Alma Mater Studiorum · Università di Bologna

**Dipartimento di Fisica e Astronomia "Augusto Righi"**
**Corso di Laurea in Fisica**

# Encoding di qubit in sistemi fotonici

**Relatore:**
**Prof. Lorenzo Piroli**

**Presentata da:**
**Giacomo Cicala**

Anno Accademico 2025/2026

**Sommario**

Il codice GKP è stato proposto nel 2001 da Daniel Gottesman, Alexei Kitaev e John Preskill come un modo per codificare un qubit nello spazio delle fasi di un oscillatore, dove gli stati logici sono formati da sovrapposizioni coerenti di stati squeezed traslati periodicamente. A causa della difficoltà nella preparazione di tali stati, si è ritenuto a lungo che il codice GKP fosse inutilizzabile. Tuttavia, gli straordinari sviluppi dell'hardware quantistico e degli strumenti teorici negli ultimi due decenni hanno reso il codice GKP un promettente candidato nella corsa per costruire una tecnologia quantistica bosonica tollerante agli errori. In questa tesi, viene presentata una panoramica del codice GKP con enfasi sulla sua implementazione tramite sistemi fotonici, descritti dal formalismo dell'ottica quantistica a variabili continue.

# Indice

**Introduzione** **4**

**1 Elementi di computazione e informazione quantistica** **6**
1.1 Postulati della meccanica quantistica . . . . . 6
1.2 Qubit e porte logiche quantistiche . . . . . 8
1.3 Correzione degli errori . . . . . 10

**2 Elementi di ottica quantistica e variabili continue** **13**
2.1 Quantizzazione del campo elettromagnetico: gli stati di Fock . . . . . 14
2.2 Operatori di quadratura . . . . . 16
2.3 Stati coerenti . . . . . 17
2.3.1 Autostati dell'operatore di distruzione . . . . . 17
2.3.2 Stati di vuoto traslati . . . . . 18
2.3.3 Stati quasi-classici e a minima incertezza . . . . . 20
2.4 Stati *squeezed* . . . . . 20
2.5 Rappresentazione nello spazio delle fasi . . . . . 22

**3 Il codice GKP** **25**
3.1 Dal discreto al continuo: il caso di singolo oscillatore . . . . . 25
3.1.1 Il caso discreto . . . . . 25
3.1.2 Il caso continuo . . . . . 27

**4 Manipolazione fault-tolerant dell'informazione codificata** **30**
4.1 Stati logici approssimati: lo squeezing finito . . . . . 30
4.2 Aspetti tecnici e approfondimenti . . . . . 35
4.2.1 Operazioni simplettiche . . . . . 35
4.2.2 Misurazione sindrome ed error recovery . . . . . 38

**Conclusioni** **39**

**A Teorema di no-cloning** **41**

**B Formula di Glauber** **43**

**Bibliografia** **46**

# Introduzione

Nel 1994 Peter Shor presentò un algoritmo quantistico in grado di fattorizzare i numeri interi in tempo polinomiale nel numero di cifre [1], contro la complessità sub-esponenziale del miglior algoritmo classico. Il risultato di Shor dimostrò per la prima volta che l'informazione quantistica può offrire un vantaggio computazionale reale rispetto a qualsiasi piattaforma classica, in particolare per la simulazione della dinamica di sistemi quantistici a molti corpi, un compito che richiede risorse che crescono esponenzialmente con il numero di particelle simulate, come intuito da Feynman già nel 1982 [2]. Uno degli obiettivi dell'informazione quantistica è quello di interpretare i concetti della fisica quantistica da un punto di vista della teoria dell'informazione. Tuttavia, come riassunto dal titolo del celebre articolo di Landauer "Information is physical" [3], sia l'informazione che la computazione non sono enti matematici astratti, ma sono concetti intrinsecamente fisici, poiché si basano sui sistemi fisici in cui l'informazione è memorizzata e attraverso i quali essa è elaborata o trasmessa.

Dunque, la scelta della piattaforma fisica determina direttamente le caratteristiche del computer quantistico, il quale dovrà soddisfare requisiti specifici per poter essere utilizzato nella pratica. Una proposta di questi criteri fu avanzata da DiVincenzo in un noto articolo nel 2000 [4], nel quale presentò un insieme di criteri che qualunque piattaforma candidata a implementare un computer quantistico su larga scala deve soddisfare. Negli ultimi decenni sono state sviluppate diverse piattaforme fisiche che tentano di soddisfare questi requisiti, tra cui circuiti superconduttori, ioni intrappolati e atomi neutri, tutti caratterizzati dal fatto che l'informazione quantistica è codificata in sistemi discreti a due livelli, seguendo quindi un approccio a variabili discrete (DV).

Tuttavia, Lloyd e Braunstein nel 1999 mostrarono come la computazione quantistica potesse essere implementata anche in sistemi a dimensione infinita, utilizzando un approccio a variabili continue (CV) [5]. La principale motivazione di questo lavoro originò da osservazioni pratiche: ovvero la facilità con cui è possibile preparare, manipolare e misurare stati quantistici in sistemi ottici, sfruttando le ampiezze di quadratura del campo elettromagnetico quantizzato, rendendo i sistemi fotonici un ottimo candidato per l'implementazione di protocolli a variabili continue. La tecnologia fotonica offre diversi vantaggi rispetto agli altri approcci menzionati: la possibilità di operare a temperatura ambiente, che consente la miniaturizzazione completa, la produzione di massa, e una

scalabilità più rapida a grandi numeri di qubit; compatibilità intrinseca con la tecnologia di comunicazione a lunga distanza (*flying qubits*), e flessibilità nella scelta dei codici di correzione degli errori.

Fin dagli inizi della computazione quantistica, si comprese che nessun computer quantistico su larga scala sarebbe stato realizzabile senza un meccanismo di correzione degli errori. Infatti, i computer quantistici ancora più dei computer classici, sono soggetti ad errori dovuti all'interazione con l'ambiente esterno, a causa della natura fragile dei sistemi quantistici. Il primo codice correttore d'errori quantistico a variabili discrete, proposto dallo stesso Shor, proteggeva un singolo qubit logico codificandolo in nove qubit, combinando un codice di ripetizione per il bit-flip con uno per il phase-flip [6]; poco dopo Steane introdusse un codice più efficiente basato su sette qubit [7], e Calderbank e Shor generalizzarono questi esempi nella classe dei codici CSS [8]. Questi codici vennero poi generalizzati sotto il formalismo degli stabilizzatori, con il quale oggi si descrivono la maggior parte dei codici quantistici, inclusi quelli a variabili continue.

Il codice di Gottesman-Kitaev-Preskill (GKP) [9], oggetto di questa tesi, nasce proprio per proteggere l'informazione quantistica discreta in sistemi a variabili continue: l'idea alla base del codice è quella di codificare qubit discreti descritti da spazi di Hilbert a dimensione finita nelle ampiezze di quadratura continue del campo elettromagnetico quantizzato, formalmente analoghe alle quadrature q e p di un oscillatore armonico quantistico, descritto da uno spazio di Hilbert a dimensione infinita. Questo codice, utilizzando il formalismo degli stabilizzatori nella versione continua, sfrutta la geometria non commutativa dello spazio delle fasi per proteggere l'informazione da piccoli errori di spostamento continuo sulle quadrature q e p.

In questo elaborato si comincia nel capitolo 1 ricordando i postulati della meccanica quantistica, presentando poi gli elementi essenziali della computazione e informazione quantistica, inclusi i fondamenti della correzione degli errori. Nel capitolo 2 si introduce il formalismo dell'ottica quantistica, necessario per l'implementazione fisica dei sistemi fotonici a variabili continue, dalla quantizzazione del campo elettromagnetico alla descrizione degli stati coerenti e squeezed, fino alla rappresentazione nello spazio delle fasi tramite la funzione di Wigner. Successivamente, nel capitolo 3 è presentata la costruzione del codice GKP, mostrando come esso emerga naturalmente come limite continuo di un codice discreto. Dopodiché, nel capitolo 4 viene discussa la manipolazione fault-tolerant dell'informazione codificata, partendo dagli effetti dello squeezing finito fino ad accennare l'implementazione di porte logiche fault-tolerant tramite operazioni simplettiche per la misurazione della sindrome.

# Capitolo 1

# Elementi di computazione e informazione quantistica

Prima di addentrarci nello studio del protocollo di correzione degli errori quantistici concepito da Gottesman, Kitaev e Preskill, è opportuno introdurre alcuni concetti fondamentali della meccanica quantistica e dell'informazione quantistica. In questo capitolo, verranno innanzitutto ricordati brevemente i postulati della meccanica quantistica [10], successivamente verrà descritto il qubit e la sua manipolazione tramite porte logiche quantistiche [10, 11] per arrivare infine ad una generale introduzione alla correzione degli errori quantistici [12].

## 1.1 Postulati della meccanica quantistica

Nella sezione che segue, daremo una descrizione sintetica dei postulati fondamentali della meccanica quantistica.

> **Postulato 1 (Stati quantistici)**: Ad ogni sistema fisico isolato è associato uno *spazio di Hilbert* $\mathcal{H}$, e il suo stato è completamente descritto da un *vettore di stato* $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$, che è un vettore unitario nello spazio degli stati del sistema.

Più precisamente, la condizione di vettore unitario $\langle\psi|\psi\rangle = 1$, ammette la possibilità di $|\psi\rangle$ di essere moltiplicato per una fase globale $e^{i\theta}$, senza alterare le proprietà fisiche dello stato. In altre parole, gli stati $|\psi\rangle$ e $e^{i\theta}|\psi\rangle$ rappresentano lo stesso stato fisico.

**Postulato 2 (Evoluzione temporale)**: L'evoluzione temporale di un sistema quantistico isolato è descritta da una trasformazione unitaria. Ovvero, se il sistema è inizialmente nello stato $|\psi(t)\rangle$ al tempo $t$, allora il suo stato al tempo $t'$ è dato da:

$$|\psi(t')\rangle = \hat{U}(t', t)\,|\psi(t)\rangle\,, \tag{1.1}$$

dove $\hat{U}(t', t)$ è un operatore unitario.

Volendo essere più precisi, l'evoluzione temporale di un sistema quantistico è governata dall'equazione di Schrödinger:

$$i\hbar\frac{d}{dt}\,|\psi(t)\rangle = \hat{H}\,|\psi(t)\rangle\,, \tag{1.2}$$

dove $\hat{H}$ è l'Hamiltoniana del sistema. Tuttavia, in questo contesto, l'unitarietà dell'evoluzione temporale sarà sufficiente per descrivere le operazioni sui qubit e le loro proprietà.

**Postulato 3 (Osservabili)**: Ogni osservabile fisico è rappresentato da un operatore hermitiano $\hat{A}$ sullo spazio di Hilbert $\mathcal{H}$ associato al sistema. Gli autovalori di $\hat{A}$ rappresentano i possibili risultati di una misura dell'osservabile.

**Postulato 4 (Misura)**: La misura di un osservabile $\hat{A}$ su uno stato quantistico $|\psi\rangle$ è descritta da un operatore di proiezione $\hat{P}_i$ associato all'autovalore $\lambda_i$ di $\hat{A}$. La probabilità di ottenere il risultato $\lambda_i$ è data da:

$$P(\lambda_i) = \langle\psi|\hat{P}_i|\psi\rangle\,. \tag{1.3}$$

Dopo la misura, lo stato del sistema collassa nello stato proiettato $|\psi'\rangle$ dato da:

$$|\psi'\rangle = \frac{\hat{P}_i\,|\psi\rangle}{\sqrt{\langle\psi|\hat{P}_i|\psi\rangle}}. \tag{1.4}$$

In realtà il tipo di misura descritta appartiene alla categoria delle *Projective-Valued Measures* (PVM), che rappresentano un caso particolare di misure quantistiche più generali, le *Positive-Operator Valued Measures* (POVM).

**Postulato 5 (Sistemi composti)**: Se $n$ sistemi quantistici sono descritti dagli spazi di Hilbert $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2, \ldots, \mathcal{H}_n$, lo stato del sistema composto è descritto dallo spazio di Hilbert tensoriale $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2 \otimes \cdots \otimes \mathcal{H}_n$. Gli stati del sistema composto possono essere rappresentati come combinazioni lineari di prodotti tensoriali degli stati dei singoli sistemi.

## 1.2 Qubit e porte logiche quantistiche

L'unità fondamentale dell'informazione classica è il *bit*, il quale può assumere in maniera esclusiva uno tra due stati distinti, rappresentati convenzionalmente come 0 e 1. Analogamente, nell'informazione quantistica, l'unità fondamentale è il *qubit* (quantum bit), il quale descrive lo stato del più semplice sistema quantistico non banale, ovvero quello descritto da uno spazio di Hilbert bidimensionale. Scegliendo come base ortonormale per questo spazio la cosiddetta *base computazionale*, ovvero quella formata dagli stati $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ , lo stato di un qubit può essere espresso come una combinazione lineare di questi, ovvero:

$$|\psi\rangle = \alpha\,|0\rangle + \beta\,|1\rangle\,, \tag{1.5}$$

dove $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ e soddisfano la condizione di normalizzazione $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$. Dunque, mentre un bit classico può trovarsi esclusivamente in uno dei due stati 0 o 1, un qubit può trovarsi in una generica sovrapposizione di entrambi gli stati, caratterizzata dai coefficienti complessi $\alpha$ e $\beta$.

Se lo stato del qubit è inizialmente sconosciuto, è impossibile determinare i valori dei coefficienti $\alpha$ e $\beta$ con una singola misura. Infatti, dai postulati della meccanica quantistica, quando si effettua una misura proiettiva del qubit sulla base $\{|0\rangle, |1\rangle\}$, si ottiene il risultato 0 con probabilità $|\alpha|^2$ e 1 con probabilità $|\beta|^2$; inoltre, dopo la misura, lo stato del qubit differisce in generale da quello iniziale in quanto collassa in uno dei due stati della base computazionale. Quindi, anche in questo aspetto il qubit si distingue dal bit classico, poiché quest'ultimo può essere letto senza alterarne lo stato e possiamo decifrare tutta l'informazione codificata in esso.

