

Dipartimento di Fisica e Astronomia “Augusto Righi”
Corso di Laurea in Fisica

Ottimizzazione del sistema ottico del
rivelatore RIPTIDE: simulazioni Monte
Carlo e validazione sperimentale

Relatore:

Prof. Cristian Massimi

Presentata da:

Giulio Mesini

Correlatore:

Dott. Samuele Lanzi

Abstract

RIPTIDE è un rivelatore di neutroni veloci basato sulla diffusione elastica neutrone-protone, che ricostruisce le tracce del protone di rinculo in uno scintillatore plastico tramite un sistema ottico a doppia lente, un intensificatore MCP e una camera CMOS veloce. Le prestazioni del rivelatore dipendono criticamente dalla configurazione geometrica delle lenti, che determina efficienza di raccolta fotonica, qualità dell'immagine, profondità di campo e magnificazione.

Questo lavoro presenta l'ottimizzazione del sistema ottico tramite simulazione Monte Carlo Geant4. Un primo studio su griglia sistematica seleziona la tipologia di lenti in base all'efficienza geometrica. Il sistema viene poi caratterizzato in modalità di fuoco mobile: per ciascuna configurazione candidata si determina il piano di fuoco, la funzione di qualità ottica legato alle tracce ricostruite, la profondità di campo e la magnificazione. Le quattro metriche sono infine combinate in un'analisi multi-obiettivo di Pareto per identificare la configurazione ottimale, in funzione delle priorità relative attribuite alle diverse metriche.

Tre esperimenti di validazione con sorgenti LED e laser confermano qualitativamente il comportamento previsto dalla simulazione per efficienza, profondità di campo e qualità ottica. Nello scenario di riferimento a pesi bilanciati tra le quattro metriche, la configurazione raccomandata resta robusta al variare delle priorità relative attribuite alle metriche.

Indice

Abstract	1
1 Introduzione e Motivazioni	1
1.1 Motivazioni scientifiche	1
1.2 Stato dell'arte: rivelatori a tracciamento di protoni di rinculo	2
1.2.1 Meccanismi di rivelazione dei neutroni veloci	2
1.2.2 Proton Recoil Telescope e Time-of-Flight	2
1.2.3 Sistemi a fibre scintillanti: MONDO e SONTRAC	4
2 Il rivelatore RIPTIDE	6
2.1 Concetto e architettura generale	6
2.1.1 Il concetto RIPTIDE	6
2.1.2 Principio di funzionamento	7
2.2 Componenti del rivelatore	8
2.2.1 Lo scintillatore plastico BC-408	8
2.2.2 Il sistema di lettura ottica	9
2.2.3 Il sistema di trigger	12
2.3 Il dataset Monte Carlo	12
2.3.1 La simulazione Geant4	12
2.3.2 Il sistema ottico simulato	13
3 Selezione del modello di lenti ed esperimento di validazione	14
3.1 Selezione della tipologia di lenti per efficienza geometrica	14
3.1.1 Definizione dell'efficienza geometrica	14
3.1.2 Dipendenza dal modello di lente	14
3.1.3 Simulazione e metrica di selezione	15
3.2 Esperimento 1: validazione dell'efficienza geometrica	18
3.2.1 Obiettivo	18
3.2.2 Setup sperimentale	18
3.2.3 Pipeline di analisi	19
3.2.4 Metodo 1: stima dell'incertezza per integrazione di immagini stackate	20
3.2.5 Metodo 2: fluttuazioni frame-to-frame	21

4	Caratterizzazione ottica del sistema ed esperimenti di validazione	24
4.1	Caratterizzazione della Point Spread Function	24
4.1.1	Dalla selezione del modello all'ottimizzazione della posizione	24
4.1.2	Setup della simulazione PSF	24
4.1.3	Stima statistica della PSF	25
4.1.4	Simmetria cilindrica e rotazione 3D della PSF	26
4.1.5	Interpolazione bilineare del database PSF	26
4.1.6	Ipotesi di gaussianità della PSF e robustezza del metodo	27
4.2	Linearità della risposta e mappa chi-quadro	32
4.2.1	Motivazione e definizione	32
4.2.2	Relazione con la funzione di qualità Q	32
4.3	Funzione di qualità Q e fit di tracce 3D	34
4.3.1	Tracce fisiche e risposta ottica	34
4.3.2	Fit ortogonale pesato (ODR-IRLS)	34
4.3.3	Correlazioni dei residui e interpretazione del chi-quadro	35
4.3.4	Definizione formale di Q	37
4.4	Profondità di campo e magnificazione	39
4.4.1	Motivazione	39
4.4.2	Metodo di simulazione: importance sampling con sorgente rettangolare	39
4.4.3	Definizione di piano di fuoco e profondità di campo	40
4.4.4	Magnificazione media e compatibilità con il fotocatodo	40
4.4.5	Mappe DoF e magnificazione nel piano x_1 - x_2	41
4.5	Esperimento 2: verifica sperimentale della profondità di campo	45
4.5.1	Obiettivo	45
4.5.2	Setup sperimentale	45
4.5.3	Pipeline di analisi delle immagini	45
4.5.4	Metriche di confronto	47
4.5.5	Risultati e interpretazione	48
4.6	Metriche ottiche al piano di fuoco	50
4.6.1	Motivazione	50
4.6.2	Definizione delle metriche	50
4.7	Esperimento 3: confronto sperimentale con sorgente a display	53
4.7.1	Obiettivo	53
4.7.2	Setup sperimentale	53
4.7.3	Calibrazione della scala tramite linea di riferimento	54
4.7.4	Misura di Q_{exp} e confronto qualitativo con Q_{sim}	54

4.7.5	Risultati e interpretazione	55
5	Analisi di Pareto e Selezione della Configurazione Ottimale	58
5.1	Funzione di merito composta e raccomandazioni	58
5.1.1	Pipeline di aggregazione	58
5.1.2	Ruolo della linearità nel processo di selezione	60
5.1.3	Analisi di sensibilità ai pesi	61
5.1.4	Output grafico e configurazione raccomandata	66
5.1.5	Discussione	66
5.1.6	Sensibilità alla magnificazione target	68
	Conclusioni	70

1 Introduzione e Motivazioni

1.1. Motivazioni scientifiche

I neutroni veloci – con energie tipicamente nell’intervallo 1–100 MeV – svolgono un ruolo centrale in diversi ambiti della fisica nucleare e applicata. In adroterapia, i fasci di protoni e ioni pesanti utilizzati nel trattamento di tumori producono una componente secondaria di neutroni veloci il cui flusso e spettro energetico devono essere misurati con precisione per quantificare la dose biologica depositata nei tessuti sani circostanti [1]. In astrofisica, i neutroni solari di alta energia rappresentano una sonda diretta dei processi di accelerazione nella corona solare e nelle brillanze [2]. In fisica nucleare fondamentale, la spettroscopia neutronica è essenziale per misurare sezioni d’urto di reazioni (n, p) e (n, α) rilevanti per la nucleosintesi [3].

La sfida comune a tutte queste applicazioni è che i neutroni, non avendo carica elettrica, non ionizzano direttamente il mezzo attraversato: la loro rivelazione passa necessariamente per le particelle secondarie prodotte in reazioni nucleari. Per i neutroni veloci, il processo dominante è la diffusione elastica neutrone-protoni ($n-p$): il protone di rinculo produce un segnale rilevabile in un rivelatore di particelle. La ricostruzione completa dell’evento – più precisamente la traccia del protone – consente di ricavare l’energia e la direzione del neutrone incidente tramite le leggi della cinematica relativistica. Più in dettaglio, questo tipo di rivelatore, che può essere definito un tracciante di neutroni poiché è in grado di ricostruirne la quantità di moto, deve quindi combinare tre proprietà: alta efficienza di rivelazione (raccolta di un numero sufficiente di fotoni di scintillazione per traccia), buona risoluzione spaziale (ricostruzione accurata del percorso del protone di rinculo) e capacità di discriminazione tra particelle di tipo diverso (neutroni vs. fotoni, vs. particelle α). Realizzare contemporaneamente questi requisiti con un apparato compatto, a costo contenuto e adatto all’impiego nei campi di ricerca menzionati rimane un obiettivo aperto della strumentazione nucleare.

1.2. Stato dell'arte: rivelatori a tracciamento di protoni di rinculo

L'approccio alla spettroscopia neutronica basato sul tracciamento del protone di rinculo (*Recoil Proton Track Imaging*, RPTI) risale ai primi anni della rivelazione nucleare, ma ha conosciuto un rinnovato impulso con lo sviluppo di scintillatori plastici ad alta efficienza e di sensori d'immagine a basso rumore.

1.2.1 Meccanismi di rivelazione dei neutroni veloci

I neutroni veloci interagiscono con la materia principalmente attraverso tre meccanismi, la cui importanza relativa dipende dall'energia del neutrone e dalla composizione del rivelatore.

Diffusione elastica su idrogeno ($n-p$). Per energie E_n nel range 1–100 MeV, questa rappresenta uno dei processi principali nei materiali idrogenati (polimeri plastici, acqua, polietilene). Il protone di rinculo ha energia compresa tra zero ed E_n ; nel sistema del centro di massa la diffusione è approssimativamente isotropa, producendo una distribuzione quasi uniforme delle energie di rinculo. La traccia del protone nel materiale può estendersi da alcune decine di micrometri fino a qualche centimetro, a seconda della sua energia, ed è quindi il principale segnale utilizzato per la rivelazione dei neutroni veloci.

Diffusione elastica su carbonio ($n-C$). Nei materiali plastici il rapporto atomico C/H è tipicamente dell'ordine dell'unità. Come mostrato in Figura 1.1, la sezione d'urto elastica $n-C$ è dello stesso ordine di grandezza di quella $n-p$ nell'intervallo di energie di interesse; il nucleo di carbonio di rinculo possiede tuttavia un potere frenante molto più elevato e percorre distanze sensibilmente minori, producendo tracce spesso difficili da ricostruire.

Reazioni nucleari (n, p) e (n, α) sul carbonio. Per energie superiori alle rispettive soglie cinematiche – visibili in Figura 1.1 come l'energia a cui ciascun canale anelastico si apre – possono avvenire reazioni nucleari come $^{12}\text{C}(n, p)^{12}\text{B}$ e $^{12}\text{C}(n, \alpha)^9\text{Be}$. Le particelle cariche emesse contribuiscono al segnale del rivelatore e possono essere discriminate dagli eventi di diffusione elastica mediante l'analisi della morfologia della traccia e del profilo di perdita di energia specifica dE/dx .

1.2.2 Proton Recoil Telescope e Time-of-Flight

I rivelatori tradizionali di tipo *Proton Recoil Telescope* (PRT) abbinano strati di materiale idrogenato (convertitore) a rivelatori a stato solido (tipicamente confi-

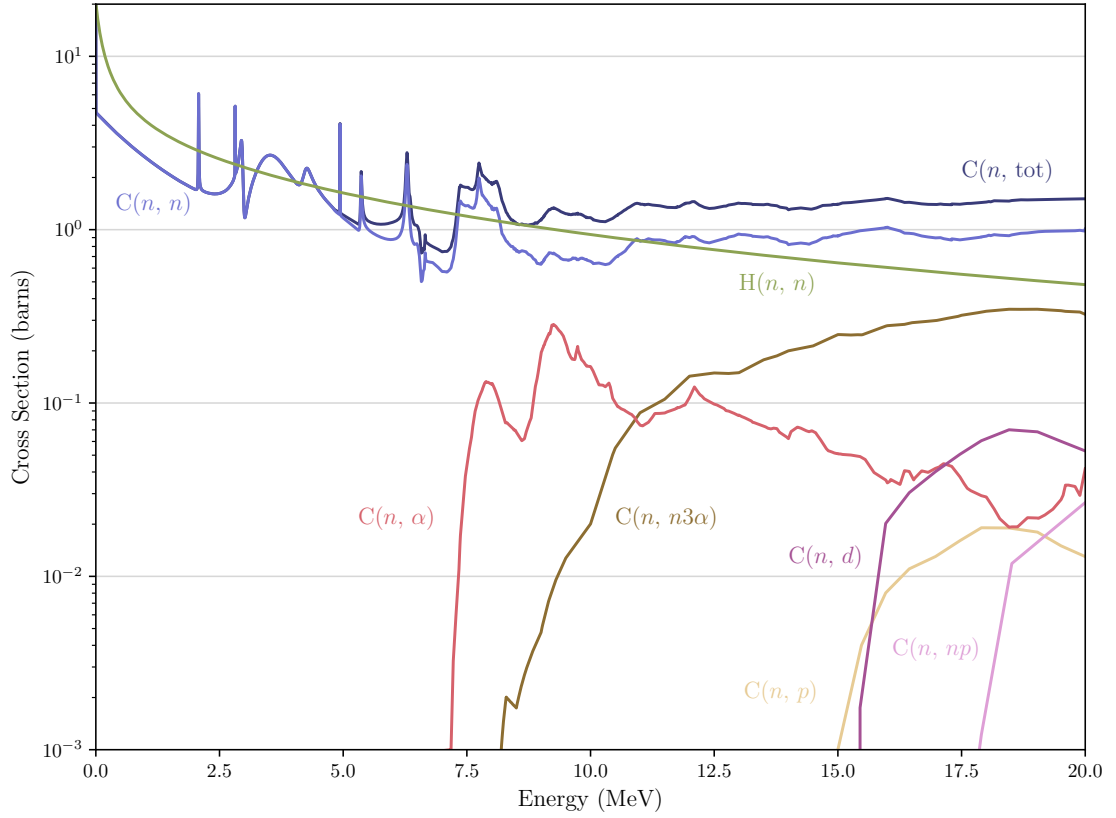


Figura 1.1: Sezione d’urto neutrone-carbonio di diffusione elastica e delle principali reazioni anelastiche – $C(n, p)$, $C(n, \alpha)$, $C(n, n3\alpha)$, $C(n, d)$, $C(n, np)$ – oltre alla sezione d’urto totale $C(n, \text{tot})$, in funzione dell’energia del neutrone incidente nell’intervallo 0–20 MeV. Per confronto è riportata anche la sezione d’urto di diffusione elastica neutrone-protone $H(n, n)$. Dati attribuiti alla libreria ENDF/B-VIII.0 secondo quanto riportato nella fonte originale [4].

gurazioni ΔE – E) disposti a valle. Un neutrone incidente produce in un foglio di polietilene un protone di rinculo che viene rivelato e analizzato in termini di energia e angolo [5].

L’aggiunta di una misura del *Time of Flight* (TOF) tra una stazione di partenza (un contatore di sincronizzazione presso la sorgente) e il rivelatore consente di ricavare l’energia del neutrone in modo indipendente dalla cinematica di rinculo, fornendo un vincolo cinematico supplementare:

$$E_n = m_n c^2 \left[\frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{L}{c \Delta t} \right)^2}} - 1 \right] \quad (1.1)$$

dove L è la distanza di volo e Δt il tempo di transito. I PRT con TOF hanno raggiun-

to risoluzioni energetiche dell'ordine di pochi percento nell'intervallo 10–300 MeV, ma possono presentare efficienze di rivelazione inferiori all'1% a causa della piccola accettazione geometrica e della necessità di selezionare eventi in cui il protone attraversa tutti i piani del telescopio [5].

Entrambe le tecniche presuppongono inoltre la conoscenza a priori della direzione del neutrone incidente: nei PRT essa definisce l'asse rispetto al quale è misurato l'angolo di rinculo ϑ_{lab} nella relazione cinematica, e per questo tali rivelatori sono applicabili solo quando la direzione di provenienza è definita da collimazione o da altri vincoli geometrici; nei sistemi basati su TOF essa determina invece la linea di volo lungo cui posizionare il rivelatore rispetto alla sorgente. In termini più generali, la ricostruzione del momento del neutrone tramite singola diffusione $n-p$ richiede la conoscenza del vertice primario della traiettoria del neutrone, ad esempio un bersaglio puntiforme noto [6]. Ad oggi non esiste un tracciatore in grado di combinare le due tecniche per determinare energia e direzione del neutrone incidente senza tale ipotesi geometrica preliminare. RIPTIDE, sfruttando la cinematica della doppia diffusione neutrone-protone, supera questa limitazione: la ricostruzione completa delle due tracce di rinculo consente di risalire sia all'energia sia alla direzione del neutrone incidente, senza che quest'ultima debba essere nota a priori.

Un limite intrinseco dei PRT classici è che essi non forniscono una misura diretta del profilo longitudinale di perdita di energia del protone di rinculo. Di conseguenza non è possibile identificare quale estremità della traccia corrisponda all'inizio del moto e quale al punto di arresto (informazione di "head-tail"). La direzione del protone può essere ricostruita geometricamente, ma non il suo verso lungo la traccia. Una misura head-tail permetterebbe invece di determinare il verso del rinculo e quindi migliorare la ricostruzione dell'angolo di emissione del protone, consentendo una stima cinematica dell'energia del neutrone anche in assenza di una misura TOF.

1.2.3 Sistemi a fibre scintillanti: MONDO e SONTRAC

Un approccio precursore concettuale di RIPTIDE, riconducibile allo stesso principio fisico RPTI descritto in apertura del capitolo, si basa su una matrice di fibre scintillanti plastiche organizzate in strati ortogonali, la cui sequenza di attivazione ricostruisce la traccia tridimensionale. Due rivelatori di questo tipo, sviluppati per applicazioni distinte, ne illustrano il principio.

MONDO (*MONitor for Neutron Dose in hadrOntherapy*) impiega fibre di diametro 250–500 μm lette alle estremità da fotorivelatori a singolo fotone (SiPM o SPAD), per la dosimetria della componente neutronica secondaria in adroterapia [7]. SONTRAC

(*Solar Neutron TRACking*), sviluppato presso il NASA Goddard Space Flight Center per lo studio dei neutroni solari, utilizza fibre di diametro 1 mm lette da SiPM compatibili con l'ambiente spaziale; la cinematica della doppia diffusione elastica consente la ricostruzione di energia e direzione del neutrone senza una misura di TOF, con risoluzione angolare inferiore a 5° per $E_n > 20$ MeV [8].

Entrambi i sistemi condividono i punti di forza tipici dell'approccio a fibre — buona risoluzione spaziale, robustezza meccanica, scalabilità — e i suoi limiti: un numero di canali di lettura molto elevato (10^4 – 10^5 per volumi di dimensioni cliniche) e una granularità finita che impedisce la ricostruzione dettagliata del profilo di perdita di energia dE/dx lungo la traccia.

2 Il rivelatore RIPTIDE

2.1. Concetto e architettura generale

2.1.1 Il concetto RIPTIDE

RIPTIDE (*Recoil Proton Track Imaging DEtector*) ha l'obiettivo di ridurre alcune delle limitazioni dei sistemi RPTI basati su fibre scintillanti, mantenendone i punti di forza fisici. Il concetto è stato introdotto in [6] e sviluppato progressivamente in [9, 10, 11, 12, 13, 14].

L'innovazione introdotta da RIPTIDE è sostituire la matrice di fibre scintillanti discreta, adottata da MONDO e SONTRAC, con un volume monolitico di scintillatore plastico. In un rivelatore a fibre, la traccia del protone di rinculo è ricostruita a partire dalla sequenza di fibre eccitate, con una risoluzione spaziale limitata dal diametro delle fibre stesse (da qualche centinaio di micrometri a pochi millimetri) e dalla complessità dell'elettronica di lettura. In RIPTIDE, invece, i fotoni di scintillazione prodotti lungo tutta la traccia del protone si propagano all'interno del volume scintillante e vengono raccolti da due sistemi ottici esterni, orientati in modo reciprocamente perpendicolare, che formano l'immagine su altrettante superfici sensibili, consentendo la ricostruzione stereoscopica della traccia.

Questo approccio offre tre vantaggi fondamentali. In primo luogo, la risoluzione spaziale è determinata dalla convoluzione tra la Point Spread Function (PSF) ottica, campionamento del sensore e diffusione della luce nello scintillatore, e non dalla geometria del rivelatore primario; valori sub-millimetrici sono in linea di principio raggiungibili con lenti di qualità. In secondo luogo si elimina la necessità di una complessa elettronica di lettura associata a migliaia di canali indipendenti. In terzo luogo, la continuità dell'immagine consente di sfruttare la curva di Bragg per identificare il verso di propagazione del protone — informazione difficilmente accessibile ai sistemi a fibre, dove la densità di deposizione di energia non è misurabile punto per punto.

RIPTIDE è progettato per operare in modalità a singolo rinculo, in cui viene misurata una singola interazione elastica $n-p$, dove un neutrone interagisce una sola volta con un nucleo di idrogeno, e in modalità di doppia diffusione, dove avvengono due collisioni $n-p$ sequenziali all'interno del volume. In entrambi i casi, la ricostruzione

stereoscopica della traccia tramite due sistemi ottici ortogonali consente di risalire all'energia e alla direzione del neutrone incidente.

La versatilità del concetto lo rende adatto a molteplici applicazioni: la fisica nucleare fondamentale (misure di sezioni d'urto), la dosimetria in adroterapia, l'astrofisica dei neutroni solari e la fisica dello spazio profondo [6].

2.1.2 Principio di funzionamento

Il meccanismo fisico alla base di RIPTIDE è la diffusione elastica neutrone-protone. Quando un neutrone veloce di energia E_n penetra nel volume dello scintillatore plastico, può collidere con un nucleo di idrogeno (protone) essenzialmente a riposo. Nella cinematica non relativistica della diffusione elastica isotropa nel centro di massa, l'energia trasferita al protone è:

$$E_p = E_n \cos^2 \vartheta_{\text{lab}} \quad (2.1)$$

dove ϑ_{lab} è l'angolo di rinculo del protone nel sistema del laboratorio rispetto alla direzione del neutrone incidente. Il valor medio dell'energia trasferita su tutti gli angoli è $\langle E_p \rangle = E_n/2$. L'energia residua del neutrone dopo la collisione è $E'_n = E_n - E_p$.

Se si considera un neutrone di 100 MeV, il protone di rinculo ha energia E_p tipicamente compresa tra 10 e 50 MeV, e percorre nel BC-408 una traiettoria rettilinea di lunghezza:

$$L \sim 1\text{--}30 \text{ mm} \quad (2.2)$$

ionizzando il materiale lungo il percorso e producendo fotoni di scintillazione con una resa di circa 10^4 fotoni/MeV. Poiché l'energia specifica depositata (dE/dx) cresce lungo la traccia secondo la curva di Bragg, con il massimo (*Bragg peak*) nei pressi dell'estremità di arresto, l'immagine della traccia presenta un'estremità più luminosa — quella corrispondente alla fine del percorso del protone. Questa asimmetria luminosa consente di determinare il verso di propagazione del protone e, tramite le relazioni cinematiche, la direzione di provenienza del neutrone incidente.

La risoluzione angolare del sistema dipende dalla precisione con cui si misura la direzione della traccia proiettata nelle due viste stereoscopiche. Uno dei limiti intrinseci di questo sistema è la diffusione multipla coulombiana del protone nel mezzo, che introduce una deviazione angolare RMS dell'ordine del grado per tracce di lunghezza $L > 5$ mm. I requisiti sul sistema ottico discussi nel seguito mirano a portare la contribuzione del sistema a un livello comparabile o inferiore a questo limite fisico.

Per eventi di doppia diffusione — in cui il neutrone interagisce due volte con protoni distinti nel volume — la ricostruzione è più complessa ma fornisce un vincolo cinematico supplementare che consente di determinare sia l'energia che la direzione del neutrone senza misura del tempo di volo.

2.2. Componenti del rivelatore

2.2.1 Lo scintillatore plastico BC-408

Lo scintillatore impiegato in RIPTIDE è il BC-408, uno scintillatore plastico a base di poliviniltoluene (PVT), con composizione chimica C_9H_{10} e densità $\rho = 1.032 \text{ g/cm}^3$ [13].

Le caratteristiche ottiche e temporali principali del BC-408 sono:

- **Emissione:** spettro con picco a 425 nm (regione blu-violetta), con una larghezza a metà altezza di circa 40 nm.
- **Resa luminosa:** circa 10^4 fotoni/MeV per particelle al minimo di ionizzazione; per protoni di alto dE/dx la resa effettiva è ridotta dal quenching di Birks, ma rimane dell'ordine di 10^3 – 10^4 fotoni/MeV a seconda dell'energia.
- **Costanti di tempo:** tempo di salita (*rise time*) $\tau_r = 0.9 \text{ ns}$, tempo di decadimento (*decay time*) $\tau_d = 2.1 \text{ ns}$.
- **Indice di rifrazione:** $n = 1.59$ [15], che determina l'angolo critico di riflessione totale interna alle superfici dello scintillatore.
- **Lunghezza di assorbimento:** dell'ordine del metro nella regione spettrale di emissione, trascurabile rispetto alle dimensioni del cubo (6 cm).

Il prototipo attuale utilizza un cubo di dimensioni $6 \times 6 \times 6 \text{ cm}^3$, scelto come compromesso tra volume sensibile (e quindi efficienza di rivelazione) e compattezza dell'apparato.

Il range dei protoni di rinculo nel BC-408 in funzione dell'energia è il parametro critico per stabilire la soglia di rivelazione ottica: protoni con $E_p < 10 \text{ MeV}$ hanno un range $L < 2 \text{ mm}$ e producono tracce difficilmente risolvibili, mentre protoni con $E_p > 40 \text{ MeV}$ hanno range $L > 15 \text{ mm}$ e producono tracce chiaramente identificabili. Per questo motivo, e per garantire una ricostruzione affidabile della traccia, nelle simulazioni presentate in questa tesi si adotta come condizione di analisi $E_p > 40 \text{ MeV}$.

2.2.2 Il sistema di lettura ottica

Il sistema di lettura ottica è il componente più critico e innovativo di RIPTIDE: deve raccogliere efficientemente i fotoni di scintillazione emessi in tutto il volume del cubo, formare un'immagine nitida della traccia del protone su un sensore ad alta risoluzione, e mantenere una qualità ottica accettabile su tutta la profondità del volume (± 30 mm lungo l'asse ottico).

Configurazione Ramsden e lenti UVFS

Il sistema adottato è ispirato all'oculare di Ramsden: due lenti piano-convesse in UV Fused Silica (UVFS), disposte in sequenza lungo l'asse ottico, raccolgono i fotoni emessi dalla superficie del cubo e li focalizzano sul fotocatodo dell'intensificatore ottico [14]. La scelta dell'UVFS garantisce alta trasmittanza nell'UV prossimo e nel visibile ($T > 90\%$ per $\lambda > 350$ nm), bassa birifrangenza e stabilità meccanica.

