

ALMA MATER STUDIORUM
Università degli Studi di Bologna

DIPARTIMENTO DI FISICA E ASTRONOMIA "AUGUSTO RIGHI"

CORSO DI LAUREA TRIENNALE IN FISICA

STUDIO DELLA MATERIA OSCURA TRAMITE STRONG
GRAVITATIONAL LENSING

Relatrice: Prof.ssa Giulia Despali

Elaborato Finale di:
Sabrina Notarpietro
Matr. Nr. 0001131483

ANNO ACCADEMICO 2025-2026

“A lui bastava sapere che l’universo era pieno di cose meravigliose e di bellezza, e non aveva mai chiesto altro - e ora si rendeva conto di sperare con tutte le proprie forze che nulla potesse mai corrompere quelle cose meravigliose e quella bellezza.”

– Clifford D. Simak, Mondi senza fine

*Ai sognatori e alle sognatrici di ogni età,
che hanno ancora il coraggio di osare.*

Sommario

Il termine *dunkle Materie*, ovvero materia oscura, venne coniato da Zwicky in un articolo del 1933 per giustificare una forte discrepanza rilevata tra la massa dinamica e la massa osservabile di un ammasso. Oggi, a quasi cento anni di distanza, gli scienziati sono convinti che essa sia la componente dominante della materia del nostro Universo, ma non ne hanno ancora compreso la natura microscopica. Sono stati avanzati diversi modelli teorici; il più accreditato è quello della materia oscura fredda (*Cold Dark Matter*, CDM), che riesce a descrivere con successo l'evoluzione dell'Universo su scale cosmologiche, ma presenta tensioni su scala galattica e sub-galattica rispetto ai risultati osservativi. Possibili proposte alternative comprendono la *Warm Dark Matter* (WDM) e la *Self Interacting Dark Matter* (SIDM).

In questo elaborato si mostra come lo *strong gravitational lensing*, ovvero l'effetto di lente gravitazionale forte, può essere utilizzato per porre vincoli osservativi sui diversi modelli proposti, ponendosi fra le tecniche più promettenti per lo studio della materia oscura su piccola scala.

Data la complessità del problema affrontato, all'approccio basato sull'inferenza bayesiana gerarchica vengono affiancate simulazioni in ambiente controllato, con l'obiettivo di sviluppare un'intuizione fisica dei fenomeni coinvolti, pur senza riprodurre tutte le complessità osservative. Nella parte finale di questa tesi vengono quindi analizzati gli effetti della variazione dei parametri fisici e geometrici del sistema, sia in assenza sia in presenza di sotto-strutture, evidenziando le differenti firme gravitazionali associate a diversi profili di densità e discutendo al contempo i limiti del modello adottato.

Indice

1	Contesto cosmologico	1
1.1	Il modello Λ CDM	1
1.1.1	Il principio cosmologico e le equazioni di Friedmann	1
1.1.2	Il parametro di densità	4
1.1.3	Formazione gerarchica delle strutture	6
1.2	La materia oscura	9
1.2.1	Evidenze osservative	9
1.2.2	Predizioni del modello CDM	12
1.2.3	Problemi del modello CDM su piccola scala	14
1.2.4	Modelli alternativi: WDM e SIDM	15
2	Le basi dello strong gravitational lensing	19
2.1	Geometria e parametri fondamentali	19
2.1.1	Il principio di Fermat e l'angolo di deflessione	20
2.1.2	L'equazione della lente	22
2.2	Il potenziale della lente	24
2.2.1	Convergenza, magnificazione e distorsione	25
2.2.2	Formazione delle immagini	27
2.2.3	Il modello isoterma ellittico	30
2.3	Le galassie ellittiche come lenti	32
2.3.1	Vantaggi dello strong lensing nello studio delle galassie ellittiche	33
2.3.2	Vincoli sul profilo di massa totale tramite strong lensing	33
2.3.3	Osservabili e degenerazioni principali	38
3	Rilevazioni di sub-aloni di DM tramite SGL	41
3.1	Il lensing come strumento di indagine della materia oscura	41
3.1.1	Anomalie nei rapporti di flusso	42
3.1.2	Perturbazioni alla brillantezza superficiale	43
3.2	Modelling dei sistemi di strong gravitational lensing	46
3.2.1	Modello della lente principale	47

3.2.2	Modello dei sub-aloni	48
3.3	Vincoli attuali della letteratura	50
3.3.1	Rilevazioni individuali di sub-aloni	51
3.3.2	Vincoli statistici sui modelli di DM	54
4	Simulazioni di immagini lensate	57
4.1	Il software utilizzato	57
4.1.1	Introduzione a PyLensLib	58
4.1.2	Architettura del codice	58
4.2	Sistema privo di perturbazioni	62
4.2.1	Effetto della variazione della dispersione di velocità	62
4.2.2	Effetto del disallineamento rispetto alla linea di vista	64
4.3	Introduzione di un perturbatore	67
4.3.1	Perturbatore modellato tramite profilo SIE	67
4.3.2	Perturbatore modellato tramite profilo NFW	70
5	Conclusioni	75
A	Esempio di codice sviluppato	77
	Bibliografia	83
	Ringraziamenti	87

1

Contesto cosmologico

1.1 Il modello Λ CDM

La *cosmologia* è la disciplina che studia l'origine, la struttura e l'evoluzione dell'Universo nel suo complesso. Essa si basa su tre osservazioni fondamentali: il paradosso di Olbers, l'espansione dell'Universo e la radiazione cosmica di fondo. Inoltre, dalle osservazioni della distribuzione di galassie e oggetti nel cielo si deduce il principio cosmologico, che permette di semplificare la trattazione dell'Universo su ampia scala. Il *modello Λ CDM*, anche detto modello di concordanza, è la teoria che racchiude tutti i principali risultati che derivano da queste osservazioni. Esso prende il nome dai suoi due parametri più caratterizzanti: la costante cosmologica Λ , che si pensa sia legata alla cosiddetta energia oscura, responsabile dell'espansione accelerata dell'Universo, e la Cold Dark Matter (abbreviata spesso come CDM), materia oscura fredda che permette di conciliare al meglio le predizioni teoriche con i dati osservativi. Tra tutti gli aspetti del modello, questa tesi approfondirà in particolare quelli che permettono di comprendere l'origine della materia oscura e delle strutture cosmiche, indispensabili per introdurre il lensing gravitazionale discusso nei capitoli successivi.

1.1.1 Il principio cosmologico e le equazioni di Friedmann

Il *principio cosmologico* afferma che l'Universo, su larga scala, ovvero per distanze uguali o superiori a 100 Mpc, è omogeneo e isotropo (Ryden 2003). L'omogeneità rende equivalenti tutte le posizioni, mentre l'isotropia rende equivalenti tutte le direzioni nello spazio: l'Universo appare dunque sempre uguale, indipendentemente da dove o in che direzione viene puntato il telescopio. La principale evidenza osservativa a sostegno di tale principio è fornita dalla terza osservazione fondamentale, ovvero la *radiazione cosmica di fondo* (spesso abbreviata con la sigla CMB, dall'inglese Cosmic Microwave Background). Essa,

infatti, aderisce al profilo di un corpo nero di temperatura pari a $T_{CMB} = (2.725 \pm 0.001) K$ su tutto il piano del cielo, con anisotropie dell'ordine di $10^{-5} K$.

Osservare un cielo notturno buio dimostra che l'Universo non può essere eterno, ma deve avere un'età finita: infatti, solo i fotoni provenienti da distanze $d \leq c \cdot t$, dove c è la velocità della luce e t l'età dell'Universo, possono raggiungere i nostri telescopi; in caso contrario, si dovrebbe osservare un cielo uniformemente illuminato di luce stellare. Questa osservazione prende il nome di *Paradosso di Olbers*.

Diverse evidenze osservative, di cui le più importanti sono dovute ad Hubble e Lemaitre, indicano inoltre che le galassie si stanno allontanando le une dalle altre con velocità proporzionali alle loro distanze reciproche, seguendo la *legge di Hubble-Lemaitre*

$$v = H_0 D \quad (1.1)$$

Il fattore di proporzionalità prende il nome di costante di Hubble, ed il suo valore esatto è ancora molto dibattuto; tuttavia, il valore più recente, derivato dalle osservazioni nell'ambito del modello Λ CDM, è $H_0 = (67.4 \pm 0.5) \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ (Planck Collaboration 2020).

Quando si studia l'Universo su scale tanto ampie da rendere valido il principio cosmologico, ciò che determina come esso debba evolversi (e di conseguenza espandersi) è la gravità. Il campo gravitazionale è descritto dalla *Teoria della Relatività Generale* di Albert Einstein ed è la manifestazione della curvatura del tessuto spazio-temporale. Lo spazio-tempo, in questo formalismo considerato come un ente unico, è modellato matematicamente da uno spazio vettoriale a quattro dimensioni, di cui tre spaziali e una temporale. Affermare dunque che l'Universo è in espansione equivale ad affermare che il tessuto stesso dello spazio-tempo è in espansione. In particolare, la distanza propria tra due osservatori co-moventi con il sistema di riferimento a riposo rispetto a tale espansione varia nel tempo come

$$d_p(t) = r a(t)$$

dove r è la distanza co-movente, costante nel tempo, mentre $a(t)$ prende il nome di *fattore di scala*, ed è adimensionale; esso dipende in maniera equivalente dal redshift z nella forma

$$a(t) = \frac{1}{1 + z} \quad (1.2)$$

in modo che risulti normalizzato ad uno al tempo presente, ovvero per $z = 0$. Per poter misurare le distanze in uno spazio vettoriale, è necessario definirvi una metrica; grazie all'omogeneità e all'isotropia garantite dal principio cosmologico, quella da adottare su scale cosmologiche assume una forma molto semplice e prende il nome di *metrica di*

Friedmann-Lemaitre-Robertson-Walker (FLRW)

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + a(t)^2 \left[\frac{dx^2}{1 - \frac{kx^2}{R_0^2}} + x^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right] \quad (1.3)$$

dove t è il tempo cosmologico proprio, (x, θ, ϕ) sono le coordinate co-moventi, costanti nel tempo grazie all'omogeneità e all'isotropia, e $a(t)$ è il fattore di scala adimensionale che descrive come variano le distanze a causa dell'espansione. La costante di curvatura $k \in \{-1, 0, +1\}$ determina la geometria globale dello spazio, corrispondente rispettivamente a un Universo aperto, piatto o chiuso, mentre R_0 è il raggio di curvatura al tempo presente.

Alla base della Teoria della Relatività Generale ci sono le equazioni di campo di Einstein. Esse sono dieci equazioni differenziali alle derivate parziali, accoppiate e non lineari, in generale impossibili da risolvere analiticamente, che legano i parametri geometrici dello spazio-tempo al contenuto di materia ed energia. Tuttavia, sostituendo l'Equazione 1.3 al loro interno, la simmetria del problema permette di ridursi a due sole equazioni indipendenti, che legano il parametro di scala alla densità di energia e alla pressione del fluido cosmico. Esse prendono il nome di *equazioni di Friedmann*; la prima esprime la relazione con la densità di energia $\varepsilon(t)$ in funzione del tempo

$$\left[\frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \right]^2 = \frac{8\pi G}{3c^2} \varepsilon(t) - \frac{kc^2}{R_0^2} \frac{1}{a(t)^2} + \frac{\Lambda}{3} \quad (1.4)$$

mentre la seconda, detta anche *equazione di accelerazione*, descrive come varia la velocità di espansione dell'Universo nel tempo

$$\frac{\ddot{a}(t)}{a(t)} = -\frac{4\pi G}{3c^2} [\varepsilon(t) + 3P(t)] + \frac{\Lambda}{3} \quad (1.5)$$

Vi è poi l'*equazione dei fluidi*, derivante dalle due precedenti e dalla termodinamica, che lega fra loro densità di energia e pressione del fluido cosmico

$$\dot{\varepsilon}(t) + 3 \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} [\varepsilon(t) + P(t)] = 0 \quad (1.6)$$

In entrambe le equazioni di Friedmann è presente la costante cosmologica Λ , dimensionalmente l'inverso di un tempo al quadrato; essa è la rappresentazione del contributo dell'energia del vuoto, puramente quantistica, alla pressione, pari a $P_{void}(t) = -\varepsilon(t)$.

Più che la forma esplicita delle equazioni, nel seguito sarà importante il fatto che esse permettono di collegare la geometria dell'Universo al suo contenuto di materia ed energia.

1.1.2 Il parametro di densità

Il fattore di scala e la costante di Hubble non sono variabili indipendenti. Infatti, esse sono legate dalla relazione

$$H_0 = \left. \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \right|_{t=t_0} \quad (1.7)$$

Sostituendo l'Equazione 1.7 nella 1.4 e calcolando quest'ultima al tempo presente t_0 , in cui il fattore di scala vale uno, si ottiene

$$H_0^2 = \frac{8\pi G}{3c^2} \varepsilon_0 - \frac{kc^2}{R_0^2} \quad (1.8)$$

Si ponga ora $k = 0$, per determinare la *densità critica al tempo $t = t_0$* necessaria affinché l'Universo sia piatto. Invertendo la 1.8 si ottiene

$$\varepsilon_{c,0} = \frac{3c^2 H_0^2}{8\pi G} \quad (1.9)$$

dove il pedice c indica che la densità è critica, mentre lo zero indica che essa è calcolata al tempo presente.