Lo stato di un qubit gode di una rappresentazione geometrica molto utile, nota come *sfera di Bloch*. Infatti, ricordando la condizione di normalizzazione $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$, possiamo parametrizzare i coefficienti $\alpha$ e $\beta$ in termini di due angoli $\theta \in [0, \pi]$ e $\phi \in [0, 2\pi)$ e scrivere lo stato del qubit (1.5) come:

$$|\psi\rangle = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)|0\rangle + e^{i\phi}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)|1\rangle\,, \tag{1.6}$$

dove la fase globale è stata omessa in quanto non rappresenta un osservabile, a differenza della fase relativa $e^{i\phi}$ tra i due stati della base computazionale. Si ha quindi una corri-

spondenza biunivoca tra lo stato di un qubit e un punto identificato dall'angolo polare $\theta$ e dall'angolo azimutale $\phi$ sulla superficie di una sfera unitaria, detta *sfera di Bloch*.

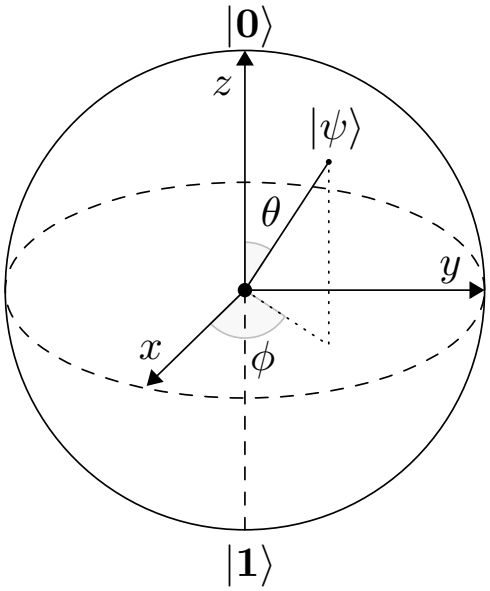



Figura 1.1: Rappresentazione geometrica di uno stato di qubit $|\psi\rangle$ sulla sfera di Bloch.

Come per i bit classici, possiamo effettuare anche sui qubit delle operazioni tramite porte logiche (*gates*). Consideriamo il caso di porte logiche a singolo qubit: poiché l'evoluzione di un qubit deve essere unitaria, le porte logiche dovranno essere rappresentate da operatori unitari, che in questo caso saranno matrici hermitiane $2 \times 2$. Nella base computazionale, possiamo definire i seguenti gates quantistici a singolo qubit:

**Not gate $\hat{\mathbf{X}}$:**

$$\hat{X} \equiv \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{1.7}$$

**Phase flip gate $\hat{\mathbf{Z}}$:**

$$\hat{Z} \equiv \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \tag{1.8}$$

**Hadamard gate $\hat{\mathbf{H}}$:**

$$\hat{H} \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \tag{1.9}$$

Come dice il nome, la porta $\hat{X}$ rappresenta il NOT quantistico, ovvero agisce sugli stati della base computazionale come $|0\rangle \to |1\rangle$ e $|1\rangle \to |0\rangle$. Le altre due porte non hanno un analogo classico: la porta $\hat{Z}$ agisce sugli stati della base computazionale applicando una fase relativa di $\pi$ allo stato $|1\rangle$, ovvero $|0\rangle \to |0\rangle$ e $|1\rangle \to -|1\rangle$, mentre la porta $\hat{H}$ trasforma gli stati della base computazionale in una sovrapposizione bilanciata di essi, ovvero $|0\rangle \to \frac{|0\rangle+|1\rangle}{\sqrt{2}}$ e $|1\rangle \to \frac{|0\rangle-|1\rangle}{\sqrt{2}}$.

Più in generale, si può dimostrare che la più generica trasformazione unitaria a singolo qubit può essere rappresentata come una rotazione sulla sfera di Bloch di un angolo $\theta$ a attorno all'asse $\mathbf{n}$ tramite l'esponenziale di Pauli:

$$e^{-i\frac{\theta}{2}\mathbf{n}\cdot\hat{\boldsymbol{\sigma}}} = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) I - i \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) (\mathbf{n} \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}}), \tag{1.10}$$

dove $\mathbf{n} = (n_x, n_y, n_z)$ è un vettore unitario che definisce l'asse di rotazione e $\hat{\boldsymbol{\sigma}} = (\hat{X}, \hat{Y}, \hat{Z})$ è il vettore dei tre operatori di Pauli. In particolare, le porte logiche definite in precedenza possono essere interpretate come rotazioni specifiche sulla sfera di Bloch: la porta $\hat{X}$ corrisponde a una rotazione di $\pi$ intorno all'asse $x$, la porta $\hat{Z}$ a una rotazione di $\pi$ intorno all'asse $z$, e la porta $\hat{H}$ può essere vista come una combinazione di rotazioni intorno agli assi $x$ e $z$.

## 1.3 Correzione degli errori

Come i computer classici, anche i computer quantistici sono soggetti ad errori. Per questi ultimi, l'origine degli errori risiede principalmente nell'interazione con l'ambiente esterno oppure nelle imperfezioni nei dispositivi fisici che implementano i qubit e che eseguono operazioni su di essi. Nel primo caso possono verificarsi fenomeni di *decoerenza*, dove l'informazione codificata inizialmente nel qubit diviene codificata in interazioni con l'ambiente esterno, rendendo impossibile il recupero dell'informazione originale. Nel secondo caso, invece, possiamo rappresentare una porta logica quantistica reale $\hat{U}$ come una porta ideale $\hat{U}_0$ affetta da un errore di ordine $\varepsilon$, ovvero:

$$\hat{U} = \hat{U}_0(\hat{I} + \mathcal{O}(\varepsilon)). \tag{1.11}$$

Dopo l'applicazione di circa $1/\varepsilon$ porte logiche, questi errori si accumuleranno portando ad un errore non trascurabile.

In generale, per proteggere l'informazione dagli errori, ci si affida alla *ridondanza*, ovvero si ripete l'informazione codificandola in un sistema a dimensione maggiore. In questa maniera, anche se una parte dell'informazione codificata viene corrotta, sarà presente sufficiente ridondanza per poter recuperare l'informazione originale con buona probabilità.

L'esempio più semplice di codice di correzione degli errori classico è un *codice di ripetizione*, secondo il quale si sostituisce il bit che si vuole proteggere con 3 copie del bit:

$$0 \to (000), \quad 1 \to (111). \tag{1.12}$$

Un errore può verificarsi causando il flip di uno dei tre bit con una probabilità $p$, tuttavia, misurando i tre bit, possiamo determinare con buona probabilità il valore originale del bit protetto tramite il cosiddetto *voto di maggioranza* (il codice funziona correttamente solo se si verifica un singolo errore).

Si vorrebbe quindi applicare dei principi simili per proteggere l'informazione quantistica dagli errori. Emergono tuttavia delle difficoltà aggiuntive dovute sia alla varietà maggiore di errori che possono verificarsi sui qubit, sia a limiti intrinseci imposti dalla meccanica quantistica. Per quanto riguarda la diversità degli errori, oltre a quello di bit-flip sono presenti anche:

- **Phase-flip**. Corrispondente all'operatore $\hat{Z}$, questo errore agisce sullo stato di un qubit introducendo una fase relativa di $\pi$ tra gli stati della base computazionale, ovvero $|0\rangle \to |0\rangle$ e $|1\rangle \to -|1\rangle$.

- **Errori piccoli**. Come si è visto precedentemente, l'informazione quantistica è continua e di conseguenza possono esserlo anche gli errori. Dunque, un errore può essere rappresentato come una piccola rotazione dello stato del qubit sulla sfera di Bloch.

Entrambe le tipologie di errori sopra menzionate non hanno un analogo classico, e non possono essere corrette con un semplice codice di ripetizione. Invece, gli ostacoli imposti dalla meccanica quantistica sono principalmente due:

- **Teorema di no-cloning.** Si potrebbe pensare di implementare il codice di ripetizione in maniera quantistica duplicando lo stato quantistico più volte. Tuttavia, il *teorema di no-cloning* (capitolo A) afferma che non è possibile creare una copia perfetta di uno stato quantistico arbitrario sconosciuto.

- **Collasso della funzione d'onda.** Nello schema di voto di maggioranza del codice classico, è necessaria la misura dei bit per determinare la correzione da effettuare. Tuttavia, in meccanica quantistica, la misura di uno stato quantistico generalmente provoca il collasso della funzione d'onda nello stato misurato, distruggendo lo stato originale e rendendo impossibile il recupero dell'informazione codificata.

Siamo quindi di fronte al fallimento della computazione quantistica già in principio? La risposta fortunatamente è negativa. Infatti, nonostante le difficoltà citate, è stato sviluppato il cosiddetto *formalismo degli stabilizzatori* per la costruzione di codici quantistici resistenti agli errori. La descrizione completa di questo formalismo, ampiamente discusso in [13] e [14], esula dagli scopi di questa tesi, tuttavia per completezza ne daremo una breve introduzione [9].

In questo formalismo, l'interazione del sistema con l'ambiente è descritta da un'evoluzione non unitaria caratterizzata da un set di operatori di errore noti come *operatori di Kraus* [10]. Tuttavia, poiché qualsiasi operatore può essere sviluppato in una base di operatori unitari, il problema si riduce a questi ultimi. Gli elementi di questa base di operatori unitari vengono divisi in due classi: l'insieme $\mathcal{E}$ degli "errori probabili" dai quali ci si vuole proteggere, e il resto, gli "errori improbabili", dai quali il codice non riesce a proteggersi. Lo spazio logico codificato viene definito rigorosamente come l'autospazio simultaneo (associato all'autovalore $+1$) di un set di generatori commutanti, i quali formano un gruppo abeliano $\mathcal{S}$ noto come *stabilizzatore del codice*. Affinché il protocollo sia in grado di rilevare e correggere gli errori, è necessario che per ogni coppia di errori $\hat{E}_a$ ed $\hat{E}_b$ nell'insieme $\mathcal{E}$, si verifichi una delle due condizioni seguenti:

- Il prodotto $\hat{E}_a^\dagger \hat{E}_b$ appartiene al gruppo degli stabilizzatori $\mathcal{S}$. In questo caso, l'azione dei due errori sul sottospazio logico è la medesima, infatti sapendo che $\hat{E}_a^\dagger \hat{E}_b = \hat{S}$ e che $\hat{S}\,|\psi\rangle = |\psi\rangle$ per ogni $|\psi\rangle$ nello spazio logico, si ha che

$$\hat{E}_a^\dagger \hat{E}_b\,|\psi\rangle = \hat{S}\,|\psi\rangle = |\psi\rangle \implies \hat{E}_a\,|\psi\rangle = \hat{E}_b\,|\psi\rangle\,. \tag{1.13}$$

  Dunque l'applicazione di $\hat{E}_a^\dagger$ o $\hat{E}_b^\dagger$ è ugualmente efficace per il recupero dell'informazione.

- Il prodotto $\hat{E}_a^\dagger \hat{E}_b$ non commuta con almeno un elemento del gruppo degli stabilizzatori. Questa non commutazione garantisce che l'operazione di misura della *sindrome* (l'estrazione dell'autovalore dello stabilizzatore) restituisca un valore univoco, permettendo di identificare e correggere l'errore senza dover effettuare una misura diretta sullo stato logico, evitando così il collasso della funzione d'onda.

# Capitolo 2

# Elementi di ottica quantistica e variabili continue

Per comprendere il cambio di paradigma introdotto dai codici GKP, è indispensabile introdurre il linguaggio dei sistemi a dimensione infinita descritti da variabili continue. Un'entità fisica utile per realizzare questo genere di sistemi è il singolo modo del campo elettromagnetico quantizzato, tipicamente confinato in una cavità ottica. La descrizione di quest'ultimo si riduce infatti a quella di un oscillatore armonico quantistico, i cui stati dello spazio di Hilbert possono essere espressi da variabili continue: le cosiddette quadrature, che corrispondono alle ampiezze del campo elettrico e magnetico. In questo capitolo, seguendo il filo logico di [15, 16], verranno quindi introdotti gli strumenti matematici dell'ottica quantistica necessari per gettare le fondamenta teoriche del lavoro di Gottesman, Kitaev e Preskill. Innanzitutto, richiameremo la quantizzazione canonica del campo e l'algebra degli operatori di creazione e distruzione, introducendo gli stati di Fock. Successivamente, definendo gli operatori di quadratura passeremo formalmente alla rappresentazione continua nello *spazio delle fasi*. Dopodiché, esploreremo questo spazio attraverso l'operatore di spostamento e l'operatore di *squeezing*, che ci permetteranno di definire gli stati coerenti e gli stati *squeezed*. Infine, per completare la nostra descrizione dello spazio delle fasi, introdurremo le matrici densità e la funzione di Wigner.