I modelli principali considerati appartengono al catalogo Thorlabs¹ (Tabella 2.1). La configurazione selezionata a valle dello screening di efficienza e della caratterizzazione ottica di dettaglio (Capitoli 3–4) è formata da:

- **Lente 1** (verso lo scintillatore): LA4078, pianoconvessa $f = 75.3$ mm, orientata con la curvatura verso l'intensificatore.
- **Lente 2** (verso l'intensificatore): LA4464R, pianoconvessa $f = 60.2$ mm, orientata con il piano verso lo scintillatore.

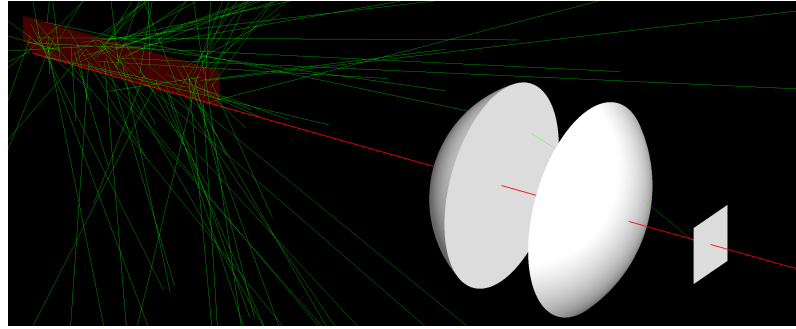


Figura 2.1: Rendering Geant4 del sistema ottico: fotoni di scintillazione (verde) generati da una sorgente puntiforme nello scintillatore BC-408 (sinistra) attraversano le due lenti pianoconvesse LA4078 e LA4464R e vengono focalizzati sul fotocatodo dell'intensificatore (piccolo rettangolo a destra); la linea rossa indica un raggio di riferimento lungo l'asse ottico.

¹Thorlabs, *UV Fused Silica Plano-Convex Lenses, Uncoated*: https://www.thorlabs.com/newgrouppage9.cfm?objectgroup_id=123 (consultato agosto 2026).

Tabella 2.1: Parte del catalogo delle lenti Thorlabs in UVFS considerate nello screening iniziale (selezione).

Codice	Tipo	f (mm)	R (mm)	t_c (mm)	t_e (mm)	Orientazione
LB4592	Biconvessa	60.0	52.6	15.6	2.5	—
LB4553	Biconvessa	75.0	67.0	12.5	2.5	—
LA4464	Pianoconvessa	60.2	27.6	19.8	3.0	⌘
LA4078	Pianoconvessa	75.3	34.4	14.2	3.0	⌘
LA4464R	Pianoconvessa	60.2	27.6	19.8	3.0	⌘
LA4078R	Pianoconvessa	75.3	34.4	14.2	3.0	⌘

Icona: lato piatto a sinistra = verso lo scintillatore; lato curvo a sinistra = verso l'intensificatore (e viceversa).

Intensificatore di immagini (MCP)

A causa della debolezza del segnale luminoso prodotto da una singola traccia di protone — tipicamente 10^3 – 10^5 fotoni totali, di cui solo una piccola frazione raggiunge il sistema ottico — è necessario amplificare il segnale luminoso prima che questo raggiunga la camera CMOS. A questo scopo si utilizza un'intensificatore d'immagine Hamamatsu V9501U-73 come stadio di amplificazione [13, 14].

Il principio di funzionamento dell'MCP è il seguente: i fotoni di scintillazione che attraversano il sistema di lenti colpiscono un fotocatodo GaAsP (16×16 mm²) (*Gallium Arsenide Phosphide*), che converte ogni fotone in un fotoelettrone con efficienza quantica $QE \approx 40$ – 43% nella finestra spettrale 400–650 nm — in buon accordo con il picco di emissione del BC-408. I fotoelettroni vengono poi accelerati verso il MCP vero e proprio, costituito da una matrice di microcanali di vetro di diametro ~ 6 μ m rivestiti internamente con un materiale alcalino emettitore secondario.

Ogni fotoelettrone che entra in un capillare genera una cascata di secondari per emissione a catena sotto l'effetto del campo elettrico applicato, con un guadagno totale tipico di 10^6 . La nube di elettroni amplificata colpisce uno schermo fosforescente P46, che riemette i fotoni nell'intorno di 530 nm (verde), con un tempo di decadimento rapido (~ 300 ns) che lo rende adatto ad acquisizioni ad alta frequenza di frame, dove la sensibilità del CMOS è massimale. La camera CMOS (vedi sezione successiva) acquisisce quindi l'immagine amplificata dello schermo del fosforescente.

L'intensificatore introduce una Point Spread Function propria dell'ordine di ~ 30 μ m FWHM (dipendente dal diametro dei capillari e dall'aberrazione elettronica), che può essere approssimata come somma in quadratura a quella del sistema di lenti. La

risoluzione totale del sistema ottico è quindi governata dalla componente dominante tra PSF delle lenti e PSF dell'MCP.

Camera CMOS Cyclone-2000-M

L'immagine dello schermo fosforescente viene acquisita da una camera CMOS scientifica Cyclone-2000-M (Optronis GmbH), con sensore da 2 Mpixel (1920×1080 pixel) [13, 14]. Le caratteristiche rilevanti per RIPTIDE sono:

- Frequenza di frame massima: fino a 2166 Hz in full-frame, con possibilità di operare in modalità sub-frame per rate ancora più elevati.
- Dimensione del pixel: $10.0 \times 10.0 \text{ }\mu\text{m}$, con area attiva $19.2 \times 10.8 \text{ mm}^2$.
- Profondità di bit: 8/10 bit.
- Interfaccia: frame grabber CoaXPress (Coaxlink Quad CXP-12), con banda fino a 50 Gb/s.

L'elevata frequenza di frame è essenziale per operare in modalità *triggered*, sincronizzando l'acquisizione con il segnale fornito dal sistema di trigger (Sezione 2.2.3).

Configurazione stereoscopica

La ricostruzione tridimensionale della traccia richiede almeno due proiezioni ortogonali dell'immagine. In un primo prototipo di RIPTIDE, disponendo di un solo sistema di readout, si è optato per l'impiego di uno specchio piano a 45° che ridirige la vista laterale verso una seconda camera (o verso una seconda porzione del sensore della stessa camera) [13]. Questa configurazione compatta consente di acquisire simultaneamente le due viste con un'unica camera, oppure con due camere sincronizzate dal segnale di trigger.

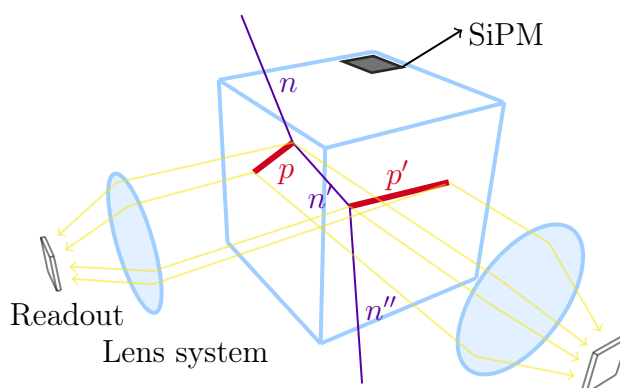


Figura 2.2: Schematica concettuale del rivelatore RIPTIDE.

2.2.3 Il sistema di trigger

Il sistema di trigger di RIPTIDE è basato su un fotomoltiplicatore al silicio (SiPM), posizionato su una delle facce del cubo scintillante non impegnata dal sistema di lettura ottica. Rispetto a un fotomoltiplicatore a tubo (PMT), che occuperebbe l'intera faccia rendendola inutilizzabile per l'acquisizione d'immagine, il SiPM offre un ingombro ridotto e consente di riservare tutte le altre facce del cubo alla ripresa stereoscopica [12].

Il segnale prodotto dal SiPM viene amplificato e trasformato in un segnale TTL che, una volta letto dalla camera, arresta l'acquisizione delle immagini. Questa acquisizione, continua e salvata in un buffer di memoria circolare, viene interrotta salvando l'immagine corrispondente al trigger, insieme alla precedente e alla successiva, per compensare il lieve ritardo del segnale rispetto all'evento. Il tempo di esposizione di ciascun frame è impostabile da un minimo di 2 μ s fino a un massimo pari al periodo di frame stesso (circa 462 μ s alla frequenza massima di 2166 Hz) [13, 14], consentendo di adattare l'integrazione del segnale luminoso alla dinamica temporale dell'evento da acquisire.

2.3. Il dataset Monte Carlo

2.3.1 La simulazione Geant4

La validazione del concetto RIPTIDE e l'ottimizzazione del sistema ottico si basano su un dataset di simulazioni Monte Carlo prodotto con il toolkit Geant4 [16], versione 11.4.1. La geometria del rivelatore è descritta tramite file GDML (*Geometry Description Markup Language*), che consentono una modifica sistematica della configurazione senza ricompilare il codice sorgente.

Materiale dello scintillatore. Lo scintillatore è modellato come un volume cubico di lato 6 cm composto dal materiale predefinito `G4_PLASTIC_SC_VINYLTOLUENE`, con composizione stechiometrica $C/H = 9/10$, densità $\rho = 1.032 \text{ g/cm}^3$ e energia di ionizzazione $I = 64.7 \text{ eV}$, in accordo con le specifiche del BC-408 [11].

Produzione e trasporto di fotoni ottici. Le librerie di fotonica ottica di Geant4 sono abilitate. Lungo la traccia di ogni particella carica (principalmente protoni di rinculo) vengono generati 10^4 fotoni ottici per MeV di energia depositata, emessi con distribuzione angolare isotropa nel 4π stereoradiani con polarizzazione lineare casuale perpendicolare alla direzione di propagazione. La lunghezza di assorbimento è impostata su un valore molto maggiore delle dimensioni del cubo, rendendo

l'assorbimento nel bulk dello scintillatore trascurabile.

Processi fisici attivi. Il pacchetto di fisica che descrive l'urto elastico neutrone-protone è basato su liste di fisica standard validate in studi precedenti [6]. Sono abilitati: la diffusione elastica $n-p$, la diffusione elastica $n-C$, le reazioni nucleari (n, α) e (n, p) sul carbonio, il trasporto di fotoni ottici con rifrazione e riflessione speculare di Fresnel alle superfici ottiche, l'assorbimento nel bulk. I fotoni ottici vengono generati direttamente tramite la sorgente GPS (*General Particle Source*), il generatore di particelle primarie standard di Geant4, che consente di definirne posizione, energia e distribuzione angolare senza dover simulare il processo di scintillazione vero e proprio.

2.3.2 Il sistema ottico simulato

La geometria del sistema ottico è implementata in Geant4 tramite file GDML, che codificano individualmente i parametri geometrici (raggio di curvatura, spessore, orientazione) di ciascuna lente pianoconvessa UVFS del catalogo Thorlabs descritto in Sezione 2.2.2 (Tabella 2.1), permettendo di sostituire sistematicamente la coppia di lenti simulata. Il volume di simulazione è una scatola cubica di lato 1000 mm riempita d'aria. Lungo l'asse x , nell'ordine, si trovano la sorgente di fotoni, la prima lente (posizione x_1), la seconda lente (posizione x_2) e il fotocatodo GaAsP di dimensioni $16 \times 16 \text{ mm}^2$.

La sorgente emette fotoni ottici monocromatici a 2.5 eV ($\lambda \approx 496 \text{ nm}$, prossimo al picco di emissione del BC-408) con distribuzione angolare isotropa nel semispazio rivolto verso il detector ($\vartheta \in [0^\circ, 90^\circ]$ rispetto all'asse $+x$). I processi fisici attivi sono la rifrazione e la riflessione speculare di Fresnel alle superfici ottiche e l'assorbimento nel bulk dello scintillatore; i processi di scintillazione ed effetto Cherenkov sono disabilitati, poiché i fotoni vengono generati direttamente dalla sorgente GPS.

3 Selezione del modello di lenti ed esperimento di validazione

3.1. Selezione della tipologia di lenti per efficienza geometrica

3.1.1 Definizione dell'efficienza geometrica

Definizione 3.1.1. Si definisce *efficienza geometrica* di una configurazione ottica (m_1, m_2, x_1, x_2) il rapporto

$$\eta(m_1, m_2, x_1, x_2) = \frac{N_{\text{hit}}}{N_{\text{tot}}} \quad (3.1)$$

tra il numero di fotoni N_{hit} che raggiungono il fotocatodo e il numero N_{tot} di fotoni generati dalla sorgente, per una data coppia di modelli di lenti (m_1, m_2) posizionate rispettivamente a x_1 e x_2 lungo l'asse ottico.

Questa quantità dipende da tre contributi fisici distinti: l'accettanza angolare del sistema – determinata dall'apertura numerica delle lenti e dalla loro distanza dalla sorgente – le perdite per riflessione alle superfici ottiche (coefficiente di Fresnel per luce non polarizzata), e le perdite per assorbimento nel volume delle lenti. Per il range spettrale e i materiali considerati, le perdite di assorbimento sono trascurabili rispetto alle prime due, e la riflessione alle superfici è dominata dall'efficienza di focalizzazione.

3.1.2 Dipendenza dal modello di lente

Il sistema a due lenti sottili equivale, per la formula dei sistemi in cascata [17], a una singola lente con potenza ottica

$$\frac{1}{f_{\text{sys}}} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{d}{f_1 f_2} \quad (3.2)$$

dove d è la separazione tra i piani principali. Per una data distanza sorgente-rivelatore fissata, ogni valore di f_{sys} corrisponde a un continuo di coppie (f_1, f_2, x_1, x_2) fisicamente compatibili con la messa a fuoco. La scelta dei modelli di lenti determina quale sottoinsieme di questo continuo sia effettivamente accessibile, in ragione della natura discreta del catalogo.

Lenti biconvesse presentano curvatura simmetrica e minimizzano le aberrazioni sferiche per oggetti a distanza finita per il criterio di minima deviazione. Lenti pianoconvesse hanno un lato piano e un lato curvo: il verso di montaggio influenza il profilo delle aberrazioni.

3.1.3 Simulazione e metrica di selezione

Lo studio esplora sistematicamente tutte le coppie (m_1, m_2) del catalogo di lenti e, per ciascuna coppia, l'intera griglia di posizioni (x_1, x_2) definita per l'ottimizzazione: per ogni combinazione si generano N_{tot} fotoni da una sorgente rettangolare distribuita spazialmente su una sezione trasversale $60 \times 10 \text{ mm}^2$. La dimensione assiale 60 mm coincide con il lato dello scintillatore plastico; quella trasversale di 10 mm campiona la metà della faccia (20 mm): per simmetria cilindrica del sistema ottico, i valori di η nella metà restante si ottengono per riflessione e non aggiungono informazione indipendente (cfr. Sezione 4.1.4). Le coppie per cui la distanza tra i piani ottici principali scende al di sotto della somma dei semi-spessori di centro sono automaticamente escluse per incompatibilità geometrica.

È importante precisare a quale posizione del rivelatore viene calcolata η . Il sistema RIPTIDE opera in modalità di *fuoco mobile*: per ciascuna configurazione (m_1, m_2, x_1, x_2) il fotocatodo non è collocato a una distanza fissa e predeterminata, ma a una stima del piano di fuoco ottenuta dalla formula delle lenti sottili applicata alla coppia (f_1, f_2, x_1, x_2) . Questa stima geometrica, sufficientemente accurata per un confronto relativo tra configurazioni, costituisce il primo passo di uno studio a più livelli: la classifica preliminare in efficienza ottenuta in questa fase seleziona un sottoinsieme ristretto di coppie candidate, il cui piano di fuoco viene poi determinato con precisione tramite simulazione Geant4 completa (Sezione 4.4.3) e le cui metriche ottiche vengono caratterizzate in dettaglio nel capitolo successivo.

Sia $\mathcal{G}(m_1, m_2)$ l'insieme dei punti di griglia (x_1, x_2) geometricamente compatibili per la coppia di lenti (m_1, m_2) , e $|\mathcal{G}(m_1, m_2)|$ la sua cardinalità. Una prima versione della metrica di selezione considerava la sola efficienza media sulla griglia,

$$\bar{\eta}(m_1, m_2) = \frac{1}{|\mathcal{G}(m_1, m_2)|} \sum_{(x_1, x_2) \in \mathcal{G}} \eta(m_1, m_2, x_1, x_2), \quad (3.3)$$

selezionando la coppia che la massimizza. Questo criterio può però premiare coppie che raggiungono un'efficienza elevata solo in una regione ristretta della griglia (x_1, x_2) , con un crollo marcato altrove: una configurazione di questo tipo è fragile rispetto a piccoli errori di posizionamento meccanico delle lenti, anche a parità di $\bar{\eta}$

con una coppia più uniforme.

Si adotta pertanto un punteggio di tipo *mean-variance / lower confidence bound* (LCB), che penalizza esplicitamente la dispersione di η sulla griglia oltre a premiarne il valore medio. La formulazione ricalca il classico trade-off rendimento/rischio di Markowitz nella selezione di portafoglio [18], qui applicato come criterio LCB per una selezione “sicura” sotto incertezza statistica nello spirito dei criteri di confidenza usati nei problemi bandit [19]:

$$\text{score}(m_1, m_2) = \bar{\eta}(m_1, m_2) - k \sigma_{\eta}(m_1, m_2), \quad (3.4)$$

dove $\sigma_{\eta}(m_1, m_2)$ è la deviazione standard di $\eta(m_1, m_2, x_1, x_2)$ sui punti di $\mathcal{G}(m_1, m_2)$ e k è un coefficiente di avversione al rischio. Si adotta $k = 0.5$, calibrato sulla distribuzione empirica del coefficiente di variazione $\sigma_{\eta}/\bar{\eta}$ (mediana 0.71 su 225 coppie), in modo da penalizzare la varianza eccessiva senza sacrificare troppo l’efficienza assoluta. Si seleziona la coppia (m_1^*, m_2^*) che massimizza score; rispetto al criterio basato sulla sola $\bar{\eta}$, questo approccio privilegia esplicitamente le coppie più uniformi sull’intera griglia, indice di maggiore robustezza a errori di posizionamento meccanico. La Tabella 3.1 riporta la classifica delle prime 10 coppie (m_1, m_2) ottenuta secondo questo criterio.

Tabella 3.1: Classifica delle prime 10 coppie di lenti (m_1, m_2) secondo lo score (cfr. testo), calcolata sull’intera griglia (x_1, x_2) valida per ciascuna coppia. $\bar{\eta}$ e σ_{η} sono media e deviazione standard dell’efficienza sui punti di griglia della coppia.

Rank	Lente 1	Lente 2	score	$\bar{\eta}$	σ_{η}
1	LA4078	LA4545	0.010539	0.016861	0.012645
2	LA4078	LB4553	0.010478	0.018464	0.015972
3	LB4553	LA4545	0.010207	0.016349	0.012283
4	LA4078	LA4078R	0.010188	0.018652	0.016927
5	LA4078	LA4545R	0.010180	0.016255	0.012149
6	LB4553	LA4545R	0.010030	0.015990	0.011920
7	LB4553	LB4553	0.009970	0.017580	0.015219
8	LA4078R	LB4553	0.009935	0.017180	0.014489
9	LA4078	LB4821	0.009913	0.015675	0.011525
10	LA4078R	LA4078R	0.009765	0.017485	0.015439

Per la coppia di rank 1, la Figura 3.1 mostra la mappa 2D dell’efficienza $\eta(x_1, x_2)$ sulla griglia di posizioni, illustrando il compromesso tra picco di efficienza e uniformità sulla griglia che ha motivato l’adozione del punteggio LCB.

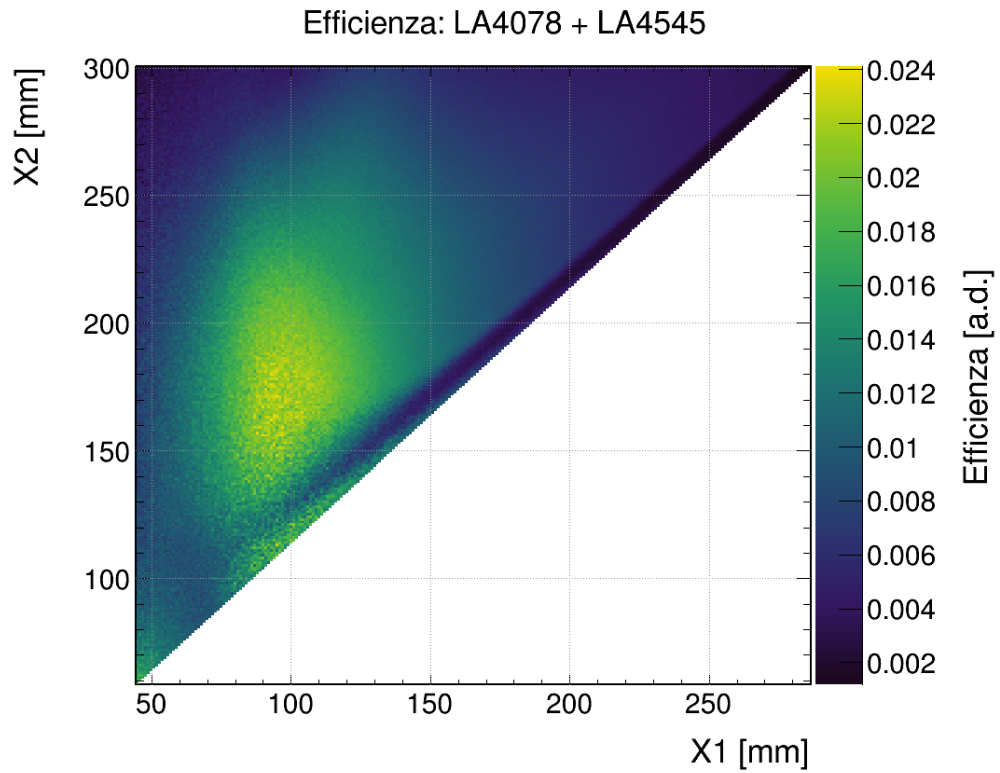


Figura 3.1: Mappa 2D dell'efficienza geometrica $\eta(x_1, x_2)$ sulla griglia di posizioni per la coppia di lenti selezionata (rank 1, Tabella 3.1): mostra come l'efficienza vari con la posizione delle lenti lungo l'asse ottico, illustrando il compromesso tra efficienza di picco e uniformità sulla griglia alla base del criterio di selezione LCB.

3.2. Esperimento 1: validazione dell'efficienza geometrica

3.2.1 Obiettivo

La simulazione Monte Carlo esplorativa presentata nella Sezione 3.1 fornisce una previsione quantitativa dell'efficienza geometrica per ogni coppia di modelli e posizioni di lenti. Prima di procedere con la caratterizzazione ottica di dettaglio (Capitolo 4), è necessario verificare che questa previsione sia consistente con il comportamento osservato sperimentalmente, almeno a livello qualitativo: la configurazione identificata come ottimale deve raccogliere più luce di una configurazione sub-ottimale in misura statisticamente significativa.

Il primo esperimento condotto in laboratorio non mira a una calibrazione assoluta dell'efficienza – per la quale sarebbero necessarie misure di flusso assoluto della sorgente – bensì a una verifica relativa. Si confrontano due configurazioni di lenti, denominate *Good* e *Bad*, in termini di integrale del segnale luminoso sulla regione di interesse (ROI) del sensore e, in modo indipendente, tramite il rapporto frame-to-frame tra le due serie di acquisizioni.

3.2.2 Setup sperimentale

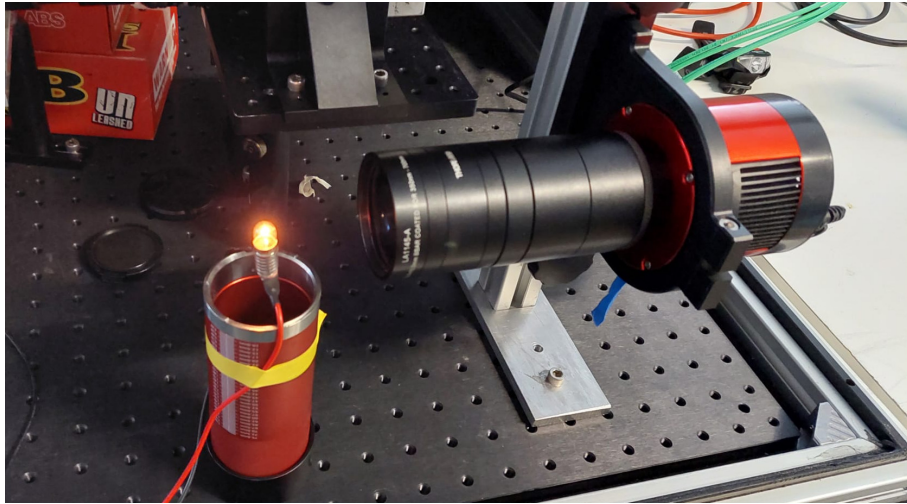


Figura 3.2: Vista d'insieme dell'apparato sperimentale del primo esperimento condotto: sorgente LED, apparato ottico e telecamera CMOS ZWO ASI294MM Pro in posizione fissa. Le configurazioni *Good* e *Bad* si differenziano unicamente per la disposizione delle lenti.

Per ciascuna delle tre condizioni sperimentali – *Good*, *Bad* e *Background* – vengono acquisiti 10 frame FITS a 16 bit con lo stesso sensore in posizione fissa. Il range di-

namico del sensore è $[0, 65535]$ ADU con codifica FITS standard ($BZERO = 32768$, $BSCALE = 1$).

La sorgente luminosa è mantenuta a distanza fissa dalla prima lente per tutte le condizioni, garantendo che l'angolo solido subteso dalla sorgente sia invariato nel confronto. Questa scelta minimizza il bias sistematico legato alla schermatura tubolare dell'apparato, non modellata nella simulazione. I frame di background vengono acquisiti con la sorgente schermata nelle stesse condizioni ambientali.

