambda \\ \Lambda^\mu{}_\nu X^\nu &= (I)^\mu{}_\nu X^\nu + i\frac{1}{2}\omega^{\lambda\sigma} (\mathcal{J}_{\lambda\sigma})^\mu{}_\nu X^\nu = X^\mu + \omega^\mu{}_\nu X^\nu \\ &\Leftrightarrow (\mathcal{J}_{\lambda\sigma})^\mu{}_\nu = (\mathcal{M}_{\lambda\sigma})^\mu{}_\nu = i\delta^\mu_\nu (X_\lambda \partial_\sigma - X_\sigma \partial_\lambda) \end{aligned}$$

Se il sistema $(\phi, \mathcal{L})$ è invariante sotto gruppo di Poincaré ($\mathcal{F} = 0$), allora dal Teorema di Noether si hanno dei principi di conservazione rispetto ai sottogruppi di Lie.

Rispetto alla traslazione, le coordinate variano al primo ordine per $\delta X^\nu = \epsilon^\nu$, mentre un campo cambia in forma $\delta\phi = \phi'(X) - \phi(X)$ ma $\phi'(X) = \phi(X - \epsilon) \approx \phi(X) - \partial_\nu \phi \epsilon^\nu \Rightarrow \delta\phi = -\partial_\nu \phi \epsilon^\nu$, dunque $\bar{\delta}\phi = -\partial_\nu \phi \epsilon^\nu + \partial_\nu \phi \epsilon^\nu = 0 \Rightarrow \Psi = 0$, per cui si hanno 4 correnti conservate $\mathcal{J}^\mu{}_{(\nu)} = \Theta^\mu{}_\nu$ o equivalentemente $\mathcal{J}^{\mu(\nu)} = \Theta^{\mu\nu}$ per cui si ha $\partial_\mu \mathcal{J}^{\mu(\nu)} = 0$. Le 4 cariche di Noether associate costituiscono il quadrivettore $\mathcal{P}^\nu = \int \frac{1}{c} \Theta^{0\nu} dV$, pari al quadripulso totale del campo.

Rispetto al gruppo di Lorentz ristretto $SO^+(3, 1)$ le coordinate e il campo variano di [4]:

$$\delta X^\nu = i\frac{1}{2}\delta\omega^{\lambda\sigma} (\mathcal{M}_{\lambda\sigma})^\nu{}_\mu X^\mu \quad \bar{\delta}\phi = i\frac{1}{2}\delta\omega^{\lambda\sigma} [\mathcal{J}_{\lambda\sigma}]\phi$$

dunque si hanno 16 correnti conservate pari a [4]:

$$\mathcal{J}^\mu_{(\lambda\sigma)} = i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} [\mathcal{J}_{\lambda\sigma}] \phi - i \Theta^\mu_\nu (\mathcal{M}_{\lambda\sigma})^\nu_\rho X^\rho = i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} [\mathcal{J}_{\lambda\sigma}] \phi + X_\lambda \Theta^\mu_\sigma - X_\sigma \Theta^\mu_\lambda$$

con $[\mathcal{J}_{\lambda\sigma}]$ rappresentazione di $SO^+(3,1)$ nello spazio del campo: ad esempio per un campo quadrivettoriale A^μ la rappresentazione è uguale a quella dello spazio $\mathbb{M}$ [4]. Equivalentemente si conservano le correnti $\mathcal{J}^{\mu(\lambda\sigma)} = i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} [\mathcal{J}^{\lambda\sigma}] \phi + X^\lambda \Theta^{\mu\sigma} - X^\sigma \Theta^{\mu\lambda}$ per cui $\partial_\mu \mathcal{J}^{\mu(\lambda\sigma)} = 0$. Di queste correnti, per antisimmetria solo 6 sono indipendenti. Si definiscono la corrente orbitale e intrinseca [4, 9]:

$$L^{\mu(\lambda\sigma)} = X^\lambda \Theta^{\mu\sigma} - X^\sigma \Theta^{\mu\lambda} \quad S^{\mu(\lambda\sigma)} = i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} [\mathcal{J}^{\lambda\sigma}] \phi \quad (3.11)$$

Le cariche di Noether sono: $J^{\lambda\sigma} = \int \frac{1}{c} \mathcal{J}^{0(\lambda\sigma)} dV = \int \frac{1}{c} L^{0(\lambda\sigma)} dV + \int \frac{1}{c} S^{0(\lambda\sigma)} dV = L^{\lambda\sigma} + S^{\lambda\sigma}$. Definendo $J_i = \frac{1}{2} \varepsilon^{ijk} J^{jk} = \frac{1}{2} \varepsilon^{ijk} (L^{jk} + S^{jk}) = \bar{L}_i + S_i$ e $K_i = J^{i0} = L^{i0} + S^{i0} = G_i + G_i^{spin}$, allora le 6 cariche di Noether corrispondono a $\mathbf{K}$, che rappresenta il moto del centro di massa del sistema, e a $\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S}$, ovvero il momento angolare totale del campo pari alla somma del momento orbitale e del momento intrinseco o Spin [4].

La simmetria di Poincaré viene richiesta come principio per le teorie locali di campo: per le traslazioni risulta sufficiente che la lagrangiana non dipenda esplicitamente dalle coordinate $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi)$ [4].

3.4.2 Trasformazioni di Scala

Il gruppo delle Trasformazioni di scala $g(\lambda)$ è un gruppo di Lie che agisce sugli elementi dello spazio di Minkowski come: $X'^\mu = \lambda X^\mu$, con $\lambda \in \mathbb{R}^+$ (a differenza del caso classico lo spazio e il tempo vengono riscaldati per il medesimo fattore).

Dato un campo ϕ , il gruppo di trasformazioni di scala agisce come: $\phi'(X') = \lambda^{-\Delta} \phi(X)$, con Δ detta dimensione di scala del campo [9]. Data l'espansione infinitesima $\lambda \approx 1 + \ln \lambda$, la forma esponenziale del gruppo è data da:

$$g(\lambda) = e^{i \ln(\lambda) D}$$

Con D generatore del gruppo, il quale genera l'algebra banale $[D, D] = 0$ e presenta le rappresentazioni [9, 4]:

$$\begin{aligned} g(\lambda) X^\nu &= (I)^\mu_\nu X^\nu + i \ln \lambda (D)^\mu_\nu X^\nu = (1 + \ln \lambda) X^\mu \Leftrightarrow (D)^\mu_\nu = -i \delta^\mu_\nu X^\sigma \partial_\sigma \\ g(\lambda) \phi &= [I] \phi + i \ln \lambda [D] \phi = (1 + \ln \lambda)^{-\Delta} \phi \approx (1 - \ln \lambda \Delta) \phi \Leftrightarrow [D] = i \Delta \end{aligned}$$

Se il sistema $(\phi, \mathcal{L})$ è invariante sotto il gruppo delle trasformazioni di scala ($\mathcal{F} = 0$), allora si ha la corrente di Noether:

$$\mathcal{J}^\mu = -\Delta \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \phi - \Theta^\mu_\nu X^\nu \quad \text{o equivalentemente} \quad \mathcal{J}^\mu = \Theta^\mu_\nu X^\nu + \Delta \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \phi$$

Per cui si ha $\partial_\mu \mathcal{J}^\mu = \Theta^\mu_\mu + \Delta \partial_\mu (\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \phi) = 0$.

3.4.3 Gruppo conforme

Il gruppo conforme è un gruppo continuo costituito dalle trasformazioni che agiscono sullo spazio di Minkowski riscalandolo il tensore metrico di un fattore locale [9]:

$$\eta'_{\mu\nu}(X') = \Lambda(X)\eta_{\mu\nu}(X) \quad (3.12)$$

ovvero conservano gli angoli. Data una trasformazione infinitesima $X'^\mu = X^\mu + \epsilon^\mu(X)$, il tensore metrico varia come $\eta'_{\mu\nu}(X') = \eta_{\mu\nu}(X) - (\partial_\mu \epsilon_\nu + \partial_\nu \epsilon_\mu)$, dunque tale è conforme se $\partial_\mu \epsilon_\nu + \partial_\nu \epsilon_\mu = f(X)\eta_{\mu\nu}$, per cui $f(X) = \frac{1}{2}\partial_\lambda \epsilon^\lambda$. Si dimostra che tale termine deve soddisfare l'equazione $\partial_\mu \partial_\nu f(X) = 0$, che ha soluzione generale $f(X) = A + B_\mu X^\mu$, da cui si ha che la variazione infinitesima è al massimo una forma quadratica [9]:

$$\epsilon^\mu(X) = a^\mu + b^\mu{}_\nu X^\nu + c^\mu{}_{\nu\sigma} X^\nu X^\sigma$$