## 2.1 Quantizzazione del campo elettromagnetico: gli stati di Fock

L'elettromagnetismo classico è riassunto nelle quattro equazioni di Maxwell:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0, \tag{2.1a}$$
$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \tag{2.1b}$$
$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \tag{2.1c}$$
$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mu_0 \mathbf{j}. \tag{2.1d}$$

Da queste si ricava che, nel vuoto, $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$ soddisfano l'equazione delle onde di d'Alembert:

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0, \tag{2.2a}$$
$$\nabla^2 \mathbf{B} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} = 0. \tag{2.2b}$$

Classicamente, ogni modo normale del campo elettromagnetico in una cavità è rappresentato da un oscillatore armonico. Per vederlo, consideriamo una cavità 1-D vuota di volume $V$ con pareti conduttrici distanti $L$, dove il campo risultante è dato dalla sovrapposizione di onde che si propagano in entrambe le direzioni della dimensione spaziale rilevante della cavità (asse $z$), con polarizzazione scelta convenzionalmente lungo l'asse $x$ (fig. 2.1). Nel caso del campo elettrico, imponendo condizioni al contorno di annullamento in corrispondenza delle pareti conduttrici della cavità, si ottengono delle onde stazionarie, i modi normali. Una soluzione per il campo elettrico associato ad un singolo modo normale è data da:

$$\mathbf{E}(z,t) = \mathbf{e}_x f(t) \sin(kz), \tag{2.3}$$

dove $k = \frac{n\pi}{L}$ (per valori $n = 0, 1, 2, 3, \dots$). Dalla terza equazione di Maxwell (2.1c), si ottiene che il campo magnetico associato è dato da:

$$\mathbf{B}(z,t) = \mathbf{e}_y \frac{1}{kc^2} \dot{f}(t) \cos(kz). \tag{2.4}$$

L'energia totale di questo modo nella cavità, ovvero l'Hamiltoniana, è data da:

$$\begin{aligned} H &= \tfrac{\epsilon_0}{2} \textstyle\int_V dV \left(|\mathbf{E}|^2 + c^2 |\mathbf{B}|^2\right) \\ &= \tfrac{\epsilon_0 V}{4\omega^2} \left(\dot{f}^2(t) + \omega^2 f^2(t)\right). \end{aligned} \tag{2.5}$$

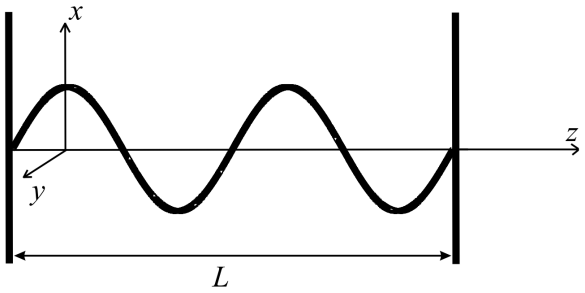



Figura 2.1: Rappresentazione grafica di modo normale del campo elettrico in una cavità 1-D. Immagine presa da [15].

Definendo

$$Q(t) = \sqrt{\frac{\epsilon_0 V}{2\omega^2}} f(t), \tag{2.6}$$

otteniamo la seguente Hamiltoniana:

$$H = \frac{1}{2}\left(P^2 + \omega^2 Q^2\right), \tag{2.7}$$

dove $P = \dot{Q}$ è il momento canonico associato alla coordinata $Q$. Questa Hamiltoniana è formalmente identica a quella di un oscillatore armonico classico con frequenza $\omega$ e massa unitaria.

Per quantizzare il campo elettromagnetico, si promuovono $Q$ e $P$ a operatori secondo la regola di quantizzazione canonica [17], imponendo la seguente relazione di commutazione:

$$[\hat{Q}, \hat{P}] = i\hbar\hat{I}. \tag{2.8}$$

In analogia con l'oscillatore armonico quantistico, si introducono gli operatori creazione/distruzione $\hat{a}^\dagger$ e $\hat{a}$, definiti come:

$$\hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega}}\left(\omega\hat{Q} + i\hat{P}\right) \quad , \quad \hat{a}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega}}\left(\omega\hat{Q} - i\hat{P}\right) \tag{2.9}$$

che soddisfano le seguenti relazioni:

$$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = \hat{I} \tag{2.10}$$

$$\hat{a}\,|n\rangle = \sqrt{n}\,|n-1\rangle \quad , \quad \hat{a}^\dagger\,|n\rangle = \sqrt{n+1}\,|n+1\rangle\,. \tag{2.11}$$

Introducendo esplicitamente la dipendenza temporale degli operatori di creazione/distruzione ($\hat{a}(t) = \hat{a}e^{-i\omega t}$ e $\hat{a}^\dagger(t) = \hat{a}^\dagger e^{i\omega t}$), (2.3) e (2.4) possono essere riscritti in termini di questi operatori come:

$$\hat{E}(z,t) = \mathbf{e}_x \mathcal{E}_0 \left(\hat{a}^\dagger e^{i\omega t} + \hat{a}e^{-i\omega t}\right)\sin(kz), \tag{2.12a}$$

$$\hat{B}(z,t) = \mathbf{e}_y \frac{i}{c}\mathcal{E}_0 \left(\hat{a}^\dagger e^{i\omega t} - \hat{a}e^{-i\omega t}\right)\cos(kz). \tag{2.12b}$$

dove $\mathcal{E}_0 = \left(\frac{\hbar\omega}{\epsilon_0 V}\right)^{\frac{1}{2}}$ si comporta come l'unità elementare del campo elettrico per questo modo normale. Anche l'Hamiltoniana del campo quantizzato può essere quindi riscritta in termini di questi operatori:

$$\hat{H} = \hbar\omega\left(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2}\right). \tag{2.13}$$

Gli autostati di questa Hamiltoniana, i quali formano una base ortonormale, sono chiamati stati di *Fock* o stati numero, e sono definiti come:

$$\hat{H}\,|n\rangle = E_n\,|n\rangle \quad , \quad E_n = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right) \quad , \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{2.14}$$

dove $|n\rangle$ rappresenta uno stato con $n$ eccitazioni del campo elettromagnetico, i *fotoni*. Si dimostra infatti che:

$$|n\rangle = \frac{(\hat{a}^\dagger)^n}{\sqrt{n!}}\,|0\rangle \quad , \quad \hat{n}\,|n\rangle = n\,|n\rangle \tag{2.15}$$

dove $|0\rangle$ è lo stato di vuoto, e $\hat{n} = \hat{a}^\dagger\hat{a}$ è l'operatore numero.

Se valutiamo i valori di aspettazione dei campi per uno stato di Fock $|n\rangle$, otteniamo un risultato all'apparenza controintuitivo:

$$\langle n|\hat{\mathbf{E}}(z,t)|n\rangle = 0, \tag{2.16a}$$

$$\langle n|\hat{\mathbf{B}}(z,t)|n\rangle = 0. \tag{2.16b}$$

Nonostante il sistema possieda un'energia macroscopica $E_n$, il campo medio è nullo, un comportamento che si discosta dalle onde stazionarie classiche.

## 2.2 Operatori di quadratura

Definiamo ora gli **operatori di quadratura $\hat{q}$** e **$\hat{p}$** come:

$$\begin{cases} \hat{q} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\hat{a}^\dagger + \hat{a}\right) \\ \hat{p} = \dfrac{i}{\sqrt{2}}\left(\hat{a}^\dagger - \hat{a}\right) \end{cases} \iff \begin{cases} \hat{a} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\hat{q} + i\hat{p}\right) \\ \hat{a}^\dagger = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\hat{q} - i\hat{p}\right) \end{cases} \tag{2.17}$$

che risultano essere la versione adimensionale degli operatori $\hat{Q}$ e $\hat{P}$, ovvero:

$$\hat{q} = \sqrt{\frac{\omega}{\hbar}}\hat{Q} \quad , \quad \hat{p} = \sqrt{\frac{1}{\hbar\omega}}\hat{P}. \tag{2.18}$$

É importante notare che $\hat{Q}$ e $\hat{P}$, così come le loro quadrature, non rappresentano posizione e momento di un fotone, in quanto il modo normale del campo elettromagnetico è un oggetto intrinsecamente esteso nello spazio e quindi delocalizzato. Piuttosto, queste rappresentano le ampiezze del campo elettrico e magnetico, infatti utilizzando (2.17) è possibile riscrivere (2.12) come:

$$\hat{E}(z,t) = \mathbf{e}_x \sqrt{2}\mathcal{E}_0 \hat{q}(t)\sin(kz), \tag{2.19a}$$

$$\hat{B}(z,t) = \mathbf{e}_y \sqrt{2}\mathcal{E}_0 \hat{p}(t)\cos(kz). \tag{2.19b}$$

Rispettando la seguente relazione di commutazione:

$$[\hat{q},\hat{p}] = i\hat{I}, \tag{2.20}$$

e sapendo che in generale

$$\Delta\hat{q}\Delta\hat{p} \geq \frac{1}{2}|\langle[\hat{q},\hat{p}]\rangle|, \tag{2.21}$$

si ottiene la seguente relazione di indeterminazione:

$$\Delta\hat{q}\Delta\hat{p} \geq \frac{1}{2}, \tag{2.22}$$

che implica che non è possibile preparare un modo del campo elettromagnetico in cui le ampiezze del campo elettrico e magnetico siano entrambe determinate con precisione arbitraria.

## 2.3 Stati coerenti

Introduciamo ora degli stati di fondamentale importanza in ottica quantistica: i cosiddetti *stati coerenti* [15, 16, 18]. A differenza degli stati di Fock, questi non possiedono un numero ben definito di fotoni, ma sono sovrapposizioni di stati di Fock con pesi che seguono una distribuzione di Poisson. Inoltre, "saturando" il principio di indeterminazione di Heisenberg, costituiscono in un certo senso gli stati quantistici del campo elettromagnetico che più si avvicinano alla descrizione classica.

### 2.3.1 Autostati dell'operatore di distruzione

Definiamo gli **stati coerenti** come autostati dell'operatore di distruzione $\hat{a}$:

$$\hat{a}\,|\alpha\rangle = \alpha\,|\alpha\rangle \quad , \quad \alpha \in \mathbb{C}. \tag{2.23}$$

Notiamo come gli autovalori $\alpha$ possano essere complessi in quanto $\hat{a}$ non è un operatore hermitiano. Poiché $\{|n\rangle\}_{n=0}^{\infty}$ è un set completo, possiamo espandere $|\alpha\rangle$ come

$$|\alpha\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} c_n |n\rangle , \tag{2.24}$$

da cui, applicando $\hat{a}$ a (2.24) e uguagliandolo al secondo membro di (2.23) si ottiene:

$$\hat{a} |\alpha\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sqrt{n} |n-1\rangle = \alpha \sum_{n=0}^{\infty} c_n |n\rangle . \tag{2.25}$$

Uguagliando i coefficienti di $|n\rangle$ in entrambi i membri dell'equazione, si ricava

$$c_n \sqrt{n} = \alpha c_{n-1} \tag{2.26}$$

che è risolta da:

$$c_n = \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} c_0 \tag{2.27}$$

dove $c_0$ è un coefficiente di normalizzazione, che risulta essere $c_0 = e^{-|\alpha|^2/2}$. Lo stato coerente normalizzato risulta quindi:

$$|\alpha\rangle = e^{-|\alpha|^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle \tag{2.28}$$

Si può dimostrare [15] che gli stati coerenti formano un set completo, ma non sono linearmente indipendenti, caratteristica nota come *sovrabbondanza*.

Essendo che gli stati coerenti $|\alpha\rangle$ sono dati da sovrapposizioni di stati di Fock, questi non contengono un numero ben definito di fotoni. Infatti, la probabilità di trovare $n$ fotoni in uno stato coerente $|\alpha\rangle$ è data da

$$P(n) = |\langle n|\alpha\rangle|^2 = e^{-|\alpha|^2} \frac{|\alpha|^{2n}}{n!}, \tag{2.29}$$

che è una distribuzione di Poisson con media $\langle n\rangle = |\alpha|^2$ e deviazione standard $\Delta n = |\alpha|$.

### 2.3.2 Stati di vuoto traslati

L'**operatore di spostamento $\hat{D}(\alpha)$** nello spazio delle fasi è definito come:

$$\hat{D}(\alpha) = e^{\alpha \hat{a}^\dagger - \alpha^* \hat{a}}, \tag{2.30}$$

dove $\alpha \in \mathbb{C}$ rappresenta l'ampiezza e la direzione della traslazione spaziale e di momento.

Usando la formula di Glauber (capitolo B):

$$e^{\hat{A}+\hat{B}} = e^{\hat{A}} e^{\hat{B}} e^{-[\hat{A},\hat{B}]/2}, \tag{2.31}$$

possiamo scrivere gli operatori $\hat{D}(\alpha)$ e $\hat{D}^\dagger(\alpha)$ come:

$$\hat{D}(\alpha) = e^{-|\alpha|^2/2} e^{\alpha \hat{a}^\dagger} e^{-\alpha^* \hat{a}} \tag{2.32}$$

$$\hat{D}^\dagger(\alpha) = e^{-|\alpha|^2/2} e^{\alpha^* \hat{a}} e^{-\alpha \hat{a}^\dagger}, \tag{2.33}$$

dalle quali si dimostra che $\hat{D}(\alpha)$ ha le seguenti proprietà:

$$\hat{D}^\dagger(\alpha) \hat{a} \hat{D}(\alpha) = \hat{a} + \alpha \tag{2.34}$$

$$\hat{D}^\dagger(\alpha) \hat{a}^\dagger \hat{D}(\alpha) = \hat{a}^\dagger + \alpha^*. \tag{2.35}$$

Inoltre, dalle precedenti proprietà si ricava la relazione di commutazione di Weyl:

$$\hat{D}(\alpha)\hat{D}(\beta) = e^{-2i \operatorname{Im}(\alpha^* \beta)} \hat{D}(\beta)\hat{D}(\alpha). \tag{2.36}$$

Dalle proprietà di $\hat{D}(\alpha)$ viste precedentemente, si ottiene che lo stato coerente $|\alpha\rangle$ è generato applicando $\hat{D}(\alpha)$ allo stato di vuoto:

$$|\alpha\rangle = \hat{D}(\alpha) |0\rangle, \tag{2.37}$$

per questo motivo, gli stati coerenti sono anche chiamati *stati di vuoto traslati*.