Nello spazio delle posizioni (x_1, x_2) discusso nella Sezione 3.1 e illustrato in Figura 3.1 per la coppia teoricamente ottimale, *Good* e *Bad* corrispondono a due punti sulla stessa colonna verticale: la distanza sorgente–Lente 1 è fissata a $x_1 = 60$ mm per entrambe le condizioni (come richiesto sopra), mentre la posizione della Lente 2 varia da $x_2^{\text{good}} = 140$ mm a $x_2^{\text{bad}} = 100$ mm. Le lenti impiegate, LA4078 (Lente 1) e LA4464R (Lente 2), sono la coppia effettivamente disponibile in laboratorio e non coincidono con la coppia rank 1 di Tabella 3.1 (LA4078–LA4545): la Figura 3.1 va quindi intesa come illustrazione qualitativa del compromesso (x_1, x_2) sull'efficienza, non come mappa calcolata per questa specifica coppia. A differenza dello studio di Sezione 3.1, dove il fotocatodo segue una stima di fuoco mobile per ciascuna configurazione (cfr. discussione a inizio di quella sezione), qui il sensore CMOS occupa una posizione fisica fissa $x_{\text{det}} \approx 180$ mm per tutte e tre le condizioni sperimentali – lo stesso valore di riferimento adottato per gli esperimenti condotti in seguito (Capitolo 4).

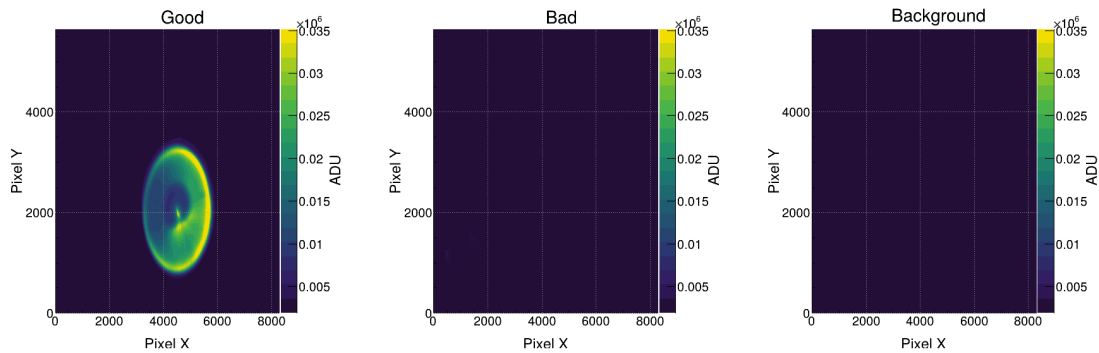


Figura 3.3: Mappe 2D della media σ -clipped dei 10 frame acquisiti per le tre condizioni sperimentali *Good*, *Bad* e *Background* (da sinistra a destra), utilizzate come base per la successiva sottrazione del fondo e il confronto del segnale integrato.

3.2.3 Pipeline di analisi

Le immagini vengono elaborate tramite la seguente catena di analisi.

Lettura FITS e normalizzazione. Il codice realizzato è in grado di leggere direttamente le immagini FITS bidimensionali a 16 bit prodotte dalla camera CMOS e, per ciascun pixel, converte il valore memorizzato nel valore effettivo utilizzando i parametri di scala definiti nell'intestazione FITS.

Stacking sigma-clipping. I 10 frame di ciascuna serie vengono combinati con un filtro 3σ iterato tre volte [20]. Per ogni pixel si calcola iterativamente la media μ_k e la deviazione standard σ_k ; i valori che distano più di $3\sigma_k$ dalla media vengono esclusi e la statistica viene ricalcolata sui valori sopravvissuti. Questo procedimento elimina raggi cosmici, hot pixel e artefatti impulsivi senza distorcere il valore atteso del segnale.

Sottrazione del fondo. Il frame medio di background ottenuto dalla combinazione delle immagini (qui di seguito definito frame stackato) viene sottratto pixel per pixel dalle immagini *Good* e *Bad*, con propagazione quadratica dell'incertezza: $\sigma_{\Delta}^2 = \sigma_s^2 + \sigma_{bg}^2$.

Integrazione nella ROI. Il segnale netto viene sommato sull'area rettangolare della ROI configurabile, ottenendo i valori integrali I_{good} e I_{bad} in unità ADU·px.

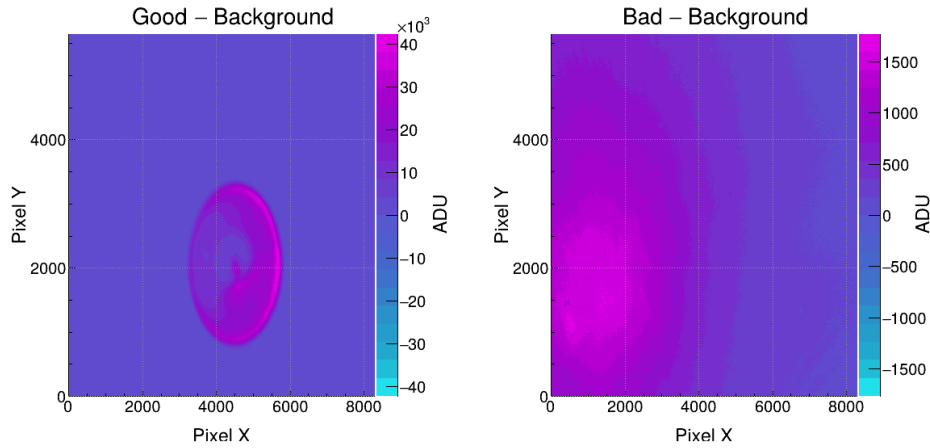


Figura 3.4: Mappe del segnale netto dopo sottrazione del fondo, *Good*–Background (sinistra) e *Bad*–Background (destra), da cui vengono integrati i valori I_{good} e I_{bad} nella ROI di analisi.

3.2.4 Metodo 1: stima dell'incertezza per integrazione di immagini staccate

L'integrale del segnale sulla ROI di n_{px} pixel è la somma di variabili aleatorie indipendenti (i pixel del frame stackato), per cui l'incertezza sull'integrale si ottiene per

propagazione in quadratura:

$$\sigma_I = \sqrt{\sum_{(x,y) \in \text{ROI}} \sigma_{\Delta,x,y}^2} \quad (3.5)$$

dove $\sigma_{\Delta,x,y}$ è l'incertezza pixel-by-pixel propagata dalla sottrazione del fondo. La significatività del confronto è espressa tramite il rapporto

$$\mathcal{R} = \frac{I_{\text{good}}}{I_{\text{bad}}} \quad (3.6)$$

la cui incertezza relativa vale

$$\frac{\sigma_{\mathcal{R}}}{\mathcal{R}} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_{I_{\text{good}}}}{I_{\text{good}}}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{I_{\text{bad}}}}{I_{\text{bad}}}\right)^2} \quad (3.7)$$

3.2.5 Metodo 2: fluttuazioni frame-to-frame

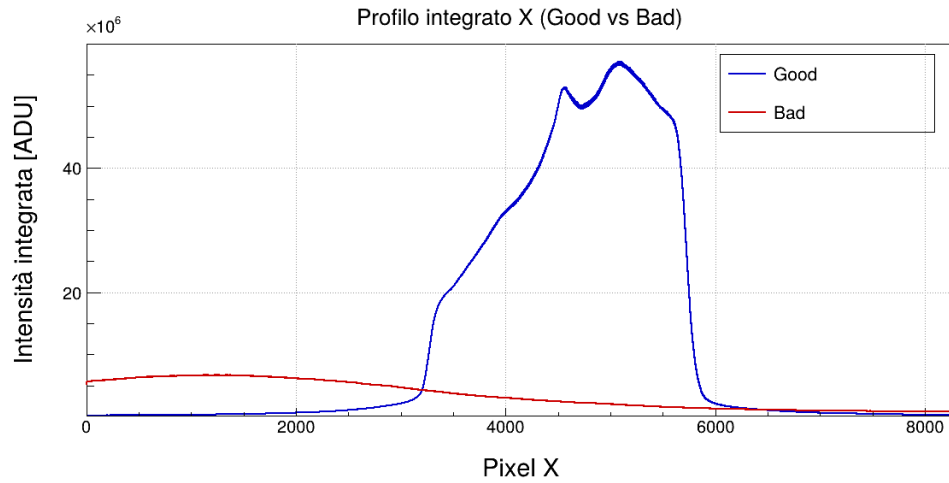
Il Metodo 1 stima l'incertezza statistica pura per propagazione analitica; tuttavia le fluttuazioni sistematiche inter-frame – variazioni dell'intensità della sorgente, deriva termica del sensore, rumore di lettura correlato – non sono catturate da σ_{Δ} . Per quantificarle si calcola, per ciascuno degli N frame, il rapporto individuale

$$R_k = \frac{I_k^{\text{good}} - I_k^{\text{bg}}}{I_k^{\text{bad}} - I_k^{\text{bg}}}, \quad k = 1, \dots, N \quad (3.8)$$

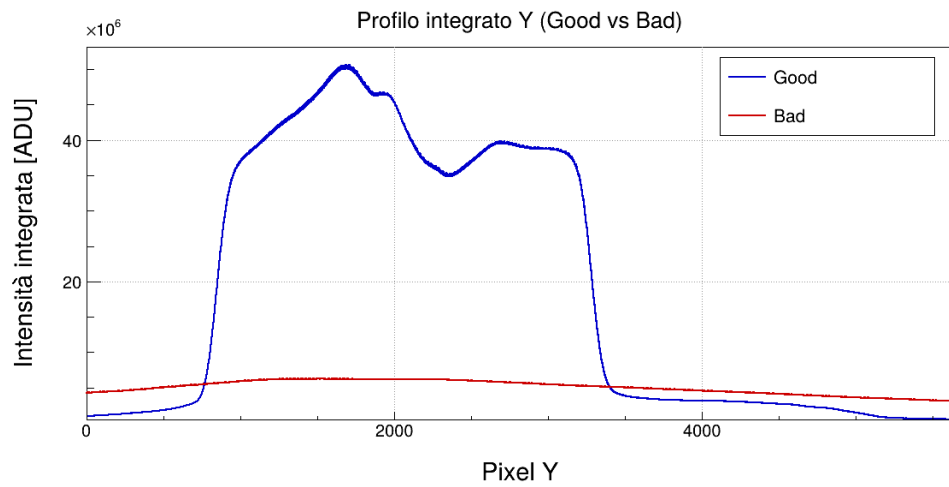
Ai valori $\{R_k\}$ viene applicato un filtro outlier a $n\sigma$ per eliminare frame affetti da artefatti impulsivi; sui $N_{\text{used}} \leq N$ valori sopravvissuti si calcolano la media campionaria $\bar{R}$, la deviazione standard sperimentale σ_R e l'errore sulla media $\sigma_{\bar{R}} = \sigma_R / \sqrt{N_{\text{used}}}$.

Poiché $\sigma_{\bar{R}}$ include le fluttuazioni sistematiche inter-frame, esso costituisce una stima più conservativa e fisicamente significativa dell'incertezza rispetto a $\sigma_{\mathcal{R}}$.

Risultati Esperimento 1. Metodo 1 — $I_{\text{good}} = 1.0687 \times 10^{11} \text{ ADU} \cdot \text{px}$; $I_{\text{bad}} = 2.8529 \times 10^{10} \text{ ADU} \cdot \text{px}$; $\mathcal{R} = 3.7460 \pm 0.0001$ (incertezza puramente statistica, $\sigma_{\mathcal{R}}/\mathcal{R} \approx 0.0016\%$). Metodo 2 — $\bar{R} = 3.7460 \pm 0.0003$; $\sigma_R = 0.001$ ($N_{\text{used}} = 10$ frame). Come atteso (cfr. discussione a inizio Sezione 3.2), $\sigma_{\bar{R}} \gg \sigma_{\mathcal{R}}$: l'incertezza statistica pixel-by-pixel è trascurabile rispetto alle fluttuazioni sistematiche frame-to-frame, che dominano l'incertezza totale sul confronto *Good/Bad* e sono pertanto assunte come stima di riferimento nel seguito.



(a) Profilo integrato lungo l'asse X.



(b) Profilo integrato lungo l'asse Y.

Figura 3.5: Profili integrati del segnale netto lungo X (pannello A) e lungo Y (pannello B) per le configurazioni *Good* (blu) e *Bad* (rosso), sulla ROI di analisi.

Il rapporto $\bar{R} = 3.7460 \pm 0.0003$ è incompatibile con l'unità a $(\bar{R}-1)/\sigma_{\bar{R}} \approx 9.2 \times 10^3 \sigma$, ben oltre la soglia di significatività statistica richiesta dall'obiettivo dell'esperimento (cfr. inizio Sezione 3.2): la configurazione *Good* raccoglie una quantità di luce sostanzialmente e significativamente maggiore della configurazione *Bad*.

Questo primo esperimento verifica quindi, in modo statisticamente inequivocabile, il principio fisico su cui si fonda l'intera metrica di selezione – che l'efficienza geometrica η dipenda in modo sostanziale dal posizionamento delle lenti lungo l'asse ottico (Sezione 3.1).

4 Caratterizzazione ottica del sistema ed esperimenti di validazione

4.1. Caratterizzazione della Point Spread Function

4.1.1 Dalla selezione del modello all'ottimizzazione della posizione

Con i modelli di lenti selezionati nel Capitolo 3, il problema si riduce a identificare la coppia di posizioni (x_1^*, x_2^*) che minimizza le aberrazioni ottiche di campo e garantisce la migliore linearità della risposta. A questo scopo si caratterizza la PSF del sistema – la distribuzione spaziale dei fotoni sul fotocatodo per una sorgente puntiforme, valutata al piano di fuoco x^* di ciascuna configurazione – su un'ampia griglia di posizioni sorgente $(x_{\text{src}}, y_{\text{src}})$ per ogni configurazione (x_1, x_2) della griglia di ottimizzazione.

Definizione 4.1.1. La PSF del sistema ottico per la configurazione (x_1, x_2) e la posizione sorgente $(x_{\text{src}}, y_{\text{src}})$ è la distribuzione di probabilità $\text{PSF}(y_{\text{hit}}, z_{\text{hit}} \mid x_{\text{src}}, y_{\text{src}}, x_1, x_2)$ della posizione di impatto $(y_{\text{hit}}, z_{\text{hit}})$ di un fotone sul fotocatodo, condizionata alla posizione della sorgente e alla configurazione ottica.

4.1.2 Setup della simulazione PSF

Per ogni coppia (x_1, x_2) sulla griglia di ottimizzazione e per ogni punto $(x_{\text{src}}, y_{\text{src}})$ della griglia di campionamento sorgente, vengono inviati $N = 10000$ fotoni da una sorgente puntiforme e ne vengono registrate le coordinate di impatto $(y_{\text{hit}}, z_{\text{hit}})$ sul fotocatodo, per ciascun fotone rivelato. La griglia di campionamento copre:

$$y_{\text{src}} \in [0, 10\sqrt{2}] \text{ mm}, \quad \Delta y = 0.5 \text{ mm}, \quad x_{\text{src}} \in [-30, +30] \text{ mm}, \quad \Delta x = 0.5 \text{ mm} \quad (4.1)$$

Il limite superiore $r_{\text{max}} = 10\sqrt{2} \approx 14.14$ mm corrisponde alla diagonale della sezione trasversale 10×10 mm già adottata come semiampiezza di campionamento nel Capitolo 3 (Sezione 3.1), ed è quindi la naturale estensione radiale di quella griglia. Questo valore risulta inoltre sufficiente a garantire che qualsiasi traccia di lunghezza $L = 10$ mm a distanza trasversale $y_0 \leq 10$ mm dall'asse sia interamente coperta dalla griglia:

$$\sqrt{y_0^2 + (L/2)^2} \leq \sqrt{10^2 + 5^2} \approx 11.18 \text{ mm} < r_{\text{max}} \quad (4.2)$$

4.1.3 Stima statistica della PSF

L'estrazione dei parametri statistici della PSF calcola, per ogni simulazione $(x_{\text{src}}, y_{\text{src}}, x_1, x_2)$, i parametri della distribuzione della posizione di impatto tramite un filtro outlier (vale a dire mediante l'identificazione dei valori anomali) basato sulla distanza di Mahalanobis a 3σ con 4 iterazioni [21]; l'adequatezza di questa soglia per una distribuzione a priori non necessariamente gaussiana è verificata a posteriori nella Sezione 4.1.6.

Centroide e matrice di covarianza della distribuzione

Sia $\{(y_i, z_i)\}_{i=1}^N$ l'insieme delle posizioni di impatto in una data simulazione, dopo applicazione del filtro outlier con $N_{\text{filt}} \leq N$ impatti superstiti. Il centroide della PSF è:

$$\boldsymbol{\mu} = \frac{1}{N_{\text{filt}}} \sum_{i=1}^{N_{\text{filt}}} \begin{pmatrix} y_i \\ z_i \end{pmatrix} \quad (4.3)$$

e la matrice di covarianza della distribuzione dei fotoni (estimatore campionario) è:

$$\boldsymbol{\Sigma} = \frac{1}{N_{\text{filt}} - 1} \sum_{i=1}^{N_{\text{filt}}} \begin{pmatrix} (y_i - \mu_y)^2 & (y_i - \mu_y)(z_i - \mu_z) \\ (y_i - \mu_y)(z_i - \mu_z) & (z_i - \mu_z)^2 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \sigma_y^2 & \sigma_{yz} \\ \sigma_{yz} & \sigma_z^2 \end{pmatrix} \quad (4.4)$$

Dall'incertezza sulla distribuzione all'incertezza sul centroide

Un punto fondamentale, che ha ricadute dirette su tutte le analisi di questo capitolo, riguarda la distinzione tra la covarianza della distribuzione dei fotoni $\boldsymbol{\Sigma}$ e l'incertezza statistica sul centroide $\boldsymbol{\mu}$.

La matrice $\boldsymbol{\Sigma}$ descrive la dispersione spaziale della PSF, ossia quanto la macchia luminosa è estesa sul fotocatodo per una sorgente puntiforme: è una proprietà ottica del sistema, indipendente dal numero di fotoni generati. L'incertezza sul centroide è invece l'incertezza con cui si stima $\boldsymbol{\mu}$ da N_{filt} campioni. Per variabili aleatorie indipendenti e identicamente distribuite (i.i.d.), la matrice di covarianza dello stimatore $\hat{\boldsymbol{\mu}}$ è [21]:

$$\text{Cov}(\hat{\boldsymbol{\mu}}) = \frac{\boldsymbol{\Sigma}}{N_{\text{filt}}} \quad (4.5)$$

Le covarianze usate come pesi nel fit ODR (Orthogonal Distance Regression) delle tracce devono essere le covarianze dello stimatore $\hat{\boldsymbol{\mu}}$ – quindi $\boldsymbol{\Sigma}/N_{\text{filt}}$ – non la covarianza della distribuzione $\boldsymbol{\Sigma}$.

4.1.4 Simmetria cilindrica e rotazione 3D della PSF

Il sistema ottico presenta simmetria di rotazione attorno all'asse x . Dato un punto generico (x, y, z) di una traccia nello scintillatore, si definiscono la distanza radiale dall'asse $r = \sqrt{y^2 + z^2}$ e l'angolo azimutale $\varphi = \arctan(z/y)$. La PSF viene simulata per $\varphi = 0$ (ossia $z = 0$) su tutta la griglia (x, r) , e il risultato è generalizzato a φ arbitrario tramite rotazione. Questa scelta comporta un netto vantaggio computazionale: senza sfruttare la simmetria cilindrica, occorrerebbe campionare l'intero volume sorgente $(x_{\text{src}}, y_{\text{src}}, z_{\text{src}})$, ossia l'intera posizione assiale combinata con l'intero piano trasversale (y, z) entro il disco di raggio r_{max} ; con la stessa risoluzione della griglia adottata (Sezione 4.1, $\Delta x = \Delta r = 0.5$ mm, ~ 120 posizioni assiali e ~ 28 posizioni radiali) questo richiederebbe dell'ordine di 3×10^5 punti sorgente, proporzionali al prodotto tra il numero di posizioni assiali e l'area del disco trasversale. Sfruttando la simmetria cilindrica è invece sufficiente campionare la sola superficie (x, r) – posizione assiale e distanza radiale, senza dipendenza dall'angolo azimutale – riducendo il numero di punti sorgente da simulare di quasi due ordini di grandezza (un fattore ~ 90), a poche migliaia.

Per simmetria circolare perfetta, una sorgente a $\varphi = 0$ produce un centroide $\boldsymbol{\mu}^{(0)} = (\mu_y^{(0)}, 0)^\top$. Per una sorgente a φ arbitrario il centroide è:

$$\boldsymbol{\mu} = R(\varphi) \boldsymbol{\mu}^{(0)} = \begin{pmatrix} \mu_y^{(0)} \cos \varphi \\ \mu_y^{(0)} \sin \varphi \end{pmatrix} \quad (4.6)$$

e la matrice di covarianza si trasforma tensorialmente come $\boldsymbol{\Sigma} = R(\varphi) \boldsymbol{\Sigma}^{(0)} R(\varphi)^\top$ [21].

4.1.5 Interpolazione bilineare del database PSF

La risposta per un punto (x, y) non campionato direttamente nella griglia di simulazione si ottiene per interpolazione bilineare tra i quattro nodi adiacenti nella griglia (x_i, r_j) . Le covarianze vengono interpolate componente per componente. In prossimità dell'asse ottico ($y \rightarrow 0$), il modello adotta un'estrapolazione lineare verso il centro con isotropizzazione della covarianza:

$$\boldsymbol{\Sigma}(y) \xrightarrow{y \rightarrow 0} \bar{\sigma}^2 \mathbf{I}, \quad \bar{\sigma}^2 = \frac{1}{2}(\sigma_y^2 + \sigma_z^2) \quad (4.7)$$

Questa condizione riflette la simmetria cilindrica del sistema: nell'asse ottico la PSF deve essere isotropa, e qualsiasi anisotropia residua nel database è un artefatto della discretizzazione.

4.1.6 Ipotesi di gaussianità della PSF e robustezza del metodo

Per distinguere un nucleo intrinsecamente non gaussiano da un nucleo gaussiano accompagnato da una coda di contaminazione si è seguita la procedura seguente. Il metodo di stima tramite $(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ è statisticamente ottimale se la distribuzione della posizione di impatto è gaussiana bivariata. Una prima verifica di questa ipotesi, limitata alla regione del sensore per una singola configurazione, aveva prodotto un'indicazione qualitativa di buon accordo. Per una validazione quantitativa e statisticamente rigorosa sull'intera estensione del piano del fotocatodo, per ogni simulazione Monte Carlo disponibile si stima la coppia $(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ locale con lo stesso metodo di stima statistica della PSF (filtro Mahalanobis iterativo a 3σ , Sezione 4.1.3), quindi si calcola per ogni impatto grezzo la distanza di Mahalanobis quadrata D^2 rispetto a tale stima. Sotto l'ipotesi nulla di gaussianità bivariata, D^2 segue una distribuzione χ^2 con 2 gradi di libertà – uno per ciascuna delle due coordinate del piano del fotocatodo –, indicata $D^2 \sim \chi_2^2$, indipendentemente dalla covarianza specifica della simulazione: questo permette di raggruppare (*pooling*) i valori D^2 di tutte le simulazioni in un unico campione. Il confronto tra tali valori e la distribuzione teorica χ_2^2 avviene tramite un Q-Q plot (*quantile-quantile plot*): i quantili empirici del campione D^2 vengono riportati in ascissa contro i corrispondenti quantili teorici della χ_2^2 , cosicché un accordo perfetto con l'ipotesi di gaussianità produce punti allineati sulla diagonale. È così possibile stimare la curtosi in eccesso multivariata di Mardia

$$\gamma_2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{D_i^4}{8} - 1, \quad (4.8)$$

dove il fattore 8 al denominatore è $d(d+2)$ per $d = 2$ dimensioni (le due coordinate del piano del fotocatodo), definita in modo tale che $\gamma_2 = 0$ è il valore tipico di una gaussiana [22].

Il test di Mardia calcolato sul campione grezzo completo è però estremamente sensibile a qualunque contaminazione, per quanto piccola. Per distinguere un nucleo non gaussiano da un nucleo gaussiano affetto da una coda di contaminazione, ogni impatto viene classificato tramite un cutoff Bonferroni-corretto sulla coda esatta di χ_2^2 [23]: gli impatti con D^2 oltre il cutoff sono contrassegnati come contaminazione al livello di confidenza *family-wise* $1 - \alpha_{\text{fw}}$, e γ_2 viene ricalcolata solo sul nucleo residuo (D^2 entro il cutoff).

Applicando questa procedura a una configurazione rappresentativa (coppia LA4078 + LA4464R, $x_1 = 100$ mm, $x_2 = 150$ mm, $N_{\text{run}} = 10$ raggruppate, $N_{\text{hit}} = 23\,778\,630$), il cutoff Bonferroni a $\alpha_{\text{fw}} = 0.05$ risulta $D^2 > 39.96$, che classifica come contamina-

zione 18 290 impatti su 23 778 630 (0.077 %). Sul nucleo residuo ($N_{\text{core}} = 23\,760\,340$) si ottiene $\gamma_2 = -0.1358 \pm 0.0002$: un valore piccolo in termini assoluti, ma che, data la dimensione campionaria di ordine 10^7 , risulta formalmente incompatibile con $\gamma_2 = 0$ a molte deviazioni standard. La distribuzione del nucleo è quindi leggermente platicurtica rispetto a una gaussiana bivariata, ma l'entità pratica della deviazione è trascurabile e non compromette l'approssimazione gaussiana adottata nella stima.

Il Q-Q plot (Figura 4.3) mostra la firma tipica di questo scenario: un andamento sotto la diagonale, concavo, per il nucleo, seguito da un salto quasi verticale oltre il cutoff dovuto ai punti di contaminazione — coerente con una mistura $(1 - \varepsilon)\mathcal{N}(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}) + \varepsilon \cdot (\text{coda estranea})$ piuttosto che con code pesanti di un'unica gaussiana. L'origine fisica della contaminazione è la riflessione parziale di Fresnel alle interfacce lente-aria (fisica ottica di Geant4, riflettività di default $\sim 4\%$ per superficie in UVFS): una doppia riflessione tra le due lenti ha probabilità dell'ordine $4\% \times 4\% \approx 0.16\%$, coerente in ordine di grandezza con la contaminazione osservata (0.077 %).