per cui $b^\mu{}_\nu = \lambda \delta^\mu_\nu + m^\mu{}_\nu$ con $m^\mu{}_\nu$ antisimmetrico e $c_{\mu\nu\sigma} = \eta_{\mu\sigma}c_\nu + \eta_{\mu\nu}c_\sigma - \eta_{\nu\sigma}c_\mu$ con $c_\mu = \frac{1}{4}c^\rho{}_{\rho\mu}$ [9]. Le trasformazioni che presentano solo il termine di ordine zero e il termine di primo ordine con fattore antisimmetrico costituiscono il Gruppo di Poincaré (per cui $\Lambda = 1$), mentre le trasformazioni che presentano solo il termine di primo ordine con il fattore di traccia pura costituiscono il Gruppo delle trasformazioni di scala (per cui $\Lambda = e^{-2\lambda}$) [9]. Infine, le trasformazioni che presentano solo il termine quadratico costituiscono il Gruppo delle trasformazioni conformi speciali (SCT), che agiscono sullo spazio $\mathbb{M}$ come [9]:

$$X'^\mu = \frac{X^\mu - X^\rho X_\rho c^\mu}{1 - 2c^\rho X_\rho + c^\sigma c_\sigma X^\rho X_\rho} \quad \text{o equivalentemente} \quad \frac{X'^\mu}{X'^\rho X'_\rho} = \frac{X^\mu}{X^\rho X_\rho} - c^\mu$$

ovvero per trasformazioni infinitesime: $X'^\mu = X^\mu - c^\mu X^\rho X_\rho + 2(X^\rho c_\rho)X^\mu$. Il fattore di scala delle SCT è: $\Lambda(X) = (1 - 2c^\rho X_\rho + c^\sigma c_\sigma X^\rho X_\rho)^2$ [9]. Il generatore delle SCT ha rappresentazione su $\mathbb{M}$: $(C_\rho)^\mu{}_\nu = -i\delta^\mu_\nu(2X_\rho X^\sigma \partial_\sigma - X^\sigma X_\sigma \partial_\rho)$, che genera l'algebra del sottogruppo SCT $[C_\mu, C_\nu] = 0$ [9]. Il gruppo conforme sullo spazio-tempo (di dimensione 3+1) è dunque un gruppo continuo a 15 parametri isomorfo a $SO(4, 2)$, la cui componente, ottenuta restringendosi al gruppo di Lorentz proprio ortocrono, è un gruppo di Lie connesso, con algebra generata dalle singole algebre dei 4 sottogruppi e dalle ulteriori relazioni reciproche [9]:

$$\begin{aligned} [D, P_\mu] &= iP_\mu & [D, C_\mu] &= -iC_\mu & [C_\mu, P_\nu] &= 2i(\eta_{\mu\nu}D - \mathcal{J}_{\mu\nu}) \\ [C_\rho, \mathcal{J}_{\mu\nu}] &= i(\eta_{\rho\mu}C_\nu - \eta_{\rho\nu}C_\mu) & [P_\rho, \mathcal{J}_{\mu\nu}] &= i(\eta_{\rho\mu}P_\nu - \eta_{\rho\nu}P_\mu) \end{aligned}$$

Se il sistema è invariante per SCT, allora si ha la conservazione della corrente di Noether: $\mathcal{J}^{\mu(\rho)} = (2X^\rho X^\nu - \eta^{\rho\nu}X^\lambda X_\lambda)\Theta^\mu{}_\nu + 2\Delta X^\rho \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)}\phi$, per cui $\partial_\mu \mathcal{J}^{\mu(\rho)} = 0$. Si dimostra che se un sistema $(\phi, \mathcal{L})$ ammette i gruppi di simmetria di Poincaré e di scala ed è possibile costruirne un tensore energia-impulso simmetrico a traccia nulla (si veda Sez. 3.5), allora il sistema ammette anche simmetria per il gruppo SCT, e dunque per tutto il gruppo conforme [9]. In QFT, la simmetria conforme è tipica dei campi associati a particelle di massa nulla che si propagano su linee di universo di tipo luce [4].

3.5 Tensori energia-impulso non canonici

Generalmente, il tensore energia-impulso canonico $\Theta^{\mu\nu}$ non risulta simmetrico per scambio degli indici. Tuttavia, sulla base dell'intuizione fisica, il tensore energia-impulso che caratterizza il sistema dovrebbe essere simmetrico (il tensore degli sforzi, contenuto al suo interno, risulta infatti simmetrico già in meccanica classica). Esistono dunque delle procedure che permettono di simmetrizzarlo lasciando inalterate le proprietà di simmetria ad esso associate [4]. Un esempio importante è dato dalla Procedura di Belinfante-Rosenfeld, per cui dato un sistema invariante per il gruppo di Poincaré si definisce il tensore energia-impulso simmetrizzato [4]:

$$T^{\mu\nu} = \Theta^{\mu\nu} + \frac{1}{2}\partial_\alpha \mathcal{B}^{\nu\alpha\mu} \quad \mathcal{B}^{\nu\alpha\mu} = S^{\nu\alpha\mu} + S^{\alpha\nu\mu} - S^{\mu\nu\alpha} \quad (3.13)$$

con S definito in Eq. 3.11. Si dimostra infatti che $T^{\mu\nu} = T^{\nu\mu}$. Si ridefiniscono quindi le correnti di Noether $\mathcal{M}^{\mu(\lambda\sigma)} = X^\lambda T^{\mu\sigma} - X^\sigma T^{\mu\lambda}$, che è equivalentemente conservata rispetto alla corrente originale: $\partial_\mu \mathcal{M}^{\mu(\lambda\sigma)} = \partial_\mu \mathcal{J}^{\mu(\lambda\sigma)}$. Si ha che data la carica $M^{\lambda\sigma} = \int \frac{1}{c} \mathcal{M}^{0(\lambda\sigma)} dV$, per l'ipotesi che il contributo S si annulli sufficientemente rapidamente all'infinito si ottiene che $M^{\lambda\sigma} = J^{\lambda\sigma}$ [4].

Per altre situazioni fisiche risulta invece necessario costruirsi un tensore che oltre ad essere simmetrico presenti una traccia nulla. Importante esempio è dato dalla Procedura di Callan-Coleman-Jackiw [6], per cui dato un sistema invariante per Poincaré e per scala si definisce il tensore improved:

$$T'^{\mu\nu} = T^{\mu\nu} - \frac{1}{6}(\partial^\mu \partial^\nu - \eta^{\mu\nu} \partial_\lambda \partial^\lambda)(\phi + \epsilon)(\phi + \epsilon) \quad (3.14)$$

con $T^{\mu\nu}$ tensore di Belinfante e ϵ parametri definiti in base al campo (per campi scalari ϕ si ha $\epsilon = 0$), tale per cui il tensore risulta simmetrico sugli indici, restituisce le medesime correnti conservate e presenta traccia nulla $T'^\mu{}_\mu = 0$. Tale procedura può essere utilizzata nel contesto delle trasformazioni conformi per rendere evidente la simmetria per SCT per un sistema invariante per scala e Poincaré.

3.6 Simmetrie interne e di gauge

Come descritto nella Sez. 3.3, le trasformazioni interne sono descritte da gruppi che agiscono solo sugli elementi della collezione di campi ϕ variandone esclusivamente la forma funzionale. Tra le trasformazioni di gruppi continui si distinguono [4, 21]:

- Trasformazioni dipendenti da r parametri continui $T(\alpha^i) = e^{i\alpha^i K_i}$, dette trasformazioni globali in quanto modificano la forma funzionale allo stesso modo in ogni punto dello spaziotempo

- Trasformazioni dipendenti da r funzioni analitiche dello spazio di Minkowski $\mathbb{M}$
 $T(\alpha^i(X)) = e^{i\alpha^i(X)K_i}$, dette trasformazioni locali o di gauge (di secondo tipo)

Le trasformazioni globali sono anche chiamate trasformazioni di gauge di primo tipo in quanto possono essere considerate restrizioni delle trasformazioni di gauge a funzioni costanti variabili in modo continuo. Sono tali trasformazioni a poter soddisfare il Primo Teorema di Noether se costituiscono simmetrie del sistema.

Es. Il campo di Klein-Gordon complesso ϕ è invariante per il gruppo $U(1)$ globale [21]:

$$\begin{aligned}\phi &\rightarrow \phi' = e^{i\alpha}\phi \approx \phi + i\alpha\phi, \quad \phi^* \rightarrow \phi'^* = e^{-i\alpha}\phi^* \approx \phi^* - i\alpha\phi^* \\ \partial_\mu\phi &\rightarrow \partial_\mu(e^{i\alpha}\phi) = e^{i\alpha}\partial_\mu\phi \Rightarrow \partial_\mu\phi'^* \partial^\mu\phi' = e^{-i\alpha}e^{i\alpha}\partial_\mu\phi^* \partial^\mu\phi = \partial_\mu\phi^* \partial^\mu\phi \\ \phi'^* \phi' &= e^{-i\alpha}e^{i\alpha}\phi^* \phi = \phi^* \phi\end{aligned}$$

$$\text{Dunque: } \mathcal{L}' = \partial_\mu\phi'^* \partial^\mu\phi' - \mu^2\phi'^*\phi' = \partial_\mu\phi^* \partial^\mu\phi - \mu^2\phi^*\phi = \mathcal{L}.$$

Si ha dunque la corrente conservata:

$$\mathcal{J}^\mu = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}(i\phi) + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi^*)}(-i\phi^*) = i(\phi\partial^\mu\phi^* - \phi^*\partial^\mu\phi)$$

Per le trasformazioni di gauge locali, si ha il Secondo Teorema di Noether [19]:

"Se un gruppo di trasformazioni dipende da r funzioni analitiche e dalle loro derivate fino all' i -esimo ordine è una simmetria del sistema $(\phi, \mathcal{L})$ allora esistono r relazioni d'identità tra le espressioni lagrangiane e le loro derivate fino all' i -esimo ordine."