Notiamo che ponendo $\alpha = (q_0 + ip_0)/\sqrt{2}$ con $q_0, p_0 \in \mathbb{R}$, si ottiene

$$\hat{D}^\dagger(\alpha) \hat{q} \hat{D}(\alpha) = \hat{q} + q_0 \hat{I} \tag{2.38}$$

$$\hat{D}^\dagger(\alpha) \hat{p} \hat{D}(\alpha) = \hat{p} + p_0 \hat{I}, \tag{2.39}$$

ovvero, l'operatore di spostamento $\hat{D}(\alpha)$ trasla le quadrature di una quantità $q_0$ e $p_0$ rispettivamente. Inoltre, sostituendo (2.17) in (2.30), possiamo esprimere l'operatore di spostamento in funzione delle quadrature:

$$\hat{D}(\alpha) = e^{i(p_0 \hat{q} - q_0 \hat{p})}. \tag{2.40}$$

che per la formula di Glauber (2.31) risulta equivalente a

$$\hat{D}(\alpha) = e^{\frac{-ip_0 q_0}{2}} e^{ip_0 \hat{q}} e^{-iq_0 \hat{p}}. \tag{2.41}$$

Infine, ricordando che per l'oscillatore armonico quantistico lo stato di vuoto nella rappresentazione delle coordinate $q$ è dato da

$$\langle q|0\rangle \equiv \psi(q) = \pi^{-1/4} e^{-\frac{q^2}{2}}, \tag{2.42}$$

otteniamo che lo stato coerente $|\alpha\rangle$ in questa rappresentazione è dato da

$$\langle q|\alpha\rangle \equiv \psi_\alpha(q) = \pi^{-1/4} e^{-i\frac{p_0 q_0}{2}} e^{ip_0 q} e^{-\frac{(q-q_0)^2}{2}}. \tag{2.43}$$

Ovvero, a meno di una fase globale, lo stato coerente $|\alpha\rangle$ è descritto dalla stessa gaussiana dello stato di vuoto ma traslata di una quantità $q_0$ nella rappresentazione di $q$.

### 2.3.3 Stati quasi-classici e a minima incertezza

Iniziamo calcolando l'evoluzione temporale di uno stato coerente $|\alpha\rangle$:

$$|\alpha(t)\rangle = e^{-i\hat{H}t/\hbar}\,|\alpha\rangle = e^{-i\omega t/2}\left|\alpha e^{-i\omega t}\right\rangle. \tag{2.44}$$

Per vedere come questi stati "assomiglino" a quelli classici, ricordiamo che le equazioni di Hamilton classiche per le quadrature di un oscillatore armonico sono

$$\begin{cases} \dot{q}(t) = \omega p(t) \\ \dot{p}(t) = -\omega q(t) \end{cases}, \tag{2.45}$$

o alternativamente, introducendo $\alpha(t) = (q(t) + ip(t))/\sqrt{2}$, si ottiene

$$\dot{\alpha}(t) = -i\omega\alpha(t) \quad \Rightarrow \quad \alpha_{cl}(t) = \alpha_0 e^{-i\omega t}, \tag{2.46}$$

da cui si vede che l'evoluzione temporale quantistica di uno stato coerente è analoga a quella classica a meno di un fattore di fase. Difatti, i valori di aspettazione per i campi diventano:

$$\langle\alpha|\hat{\mathbf{E}}(z,t)|\alpha\rangle = 2\mathcal{E}_0|\alpha|\sin(kz)\cos(\omega t - \theta)\mathbf{e}_x \tag{2.47}$$

$$\langle\alpha|\hat{\mathbf{B}}(z,t)|\alpha\rangle = -\frac{2\mathcal{E}_0}{c}|\alpha|\cos(kz)\sin(\omega t - \theta)\mathbf{e}_y, \tag{2.48}$$

riproducendo esattamente le stesse equazioni di un'onda elettromagnetica stazionaria classica. Inoltre, si ha che l'Hamiltoniana classica risulta essere

$$H_{cl} = \frac{\hbar\omega}{2}\left(p(t)^2 + q^2(t)\right) = \omega|\alpha_0|^2, \tag{2.49}$$

che a meno del contributo di punto zero, è uguale all'energia dello stato coerente $|\alpha\rangle$. Per queste ragioni, gli stati coerenti sono spesso descritti come stati *quasi-classici* del campo elettromagnetico.

Un'altra analogia tra stati coerenti e classici è data dal fatto che gli stati coerenti sono stati a minima incertezza, infatti si dimostra che il prodotto delle incertezze uguaglia il limite inferiore di (2.22), ovvero:

$$\Delta\hat{q}\Delta\hat{p} = \frac{1}{2}. \tag{2.50}$$

## 2.4 Stati *squeezed*

Gli stati coerenti costituiscono un caso particolare di stati a minima incertezza, in cui $\Delta\hat{q} = \Delta\hat{p} = 1/\sqrt{2}$. Una classe più generale di stati a minima incertezza è data dagli

stati *squeezed*, i quali possono avere incertezze asimmetriche sulle quadrature (fig. 2.2). Una maniera per generare matematicamente questi stati in modo tale che l'operazione corrisponda ad un processo fisico, è quella data dall'azione di un preciso operatore:

L'**operatore di squeezing $\hat{S}(r)$** è definito come:

$$\hat{S}(r) = e^{\frac{r}{2}\left(\hat{a}^2 - (\hat{a}^\dagger)^2\right)}, \tag{2.51}$$

dove $r > 0$ è detto parametro di squeezing.

Il più semplice stato squeezed è quello che si ottiene applicando $\hat{S}(r)$ allo stato di vuoto $|0\rangle$:

$$|r\rangle = \hat{S}(r)\,|0\rangle\,, \tag{2.52}$$

per il quale si ottiene che le incertezze sulle quadrature sono date da [15]:

$$\Delta\hat{q} = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-r} \quad , \quad \Delta\hat{p} = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{r}, \tag{2.53}$$

da cui si vede $|r\rangle$ è uno stato a minima incertezza, ma con incertezze asimmetriche sulle quadrature. Più in generale, per ottenere un generico stato squeezed $|\alpha, r\rangle$, si può applicare prima l'operatore di squeezing $\hat{S}(r)$ allo stato di vuoto, e poi l'operatore di spostamento $\hat{D}(\alpha)$, ovvero:

$$|\alpha, r\rangle = \hat{D}(\alpha)\hat{S}(r)\,|0\rangle\,. \tag{2.54}$$

Nella rappresentazione delle coordinate $q$, lo stato squeezed $|\alpha, r\rangle$ risulta essere

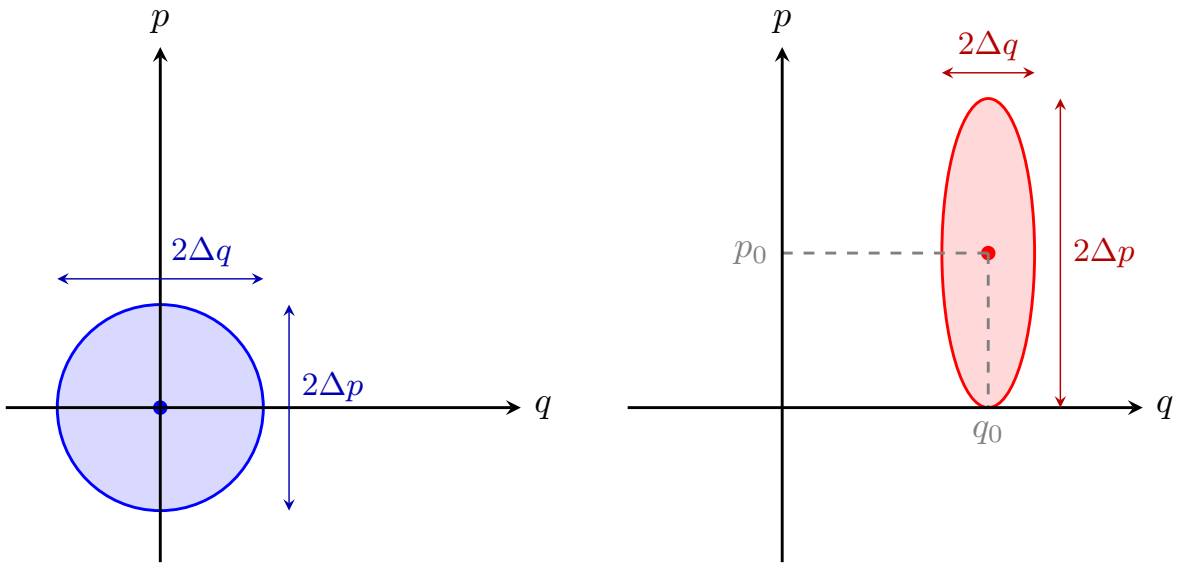
$$\psi_\alpha^r(q) = \frac{e^{r/2}}{\pi^{1/4}} e^{ip_0 q} e^{-i\frac{p_0 q_0}{2}} e^{-\frac{(q-q_0)^2}{2e^{-2r}}}, \tag{2.55}$$

ovvero è descritto da una gaussiana centrata in $q_0$ e deviazione standard $e^{-r}/\sqrt{2}$, che è più stretta di quella dello stato coerente $|\alpha\rangle$, a spese di una deviazione standard più ampia nella quadratura coniugata $p$.

L'operatore di squeezing $\hat{S}(r)$, essendo unitario, può essere visto come l'operatore di evoluzione temporale $\hat{U}(t) = e^{-i\hat{H}t/\hbar}$ associato all'Hamiltoniana

$$\hat{H} = i\hbar\eta[\hat{a}^2 - (\hat{a}^\dagger)^2], \tag{2.56}$$

dove il tempo di evoluzione è dato da $t = r/(2\eta)$. Il processo fisico descritto da questa Hamiltoniana è quello di *parametric down-conversion*: all'interno di un mezzo ottico non lineare nel quale è presente un campo ad alta energia, un fotone di frequenza $\omega$ viene




(a) **Stato di vuoto** $|0\rangle$ (b) **Stato squeezed** $|\alpha, r\rangle$

Figura 2.2: Rappresentazione nello spazio delle fasi dello stato di vuoto (a) e di un generico stato squeezed (b).

convertito in due fotoni di frequenza $\omega/2$. Si può mostrare che l'energia media di un generico stato squeezed $|\alpha, r\rangle$ è data da

$$\langle \hat{H} \rangle = \hbar\omega \left( |\alpha|^2 + \sinh^2 r + \frac{1}{2} \right), \tag{2.57}$$

che a causa del termine $\sinh^2 r$ è sempre maggiore dell'energia dello stato coerente $|\alpha\rangle$. Addirittura, da (2.57) si vede che è impossibile ottenere stati squeezed per valori arbitrariamente grandi di $r$ (*infinitely squeezed states*), in quanto ciò richiederebbe un'energia arbitrariamente grande, cosa che non è fisicamente realizzabile.

## 2.5 Rappresentazione nello spazio delle fasi

Per un ensemble di stati quantistici, la matrice densità è definita come:

$$\hat{\rho} = \sum_i p_i \, |\psi_i\rangle \, \langle \psi_i| \,, \tag{2.58}$$

dove $p_i$ è la probabilità di trovare il sistema nell'i-esimo stato puro $|\psi_i\rangle$ e

$$Tr(\hat{\rho}) = \sum_i p_i = 1. \tag{2.59}$$

Inoltre, per uno stato misto, il valore di aspettazione di un operatore $\hat{O}$ è dato da

$$\langle \hat{O} \rangle = Tr(\hat{\rho}\hat{O}) = \sum_i p_i \langle \psi_i | \hat{O} | \psi_i \rangle . \tag{2.60}$$

Per ottenere una rappresentazione più pratica di uno stato quantistico nello spazio delle fasi, si introduce la *funzione di Wigner*.

La **funzione di Wigner $W(q,p)$** è una distribuzione di quasi-probabilità nello spazio delle fasi definita come

$$W(q,p) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dx \, \left\langle q + \frac{x}{2} \right| \hat{\rho} \left| q - \frac{x}{2} \right\rangle e^{ipx}, \tag{2.61}$$

dove $|q\rangle$ è l'autostato dell'operatore di quadratura $\hat{q}$.

Se lo stato quantistico è puro ($\hat{\rho} = |\psi\rangle\langle\psi|$), la funzione di Wigner si riduce a

$$W(q,p) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dx \, \psi^*(q - \frac{x}{2}) \psi(q + \frac{x}{2}) e^{ipx}. \tag{2.62}$$

Sebbene la funzione di Wigner non sia una vera e propria distribuzione di probabilità in quanto può assumere valori negativi, integrandola su $p$ o $q$ si ottengono le distribuzioni di probabilità marginali rispettivamente per le quadrature $q$ e $p$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dp \, W(q,p) = |\psi(q)|^2, \tag{2.63}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dq \, W(q,p) = |\tilde{\psi}(p)|^2. \tag{2.64}$$

Sia l'operatore di spostamento $\hat{D}(\alpha)$ che l'operatore di squeezing $\hat{S}(r)$ appartengono alla classe più generale di operatori gaussiani [19]. Questi operatori, agendo come traslazioni e dilatazioni su stati con funzione di Wigner gaussiana, preservano la gaussianità di quest'ultima (fig. 2.3).

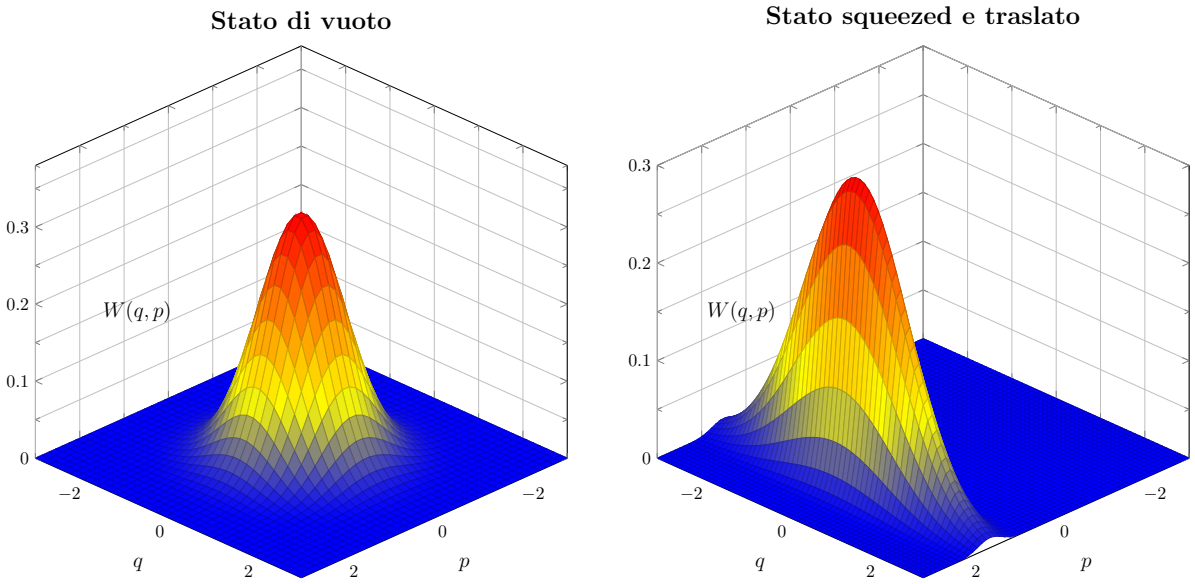



Figura 2.3: Funzione di Wigner per lo stato di vuoto (a) e per uno stato squeezed e traslato ($r = 0.74$, $q_0 = 0$, $p_0 = 1.5$)(b).