Si estenda ora la relazione 1.7 ad un generico tempo t , definendo il *parametro di Hubble* come

$$H(t) \equiv \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \quad (1.10)$$

Ciò permette di definire la densità critica ad un istante generico come

$$\varepsilon_c(t) = \frac{3c^2}{8\pi G} H(t)^2 \quad (1.11)$$

In cosmologia, è conveniente esprimere la densità in unità della densità critica, definendo il *parametro di densità* adimensionale

$$\Omega(t) \equiv \frac{\varepsilon(t)}{\varepsilon_c(t)} \quad (1.12)$$

in modo che sia immediatamente confrontabile tra contesti e componenti differenti dell'Universo. La prima equazione di Friedmann è dunque riscrivibile come

$$1 - \Omega(t) = -\frac{kc^2}{R_0^2 a(t)^2 H(t)^2} \quad (1.13)$$

Una delle previsioni principali del modello Λ CDM è legata al valore del parametro di densità. Esso, infatti, sostiene che la geometria dell'Universo sia piatta, a causa di una fase

primordiale di inflazione. Ciò implica che il secondo membro di 1.13 sia identicamente nullo per ogni tempo t , che porta a concludere

$$\Omega(t) = 1 \quad \forall t \geq 0 \quad (1.14)$$

La densità totale di energia dell'Universo è dunque costante nel tempo e pari a quella critica attuale, descritta dall'Equazione 1.9. Tale densità è il risultato di vari contributi: quello della radiazione, quello della materia barionica, quello della materia oscura e quello dell'energia oscura. I valori di riferimento sono forniti dalla Tabella 2 di Planck Collaboration (2020), tenendo in considerazione tutti gli spettri di temperatura e polarizzazione della CMB, la polarizzazione a bassi multipoli, la ricostruzione del lensing gravitazionale della CMB e le misure delle oscillazioni acustiche barioniche. Quelli di particolare interesse ai fini della successiva trattazione sono riportati in Tabella 1.1. Per i casi in cui si è trovato unicamente il valore di $\Omega_i h^2$ con relativa incertezza, si è utilizzata la formula

$$\Omega_i = \frac{\Omega_i h^2}{h^2} \quad \text{con} \quad h = \frac{H_0}{100 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}} = 0.674 \pm 0.005 \quad (1.15)$$

per ricavare i rispettivi parametri di densità; essendo le densità e la costante di Hubble stimati simultaneamente dalla stessa analisi, dunque correlati fra loro, non è stato possibile propagare le relative incertezze, in quanto la matrice di covarianza è ignota. Il parametro di densità della radiazione, invece, è stato calcolato come

$$\Omega_{r,0} h^2 = \frac{\pi^2 (k_B T_0)^4}{15 \rho_{c,0} c^5 \hbar^3} \quad (1.16)$$

dove T_0 è il valore della temperatura della CMB misurato da Fixsen (2009), ovvero $T_0 = (2.7260 \pm 0.0013) \text{ K}$. Sommando fra loro i parametri di densità stimati si ottiene

$$\Omega = \Omega_{r,0} + \Omega_{b,0} + \Omega_{c,0} + \Omega_{\Lambda,0} = 1.000992164 \quad (1.17)$$

Tale valore presenta uno scostamento dall'unità dell'ordine di 10^{-3} , dunque è in accordo con la predizione teorica data dall'Equazione 1.14 per incertezze di ordine uguale o superiore.

Dalla Tabella 1.1 si deduce che solo una piccola frazione del contenuto energetico dell'Universo è ben compresa attualmente. La materia barionica, infatti, contribuisce solamente al 5% circa, mentre la componente dominante, pari a circa il 95%, è costituita da materia oscura ($\sim 26\%$) ed energia oscura ($\sim 69\%$), la cui natura rimane tuttora sconosciuta. Risulta dunque di fondamentale importanza studiare la dark matter, in quanto essa rappresenta oltre un quarto del contenuto energetico dell'Universo e svolge un ruolo fondamentale nella formazione ed evoluzione delle strutture cosmiche, pur non essendo

Parametro di densità	Valore
Radiazione	$\Omega_{r,0}h^2 = 4.1868 \cdot 10^{-5}$ $\Omega_{r,0} = 9.2164 \cdot 10^{-5}$
Materia barionica	$\Omega_{b,0}h^2 = 0.02242 \pm 0.00014$ $\Omega_{b,0} = 0.049$
Materia oscura	$\Omega_{c,0}h^2 = 0.11933 \pm 0.00091$ $\Omega_{c,0} = 0.263$
Energia oscura	$\Omega_{\Lambda,0} = 0.6889 \pm 0.0056$

Tabella 1.1: Valori dei parametri di densità previsti dal modello di concordanza. Il parametro di densità di radiazione è stato calcolato mediante l'Equazione 1.16, usando come valore di T_0 quello riportato da Fixsen (2009); gli altri, invece, sono stati reperiti dalla Tabella 2 di Planck Collaboration (2020). Ove riportato unicamente il parametro $\Omega_i h^2$ con relativa incertezza, si è utilizzata l'Equazione 1.15; non è stato possibile propagare le incertezze, in quanto le misure sono correlate e la matrice di covarianza è ignota. L'incertezza su $\Omega_{r,0}$, invece, risulta trascurabile rispetto a quella degli altri parametri cosmologici e viene generalmente omessa in letteratura.

ancora stata identificata a livello microscopico.

1.1.3 Formazione gerarchica delle strutture

Il modello di concordanza descrive anche la storia termica dell'Universo e il modo in cui le strutture osservate oggi si sono formate.

In particolare, esso prevede che l'Universo si sia formato da una singolarità iniziale, il *Big Bang*, evolutosi poi in un plasma denso e opaco, di temperatura dell'ordine di 10^{15} K, a seguito dell'inflazione. Tale plasma era omogeneo e isotropo, e presentava una geometria piatta, come l'Universo attuale. Con il progredire dell'espansione, il plasma si è raffreddato e la sua densità è diminuita. Quando la densità dell'Universo è scesa oltre una certa soglia, le interazioni delle particelle di materia oscura sono diventate troppo rare per mantenere l'equilibrio termico: la DM si è disaccoppiata dunque dal resto del plasma, e ha iniziato ad interagire solo gravitazionalmente. Il momento preciso di tale disaccoppiamento dipende sia dalla massa della particella di DM che dalla forza delle sue interazioni con il plasma primordiale, in quanto corrisponde al momento in cui il tasso di interazione Γ diventa inferiore al tasso di espansione di Hubble $H(t)$.

Si considerino piccole fluttuazioni quantistiche del plasma primordiale ($|\delta(\vec{r})| \ll 1$), generate durante la fase di inflazione. Esse permettono di considerare l'espansione dell'Universo ancora come isotropa e mantenere dunque la metrica indicata in 1.3, con $\vec{r}$ coordinate co-moventi. Per studiare le fluttuazioni più agevolmente, è utile espanderle

nelle loro componenti di Fourier in un volume co-movente V fissato

$$\delta(\vec{r}) = \frac{V}{(2\pi)^3} \int \delta_{\vec{k}} e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} d^3k \quad (1.18)$$

dove le singole componenti si trovano facendo

$$\delta_{\vec{k}} = \frac{1}{V} \int \delta(\vec{r}) e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} d^3r \quad (1.19)$$

Lo *spettro di potenza* delle fluttuazioni è definito dal valore di aspettazione del modulo quadro delle singole componenti, mediato su tutte le possibili direzioni del numero d'onda $\vec{k}$

$$P(k) = \langle |\delta_{\vec{k}}|^2 \rangle \quad (1.20)$$

La maggior parte degli scenari formulati per l'inflazione prevede che il campo $\delta(\vec{r})$ sia gaussiano e che lo spettro di potenza assuma la forma

$$P(k) \propto k^n \quad (1.21)$$

con $n = 1$ come esponente più probabile. Tale legge di potenza favorita prende il nome di *profilo di Harrison-Zel'dovich* e descrive le perturbazioni di densità attese immediatamente dopo l'inflazione.

Lo spettro appena introdotto non rimane tuttavia invariato nel tempo: inizialmente l'Universo era dominato dalla radiazione, ma per un tempo corrispondente a $t_{rm} \sim 4.7 \cdot 10^4$ anni dopo il Big Bang si è giunti all'equivalenza radiazione-materia. Fra la fine dell'inflazione e l'epoca di equivalenza, la forma dello spettro di potenza è cambiata, a causa del disaccoppiamento della materia oscura; il modo in cui si è modificata dipende dunque dalle proprietà di quest'ultima. Un esempio di profili diversi, tra cui quelli menzionati in seguito, è mostrato in Figura 1.1, riprodotta da Wilkinson (2016); essa mostra anche l'andamento che si avrebbe se la natura della DM fosse barionica, come quella della materia ordinaria. In particolare, è importante distinguere fra *materia oscura fredda*, predetta dal modello Λ CDM, e *materia oscura calda*, spesso abbreviata come HDM dall'inglese Hot Dark Matter. La differenza principale è che la prima è costituita da particelle che erano *non-relativistiche* al momento del disaccoppiamento, mentre la seconda è costituita da particelle che erano *relativistiche* al momento del disaccoppiamento. Ciò implica che le particelle di HDM erano libere di muoversi in direzioni casuali a velocità prossime a quella della luce; tale flusso libero aveva come effetto netto quello di appiattire fluttuazioni di densità di lunghezza d'onda inferiori a $\lambda = \frac{2\pi}{k} \sim ct_h$, dove

$$t_h \sim 2 \cdot 10^{12} \text{ s} \left(\frac{m_h c^2}{2 \text{ eV}} \right)^{-2} \quad (1.22)$$

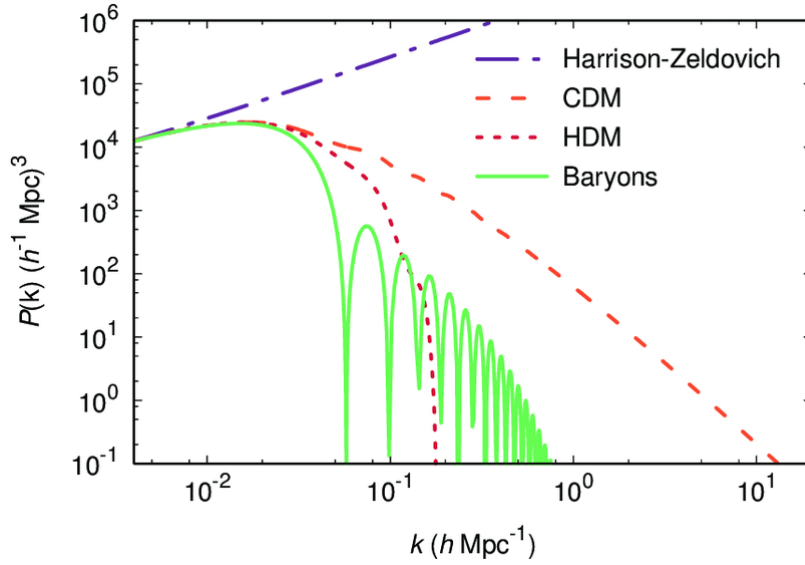


Figura 1.1: Spettro di potenza lineare della materia, ottenuto mediante quattro modelli diversi: Harrison-Zel'dovich (viola tratteggiato), materia oscura fredda (arancione tratteggiato), materia oscura calda (rosso tratteggiato) e materia barionica (verde). Immagine riprodotta da Wilkinson (2016).

è il tempo affinché la velocità delle particelle diventi non-relativistica, e dipende dalla massa della particella considerata m_h . La massa corrispondente a fluttuazioni di densità di questa entità è dell'ordine di $10^{16} M_\odot$, ovvero comparabile a quella dei super-ammassi di galassie. Di conseguenza, in un Universo con prevalenza di materia oscura calda le prime strutture a subire il collasso gravitazionale sarebbero quelle di dimensioni maggiori, mentre le strutture più piccole si dovrebbero formare solo in un secondo momento, mediante un processo di *frammentazione* (scenario top-down). Le evidenze osservative, tuttavia, mostrano che le strutture più vecchie nel nostro Universo sono le galassie, mentre i super-ammassi stanno collassando solo oggi. Questo ci permette di dedurre che le strutture si sono formate in maniera *gerarchica* (bottom-up), dalle più piccole alle più grandi, come previsto da un modello in cui la maggior parte della materia oscura è fredda. Ripetendo il ragionamento sopra, infatti, si trova che la massa associata alla scala di free streaming della materia oscura fredda è estremamente inferiore rispetto alla precedente, dell'ordine di quella di un pianeta o di un piccolo corpo asteroidale ($10^{-4} - 10^{-6} M_\odot$), a seconda della massa della particella considerata. In questo caso, le perturbazioni di interesse cosmologico non vengono smorzate dal moto delle particelle, ma possono crescere per instabilità gravitazionale già nelle prime fasi dell'evoluzione dell'Universo. In tale scenario, collassano dapprima i piccoli aloni di materia oscura; questi, attraverso

successivi processi di accrescimento e fusione, danno origine ad aloni sempre più massicci, all'interno dei quali si formano galassie, gruppi e infine ammassi di galassie. Ciò è in accordo con le osservazioni e costituisce uno dei principali successi del modello cosmologico Λ CDM.

Come mostrato in questa sezione, la materia oscura costituisce un ingrediente essenziale del modello cosmologico standard e della formazione delle strutture. La sua natura rimane tuttavia sconosciuta e rappresenta uno dei principali problemi aperti della cosmologia moderna. Nel seguito verranno approfondite le principali caratteristiche di questa componente e le evidenze a sostegno della sua esistenza.