Questo risultato conferma, con una verifica statisticamente rigorosa e non più limitata al solo sensore, le tre conclusioni operative già adottate: il nucleo della PSF è ben approssimato da una gaussiana bivariata, giustificando l'uso di $(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ nella metrica χ^2 ; il filtro outlier di Mahalanobis a 3σ adottato nella stima statistica della PSF rimuove correttamente la piccola frazione di impatti contaminati senza distorcere il centroide, trattandosi di una contaminazione fisicamente reale (luce spuria da riflessione di Fresnel) e non di un artefatto numerico; la deviazione residua dalla gaussianità nel nucleo, per quanto formalmente significativa data la statistica disponibile, è di entità pratica trascurabile ai fini della stima di $\boldsymbol{\Sigma}$.

L'analisi di gaussianità per la coppia LA4078+LA4464R ($x_1 = 100\text{ mm}$, $x_2 = 150\text{ mm}$, $N_{\text{run}} = 10$ raggruppate, $N_{\text{hit}} = 23\,778\,630$) è riportata nelle tre figure seguenti: distribuzione spaziale degli impatti sul piano del fotocatodo (Figura 4.1), profilo marginale con fit gaussiano (Figura 4.2) e Q-Q plot della distanza di Mahalanobis quadrata (Figura 4.3).

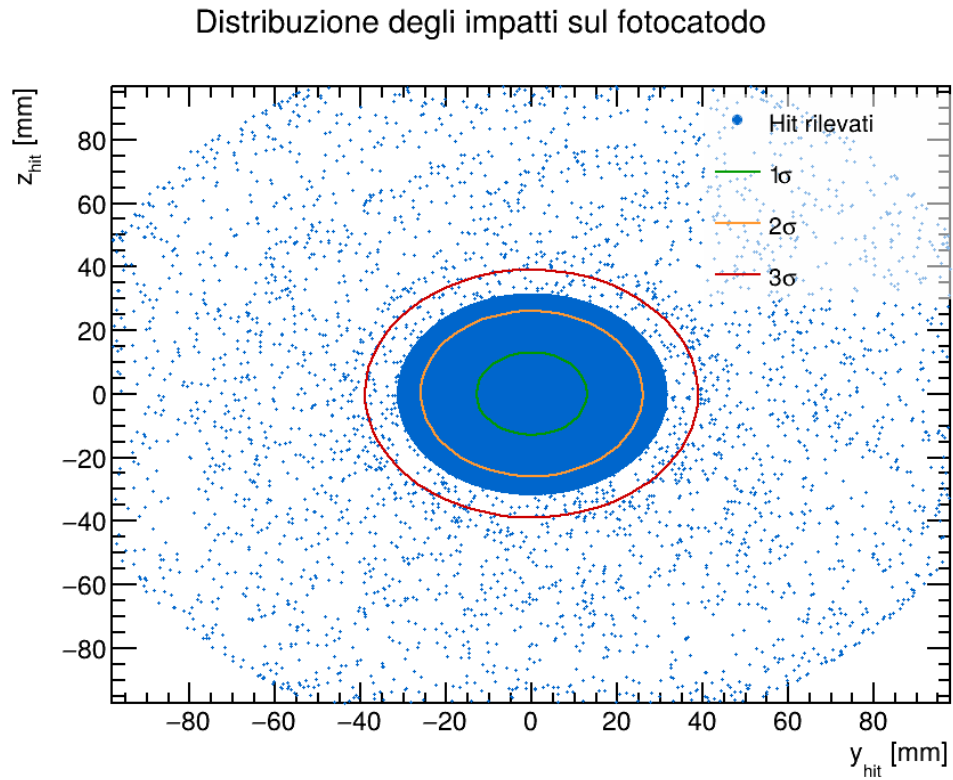


Figura 4.1: Distribuzione spaziale degli impatti grezzi sul piano del fotocatodo per la coppia LA4078+LA4464R ($x_1 = 100$ mm, $x_2 = 150$ mm, $N_{\text{run}} = 10$ raggruppate, $N_{\text{hit}} = 23\,778\,630$), con nucleo gaussiano stretto circondato da un alone sparso di contaminazione a raggi maggiori (primo dei tre grafici dell'analisi di gaussianità della PSF; cfr. Figure 4.1–4.3).

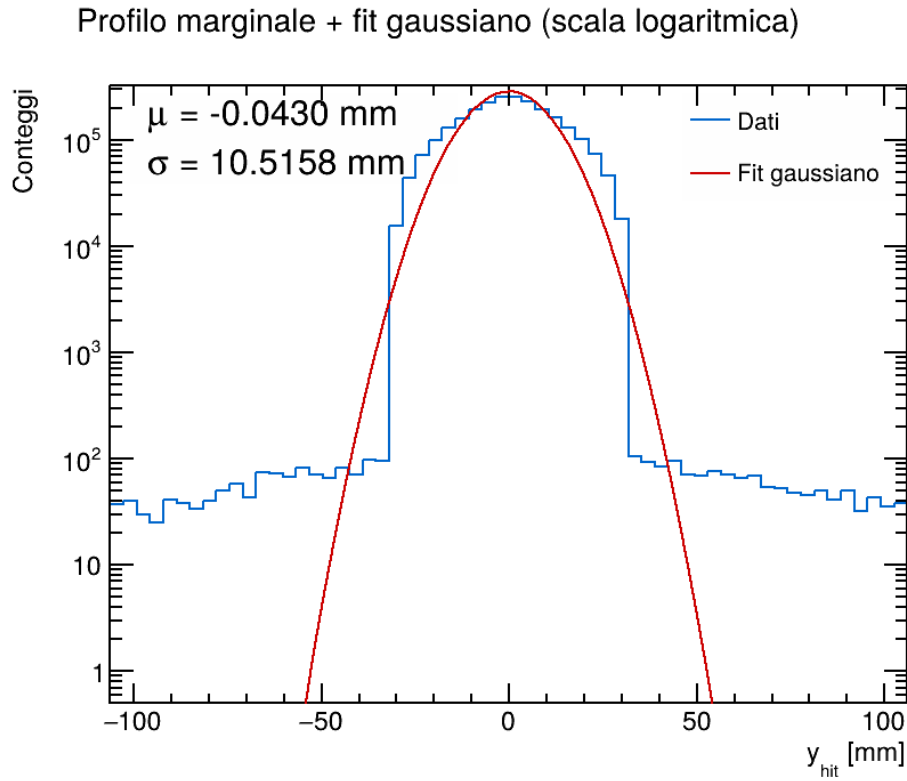


Figura 4.2: Profilo marginale degli impatti grezzi con fit gaussiano sovrapposto (asse delle ordinate in scala logaritmica), stessa configurazione della Figura 4.1 (secondo dei tre grafici dell’analisi di gaussianità della PSF; cfr. Figure 4.1–4.3). Il fit gaussiano restituisce $\mu = -0.0430 \text{ mm}$ e $\sigma = 10.5158 \text{ mm}$ (valori riportati in legenda). La scala logaritmica rende visibili due regimi distinti: nelle code del nucleo, appena oltre la regione ben descritta dal fit, i dati si posizionano leggermente al di sopra della curva gaussiana, la firma visiva della natura platicurtica del nucleo dopo il filtro Bonferroni discussa nel testo; a $|y_{\text{hit}}|$ maggiori, il plateau pressoché piatto a poche decine di conteggi appartiene invece a una popolazione distinta – la contaminazione da riflessione di Fresnel – e non va confuso con le code del nucleo.

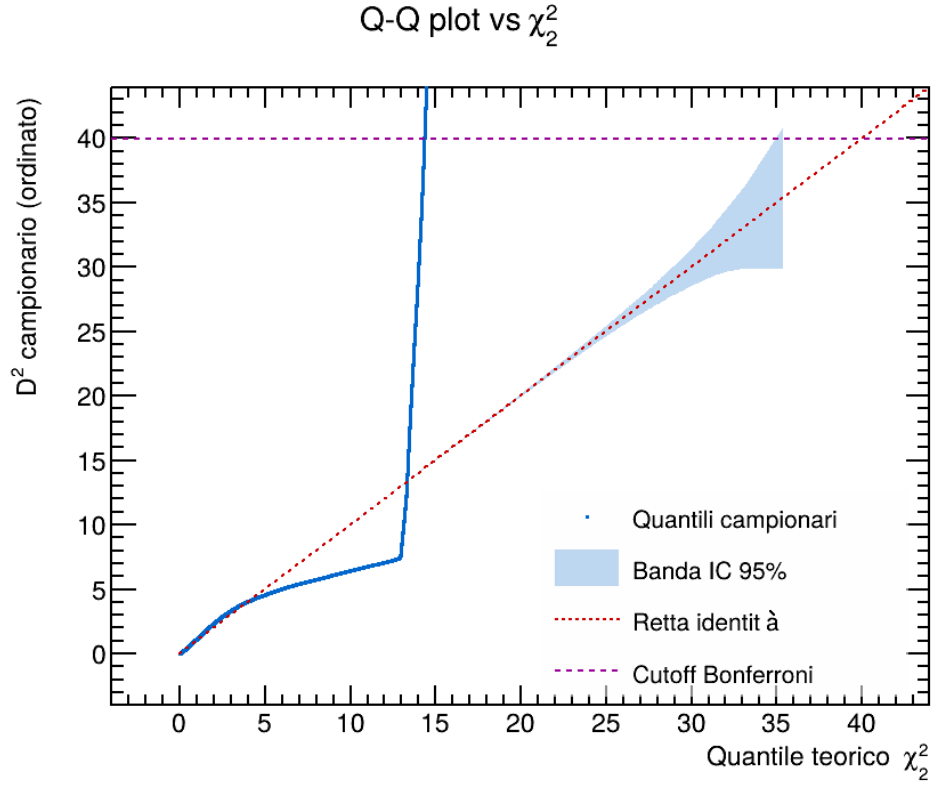


Figura 4.3: Q-Q plot della distanza di Mahalanobis quadrata D^2 rispetto al quantile teorico χ^2_2 , stessa configurazione delle Figure 4.1–4.2, con andamento sub-diagonale concavo nel nucleo seguito dal salto associato alla contaminazione oltre il cutoff Bonferroni ($D^2 > 39.96$, $\alpha_{fw} = 0.05$, linea tratteggiata) (terzo dei tre grafici dell’analisi di gaussianità della PSF; cfr. Figure 4.1–4.3). Nel complesso, le tre figure mostrano un nucleo ben approssimato da una gaussiana bivariata circondato da una piccola frazione di impatti contaminati a raggi maggiori, coerentemente con quanto discusso nel testo.

4.2. Linearità della risposta e mappa χ_{piano}^2

4.2.1 Motivazione e definizione

Un sistema ottico ideale produce una trasformazione affine tra le coordinate della sorgente e quelle dell'immagine sul fotocatodo. Deviazioni da questa linearità segnalano aberrazioni ottiche di campo – distorsione, curvatura di campo, coma – che degradano la qualità di ricostruzione delle tracce indipendentemente dalla loro orientazione.

Sia $\{(\boldsymbol{\mu}_j, y_{\text{src},j}, x_{\text{src},j})\}$ l'insieme dei punti PSF validi per la configurazione (x_1, x_2) , si modella la risposta come piano lineare nelle coordinate sorgente:

$$\mu_y = a_y + b_y \cdot y_{\text{src}} + c_y \cdot x_{\text{src}}, \quad \mu_z = a_z + b_z \cdot y_{\text{src}} + c_z \cdot x_{\text{src}} \quad (4.9)$$

I parametri (a, b, c) sono stimati tramite fit pesato con pesi $1/\sigma_{y,z}$ derivati da $\boldsymbol{\Sigma}/N_{\text{filt}}$, e la metrica di linearità è:

$$\chi_{\text{piano}}^2(x_1, x_2) = \frac{\chi_y^2 + \chi_z^2}{\text{ndof}_y + \text{ndof}_z} \quad (4.10)$$

Trattandosi di un chi-quadro ridotto – il rapporto tra il chi-quadro del fit e i relativi gradi di libertà – il suo valore atteso per un fit statisticamente compatibile con il modello affine e con residui indipendenti è 1. In presenza di aberrazioni di campo a variazione lenta, tuttavia, i residui del fit piano presentano correlazioni seriali che abbassano questo valore atteso al di sotto di 1, con lo stesso meccanismo discusso per il fit delle tracce nella Sezione 4.3.3: stimando il coefficiente di autocorrelazione lag-1 $\hat{\rho}$ sui residui del fit piano, si calcola il valore atteso corretto $\chi_{\text{target}}^2(\hat{\rho}, N)$ tramite la stessa relazione dell'Eq. 4.14. La Figura 4.4 mostra la mappa 2D di $|\chi_{\text{piano}}^2 - \chi_{\text{target}}^2|$ sull'intera griglia di ottimizzazione: valori prossimi a 0 indicano che la deviazione dalla linearità osservata è pienamente spiegata dalla correlazione dei residui, mentre valori elevati segnalano una componente di non-linearità genuina, non attribuibile alla sola correlazione.

4.2.2 Relazione con la funzione di qualità Q

La mappa χ_{piano}^2 e la mappa Q sono diagnostiche complementari e non ridondanti. La mappa del piano testa la linearità globale della risposta di campo – utilizza tutti i punti PSF del database ed è sensibile a qualsiasi deviazione sistematica dal modello affine. La funzione Q testa invece la capacità del sistema di produrre proiezioni

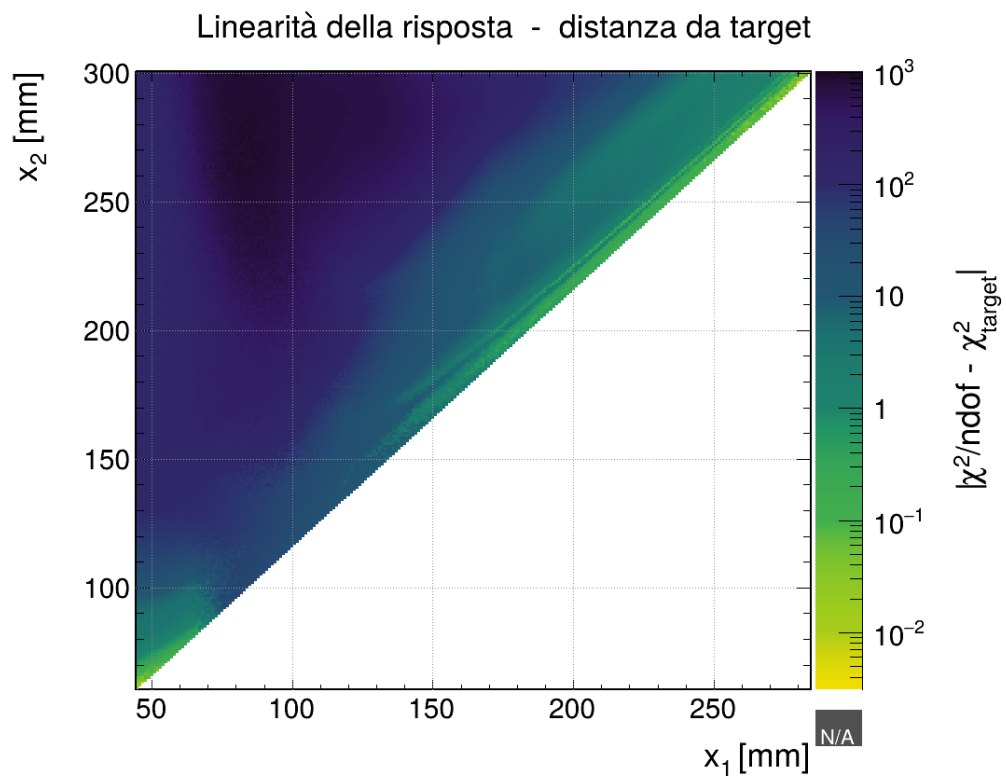


Figura 4.4: Mappa 2D di $|\chi^2_{\text{piano}}(x_1, x_2) - \chi^2_{\text{target}}(x_1, x_2)|$ sulla griglia di ottimizzazione: valori prossimi a 0 indicano una risposta di campo lineare una volta corretto per la correlazione dei residui, mentre valori elevati segnalano non-linearità sistematica genuina della mappatura sorgente-immagine.

rettilinee per tracce fisiche casuali nello scintillatore, ed è sensibile anche a effetti che emergono solo per particolari orientazioni.

Le due mappe vanno consultate congiuntamente. Una configurazione con basso χ_{piano}^2 ma alto Q segnala un sistema localmente lineare ma degradante per tracce a grande inclinazione. Una configurazione con basso Q ma alto χ_{piano}^2 segnala invece che la selezione di tracce casuali ha campionato preferenzialmente una regione del campo più lineare della media.

Un valore elevato di χ_{piano}^2 indica certamente una peggiore linearità della risposta di campo rispetto a configurazioni con χ_{piano}^2 prossimo all'unità; tuttavia il confronto quantitativo tra configurazioni diverse dipende dal numero di punti PSF validi e non è direttamente interpretabile come stima di un'aberrazione fisica assoluta. La mappa va pertanto letta in modo comparativo, e la sua relazione con la funzione di merito è discussa nella Sezione 5.1.2.

4.3. Funzione di qualità $Q(x_1, x_2)$ e fit di tracce 3D

4.3.1 Tracce fisiche e risposta ottica

Una traccia di particella carica nello scintillatore è approssimata da un segmento rettilineo γ con estremi P_1, P_2 scelti casualmente sulle facce del parallelepipedo scintillatore ($60 \times 20 \times 20 \text{ mm}^3$) – il volume utile centrale effettivamente coperto dalla griglia PSF, sottoinsieme del cubo fisico di lato 60 mm (Sezione 2.2.1) sufficiente a contenere la regione di accettazione ottica del sistema, coerentemente con il raggio massimo $r_{\text{max}} = 10\sqrt{2} \text{ mm}$ della griglia sorgente (Sezione 4.1.3). La traccia viene discretizzata al passo $\Delta t = 0.5 \text{ mm}$ in N_t punti $\{P_i = (x_i, y_i, z_i)\}$. Per ogni punto, tramite interpolazione del database PSF e rotazione azimutale (Sezione 4.1.4), si calcola il centroide atteso $\boldsymbol{\mu}_i = (\mu_{y,i}, \mu_{z,i})^\top$ e la covarianza del centroide $\text{Cov}(\hat{\boldsymbol{\mu}}_i) = \boldsymbol{\Sigma}_i / N_{\text{filt},i}$ (Eq. 4.5).

La proiezione della traccia sul piano del fotocatodo è quindi la sequenza di punti $\{(\mu_{y,i}, \mu_{z,i})\}$ con le relative matrici di covarianza. Per un sistema ottico lineare, questa sequenza deve essere collineare.

4.3.2 Fit ortogonale pesato (ODR-IRLS)

Si esegue il fit della retta $z = a \cdot y + b$ sull'insieme dei punti validi usando le covarianze $\text{Cov}(\hat{\boldsymbol{\mu}}_i)$ come pesi statistici. Il metodo adottato è l'Orthogonal Distance Regression (ODR), implementato tramite Iteratively Reweighted Least Squares (IRLS) [24, 25].

La distanza ortogonale del punto $(\mu_{y,i}, \mu_{z,i})$ dalla retta $ay - z + b = 0$ è $d_i = (a\mu_{y,i} - \mu_{z,i} + b)/\sqrt{1+a^2}$. La sua varianza, proiettando la covarianza sul vettore normale alla retta $\hat{n} = (-a, 1)/\sqrt{1+a^2}$, è:

$$\sigma_{d,i}^2 = \hat{n}^\top \text{Cov}(\hat{\boldsymbol{\mu}}_i) \hat{n} = \frac{a^2 [\boldsymbol{\Sigma}_i]_{yy} - 2a [\boldsymbol{\Sigma}_i]_{yz} + [\boldsymbol{\Sigma}_i]_{zz}}{(1+a^2) N_{\text{filt},i}} \quad (4.11)$$

Il χ^2 del fit è:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{N_{\text{valid}}} \frac{d_i^2}{\sigma_{d,i}^2} \quad (4.12)$$

con numero di gradi di libertà $\text{ndof} = N_{\text{valid}} - 2$.

È importante notare che l'asse di fit (Z vs Y oppure Y vs Z) è scelto automaticamente in base allo spread dei dati: si usa Z vs Y di default, e si passa a Y vs Z quando la dispersione in z è più di tre volte quella in y , per evitare degenerazioni numeriche per tracce quasi-verticali nel piano del fotocatodo.

4.3.3 Correlazioni dei residui e interpretazione del χ^2

Se il sistema ottico introduce un'aberrazione che varia in modo graduale lungo la traccia – ad esempio una curvatura di campo che sposta il centroide in modo sistematico e graduale – i residui $\{d_i/\sigma_{d,i}\}$ presentano correlazioni seriali. Questa struttura è modellabile come un processo autoregressivo del primo ordine AR(1) con coefficiente ρ [26]:

$$\text{Corr}(d_i, d_j) = \rho^{|i-j|} \quad (4.13)$$

In presenza di correlazioni AR(1), il valor medio atteso del χ^2 ridotto del fit lineare non è più 1, bensì:

$$E \left[\frac{\chi^2}{N-2} \right] = \frac{\text{tr}[(I-H)R]}{N-2} \quad (4.14)$$

dove H è la matrice di proiezione del fit lineare e $R_{ij} = \rho^{|i-j|}$ è la matrice di correlazione AR(1). Per $\rho > 0$ il valore atteso è strettamente inferiore a 1 e decresce monotonicamente. Per separare il contributo delle correlazioni da quello della non-linearità, si stima automaticamente ρ tramite il coefficiente di autocorrelazione lag-1 sui pull e si calcola il valore atteso $Q_{\text{target}}(\rho, N)$ tramite l'Eq. 4.14. La Figura 4.5 mostra la mappa del coefficiente $\hat{\rho}$ così stimato per ogni configurazione della griglia.

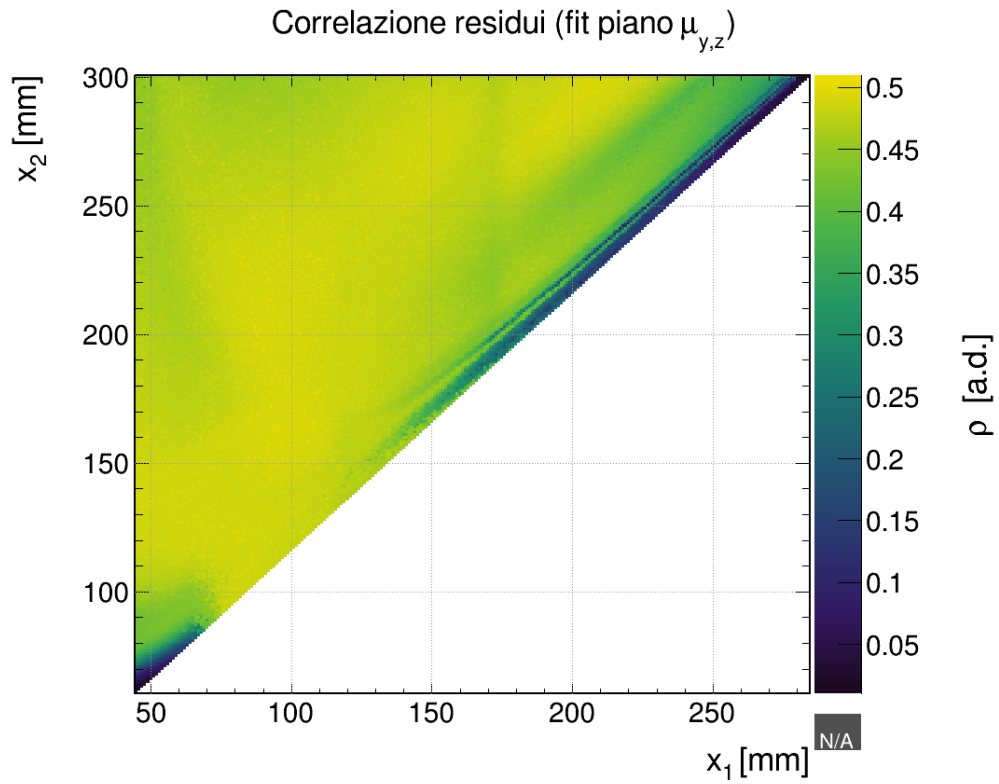


Figura 4.5: Coefficiente di autocorrelazione lag-1 $\hat{\rho}$ dei residui del fit ODR delle tracce, stimato per ogni configurazione. Valori alti indicano aberrazioni sistematiche lentamente variabili nel campo, che il modello AR(1) dell'Eq. 4.14 attribuisce correttamente a correlazione seriale piuttosto che a non-linearità.

4.3.4 Definizione formale di Q

Definizione 4.3.1. La *funzione di qualità* per la configurazione (x_1, x_2) è:

$$Q(x_1, x_2) = \frac{1}{N_{\text{tracce}}} \sum_{k=1}^{N_{\text{tracce}}} \chi_{\text{red}}^2(\gamma_k, x_1, x_2) \quad (4.15)$$

dove la somma è su un campione di N_{tracce} tracce casuali generate nello scintillatore, e χ_{red}^2 è il χ^2 ridotto del fit ODR per la traccia γ_k nella configurazione data. Una traccia è inclusa nella media se almeno il 75% dei suoi punti ricade entro l'area attiva del fotocatodo e $N_{\text{filt},i} \geq 10$.

La mappa 2D di $Q(x_1, x_2)$ risultante è mostrata in Figura 4.6, mentre la Figura 4.7 mostra la frazione media di punti entro l'area attiva del fotocatodo – la stessa quantità usata dal criterio di inclusione del 75% appena definito – per ogni configurazione della griglia.