# Capitolo 3

# Il codice GKP

Come già anticipato nella sezione 1.3, una delle principali sfide nella realizzazione di un computer quantistico è la correzione degli errori. In questo contesto, i codici a variabili continue (CV) sfruttano le proprietà di sistemi quantistici a dimensione infinita descritti da variabili continue, come gli oscillatori armonici, per proteggere l'informazione dagli errori. Tra questi, il codice GKP è progettato per correggere errori di spostamento continuo (*drift*) nello spazio delle fasi, ovvero piccole variazioni nelle quadrature coniugate di posizione $\hat{q}$ e momento $\hat{p}$, indotte dall'interazione con l'ambiente.

In questo capitolo, seguendo l'approccio di Gottesman, Kitaev e Preskill [9], per vedere come emerge in maniera naturale il codice GKP introdurremo brevemente un esempio di codice a variabili discrete per poi mostrare come, in un certo limite, questo codice si trasformi in un codice a variabili continue per un singolo oscillatore.

## 3.1 Dal discreto al continuo: il caso di singolo oscillatore

### 3.1.1 Il caso discreto

Ricordiamo brevemente come gli operatori di Pauli $\hat{X}$ e $\hat{Z}$ agiscono in una particolare base $\{|j\rangle, j = 0, 1, 2, \ldots, d-1\}$:

$$\hat{X} : |j\rangle \to |j+1 \pmod d\rangle\,, \tag{3.1a}$$

$$\hat{Z} : |j\rangle \to \omega^j |j\rangle\,, \tag{3.1b}$$

dove $\omega = e^{2\pi i/d}$. Questi operatori soddisfano la generale relazione di commutazione:

$$\hat{Z}^b \hat{X}^a = \omega^{ab} \hat{X}^a \hat{Z}^b \qquad , \qquad a, b = 0, 1, 2, \ldots, d-1. \tag{3.2}$$

Consideriamo ora di voler codificare un sistema $n$-dimensionale (*qunit*) in un sistema a dimensione maggiore $d = r_1 r_2 n$ (*qudit*), dove gli stabilizzatori sono dati da

$$\hat{X}^{r_1 n} \qquad , \qquad \hat{Z}^{r_2 n}. \tag{3.3}$$

Invece, possiamo definire gli operatori logici che agiscono sul *qunit* codificato come

$$\hat{\bar{X}} = \hat{X}^{r_1} \qquad , \qquad \hat{\bar{Z}} = \hat{Z}^{r_2}. \tag{3.4}$$

Questi, oltre a soddisfare le stesse relazioni di commutazione di (3.2), commutano con gli stabilizzatori proprio come richiesto dal formalismo. Inoltre, gli operatori di Pauli e gli stabilizzatori soddisfano le seguenti relazioni di commutazione:

$$(\hat{X}^a \hat{Z}^b) \cdot \hat{X}^{r_1 n} = \omega^{r_1 n b} \hat{X}^{r_1 n} \cdot (\hat{X}^a \hat{Z}^b) = e^{2\pi i b / r_2} \hat{X}^{r_1 n} \cdot (\hat{X}^a \hat{Z}^b), \tag{3.5a}$$

$$(\hat{X}^a \hat{Z}^b) \cdot \hat{Z}^{r_2 n} = \omega^{-r_2 n a} \hat{Z}^{r_2 n} \cdot (\hat{X}^a \hat{Z}^b) = e^{-2\pi i a / r_1} \hat{Z}^{r_2 n} \cdot (\hat{X}^a \hat{Z}^b). \tag{3.5b}$$

ovvero gli operatori di Pauli commutano con gli stabilizzatori se e solo se $a$ è un multiplo intero di $r_1$ e $b$ è un multiplo intero di $r_2$. Dunque, questo codice è in grado di riconoscere correttamente lo stato precendentemente all'errore (e quindi a correggerlo) se e solo se

$$|a| < \frac{r_1}{2} \qquad , \qquad |b| < \frac{r_2}{2}. \tag{3.6}$$

Esprimiamo ora gli stati logici in termini di autostati di $\hat{Z}$. Affinché questi siano autostati degli stabilizzatori, dovranno essere sovrapposizioni lineari di $d = r_1 r_2 n$ elementi della base $\{|j\rangle, j = 0, 1, 2, \ldots, d-1\}$, invarianti rispetto a una traslazione di $j$ pari a $r_1 n$, limitandosi al caso in cui $j$ è multiplo intero di $r_1$, ovvero:

$$\begin{aligned}
|\bar{0}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{r_2}} \left( |0\rangle + |n r_1\rangle + \cdots + |(r_2 - 1) n r_1\rangle \right), \\
|\bar{1}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{r_2}} \left( |r_1\rangle + \cdots + |((r_2 - 1)n + 1) r_1\rangle \right), \\
&\vdots \\
|\overline{n-1}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{r_2}} \left( |(n-1) r_1\rangle + \cdots + |(r_2 n - 1) r_1\rangle \right).
\end{aligned} \tag{3.7}$$

Se gli stati subiscono uno shift in ampiezza, il valore di $j$ modulo $r_1$ viene determinato misurando il generatore dello stabilizzatore $\hat{Z}^{r_2 n}$, e lo shift può essere corretto aggiustando $j$ al multiplo di $r_1$ più vicino.

### 3.1.2 Il caso continuo

Per passare al caso continuo, possiamo considerare i codici discreti precedenti nel limite in cui $d \to \infty$. In particolare scegliamo $r_1 = \alpha/\varepsilon$ e $r_2 = 1/(n\alpha\varepsilon)$, da cui $d = 1/\varepsilon^2$, dove $\alpha \in \mathbb{R}$ e $\varepsilon \to 0$. In questo limite, l'ampiezza e la fase del *qudit* saranno rappresentate da due variabili continue $q$ e $p$, e di conseguenza gli operatori di Pauli discreti di shift di ampiezza e fase saranno sostituiti da operatori di spostamento in variabili continue:

$$\hat{Z} \to e^{2\pi i \hat{q}\varepsilon}, \tag{3.8a}$$

$$\hat{X} \to e^{-i\hat{p}\varepsilon}. \tag{3.8b}$$

Gli stabilizzatori diventano quindi

$$\hat{Z}^{r_2 n} \to e^{2\pi i \hat{q}/\alpha}, \tag{3.9a}$$

$$\hat{X}^{r_1 n} \to e^{-in\hat{p}\alpha}, \tag{3.9b}$$

e gli operatori logici diventano

$$\hat{\bar{Z}} \to e^{2\pi i \hat{q}/(n\alpha)}, \tag{3.10a}$$

$$\hat{\bar{X}} \to e^{-i\hat{p}\alpha}. \tag{3.10b}$$

Utilizzando la relazione di commutazione (2.20) e la formula di Glauber (2.31), si può verificare che gli operatori logici soddisfano le stesse relazioni di commutazione di (3.2) e che commutano con gli stabilizzatori, come richiesto. Poiché $\hat{\bar{X}}$ trasla $q$ di $\alpha$ e $\hat{\bar{Z}}$ trasla $p$ di $\frac{2\pi}{n\alpha}$, il codice protegge contro i seguenti spostamenti di ampiezza e fase:

$$|\Delta q| < \frac{\alpha}{2} \qquad , \qquad |\Delta p| < \frac{\pi}{n\alpha}. \tag{3.11}$$

Gli stati logici possono essere espressi idealmente come sovrapposizioni infinite di stati infinitamente *squeezed* di $q$ (autostati di $\hat{q}$) e $p$ (autostati di $\hat{p}$), rispettivamente:

$$\left|\hat{\bar{Z}} = \omega^j\right\rangle = \sum_{s=-\infty}^{\infty} |q = \alpha(j + ns)\rangle\,, \tag{3.12a}$$

$$\left|\hat{\bar{X}} = \omega^j\right\rangle = \sum_{s=-\infty}^{\infty} |p = \frac{2\pi}{n\alpha}(j + ns)\rangle\,. \tag{3.12b}$$

Nella rappresentazione delle coordinate, la funzione d'onda $\psi^{(j)}(q)$ degli stati logici $\left|\hat{\bar{Z}} = \omega^j\right\rangle$ è data da

$$\psi^{(j)}(q) = \sum_{s=-\infty}^{\infty} \delta\left(q - \alpha(j + ns)\right), \tag{3.13}$$

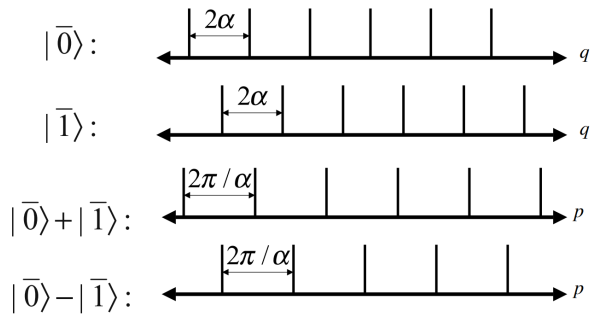



Figura 3.1: Stati logici per $n = 2$. Gli stati $|\bar{0}\rangle, |\bar{1}\rangle$ sono sovrapposizioni di autostati di $q$, spaziati periodicamente con periodo $2\alpha$; i due stati di base differiscono per una traslazione in $q$ pari ad $\alpha$. Gli stati $\frac{|\bar{0}\rangle \pm |\bar{1}\rangle}{\sqrt{2}}$ sono sovrapposizioni di autostati di $p$, spaziati periodicamente con periodo $\frac{2\pi}{\alpha}$; i due stati di base differiscono per una traslazione in $p$ pari a $\frac{\pi}{\alpha}$. Immagine presa da [9].

ovvero da pettini di Dirac con periodo $n\alpha$ (fig. 3.1); un'espressione analoga vale per la funzione d'onda $\tilde{\psi}^{(j)}(p)$. Di conseguenza, la funzione di Wigner associata a $\psi^{(j)}(q)$ è data da un reticolo di delta di Dirac nello spazio delle fasi:

$$W(q,p) \propto \frac{1}{2\pi} \sum_{s,t=-\infty}^{\infty} (-1)^{st} \delta\left(q - \alpha(j + \frac{n}{2}s)\right) \delta\left(p - \frac{\pi}{n\alpha}t\right). \tag{3.14}$$

Un'operazione interessante è quella di esprimere gli stati logici usando gli stati coerenti come base. Vediamo per esempio come costruire lo stato logico $\left|\hat{\bar{X}} = 1\right\rangle$ a partire da un generico stato $|\psi\rangle$. Prima di farlo, ricordiamo che dato un operatore unitario $\hat{U}$, è possibile generare un suo autostato $|\Phi\rangle$ con autovalore $+1$ a partire da un generico stato $|\psi\rangle$ (a meno di normalizzazione) nella seguente maniera:

$$|\Phi\rangle = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{U}^k |\psi\rangle, \tag{3.15}$$

infatti

$$\hat{U}|\Phi\rangle = \hat{U}\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{U}^k |\psi\rangle\right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{U}^{k+1} |\psi\rangle = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{U}^k |\psi\rangle = |\Phi\rangle. \tag{3.16}$$

Poiché $\left|\hat{\bar{X}} = 1\right\rangle$ è autostato degli stabilizzatori e dell'operatore logico $\hat{\bar{X}}$, possiamo costruirlo a partire da un generico stato $|\psi\rangle$ come

$$\sum_{s=-\infty}^{\infty} e^{-is\hat{p}\alpha} \sum_{t=-\infty}^{\infty} e^{2\pi i t\hat{q}/\alpha} |\psi\rangle = \sum_{s,t=-\infty}^{\infty} \exp\left[i\left(-s\hat{p}\alpha + \frac{2\pi t\hat{q}}{\alpha} + \pi st\right)\right] |\psi\rangle. \tag{3.17}$$

In particolare, se scegliamo $|\psi\rangle$ come uno stato coerente, otteniamo che questo viene traslato ad un altro stato coerente di una quantità $(q_0, p_0) = (s\alpha, 2\pi t/\alpha)$. Poiché gli stati coerenti formano un insieme sovrabbondante, l'espansione non è unica; infatti, se scegliamo un altro stato coerente anziché $|\psi\rangle$, il reticolo subisce una traslazione rigida, ma lo stato codificato rimane invariato.

Dunque, lo stato logico $\left|\hat{\bar{X}} = 1\right\rangle$ è una sovrapposizione di stati coerenti disposti su un reticolo regolare nello spazio delle fasi. Possiamo visualizzare lo stabilizzatore del codice come un reticolo di traslazioni nello spazio delle fasi che preserva gli stati logici, ovvero il reticolo generato dalle traslazioni $e^{i\frac{2\pi}{\alpha}\hat{q}}$ e $e^{-in\alpha\hat{p}}$.

# Capitolo 4

# Manipolazione fault-tolerant dell'informazione codificata

## 4.1 Stati logici approssimati: lo squeezing finito

Finora abbiamo descritto il codice GKP in termini di stati logici ideali, ovvero da sovrapposizioni di autostati non normalizzabili di $q$ e $p$ (3.12), nei quali è presente uno squeezing infinito rispettivamente in una delle due quadrature. Per quanto visto nella sezione 2.4, lo squeezing infinito è associato a stati ad energia infinita, perciò nella pratica dovremo costruire stati logici approssimati, costituiti da stati normalizzabili con uno squeezing finito. Dobbiamo quindi studiare come la presenza di questi stati logici approssimati influenzi la capacità del codice di correggere gli errori.