1.2 La materia oscura

Da quasi un secolo, le evidenze osservative indicano che esiste una componente predominante della materia (pari a circa l'85 % di quella totale nell'Universo) che non emette luce e ha natura non-barionica. Essa prende il nome di *materia oscura* (in inglese Dark Matter, DM), sia perché non interagisce con i fotoni, sia perché non è ancora chiaro quale sia la sua natura microscopica. Nel corso del tempo, sono stati formulati diversi modelli che la descrivessero, ciascuno dei quali si differenzia dagli altri per le proprietà associate alla sua particella fondamentale. Nel seguito sono presentati i principali riferimenti storici e le tecniche di rilevazione della DM, in relazione al modello attualmente più quotato della materia oscura fredda; nella parte finale, sono brevemente esposti i principali limiti di tale modello e le differenti predizioni che proposte alternative comportano.

1.2.1 Evidenze osservative

Storicamente, il primo a osservare una forte discrepanza tra massa dinamica e massa osservabile negli ammassi di galassie (all'epoca chiamati nebulose extragalattiche) fu Zwicky nel 1933, analizzando l'ammasso Coma (Zwicky 1933). In particolare, misurando i redshift e i blueshift delle galassie dell'ammasso attraverso lo spostamento Doppler delle loro linee spettrali, egli ottenne una dispersione di velocità pari o superiore a 1000 km s^{-1} . Tale valore era circa un ordine di grandezza superiore rispetto a quello atteso per la velocità media delle galassie nell'ammasso $(\bar{v}^2)^{\frac{1}{2}} = 80 \text{ km s}^{-1}$, stimato assumendo un sistema all'equilibrio ed applicando il teorema del Viriale sulla massa luminosa. Questa forte discrepanza lo portò a concludere che la massa totale del sistema Coma doveva essere almeno 400 volte superiore rispetto a quella osservabile: fu la prima evidenza della presenza di una componente di materia invisibile, che Zwicky chiamò *dunkle Materie* ("materia oscura").

Circa quarant'anni dopo, Vera Rubin e i suoi collaboratori scoprirono che, similmente a quanto accadeva nell'ammasso Coma, anche le stelle nella regione più esterna della

galassia di Andromeda ruotavano più velocemente di quanto atteso (Rubin e Ford 1970). Infatti, assumendo una rotazione rigida di un punto materiale attorno al centro galattico e considerando la distribuzione di massa luminosa della galassia, ci si aspetterebbe un andamento pressoché lineare nel bulge e una decrescita dolce nel disco della spirale, seguita da una caduta kepleriana al di fuori di esso. Dalla terza legge di Keplero si avrebbe

$$\tau^2 = \frac{4\pi^2}{GM(r)} r^3 \quad \text{con} \quad \tau = \frac{2\pi r}{V_c(r)} \quad (1.23)$$

dove τ è il periodo orbitale, G è la costante gravitazionale newtoniana, $M(r)$ è la massa compresa in una sfera di raggio r , assumendo simmetria sferica, e $V_c(r)$ è la velocità orbitale delle stelle in funzione della loro distanza dal centro galattico. Eguagliando le due formule e invertendo si trova

$$V_c(r) = \sqrt{\frac{GM(r)}{r}} \propto \frac{1}{\sqrt{r}} \quad \text{caduta kepleriana} \quad (1.24)$$

L'andamento osservato, invece, rispecchia quello riportato in Figura 1.2, riprodotta da Freese (2009): diversamente da quanto appena calcolato, le velocità orbitali delle stelle attorno al centro galattico rimangono pressoché costanti anche a raggi molto grandi. Lo stesso andamento è stato osservato in tutte le galassie a spirale studiate finora, compresa la nostra Via Lattea. La spiegazione più semplice per questo fenomeno è quella di ammettere che, anche nelle galassie a spirale, è presente più massa di quella osservabile, la quale fornisce la forza necessaria ad accelerare le orbite: le galassie devono formarsi in enormi aloni di materia oscura, che ne costituiscono il 95% della massa totale e che si estendono ben oltre la parte luminosa della galassia. Le curve di rotazione mostrano dunque che la discrepanza tra massa dinamica e luminosa non riguarda soltanto gli ammassi di galassie, ma è presente anche su scala galattica.

Il limite principale dello studio delle curve di rotazione è che i dati possono essere raccolti solo fin dove è presente materia stellare o idrogeno neutro, ovvero entro distanze dell'ordine di 10 kpc. Ciò permette di vedere l'inizio degli aloni di DM, ma la maggior parte della loro estensione rimane invisibile. Per ovviare a questo problema si utilizza come metodo di rilevazione l'*effetto di lente gravitazionale*. Secondo la teoria della Relatività Generale, infatti, la massa e l'energia curvano lo spazio-tempo, causando la deflessione dei raggi luminosi. Tale effetto è tanto più accentuato quanto maggiori sono le masse considerate e permette dunque di inferirne la presenza anche se queste ultime non emettono luce. Tra i casi più emblematici vi è il Bullet Cluster (Clowe et al. 2006), il quale è nato dalla collisione tra due ammassi di galassie; oggi è possibile osservare la fase post-collisionale, in cui i centri si stanno allontanando fra loro prima di essere ri-attratti uno verso l'altro. La Figura 1.3 mostra la mappa della distribuzione di massa ottenuta mediante il lensing gravitazionale debole. Il gas barionico caldo, rilevato in banda X e

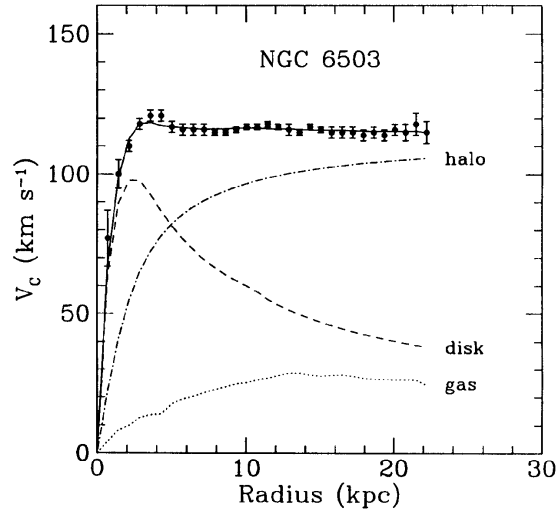
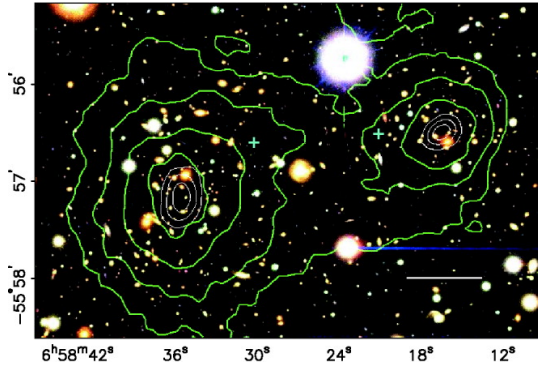
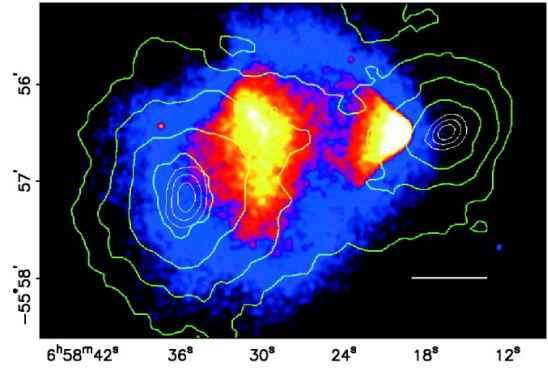


Figura 1.2: Curva di rotazione della galassia NGC6503: essa mostra il tipico profilo della velocità orbitale in funzione della distanza dal centro galattico per le galassie a spirale (linea continua e punti sperimentali). La linea tratteggiata e quella punteggiata rappresentano i contributi predetti rispettivamente per il disco stellare e la componente gassosa della galassia. Per un corretto fit dei dati sperimentali è necessario aggiungere il contributo di un alone di materia oscura (linea tratteggiata e punteggiata). Immagine riprodotta da Freese (2009).



(a) Immagine a colori dell'ammasso 1E 0657-558 (Bullet Cluster) ottenuta con il telescopio Magellan; la barra bianca indica una scala di 200 kpc alla distanza dell'ammasso.



(b) Immagine dell'ammasso ottenuta con Chandra, con un tempo di esposizione totale di 500 ks; la barra bianca indica una scala di 200 kpc alla distanza dell'ammasso.

Figura 1.3: Immagini del Bullet Cluster in banda ottica (a sinistra) e in banda X (a destra), riprodotte da Clowe et al. (2006). I contorni verdi rappresentano le curve di livello della distribuzione di massa, inferite dal lensing gravitazionale debole. La massa luminosa, illustrata dalle regioni colorate nel pannello di destra, non coincide con i profili trovati, suggerendo la presenza di una frazione importante di materia oscura debolmente interagente.

corrispondente alle zone colorate del pannello 1.3b, risulta nettamente separato dalla distribuzione di massa totale ricostruita mediante il lensing, dimostrando la presenza di una frazione importante di materia oscura debolmente interagente. Inoltre, dalla forma del gas si nota chiaramente una passata compenetrazione tra le singole nuvole, che conferma l'ipotesi della formazione tramite collisione.

Per concludere, è importante sottolineare che la materia oscura non è l'unica spiegazione possibile per risolvere le discrepanze tra massa luminosa e massa dinamica dei sistemi su scala galattica ed extragalattica. Un approccio diverso consiste nel proporre modelli alternativi per la gravità, come la *dinamica newtoniana modificata* (in inglese Modified Newtonian Dynamics, MOND). Essi forniscono predizioni corrette per molti fenomeni su scala galattica, ma falliscono nel trovare una spiegazione per i sistemi ad ampia scala, come il Bullet Cluster, o nel fare stime sulla CMB. Inoltre, essi hanno in generale una bassa capacità predittiva: anche quando riescono a spiegare le osservabili a posteriori tramite un fit, essi non riescono a inferirle efficacemente a priori, a differenza dei modelli di DM. Per questi motivi, ad oggi l'ipotesi della materia oscura rimane la più accreditata.

1.2.2 Predizioni del modello CDM

Come visto nella Sezione 1.1, il modello che si adatta maggiormente alle osservazioni cosmologiche attuali, in un'ampia varietà di scale e condizioni fisiche, è quello della materia oscura fredda, ovvero non relativistica al momento del disaccoppiamento dal plasma primordiale. Tramite simulazioni del modello Λ CDM, è possibile derivare le previsioni teoriche delle proprietà attese dagli aloni di qualunque massa; tuttavia, le proprietà che variano principalmente tra i modelli sono relative a sistemi di piccola massa (ovvero su scala galattica), e sono dunque questi i più utili da confrontare con i dati ottenuti sperimentalmente. Poiché il modello Λ CDM predice una formazione gerarchica delle strutture, studiare gli aloni più piccoli è di importanza fondamentale per comprendere meglio la loro evoluzione, ed estenderla poi a strutture sempre più ampie.

La caratteristica principale della materia oscura fredda è quella di essere *non collisionale* (collisionless), ovvero possedere una sezione d'urto di auto-interazione compatibile con zero. Questa proprietà, in combinazione alla formazione bottom-up, risulta in una popolazione di aloni con attributi distintivi. In primo luogo, il numero di strutture attese per unità di massa segue, in prima approssimazione, una legge di potenza (S. Vegetti, Birrer et al. 2024)

$$\frac{dn}{dM} \propto M^{-\alpha} \quad (1.25)$$

dove $\alpha = 1.9$ per masse inferiori a $M \sim 10^{11} M_{\odot}$. Tale equazione afferma che il numero di aloni che ci si attende di osservare diminuisce all'aumentare della loro massa,

risultando in un'abbondanza di aloni di piccola massa e rendendo più rari quelli di dimensioni maggiori. Queste previsioni derivano dalle proprietà del campo primordiale delle fluttuazioni di densità e dal loro successivo collasso gravitazionale, che porta alla formazione di aloni in equilibrio idrostatico.

Quando gli aloni più piccoli vengono progressivamente inglobati in sistemi di massa maggiore, le forze mareali dell'ospite generalmente tendono a spogliarli progressivamente di massa, fino a distruggerli. Alcuni, tuttavia, riescono a sopravvivere all'accrescimento, formando dei sotto-aloni (subhaloes), rilevabili sia tramite lensing che, ove presenti, tramite i satelliti visibili al loro interno, come accade ad esempio per le Nubi di Magellano nella Via Lattea.

Aloni con la stessa massa possono produrre perturbazioni diverse a seconda di come essa è spazialmente distribuita, ovvero in base al profilo di densità. La densità di massa media di un alone di materia oscura fredda in funzione del raggio, comune alla maggior parte dei sistemi, è descritta dal profilo di Navarro, Frenk e White (NFW, Navarro, Frenk e White 1996)

$$\rho(r) = \frac{\rho_s}{\frac{r}{r_s} \left(1 + \frac{r}{r_s}\right)^2} \quad (1.26)$$

dove r_s è il raggio di scala, mentre ρ_s è la densità di normalizzazione. Il *raggio di scala* definisce un cambio di comportamento nel profilo: vicino al centro, ovvero per $r \ll r_s$, la massa risulta molto concentrata, in quanto

$$\rho(r) \propto \frac{1}{r} \quad (1.27)$$

mentre nelle zone periferiche, dove $r \gg r_s$, la densità diminuisce molto rapidamente

$$\rho(r) \propto \frac{1}{r^3} \quad (1.28)$$

Ciò implica che quando il raggio è esattamente zero, la densità di massa diverge (sebbene la massa rimanga finita e tenda a zero), originando una cuspide centrale.