Tali sono note come Identità di Noether, che riducono il numero di gradi di libertà effettivi del sistema in quanto non tutte le leggi del moto del campo sono indipendenti: tale ridondanza permette, dato un campo ϕ che soddisfa la condizione di stazionarietà, che tutti i campi ϕ' derivanti dalla trasformazione di gauge generino la medesima dinamica. Nella costruzione di una teoria si compie dunque la scelta del gauge, ovvero imporre quale tra tali campi utilizzare.

Es. Il campo elettromagnetico presenta una simmetria di gauge per la trasformazione $A_\mu \rightarrow A'_\mu = A_\mu - \partial_\mu\mathcal{X}$, con $\mathcal{X}$ campo scalare reale sullo spazio $\mathbb{M}$ [4], legata alla relazione $\partial_\nu\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0$ data dalla simmetria dell'operatore $\partial_\nu\partial_\mu$ e dall'antisimmetria del tensore del campo $F^{\mu\nu}$ [24]. Infatti si ha:

$$F'^{\mu\nu} = \partial^\mu A'^\nu - \partial^\nu A'^\mu = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu - \partial^\mu\partial^\nu\mathcal{X} + \partial^\nu\partial^\mu\mathcal{X} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$$

per simmetria dell'operatore $\partial_\nu\partial_\mu$. Dunque:

$$\mathcal{L}' = -\frac{1}{16\pi}F'_{\mu\nu}F'^{\mu\nu} - \frac{1}{c}A'^\mu J_\mu = -\frac{1}{16\pi}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{c}A^\mu J_\mu + \frac{1}{c}\partial^\mu\mathcal{X}J_\mu$$

$$\text{Ma } \frac{1}{c}\partial^\mu\mathcal{X}J_\mu = \frac{1}{c}\partial^\mu(\mathcal{X}J_\mu) - \frac{1}{c}\mathcal{X}\partial^\mu J_\mu = \frac{1}{c}\partial_\mu(\mathcal{X}J^\mu)$$

poiché la quadricorrente di carica è conservata per simmetria globale $\partial_\nu J^\nu = 0$ [24].

Ne deriva che: $\mathcal{L}' = \mathcal{L} + \frac{1}{c}\partial_\mu(\mathcal{X}J^\mu)$, dunque dato che si ha solo un termine aggiuntivo pari a una quadridivergenza essa è una simmetria.

In tale ambito, si definiscono Teorie di Gauge le teorie nelle quali si impone che un certo campo, o collezione di campi, presenti una simmetria per un gruppo di trasformazioni di gauge, distinte in abeliane o non-abeliane in base al gruppo di tali trasformazioni [24]. Se il sistema di partenza non soddisfa tale simmetria, imporla equivale a imporre l'esistenza

di un campo ulteriore, detto Campo di Gauge, che interagisce con il sistema iniziale proporzionalmente ad una costante di accoppiamento g e che si trasforma in modo che il sistema totale soddisfi tale principio di simmetria [21]. Con questa procedura in QFT si costruiscono i campi delle interazioni elettromagnetica, debole e forte, imponendo sui campi delle particelle le simmetrie di gauge $SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$ [24].

Es. Dato il campo di Klein-Gordon complesso, rispetto ad una trasformazione di gauge $U(1)$ locale $\phi \rightarrow e^{ig\alpha(X)}\phi$ si ha [21]:

$$\mu^2[\phi'^*\phi' - \phi^*\phi] = \mu^2[(\phi^* - ig\alpha\phi^*)(\phi + ig\alpha\phi) - \phi^*\phi] = \mu^2[ig\alpha\phi^*\phi - ig\alpha\phi^*\phi + O(\alpha^2)] \approx 0$$

$$\begin{aligned} \partial_\mu\phi'^*\partial^\mu\phi' - \partial_\mu\phi^*\partial^\mu\phi &= \partial_\mu(\phi^* - ig\alpha\phi^*)\partial^\mu(\phi + ig\alpha\phi) - \partial_\mu\phi^*\partial^\mu\phi = \\ &= \partial_\mu\phi^*\partial^\mu(ig\alpha\phi) - \partial_\mu(ig\alpha\phi^*)\partial^\mu\phi - \partial_\mu(ig\alpha\phi^*)\partial^\mu(ig\alpha\phi) \approx \\ &\approx ig\phi\partial_\mu\phi^*\partial^\mu\alpha + ig\alpha\partial_\mu\phi^*\partial^\mu\phi - ig\phi^*\partial_\mu\alpha\partial^\mu\phi - ig\alpha\partial_\mu\phi^*\partial^\mu\phi = \\ &= ig(\phi\partial^\mu\phi^* - \phi^*\partial^\mu\phi)\partial_\mu\alpha = g\mathcal{J}^\mu\partial_\mu\alpha \Rightarrow \delta\mathcal{L} = g\mathcal{J}^\mu\partial_\mu\alpha \end{aligned}$$

Si introduce dunque il termine di interazione $\mathcal{L}_{int} = -g\mathcal{J}^\mu A_\mu + g^2 A_\mu A^\mu \phi^* \phi$ con A_μ campo quadrivettore che si trasforma per gauge come $A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu\alpha$ [21]. Infatti:

$$\delta(g\mathcal{J}^\mu A_\mu) = g(\delta\mathcal{J}^\mu)A_\mu + g\mathcal{J}^\mu(\delta A_\mu) = 2g^2\phi^*\phi\partial^\mu\alpha A_\mu + g\mathcal{J}^\mu\partial_\mu\alpha$$

$$\delta(g^2 A_\mu A^\mu \phi^* \phi) = 2g^2 A_\mu(\delta A^\mu)\phi^* \phi = 2g^2 A_\mu\partial^\mu\alpha\phi^* \phi$$

Per cui $\delta(\mathcal{L} + \mathcal{L}_{int}) = 0$. La lagrangiana totale del sistema prevede l'aggiunta del termine cinetico libero del campo A_μ , che per essere gauge-invariante utilizza il tensore antisimmetrico $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$ [21]. Si ha dunque:

$$\mathcal{L}_T = \partial_\mu\phi^*\partial^\mu\phi - \mu^2\phi^*\phi - g\mathcal{J}^\mu A_\mu + g^2 A_\mu A^\mu \phi^* \phi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$$

Si introduce l'operatore di Derivata Covariante $D_\mu = \partial_\mu - igA_\mu$ [21] tale per cui la lagrangiana assume la forma: $\mathcal{L}_T = (D_\mu\phi)^*(D^\mu\phi) - \mu^2\phi^*\phi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$. Si dimostra facilmente come tale forma sia gauge-invariante in quanto l'operatore D_μ si trasforma come il campo ϕ : $D_\mu\phi \rightarrow D'_\mu\phi' = e^{ig\alpha(X)}D_\mu\phi$ [21].

Capitolo 4

Rottura spontanea di simmetria

In questo capitolo vengono sviluppate le fondamenta del fenomeno di rottura spontanea di simmetria in teoria dei campi, esponendo anche alcuni esempi di sistemi di fisica della materia condensata e di teoria quantistica dei campi. Viene studiato il caso dei campi scalari reali e complessi, a partire da cui vengono esposti i risultati generali dati dal Teorema di Goldstone e dal Meccanismo di Higgs. Viene inoltre brevemente esposto il motivo per cui non si verifica rottura spontanea nei sistemi a finiti gradi di libertà.

4.1 Simmetria delle leggi e Asimmetria degli stati

Sia un sistema fisico descritto da una lagrangiana L (o equivalentemente da una hamiltoniana H), si dice che il sistema ha una simmetria rotta esplicitamente rispetto ad un parametro ϵ se $L = L_{sym} + \epsilon L_{asym}$ ovvero è composta da un termine invariante e uno non invariante, proporzionalmente al parametro ϵ (ad esempio dovuto ad una perturbazione del sistema), sotto tale trasformazione di simmetria. Si dice dunque che il sistema presenta una simmetria approssimata per $\epsilon \rightarrow 0$ [20].

Si definisce Stato fondamentale di un sistema la soluzione della sua dinamica che ne minimizza l'hamiltoniana.