Poiché la delta di Dirac può essere vista come il limite di una gaussiana con varianza che tende a zero, possiamo approssimare gli autostati di $q$ e $p$ in questa maniera, utilizzando una varianza finita $\Delta$ ma sufficientemente piccola da garantire una buona correzione degli errori. In particolare, tornando al caso di singolo oscillatore, consideriamo gli autostati:

$$|0\rangle_q = \int_{-\infty}^{\infty} dq\, \delta(q-0)\, |q\rangle\,, \tag{4.1a}$$

$$|0\rangle_p = \int_{-\infty}^{\infty} dp\, \delta(p-0)\, |p\rangle\,, \tag{4.1b}$$

L'approssimazione della funzione delta nello spazio delle coordinate, applicata allo stato $|0\rangle_q$ (4.1a), ci permette di definire lo stato approssimato $|\psi_0\rangle$ come:

$$|\psi_0\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dq}{(\pi\Delta^2)^{1/4}} e^{-\frac{1}{2}q^2/\Delta^2}\, |q\rangle\,. \tag{4.2}$$

Nello spazio dei momenti, lo stato $|\psi_0\rangle$ è ottenuto dal precedente tramite trasformata di Fourier, ovvero:

$$|\psi_0\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp}{(\pi/\Delta^2)^{1/4}} e^{-\frac{1}{2}\Delta^2 p^2} |p\rangle \,. \tag{4.3}$$

Dunque, uno stato logico ideale dato dalla somma infinita di funzioni $\delta$ traslate dovrebbe diventare una somma infinita di gaussiane traslate. Tuttavia, anche in questo caso lo stato non risulterebbe normalizzabile (si avrebbe una somma infinita di termini costanti), perciò è necessario pesare ciascuna di queste gaussiane con un inviluppo a sua volta gaussiano di varianza $\kappa^{-1}$. Nel caso di un un *qubit* ($n = 2$), gli stati logici approssimati sono quindi definiti come:

$$\left|\tilde{0}\right\rangle = \mathcal{N}_0 \sum_{s=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\kappa^2 (2s\alpha)^2} \hat{T}(2s\alpha) |\psi_0\rangle \,, \tag{4.4a}$$

$$\left|\tilde{1}\right\rangle = \mathcal{N}_1 \sum_{s=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\kappa^2 [(2s+1)\alpha]^2} \hat{T}[(2s+1)\alpha] |\psi_0\rangle \,, \tag{4.4b}$$

dove $\hat{T}(\alpha) = e^{-ia\hat{p}}$ non è altro che l'operatore di spostamento $\hat{D}(\alpha)$ (2.40) limitato alla sola traslazione in $q$, mentre $\mathcal{N}_0$ e $\mathcal{N}_1$ sono fattori di normalizzazione. Assumendo che $\kappa\alpha$, $\Delta/\alpha \ll 1$, ovvero nel limite di stati logici ideali, avremo che $\mathcal{N}_0 \approx \mathcal{N}_1 \approx (4\kappa^2\alpha^2/\pi)^{1/4}$. Dunque, utilizzando (4.2) e (2.37), si ottiene immediatamente che nello spazio delle configurazioni gli stati logici approssimati (4.4a) e (4.4b) sono espressi come:

$$\left|\tilde{0}\right\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dq \left\{ \sqrt{\frac{2\kappa\alpha}{\pi\Delta}} \sum_{s=-\infty}^{\infty} e^{-2\kappa^2\alpha^2 s^2} e^{-\frac{(q-2s\alpha)^2}{2\Delta^2}} \right\} |q\rangle \,, \tag{4.5a}$$

$$\left|\tilde{1}\right\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dq \left\{ \sqrt{\frac{2\kappa\alpha}{\pi\Delta}} \sum_{s=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\kappa^2\alpha^2(2s+1)^2} e^{-\frac{(q-(2s+1)\alpha)^2}{2\Delta^2}} \right\} |q\rangle \,. \tag{4.5b}$$

Analogamente, nello spazio dei momenti, gli stati logici approssimati sono espressi come:

$$\frac{\left|\tilde{0}\right\rangle + \left|\tilde{1}\right\rangle}{\sqrt{2}} = \int_{-\infty}^{\infty} dp \left\{ \sqrt{\frac{2\Delta}{\kappa\alpha}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\Delta^2 p^2} e^{-\frac{\left(p-\frac{2\pi}{\alpha}m\right)^2}{2\kappa^2}} \right\} |p\rangle \,, \tag{4.6a}$$

$$\frac{\left|\tilde{0}\right\rangle - \left|\tilde{1}\right\rangle}{\sqrt{2}} = \int_{-\infty}^{\infty} dp \left\{ \sqrt{\frac{2\Delta}{\kappa\alpha}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\Delta^2 p^2} e^{-\frac{\left(p-\frac{\pi}{\alpha}(2m-1)\right)^2}{2\kappa^2}} \right\} |p\rangle \,. \tag{4.6b}$$

Vediamo per esempio come ottenere (4.6a). Partendo da (4.4a) e (4.4b), possiamo scrivere:

$$\begin{aligned}\frac{|\tilde{0}\rangle + |\tilde{1}\rangle}{\sqrt{2}} &= \left(\frac{\kappa^2\alpha^2}{\pi}\right)^{1/4} \left( \sum_{s=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\kappa^2(2s\alpha)^2} T(2s\alpha)\,|\psi_0\rangle + \sum_{s=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\kappa^2[(2s+1)\alpha]^2} T[(2s+1)\alpha]\,|\psi_0\rangle \right) \\ &= \left(\frac{\kappa^2\alpha^2}{\pi}\right)^{1/4} \left( \sum_{s=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\kappa^2(s\alpha)^2} T(s\alpha)\,|\psi_0\rangle \right) \\ &= \left(\frac{\kappa^2\alpha^2}{\pi}\right)^{1/4} \left( \sum_{s=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\kappa^2(s\alpha)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp}{(\pi/\Delta^2)^{1/2}}\, e^{ip(\alpha s)} e^{-\frac{1}{2}\Delta^2 p^2}\,|p\rangle \right) \\ &= \sqrt{\frac{\kappa\alpha\Delta}{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dp\, e^{-\frac{1}{2}\Delta^2 p^2} \times \sum_{s=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\kappa^2(s\alpha)^2} e^{ip(\alpha s)}\,|p\rangle\,. \end{aligned} \tag{4.7}$$

Ora possiamo applicare la formula di Poisson:

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{-\pi a(m-b)^2} = a^{-1/2} \sum_{s=-\infty}^{\infty} e^{-\pi s^2/a} e^{2\pi i s b}, \tag{4.8}$$

e si ottiene:

$$\begin{aligned}\frac{|\tilde{0}\rangle + |\tilde{1}\rangle}{\sqrt{2}} &= \sqrt{\frac{\kappa\alpha\Delta}{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dp\, e^{-\frac{1}{2}\Delta^2 p^2} \times \frac{\sqrt{2\pi}}{\kappa\alpha} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\left(p-\frac{2\pi}{\alpha}m\right)^2}{2\kappa^2}}\,|p\rangle \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dp \left\{ \sqrt{\frac{2\Delta}{\kappa\alpha}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\Delta^2 p^2} e^{-\frac{\left(p-\frac{2\pi}{\alpha}m\right)^2}{2\kappa^2}} \right\} |p\rangle\,. \end{aligned} \tag{4.9}$$

A questo punto, siamo interessati a capire come la presenza di uno squeezing finito influenzi la capacità del codice di correggere gli errori. In particolare, vogliamo capire come la probabilità di errore logico dipenda dai parametri $\Delta$ e $\kappa$. Ipotizziamo di trovarci in un caso in cui ancora non è presente alcun tipo di rumore esterno che perturba lo stato logico; per effettuare la correzione degli errori (che ricordiamo non essere presenti in questo caso) dobbiamo misurare la sindrome, ovvero misurare $q$ e $p$ in modulo $\alpha$, che corrisponde alla misura della distanza di $q$ e $p$ dal del pettine di Dirac più vicino. Successivamente, in base al risultato della misura, si corregge lo stato logico traslando $q$ e $p$ in modo da riportarlo al "dente" più vicino.

Nel caso di stati logici ideali, la misura della sindrome non introduce alcun errore logico, poiché il risultato della misura sarà sempre esattamente il "dente" del pettine di Dirac più vicino. Invece, nel caso di stati logici approssimati, questi non sono più dati da pettini di Dirac ma da pettini di gaussiane, ciascuna delle quali avrà delle code che

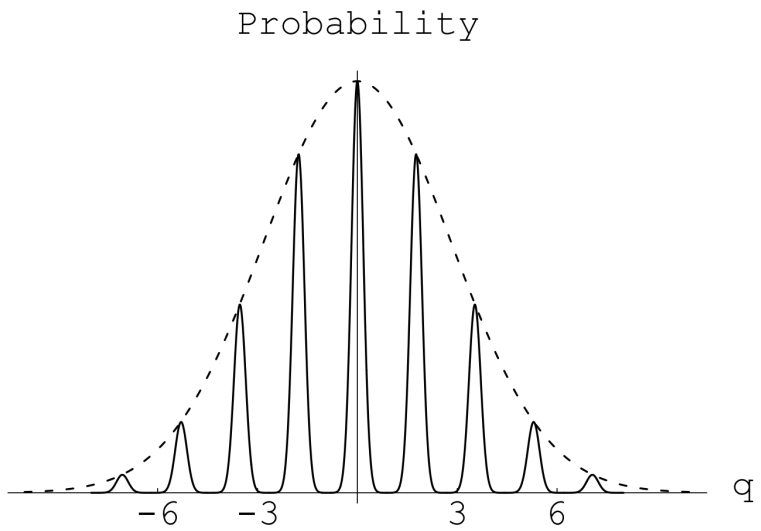



Figura 4.1: Distribuzione di probabilità nello spazio delle posizioni $P(q) = \frac{1}{2}|\langle q|\,(|\tilde{0}\rangle + |\tilde{1}\rangle)|^2$ per uno stato logico approssimato con $\alpha = \sqrt{\pi}$ e $\Delta = \kappa = 1$. La linea tratteggiata rappresenta l'inviluppo gaussiano della distribuzione. Immagine presa da [9].

si sovrappongono alle code delle gaussiane adiacenti. Di conseguenza, nella procedura di correzione degli errori, quando si misura la sindrome è possibile ottenere un risultato che non corrisponde al "dente" del pettine di Dirac originale, ma a quello adiacente, in quanto ora le probabilità non sono più localizzate come delta di Dirac. In questo caso, la correzione degli errori introdurrà un errore logico di *bit-flip*, poiché lo stato logico verrà corretto traslandolo verso il "dente" sbagliato. Questa è una probabilità di errore logico intrinsecamente dovuta all'uso di stati logici approssimati, e dipenderà quindi dai parametri $\Delta$ e $\kappa$, che determinano la larghezza delle gaussiane nello spazio delle posizioni e dei momenti. In particolare, più le gaussiane sono strette, ovvero più $\Delta$ e $\kappa$ sono piccoli rispetto a $\alpha$ e $\pi/\alpha$, minore sarà la probabilità di errore logico, poiché le code delle gaussiane si sovrapporranno meno e gli stati logici approssimati assomiglieranno di più ai pettini di Dirac degli stati logici ideali.

Per ottenere una stima di questa probabilità di errore intrinseco, consideriamo il caso simmetrico in cui $\Delta = \kappa$ e $\alpha = \sqrt{\pi}$. Iniziamo calcolando la densità di probabilità di ottenere un certo valore $q$, assumendo che lo stato logico sia $|\tilde{0}\rangle$. Utilizzando (4.5a) si ottiene subito che questa densità di probabilità è data da:

$$\left|\langle q|\tilde{0}\rangle\right|^2 = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{s=-\infty}^{\infty} e^{-4\pi\Delta^2 s^2} \exp\left[-\frac{\left(q - 2s\sqrt{\pi}\right)^2}{\Delta^2}\right]. \tag{4.10}$$

Analogamente, nello spazio dei momenti, utilizzando (4.6a) si ottiene che la densità di probabilità di ottenere un certo valore $p$, assumendo che lo stato logico sia $\frac{|\tilde{0}\rangle + |\tilde{1}\rangle}{\sqrt{2}}$, è data

da:

$$\frac{1}{2}\left|\langle p|\tilde{0}\rangle + \langle p|\tilde{1}\rangle\right|^2 = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{-\Delta^2 p^2}\exp\left[-\frac{\left(p-2m\sqrt{\pi}\right)^2}{\Delta^2}\right]. \tag{4.11}$$

Osservando come sono fatti gli stati logici $\left|\tilde{0}\right\rangle$ e $\left|\tilde{1}\right\rangle$, la probabilità di errore logico intrinseco su $\left|\tilde{0}\right\rangle$ è data dalla probabilità di ottenere un valore $q$ che sia più vicino al "dente" del pettine di Dirac che corrisponde a $\left|\tilde{1}\right\rangle$ rispetto a quello che corrisponde a $\left|\tilde{0}\right\rangle$, ovvero che sia più vicino ad un multiplo dispari di $\sqrt{\pi}$ rispetto ad un multiplo pari di $\sqrt{\pi}$. Allo stesso modo, la probabilità di errore logico intrinseco su $\frac{|\tilde{0}\rangle+|\tilde{1}\rangle}{\sqrt{2}}$ è data dalla probabilità di ottenere un valore $p$ che sia più vicino al "dente" del pettine di Dirac che corrisponde a $\frac{|\tilde{0}\rangle-|\tilde{1}\rangle}{\sqrt{2}}$ rispetto a quello che corrisponde a $\frac{|\tilde{0}\rangle+|\tilde{1}\rangle}{\sqrt{2}}$, ovvero che sia più vicino ad un multiplo dispari di $\sqrt{\pi}$ rispetto ad un multiplo pari di $\sqrt{\pi}$.