Il profilo di densità di massa dei sotto-aloni è più complesso e devia dal NFW a causa dei processi di accrescimento. Esso tende a presentare una concentrazione maggiore di quella che ci si aspetterebbe se le corrispondenti strutture fossero isolate. Per questo, le proprietà dei subhaloes sono descritte meglio dalla velocità circolare massima $V_{\max}$ e dal raggio in cui essa viene raggiunta $r_{\max}$. Tali variabili sono legate in generale alla distribuzione di massa dalla formula

$$V_{\text{circ}}(r) = \sqrt{\frac{GM(r < r_*)}{r}} \quad (1.29)$$

dove V_{circ} in questo caso sarà quella massima ed $r^* = r_{\text{max}}$, così che la distribuzione di massa corrisponda a quella presente entro il raggio massimo considerato.

1.2.3 Problemi del modello CDM su piccola scala

Svariate osservazioni astrofisiche che spaziano dalla scala dell'orizzonte degli eventi ($\sim 15,000$ Mpc) fino alla distanza tipica tra galassie (~ 1 Mpc) sono consistenti con un Universo dominato da energia oscura e materia oscura fredda, come descritto dal modello Λ CDM. Tuttavia, alcune osservazioni per distanze inferiori al Mpc e per masse $M < 10^{11} M_{\odot}$ hanno evidenziato una serie di limiti e problematiche.

In primo luogo, l'Equazione 1.25 e le simulazioni del modello Λ CDM prevedono che attorno a galassie come la Via Lattea si presentino migliaia di sotto-aloni di DM di massa $M > 10^7 M_{\odot}$, che in linea di principio potrebbero ospitare una galassia. Tuttavia, come descritto in Bullock e Boylan-Kolchin (2017), entro un raggio di 300 kpc dalla Via Lattea sono note solo circa 50 galassie con massa stellare $M_{\star} > 300 M_{\odot}$, soglia con la quale si includono anche le galassie nane ultra-deboli. Questa discrepanza è detta *Missing Satellites Problem* (problema dei satelliti mancanti) e si suppone sia dovuta al fatto che il processo di formazione delle galassie diventi sempre più inefficiente al calare della massa dell'alone. Di conseguenza, gli aloni di materia oscura più piccoli esistono, ma non hanno formato stelle (e dunque non sono osservabili nel visibile). Una sintesi grafica del problema dei satelliti mancanti è rappresentata in Figura 1.4, riprodotta da Bullock e Boylan-Kolchin (2017).

Inoltre, come visto nella sezione 1.2.2, la densità di massa media prevista per gli aloni di materia oscura in funzione del raggio è descritta dal profilo di Navarro, Frenk e White (Eq. 1.26), che prevede una cuspid centrale. Le curve di rotazione osservate in molte galassie nane risultano invece meglio descritte da un *core*, ovvero una densità quasi costante nelle zone centrali. Tale discrepanza prende il nome di *Core-Cusp Problem* (letteralmente, problema nucleo-cuspid), ed è sintetizzato in Figura 1.5, riprodotta da Bullock e Boylan-Kolchin (2017).

Infine, un'ulteriore difficoltà del modello Λ CDM è il cosiddetto *Too-Big-to-Fail Problem*. Le simulazioni prevedono l'esistenza di alcuni sotto-aloni talmente massicci da non poter fallire nella formazione stellare; essi dovrebbero quindi ospitare galassie satelliti facilmente osservabili. Tuttavia, tali galassie non vengono osservate, oppure presentano densità centrali significativamente inferiori a quelle previste dalle simulazioni.

In conclusione, queste tensioni tra osservazioni e previsioni teoriche del modello indicano che potrebbe essere necessario considerare una distribuzione di massa all'interno degli aloni più varia rispetto al semplice profilo NFW. Sebbene sia possibile che tali discrepanze siano riconducibili a un modelling ancora incompleto dei processi barionici, esse hanno anche motivato la formulazione di modelli alternativi di materia oscura, nei quali vengono modificate le proprietà microscopiche delle particelle rispetto all'ipotesi

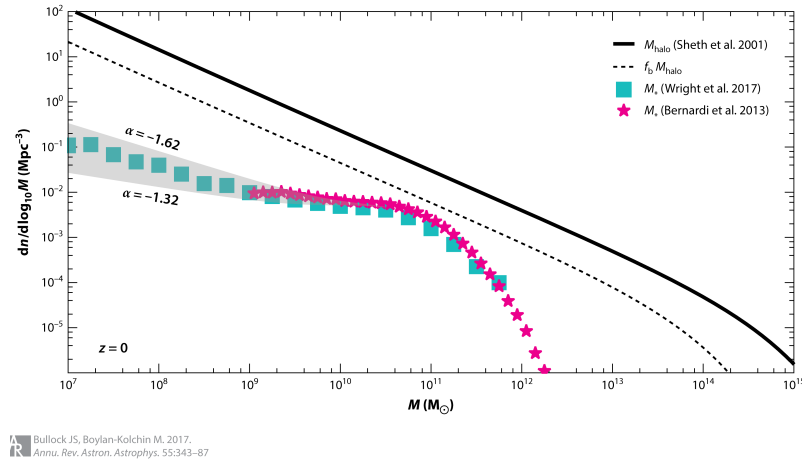
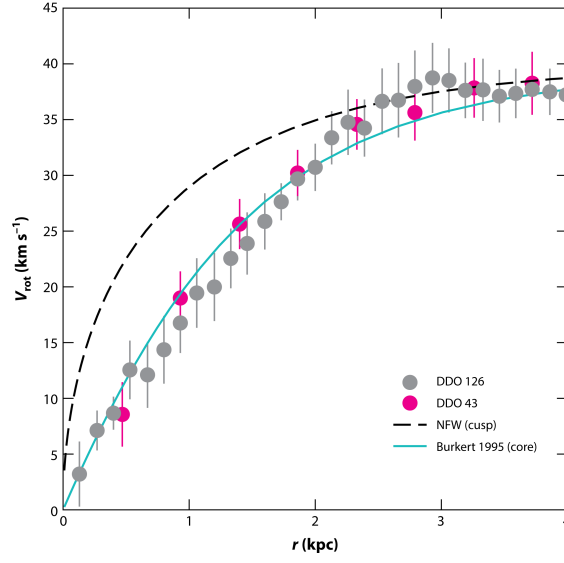


Figura 1.4: Sintesi grafica del *Missing Satellites Problem*. La linea nera continua rappresenta la funzione di massa degli aloni di materia oscura prevista dal modello Λ CDM, mentre la linea tratteggiata mostra la corrispondente massa barionica attesa assumendo la frazione barionica cosmica. I punti colorati rappresentano la funzione di massa stellare osservata, mentre la banda grigia indica l'incertezza dovuta alle correzioni di completezza alle basse masse. La discrepanza tra previsione teorica e osservazioni suggerisce che una grande frazione dei sottoaloni di piccola massa non abbia formato stelle. Figura riprodotta da Bullock e Boylan-Kolchin (2017); i dati osservativi sono tratti da Bernardi et al. (2013) e Wright et al. (2017).

della CDM. Tra i più studiati vi sono la *Warm Dark Matter* (WDM), costituita da particelle con velocità termiche non trascurabili, e la *Self-Interacting Dark Matter* (SIDM), in cui le particelle di materia oscura possono interagire tra loro; entrambi sono approfonditi brevemente nel paragrafo seguente. Tali modelli possono alterare la formazione e la struttura degli aloni di materia oscura, offrendo possibili spiegazioni per alcune delle tensioni osservate su piccola scala.

1.2.4 Modelli alternativi: WDM e SIDM

Tra le estensioni più semplici del paradigma CDM vi è la *Warm Dark Matter* (WDM), nella quale le particelle possiedono una velocità termica residua dopo il disaccoppiamento, sufficiente a sopprimere la formazione delle strutture di piccola massa attraverso il fenomeno del *free streaming*. Essa costituisce un'alternativa alla materia oscura calda, a cui si era accennato nella Sezione 1.1.3 sulla formazione gerarchica delle strutture, in quanto un Universo fatto esclusivamente di HDM è già stato escluso dalle osservazioni su cluster di galassie ad ampia scala. Sia le particelle di HDM che quelle di WDM possiedono una velocità termica non trascurabile al momento del disaccoppiamento, ma mentre per le prime è relativistica, per le seconde non lo è. Ciò porta ad una soppressione nel numero di aloni di piccola massa attesi in relazione a quelli previsti dal modello CDM (S. Vegetti,



Bullock JS, Boylan-Kolchin M. 2017. Annu. Rev. Astron. Astrophys. 55:343–87

Figura 1.5: Sintesi grafica del *core-cusp problem*. La linea tratteggiata rappresenta il profilo NFW previsto dal modello Λ CDM per una galassia con velocità massima di rotazione $V_{\max} \simeq 40, \text{ km, s}^{-1}$. I punti sperimentali rosa e grigi mostrano invece le curve di rotazione di due galassie osservate dal progetto LITTLE THINGS (Oh et al. 2015). Mentre il profilo NFW presenta una cuspidale centrale, i dati osservativi risultano meglio descritti da un profilo con nucleo a densità quasi costante, rappresentato dalla linea azzurra e descritto dal profilo di Burkert (Burkert 1995).

Birrer et al. 2024)

$$\frac{n_{\text{WDM}}}{n_{\text{CDM}}} = \left(1 + \gamma \frac{M_{\text{hm}}}{M}\right)^{\beta} \quad (1.30)$$

dove M_{hm} è la *half-mode mass*, ovvero la massa corrispondente alla scala alla quale la radice quadrata dello spettro di potenza lineare della materia risulta ridotta del 50% rispetto al caso della CDM. Essa è inversamente proporzionale alla massa della particella di WDM m_{DM} , dunque più leggera è la particella, maggiore ci si aspetta che sia tale soppressione. I parametri γ e β sono invece derivati dal fit: il primo stabilisce a quale massa inizia a diventare significativa la soppressione, mentre il secondo controlla quanto rapidamente la funzione di massa decresce al di sotto della half-mode mass.

Per quanto riguarda la materia oscura auto-interagente, ovvero la *Self-Interacting Dark Matter* (SIDM), la sua caratteristica distintiva è quella di essere collisionale: le particelle possono interagire fra loro scambiandosi energia e momento, ma tale interazione non è descritta dal potenziale gravitazionale. Tali interazioni possono essere elastiche

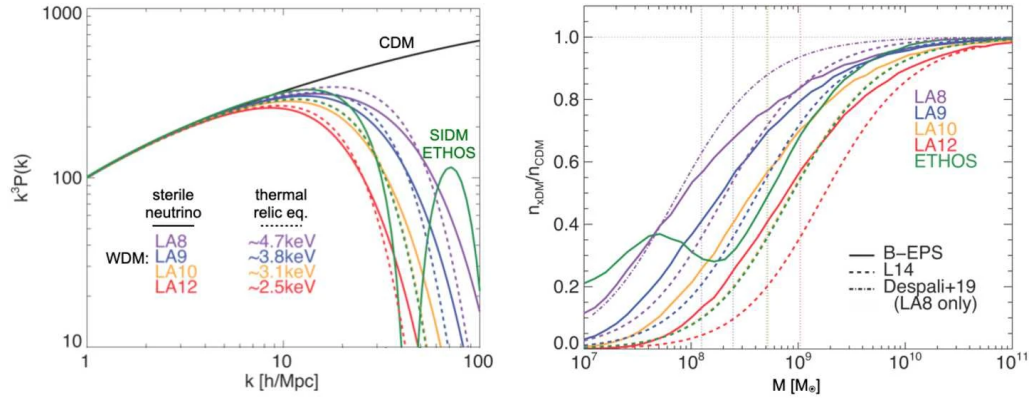


Figura 1.6: Confronto tra lo spettro di potenza della materia (sinistra) e la funzione di massa degli aloni (destra) nei modelli CDM, WDM e SIDM. In entrambi i pannelli, la curva nera rappresenta il modello CDM, mentre le curve colorate corrispondono a diversi modelli alternativi di WDM e SIDM. Rispetto alla CDM, tali modelli prevedono una soppressione delle strutture alle piccole scale, che si riflette in una riduzione del numero di aloni di bassa massa. Figura riprodotta da S. Vegetti, Birrer et al. (2024).

o anelastiche e la sezione d'urto σ può dipendere dalla velocità. Tale modello spiegherebbe il core centrale misurato negli aloni, la cui profondità e dimensione dipenderebbero fortemente da σ . Come nel caso della WDM, anche in quello della SIDM vi è una soppressione nel numero di aloni attesi. Durante il processo di accrescimento, infatti, le auto-interazioni tra le particelle di materia oscura del sotto-alone e quelle dell'alone ospite possono causare un fenomeno di *ram-pressure stripping*, che favorisce la perdita di massa e, nei casi più estremi, la distruzione del sotto-alone. L'efficienza di questo processo dipende dalla sezione d'urto di auto-interazione: valori molto elevati produrrebbero una soppressione significativa del numero di sotto-aloni, ma sono oggi esclusi dalle osservazioni degli ammassi di galassie.

Sebbene le predizioni attese da WDM e SIDM siano sotto molti aspetti simili fra loro, i meccanismi fisici grazie ai quali si manifestano sono molto diversi. Le differenti predizioni dei modelli descritti in questo capitolo si riflettono direttamente nelle proprietà degli aloni e dei sotto-aloni di materia oscura, e permettono dunque di porre dei vincoli osservativi per comprenderne meglio la natura microscopica. Tra le tecniche osservative più promettenti per distinguerli vi è il lensing gravitazionale, il cui formalismo e le cui applicazioni saranno presentati nel capitolo seguente.