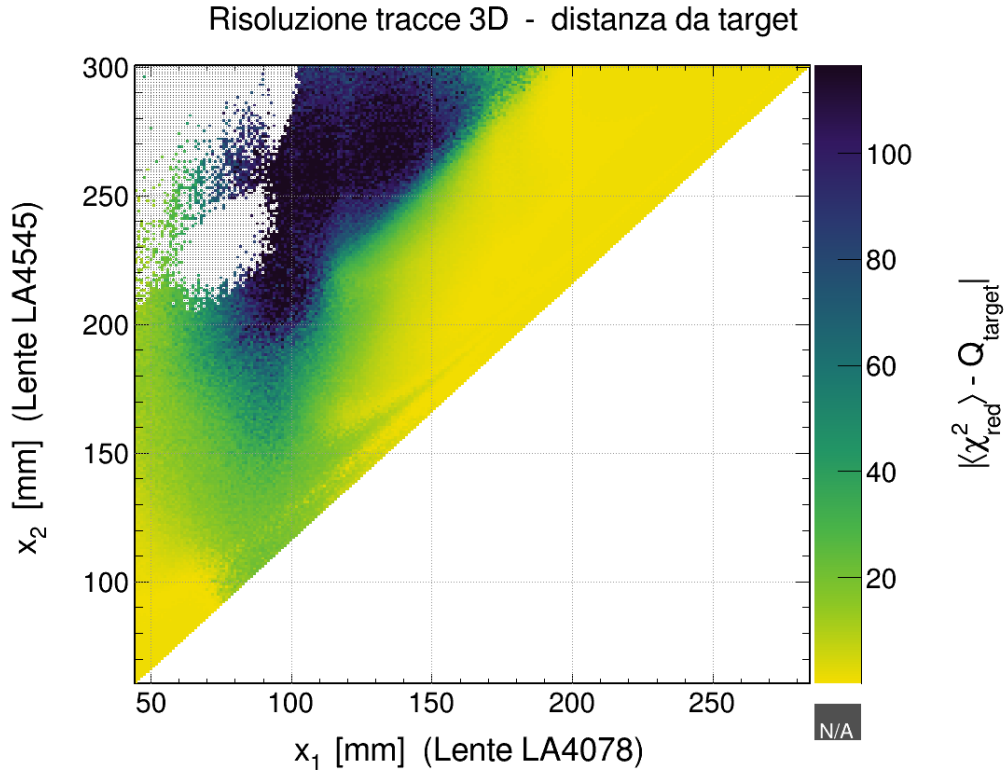


Figura 4.6: Mappa 2D della funzione di qualità $Q(x_1, x_2)$: valori bassi indicano configurazioni in cui il fit ODR delle tracce produce residui piccoli rispetto all'incertezza statistica. Le celle grigie corrispondono a configurazioni con meno del 75% di tracce valide, escluse dalla media.

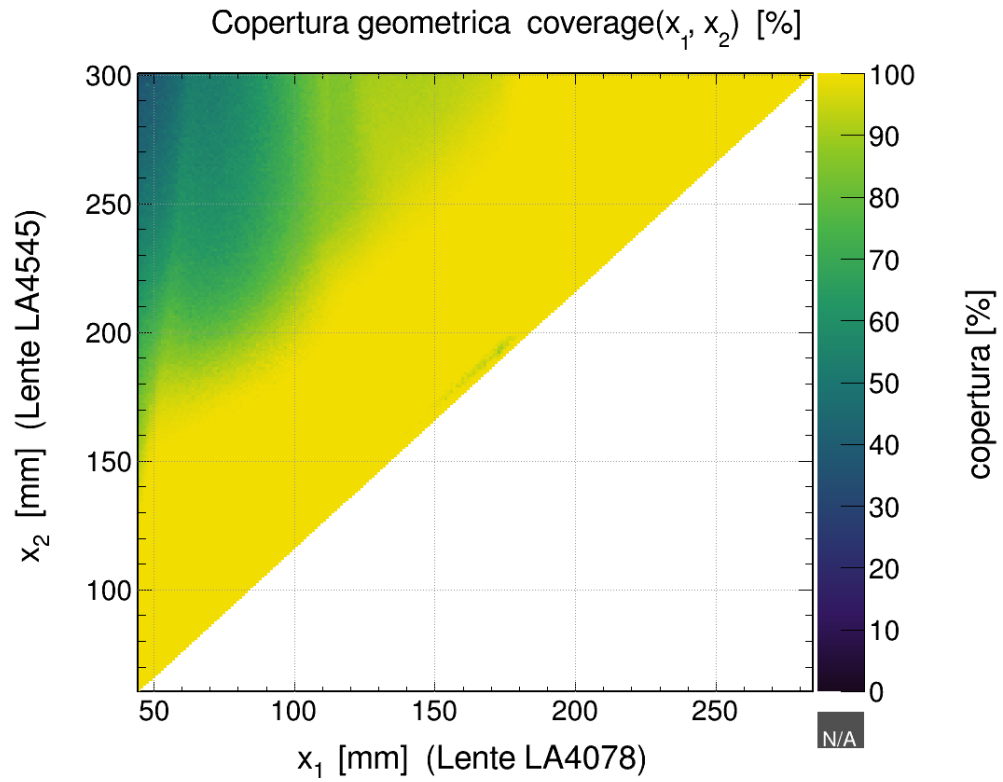


Figura 4.7: Frazione media di punti PSF ricadenti entro l'area attiva del fotocatodo per ogni configurazione della griglia: la stessa quantità usata come criterio di inclusione delle tracce nel calcolo di Q (Figura 4.6).

4.4. Profondità di campo e magnificazione

4.4.1 Motivazione

Le analisi di linearità e qualità delle sezioni precedenti caratterizzano quanto bene il sistema ottico traduce la geometria della traccia sul piano del fotocatodo quando la sorgente si trova esattamente al piano di fuoco x^* determinato per quella configurazione. Nella pratica, i fotoni emessi lungo una traccia reale provengono da punti distribuiti su tutta la lunghezza dello scintillatore (± 30 mm lungo x): occorre quindi quantificare anche quanto il sistema rimane utilizzabile al variare della distanza dal piano di fuoco. Questo è il problema della profondità di campo (Depth of Field, DoF). È proprio il metodo qui descritto, applicato in via preliminare alle coppie candidate, a fornire la stima accurata di x^* usata come posizione del rivelatore in tutte le simulazioni delle sezioni precedenti.

Un secondo aspetto connesso è la magnificazione M : il fattore che lega la posizione trasversale della sorgente a quella della sua immagine sul piano di fuoco. Una magnificazione troppo grande comprime tracce fisicamente distinte in una regione ristretta del fotocatodo, peggiorando la risoluzione spaziale; una magnificazione troppo piccola può invece far cadere parti dell'immagine al di fuori del fotocatodo attivo, riducendo l'accettanza. Il criterio adottato qui è che il 10-90° percentile della distribuzione trasversale dell'immagine debba rientrare entro i 16 mm del fotocatodo.

4.4.2 Metodo di simulazione: importance sampling con sorgente rettangolare

Un approccio basato su tracce fisiche casuali, analogo a quello usato per Q , soffrirebbe di un limite fondamentale: l'immagine sul fotocatodo di una singola traccia rettilinea dipende dalla posizione di ogni punto della traccia rispetto al fuoco in modo non lineare, e la media su tracce di orientazione casuale tenderebbe a mascherare la variazione di M con la posizione.

Il metodo adottato sfrutta invece la simmetria cilindrica del sistema ottico. Anziché campionare tracce casuali in 3D, si genera una sorgente rettangolare con

$$x_{\text{src}} \in [-30, +30] \text{ mm}, \quad y_{\text{src}} \in [0, 10\sqrt{2}] \text{ mm}, \quad z_{\text{src}} = 0 \quad (4.16)$$

e si propagano i raggi tramite ray-tracing attraverso entrambe le lenti. Vengono applicati tre filtri in cascata: i raggi che non passano attraverso l'apertura della prima lente, quelli che non passano attraverso l'apertura della seconda lente, e quelli rifer-

mati dalla superficie delle lenti stesse – identificati con il filtro di Mahalanobis [21] sulla distribuzione degli impatti sul fotocatodo.

Il punto chiave è che questo rettangolo nel piano $z = 0$ contiene, per simmetria cilindrica (Sezione 4.1.4), tutte le informazioni necessarie a descrivere qualsiasi traccia che attraversi il volume dello scintillatore: una particella che passi per il punto (x, r, φ) produce la stessa immagine della sorgente in $(x, r, 0)$ ruotata di φ attorno all'asse ottico, senza alterare dispersione trasversale né magnificazione.

Il metodo misura una magnificazione media sull'intero campo (x, r) , non la sua variazione locale. Questo è sufficiente per il DoF: la profondità di campo è definita come l'intervallo di posizioni del piano di rivelazione per cui la dispersione $\sigma_z(x_{\text{det}})$ rimane al di sotto di una soglia, e questa quantità è dominata dalla dispersione globale. La non-linearità residua della risposta si manifesta come un allargamento di σ_z al di fuori del piano di fuoco, che è esattamente ciò che il metodo misura correttamente.

4.4.3 Definizione di piano di fuoco e profondità di campo

Per ogni configurazione (x_1, x_2) , i raggi filtrati vengono propagati linearmente fino a un piano virtuale di posizione x_{det} variabile nell'intervallo $[x_{\text{scan,min}}, x_{\text{scan,max}}]$. La dispersione trasversale sulla coordinata z al variare di x_{det} è:

$$\sigma_z(x_{\text{det}}) = \sqrt{\frac{\sum_i w_i (z_i + \delta z_i \cdot \Delta x)^2 - \bar{z}^2}{\sum_i w_i}} \quad (4.17)$$

dove $\Delta x = x_{\text{det}} - x_{\text{virtuale}}$, δz_i è la pendenza del raggio i e w_i è il suo peso. Il piano di fuoco x^* è il valore di x_{det} che minimizza σ_z :

$$x^* = \underset{x_{\text{det}}}{\operatorname{argmin}} \sigma_z(x_{\text{det}}) \quad (4.18)$$

La profondità di campo è definita come l'intervallo $[x_{\text{lo}}, x_{\text{hi}}]$ per cui $\sigma_z(x_{\text{det}}) < k \sigma_z(x^*)$, con il fattore $k = \sqrt{2}$ come scelta di default (equivalente a un allargamento del 41% rispetto al fuoco):

$$\text{DoF} = x_{\text{hi}} - x_{\text{lo}} \quad (4.19)$$

4.4.4 Magnificazione media e compatibilità con il fotocatodo

La magnificazione media del sistema è stimata come pendenza della retta di regressione lineare pesata tra la posizione trasversale della sorgente y_{src} e la posizione

corrispondente dell'immagine al piano di fuoco $y_{\text{det}}(x^*)$, valutata raggio per raggio:

$$M = \left| \frac{\sum_i w_i (y_{\text{src},i} - \bar{y}_{\text{src}})(y_{\text{det},i} - \bar{y}_{\text{det}})}{\sum_i w_i (y_{\text{src},i} - \bar{y}_{\text{src}})^2} \right| \quad (4.20)$$

dove $y_{\text{det},i} = y_{\text{src},i} + \delta y_i \cdot \Delta x$ è la posizione del raggio i propagata linearmente fino al piano di fuoco, con la stessa relazione di propagazione usata per la coordinata z nella sezione precedente, e $\bar{y}_{\text{src}}$, $\bar{y}_{\text{det}}$ sono le rispettive medie pesate. Questa stima isola la relazione sistematica tra posizione sorgente e posizione immagine, trattando la dispersione residua dovuta alle aberrazioni ottiche come rumore attorno alla retta anziché come parte della magnificazione stessa.

Un valore $M \approx 1$ indica che il sistema preserva le proporzioni trasversali della sorgente; $M < 1$ corrisponde a una riduzione (vantaggio in termini di accettazione), $M > 1$ a un ingrandimento (potenziale problema di overflow del fotocatodo).

Il criterio di compatibilità con il fotocatodo è basato sull'ampiezza della striscia trasversale formata dall'immagine di tutte le posizioni sorgente:

$$W_{10-90} = P_{90}(y_{\text{det}}) - P_{10}(y_{\text{det}}) \quad (4.21)$$

dove P_{90} e P_{10} sono i percentili pesati della distribuzione di y_{det} . Una configurazione è considerata compatibile se $W_{10-90} \leq 16$ mm.

4.4.5 Mappe DoF e magnificazione nel piano (x_1, x_2)

Il calcolo di x^* , DoF e M viene ripetuto per tutte le configurazioni della griglia, producendo le mappe 2D corrispondenti: la mappa del piano di fuoco (Figura 4.8), quella della magnificazione media (Figura 4.9) e quella di compatibilità con il fotocatodo (Figura 4.10). Questo permette di confrontare la profondità di campo con le mappe di qualità Q e di efficienza η per identificare la configurazione di migliore compromesso.

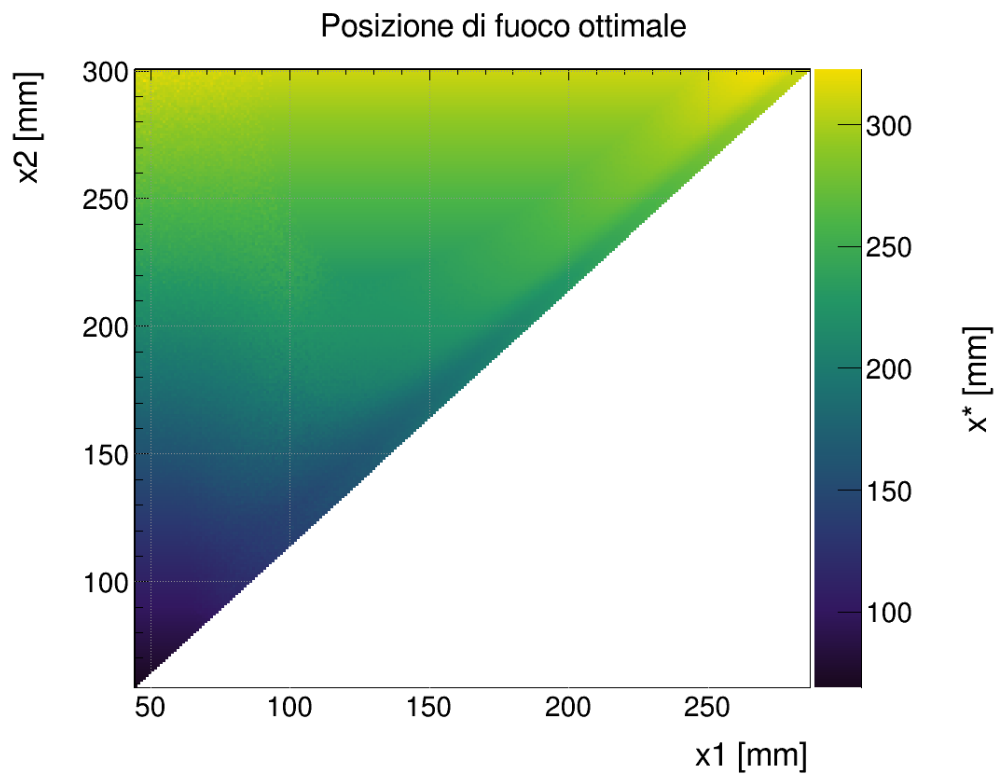


Figura 4.8: Mappa del piano di fuoco x^* per ogni configurazione (x_1, x_2) della griglia: il valore in ogni cella è la distanza dall'ottica a cui la dispersione trasversale dell'immagine è minima, usata per verificare la compatibilità geometrica di ciascuna coppia con la posizione nominale del fotocatodo.

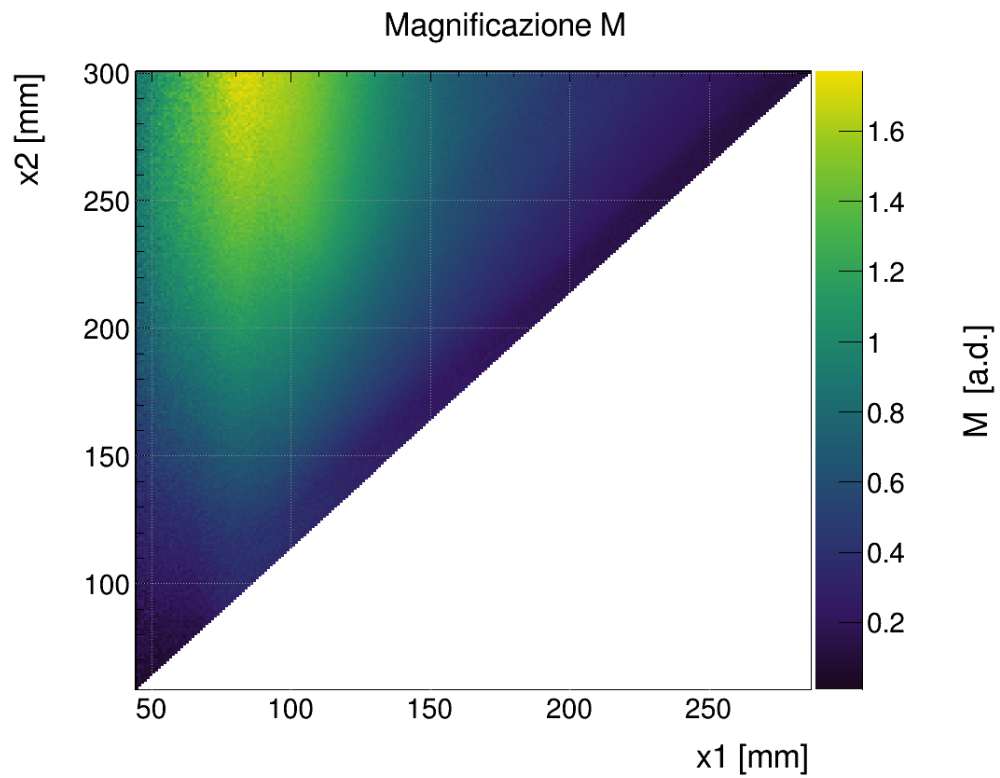


Figura 4.9: Mappa della magnificazione media M per ogni configurazione: valori prossimi a 1 preservano le proporzioni trasversali della sorgente, mentre $M > 1$ comporta rischio di sconfinamento dell'immagine oltre il fotocatodo e $M < 1$ un vantaggio in accettazione.

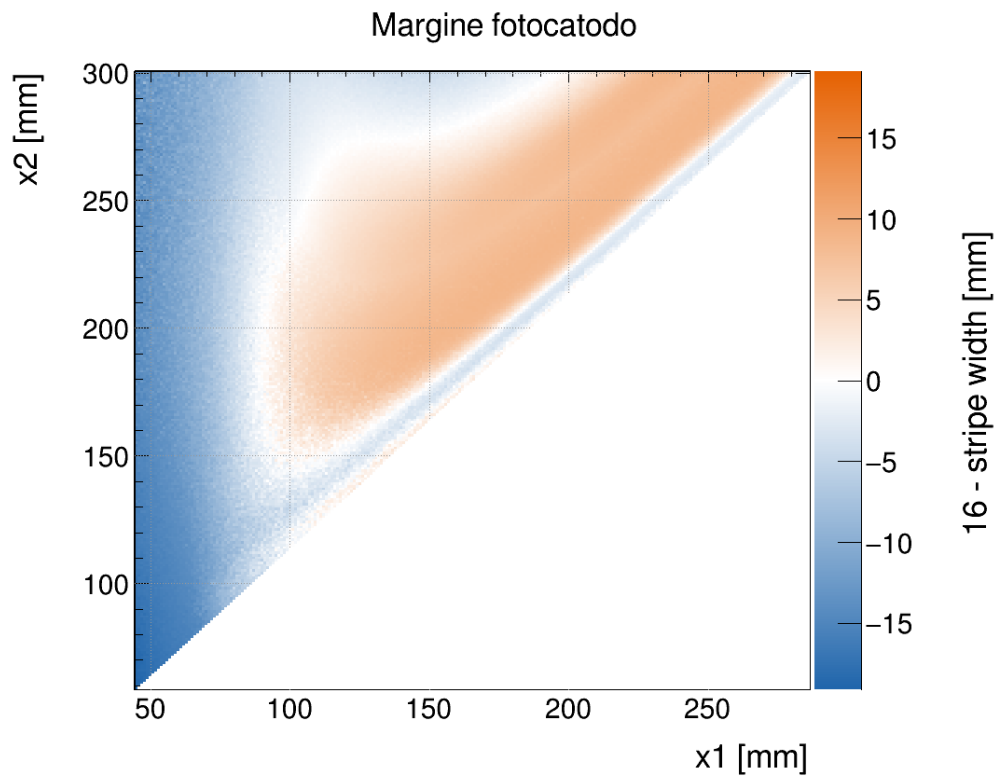


Figura 4.10: Mappa di compatibilità con il fotocatodo: margine 16 mm – W_{10-90} per ogni configurazione (arancione = compatibile, blu = sconfinamento), utilizzata insieme alle mappe di DoF e magnificazione per la selezione finale.

4.5. Esperimento 2: verifica sperimentale della profondità di campo

4.5.1 Obiettivo

La seconda prova sperimentale mira a verificare sperimentalmente la predizione della profondità di campo (DoF) ottenuta dall'analisi Monte Carlo, impiegando la stessa coppia di lenti già validata nel primo esperimento (LA4078 come Lente 1 e LA4464R come Lente 2; cfr. Sezione 3.2). Le due configurazioni di riferimento sono scelte sulla mappa DoF (Sezione 4.4.5) in funzione della posizione nominale del fotocatodo, $x_{\text{det}} \approx 180$ mm: la configurazione *good*, con piano di fuoco a $x_{\text{det}} \approx 165$ mm, e la configurazione *bad*, con piano di fuoco a $x_{\text{det}} \approx 150$ mm, sono selezionate in modo che per entrambe il limite della profondità di campo rivolto verso il fotocatodo cada approssimativamente in corrispondenza dei 180 mm. Poiché il fuoco di *bad* dista da questo limite 30 mm, il doppio dei 15 mm che separano il fuoco di *good* dallo stesso limite, la sua DoF copre su quel lato un intervallo proporzionalmente più ampio: è questo margine più largo, non un'inferiorità intrinseca, a rendere *bad* peggiore in termini di fattore di qualità proprio a $x_{\text{det}} = 180$ mm. La costruzione genera una previsione precisa e verificabile: spostando il rivelatore di 15 mm dal proprio fuoco, la configurazione *bad* (misurata a 165 mm, ancora ben dentro il proprio margine verso 180 mm) dovrebbe degradarsi poco, mentre la configurazione *good* (misurata a 150 mm, sul lato opposto della propria DoF) dovrebbe trovarsi già al bordo dell'intervallo e degradarsi sensibilmente di più. Confrontando il parametro σ_{minor} (semiasse minore della distribuzione 2D di intensità) nelle quattro configurazioni sperimentali si verifica proprio questa previsione, stabilendo se la configurazione *bad*, fotografata nel suo piano di fuoco ottimale, sia competitiva con la *good* nel proprio fuoco.

4.5.2 Setup sperimentale

La sorgente è un laser che produce una traccia lineare sul piano del sensore. Per ciascuna configurazione vengono acquisite serie di frame FITS a 16 bit (BZERO = 32768, BSCALE = 1) insieme a frame di fondo di buio (*background*). Il banco ottico impiegato è mostrato in Figura 4.11.

4.5.3 Pipeline di analisi delle immagini

La catena di elaborazione segue i seguenti passi:

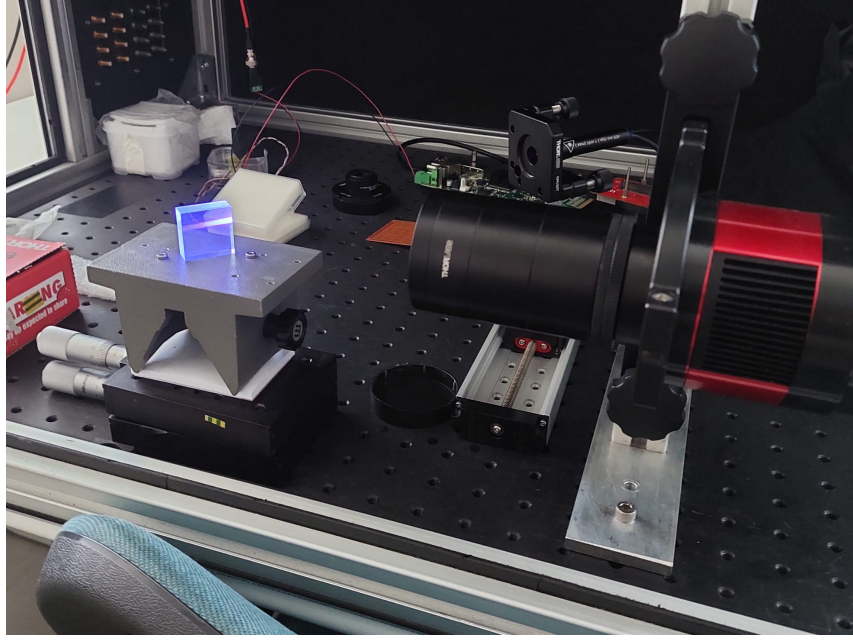


Figura 4.11: Vista del banco ottico del secondo esperimento: sorgente laser, supporto porta-lenti intercambiabile e telecamera, con le due posizioni di acquisizione del fotocatodo $x_{\text{det}} \approx 150$ e 165 mm (Tabella 4.1).

Tabella 4.1: Configurazioni sperimentali del secondo esperimento. x_{det} è la distanza effettiva del fotocatodo durante l’acquisizione; $x_{\text{det}}^{\text{opt}}$ è il piano di fuoco ottimale della configurazione.

Label	Config.	x_{det} (mm)	$x_{\text{det}}^{\text{opt}}$ (mm)	A fuoco?
good_focus	<i>good</i>	165	165	sì
good_nofocus	<i>good</i>	150	165	no
bad_focus	<i>bad</i>	150	150	sì
bad_nofocus	<i>bad</i>	165	150	no

1. **Stacking sigma-clipping:** le immagini di ogni configurazione vengono combinate con lo stesso metodo σ -clipping iterativo (3σ , 3 iterazioni) descritto per il primo esperimento (Sezione 3.2), per rimuovere raggi cosmici e fluttuazioni impulsive.
2. **Sottrazione del fondo:** l’immagine di *background* (anch’essa sigma-clippata) viene sottratta per eliminare il segnale di buio.
3. **Stima dell’angolo della traccia:** l’angolo della traccia laser è stimato con due metodi complementari — analisi delle componenti principali (PCA) sulla nuvola di pixel sopra soglia e stima dal tensore d’inerzia — i cui risultati vengono mediati per robustezza.
4. **Raffinamento iterativo dell’angolo (ODR):** l’angolo iniziale viene raffinato con un ciclo di al più 2 iterazioni di Orthogonal Distance Regression [24];

ogni iterazione stima la deriva lineare del centroide e la converte in correzione angolare.

5. **Estrazione del profilo a slice con centroide pesato:** la traccia viene suddivisa in fette perpendicolari; in ogni fetta il centroide è il primo momento pesato per intensità $\bar{s} = \sum_i s_i w_i / \sum_i w_i$, con $w_i = \max(0, I_i - B)$, secondo lo standard ISO 11146 [27].
6. **Fit ODR lineare sui centroidi:** i centroidi delle slice vengono raccordati con una retta via ODR [24], ottenendo la retta di centro della traccia e i residui.
7. **Calcolo delle metriche:** σ_{minor} , σ_{mean} , χ^2/ndof .