- Es.* 1) Un esempio classico è dato dal problema di Keplero a L^2 fissato in cui si ha hamiltoniana $H = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{k}{r}$, con stato fondamentale l'orbita circolare [10]
- 2) Un esempio quantistico è dato dall'oscillatore armonico unidimensionale che ha hamiltoniana $\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}k\hat{x}^2$ e quindi spettro di soluzioni $E_\nu = \hbar\omega(\frac{1}{2} + \nu)$ con $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$, dunque lo stato fondamentale è $|\nu\rangle = |0\rangle$ [3]
- 3) Un esempio in teoria dei campi è dato dal campo di sine-Gordon che ha densità di hamiltoniana $\mathcal{H} = \frac{c^2}{2}\pi^2 + \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 + \frac{\mu^2}{\beta^2}(1 - \cos(\beta\phi))$ e stati fondamentali $\phi_n = \frac{2\pi n}{\beta}$ per $n \in \mathbb{Z}$ [8]

Tali stati risultano di grande interesse fisico:

- In contesto a finiti gradi di libertà, sistemi a molti corpi (la cui dinamica non è approssimabile a quella di punto materiale) tendono allo stato fondamentale, la cui energia classicamente corrisponde al minimo di potenziale, in quanto corrisponde ad un punto di equilibrio stabile rispetto alle perturbazioni dell'ambiente [2, 14, 15]
- In contesto a infiniti gradi di libertà, gli stati eccitati del campo rispetto a quello fondamentale $|0\rangle$ descrivono in QFT le particelle di tale campo, e sono ottenuti applicando gli operatori creazione $\hat{a}^\dagger$ e distruzione $\hat{a}$ [25]

Se lo stato fondamentale risulta invariante rispetto alla trasformazione di simmetria della sua dinamica allora si parla di Simmetria Ordinaria [20]. Se invece non risulta invariante, allora si parla di Rottura spontanea di Simmetria [21].

Es. 1) Data un'asta sottile di sezione circolare posta verticalmente su una superficie piana e compressa da una forza variabile F , se tale supera un valore critico F_{crit} lo stato fondamentale si manifesta piegando l'asta lungo una delle direzioni perpendicolari: la dinamica del sistema risulta invariante per rotazione rispetto all'asse dell'asta e vi è un numero infinito di stati fondamentali (dipendenti da F) il cui insieme presenta la stessa simmetria, ma il sistema la "rompe" scegliendo solo uno degli stati che non è di per sé invariante.[21]

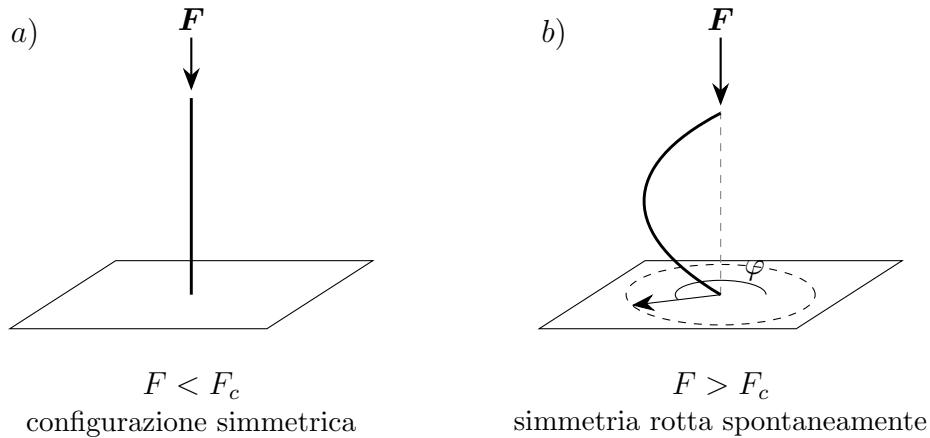


Fig. 4.1: Asta elastica verticale compressa da una forza assiale F .

2) Nel modello di Heisenberg dei ferromagneti si ha un reticolo di spin con hamiltoniana di interazione $H = -\sum_{i,j} J_{ij} \mathbf{S}_i \cdot \mathbf{S}_j$ invariante per rotazioni $SO(3)$. A temperatura $T > T_c$ detta Temperatura di Curie le fluttuazioni termiche dominano portando ad un orientamento casuale degli spin, dunque il sistema risulta anch'esso invariante per rotazioni e si ha magnetizzazione nulla. Per $T < T_c$ domina l'interazione tra spin e lo stato fondamentale si ha con l'allineamento degli spin

lungo una stessa direzione (scelta in modo casuale tra le infinite possibili in assenza di campo esterno) portando ad una magnetizzazione M non nulla: tale rompe la simmetria $SO(3)$ in una simmetria $SO(2)$ per rotazione rispetto alla direzione di magnetizzazione.[21, 20]

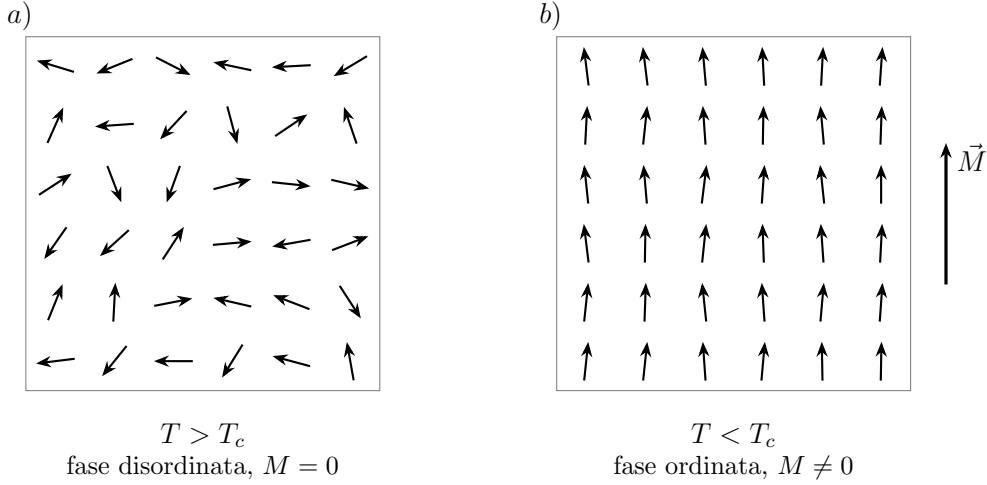


Fig. 4.2: Reticolo di spin classici rispetto alla temperatura T .

Si osserva dunque che nei sistemi in cui avviene rottura spontanea si ha un parametro per cui il fenomeno avviene oltre un suo valore critico, portando uno stato fondamentale iniziale invariante per tale simmetria in un insieme di stati fondamentali degeneri (ovvero alla stessa energia) singolarmente non invarianti, ma con l'insieme "invariante" (l'insieme trasformato presenta gli stessi elementi) [21].

4.2 Rottura spontanea di campi scalari reali

Sia un campo scalare massivo con potenziale di auto-interazione quartico, ovvero descritto dalla densità di lagrangiana e dalla densità di hamiltoniana [20, 8]:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{\mu^2}{2}\phi^2 - \frac{\lambda}{4}\phi^4 \quad \mathcal{H} = \frac{c^2}{2}\pi^2 + \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 + V(\phi) \quad (4.1)$$

con $\mu, \lambda > 0$, impulso coniugato $\pi = \frac{1}{c^2}\partial_t\phi$ e potenziale $V(\phi) = \frac{\mu^2}{2}\phi^2 + \frac{\lambda}{4}\phi^4$. Tali sono invarianti per trasformazione di inversione $\phi \rightarrow -\phi$. Lo stato fondamentale ϕ_0 è la soluzione che minimizza il potenziale: $\frac{\partial V}{\partial\phi}(\phi_0) = 0$ e $\frac{\partial^2 V}{\partial\phi^2}(\phi_0) > 0$, per cui si ha $\phi_0 = 0$. Lo stato fondamentale risulta invariante per inversione, dunque si ha simmetria ordinaria [20]. Invertendo il segno del termine di massa, si ha densità di lagrangiana:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi + \frac{\mu^2}{2}\phi^2 - \frac{\lambda}{4}\phi^4$$

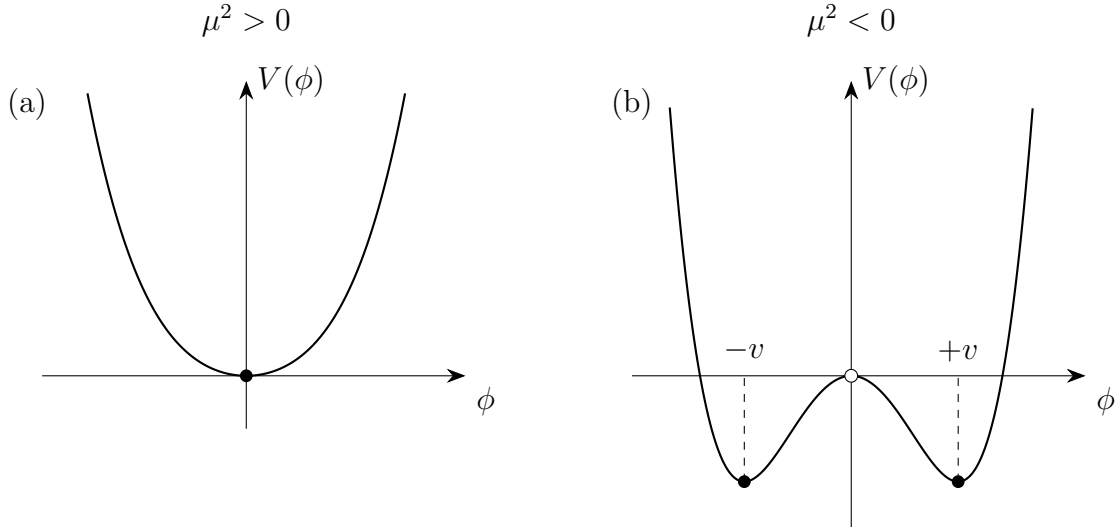


Fig. 4.3: Potenziale scalare $V(\phi) = \frac{1}{2}\mu^2\phi^2 + \frac{1}{4}\lambda\phi^4$, con $\lambda > 0$, $v = \sqrt{-\mu^2/\lambda}$.