In particolare, poiché gli aloni risultano soppressi sia in numero che in concentrazione, e la densità degli aloni ne altera le proprietà di lensing, il modello WDM predice meno perturbazioni su piccola scala nelle immagini rispetto a quanto uno si aspetterebbe con la CDM.

Inoltre, a livello osservativo, le differenze nella composizione degli aloni di SIDM al

variare di σ ne renderebbero alcuni lenti più efficaci rispetto ad altri. Il lensing gravitazionale forte, essendo sensibile sia all'abbondanza sia alla distribuzione di massa dei sottoaloni, costituirebbe quindi uno strumento indipendente per porre vincoli alla sezione d'urto di auto-interazione della materia oscura.

2

Le basi dello strong gravitational lensing

Una *lente gravitazionale* è un corpo celeste, tipicamente un ammasso di galassie o una galassia ellittica, ma anche una stella su scale più piccole, che devia la luce proveniente da una sorgente distante e la restituisce all'osservatore in ritardo, deflessa e distorta. In base a quanto si presentano marcati gli effetti, tale fenomeno può essere di tre categorie. È detto *strong gravitational lensing* quando la lente e la sorgente sono quasi perfettamente allineate lungo la linea di vista, e quindi si formano archi, anelli di Einstein e immagini multiple, ovvero effetti macroscopici forti. Quello debole, in inglese denominato *weak gravitational lensing*, causa invece distorsioni molto meno marcate, in quanto si ha un allineamento minore e gli effetti sono misurabili solo a livello statistico, analizzando un campione ampio; vi sono poi immagini di sorgenti lontane che non vengono realmente distorte, ma il cui flusso luminoso varia nel tempo ed è talvolta amplificato da oggetti interposti con l'osservatore: è il caso del *microlensing*.

Sebbene, come visto nel Capitolo 1, le prime rilevazioni di materia oscura siano avvenute utilizzando effetti di lenti deboli, in questa sezione si approfondirà lo strong gravitational lensing; nel Capitolo 3 si mostrerà poi come questo formalismo può essere utilizzato come strumento di indagine per la DM.

2.1 Geometria e parametri fondamentali

Il lensing gravitazionale è una conseguenza diretta della curvatura dello spazio-tempo prevista dalla Relatività Generale. Per descriverne quantitativamente gli effetti è quindi necessario introdurre dapprima l'origine fisica della deflessione della luce e il concetto di angolo di deflessione, da cui deriva il formalismo geometrico della lente gravitazionale.

2.1.1 Il principio di Fermat e l'angolo di deflessione

Il principio di equivalenza della Relatività Generale afferma che, localmente, gli effetti di un campo gravitazionale sono indistinguibili da quelli di un sistema di riferimento accelerato (Schneider, Ehlers e Falco 1992). Si immagina ora un ascensore in caduta libera con un foro su uno dei lati, attraverso il quale filtra un raggio di luce che viaggia da sinistra verso destra. Mentre l'ascensore si muove verso il basso, il raggio colpisce la parete opposta in un punto più basso rispetto a quello da cui era partito: esso apparirà dunque curvato. Combinando questo esperimento mentale con il principio di equivalenza, Einstein si rese conto che la luce doveva poter essere deflessa dalla gravità. Tale deflessione segue le *linee geodetiche*, ovvero le linee che realizzano sulla superficie dello spazio-tempo il percorso di minima lunghezza fra due punti sufficientemente vicini, seguendo la curvatura. Esse possono essere ricavate dalle equazioni di campo di Einstein; ciò che si trova, tuttavia, può essere descritto in maniera equivalente dal *Principio di Fermat*, come in ottica geometrica: il percorso fisicamente realizzato dalla luce rende stazionario il tempo di percorrenza tra due punti.

Si consideri ora un generico indice di rifrazione n , in modo da poter definire il tempo di percorrenza della luce in un mezzo come

$$\int \frac{n}{c} dl \quad (2.1)$$

dove c è la velocità della luce nel vuoto e l è il percorso seguito dal raggio. Poiché tale tempo deve essere un estremo del problema, si cerca un percorso $\vec{x}(l)$ tale per cui

$$\delta \int_A^B n(\vec{x}(l)) dl = 0 \quad (2.2)$$

in cui gli estremi A e B sono tenuti fissi. Sfruttando la metrica introdotta nel Capitolo 1 dall'Equazione 1.3, e introducendo il campo gravitazionale Φ attraverso il metodo perturbativo, è possibile ricavare la velocità della luce nel campo gravitazionale

$$c' \simeq c \left(1 + \frac{2\Phi}{c^2} \right) \quad \text{da cui} \quad n = \frac{c}{c'} \simeq \left(1 - \frac{2\Phi}{c^2} \right) \quad (2.3)$$

Un campo gravitazionale può dunque essere trattato come un mezzo con indice di rifrazione variabile. Per risolvere il problema variazionale introdotto dall'Equazione 2.2, si trovano le equazioni di Eulero-Lagrange in funzione di $\vec{e}$, vettore unitario tangente al raggio luminoso, e dell'indice di rifrazione n . La soluzione permette di trovare un'approssimazione per $\vec{e}$

$$\dot{\vec{e}} = \frac{d\vec{e}}{d\lambda} = \vec{\nabla}_\perp \ln n \simeq -\frac{2}{c^2} \vec{\nabla}_\perp \Phi \quad (2.4)$$

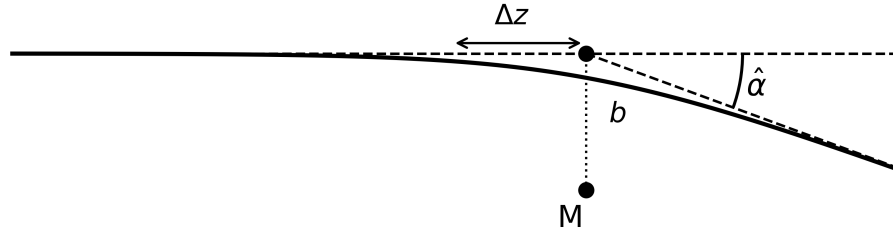


Figura 2.1: Rappresentazione schematica della geometria del raggio deflesso. Se il raggio viaggia lungo l'asse z con parametro d'impatto b , la massa M causa una deviazione di un angolo $\hat{\alpha}$.

dove λ è legato alla parametrizzazione della curva.

Poiché $\vec{e}$ rappresenta la variazione infinitesima della direzione di propagazione del raggio luminoso, la deflessione totale si ottiene integrando tale variazione lungo la traiettoria del fotone. Per convenzione, il vettore di deflessione $\hat{\alpha}$ è definito come opposto della variazione del versore tangente, così da risultare diretto verso la lente. Si ottiene quindi

$$\hat{\alpha} = \frac{2}{c^2} \int_{\lambda_A}^{\lambda_B} \vec{\nabla}_{\perp} \Phi d\lambda \quad (2.5)$$

che rappresenta l'effetto cumulativo del campo gravitazionale della distribuzione di massa della lente sulla direzione di propagazione della luce.

L'equazione in questa forma è però di scarsa utilità, perché richiede di integrare sul percorso del raggio luminoso deflesso, ovvero quello che si sta cercando di ricavare. Poiché la perturbazione $\Phi/c^2 \ll 1$, si è soliti quindi adottare l'*approssimazione di Born*, un approccio perturbativo che permette di utilizzare il campo incidente invece del campo totale, purché la perturbazione sia piccola. Come conseguenza, è possibile integrare sul percorso del raggio di luce imperturbato; in funzione del parametro d'impatto b si ha dunque

$$\hat{\alpha}(b) = \frac{2}{c^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{\nabla}_{\perp} \Phi dz \quad (2.6)$$

dove z è la direzione del raggio prima che venga deflesso. La disposizione geometrica è rappresentata schematicamente in Figura 2.1.

L'equazione precedente è totalmente generale e descrive la deflessione causata da una distribuzione arbitraria di massa. In linea di principio, il calcolo richiederebbe la conoscenza del potenziale gravitazionale tridimensionale lungo l'intera traiettoria del fotone. Tuttavia, nella maggior parte dei contesti astrofisici, la profondità della lente è trascurabile rispetto alle distanze che la separano dalla sorgente e dall'osservatore: la deviazione avviene quindi in una regione spaziale molto limitata e può essere considerata istantanea. Questa osservazione giustifica l'introduzione dell'*approssimazione di lente sottile*, descritta nel prossimo paragrafo.

2.1.2 L'equazione della lente

Quando le dimensioni fisiche della lente sono trascurabili rispetto alla distanza tra sorgente, lente e osservatore, tutta la sua massa viene proiettata su un piano; tale approssimazione prende il nome di *approssimazione di lente sottile* e il piano su cui viene proiettata la massa della lente prende il nome di *piano della lente*. In maniera analoga, la distribuzione di massa della sorgente viene proiettata sul *piano della sorgente*.

Introducendo questa approssimazione, la distribuzione di massa della lente è completamente descritta dalla *densità superficiale di massa*

$$\Sigma(\vec{\xi}) = \int \rho(\vec{\xi}, z) dz \quad (2.7)$$

dove si è indicato con $\vec{\xi}$ un generico vettore bidimensionale appartenente al piano della lente, mentre $\rho(\vec{\xi}, z)$ è la densità di massa tridimensionale.

Per comprendere come si ricava l'angolo di deflessione di una distribuzione continua, conviene partire dal caso di una massa puntiforme, dove il potenziale dipende linearmente dalla massa che lo genera secondo la formula

$$\Phi(r) = -\frac{GM}{r} \quad \text{da cui} \quad |\hat{\alpha}(b)| = \frac{4GM}{c^2 b} \quad (2.8)$$

Poiché il potenziale gravitazionale dipende linearmente dalla massa, anche il gradiente del potenziale, e quindi l'angolo di deflessione, obbediscono al principio di sovrapposizione. La deflessione prodotta da una distribuzione di massa arbitraria può quindi essere ottenuta sommando il contributo dei singoli elementi di massa puntiformi, definendo dapprima

$$d\hat{\alpha}(\vec{\xi}) = \frac{4G}{c^2} \frac{(\vec{\xi} - \vec{\xi}')}{|\vec{\xi} - \vec{\xi}'|^2} dM \quad (2.9)$$

dove il parametro d'impatto è stato generalizzato al vettore bidimensionale $\vec{\xi} - \vec{\xi}'$ nel piano della lente, poi l'elemento di massa infinitesimo come $dM = \Sigma(\vec{\xi}') d^2\xi'$. Sostituendolo in 2.9 e integrando si ha

$$\hat{\alpha}(\vec{\xi}) = \frac{4G}{c^2} \int \frac{(\vec{\xi} - \vec{\xi}') \Sigma(\vec{\xi}')}{|\vec{\xi} - \vec{\xi}'|^2} d^2\xi' \quad (2.10)$$

Le coordinate senza apice sono riferite al raggio luminoso, mentre quelle con l'apice sono legate all'elemento di massa. Una rappresentazione schematica di un tipico sistema di lente gravitazionale, in cui sia presente anche l'angolo di deflessione, è riportata in Figura 2.2, riprodotta da Bartelmann e Schneider (2001). La lente è collocata a distanza angolare

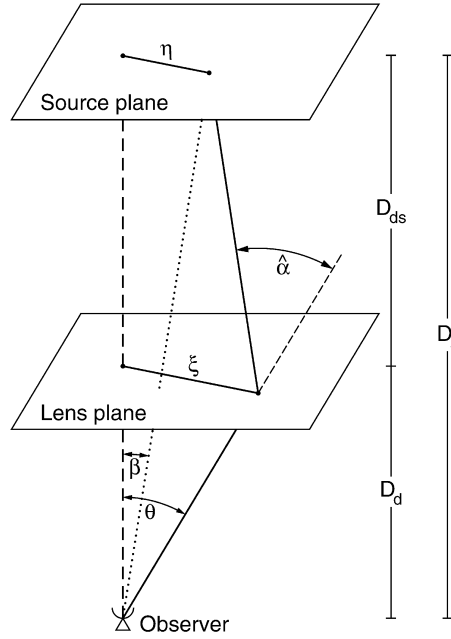


Figura 2.2: Rappresentazione schematica di un tipico sistema di lente gravitazionale; immagine riprodotta da Bartelmann e Schneider (2001).

D_d dall'osservatore (dall'inglese *angular diameter distance*) e deflette la luce proveniente dalla sorgente a distanza angolare D_s . La linea tratteggiata che parte dall'osservatore ed è perpendicolare ai due piani della lente e della sorgente prende il nome di *asse ottico*. Le distanze sui due piani si misurano in riferimento ad esso, e sono indicate rispettivamente con $\vec{\xi}$ per la lente e $\vec{\eta}$ per la sorgente. Le relative posizioni angolari sono misurate da $\vec{\beta}$ e $\vec{\theta}$, in modo che valgano le relazioni $\vec{\eta} = \vec{\beta}D_s$ e $\vec{\xi} = \vec{\theta}D_d$.