Il parametro σ_{minor} è il semiasse minore della distribuzione bidimensionale di intensità, derivato dagli autovalori della matrice di covarianza dei momenti del secondo ordine. Essendo geometricamente invariante per rotazione, è confrontabile tra immagini di blob circolari e di tracce allungate (*streak*). Il centroide pesato segue la definizione ISO 11146 [27].

4.5.4 Metriche di confronto

Siano $\sigma_{\text{minor}}^{(k)}$, $\sigma_{\text{mean}}^{(k)}$ e $(\chi^2/\text{ndof})^{(k)}$ le metriche misurate per la configurazione $k \in \{\text{good_focus}, \text{good_nofocus}, \text{bad_focus}, \text{bad_nofocus}\}$:

- σ_{minor} — semiasse minore della distribuzione 2D di intensità, calcolato dagli autovalori della matrice di covarianza;
- σ_{mean} — media ponderata con pesi $1/\sigma_i^2$ delle larghezze gaussiane delle singole slice trasversali;
- *aspect_ratio* — rapporto semiasse maggiore / semiasse minore, indicatore dell'allungamento della PSF;
- χ^2/ndof — bontà del fit ODR lineare sui centroidi delle slice.

I due rapporti chiave per l'interpretazione fisica sono:

$$\frac{\sigma_{\text{minor}}^{(\text{bad_focus})}}{\sigma_{\text{minor}}^{(\text{good_focus})}} \approx 1 \quad \Rightarrow \quad \text{le due configurazioni nei rispettivi fuochi sono equivalenti;} \quad (4.22)$$

$$\frac{\sigma_{\text{minor}}^{(\text{good_nofocus})}}{\sigma_{\text{minor}}^{(\text{good_focus})}} > 1 \quad \Rightarrow \quad \text{degrado della good fuori fuoco, misura diretta della DoF.} \quad (4.23)$$

4.5.5 Risultati e interpretazione

I risultati dell'indagine sperimentale sono i seguenti: $\sigma_{\text{minor}}^{(\text{good_focus})} = 316.54$ px ($\sigma_{\text{major}} = 678.25$ px, aspect= 2.14); $\sigma_{\text{minor}}^{(\text{good_nofocus})} = 189.67$ px ($\sigma_{\text{major}} = 248.38$ px, aspect= 1.31). $\sigma_{\text{minor}}^{(\text{bad_focus})} = 300.26$ px ($\sigma_{\text{major}} = 728.80$ px, aspect= 2.43); $\sigma_{\text{minor}}^{(\text{bad_nofocus})} = 315.27$ px ($\sigma_{\text{major}} = 711.66$ px, aspect= 2.26). Rapporto bad/good (a fuoco): 0.949; degrado *good* fuori fuoco: 0.834; degrado *bad* fuori fuoco: 0.952. Le incertezze sui tre rapporti sono trascurabili, conseguenza dell'elevato determinismo delle immagini stackate (il segnale domina ampiamente il rumore statistico residuo dopo il sigma-clipping): un'indicazione di buona riproducibilità della misura, pur non consentendo un test di significatività in base a quanto detto nella Sezione 3.2.

La firma sperimentale attesa è che le configurazioni fuori fuoco (*good_nofocus* e *bad_nofocus*) abbiano σ_{minor} maggiore delle corrispondenti versioni a fuoco, con un'asimmetria specifica prevista dalla costruzione delle due configurazioni (cfr. inizio sezione): lo spostamento di 15 mm di *bad_nofocus* consuma solo metà del margine di DoF di *bad* verso 180 mm (30 mm), e dovrebbe quindi comportare una degradazione modesta; lo stesso spostamento assoluto di *good_nofocus*, sul lato opposto della DoF di *good* dove il margine è di soli 15 mm, lo esaurisce quasi interamente, e dovrebbe quindi comportare una degradazione marcata. I dati confermano questa attesa, con un'asimmetria degna di nota:

- $\sigma_{\text{minor}}^{(\text{bad_focus})} \approx \sigma_{\text{minor}}^{(\text{good_focus})}$ (rapporto 0.949): la configurazione *bad* è pienamente competitiva nel suo piano di fuoco, producendo uno spot leggermente più stretto di *good*.
- Il degrado fuori fuoco è marcatamente asimmetrico, in linea con la previsione: *good* peggiora di circa il 20 % (rapporto 0.834), avendo esaurito quasi per intero il proprio margine di 15 mm, mentre *bad* peggiora solo di circa il 5 % (rapporto 0.952), disponendo ancora di ampio margine entro i 30 mm verso 180 mm. Il rapporto tra i due degradi (circa 4:1) è consistente in ordine di grandezza con il rapporto 2:1 tra i margini di progetto, a conferma che l'asimmetria osservata riflette effettivamente la costruzione delle due configurazioni sulla mappa DoF e non è un artefatto casuale.
- La larghezza della DoF determina quindi quale configurazione sia preferibile quando il fotocatodo non può essere ottimalmente posizionato, confermando l'importanza dell'analisi presentata nella Sezione 4.4.

In sintesi, questo secondo esperimento verifica sperimentalmente non solo la predizione qualitativa di DoF (degrado del σ_{minor} fuori fuoco per entrambe le configurazioni),

ma anche, quantitativamente, la previsione legata al modo in cui *good* e *bad* sono state costruite sulla mappa DoF: l'asimmetria del degrado osservato è dello stesso ordine di grandezza del rapporto tra i margini di 15 e 30 mm verso $x_{\text{det}} = 180$ mm (cfr. inizio sezione). La denominazione *bad* riflette quindi una qualità peggiore a $x_{\text{det}} = 180$ mm, non un'inferiorità intrinseca, e nel proprio piano di fuoco ottimale la configurazione risulta pienamente, se non più, competitiva rispetto a *good*. La scelta tra le due configurazioni non può quindi basarsi sul solo σ_{minor} al proprio ottimo, ma deve tenere conto di quanto tollerino uno scostamento dal proprio piano di fuoco – un aspetto che entra direttamente nella funzione di merito composta discussa nel Capitolo 5.

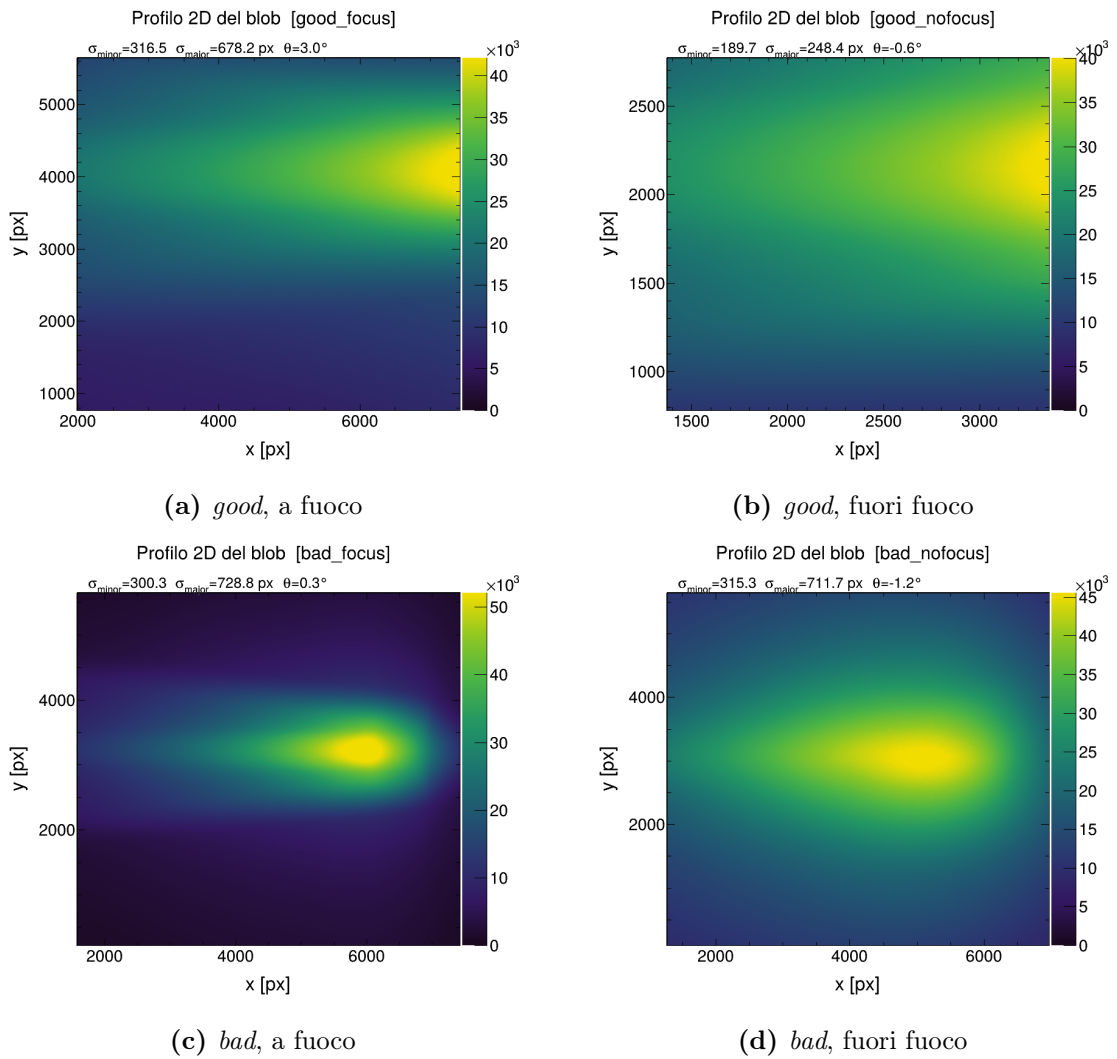


Figura 4.12: Immagine sigma-clippata del blob/traccia laser per le quattro configurazioni dell'esperimento: ellisse 2σ (semiassi σ_{major} , σ_{minor}).

4.6. Metriche ottiche al piano di fuoco

4.6.1 Motivazione

Le mappe di DoF e magnificazione descritte in precedenza descrivono il comportamento del sistema in funzione della posizione del piano di rivelazione, ma non forniscono una stima diretta della dimensione della macchia luminosa al fuoco espressa in unità fisiche sul sensore. Questa sezione colma tale lacuna calcolando, per ogni configurazione (x_1, x_2) , due metriche ottiche standardizzate valutate al piano di fuoco ottimale di ciascuna configurazione.

4.6.2 Definizione delle metriche

Le due metriche sono le seguenti.

EE80 (*Encircled Energy 80%*): diametro del cerchio che racchiude l'80% dell'energia della macchia. Per una distribuzione gaussiana 2D isotropa vale:

$$\text{EE80} = 2 \cdot 1.7941 \cdot \sigma_{\text{rms}}, \quad \sigma_{\text{rms}} = \sqrt{\frac{\sigma_y^2 + \sigma_{z,\min}^2}{2}} \quad (4.24)$$

dove $\sigma_{z,\min}$ è la dispersione minima lungo l'asse di propagazione valutata al piano di fuoco e σ_y è la dispersione trasversale nello stesso punto. Il fattore 1.7941 è la radice dell'80° percentile della distribuzione $\chi^2(2)$. EE80 è la metrica standard per la caratterizzazione della PSF in strumenti ottici spaziali (HST, JWST, Euclid) [28]. La mappa 2D risultante è mostrata in Figura 4.13.

DoF: profondità di campo al piano di fuoco, calcolata con la stessa definizione adottata nella Sezione 4.4.3, a titolo di confronto incrociato. La mappa corrispondente è mostrata in Figura 4.14.

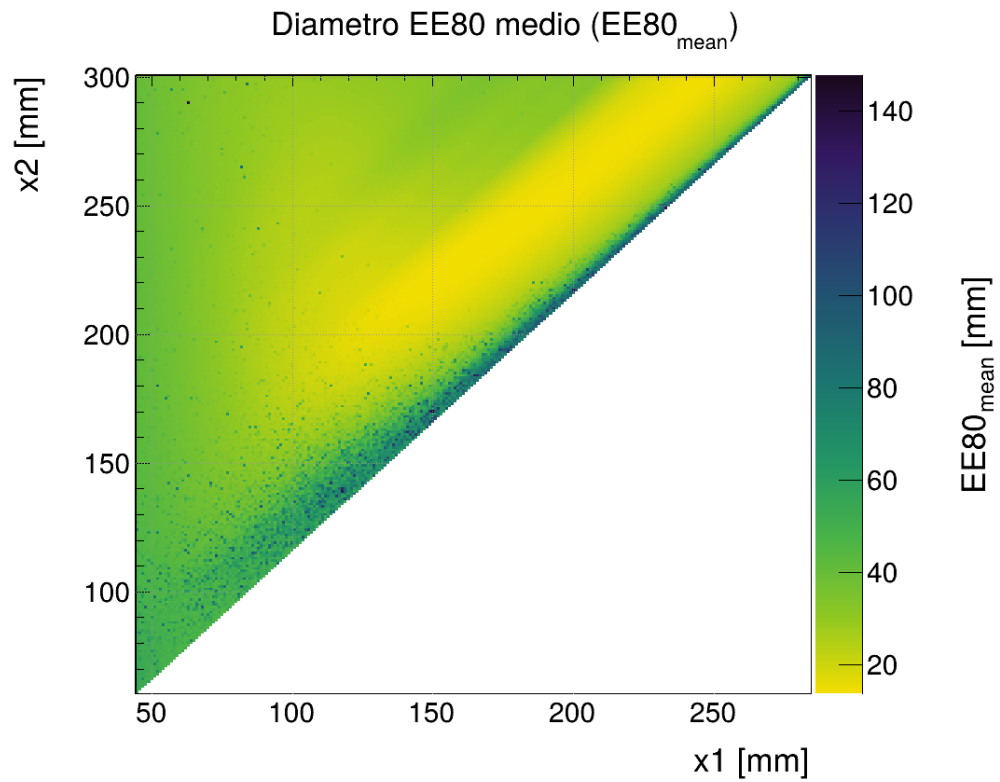


Figura 4.13: Mappa dell'EE80 medio (mm) al piano di fuoco per ogni configurazione (x_1, x_2) : valori più bassi indicano una macchia luminosa più compatta e quindi una migliore risoluzione ottica al fuoco.

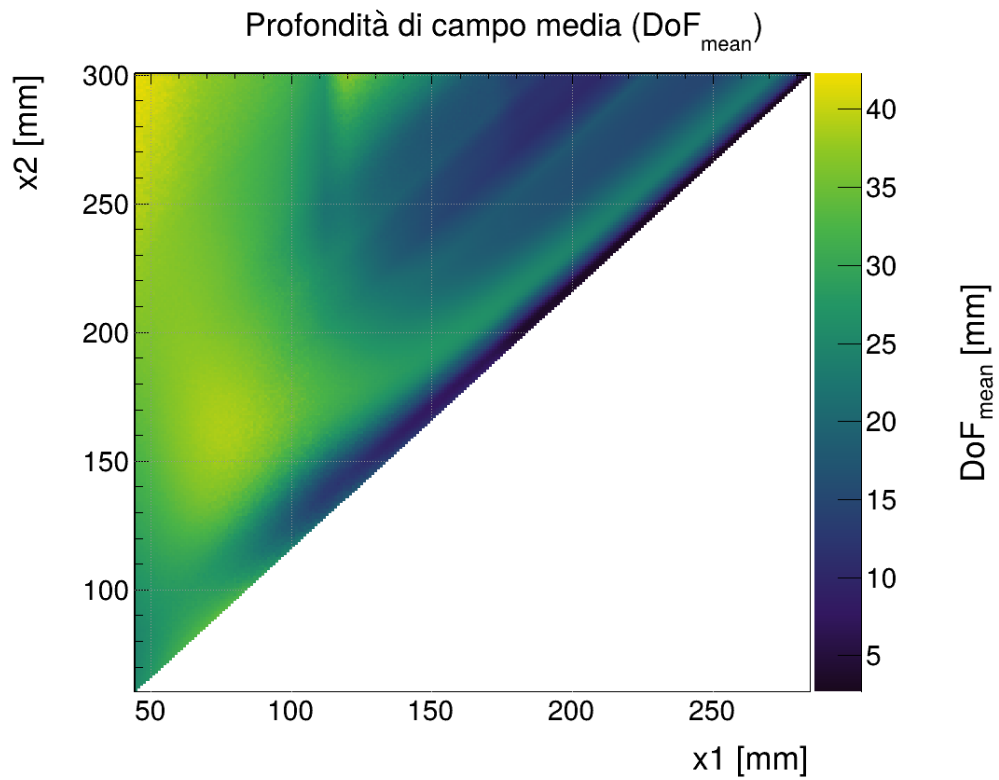


Figura 4.14: Mappa della profondità di campo (DoF) in mm per ogni configurazione, calcolata con la stessa definizione della Sezione 4.4.3, a titolo di confronto incrociato con la mappa dell'EE80 (Figura 4.13).

4.7. Esperimento 3: confronto sperimentale Q_{exp} vs Q_{sim} con sorgente a display

4.7.1 Obiettivo

Il terzo ed ultimo esperimento è stato concepito con l'obiettivo di validare qualitativamente la funzione di qualità Q simulata (Sezione 4.3) confrontandola con la qualità ottica misurata su banco ottico al variare della distanza assiale sorgente–sensore d_{ax} .

Le due configurazioni ottiche confrontate sono le stesse già impiegate negli esperimenti precedenti: la coppia di lenti LA4078 (Lente 1) e LA4464R (Lente 2), nelle disposizioni *good* ($x_1 = 110$ mm, $x_2 = 130$ mm) e *bad* ($x_1 = 60$ mm, $x_2 = 125$ mm). A differenza del secondo esperimento: sensore e apparato ottico restano fissi, mentre è la sorgente (il display) a essere traslata lungo l'asse ottico alle distanze nominali $d_{\text{ax}} \in \{150, 165, 180, 195, 210\}$ mm.

4.7.2 Setup sperimentale

La sorgente sperimentale è lo schermo di uno smartphone (lunghezza d'onda dominante ≈ 525 nm, scala fisica nota del pannello), che mostra i pattern di calibrazione e di misura richiesti da ciascuna fase; questa scelta permette di generare pattern di riferimento a geometria nota (linee, colonne di punti) senza le difficoltà di allineamento di una sorgente laser puntiforme e senza dover disaccoppiare le lenti dal banco per la calibrazione. Il banco ottico, con il supporto a traslazione assiale per lo smartphone, è mostrato in Figura 4.15.

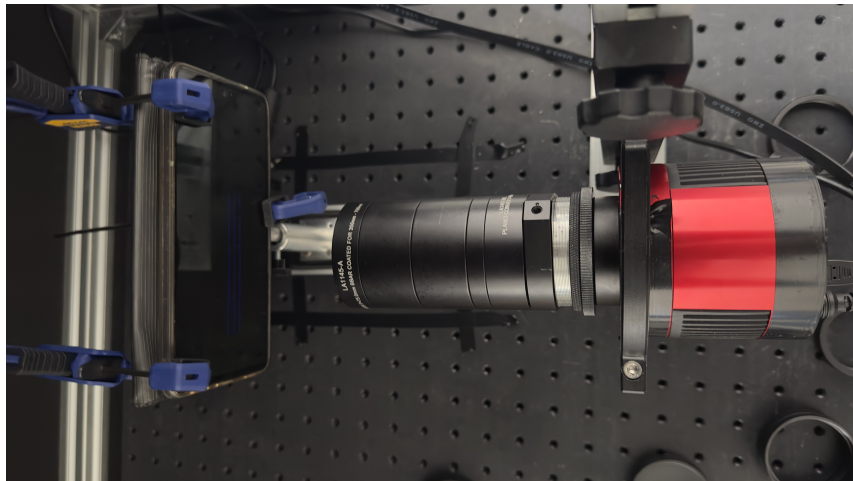


Figura 4.15: Vista del banco ottico dell'esperimento: schermo dello smartphone montato su supporto a traslazione assiale con livella, apparato ottico nella configurazione in prova e telecamera in posizione fissa.

4.7.3 Calibrazione della scala tramite linea di riferimento

Prima di qualsiasi analisi occorre stabilire il fattore di scala mm/pixel tra le coordinate del sensore e le coordinate fisiche nel piano di rivelazione. Un approccio a omografia proiettiva completa è stato considerato in una fase preliminare di progettazione dell'esperimento, ma è stato scartato perché richiederebbe imaging di una griglia di punti noti senza le lenti interposte, condizione impraticabile a causa del campo visivo molto ampio del sensore in quella configurazione. Si adotta quindi una calibrazione a scala singola tramite una linea di riferimento orizzontale di lunghezza nota, mostrata sullo schermo: questa scelta è sufficiente perché l'asse ottico è allineato meccanicamente con il sensore e non sono richieste correzioni prospettiche.

Per ciascuna distanza assiale: (1) si esegue lo stacking σ -clipping e si sottrae il fondo; (2) si individuano gli estremi della linea sul profilo proiettato, tramite soglia al 30% del picco e successivo affinamento del centroide in una finestra di ± 10 px attorno a ciascun estremo; (3) si calcola la lunghezza misurata sul sensore L_{sens} (in pixel); (4) si deriva il fattore di scala

$$\text{scale}_{\text{mm/px}} = \frac{L_{\text{disp}} \cdot s_{\text{disp}}}{L_{\text{sens}}} \quad (4.25)$$

dove $L_{\text{disp}} = 800$ px è la lunghezza nominale della linea sullo schermo e s_{disp} è la scala fisica nota del pannello (mm/px). Il fattore di scala così ottenuto viene poi utilizzato nella fase successiva; la calibrazione non produce una figura diagnostica dedicata.

4.7.4 Misura di Q_{exp} e confronto qualitativo con Q_{sim}

Per ciascuna distanza assiale d_{ax} e per ciascuna configurazione si acquisisce un'immagine FITS della traccia orizzontale proiettata dallo schermo; la traccia viene rilevata automaticamente sul sensore tramite i picchi del profilo di riga proiettato. La pipeline di analisi è analoga a quella del secondo esperimento (Sezione 4.5): stacking σ -clipping, sottrazione fondo, stima dell'angolo, estrazione del profilo per slice con centroide pesato ISO 11146 [27], fit ODR lineare sui centroidi [24]. Il fattore di scala calibrato (Sezione 4.7.3) viene applicato per esprimere le posizioni in millimetri.

Il valore sperimentale di qualità per una configurazione a una data distanza è il χ^2/ndof del fit ODR sui centroidi della traccia rilevata:

$$Q_{\text{exp}}(d_{\text{ax}}) = \chi^2/\text{ndof} \quad (4.26)$$

lo stesso estimatore usato nella simulazione per definire la mappa $Q(x_1, x_2)$ (Sezione 4.3).

Per ciascuna configurazione, il valore Q_{sim} di riferimento viene estratto dalla mappa $Q(x_1, x_2)$ simulata (Sezione 4.3) alla coppia (x_1, x_2) nominale della configurazione: $Q_{\text{sim}}^{\text{good}} = 0.87$ e $Q_{\text{sim}}^{\text{bad}} = 1.72$. Trattandosi di un valore associato alla sola geometria delle lenti, Q_{sim} non dipende da d_{ax} ed è riportato come riferimento costante nel confronto con i dati sperimentali.

4.7.5 Risultati e interpretazione

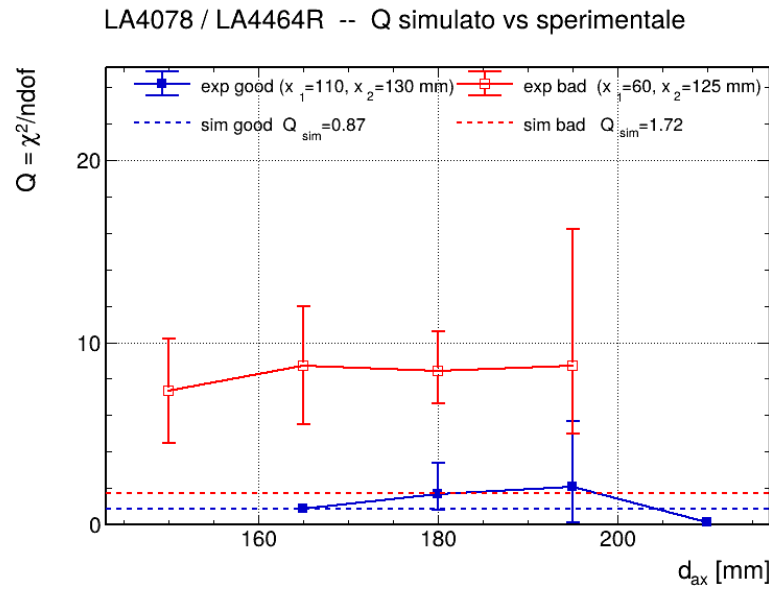


Figura 4.16: $Q_{\text{exp}}(d_{\text{ax}})$ per le configurazioni *good* (blu) e *bad* (rosso), con le rispettive rette tratteggiate di riferimento Q_{sim} . Le barre verticali indicano il range min-max tra le tracce rilevate a ciascuna distanza.

Su tutto l'intervallo di distanze esplorato, $Q_{\text{exp}}^{\text{bad}}$ si mantiene stabilmente intorno a 7–9, mentre $Q_{\text{exp}}^{\text{good}}$ resta significativamente più basso, tipicamente intorno a 1–2 nella parte centrale del range. Entrambi i valori sperimentali sono sistematicamente più alti dei rispettivi riferimenti simulati ($Q_{\text{sim}}^{\text{good}} = 0.87$, $Q_{\text{sim}}^{\text{bad}} = 1.72$), come atteso dato che Q_{exp} include sorgenti di rumore non modellate nella simulazione (rumore del sensore, non uniformità dello schermo, incertezza di calibrazione). L'ordine relativo tra le due configurazioni è però rispettato ovunque: $Q_{\text{exp}}^{\text{bad}} > Q_{\text{exp}}^{\text{good}}$ in modo consistente su tutte le distanze misurate.

Questo risultato verifica qualitativamente, su banco ottico e con una sorgente indipendente da quella laser del secondo esperimento, la gerarchia di qualità prevista

dalla simulazione: la configurazione *bad* produce sistematicamente un fit peggiore (chi-quadro più alto) della configurazione *good*, coerentemente con $Q_{\text{sim}}^{\text{bad}} > Q_{\text{sim}}^{\text{good}}$.