portando ad un potenziale a doppia buca, con soluzioni di minimo $\phi_0 = \pm\sqrt{\frac{\mu^2}{\lambda}} \equiv \pm v$, non invarianti per trasformazione di inversione, che invece mappa uno stato fondamentale degenerare nell'altro: si ha dunque rottura spontanea di simmetria rispetto alla trasformazione $\mathcal{P}[\phi]$ [20]. L'inversione del termine di massa può essere descritta equivalentemente per passaggio da $\mu^2 > 0$ a $\mu^2 < 0$, che è quindi il parametro da cui dipende la rottura spontanea [20]. La legge del campo risulta dunque:

$$(\square + \mu^2)\phi = -\lambda\phi^3 \quad (4.2)$$

per cui per le piccole oscillazioni rispetto al vuoto $\phi_0 = 0$ si ottengono le equazioni di Klein-Gordon, che descrivono modi di massa μ , dunque per $\mu^2 < 0$ si avrebbe una massa immaginaria. In tal caso però le oscillazioni devono avvenire rispetto al vero vuoto $\phi_0 = \pm v = \pm\sqrt{\frac{|\mu^2|}{\lambda}}$, dunque parametrizzandole come $\phi = \eta \pm v$ [20] si ha densità di lagrangiana e la corrispondente legge di campo:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\eta\partial^\mu\eta + \mu^2\eta^2 \mp \lambda v\eta^3 - \frac{\lambda}{4}\eta^4 + \frac{\mu^4}{4\lambda} \quad \longleftrightarrow \quad (\square - 2\mu^2)\eta = -\lambda(\pm 3v\eta^2 + \eta^3)$$

a cui corrisponde una legge di campo per cui le piccole oscillazioni generano le equazioni di Klein-Gordon per modi di massa $\sqrt{2|\mu^2|}$. Il passaggio dal sistema con simmetria ordinaria al sistema con rottura spontanea di simmetria corrisponde ad un cambiamento di fase che ne altera le proprietà dinamiche (in QFT ciò comporta una riorganizzazione dello spettro delle eccitazioni fisiche attorno al vero vuoto [21, 24]).

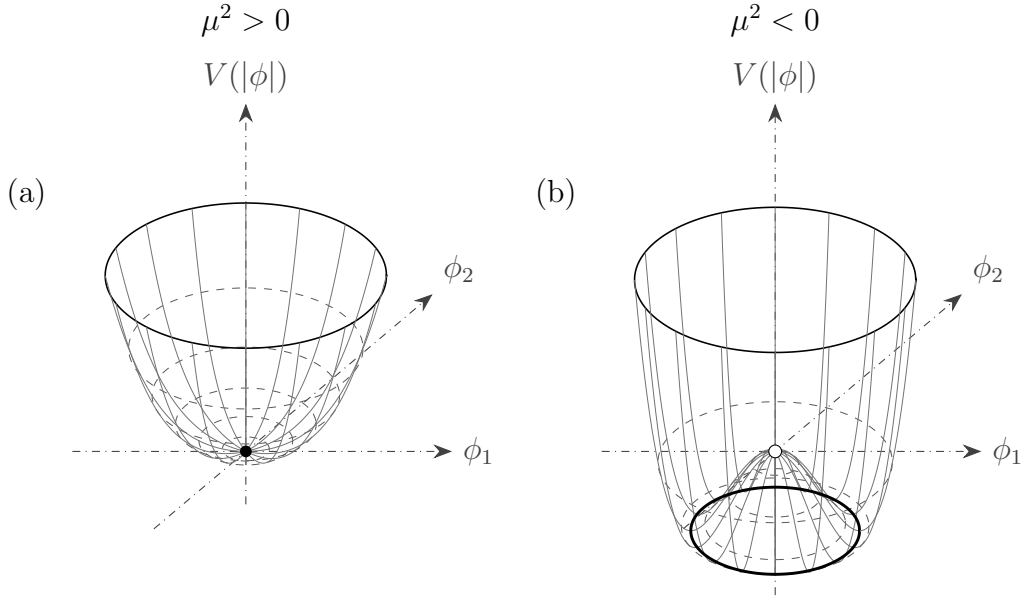


Fig. 4.4: Potenziale del doppietto scalare $V(\phi_1, \phi_2) = \frac{1}{2}\mu^2 (\phi_1^2 + \phi_2^2) + \frac{1}{4}\lambda (\phi_1^2 + \phi_2^2)^2$.

Sia ora un sistema composto da un doppietto di campi scalari $\phi = (\phi_1, \phi_2)$ che interagiscono attraverso un potenziale $V(\phi_1, \phi_2) = V(|\phi|)$, ovvero [20]:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi_1 \partial^\mu \phi_1 + \partial_\mu \phi_2 \partial^\mu \phi_2) - V(\phi_1^2 + \phi_2^2) \quad V(\phi_1^2 + \phi_2^2) = \frac{\mu^2}{2}(\phi_1^2 + \phi_2^2) + \frac{\lambda}{4}(\phi_1^2 + \phi_2^2)^2$$

Tale presenta una simmetria per rotazione $SO(2)$ nello spazio interno dei campi:

$$\begin{pmatrix} \phi'_1 \\ \phi'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} \quad (4.3)$$

in quanto il potenziale dipende esclusivamente dal modulo [20]. Per $\mu^2 > 0$ si ha minimo di potenziale per $(\phi_1, \phi_2)_0 = (0, 0)$, invariante per il gruppo $SO(2)$, dunque si ha simmetria ordinaria. In tale caso, le oscillazioni rispetto al vuoto corrispondono a delle equazioni di Klein-Gordon con massa μ per i due campi (approssimativamente non interagenti) [20]. Per $\mu^2 < 0$ si ha minimo di potenziale per $\phi_1^2 + \phi_2^2 = \frac{|\mu^2|}{\lambda} \equiv v^2$ [20], corrispondente ad un insieme $S^1(v)$ ovvero circonferenza di raggio v nello spazio interno che descrive gli infiniti stati fondamentali degeneri, dunque si ha rottura spontanea di simmetria, in questo caso rispetto ad una simmetria continua. Scegliendo arbitrariamente lo stato fondamentale $(\phi_1, \phi_2)_0 = (v, 0)$ e parametrizzando i campi come $(\phi_1, \phi_2) = (\eta + v, \xi)$, si ottiene [20]:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \eta \partial^\mu \eta + \partial_\mu \xi \partial^\mu \xi) + \mu^2 \eta^2 - \frac{\lambda}{4}(4v\eta^3 + 4v\eta\xi^2 + 2\eta^2\xi^2 + \eta^4 + \xi^4) + \frac{\mu^4}{4\lambda} \quad (4.4)$$

Per cui si ottengono le equazioni dei campi:

$$\begin{cases} (\square + 2|\mu^2|)\eta = -\lambda(3v\eta^2 + v\xi^2 + \eta\xi^2 + \eta^3) \\ \square\xi = -\lambda(2v\eta\xi + \eta^2\xi + \xi^3) \end{cases} \quad (4.5)$$

che per piccole oscillazioni corrispondono a due equazioni di Klein-Gordon per campi rispettivamente di massa $\sqrt{2|\mu^2|}$ e di massa nulla [20, 8].

4.3 Teorema di Goldstone

Nel paragrafo precedente si è osservato come la rottura spontanea di una simmetria continua abbia portato, tramite riparametrizzazione dei campi, alla formazione di un campo privo di termine di massa. Tale è il risultato del Teorema di Goldstone [11, 12]:

”Se esiste un gruppo di trasformazioni di simmetria continua globale sotto la cui azione la lagrangiana, che descrive la dinamica Lorentz-invariante del sistema di campi, rimane invariata, allora si deve avere che lo stato fondamentale preserva tale invarianza oppure compaiono modi di campi scalari a massa nulla”.

Tali modi, detti di Goldstone (o di Nambu-Goldstone) [24], corrispondono ad eccitazioni che collegano gli stati fondamentali degeneri [20] (nel contesto della QFT si hanno quindi particelle a massa nulla [21]).