Poiché nel regime astrofisico di interesse le dimensioni trasverse del sistema sono molto inferiori alle distanze tra osservatore, lente e sorgente, si può applicare l'approssimazione dei piccoli angoli. In questo caso, esiste una relazione semplice tra la posizione reale della sorgente nel cielo e quella osservata, che prende il nome di *equazione della lente*

$$\vec{\theta}D_s = \vec{\beta}D_s + \hat{\alpha}D_{ds} \implies \vec{\beta}(\vec{\theta}) = \vec{\theta} - \hat{\alpha}(D_d\vec{\theta})\frac{D_{ds}}{D_s} \quad (2.11)$$

dove si è definita con D_{ds} la distanza angolare tra sorgente e lente. Per semplificare la formula, si definisce la *deflessione ridotta*

$$\hat{\alpha}(\vec{\theta}) \equiv \frac{D_{ds}}{D_s}\hat{\alpha}(D_d\vec{\theta}) \quad (2.12)$$

cosicché

$$\vec{\beta}(\vec{\theta}) = \vec{\theta} - \hat{\alpha}(\vec{\theta}) \quad (2.13)$$

Nell'Equazione 2.10 l'angolo di deflessione è espresso in funzione della distribuzione di massa della lente, mentre l'Equazione 2.11 lo collega alla posizione apparente delle immagini osservate e a quella reale della sorgente. Combinandole fra loro risulta evidente che, attraverso lo studio delle immagini prodotte dall'effetto di lensing, si possono ottenere informazioni sia sulla distribuzione di massa della lente sia sulle proprietà della sorgente. Sebbene, in linea di principio, si possano considerare direttamente gli angoli di deflessione, tale formulazione risulta sconveniente sia dal punto di vista analitico che da quello computazionale. Nelle applicazioni pratiche si preferisce introdurre una nuova grandezza scalare, detta *potenziale della lente*, dal quale l'angolo di deflessione può essere ricavato tramite semplici derivate. Tale formulazione costituisce la base per definire le principali quantità utilizzate nello studio dello strong gravitational lensing, come la convergenza, il fattore di ingrandimento e la distorsione delle immagini, ma anche per prevederne la molteplicità e la posizione.

2.2 Il potenziale della lente

Ogni distribuzione di massa estesa è caratterizzata da un potenziale gravitazionale Φ , tridimensionale e definito in ogni punto dello spazio. I raggi di luce, però, attraversano la distribuzione di massa lungo una traiettoria quasi rettilinea. Di conseguenza, la deflessione non dipende dal valore locale del potenziale gravitazionale, bensì dall'effetto cumulativo esercitato dal suo gradiente lungo la linea di vista. Per questo motivo si definisce il *potenziale efficace della lente* come

$$\hat{\Psi}(\vec{\theta}) = \frac{2}{c^2} \frac{D_{ds}}{D_d D_s} \int \Phi(D_d \vec{\theta}, z) dz \quad (2.14)$$

Esso è ottenuto proiettando il potenziale gravitazionale lungo la linea di vista e tenendo conto delle distanze relative tra osservatore, lente e sorgente. Il termine *efficace* sottolinea che questa quantità non coincide con il potenziale gravitazionale tridimensionale della lente, ma rappresenta una proiezione opportunamente pesata dai fattori geometrici del sistema. Esso contiene quindi tutta l'informazione necessaria a descrivere la deflessione gravitazionale osservata.

La deflessione ridotta, infatti, può essere ricavata dal potenziale efficace calcolandone il gradiente rispetto alle coordinate angolari

$$\hat{\alpha}(\vec{\theta}) = \vec{\nabla} \hat{\Psi}(\vec{\theta}) \quad (2.15)$$

Nel seguito, si definiscono in maniera unificata le principali quantità impiegate nello

studio del lensing gravitazionale, quali la convergenza, l'ingrandimento e la distorsione, tutte ricavabili dal potenziale efficace. Si mostrerà inoltre come la forma del potenziale determini le proprietà delle immagini osservate e si presenterà infine il modello di lente più utilizzato nello strong lensing, ovvero quello isoterma ellittico.

2.2.1 Convergenza, magnificazione e distorsione

Dapprima, soffermiamoci ad analizzare i cambiamenti locali indotti dalla presenza della lente. In analogia con le lenti ottiche, anche per quelle gravitazionali è possibile definire la *convergenza*, ovvero il potere focalizzante della massa coinvolta. Essa è funzione dei parametri geometrici del problema e si definisce come variabile adimensionale tramite il rapporto

$$\kappa(\vec{\theta}) \equiv \frac{\Sigma(\vec{\theta})}{\Sigma_c} \quad (2.16)$$

dove si è introdotta la *densità superficiale critica*

$$\Sigma_c = \frac{c^2}{4\pi G} \frac{D_s}{D_d D_{ds}} \quad (2.17)$$

Tale densità caratterizza la lente e corrisponde alla condizione $\hat{\alpha}(\vec{\theta}) = \vec{\theta}$, ovvero quella in cui osservatore e sorgente sono perfettamente allineati; in questo caso, l'immagine di un singolo raggio luminoso si forma esattamente al corrispondente angolo di deflessione.

La convergenza misura dunque quanta massa è presente lungo la linea di vista rispetto a quanta sarebbe necessaria per produrre un effetto di strong lensing (ad esempio, immagini multiple o archi): le regioni in cui tali effetti si verificano, infatti, sono generalmente associate a convergenze dell'ordine dell'unità.

Nel nuovo formalismo che stiamo introducendo, la convergenza è proporzionale al laplaciano del potenziale della lente

$$\kappa(\vec{\theta}) = \frac{1}{2} \nabla^2 \hat{\Psi}(\vec{\theta}) \quad (2.18)$$

Tale equazione può essere derivata sostituendo la 2.17 e la 2.7 (con opportuno cambio di variabile) nell'Equazione 2.16 e combinando il risultato ottenuto con l'equazione di Poisson, espressa nelle dovute coordinate. Fisicamente, essa afferma che maggiore è la curvatura locale del potenziale della lente (pensato come superficie bidimensionale), o, in altri termini, maggiore è la concentrazione di massa, tanto più efficacemente la lente stessa riesce a focalizzare i raggi luminosi.

La deviazione dei fotoni ad opera di una distribuzione di massa dà dunque origine a immagini più grandi e luminose, ma anche deformate. Infatti, nel caso in cui la sorgente presenti un'estensione, come avviene nella realtà, ogni raggio di luce è deflesso in

modo differenziale e indipendente dagli altri. La separazione angolare tra osservatore e sorgente, per sorgenti piccole, può essere linearizzata al primo ordine

$$d\vec{\beta}(\vec{\theta}) = \mathbf{A} d\vec{\theta} \quad (2.19)$$

dove si è definita la *matrice jacobiana della trasformazione* come

$$A_{ij} = \frac{\partial \beta_i}{\partial \theta_j} \quad (2.20)$$

Derivando l'Equazione della lente trovata in 2.11 rispetto a $\vec{\theta}$ ed esprimendo la deflessione ridotta in termini di potenziale della lente si trova

$$\mathbf{A}(\vec{\theta}) = \mathbb{I} - \Psi \quad \text{con} \quad \Psi = \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\hat{\Psi}) \equiv \begin{pmatrix} \Psi_{11} & \Psi_{12} \\ \Psi_{21} & \Psi_{22} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \Psi_{ij} \equiv \frac{\partial^2 \hat{\Psi}}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \quad (2.21)$$

A questo punto è utile riesprimere la matrice come composizione di una parte puramente *isotropa*, che cambia localmente la dimensione dell'immagine mantenendone la forma, e una parte puramente *anisotropa*, che invece la distorce senza cambiare l'area. Si può dimostrare che la parte isotropa dipende unicamente dalla convergenza, introdotta in precedenza, mentre quella anisotropa dipende da una nuova grandezza, indicata con $\gamma(\vec{\theta})$, che in inglese prende il nome di *shear* ed è legata alla distorsione dell'immagine; omettendo le dipendenze dall'angolo

$$\mathbf{A} = (1 - \kappa)\mathbb{I} - \Gamma \quad (2.22)$$

dove si è definita la *shear matrix* (matrice di distorsione) come

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(\Psi_{11} - \Psi_{22}) & \Psi_{12} \\ \Psi_{12} & \frac{1}{2}(\Psi_{11} - \Psi_{22}) \end{pmatrix} \quad (2.23)$$

Essa è simmetrica e a traccia nulla, dunque è sempre diagonalizzabile con matrici ortogonali. Lo shear γ corrisponde agli autovalori di questa matrice, che sono sempre uguali e opposti e dipendono dal punto $\vec{\theta}$ considerato. Nella base in cui $\mathbf{A}$ è diagonale, essa assume dunque la forma

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 - \kappa - \gamma & 0 \\ 0 & 1 - \kappa + \gamma \end{pmatrix} \quad (2.24)$$

Concettualmente, il potenziale della lente agisce localmente sulle immagini in due modi: ingrandendole e deformandole. Tale azione locale è matematicamente sintetizzata dalla matrice $\mathbf{A}$, che dipende infatti dai parametri κ e γ . Poiché l'inverso del determinante di una trasformazione è legato alla modifica dei volumi presenti nello spazio in cui tale

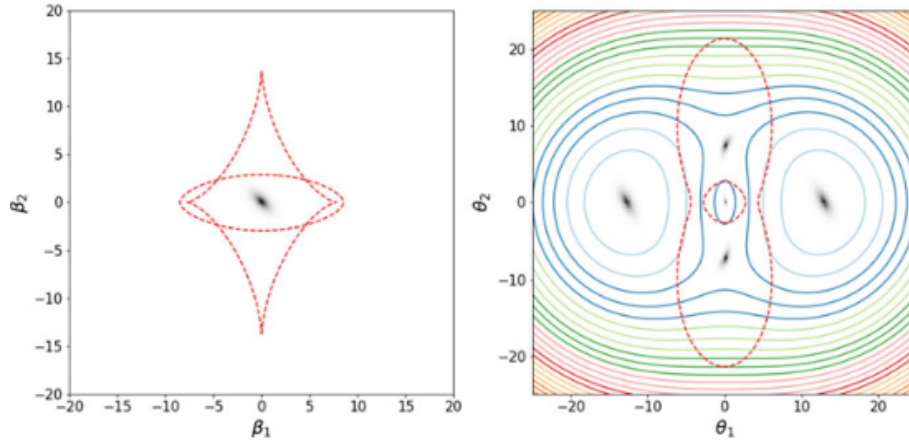


Figura 2.3: Esempio della relazione tra caustiche e linee critiche in una lente ellittica. Nel pannello di sinistra sono riportate le caustiche (linee tratteggiate rosse) sul piano della sorgente, insieme alla sorgente rappresentata in nero. Nel pannello di destra sono mostrate le corrispondenti linee critiche sul piano della lente (linee tratteggiate rosse) e le cinque immagini lensate. Le linee continue colorate rappresentano curve a ritardo temporale costante. Immagine riprodotta da Meneghetti (2021).

trasformazione avviene, si definisce *magnificazione* o *fattore di ingrandimento*

$$\mu = \frac{1}{\det \mathbf{A}} = \frac{1}{(1 - \kappa)^2 - \gamma^2} \quad (2.25)$$

Il segno indica la parità dell'immagine: un determinante negativo indica che essa è stata ribaltata rispetto alla sorgente originaria. Il valore di μ , invece, indica se e di quanto l'immagine è stata ingrandita o rimpicciolita dall'azione del potenziale della lente.

Quando almeno uno dei due autovalori di $\mathbf{A}$ è nullo, la magnificazione diverge. I punti corrispondenti a $\det \mathbf{A}(\vec{\theta}) = 0$ definiscono una o più curve sul piano della lente, che prendono il nome di *linee critiche*. Attraverso l'equazione della lente, è possibile trovare i corrispondenti punti $\vec{\beta}$ sul piano della sorgente, i quali danno luogo alle *caustiche*. Entrambe queste linee sono fondamentali nella formazione delle immagini. Un esempio rappresentativo di critiche e caustiche è riportato in Figura 2.3.

2.2.2 Formazione delle immagini

Finora si sono analizzate unicamente le perturbazioni locali che il potenziale di una lente può generare. Per avere una visione d'insieme, in linea di principio, bisognerebbe risolvere la 2.13: per un potenziale arbitrario, l'equazione è non-lineare, dunque ammette

soluzioni multiple, e ognuna di esse corrisponde ad un'immagine. La sua non-linearità, però, la rende spesso anche irrisolvibile analiticamente.

Come visto nel paragrafo 2.1.1, la luce segue cammini che rendono stazionario il tempo di arrivo (Principio di Fermat). In presenza di una lente, i contributi al tempo di arrivo possono essere sia geometrici, legati alla lunghezza differente dei percorsi, che gravitazionali, ovvero influenzati dalla forma di Ψ ; ciò comporta la possibile presenza di svariati punti critici, in ognuno dei quali si forma un'immagine. Sebbene non si conosca esplicitamente la forma delle soluzioni, se ne possono comunque dedurre alcune proprietà analizzando la forma del potenziale della lente. Nel seguito non verrà approfondita la teoria del tempo di arrivo; ci limiteremo alle conseguenze sulla formazione delle immagini.

Ad ogni punto del piano della lente è associata una funzione di ritardo temporale $t(\vec{\theta})$, che può essere vista come una varietà bidimensionale. La matrice hessiana T di tale superficie, che ne definisce i punti critici, è direttamente proporzionale alla matrice A introdotta nel paragrafo precedente, la quale può essere analizzata per dedurre le proprietà delle immagini.

Si dicono immagini di *tipo I* quelle che sorgono nei minimi della superficie del tempo di arrivo. Gli autovalori di T sono entrambi positivi, quindi $\det A > 0$ e $\text{tr} A > 0$: poiché la magnificazione è positiva, le immagini hanno la stessa parità della sorgente, e, essendo la curvatura positiva in tutte le direzioni, risultano ingrandite.

Si dicono immagini di *tipo II* quelle che sorgono nei punti di sella della superficie del tempo di arrivo. Gli autovalori di T hanno segni opposti, quindi $\det A < 0$, mentre il segno della traccia può variare. Poiché la magnificazione è negativa, le immagini hanno parità invertita rispetto alla sorgente.