Dunque, se consideriamo il caso di $\left|\tilde{0}\right\rangle$ (4.10), la probabilità di errore logico intrinseco è calcolata sommando i contributi delle code di tutte le gaussiane, ovvero:

$$\begin{aligned} P_{\text{err}} &= \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-4\pi\Delta^2 n^2}\right]\cdot\left[\int_{-\infty}^{-2n\sqrt{\pi}-\frac{\sqrt{\pi}}{2}} dq\, e^{-\frac{(q-2n\sqrt{\pi})^2}{\Delta^2}} + \int_{2n\sqrt{\pi}+\frac{\sqrt{\pi}}{2}}^{+\infty} dq\, e^{-\frac{(q-2n\sqrt{\pi})^2}{\Delta^2}}\right] \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-4\pi\Delta^2 n^2}\right]\cdot\left[2\int_{\frac{\sqrt{\pi}}{2}}^{\infty} dx\, e^{-\frac{x^2}{\Delta^2}}\right]. \end{aligned} \tag{4.12}$$

Nel primo termine tra parentesi quadre, poiché $\Delta \ll 1$, l'esponente varia lentamente al variare dell'indice intero $n$. Possiamo quindi approssimare la somma discreta con un integrale, ovvero:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-4\pi\Delta^2 n^2} \approx \int_{-\infty}^{\infty} dn\; e^{-4\pi\Delta^2 n^2} = \frac{1}{2\Delta}. \tag{4.13}$$

Invece, per il secondo termine tra parentesi quadre possiamo utilizzare lo sviluppo asintotico della funzione degli errori

$$\int_x^{\infty} e^{-x^2} dt \approx \frac{1}{2x} e^{-x^2}, \tag{4.14}$$

per ottenere che

$$\int_{\frac{\sqrt{\pi}}{2}}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{\Delta^2}} dx \approx \frac{\Delta^2}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{\pi}{4\Delta^2}}. \tag{4.15}$$

Dunque, inserendo (4.13) e (4.15) in (4.10), otteniamo che la probabilità di errore logico intrinseco è approssimata da:

$$P_{\text{err}} \approx \frac{2\Delta}{\pi} e^{-\frac{\pi}{4\Delta^2}}. \tag{4.16}$$

Si nota quindi come la probabilità di errore logico intrinseco decresca esponenzialmente al diminuire di $\Delta$. Per esempio, la probabilità d'errore è circa $P_{\text{err}} \approx 10^{-2}$ per $\Delta \approx 0.5$, mentre per $\Delta \approx 0.25$ la probabilità d'errore scende già sotto a $P_{\text{err}} \approx 10^{-6}$. Perciò, è sufficiente effettuare uno squeezing non troppo elevato affinché l'uso di stati logici approssimati non comprometta la capacità del codice di correggere gli errori.

In generale, uno stato logico approssimato $|\psi\rangle$ può essere considerato come uno stato logico ideale $|\xi\rangle$ che ha attraversato un canale di rumore continuo, divenendo soggetto ad errori di spostamento, ovvero:

$$|\psi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} du\ dv\ \eta(u,v) e^{i(-u\hat{p}+v\hat{q})}\ |\xi\rangle\,. \tag{4.17}$$

Più precisamente, può essere visto come una sovrapposizione continua di stati logici ideali traslati, pesati da una funzione d'onda d'errore $\eta(u,v)$. In particolare, per gli stati logici approssimati definiti in (4.4a) e (4.4b), la funzione d'errore è data da:

$$\eta(u,v) = \frac{1}{\sqrt{\pi\kappa\Delta}} \exp\left(-\frac{1}{2}(u^2/\Delta^2 + v^2/\kappa^2)\right). \tag{4.18}$$

Quindi, essendo che il codice GKP è progettato per correggere lievi spostamenti nello spazio delle fasi degli stati logici, riuscirà anche a correggere l'errore intrinseco legato agli stati logici approssimati con squeezing finito.

## 4.2 Aspetti tecnici e approfondimenti

Fino a questo punto si è descritto il codice GKP e la manipolazione dell'informazione quantistica codificata senza entrare nel dettaglio di come implementare le operazioni logiche e la misura della sindrome per la correzione degli errori. In questa sezione, senza pretesa di completezza, verranno brevemente discussi questi due aspetti [9].

### 4.2.1 Operazioni simplettiche

Nel caso di un singolo qunit, le porte logiche più elementari sono realizzate dal **gruppo di Clifford** $\mathcal{C}_n$:

$$\mathcal{C}_n = \{U \in \mathcal{U}(n) \mid UPU^\dagger \in \mathcal{P}_n \quad \forall P \in \mathcal{P}_n\}, \tag{4.19}$$

ovvero da operazioni unitarie che mappano per coniugazione il gruppo di Pauli $\mathcal{P}_n$ su se stesso.

Poiché in questo caso il più generico degli operatori di Pauli continuo prende la forma di (2.40), affinché un'operazione unitaria trasformi un esponenziale lineare in $\hat{q}$ e $\hat{p}$ in un altro esponenziale lineare, essa deve per forza agire come una trasformazione lineare sulle quadrature $\hat{q}$ e $\hat{p}$ tale che preservi la relazione di commutazione $[\hat{q}, \hat{p}] = i$. Questo tipo di trasformazioni lineari sono dette *trasformazioni simplettiche*.

Dal punto di vista pratico, per il teorema di decomposizione di Bloch-Messiah [20], il gruppo simplettico può essere scomposto in due sottogruppi: uno che preserva il numero totale di eccitazioni $\hat{N} = \sum_{i=1}^{n} \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_i$ , realizzabile tramite l'ottica lineare (mediante uso di *phase shifters* e *beam splitters*), e un altro che non lo preserva, realizzabile tramite operazioni di squeezing. Dunque, in generale, un'operazione simplettica può essere realizzata tramite l'ottica lineare e lo squeezing. Inoltre, si ottiene che le operazioni di spostamento di $q$ e $p$ di termini costanti possono essere realizzate come caso limite di trasformazioni simplettiche: per esempio, uno spostamento di $q_1$ di una costante $c$ può essere realizzato come una trasformazione simplettica che agisce su due oscillatori, il primo dei quali è il nostro qunit e il secondo è un oscillatore ausiliario:

$$q_1 \to q_1 + \epsilon q_2, \quad p_1 \to p_1 + \epsilon p_2, \tag{4.20a}$$
$$q_2 \to q_2 - \epsilon q_1, \quad p_2 \to p_2 - \epsilon p_1, \tag{4.20b}$$

dove $\epsilon \to 0$ e $c = \epsilon q_2$ è mantenuto costante. Nel nostro caso, le operazioni logiche sui qunit codificati sono date dagli operatori di Pauli continui (3.10)(noto anche come *gruppo di Heisenberg-Weyl*), di conseguenza le trasformazioni del gruppo di Clifford logico sono un sottogruppo delle trasformazioni simplettiche (incluse le traslazioni) che preservano il sottospazio logico.

Il gruppo di Clifford può essere generato da tre elementi: il gate SUM, il gate di Fourier $F$ e il gate di fase $P$.

Il **gate SUM** è un'operazione a due qunit che agisce per coniugazione sugli operatori di Pauli come:

$$\text{SUM}: \quad \hat{\hat{X}}_1^a \hat{\hat{X}}_2^b \to \hat{\hat{X}}_1^a \hat{\hat{X}}_2^{b-a}, \tag{4.21a}$$
$$\hat{\hat{Z}}_1^a \hat{\hat{Z}}_2^b \to \hat{\hat{Z}}_1^{a+b} \hat{\hat{Z}}_2^b. \tag{4.21b}$$

Il qunit 1 è detto il qunit di controllo, mentre il qunit 2 è detto il qunit bersaglio, nel caso bidimensionale di un qubit, il gate SUM corrisponde al gate CNOT.

Il **gate di Fourier F** è un'operazione a singolo qunit che agisce per coniugazione sugli operatori di Pauli come:

$$F: \quad \hat{\hat{X}} \to \hat{\hat{Z}}, \tag{4.22a}$$
$$\hat{\hat{Z}} \to \hat{\hat{X}}^{-1}. \tag{4.22b}$$

Nel caso di un qubit, il gate di Fourier corrisponde al gate Hadamard $H$.

Il **gate di fase P** è un'operazione a singolo qunit che agisce per coniugazione sugli operatori di Pauli come:

$$P: \quad \hat{\hat{X}} \to \eta \hat{\hat{Z}} \hat{\hat{X}}, \tag{4.23a}$$
$$\hat{\hat{Z}} \to \hat{\hat{Z}}. \tag{4.23b}$$

dove

$$\eta = \begin{cases} e^{i\frac{\pi}{n}} & \text{se } n \text{ è pari} \\ 1 & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases} \tag{4.24}$$

Ogni trasformazione del gruppo di Clifford può essere realizzata dal prodotto di questi tre operatori.

Nel nostro caso, questi generatori del gruppo di Clifford possono essere tutti realizzati come trasformazioni simplettiche. In particolare, nel caso in cui i generatori dello stabilizzatore siano simmetrici rispetto a $q$ e $p$,

$$\hat{\hat{X}} = e^{-i\sqrt{\frac{2\pi}{n}}\hat{p}}, \tag{4.25a}$$
$$\hat{\hat{Z}} = e^{i\sqrt{\frac{2\pi}{n}}\hat{q}}. \tag{4.25b}$$

le trasformazioni simplettiche richieste sono:

$$\text{SUM:} \quad q_1 \to q_1, \quad p_1 \to p_1 - p_2, \tag{4.26a}$$
$$q_2 \to q_1 + q_2, \quad p_2 \to p_2, \tag{4.26b}$$
$$\text{F:} \quad q \to p, \quad p \to -q, \tag{4.26c}$$
$$\text{P:} \quad q \to q, \quad p \to p - q + c, \tag{4.26d}$$

Sotto l'azione di queste trasformazioni simplettiche, piccole deviazioni di $q$ e $p$ dal reticolo dello stabilizzatore rimangono piccole; in questo senso le trasformazioni sono fault-tolerant.

### 4.2.2 Misurazione sindrome ed error recovery

Per effettuare la misura della sindrome, è necessario misurare i generatori dello stabilizzatore, ovvero misurare $q$ e $p$ in modulo $\alpha$, senza però misurare direttamente $q$ e $p$, poiché ciò distruggerebbe lo stato logico. Il procedimento di misura consiste nel fare interagire il qunit codificato con un qunit ausiliario, detto *ancilla*, e misurare quest'ultimo distruttivamente per ottenere l'informazione sulla sindrome. Per esempio, come suggerito in [21], per misurare $q$ in modulo $\alpha$, possiamo preparare l'ancilla nello stato $(|\bar{0}\rangle + |\bar{1}\rangle)/\sqrt{2}$, successivamente il gate SUM viene fatto agire sul qunit codificato (affetto potenzialmente da errore) come controllo e sull'ancilla come bersaglio, agendo come

$$q_2 \to q_1 + q_2. \tag{4.27}$$

Misurando $q$ dell'ancilla, otteniamo il valore di $q_1+q_2$, prendendone il modulo $\alpha$ si ottiene lo spostamento da applicare al qunit codificato per correggere l'errore. Una procedura analoga può essere utilizzata per misurare $p$ in modulo $\alpha$ (fig. 4.2).

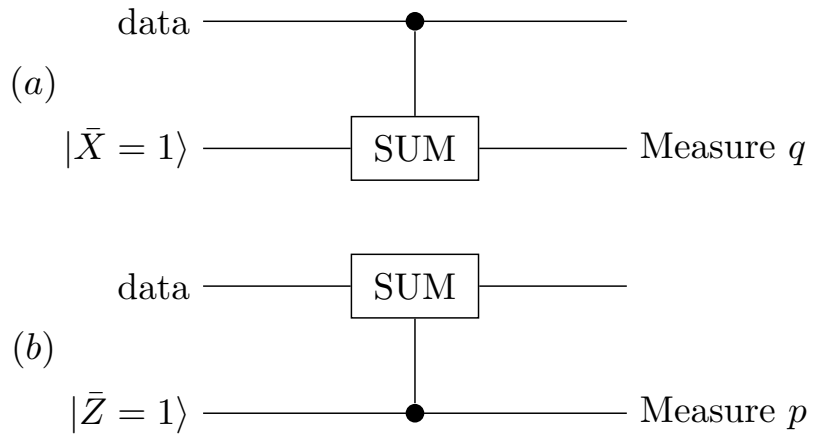



Figura 4.2: Circuito per la misura della sindrome e la correzione dell'errore. Immagine presa da [9].

# Conclusioni

In questa tesi si è ripercorso il cammino che parte dall'informazione quantistica discreta e conduce alla sua codifica in sistemi a variabili continue, con l'obiettivo di discutere il codice di Gottesman-Kitaev-Preskill come soluzione al problema della correzione degli errori dei computer quantistici implementati su piattaforme fotoniche.