- Es.* 1) Un esempio si ha nel contesto della fisica di materia condensata, dove la rottura spontanea di simmetria traslazionale nel reticolo genera eccitazioni prive di gap energetico descrivibili come pseudo-particelle note come Fononi. [18]
- 2) Un esempio in QFT è dato dai Pioni che mediano l'interazione forte residua all'interno dei nuclei atomici, e sono bosoni di Goldstone legati alla rottura di simmetria chirale $SU(2) \times SU(2)$ in $SU(2)$, ma poiché i quark u e d non hanno massa nulla, la simmetria rotta $SU(2) \times SU(2)$ non è esatta, portando i pioni ad avere massa piccola ma non nulla. [24]

Il numero di modi di Goldstone generati da una rottura spontanea di simmetria continua è legato alla simmetria residua dello stato fondamentale. Sia G gruppo di simmetria la cui rappresentazione genera gli operatori di trasformazione di simmetria del sistema lagrangiano $(\Phi, \mathcal{L})$ che ha soluzione di stato fondamentale Φ_0 e sia $F \subseteq G$ sottogruppo di simmetria che lascia invariato lo stato fondamentale, allora si avranno i generatori $\hat{\mathbf{K}} = (\hat{K}_1, \dots, \hat{K}_M)$ del gruppo G e $\hat{\hat{\mathbf{K}}} = (\hat{\hat{K}}_1, \dots, \hat{\hat{K}}_N)$ del gruppo F con $N \leq M$ (si è scelto arbitrariamente l'ordine dei generatori affinché $\hat{\hat{\mathbf{K}}} = (\hat{\hat{\mathbf{K}}}, \hat{K}_{N+1}, \dots, \hat{K}_M)$) [21]. Si dimostra che il numero di modi di Goldstone è pari al numero di generatori di simmetria ”rotti”, ovvero pari a $M - N$ [8]: se $N = 0$ allora l'intero gruppo di simmetria è spontaneamente rotto e non vi è simmetria residua nello stato fondamentale, portando alla formazione di M modi di Goldstone; se $N = M$ allora lo stato fondamentale manifesta la stessa simmetria della dinamica (Simmetria ordinaria, nessun modo di Goldstone).

Dim. Espandendo in serie di Taylor il potenziale rispetto allo stato fondamentale:

$$V(\Phi) = V(\Phi_0) + \frac{1}{2}(\Phi - \Phi_0) \left(\frac{\partial^2 V}{\partial \Phi \partial \Phi} \Big|_{\Phi_0} \right) (\Phi - \Phi_0)^T + O((\Phi - \Phi_0)^3)$$

con $\frac{\partial^2 V}{\partial \Phi \partial \Phi}$ matrice che se diagonalizzata ha come elementi i coefficienti di massa μ^2 , ed è semidefinita positiva poiché Φ_0 è minimo, dunque le masse sono positive o nulle. Per invarianza della lagrangiana:

$$\begin{aligned} V(\Phi_0) &= V(T(\Phi_0)) = V(\Phi_0) + \frac{1}{2} \delta \Phi_0 \left(\frac{\partial^2 V}{\partial \Phi \partial \Phi} \Big|_{\Phi_0} \right) \delta \Phi_0 + O((\delta \Phi_0)^3) \approx V(\Phi_0) \\ &\Leftrightarrow \delta \Phi_0 \left(\frac{\partial^2 V}{\partial \Phi \partial \Phi} \Big|_{\Phi_0} \right) \delta \Phi_0 = 0 \end{aligned}$$

Dato $\delta \Phi_0 = i(\epsilon K) \Phi_0$, se $\epsilon = (\epsilon_1, \dots, \epsilon_N, 0, \dots, 0)$ ovvero ha valori non nulli solo per i coefficienti dei generatori del gruppo F, allora poiché lo stato fondamentale è invariante si ha $\delta \Phi_0 = 0$ e l'equazione è verificata, mentre se $\epsilon = (0, \dots, \epsilon_{N+1}, \dots, \epsilon_M)$ ovvero ha valori non nulli solo per i coefficienti degli altri generatori allora si ha $\delta \Phi_0 \neq 0$ e l'equazione è verificata se gli autovalori corrispondenti sono nulli, ovvero corrispondono a $M - N$ termini di massa nulli. [21] $\square$

4.4 Sistemi a finiti gradi di libertà

Finora si sono dati come esempi di rottura spontanea di simmetria sistemi fisici in due casi distinti: la teoria dei campi e la meccanica a molti corpi (materia condensata). Tali hanno come caratteristica comune il numero infinito di gradi di libertà, che nel secondo caso è raggiunto nell'approssimazione del limite termodinamico ($N \rightarrow \infty$ e $\mathcal{V} \rightarrow \infty$ a $\frac{N}{\mathcal{V}} = \text{cost.}$) [24]. Si ha infatti che per un numero finito di gradi di libertà il sistema non può avere stati fondamentali degeneri, infatti la presenza di potenziali a più minimi degeneri porta ad una combinazione lineare degli stati corrispondenti a tali minimi per cui la funzione d'onda totale del sistema può compiere tunneling attraverso la barriera di potenziale che divide gli stati fondamentali: si viene perciò a definire un unico stato che mantiene la simmetria della dinamica [7, 8, 24].

Es. Sia un potenziale pari unidimensionale $V(x) = V(-x)$ con minimi in $x = \pm a$, allora per la barriera tra i due minimi che tende ad ∞ si ha stato fondamentale come combinazione lineare dei singoli stati nelle due buche di potenziale. Per approssimazione a buca rettangolare infinita di larghezza L , si hanno:

$$\begin{aligned} \psi_a^n(x) &= \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \left[\frac{n\pi}{L} \left(a + \frac{L}{2} - x \right) \right] & x \in \left[a - \frac{L}{2}, a + \frac{L}{2} \right] \\ 0 & x \notin \left[a - \frac{L}{2}, a + \frac{L}{2} \right] \end{cases} \\ \psi_{-a}^n(x) &= \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \left[\frac{n\pi}{L} \left(a + \frac{L}{2} + x \right) \right] & x \in \left[-a - \frac{L}{2}, -a + \frac{L}{2} \right] \\ 0 & x \notin \left[-a - \frac{L}{2}, -a + \frac{L}{2} \right] \end{cases} \end{aligned}$$

con singoli stati fondamentali rispettivamente per $n = 1$. Lo stato fisico ha come base la combinazione lineare simmetrica o antisimmetrica delle due funzioni d'onda:

$$\begin{aligned}\psi_{sym}^n(x) &= \frac{1}{\sqrt{2}}[\psi_a^n(x) + \psi_{-a}^n(x)] \\ \psi_{asym}^n(x) &= \frac{1}{\sqrt{2}}[\psi_a^n(x) - \psi_{-a}^n(x)]\end{aligned}$$

generando due ipotetici stati fondamentali: uno simmetrico e uno antisimmetrico. Data una barriera finita tra i due minimi, per cui si ha l'aggiunta di una funzione di raccordo all'interno della barriera, essa porta al tunneling tra una buca e l'altra. Sviluppando tale termine energetico grazie alla teoria delle perturbazioni, si ottiene che i due stati $\psi_{sym}^1(x)$ e $\psi_{asym}^1(x)$ hanno energia diversa, per cui il vero stato fondamentale (unico) è lo stato simmetrico $\psi_{sym}^1(x)$ che mantiene la simmetria di parità del potenziale, e dunque dell'hamiltoniana. [7, 8]

La probabilità di tunneling attraverso barriere di potenziale finite dipende dal volume del sistema: $\mathcal{P} \propto e^{-C\mathcal{V}}$ con C costante positiva, dunque nel limite termodinamico non può avvenire transizione tra gli stati dei minimi e rimane la degenerazione dei diversi stati fondamentali [24]. Lo stesso accade per sistemi con infiniti gradi di libertà: nella teoria dei campi si ha la realizzazione di un solo stato fondamentale e non possono avvenire transizioni verso gli altri. Proprio tale caratteristica porta al fenomeno di rottura spontanea di simmetria: la necessità di una scelta di stato fondamentale [8, 24].

4.5 Rottura spontanea di simmetrie di gauge

Sia un campo scalare complesso massivo con potenziale quartico [21]:

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi - \mu^2 \phi^* \phi - \lambda (\phi^* \phi)^2 \quad (4.6)$$

Tale genera una coppia di equazioni di Klein-Gordon nell'approssimazione attorno allo stato fondamentale $\phi_0 = 0 = \phi_0^*$ per $\mu^2 > 0$, mentre per $\mu^2 < 0$ si ha rottura spontanea di simmetria: lo stato fondamentale si ha per $\phi \phi^* = \frac{v^2}{2} = \frac{|\mu^2|}{2\lambda}$, rompendo la simmetria $U(1)$ globale [20]. Scegliendo il vuoto reale $\phi_0 = \frac{v}{\sqrt{2}} = \phi_0^*$, si parametrizzano i due campi come $\phi = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\frac{\xi}{v}} (\eta + v)$. Si ha dunque la lagrangiana per i campi η e ξ [21]:

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \frac{1}{2} \partial_\mu [e^{-i\frac{\xi}{v}} (\eta + v)] \partial^\mu [e^{i\frac{\xi}{v}} (\eta + v)] - \frac{\mu^2}{2} (\eta + v)^2 - \frac{\lambda}{4} (\eta + v)^4 = \\ &= \frac{1}{2} \partial_\mu \eta \partial^\mu \eta + \frac{1}{2} \left(\frac{\eta}{v} + 1\right)^2 \partial_\mu \xi \partial^\mu \xi + \mu^2 \eta^2 - \lambda v \eta^3 - \frac{\lambda}{4} \eta^4 + \frac{\mu^4}{4\lambda}\end{aligned}$$

I campi η e ξ perturbati attorno al vuoto soddisfano dunque due equazioni di Klein-Gordon di massa rispettivamente $\sqrt{2|\mu^2|}$ e massa nulla: ξ è un modo di Goldstone [20].