Infine, si dicono immagini di *tipo III* quelle che sorgono nei massimi della superficie del tempo di arrivo. Gli autovalori di T sono entrambi negativi, quindi $\det A > 0$ e $\text{tr} A < 0$: poiché la magnificazione è positiva, le immagini hanno la stessa parità della sorgente e, essendo la curvatura negativa in tutte le direzioni, risultano rimpicciolite.

Quando la sorgente e la lente sono perfettamente allineate, i minimi si trovano su un anello, mentre il massimo è posizionato al centro. Quest'ultima immagine, tuttavia, spesso è talmente piccola da risultare invisibile; inoltre, essa può trovarsi sovrapposta alla luce emessa dalla lente, risultando difficile da distinguere. Tale struttura prende il nome di *anello di Einstein*, in inglese *Einstein Ring*, ed è un segno distintivo delle lenti gravitazionali forti. Se ne riporta un esempio in Figura 2.4.

Allontanando la sorgente dall'asse ottico, l'anello tende a rompersi, dando origine a immagini multiple che, per motivi topologici, si presentano sempre in numero dispari. Inoltre, poiché spesso l'immagine nel massimo è difficilmente visibile, anche se in linea di principio si potrebbero avere fino a cinque immagini, il massimo numero osservato nella pratica è quattro. Uno studio più approfondito di come cambia l'insorgere di immagini al variare dei parametri geometrici del sistema sarà studiato nel Capitolo 4, dove

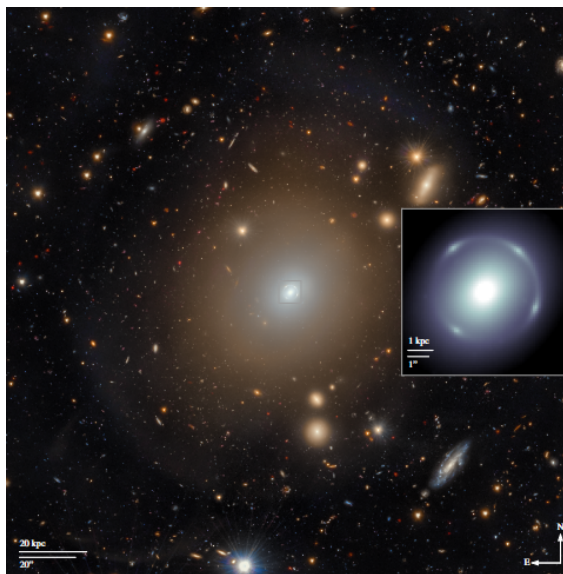


Figura 2.4: Esempio di lente gravitazionale forte che produce un anello di Einstein completo. A lato è presente un ingrandimento della zona centrale; il quadrato ha un lato di $8''$. Sull'immagine sono riportate le diverse scale fisiche. Immagine riprodotta da C. M. O'Riordan et al. (2025).

si simuleranno immagini di sorgenti più o meno allineate rispetto all'osservatore. Una cosa importante da notare fin da subito è però il ruolo delle linee critiche: esse infatti, corrispondendo a zone in cui cambia il segno della curvatura, separano le regioni a molteplicità diversa di immagini.

La matrice hessiana permette anche di scomporre la curvatura, e dunque il relativo potere di magnificazione, lungo le diverse direzioni del piano; da questo dipende l'ingrandimento o la riduzione tangenziale e trasversale delle immagini. Quando una delle due direzioni risulta molto più magnificata dell'altra, si formano i cosiddetti *archi gravitazionali*: in particolare, quelli tangenziali sono uno degli effetti distintivi dello strong gravitational lensing. Un esempio è riportato in Figura 2.5 (Longair 2015).

Questi fenomeni si verificano in corrispondenza delle curve critiche tangenziali (ovvero i punti per cui $1 - \kappa - \gamma = 0$) e di quelle radiali (dove $1 - \kappa + \gamma = 0$). Gli archi tangenziali, più comuni, sono usati per ricostruire il potenziale gravitazionale degli ammassi, e dunque anche la distribuzione di massa barionica e oscura racchiusa all'interno delle relative linee critiche. Gli archi radiali invece, in genere più rari da osservare, sono sensibili alla pendenza del profilo di densità nelle regioni centrali dell'oggetto studiato e vengono utilizzati per vincolare la distribuzione di materia oscura nel nucleo degli ammassi, contribuendo a fare chiarezza sul *Core-Cusp Problem*.



Figura 2.5: Esempi di archi gravitazionali tangenziali prodotti da un ammasso di galassie, il quale funge da lente gravitazionale forte. Immagine riprodotta da Longair (2015).

2.2.3 Il modello isotermo ellittico

Uno dei pochissimi esempi per cui l'equazione della lente è risolvibile analiticamente è il *potenziale isotermo sferico singolare*. Il relativo profilo di densità può essere derivato assumendo che la materia di cui la lente è composta si comporti come un gas perfetto confinato in una buca di potenziale sferica, in equilibrio termico e idrodinamico con l'ambiente esterno. Ciò implica che l'energia cinetica media è costante nello spazio, ovvero la dispersione di velocità σ_v è indipendente dalla distanza dal centro r . La formula esplicita del profilo di densità è

$$\rho_{SIS}(r) = \frac{\sigma_v^2}{2\pi G r^2} \quad (2.26)$$

dove l'abbreviazione SIS deriva dall'inglese *Singular Isothermal Sphere*. L'aggettivo singolare viene apposto per sottolineare la divergenza per $r = 0$, che lo distingue dalla versione *softened*, in cui tale singolarità viene rimossa. Proiettando la densità tridimensionale lungo la linea di vista, si ottiene il corrispondente profilo della densità superficiale

$$\Sigma(\xi) = 2 \frac{\sigma_v^2}{2\pi G} \int_0^\infty \frac{dz}{\xi^2 + z^2} = \frac{\sigma_v^2}{2\pi G \xi} \quad (2.27)$$

anch'esso singolare per $\xi = 0$.

Facendo l'opportuno cambiamento di variabile e utilizzando la formula 2.16 si ottiene la convergenza

$$\kappa(\theta) = 2 \frac{\sigma_v^2 \pi D_{ds}}{\theta c^2 D_s} = \frac{\theta_E}{2\theta} \quad (2.28)$$

dove si è introdotto come parametro il *raggio di Einstein*, per raccogliere tutta la dipendenza dalla massa della lente e dalla geometria del sistema in un unico valore

$$\theta_E = \frac{4\pi\sigma_v^2 D_{ds}}{c^2 D_s} \quad (2.29)$$

Integrando due volte si ottiene dunque il potenziale isoterma sferico circolare

$$\hat{\Psi}(\theta) = \theta_E |\theta| \quad (2.30)$$

Da questo è possibile ricavare dapprima l'angolo di deflessione

$$\hat{\alpha}(\theta) = \theta_E \frac{\vec{\theta}}{|\theta|} \quad (2.31)$$

e poi l'equazione della lente

$$\vec{\beta} = \vec{\theta} - \theta_E \frac{\vec{\theta}}{|\theta|} \quad (2.32)$$

che può essere riscritta in forma scalare sfruttando la simmetria assiale del problema e introducendo la funzione segno

$$\beta = \theta - \theta_E \text{sign}(\theta) \quad (2.33)$$

Quando sorgente e osservatore sono allineati tra loro, ovvero $\beta = 0$, si trova dunque $\theta = \theta_E$: il raggio di Einstein deve il proprio nome al fatto che è la distanza angolare a cui si osserva l'anello di Einstein, ovvero a cui si formano le immagini in caso di perfetto allineamento. Ciò è vero in generale indipendentemente dal modello di lente considerato; quella che cambia è la formula particolare per ricavarlo. Il raggio di Einstein rappresenta dunque la scala angolare naturale del problema: tutte le principali proprietà della lente, quali le posizioni delle immagini e la loro separazione e amplificazione, possono essere ottenute confrontando θ_E con la posizione della sorgente β .

Il modello SIS assume perfetta simmetria sferica. Tuttavia, la maggior parte delle galassie reali presenta una certa ellitticità. Nella pratica dunque si utilizza spesso una generalizzazione del modello SIS, ovvero il SIE, dall'inglese *Singular Isothermal Ellipsoid*. Esso parte dal modello singolare sferico, ma sostituisce ad r la *coordinata ellittica*

$$R = \sqrt{\frac{\theta_1^2}{(1-e)} + \theta_2^2(1-e)} \quad (2.34)$$

dove $e = 1 - \frac{b}{a}$ è l'ellitticità e b ed a sono rispettivamente il semiasse minore e quello maggiore dell'ellisse, mentre le componenti θ_i si riferiscono al vettore $\vec{\theta} = (\theta_1, \theta_2)$. Nel

limite in cui $e = 0$, $R = r$ e ci si riconduce al caso circolare.

Il profilo superficiale di massa si ottiene inserendo nella formula 2.27 la nuova coordinata al posto di ξ . Anche la convergenza mantiene la stessa forma, ma l'angolo di deflessione non è più radiale come nel SIS e deve essere definito mediante le singole componenti.

In generale, la rottura della simmetria circolare permette di riprodurre più accuratamente le configurazioni osservate di immagini multiple e archi gravitazionali; il modello SIE viene dunque usato spesso nella pratica per modellare la massa totale delle galassie ellittiche o degli ammassi di galassie, ovvero delle principali lenti forti osservate in natura.

2.3 Le galassie ellittiche come lenti

Finora ci siamo occupati del gravitational lensing in modo generale, introducendone il formalismo e mostrandone qualche esempio. In questa sezione, invece, si vuole approfondire in particolare il fenomeno delle lenti forti.

Affinché una lente possa essere considerata forte, come visto nel paragrafo 2.2.1, la densità superficiale di massa deve essere dello stesso ordine di grandezza di quella critica: $\Sigma \gtrsim \Sigma_c$. Questa condizione è più facilmente soddisfatta da oggetti che presentino una distribuzione di massa molto concentrata, come accade al centro di galassie ellittiche e ammassi.

In particolare, le galassie ellittiche presentano grandi bulge e un piccolo disco, ovvero il contrario di quanto accade generalmente nelle galassie a disco: a parità di massa, la concentrazione delle ellittiche è dunque molto superiore. Inoltre, come visto nella formula 2.29, il raggio di Einstein è direttamente proporzionale al quadrato della dispersione di velocità. Le galassie ellittiche, presentando una maggiore concentrazione, danno origine a buche di potenziale più profonde, e dunque a dispersioni di velocità dell'ordine di 200 – 300 km/s, molto più elevate delle spirali; i rispettivi raggi di Einstein sono dunque maggiori. Infine, la massa totale segue molto bene il profilo isoterma ellittico, rendendole più semplici da modellare. Tutto ciò contribuisce ad aumentare la loro sezione d'urto come lenti forti e permette in linea di principio di costruire grandi campioni osservativi.

Tali campioni sono strumenti preziosi per ricavare la distribuzione di massa della materia oscura e studiare gli aloni, in quanto aggirano molte delle problematiche legate ai metodi di studio alternativi. Per questo motivo, si è scelto di dedicare questa sezione ad un loro approfondimento.

2.3.1 Vantaggi dello strong lensing nello studio delle galassie ellittiche

Il metodo alternativo al lensing comunemente utilizzato per studiare la distribuzione di massa nelle galassie è la cinematica, ossia la misura della dispersione di velocità o dei moti di rotazione di stelle, gas e ammassi globulari. Tali osservazioni possono fornire informazioni complete sulla distribuzione di massa solo se le misure sono spazialmente risolte, e ciò normalmente accade solo per le galassie più vicine. Infatti, l'uso dei moti delle singole stelle per ricostruire la distribuzione di massa è attualmente possibile solo per la Via Lattea; per tutte le altre galassie, l'unica osservabile dinamica accessibile è la dispersione di velocità integrata sull'apertura, ottenuta mediante spettroscopia. Le osservabili del lensing, invece, sono ricavate da immagini ad alta risoluzione.

L'indagine tramite lensing presenta dunque almeno un vantaggio importante, soprattutto per le galassie lente al di fuori dell'Universo Locale, in quanto non vi sono vincoli legati alla brillantezza superficiale della galassia: il segnale dipende solo dalla combinazione tra la massa della lente e la luminosità della sorgente. Ciò permette di determinare la massa racchiusa all'interno del raggio di Einstein con una precisione dell'ordine dell'1-2%, utilizzando solo dati di imaging. Per ottenere la medesima precisione riferita a galassie ad alto redshift con la cinematica, sarebbero necessari tempi di integrazione significativamente più lunghi con gli strumenti attualmente disponibili.

Un ulteriore vantaggio del lensing è la sua sensibilità sia alla materia barionica che a quella oscura, senza bisogno di ipotesi sul loro stato dinamico: contrariamente a quanto avviene per la cinematica, non occorre che il sistema sia all'equilibrio per poterlo studiare.

In generale lo strong gravitational lensing è dunque uno dei principali strumenti per vincolare la distribuzione di massa totale su scala galattica nella regione sondabile tramite imaging. Confrontando la massa totale con quella barionica, oppure introducendo un modello per la massa totale, è possibile studiare le proprietà degli aloni di dark matter che ospitano le galassie. Di seguito, si approfondisce come è possibile ricostruire il profilo di massa totale dalle immagini, mentre il prossimo capitolo sarà interamente dedicato ai metodi di rilevazione della materia oscura.