Agli estremi dell'intervallo esplorato si registrano due punti sperimentali esclusi dall'analisi aggregata, già visibile in Figura 4.16: a $d_{\text{ax}} = 210$ mm la configurazione *bad* (il cui piano di fuoco ottimale è $x_{\text{det}}^{\text{opt}} \approx 195$ mm) produce una traccia troppo allargata e a basso contrasto per essere rilevata e caratterizzata in modo affidabile dalla pipeline automatica; una difficoltà analoga si presenta per la configurazione *good* a $d_{\text{ax}} = 150$ mm (il cui ottimo è $x_{\text{det}}^{\text{opt}} \approx 210$ mm). Entrambi i punti sono stati per questo esclusi dal calcolo di Q_{exp} riportato in Figura 4.16. Le Figure 4.17(a)–(d) mostrano il contrasto tra tracce ben definite e tracce eccessivamente distorte.

Va però sottolineato che l'esclusione riguarda specificamente questi due punti: altre configurazioni a distanze analogamente più vicine o più lontane dal proprio fuoco ottimale sono state comunque rilevate e caratterizzate correttamente dalla pipeline automatica (è il caso, ad esempio, del punto a $d_{\text{ax}} \approx 150$ mm per la configurazione *bad*, ben più distante dal proprio ottimo di 195 mm rispetto al punto escluso a 210 mm, che ne dista solo 15 mm). Il fenomeno non contraddice però la caratterizzazione della DoF: nella definizione adottata (Sezione 4.4.3), la profondità di campo è l'intervallo $[x_{\text{lo}}, x_{\text{hi}}]$ per cui $\sigma_z(x_{\text{det}}) < k \sigma_z(x^*)$, un criterio a soglia su una funzione generica di x_{det} che non impone alcuna simmetria tra il lato $x^* - x_{\text{lo}}$ e il lato $x_{\text{hi}} - x^*$. Una DoF marcatamente asimmetrica attorno al proprio fuoco – già suggerita a livello comparativo tra configurazioni nel secondo esperimento (Sezione 4.5) – spiegherebbe naturalmente perché uno scostamento piccolo in una direzione (i 15 mm di *bad* a 210 mm) risulti più penalizzante di uno scostamento grande nell'altra (i 45 mm di *bad* a 150 mm): il lato della DoF verso x_{det} crescenti sarebbe, per questa configurazione, sostanzialmente più stretto del lato verso x_{det} decrescenti. Una verifica quantitativa di questa asimmetria per le due configurazioni resta un naturale sviluppo futuro, da condurre direttamente sulle mappe DoF già disponibili (Sezione 4.4.5) confrontando $x^* - x_{\text{lo}}$ e $x_{\text{hi}} - x^*$ punto per punto.

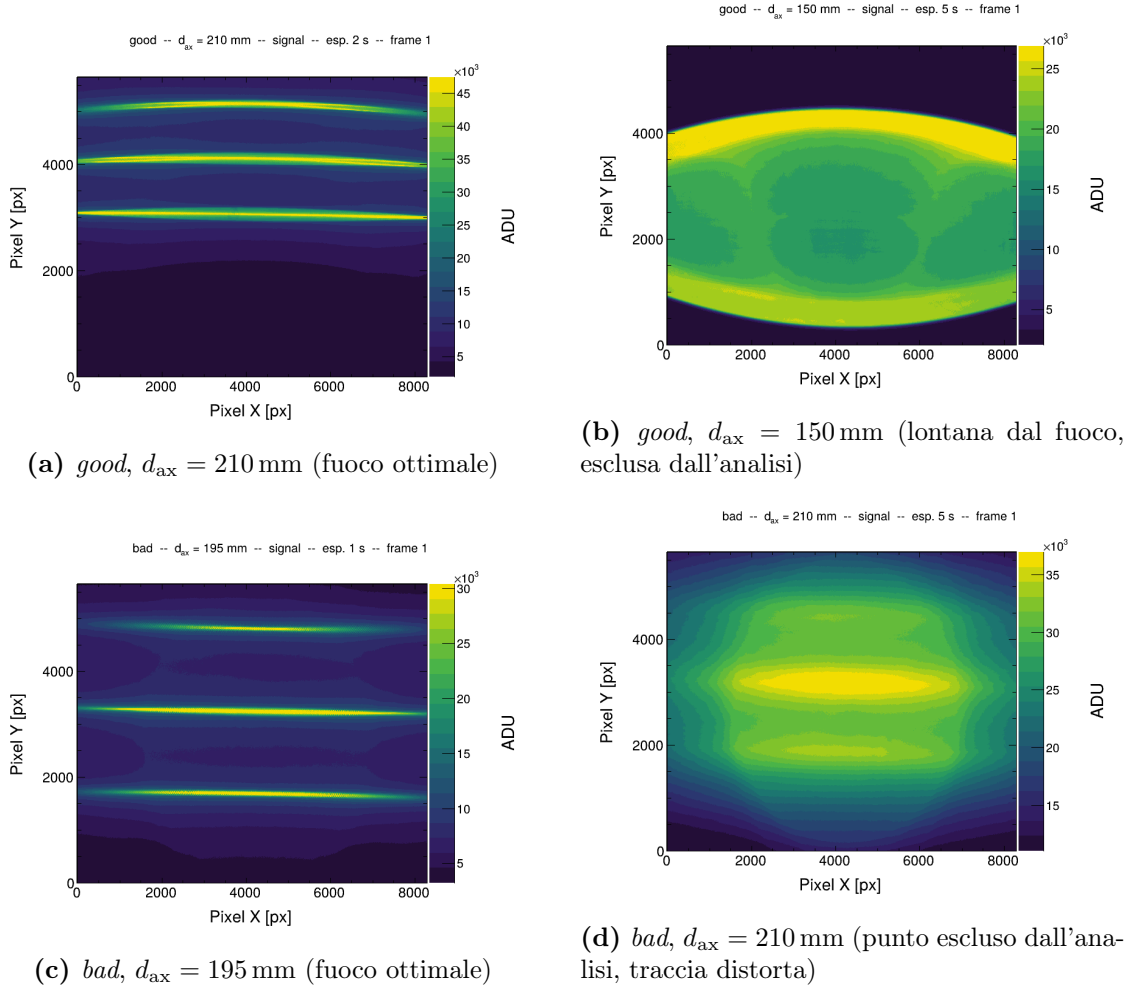


Figura 4.17: Immagine sigma-clippata e sottratta del fondo della traccia proiettata dallo schermo, per le configurazioni *good* e *bad* al proprio fuoco ottimale (a, c) e nei due punti esclusi dall'analisi (b, d). Il pannello (d) corrisponde a uno scostamento di soli 15 mm dal fuoco di *bad*, inferiore ai 45 mm del punto ben rilevato a 150 mm (non mostrato): un indizio dell'asimmetria della DoF attorno al fuoco discussa nel testo, più che di una generica perdita di risoluzione con la distanza.

5 Analisi di Pareto e Selezione della Configurazione Ottimale

5.1. Funzione di merito composta e raccomandazioni

Le metriche prodotte dalle sezioni precedenti — l'efficienza geometrica η (Capitolo 3), la funzione di qualità Q (Sezione 4.3), il chi-quadro normalizzato $\chi^2_{\text{piano}}/\text{ndof}$ (Sezione 4.2) e la coppia profondità di campo DoF e magnificazione M (Sezione 4.4), più opzionalmente la metrica EE80 (Sezione 4.6) — non raggiungono necessariamente il loro ottimo nella stessa regione del piano (x_1, x_2) . Il problema di ottimizzazione multi-criterio che ne risulta non ha soluzione unica senza specificare preferenze tra le metriche [29]. Si adottano pertanto due approcci complementari: una funzione di merito scalare pesata, che comprime le quattro metriche in un unico punteggio aggregato, e l'analisi del fronte di Pareto, che rende esplicito il compromesso ottimale accessibile senza fissare a priori le priorità.

5.1.1 Pipeline di aggregazione

La selezione della configurazione ottimale procede attraverso una pipeline in quattro fasi, che unisce i dataset prodotti dalle fasi precedenti, applica vincoli fisici minimi, calcola la funzione di merito scalare e identifica il fronte di Pareto.

Nella prima fase si effettua l'unione (*join*) dei dataset prodotti dalle fasi precedenti sui valori (x_1, x_2) , con tolleranza 1×10^{-3} mm sulla coincidenza delle coordinate: a ciascuna configurazione della griglia vengono associate l'efficienza geometrica η (Sezione 3.1), la funzione di qualità Q (Sezione 4.3), il valore $\chi^2_{\text{piano}}/\text{ndof}$ (Sezione 4.2) e la profondità di campo DoF con la magnificazione M e la posizione del piano di fuoco x_{focus}^* (Sezione 4.4). Se disponibile, la metrica EE80 (Sezione 4.6) viene aggiunta al set di dati e abilita il filtro opzionale sulla dimensione della macchia al fuoco. Solo le configurazioni presenti in tutti i dataset obbligatori entrano nell'analisi.

Nella seconda fase vengono applicati i filtri così detti di *hard constraint*, ovvero soglie che eliminano configurazioni fisicamente inaccettabili prima di qualsiasi ottimizzazione. Il primo filtro impone $\eta \geq \eta_{\text{frac}} \cdot \eta_{\text{max}}$, con valore di default $\eta_{\text{frac}} = 0.75$: le configurazioni con efficienza inferiore al 75% del massimo della griglia vengono scartate indipendentemente dagli altri criteri. Il secondo filtro riguarda la com-

patibilità del piano di fuoco con il fotocatodo e dipende dalla modalità operativa del fotocatodo, già introdotta in Sezione 3.1: in modalità a fuoco fisso impone $|x_{\text{focus}}^* - x_{\text{det}}| \leq \Delta x_{\text{focus}}$, con valori di default $x_{\text{det}} = 180$ mm e $\Delta x_{\text{focus}} = 15$ mm; in modalità a fuoco mobile, adottata nell'analisi qui presentata poiché il rivelatore viene riposizionato sul piano focale reale di ciascuna configurazione, questo vincolo non ha senso fisico — non esiste un x_{det} fisso da confrontare con x_{focus}^* — e viene pertanto disattivato: la compatibilità focale è delegata interamente al terzo filtro, sulla profondità di campo. Il terzo filtro impone una profondità di campo minima $\text{DoF} \geq \text{DoF}_{\min}$, disabilitato per default ma è il vincolo operativo di qualità focale quando si opera in fuoco mobile. Il quarto filtro impone un limite superiore sull'energia incerchiata all'80%: $\text{EE80} \leq \text{EE80}_{\max}$, e richiede che la metrica EE80 (Sezione 4.6) sia disponibile nel dataset. Nell'analisi qui presentata questo filtro è attivo con soglia $\text{EE80}_{\max} = 30$ mm per tutti gli scenari di pesi discussi nella Sezione 5.1.3. Tutti i parametri sono configurabili in funzione dei requisiti specifici dell'esperimento.

Nella terza fase viene calcolata la funzione di merito scalare. Le quattro metriche vengono anzitutto ricondotte a un punteggio di bontà normalizzato in $[0, 1]$, dove 1 corrisponde al valore ideale raggiunto dalla configurazione migliore della griglia filtrata su quella singola metrica:

$$f_{\eta} = \frac{\eta}{\eta_{\max}}, \quad f_Q = 1 - \frac{Q}{Q_{\max}}, \quad f_{\text{DoF}} = \frac{\text{DoF}}{\text{DoF}_{\max}}, \quad f_M = 1 - \frac{|M - M_t|}{|M - M_t|_{\max}} \quad (5.1)$$

dove M_t è la magnificazione target e i valori di normalizzazione sono i massimi calcolati sull'insieme delle configurazioni filtrate; per Q e $|M - M_t|$ si usa il complemento normalizzato, in modo che un valore basso (aberrazione minore, distorsione di magnificazione minore) corrisponda a un contributo elevato. Il punto ideale nello spazio normalizzato è $(f_{\eta}, f_Q, f_{\text{DoF}}, f_M) = (1, 1, 1, 1)$, non necessariamente raggiunto simultaneamente da nessuna configurazione reale della griglia. Nell'analisi qui presentata si adotta $M_t = 0.2$: il fotocatodo GaAsP (16 mm di lato) è sensibilmente più piccolo dello scintillatore attivo (60 mm lungo l'asse), e una demagnificazione dell'ordine di $16/60 \approx 0.27$ è quindi necessaria, non solo desiderabile, per contenere l'immagine dell'intera estensione utile dello scintillatore entro l'area attiva del fotocatodo.

Le quattro metriche normalizzate vengono aggregate tramite una scalarizzazione di Tchebycheff pesata e aumentata [30, 31], che minimizza lo scarto normalizzato

peggiore rispetto al punto ideale invece di sommare i contributi:

$$S_{\text{cheby}}(x_1, x_2) = \max_i [w_i (1 - f_i)] + \rho \sum_i [w_i (1 - f_i)], \quad i \in \{\eta, Q, \text{DoF}, M\} \quad (5.2)$$

dove i pesi soddisfano $w_\eta + w_Q + w_{\text{DoF}} + w_M = 1$ (normalizzati automaticamente se la loro somma differisce dall'unità) e $\rho = 10^{-4}$ è un piccolo termine di augmentation [31] che garantisce l'efficienza in senso stretto del punto selezionato (mai debolmente dominato), a differenza della formulazione min-max pura. Vince la configurazione con S_{cheby} minimo (idealmente 0). I pesi riflettono le priorità fisiche dell'esperimento RIPTIDE e possono essere impostati liberamente in funzione dei requisiti specifici; tre insiemi di pesi concreti, motivati da altrettante priorità operative, sono esaminati nell'analisi di sensibilità della Sezione 5.1.3.

In una prima versione dell'analisi le quattro metriche venivano invece aggregate tramite una somma pesata lineare,

$$M_{\text{tot}}(x_1, x_2) = w_\eta f_\eta + w_Q f_Q + w_{\text{DoF}} f_{\text{DoF}} + w_M f_M, \quad (5.3)$$

più immediata da interpretare ma soggetta a un limite intrinseco: per costruzione può selezionare come vincitrice solo una configurazione che giace sull'involucro convesso del fronte di Pareto nello spazio delle metriche, indipendentemente dalla combinazione di pesi adottata [32]; una configurazione Pareto-ottima in una regione concava del fronte non risulterebbe mai vincitrice con M_{tot} . Per questo motivo si è adottata come metodo principale la scalarizzazione di Tchebycheff dell'Eq. 5.2, che non soffre di questa restrizione (si veda il confronto quantitativo in Sezione 5.1.3).

Nella quarta e ultima fase viene identificato il fronte di Pareto nello spazio a quattro dimensioni $(\eta, Q, \text{DoF}, |M - M_t|)$, le stesse quattro metriche che compaiono nella funzione di merito (Eq. 5.2). Una configurazione A domina una configurazione B se e solo se $\eta_A \geq \eta_B$, $Q_A \leq Q_B$, $\text{DoF}_A \geq \text{DoF}_B$ e $|M_A - M_t| \leq |M_B - M_t|$, con almeno una delle quattro disuguaglianze stretta. Il fronte di Pareto è l'insieme delle configurazioni non dominate da nessun'altra nella griglia filtrata. Le configurazioni sul fronte vengono ordinate per S_{cheby} crescente: la prima in classifica, di rango di Pareto pari a 1, costituisce la configurazione raccomandata $(x_1^{\text{racc}}, x_2^{\text{racc}})$ [29].

5.1.2 Ruolo della linearità nel processo di selezione

Il valore $\chi_{\text{piano}}^2/\text{ndof}$, definito in Sezione 4.2, misura la linearità della risposta di campo: un valore elevato indica deviazioni sistematiche dal modello affine, cioè un sistema che non si comporta come una lente ideale su tutto il campo visivo.

Valori prossimi all'unità segnalano che le deviazioni dalla linearità sono dell'ordine dell'incertezza statistica.

Il $\chi^2_{\text{piano}}/\text{ndof}$ non entra direttamente nel calcolo di S_{cheby} : viene riportato insieme alle altre metriche come diagnostica affiancata, senza contribuire al punteggio scalare. Questa scelta è deliberata. La linearità della risposta di campo è già catturata parzialmente dalla funzione Q , che misura la rettitudine delle tracce proiettate sul piano del rivelatore: inserire $\chi^2_{\text{piano}}/\text{ndof}$ in S_{cheby} introdurrebbe una doppia penalizzazione per le stesse aberrazioni, distorcendo il peso effettivo attribuito alla qualità ottica.

Tuttavia un $\chi^2_{\text{piano}}/\text{ndof}$ elevato segnala qualitativamente una configurazione problematica e deve essere considerato insieme a Q nella scelta finale. Non è possibile fissare una soglia quantitativa universale perchè il valore dipende dal numero di punti PSF validi nella griglia e dalla distribuzione angolare delle sorgenti simulate.

Il $\chi^2_{\text{piano}}/\text{ndof}$ è una diagnostica di supporto, non un criterio di esclusione automatico. Una configurazione con $\chi^2_{\text{piano}}/\text{ndof}$ elevato ma Q bassa e η elevata può comunque risultare raccomandata se il fronte di Pareto la seleziona: in tal caso è opportuno verificare manualmente la mappa del χ^2_{piano} (Figura 4.4, Sezione 4.2) per escludere anomalie localizzate.

5.1.3 Analisi di sensibilità ai pesi

I pesi w_η , w_Q , w_{DoF} , w_M non hanno una derivazione teorica unica ma riflettono le priorità fisiche dell'esperimento. Per illustrare come la configurazione raccomandata varia al variare di tali priorità, si considerano tre scenari operativi, riportati in Tabella 5.1.

Tabella 5.1: Tre scenari di pesi per la scalarizzazione di Tchebycheff (Eq. 5.2), con il filtro EE80 attivo a $\text{EE80}_{\text{max}} = 30 \text{ mm}$ per tutti e tre (Sezione 5.1.1). I pesi soddisfano $w_\eta + w_Q + w_{\text{DoF}} + w_M = 1$. La configurazione raccomandata è quella di rango 1 sul fronte di Pareto per ogni scenario. Per lo scenario a priorità magnificazione la scalarizzazione di Tchebycheff seleziona lo stesso punto della somma pesata lineare dell'Eq. 5.3, poiché quel vincitore si trova già sull'involucro convesso del fronte; per gli scenari bilanciato e a priorità DoF i due metodi selezionano invece punti diversi (si veda la discussione nel testo).

Scenario	w_η	w_Q	w_{DoF}	w_M	Config. racc. ($x_1^{\text{racc}}, x_2^{\text{racc}}$)
Priorità magnificazione	0.10	0.10	0.30	0.50	(120.0, 164.0)
Bilanciato	0.25	0.25	0.25	0.25	(99.0, 153.0)
Priorità profondità di campo	0.10	0.10	0.60	0.20	(87.0, 159.0)

Nello scenario a priorità magnificazione il peso maggiore ($w_M = 0.50$) è attribuito al controllo della distorsione geometrica rispetto alla magnificazione target, con un contributo secondario ($w_{\text{DoF}} = 0.30$) alla profondità di campo: questo scenario è rilevante quando la compatibilità geometrica dell'immagine con l'area attiva del fotocatodo costituisce il vincolo dominante. Lo scenario bilanciato assegna peso uniforme (0.25) a tutte e quattro le metriche, senza introdurre alcuna priorità relativa, e rappresenta il caso di riferimento in assenza di requisiti aggiuntivi specifici. Lo scenario a priorità DoF concentra la maggior parte del peso ($w_{\text{DoF}} = 0.60$) sulla profondità di campo, utile quando le tracce da ricostruire spaziano su un ampio intervallo lungo l'asse dello scintillatore e la tolleranza al defocus costituisce il requisito critico. La stabilità della configurazione raccomandata tra i tre scenari costituisce un indicatore di robustezza: se $(x_1^{\text{racc}}, x_2^{\text{racc}})$ coincide, o rimane confinata in una regione ristretta del piano, in tutti e tre i casi, la scelta è di fatto poco sensibile alla specifica attribuzione dei pesi. I tre scenari di Tabella 5.1 mostrano una sensibilità concentrata prevalentemente su x_1 : la coordinata x_2 resta confinata in un intervallo relativamente contenuto, 153–164 mm, pur senza variare in modo monotono al crescere del peso attribuito alla profondità di campo (il minimo si trova proprio nello scenario bilanciato), mentre x_1 si sposta in modo monotono da 120.0 mm (priorità magnificazione) a 99.0 mm (bilanciato) fino a 87.0 mm (priorità DoF), spaziando su circa 33 mm. La posizione della prima lente resta quindi il grado di libertà principale su cui si gioca il compromesso tra magnificazione e profondità di campo, mentre la seconda lente varia entro un intervallo più ristretto ma non del tutto insensibile alla scelta dei pesi.

Concentrazione della configurazione raccomandata nello spazio dei pesi. Oltre ai tre scenari discreti discussi sopra, è possibile esplorare più sistematicamente l'intero spazio dei pesi ammissibili – il semplice $w_\eta + w_Q + w_{\text{DoF}} + w_M = 1$ con $w_i \geq 0$ – campionando un numero elevato di combinazioni e ricalcolando per ciascuna, a parità di fronte di Pareto e di filtri di hard constraint, quale configurazione minimizza S_{cheby} (Eq. 5.2). Il fronte di Pareto e i pre-filtri restano fissi per l'intera scansione dei pesi appena descritta: cambia solo la combinazione di pesi con cui S_{cheby} viene ricalcolato, il che rende economico esplorare griglie di alcune migliaia di punti sul semplice. Per ogni combinazione di pesi campionata viene registrata la configurazione vincente (x_1, x_2) : a ciascuna configurazione distinta che vince per almeno una combinazione viene assegnato un colore univoco, condiviso dai due grafici seguenti.

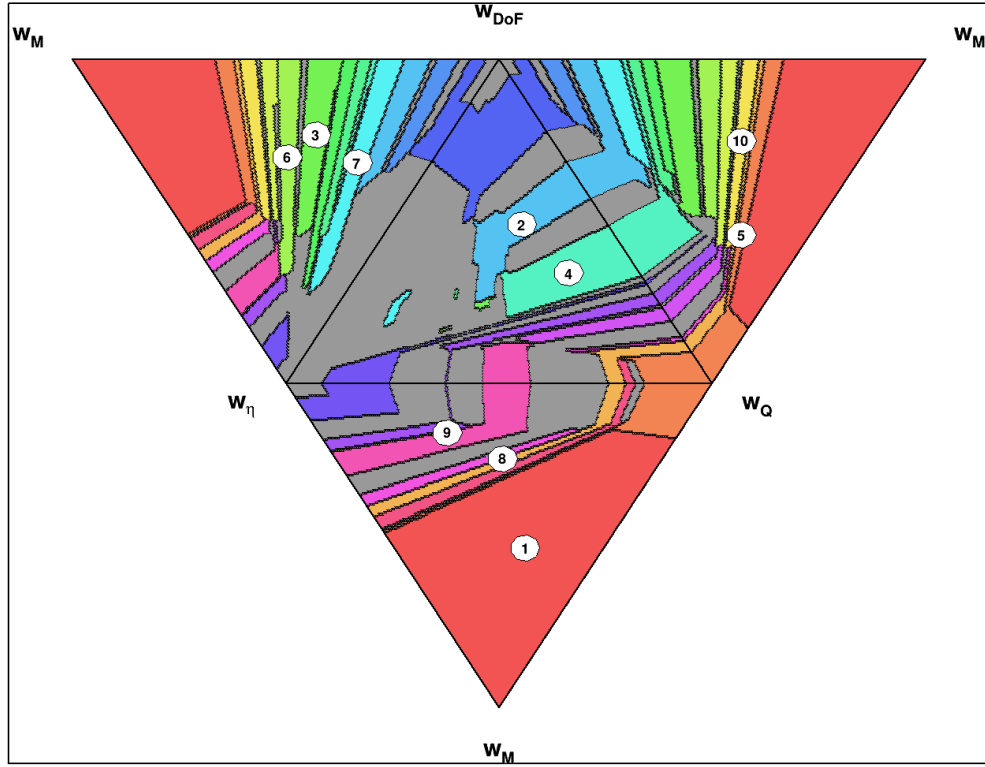
Come anticipato in Sezione 5.1.1, la scalarizzazione di Tchebycheff dell'Eq. 5.2 è stata adottata proprio per superare il limite di raggiungibilità della somma pesata

lineare dell'Eq. 5.3 [32]: sul fronte di Pareto qui considerato (158 configurazioni), la somma pesata raggiungerebbe come vincitrice solo una minoranza del fronte (32 configurazioni su 158, circa il 20%) al variare dei pesi sull'intero simpleso ammissibile. Con la scalarizzazione di Tchebycheff, invece, tutte le 158 configurazioni del fronte risultano vincitrici per almeno una combinazione di pesi: la scansione presentata in questa sezione fornisce quindi una mappa completa di raggiungibilità in funzione delle priorità relative attribuite alle quattro metriche, senza il limite di reperibilità della somma pesata.

Poiché lo spazio dei pesi ha quattro componenti $(w_\eta, w_Q, w_{\text{DoF}}, w_M)$, la sua rappresentazione richiede una tecnica di visualizzazione per sistemi di composizione quaternari: si adotta lo sviluppo piano (*net*) del tetraedro regolare dei pesi [33], illustrato in Figura 5.1. Il triangolo centrale è la faccia $w_M = 0$ del tetraedro, con coordinate baricentriche $(w_\eta, w_Q, w_{\text{DoF}})$; le altre tre facce del tetraedro ($w_\eta = 0$, $w_Q = 0$, $w_{\text{DoF}} = 0$) sono ribaltate verso l'esterno sui lati che condividono con la faccia centrale, così che i tre apici esterni corrispondano tutti allo stesso vertice $w_M = 1$ del tetraedro originario. Ogni regione colorata è la proiezione della configurazione vincente per quella combinazione di pesi secondo la scalarizzazione di Tchebycheff, con un contorno nero tra regioni confinanti per evitare ambiguità tra colori simili di categorie adiacenti. Data l'elevata numerosità di configurazioni vincenti – tutte le 158 del fronte – le categorie che occupano meno dell'1% dello spazio dei pesi sono raggruppate in grigio nella resa grafica (138 configurazioni su 158, pari complessivamente al 23.6% dell'area); le restanti configurazioni sono mostrate con colore individuale, e le dieci che occupano la porzione maggiore dello spazio dei pesi sono numerate da 1 a 10, con la stessa numerazione condivisa tra questa figura e la mappa fisica di Figura 5.2, che usa la medesima palette categoriale. I due pannelli sono complementari e vanno letti congiuntamente: il ternario mostra in quale regione dello spazio dei pesi si trova ciascuna configurazione vincente, la mappa fisica – qui inquadrata in prossimità della regione occupata dalle configurazioni vincenti – mostra dove quella configurazione si colloca effettivamente nel piano (x_1, x_2) .