Nella Sez. 3.6 si è visto come imporre la simmetria $U(1)$ locale per il campo di Klein-Gordon complesso corrisponda ad introdurre il campo di gauge A_μ attraverso l'operatore derivata covariante D_μ . Poiché il termine quartico introdotto è invariante per tale simmetria di gauge, si sviluppa la lagrangiana:

$$\mathcal{L} = (D_\mu \phi)^* (D^\mu \phi) - \mu^2 \phi^* \phi - \lambda (\phi^* \phi)^2 - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \quad (4.7)$$

per cui si ha sempre rottura spontanea di simmetria per $\mu^2 < 0$. Data la parametrizzazione rispetto ai campi η e ξ e data la simmetria di gauge per trasformazioni $\phi \rightarrow e^{ig\alpha} \phi$ e $A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu \alpha$, si compie la scelta di gauge per cui $\alpha = -\frac{\xi}{gv}$ dunque $\phi' = \frac{1}{\sqrt{2}}(\eta + v)$ e $A'_\mu = A_\mu - \frac{1}{gv} \partial_\mu \xi$, detto Gauge Unitario [20, 21, 8]. La lagrangiana, fisicamente equivalente, in tale scelta di gauge è:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{1}{2} [(\partial_\mu + igA'_\mu)(\eta + v)][(\partial^\mu - igA'^\mu)(\eta + v)] - \frac{\mu^2}{2}(\eta + v)^2 - \frac{\lambda}{4}(\eta + v)^4 - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = \\ &= \frac{1}{2} \partial_\mu \eta \partial^\mu \eta + \frac{1}{2} g^2 A'_\mu A'^\mu (\eta + v)^2 - \frac{\mu^2}{2}(\eta + v)^2 - \frac{\lambda}{4}(\eta + v)^4 - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = \\ &= \frac{1}{2} \partial_\mu \eta \partial^\mu \eta + g^2 v A'_\mu A'^\mu \eta + (\mu^2 + \frac{g^2}{2} A'_\mu A'^\mu) \eta^2 - \lambda v \eta^3 - \frac{\lambda}{4} \eta^4 + \frac{g^2 v^2}{2} A'_\mu A'^\mu - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{\mu^4}{4\lambda} \end{aligned}$$

corrispondente ad una dinamica del campo η che per perturbazioni attorno al vuoto corrisponde ad un campo di massa $\sqrt{2|\mu^2|}$ interagente con il campo di gauge, il quale acquisisce un termine di massa $\frac{g^2 v^2}{2} A'_\mu A'^\mu$ corrispondente ad un campo di massa gv , ovvero la massa del campo di gauge dipende dal valore del campo ϕ nello stato fondamentale [20] (dalla QFT la particella associata al campo di gauge ha spin 1 in quanto descritta da un quadrivettore [25]). Tale costituisce un caso abeliano del Meccanismo di Higgs, per cui un campo con valore di aspettazione non nullo del vuoto che compie rottura spontanea di una simmetria di gauge dona massa al corrispondente campo di gauge [20, 8]. Il grado di libertà del modo di Goldstone ξ viene dunque ceduto al campo di gauge come grado di polarizzazione longitudinale. Il campo η viene invece chiamato modo di Higgs [21]. Nella realtà, tale fenomeno avviene per rottura spontanea della simmetria $SU(2)_L \times U(1)_Y$ in $U(1)_Q$, corrispondente al campo delle interazioni elettrodeboli (bosoni $\gamma, Z, W^\pm$), da parte del campo scalare complesso isospinoriale $\Phi = (\phi^+, \phi^0)$ a 4 gradi di libertà da cui emergono i termini di massa per i bosoni $Z, W^\pm$ e il bosone scalare di Higgs H [21].

Conclusioni

La tesi ha ripercorso il ruolo delle simmetrie continue nella descrizione dei sistemi fisici, attraversando tre formalismi progressivamente più generali: la meccanica classica e la meccanica quantistica dei sistemi a finiti gradi di libertà e la teoria dei campi classici.

Nel primo capitolo si è mostrato come il principio di azione stazionaria, applicato a sistemi lagrangiani (Q, L) , permetta di caratterizzare le simmetrie come quelle trasformazioni che lasciano invariata l'azione a meno di un termine di bordo. Il teorema di Noether ha fornito il legame diretto tra simmetrie continue e integrali primi del moto: note le simmetrie caratteristiche del sistema è possibile ridurre i gradi di libertà necessari per risolvere il sistema di equazioni di Eulero-Lagrange, permettendo in alcuni casi di risolverlo esattamente. La discussione dei sistemi inerziali ha inoltre evidenziato come le simmetrie dello spazio-tempo, inizialmente osservate come proprietà emergenti delle equazioni del moto, possano essere elevate a postulati, con il principio di relatività di Galileo prima e quello di Einstein poi, che vincolano la forma stessa della lagrangiana generando una nuova metodologia per ottenere le leggi della dinamica.

Il secondo capitolo ha esteso tale impostazione al formalismo degli spazi di Hilbert $\mathcal{H}$. Il teorema di Wigner ha giustificato la rappresentazione delle simmetrie tramite operatori unitari o antiunitari, mentre l'introduzione degli strumenti della teoria dei gruppi e delle algebre di Lie ha permesso di identificare i generatori $\hat{K}_i$ delle trasformazioni continue con le osservabili del sistema. La condizione di simmetria dinamica riproduce, tramite il Teorema di Ehrenfest e la regola di quantizzazione canonica, le medesime leggi di conservazione ottenute classicamente tramite il formalismo hamiltoniano e le parentesi di Poisson, confermando la coerenza tra i due formalismi. La meccanica quantistica ha inoltre introdotto le simmetrie interne, prive di controparte classica, rappresentate da gruppi $SU(n)$ e legate ad osservabili come lo spin o le cariche di colore.

Il terzo capitolo ha generalizzato la trattazione ai sistemi a infiniti gradi di libertà descritti da una densità di lagrangiana $\mathcal{L}$. Il primo teorema di Noether stabilisce la corrispondenza tra simmetrie continue globali e correnti conservate $\mathcal{J}^\mu$, per cui la carica associata costituisce la generalizzazione degli integrali primi del moto al caso continuo. Per le simmetrie interne dei campi, invece, il secondo teorema di Noether ha chiarito il ruolo delle simmetrie di gauge locali, a cui corrispondono relazioni che permettono sempre di diminuire i gradi di libertà del sistema. Si sono inoltre introdotte le teorie di gauge, per

cui imponendo l'invarianza rispetto ad una simmetria di gauge si introduce un campo di gauge accoppiato al sistema originale tramite la derivata covariante D_μ , procedimento di grande importanza nella fisica moderna.

Il quarto capitolo ha infine analizzato il caso in cui la simmetria della dinamica non sia condivisa dallo stato fondamentale del sistema. Attraverso gli esempi del campo scalare reale, del doppietto di campi scalari e del campo scalare complesso, si è mostrato come la rottura spontanea di una simmetria continua comporti, per il Teorema di Goldstone, la comparsa di un numero di modi a massa nulla pari al numero di generatori rotti. Tale risultato trova applicazione nel meccanismo di Higgs, di cui si è studiato un caso abeliano, che ha mostrato come la rottura spontanea di una simmetria di gauge locale permetta al campo di gauge di acquisire massa assorbendo il modo di Goldstone come grado di libertà longitudinale. Si è inoltre chiarito come tale fenomeno sia proprio dei soli sistemi a infiniti gradi di libertà, poiché nei sistemi a finiti gradi di libertà l'effetto tunnel impedisce la persistenza di stati fondamentali degeneri.

Le simmetrie studiate nello specifico all'interno della tesi sono state le seguenti trasformazioni notevoli delle coordinate: traslazioni spaziali e temporali, rotazioni e trasformazioni di scala. Queste sono state inizialmente studiate per sistemi a finiti gradi di libertà classici e quantistici, verificando che entrambi i formalismi conducono alle medesime osservabili conservate, ovvero impulso, momento angolare, energia e integrale di scala, grandezze tipiche per la descrizione dei sistemi meccanici. Tali trasformazioni sono state poi studiate nel formalismo covariante della teoria dei campi attraverso il gruppo di Poincaré, che generalizza traslazioni e rotazioni nello spazio di Minkowski, e del gruppo di scala, osservando come le correnti conservate ottenute generino cariche di Noether coincidenti con le osservabili conservate nei sistemi meccanici. Le procedure di simmetrizzazione di Belinfante-Rosenfeld e Callan-Coleman-Jackiw hanno permesso di ricondurre il tensore energia-impulso canonico a un tensore simmetrico e a traccia nulla, condizione sufficiente per estendere la simmetria di Poincaré e di scala al più ampio gruppo conforme.