Partendo dai postulati della meccanica quantistica e dagli elementi essenziali della computazione e dell'informazione quantistica, si sono evidenziate le difficoltà che la correzione degli errori quantistici deve affrontare rispetto al caso classico: errori di phase-flip, errori continui infinitesimi, il teorema di no-cloning e il collasso della funzione d'onda; introducendo poi il formalismo degli stabilizzatori come strumento generale per superarle. Per discutere il codice GKP è stato necessario introdurre il linguaggio dei sistemi a variabili continue, che nel caso di interesse è quello dell'ottica quantistica. Partendo dalla quantizzazione di un singolo modo del campo elettromagnetico, si è notato come questo sia formalmente equivalente a un oscillatore armonico quantistico, il cui stato è descritto da due variabili continue nello spazio delle fasi, le quadrature $\hat{q}$ e $\hat{p}$, corrispondenti alle ampiezze del campo elettrico e del campo magnetico. Dopodiché, sono stati definiti due tipi di stati del campo elettromagnetico fondamentali per il codice GKP, ovvero gli stati coerenti e gli stati squeezed, e contestualmente sono stati introdotti gli operatori di spostamento e di squeezing, i quali permettono di ottenere e manipolare tali stati, candidandosi a costituire le operazioni di base per la manipolazione dell'informazione offerta dal codice GKP. Infatti, introducendo poi il codice GKP come limite continuo di codici a variabili discrete, emerge naturalmente come gli operatori di Pauli discreti, responsabili della manipolazione dell'informazione codificata, si trasformino in operatori di spostamento continuo sulle quadrature $\hat{q}$ e $\hat{p}$, fornendo così una versione continua del formalismo degli stabilizzatori. Grazie a quest'ultimo, si arriva a definire gli stati logici ideali del codice GKP come autostati degli operatori logici, che non sono altro che sovrapposizioni infinite di stati infinitamente squeezed in una delle due quadrature. Successivamente, si è notato come gli stati logici ideali del codice GKP siano irrealizzabili, in quanto richiederebbero energia infinita. Si è quindi discussa la proposta di Gottesman, Kitaev e Preskill di sostituire i pettini di Dirac ideali con pettini di gaussiane a squeezing finito, modulate a loro volta da un ulteriore inviluppo gaussiano, ottenendo così però degli stati logici approssimati, che introducono un errore logico intrinseco. No-

nostante ciò, nel caso di squeezing simmetrico nelle due quadrature, si è mostrato come questo errore intrinseco dipenda esponenzialmente dalla larghezza $\Delta$ delle gaussiane attraverso la stima $P_{err} \approx \frac{2\Delta}{\pi} e^{-\pi/4\Delta^2}$: questo risultato ci dice che è sufficiente un livello di squeezing relativamente basso (e quindi un basso costo energetico) per ottenere una probabilità d'errore gestibile dal codice GKP. Infatti, osservando che un generico stato approssimato può essere espresso come una sovrapposizione continua di stati logici ideali traslati, pesati da una distribuzione gaussiana, e ricordando che il codice GKP è progettato per correggere piccoli spostamenti delle quadrature, si conclude che questo riuscirà a correggere anche gli errori introdotti dalla natura finita dello squeezing degli stati logici approssimati. Infine, per completare il quadro della manipolazione fault-tolerant dell'informazione, si è accennato alla struttura formale dell'implementazione delle operazioni logiche tramite operazioni simplettiche, e come grazie a queste sia possibile effettuare la misura della sindrome e la correzione degli errori. Dunque, il codice GKP è capace di correggere piccoli errori continui di spostamento nelle quadrature di un oscillatore armonico, ma risulta meno efficace nella protezione contro errori pesanti che avvengono raramente, problema che può essere risolto concatenando il codice GKP con un codice a variabili discrete.

L'implementazione del codice GKP era considerata, da molti, un'impresa impossibile. Lo stesso Gottesman affermò come la principale sfida sarebbe stata l'inizializzazione degli stati logici, per poi puntare alla realizzazione di porte logiche e misure, che sarebbero state più semplici da ottenere. Nonostante le difficoltà, gli sviluppi tecnologici dal 2001 ci hanno avvicinato molto alla correzione degli errori con il codice GKP. A questo punto, la domanda centrale è se la correzione degli errori su sistemi fotonici con codice GKP possa essere resa più efficiente nella pratica rispetto a metodi basati su qubit convenzionali. Per rispondere a questa domanda, le sfide teoriche e sperimentali che devono essere affrontate sono in realtà quelle già delineate da Gottesman, ovvero la preparazione di stati logici approssimati con un livello di squeezing sufficiente, la realizzazione di porte logiche e misure ad alta fedeltà. Con il rapido sviluppo della tecnologia e della teoria in questo campo negli ultimi anni, la risposta a questa domanda, seppur prematura, sembra essere positiva, rendendo la computazione quantistica fotonica a variabili continue con codice GKP una delle strade più promettenti per la realizzazione di computer quantistici.

# Appendice A

# Teorema di no-cloning

Uno dei più importanti teoremi no-go dell'informazione quantistica è il teorema di no-cloning, il quale afferma l'impossibilità di creare una copia perfetta e indipendente di uno stato quantistico arbitrario e sconosciuto.

Per dimostrarlo, supponiamo per assurdo di disporre di un dispositivo quantistico che partendo da uno stato iniziale $|\psi\rangle$ e da uno stato target $|s\rangle$, produca una copia perfetta dello stato iniziale sullo stato target, ovvero:

$$|\psi\rangle |s\rangle \xrightarrow{\hat{U}} |\psi\rangle |\psi\rangle , \tag{A.1}$$

dove $\hat{U}$ è un operatore unitario che descrive l'evoluzione del sistema. Supponiamo ora che questa procedura funzioni per due stati iniziali arbitrari $|\psi\rangle$ e $|\phi\rangle$, ossia:

$$\hat{U} (|\psi\rangle |s\rangle) = |\psi\rangle |\psi\rangle , \tag{A.2}$$

$$\hat{U} (|\phi\rangle |s\rangle) = |\phi\rangle |\phi\rangle . \tag{A.3}$$

Ora, effettuando il prodotto scalare tra i membri a sinistra delle due equazioni, si ottiene:

$$\begin{aligned} (\langle\phi| \langle s|) \hat{U}^\dagger \hat{U} (|\psi\rangle |s\rangle) &= (\langle\phi| \langle s|) (|\psi\rangle |s\rangle) \\ &= \langle\phi|\psi\rangle \langle s|s\rangle \\ &= \langle\phi|\psi\rangle , \end{aligned} \tag{A.4}$$

dove si è sfruttata l'unitarietà di $\hat{U}$ ($\hat{U}^\dagger \hat{U} = \hat{I}$). Allo stesso modo, effettuando il prodotto scalare tra i membri a destra delle due equazioni, si ottiene:

$$\begin{aligned} (\langle\phi| \langle\phi|) (|\psi\rangle |\psi\rangle) &= \langle\phi|\psi\rangle \langle\phi|\psi\rangle \\ &= \langle\phi|\psi\rangle^2 . \end{aligned} \tag{A.5}$$

Confrontando i due risultati, si ricava:

$$\langle\phi|\psi\rangle = \langle\phi|\psi\rangle^2, \tag{A.6}$$

da cui deduciamo che $\langle\phi|\psi\rangle = 0$ oppure $\langle\phi|\psi\rangle = 1$. Ciò significa che gli stati $|\psi\rangle$ e $|\phi\rangle$ devono essere ortogonali o identici, fatto che impedisce la possibilità di clonare stati quantistici arbitrari e sconosciuti.

# Appendice B

# Formula di Glauber

La formula di Glauber [18, 22] è un risultato molto utile che permette di esprimere l'esponenziale della somma di due operatori in termini degli esponenziali dei singoli operatori e del loro commutatore. Essa esprime matematicamente il fatto che, a causa della non commutatività degli operatori nello spazio delle fasi (di cui il principio di indeterminazione di Heisenberg è una manifestazione), l'ordine con cui si compiono le operazioni in tale spazio altera lo stato finale del sistema, introducendo una costante di fase puramente quantistica. In realtà, questa formula è un corollario del teorema di Baker-Campbell-Hausdorff (BCH), tuttavia, poiché questo corollario possiede di per sé una valenza fisica rilevante, ci limiteremo a dimostrare la formula di Glauber senza ricorrere al teorema BCH. Prima di farlo, dimostriamo innanzitutto il seguente lemma:

$$[e^{\lambda\hat{A}}, \hat{B}] = \lambda[\hat{A}, \hat{B}]e^{\lambda\hat{A}}, \tag{B.1}$$

dove $\lambda$ è un parametro reale e $\hat{A}$ e $\hat{B}$ sono due operatori che, per ipotesi, commutano entrambi con il loro commutatore, ovvero:

$$[\hat{A}, [\hat{A}, \hat{B}]] = [\hat{B}, [\hat{A}, \hat{B}]] = 0. \tag{B.2}$$

Utilizzando la definizione di esponenziale di un operatore e la nota espressione $[\hat{A}^n, \hat{B}] = n[\hat{A}, \hat{B}]\hat{A}^{n-1}$, possiamo scrivere:

$$\begin{aligned}
[e^{\lambda\hat{A}}, \hat{B}] &= \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!}\hat{A}^n, \hat{B}\right] \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!}[\hat{A}^n, \hat{B}] \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} n[\hat{A}, \hat{B}]\hat{A}^{n-1} \\
&= \lambda[\hat{A}, \hat{B}] \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!}\hat{A}^{n-1} \\
&= \lambda[\hat{A}, \hat{B}]e^{\lambda\hat{A}}.
\end{aligned} \tag{B.3}$$

Verifichiamo allora la validità della formula di Glauber:

$$e^{\hat{A}}e^{\hat{B}} = e^{\hat{A}+\hat{B}+\frac{1}{2}[\hat{A},\hat{B}]}. \tag{B.4}$$

Iniziamo definendo l'operatore $\hat{F}(\lambda)$, funzione della variabile reale $\lambda$, come:

$$\hat{F}(\lambda) = e^{\lambda\hat{A}}e^{\lambda\hat{B}}. \tag{B.5}$$

Derivando rispetto al parametro $\lambda$ si ottiene:

$$\frac{d\hat{F}}{d\lambda} = \hat{A}e^{\lambda\hat{A}}e^{\lambda\hat{B}} + e^{\lambda\hat{A}}\hat{B}e^{\lambda\hat{B}} = \left(\hat{A} + e^{\lambda\hat{A}}\hat{B}e^{-\lambda\hat{A}}\right)\hat{F}(\lambda). \tag{B.6}$$

Utilizzando il lemma (B.1) dimostrato in precedenza, si può scrivere che :

$$e^{\lambda\hat{A}}\hat{B} = \hat{B}e^{\lambda\hat{A}} + \lambda[\hat{A}, \hat{B}]e^{\lambda\hat{A}}. \tag{B.7}$$

Moltiplicando a destra di entrambi i membri per l'operatore $e^{-\lambda\hat{A}}$ e sostituendo questa espressione nell'equazione (B.6), si ricava la seguente equazione differenziale:

$$\frac{d\hat{F}}{d\lambda} = \left(\hat{A} + \hat{B} + \lambda[\hat{A}, \hat{B}]\right)\hat{F}(\lambda). \tag{B.8}$$

Poiché gli operatori $(\hat{A}+\hat{B})$ e $[\hat{A}, \hat{B}]$ commutano per l'ipotesi iniziale, è possibile integrare formalmente la (B.8) trattando gli operatori come variabili scalari. Integrando tra $\lambda = 0$ e $\lambda = 1$ si ottiene:

$$\int_0^1 \frac{d\hat{F}}{\hat{F}} = \int_0^1 \left(\hat{A} + \hat{B} + \lambda[\hat{A}, \hat{B}]\right) d\lambda \tag{B.9}$$

$$\ln \hat{F}(1) - \ln \hat{F}(0) = (\hat{A} + \hat{B}) + \frac{1}{2}[\hat{A}, \hat{B}]. \tag{B.10}$$

Esponenziando entrambi i membri, si ottiene:

$$\hat{F}(1) = e^{\hat{A}+\hat{B}+\frac{1}{2}[\hat{A},\hat{B}]}\hat{F}(0). \tag{B.11}$$

Infine, notando che $\hat{F}(0) = \hat{I}$ e che $\hat{F}(1) = e^{\hat{A}}e^{\hat{B}}$, si ottiene la formula di Glauber (B.4).

# Bibliografia


[1] Peter W Shor. Algorithms for quantum computation: discrete logarithms and factoring. In *Proceedings 35th Annual Symposium on Foundations of Computer Science*, pages 124–134. IEEE, 1994.

[2] Richard P Feynman. Simulating physics with computers. *International Journal of Theoretical Physics*, 21(6/7):467–488, 1982.

[3] Rolf Landauer. Information is physical. *Physics Today*, 44(5):23–29, 1991.

[4] David P DiVincenzo. The physical implementation of quantum computation. *Fortschritte der Physik: Progress of Physics*, 48(9-11):771–783, 2000.

[5] Seth Lloyd and Samuel L Braunstein. Quantum computation over continuous variables. *Physical Review Letters*, 82(8):1784–1787, 1999.

[6] Peter W. Shor. Scheme for reducing decoherence in quantum computer memory. *Physical Review A*, 52:R2493–R2496, Oct 1995.

[7] Andrew M. Steane. Error correcting codes in quantum theory. *Physical Review Letters*, 77:793–797, Jul 1996.

[8] A. R. Calderbank and Peter W. Shor. Good quantum error-correcting codes exist. *Physical Review A*, 54:1098–1105, Aug 1996.

[9] Daniel Gottesman, Alexei Kitaev, and John Preskill. Encoding a qubit in an oscillator. *Physical Review A*, 64(1), 2001.

[10] M.A. Nielsen and I.L. Chuang. *Quantum Computation and Quantum Information: 10th Anniversary Edition*. Cambridge University Press, 2010.

[11] Giuliano Benenti, Giulio Casati, and Giuliano Strini. *Principles of Quantum Computation and Information*, volume I: Basic Concepts. World Scientific, New Jersey, 2004.

[12] J. Preskill. *Lecture Notes for Physics 229:Quantum Information and Computation*. CreateSpace Independent Publishing Platform, 2015.

[13] A. R. Calderbank, E. M. Rains, P. W. Shor, and N. J. A. Sloane. Quantum error correction and orthogonal geometry. *Physical Review Letters*, 78(3):405–408, January 1997.

[14] Daniel Gottesman. Class of quantum error-correcting codes saturating the quantum hamming bound. *Physical Review A*, 54(3):1862–1868, 1996.

[15] Christopher C Gerry and Peter L Knight. *Introductory quantum optics*. Cambridge university press, 2023.

[16] D.F. Walls and G.J. Milburn. *Quantum Optics*. Springer Berlin Heidelberg, 2008.

[17] P.A.M. Dirac. *The principles of quantum mechanics*. Oxford university press, 1981.

[18] Roy J. Glauber. Coherent and incoherent states of the radiation field. *Phys. Rev.*, 131:2766–2788, Sep 1963.

[19] Jonathan Conrad. *The fabulous world of GKP codes*. PhD thesis, 2024.

[20] Alessio Serafini. *Quantum Continuous Variables: A Primer of Theoretical Methods*. CRC Press, 2017.

[21] Andrew M Steane. Active stabilization, quantum computation, and quantum state synthesis. *Physical Review Letters*, 78(11):2252–2255, 1997.

[22] Claude Cohen-Tannoudji, Bernard Diu, and Franck Laloë. *Quantum Mechanics*. John Wiley & Sons, New York, NY, 1977.