La concentrazione spaziale delle configurazioni vincenti in Figura 5.2 fornisce un indicatore di robustezza più fine dei soli tre scenari nominali di Tabella 5.1: se le regioni colorate occupano una porzione ristretta del piano (x_1, x_2) , la selezione è sostanzialmente indipendente dai pesi adottati; se invece le configurazioni vincenti sono numerose e sparse, la scelta finale è sensibile alle priorità relative attribuite alle quattro metriche, e la giustificazione fisica dei pesi adottati (Sezione 5.1.3) assume un ruolo più rilevante nella decisione finale. La raggiungibilità completa del fronte con la scalarizzazione di Tchebycheff rivela una sensibilità ai pesi più ampia di

Scansione dei pesi di Pareto - sviluppo (net) del tetraedro dei pesi ($w_\eta, w_Q, w_{DoF}, w_M$)



Colore = configurazione (x_1, x_2) vincente; contorni neri = confine tra regioni.

Etichette numerate 1..10 sul net = top configurazioni per frazione dello spazio dei pesi vinta (v. mappa fisica).

Grigio = 138 configurazioni minori (ciascuna $< 1.0\%$ dello spazio dei pesi; insieme: 23.6% dell'area).

Figura 5.1: Sviluppo piano (*net*) del tetraedro dei pesi $(w_\eta, w_Q, w_{DoF}, w_M)$ sul semplice ammissibile [33]: triangolo centrale = faccia $w_M = 0$ in coordinate baricentriche (w_η, w_Q, w_{DoF}) , i tre lembi ribaltati sono le facce $w_\eta = 0$, $w_Q = 0$, $w_{DoF} = 0$, con apice esterno comune $w_M = 1$. Ogni regione colorata è la configurazione (x_1, x_2) che minimizza S_{cheby} (Eq. 5.2) per quella combinazione di pesi, con contorno nero tra regioni confinanti; grigio = configurazioni che vincono su meno dell'1% dello spazio dei pesi, raggruppate per leggibilità. Le etichette numerate 1–10 indicano le configurazioni che occupano la porzione maggiore dello spazio dei pesi, con la stessa numerazione della mappa fisica di Figura 5.2.

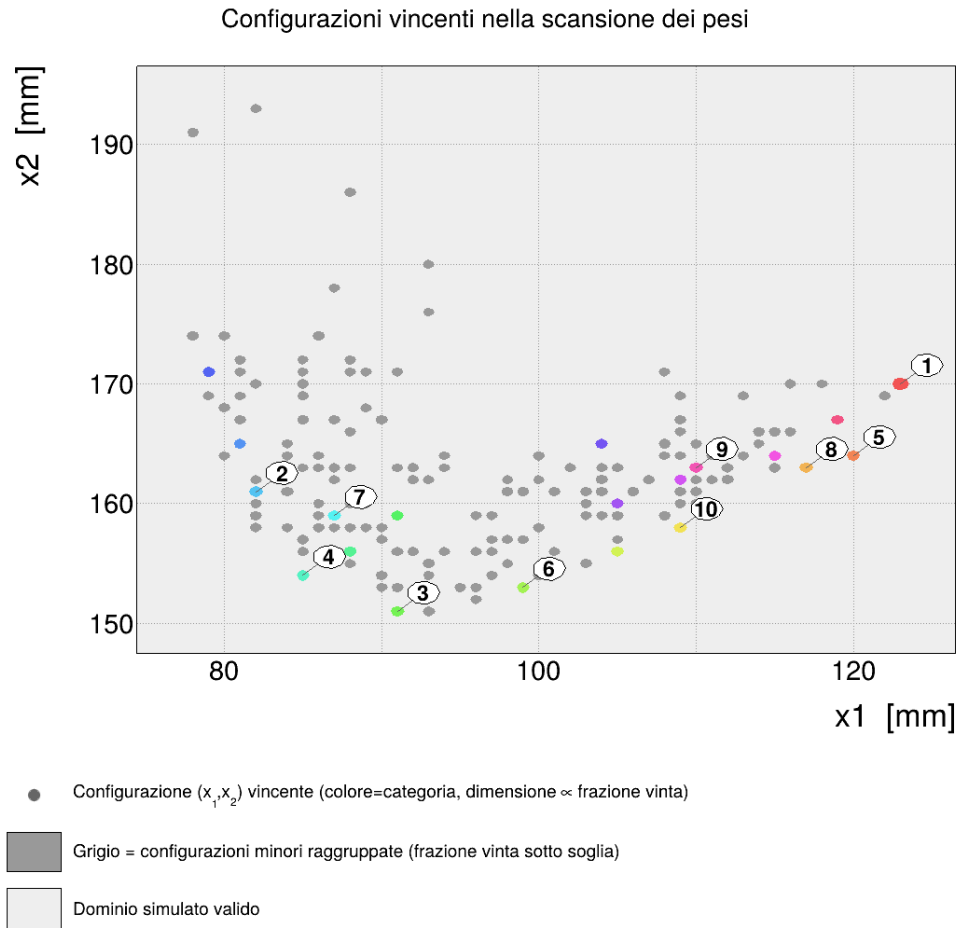


Figura 5.2: Configurazioni vincenti nello sweep dei pesi secondo la scalarizzazione di Tchebycheff, nel dominio fisico (x_1, x_2) , a parità di fronte di Pareto e di filtri di hard constraint; stessa palette categoriale e stessa numerazione 1–10 di Figura 5.1. Grigio = configurazioni che vincono su meno dell'1% dello spazio dei pesi, raggruppate per leggibilità; dimensione del marcatore proporzionale alla frazione di spazio dei pesi vinta. Tutte le 158 configurazioni del fronte di Pareto risultano vincitrici per almeno una combinazione di pesi (si veda la discussione nel testo).

quella suggerita dalla sola somma pesata lineare; tuttavia le dieci configurazioni che occupano la porzione maggiore dello spazio dei pesi restano spazialmente concentrate in una regione ristretta del piano (x_1, x_2) , a conferma qualitativa della robustezza già osservata nei tre scenari discreti.

5.1.4 Output grafico e configurazione raccomandata

Per ciascuno scenario di pesi si costruisce uno scatter plot nel piano $(\eta/\eta_{\max}, Q_{\max}/Q)$ per tutte le configurazioni che superano i filtri di hard constraint. L'asse x rappresenta l'efficienza normalizzata: un valore maggiore indica una migliore raccolta di fotoni. L'asse y rappresenta l'inverso normalizzato di Q : un valore maggiore indica una migliore qualità ottica, ovvero una minore aberrazione. Ogni punto corrisponde a una configurazione (x_1, x_2) . Il colore di ciascun punto codifica la magnificazione assoluta M tramite una scala di colore continua: i punti più chiari corrispondono a una magnificazione maggiore. La dimensione del marker è proporzionale a DoF: marker più grandi indicano configurazioni con maggiore profondità di campo. I punti sul fronte di Pareto sono evidenziati con un bordo rosso. La configurazione raccomandata (rango di Pareto 1) è marcata con una stella, con contorno rosso più ampio e riempimento interno colorato secondo la stessa scala di M usata per gli altri punti. La Figura 5.3 mostra questo scatter plot per lo scenario bilanciato.

Configurazione raccomandata (scenario bilanciato). $x_1^{\text{racc}} = 99.0$ mm, $x_2^{\text{racc}} = 153.0$ mm. $\eta = 0.021$, $Q = 33.350$, DoF = 51.0 mm, $M = 0.618$, $S_{\text{cheby}} = 0.103$. La configurazione soddisfa il filtro EE80 con EE80 = 29.212 mm. Il valore $\chi_{\text{piano}}^2 = 93.006$ è contenuto e non segnala anomalie di linearità. La qualità ottica Q non è la più bassa disponibile sul fronte, ma lo scenario bilanciato attribuisce a Q lo stesso peso (0.25) delle altre tre metriche: il guadagno su η e DoF compensa una qualità ottica non ottimale, come atteso dalla discussione di Sezione 5.1.2; si veda comunque la mappa del χ_{piano}^2 (Figura 4.4) per la verifica puntuale.

5.1.5 Discussione

Le metriche prodotte dalle fasi precedenti — efficienza geometrica, qualità ottica, profondità di campo, magnificazione e, opzionalmente, EE80 — sono ora aggregate in un'unica raccomandazione operativa per la scelta della configurazione ottimale della coppia di modelli di lente. L'approccio scalare tramite la scalarizzazione di Tchebycheff (Eq. 5.2) fornisce un ordinamento totale delle configurazioni filtrate, direttamente applicabile quando le priorità fisiche sono note a priori; l'approccio tramite fronte di Pareto [29] rende invece esplicito il compromesso tra efficienza e

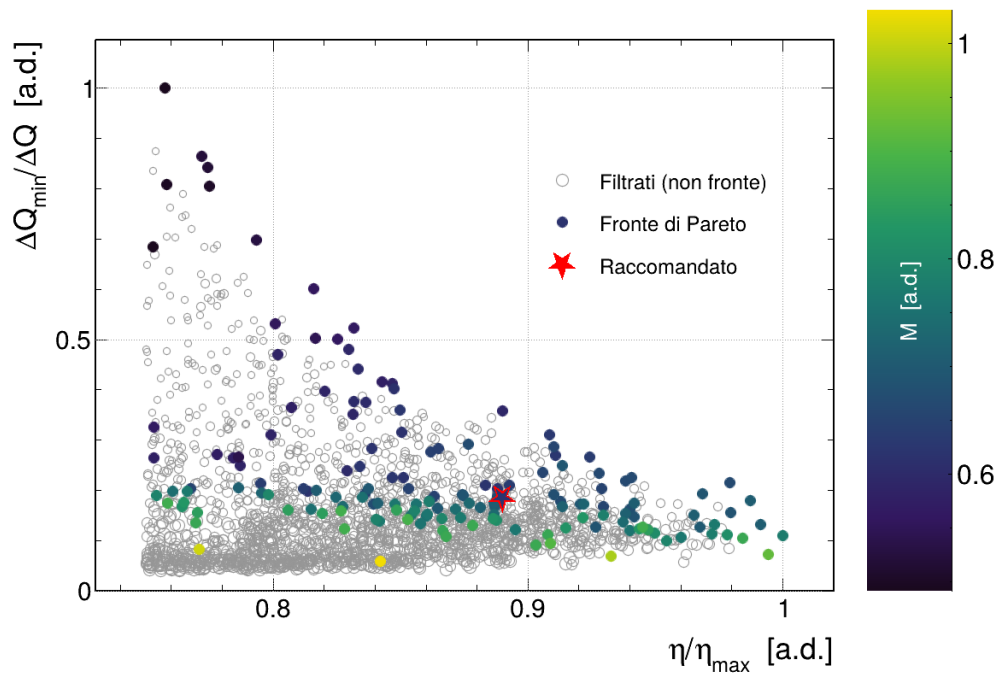


Figura 5.3: Scatter plot del fronte di Pareto nel piano $(\eta/\eta_{\max}, Q_{\max}/Q)$ per tutte le configurazioni che superano i filtri hard constraint, per lo scenario bilanciato di Tabella 5.1. Colore: magnificazione assoluta M (scala continua, più chiaro = magnificazione maggiore). Dimensione marker: proporzionale a DoF. Bordo rosso: fronte di Pareto. Stella rossa: configurazione raccomandata $(x_1^{\text{racc}}, x_2^{\text{racc}})$.

qualità ottica senza richiedere la specificazione preventiva dei pesi. Nessuna configurazione sul fronte di Pareto è intrinsecamente scorretta: ogni punto del fronte è ottimale rispetto a un certo insieme di priorità, e la scelta tra di essi è determinata dai requisiti fisici dell'esperimento.

L'insieme completo delle configurazioni filtrate viene conservato in forma tabellare, con il rango di Pareto, il valore di S_{cheby} e l'insieme completo delle metriche (incluso $\chi^2_{\text{piano}}/\text{ndof}$ come diagnostica e, se disponibile, il valore EE80). Questo formato consente selezioni post-hoc con criteri diversi da quelli adottati in questa analisi, senza richiedere di rieseguire la simulazione.

La verifica sperimentale di η e DoF condotta nelle Sezioni 3.2 e 4.5 fornisce una validazione qualitativa del ranking simulato: la concordanza tra le misure sperimentali e i valori attesi dalla simulazione Geant4 supporta l'affidabilità delle metriche aggregate in M_{tot} . Un disaccordo sistematico tra simulazione e misura per una delle metriche segnalerebbe la necessità di riscalarne i corrispondenti valori simulati prima di applicare la selezione Pareto [29].

5.1.6 Sensibilità alla magnificazione target

La scelta di M_t (Sezione 5.1.1) meriterebbe la stessa verifica di robustezza applicata ai pesi (Sezione 5.1.3). A titolo di confronto, la Tabella 5.2 riporta la configurazione raccomandata dello scenario bilanciato ricalcolata per $M_t = 0.5$ accanto a quella per $M_t = 0.2$ già discussa in questo capitolo. Il ricalcolo riusa i valori di M già prodotti dalla scansione DoF (Sezione 4.4.5) – una proprietà fisica della configurazione indipendente dal target scelto per il confronto – senza richiedere una nuova simulazione.

Tabella 5.2: Confronto tra la configurazione raccomandata (scenario bilanciato) per due valori della magnificazione target: $M_t = 0.2$, adottato in questo capitolo, e $M_t = 0.5$, ricalcolato a partire dagli stessi dati M già disponibili. Il valore di S_{cheby} non è confrontabile in valore assoluto tra le due righe, poiché dipende direttamente dal target adottato per la normalizzazione della magnificazione; è riportato solo come riferimento interno a ciascuna riga.

M_t	x_1 (mm)	x_2 (mm)	η	Q	DoF (mm)	M	S_{cheby}
0.2	99.0	153.0	0.0215	33.350	51.0	0.618	0.1026
0.5	90.0	154.0	0.0208	34.561	59.5	0.690	0.0664

A differenza della sostanziale stabilità osservata al variare dei pesi (Sezione 5.1.3), la configurazione raccomandata si sposta in modo apprezzabile al variare di M_t : la posizione della prima lente scende da $x_1 = 99.0$ mm a $x_1 = 90.0$ mm, e la profondità

di campo cresce da 51.0 a 59.5 mm, a scapito di una linearità di campo leggermente peggiore – coerente fisicamente, poiché innalzare il target di magnificazione sposta la selezione verso configurazioni a focale più corta e maggiore ingrandimento. Nessuna delle due configurazioni raccomandate compare tra le prime dieci dell’altro target: la coppia (99.0, 153.0) scende al rango 48 per $M_t = 0.5$, mentre (90.0, 154.0) scende al rango 44 per $M_t = 0.2$. La dimensione del fronte di Pareto resta sostanzialmente invariata (158 configurazioni per $M_t = 0.2$, 159 per $M_t = 0.5$), per cui la sensibilità osservata non è un artefatto di degenerazione del fronte, ma riflette un genuino spostamento della regione ottimale nel piano (x_1, x_2) .

A differenza dei pesi – la cui attribuzione riflette priorità operative in una certa misura negoziabili – M_t è vincolato dalla geometria fisica del sistema (rapporto tra le dimensioni del fotocatodo e dello scintillatore, Sezione 5.1.1). La raccomandazione finale dipende quindi in modo sostanziale da quale valore di M_t meglio rappresenta i requisiti dell’esperimento: un aspetto da fissare con cura a monte dell’analisi, più che un parametro su cui verificarne a posteriori la robustezza.

Conclusioni

Questo lavoro ha affrontato l'ottimizzazione del sistema ottico del rivelatore RIP-TIDE, basato su una coppia di lenti, un intensificatore di immagine MCP e una camera CMOS veloce, che ricostruisce le tracce dei protoni di rinculo prodotti dalla diffusione elastica neutrone-protone. La posizione delle due lenti (x_1, x_2) determina simultaneamente quattro grandezze in competizione: l'efficienza fotonica η , la qualità ottica Q , la profondità di campo (DoF) e la magnificazione M . L'obiettivo della tesi è stato costruire, tramite simulazione Geant4 e seguente validazione sperimentale, un metodo sistematico per esplorare lo spazio delle configurazioni e identificarne il miglior compromesso.

Il percorso ha attraversato tre fasi: uno screening sull'efficienza geometrica per selezionare le tipologie di lente più promettenti; la caratterizzazione ottica in modalità di fuoco mobile, con qualità ottica, DoF e magnificazione per ciascuna configurazione; infine l'aggregazione delle quattro metriche in un'analisi multi-obiettivo di Pareto. Tre esperimenti indipendenti con sorgenti LED e laser hanno confermato le gerarchie previste dalla simulazione.

Un risultato centrale è che *non esiste un'unica configurazione ottimale in senso assoluto*: le quattro metriche non raggiungono il proprio ottimo nella stessa regione di (x_1, x_2) , e migliorare l'una comporta tipicamente un peggioramento di un'altra. Non è un limite del metodo ma una proprietà intrinseca del sistema, che il fronte di Pareto rende esplicita: ogni punto del fronte è ottimale rispetto a un diverso bilanciamento delle priorità, e la scelta dipende da quale requisito è più critico per l'esperimento da condurre. L'analisi di sensibilità mostra però che x_1 è il vero grado di libertà del compromesso, spostandosi in modo monotono da 120.0 mm se prevale la fedeltà geometrica a 99.0 mm nello scenario bilanciato ($x_2 = 153.0$ mm, $\eta = 0.021$, DoF = 51.0 mm, $M = 0.618$) fino a 87.0 mm se prevale la tolleranza al defocus, mentre x_2 resta confinata in un intervallo più contenuto (153–164 mm).

Il contributo di questa tesi è dunque una pipeline riproducibile – dalla simulazione Geant4 all'analisi di Pareto, validata sperimentalmente – che converte i requisiti fisici di un dato esperimento RIPTIDE in una configurazione ottica ottimale, senza ripetere l'intera simulazione ad ogni cambio di priorità.

Bibliografia

- [1] H. Paganetti (ed.), *Proton Therapy Physics*, CRC Press / Taylor & Francis, 2012. DOI:[10.1201/b11448](https://doi.org/10.1201/b11448)
- [2] E. L. Chupp et al., “Solar Neutron Emissivity During the Large Flare on 1982 June 3”, *The Astrophysical Journal*, 318, 913–925, 1987. DOI:[10.1086/165423](https://doi.org/10.1086/165423)
- [3] C. Iliadis, *Nuclear Physics of Stars*, 2^a ed., Wiley-VCH, 2015. ISBN: 978-3-527-33648-7. DOI:[10.1002/9783527692668](https://doi.org/10.1002/9783527692668)
- [4] D. A. Brown et al., “ENDF/B-VIII.0: The 8th Major Release of the Nuclear Reaction Data Library with CIELO-project Cross Sections, New Standards and Thermal Scattering Data”, *Nuclear Data Sheets*, 148, 1–142, 2018. DOI:[10.1016/j.nds.2018.02.001](https://doi.org/10.1016/j.nds.2018.02.001)
- [5] G. F. Knoll, *Radiation Detection and Measurement*, 4^a ed., Wiley, 2010. ISBN: 978-0-470-13148-0.
- [6] A. Musumarra et al., “RIPTIDE: a novel recoil-proton track imaging detector for fast neutrons”, *Journal of Instrumentation*, 16, C12013, 2021. DOI:[10.1088/1748-0221/16/12/C12013](https://doi.org/10.1088/1748-0221/16/12/C12013)
- [7] M. Marafini et al., “MONDO: a neutron tracker for particle therapy secondary emission characterisation”, *Physics in Medicine & Biology*, 62, 3299–3312, 2017. DOI:[10.1088/1361-6560/aa623a](https://doi.org/10.1088/1361-6560/aa623a)
- [8] G. A. De Nolfo et al., “Next-generation SOLar Neutron TRACking (SONTRAC) instrument”, *Nuclear Instruments and Methods A*, 1054, 168352, 2023. DOI:[10.1016/j.nima.2023.168352](https://doi.org/10.1016/j.nima.2023.168352)
- [9] C. Massimi et al., “RIPTIDE — an innovative recoil-proton track imaging detector”, *Journal of Instrumentation*, 17, C09026, 2022. DOI:[10.1088/1748-0221/17/09/C09026](https://doi.org/10.1088/1748-0221/17/09/C09026)
- [10] P. Console Camprini et al., “A proton-recoil track imaging system for fast neutrons: the RIPTIDE detector”, *Journal of Instrumentation*, 18, C01054, 2023. DOI:[10.1088/1748-0221/18/01/C01054](https://doi.org/10.1088/1748-0221/18/01/C01054)
- [11] C. Pisanti, A. Berardi, P. Console Camprini, F. Giacomini, C. Massimi, A. Mengarelli, A. Musumarra, M. G. Pellegriti, R. Ridolfi, R. Spighi, N. Terranova,

- M. Villa, “Riptide: a proton-recoil track imaging detector for fast neutrons”, *Journal of Instrumentation*, 19, C02074, 2024 (preprint: arXiv:2312.06676 [physics.ins-det], 2023). DOI:10.1088/1748-0221/19/02/C02074
- [12] C. Pisanti, S. Cecchini, P. Console Camprini, F. Giacomini, S. Lanzi, C. Massimi et al., “Sensor performance evaluation for candidate photon readout systems in the RIPTIDE detector”, *Applied Radiation and Isotopes*, 225, 112077, 2025. DOI:10.1016/j.apradiso.2025.112077
- [13] S. Lanzi, P. Console Camprini, F. Giacomini, C. Massimi, A. Mengarelli, C. Pisanti, R. Ridolfi, R. Spighi, M. Villa, “First observation of minimum ionising particle tracks in the RIPTIDE detector”, *Journal of Instrumentation*, 21, C06012, 2026. DOI:10.1088/1748-0221/21/06/C06012
- [14] S. Lanzi et al., “Progress in experimental setup and reconstruction algorithms in RIPTIDE”, *Journal of Instrumentation*, 20(12), C12030, 2025. DOI:10.1088/1748-0221/20/12/C12030
- [15] S. Lanzi, *Development of Imaging Techniques for Scintillation Light Tracks in a Novel Neutron Detector*, Tesi di Laurea Magistrale in Fisica, Alma Mater Studiorum – Università di Bologna, A.A. 2023/2024. Relatore: C. Massimi; Correlatore: F. Giacomini.
- [16] S. Agostinelli et al. (GEANT4 Collaboration), “GEANT4 — a simulation toolkit”, *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research A*, 506, 250–303, 2003. DOI:10.1016/S0168-9002(03)01368-8
- [17] M. Born, E. Wolf, *Principles of Optics*, 7^a ed., Cambridge University Press, 1999. DOI:10.1017/CBO9781139644181
- [18] H. Markowitz, “Portfolio Selection”, *The Journal of Finance*, 7(1), 77–91, 1952. DOI:10.2307/2975974
- [19] P. Auer, N. Cesa-Bianchi, P. Fischer, “Finite-time Analysis of the Multiarmed Bandit Problem”, *Machine Learning*, 47(2–3), 235–256, 2002. DOI:10.1023/A:1013689704352
- [20] P. B. Stetson, “DAOPHOT: A Computer Program for Crowded-Field Stellar Photometry”, *Publications of the Astronomical Society of the Pacific*, 99, 191–222, 1987. DOI:10.1086/131977
- [21] T. W. Anderson, *An Introduction to Multivariate Statistical Analysis*, 3^a ed., Wiley, 2003. ISBN: 978-0-471-36091-9.
- [22] K. V. Mardia, “Measures of multivariate skewness and kurtosis with

- applications”, *Biometrika*, 57(3), 519–530, 1970. DOI:10.1093/biomet/57.3.519
- [23] A. Cerioli, “Multivariate Outlier Detection with High-Breakdown Estimators”, *Journal of the American Statistical Association*, 105(489), 147–156, 2010. DOI:10.1198/jasa.2009.tm09147
- [24] P. T. Boggs, J. E. Rogers, “Orthogonal Distance Regression”, *Contemporary Mathematics*, 112, 183–194, 1990. American Mathematical Society. DOI:10.1090/conm/112/1087109
- [25] R. Frühwirth, M. Regler, R. K. Bock, H. Grote, D. Notz, *Data Analysis Techniques for High-Energy Physics*, 2^a ed., Cambridge University Press, 2000. ISBN: 978-0-521-63219-5.
- [26] T. W. Anderson, *The Statistical Analysis of Time Series*, Wiley, 1971. ISBN: 0-471-02900-9. DOI:10.1002/9781118186428
- [27] ISO 11146-1:2005, *Lasers and laser-related equipment — Test methods for laser beam widths, divergence angles and beam propagation ratios — Part 1: Stigmatic and simple astigmatic beams*, International Organization for Standardization, Geneva, 2005.
- [28] D. J. Schroeder, *Astronomical Optics*, 2^a ed., Academic Press, 2000. ISBN: 0-12-629810-6. DOI:10.1016/B978-0-12-629810-9.X5000-2
- [29] K. Deb, *Multi-Objective Optimization Using Evolutionary Algorithms*, Wiley, 2001. ISBN: 978-0-471-87339-6.
- [30] R. E. Steuer, E. U. Choo, “An interactive weighted Tchebycheff procedure for multiple objective programming”, *Mathematical Programming*, 26, 326–344, 1983. DOI:10.1007/BF02591870
- [31] K. Miettinen, *Nonlinear Multiobjective Optimization*, Kluwer Academic Publishers, 1999. ISBN: 0-7923-8278-1. DOI:10.1007/978-1-4615-5563-6
- [32] I. Das, J. E. Dennis, “A closer look at drawbacks of minimizing weighted sums of objectives for Pareto set generation in multicriteria optimization problems”, *Structural Optimization*, 14, 63–69, 1997. DOI:10.1007/BF01197559
- [33] T. Shimura, A. I. S. Kemp, “Tetrahedral plot diagram: A geometrical solution for quaternary systems”, *American Mineralogist*, 100(11–12), 2545–2547, 2015. DOI:10.2138/am-2015-5371