La corrispondenza tra i tre formalismi riflette l'esistenza di un'unica struttura algebrica realizzata su spazi diversi: le parentesi di Poisson $\{f, g\}$, definite sullo spazio delle osservabili classiche, e i commutatori $[\hat{A}, \hat{B}]$, definiti sullo spazio di Hilbert, sono due rappresentazioni della stessa algebra di Lie. La regola di quantizzazione canonica costituisce l'omomorfismo al primo ordine che identifica le due rappresentazioni, e per suo tramite il criterio di conservazione classico $\{I, H\} = 0$ e la condizione di simmetria dinamica quantistica $[\hat{K}_i, \hat{H}] = 0$ risultano essere la stessa identità algebrica, da cui deriva la conservazione dell'integrale associato alla simmetria. Il passaggio alla teoria dei campi generalizza questa struttura ai sistemi continui: l'integrale classico e il generatore quantistico, entrambi grandezze globali, vengono sostituiti dalla corrente di Noether che ne costituisce la controparte locale. Le cariche di Noether associate ai gruppi di simmetria soddisfano, tramite le parentesi di Poisson definite sui campi, la medesima algebra con le stesse costanti di struttura che la caratterizzano a livello dei generatori: la stessa struttura algebrica ricorre così, in tre realizzazioni equivalenti, in ciascuno dei formalismi.

Diverse direzioni di sviluppo emergono naturalmente dai risultati esposti. In primo luogo, vi sono altre importanti simmetrie continue che possono essere studiate, come la Simmetria di Laplace, rappresentabile come trasformazioni di rotazioni $SO(4)$, tipica dei sistemi legati ($\mathcal{E} < 0$) con potenziali centrali di andamento $\propto \frac{1}{r}$ come il campo kepleriano e idrogenoide, da cui si ha la conservazione del vettore di Laplace-Runge-Lenz. In secondo luogo, l'estensione del gruppo di Poincaré a una simmetria locale conduce alla teoria della Relatività Generale, nella quale l'invarianza per diffeomorfismi generalizza il principio di relatività e in cui il campo gravitazionale è trattabile come campo metrico dello spazio-tempo. Si ha poi che il meccanismo di Higgs abeliano trattato nel quarto capitolo costituisce il prototipo semplificato del meccanismo non-abeliano alla base del Modello Standard, in cui la rottura spontanea della simmetria di gauge $SU(2)_L \times U(1)_Y$ genera le masse dei bosoni vettori $W^\pm$, Z e dei fermioni elementari. Un ulteriore sviluppo naturale riguarda l'estensione dello studio alle simmetrie discrete, con particolare attenzione alle trasformazioni di parità, coniugazione di carica e inversione temporale, solo citate nello sviluppo storico, in particolare per il teorema CPT. Inoltre il rapporto tra la simmetria di scala e il gruppo conforme, discusso nel terzo capitolo, conduce alla teoria dei campi conformi e allo studio del gruppo di rinormalizzazione nei fenomeni critici, di cui la transizione di fase dei ferromagneti alla temperatura di Curie, richiamata nel primo e quarto capitolo, costituisce un primo esempio fisico. Infine, lo studio delle simmetrie trova particolare importanza nella teoria quantistica dei campi, nella quale convergono in ultima analisi i fenomeni trattati classicamente, sia quelli relativi ai gruppi di simmetria sia quelli della rottura spontanea di simmetria, e avvengono altri importanti fenomeni come le anomalie quantistiche, per cui il processo di quantizzazione e regolarizzazione della teoria porta alla rottura esplicita di alcune simmetrie presenti classicamente, mostrando come alcune simmetrie possano essere emergenti e non fondamentali.

Lo studio delle simmetrie nella fisica teorica risulta dunque essere attualmente fondamentale per lo sviluppo di nuove teorie fisiche, sia per continuare il lungo procedimento di unificazione della comprensione dei fenomeni naturali sia per la spiegazione di nuovi fenomeni. Seppur non si possa escludere che in futuro tale metodologia possa essere sostituita da nuovi strumenti, come la storia dimostra, è innegabile l'impatto che le simmetrie hanno avuto nel corso dell'ultimo secolo per spiegare, in modo unificato e compatto, numerosi fenomeni, dalla fisica elementare alla fisica della materia, permettendo di formulare teorie, come il Modello Standard, che tutt'oggi continuano a superare le numerose prove sperimentali. Così come sono sempre state parte delle metodologie di comprensione dei fenomeni naturali, è possibile che le simmetrie abbiano un legame profondo con le teorie fisiche che non potrà essere mai completamente rimosso.

Bibliografia

- [1] Vladimir Igorevič Arnold. *Ordinary Differential Equations*. Springer-Verlag, third edition, 1992.
- [2] Vladimir Igorevič Arnold. *Metodi Matematici della Meccanica Classica*. Editori Riuniti university press, first italian edition, 2010.
- [3] Leslie E. Ballentine. *Quantum Mechanics - A Modern Development*. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., first edition, 1998.
- [4] Vincenzo Barone. *Relatività*. Bollati Boringhieri, first edition, 2004.
- [5] Vincenzo Barone. *L'ordine del mondo. Le simmetrie in fisica da Aristotele a Higgs*. Saggi tascabili. Bollati Boringhieri, Torino, first paperback edition, 2024.
- [6] Curtis G. Callan Jr., Sidney Coleman, and Roman Jackiw. A new improved energy-momentum tensor. *Annals of Physics*, 59(1):42–73, 1970.
- [7] Claude Cohen-Tannoudji, Bernard Diu, and Franck Laloë. *Quantum Mechanics - Volume I*. Hermann and John Wiley & Sons, first edition, 1977.
- [8] Sidney Coleman. *Aspects of Symmetry*. Cambridge University Press, first edition, 1985.
- [9] Philippe Di Francesco, Pierre Mathieu, and David Sénéchal. *Conformal Field Theory*. Springer International Publishing, first edition, 1997.
- [10] Herbert Goldstein, Charles Poole, and John Safko. *Meccanica Classica*. Zanichelli, second italian edition, 2005.
- [11] Jeffrey Goldstone. Field theories with “superconductor” solutions. *Il Nuovo Cimento*, 19(1):154–164, 1961.
- [12] Jeffrey Goldstone, Abdus Salam, and Steven Weinberg. Broken symmetries. *Physical Review*, 127(3):965–970, 1962.

- [13] Brian C. Hall. *Lie groups, Lie algebras, and representations - An elementary introduction*. Springer International Publishing, second edition, 2015.
- [14] Lev Davidovich Landau and Evgenij Mihajlovič Lifšitz. *Meccanica*. Editori Riuniti university press, first italian edition, 2009.
- [15] Lev Davidovich Landau and Evgenij Mihajlovič Lifšitz. *Fisica statistica - Parte prima*. Editori Riuniti University Press, first italian edition, 2010.
- [16] Lev Davidovich Landau and Evgenij Mihajlovič Lifšitz. *Meccanica quantistica - Teoria non relativistica*. Editori Riuniti university press, first italian edition, 2010.
- [17] Lev Davidovich Landau and Evgenij Mihajlovič Lifšitz. *Teoria dei Campi*. Editori Riuniti university press, first italian edition, 2010.
- [18] H. Leutwyler. Phonons as goldstone bosons. *Helvetica Physica Acta*, 70:275–286, 1997.
- [19] Emmy Noether. Invariant variation problems. *Transport Theory and Statistical Physics*, 1(3):186–207, 1971. Traduzione inglese di Tavel, M. A. dell’originale del 1918 Invariante Variationsprobleme.
- [20] Chris Quigg. *Gauge Theories of the Strong, Weak, and Electromagnetic Interactions*. Princeton University Press, second edition, 2013.
- [21] Lewis H. Ryder. *Quantum Field Theory*. Cambridge University Press, second edition, 1996.
- [22] Jun John Sakurai and Jim Napolitano. *Meccanica quantistica moderna*. Zanichelli editore, third italian edition, 2021.
- [23] Wu-Ki Tung. *Group Theory in Physics*. World Scientific Publishing Co Pte Ltd, first edition, 1985.
- [24] Steven Weinberg. *The Quantum Theory of Fields – Volume II Modern Applications*. Cambridge University Press, first edition, 1996.
- [25] Steven Weinberg. *The Quantum Theory of Fields – Volume I Foundations*. Cambridge University Press, first paperback edition, 2005.
- [26] Steven Weinberg. *Lectures on Quantum Mechanics*. Cambridge University Press, first edition, 2013.
- [27] Eugene Paul Wigner. *Group Theory and its application to the quantum mechanics of atomic spectra*. Academic Press Inc., second edition, 1960.