2.3.2 Vincoli sul profilo di massa totale tramite strong lensing

I sistemi di *galaxy-galaxy strong lensing*, ovvero lensing forte di galassie su galassie, sono uno strumento molto utilizzato per vincolare le masse e i profili di densità delle galassie e la loro popolazione di *dark matter subhalos*, ovvero sotto-strutture di materia oscura. Il principale fattore limitante per queste analisi è la scarsità di sistemi di strong lensing adeguati. Diverse survey astronomiche attualmente operative o previste per il futuro, come *Euclid* o il *Vera Rubin Observatory*, offrono un miglioramento significativo

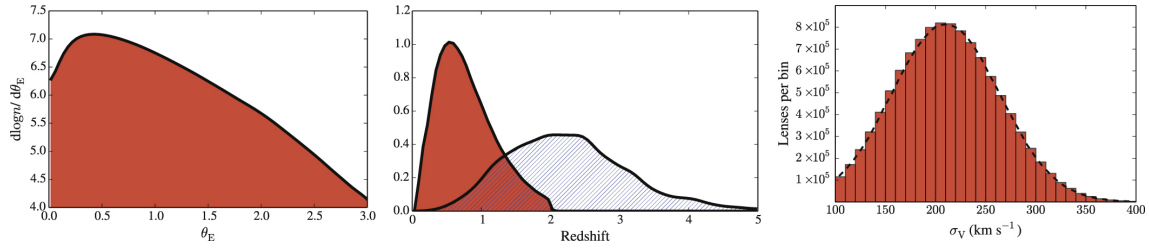


Figura 2.6: Proprietà di un campione di lenti forti ideale. Da sinistra verso destra, distribuzione del raggio di Einstein dei sistemi, del redshift di sorgenti (grigio) e lenti (rosso) e della dispersione di velocità della lente. Immagine riprodotta da Collett (2015).

dei campioni sia in termini di profondità, che di area osservata e seeing, in confronto ai dati esistenti. Tali osservazioni potranno potenzialmente aumentare il numero di lenti gravitazionali su scala galattica conosciute di diversi ordini di grandezza. In particolare, *Euclid* nello 0.45% iniziale delle survey ha già raddoppiato il numero totale dei candidati di lenti noti mediante imaging spaziale, e 243 dei 250 candidati più promettenti non erano stati mai pubblicati finora (Walmsley et al. 2026).

Un incremento tanto significativo consente di estendere le analisi attuali verso nuovi regimi osservativi e di studiare l'evoluzione delle proprietà di lenti e sorgenti con la luminosità ed il redshift.

Nell'articolo Collett (2015) è stato stimato quanti sistemi di galaxy-galaxy lens potevano e potranno essere scoperti nel corso degli anni, tramite campagne osservative come *Dark Energy Survey* (DES), *Large Synoptic Survey Telescope* (LSST) ed *Euclid*. Per farlo, gli autori hanno costruito una popolazione realistica di lenti forti, sfruttando il profilo di densità isoterma ellittico (SIE, Eq. 2.27) e la formula del raggio di Einstein trovata per il profilo sferico (SIS, Eq. 2.29).

I risultati sono sintetizzati in Figura 2.6. Si può osservare che la popolazione delle lenti gravitazionali è caratterizzata da galassie poste per la maggior parte a redshift $0.1 \lesssim z \lesssim 1$, con un picco di dispersione di velocità attorno ai 210 km/s. Le sorgenti, invece, hanno un picco a redshift $z \simeq 2$. Tali sistemi generano raggi di Einstein dell'ordine di $0.5''$ e, dal primo grafico a sinistra, la distribuzione mostra che i sistemi con raggi di Einstein grandi sono progressivamente più rari. La distribuzione in funzione del redshift è determinata anche dal rapporto fra le grandezze geometriche del sistema, come le distanze D_d , D_s e D_{ds} ; poiché esse entrano nella definizione della densità superficiale critica (Eq. 2.17), Σ_c determina per quali redshift della lente si ha il massimo effetto a parità di redshift della sorgente e viceversa. Le galassie che producono strong lensing sono dunque prevalentemente galassie ellittiche massicce; ciò le rende un campione ideale per studiarne la distribuzione di massa.

Tuttavia, non tutti i sistemi di strong lensing sono chiaramente osservabili. Lo stesso studio, infatti, ha simulato come la medesima lente fosse vista da telescopi diversi,

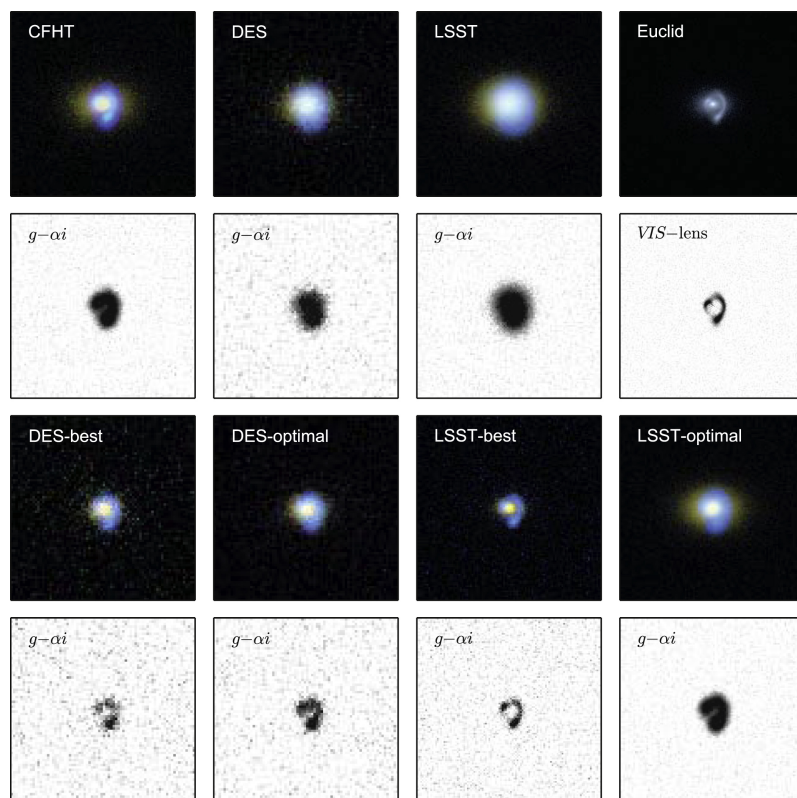


Figura 2.7: Simulazione di come una stessa lente è osservata da telescopi diversi. Le immagini in bianco e nero sono ottenute mediante filtri particolari, e corrispondono a quelle a colori sovrastanti. Immagine riprodotta da Collett (2015).

giungendo ai risultati riportati in Figura 2.7. Se la risoluzione del telescopio è scarsa, gli archi gravitazionali possono diventare quasi indistinguibili dalla lente, rendendo impossibile l'identificazione del sistema di strong lensing pur avendolo osservato. La qualità osservativa è dunque un parametro importante per identificare una lente e modellarne accuratamente la distribuzione di massa.

Una volta individuati sistemi di strong lensing sufficientemente ben risolti, essi possono essere modellati per ricostruire la distribuzione di massa della galassia lente. Uno dei campioni più studiati è quello della Sloan Lens ACS Survey (SLACS), sfruttato da Auger et al. (2010) per analizzare il profilo di massa totale delle galassie ellittiche. Gli autori utilizzano un campione di *early-type galaxies* (ETGs, galassie primordiali) che danno origine a fenomeni di strong lensing per studiare le relazioni di scala delle ETGs, concentrandosi sulle relazioni tra massa totale, massa stellare e altri parametri strutturali delle lenti. In particolare, essi confrontano il campione SLACS con il precedente *Sloan Digital Sky Survey* (SDSS), per capire se il loro campione è rappresentativo delle galassie ellittiche massicce.

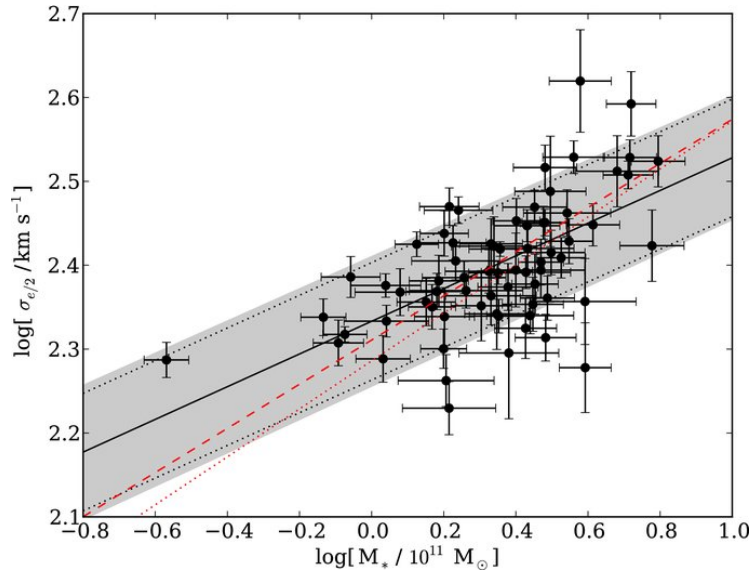


Figura 2.8: Relazione $\sigma_{e/2} - M_*$ per le lenti SLACS. La linea nera è il fit lineare dei dati, di cui la banda grigia indica l'incertezza. Le linee rosse, invece, rappresentano fit lineari ottenuti in precedenza da altre osservazioni. Le relazioni SLACS risultano essere in accordo con SDSS. Immagine riprodotta da Auger et al. (2010).

In primo luogo viene confrontata la dispersione di velocità stellare entro metà raggio efficace in funzione della distribuzione di massa stellare, ottenendo la Figura 2.8. Si può notare che esiste con buona approssimazione una relazione lineare tra $\sigma_{e/2}$ e M_* , dunque in generale galassie più massicce hanno dispersioni di velocità più elevate. Ciò è in linea con quanto ci si aspetta da normali ETGs, dunque le galassie lente presentano la stessa relazione massa-dispersione delle normali ellittiche.

Confrontando invece la relazione tra la massa stellare ed il raggio efficace, gli autori hanno ottenuto i risultati riportati in Figura 2.9. In generale si può notare che galassie più massicce tendono ad avere anche dimensioni maggiori. Confrontando il fit ottenuto dal campione SLACS con il fit SDSS si nota che gli oggetti SLACS occupano la parte più alta della distribuzione SDSS: la pendenza del fit risulta dunque più ripida non perché le galassie lente siano diverse, ma perché hanno per la maggior parte massa $M_* > 10^{11} M_\odot$. Il campione è dunque rappresentativo delle ellittiche più massicce dell'Universo locale. Poiché il campione SLACS risulta rappresentativo delle normali ETGs massicce, le proprietà del profilo di massa ricavate dalle lenti possono essere interpretate come proprietà fisiche della popolazione galattica, e non come effetti dovuti alla selezione del campione. Una volta verificata la rappresentatività del campione, gli autori combinano le osservazioni di strong lensing con le misure della dinamica stellare per ricostruire il profilo di

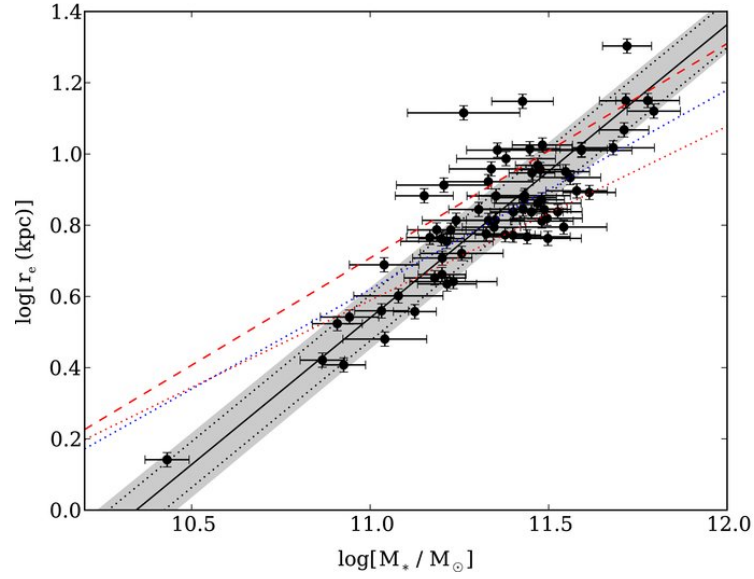


Figura 2.9: Relazione $r_e - M_\star$ per le lenti SLACS. La linea nera è il fit lineare dei dati, di cui la banda grigia indica l'incertezza. Le linee rosse e blu, invece, rappresentano fit lineari ottenuti in precedenza da altre osservazioni. Le relazioni SLACS risultano avere una pendenza maggiore di SDSS, in quanto il campione è in media più massiccio. Immagine riprodotta da Auger et al. (2010).

massa totale delle galassie, vincolandolo a

$$\rho(r) \propto r^{-\gamma'} \quad (2.35)$$

con pendenza media $\langle \gamma' \rangle = 2.028 \pm 0.027$, lievemente maggiore di quella del SIE che prevede $\gamma = 2$, ma in buon accordo con esso.

Tale andamento è stato confermato più recentemente anche da Shajib et al. (2024). Tuttavia, in quest'ultima review viene anche sollevata la cosiddetta *bulge-halo conspiracy*. La massa totale, infatti, è la somma di due contributi: la massa stellare e la massa di materia oscura. Tuttavia, nessuna delle due singolarmente è isoterma: le stelle seguono circa un profilo de Vaucouleurs ($I(r) \propto r^{-\frac{1}{4}}$, dove I è la brillantezza superficiale), mentre gli aloni di DM seguono un profilo NFW (Eq. 1.26). La conoscenza del profilo di massa totale costituisce il punto di partenza per tentare di separare il contributo della componente stellare da quello dell'alone di materia oscura, operazione che richiede ulteriori informazioni osservative e opportune modellizzazioni.

La ricostruzione del profilo di massa totale richiede quindi di modellare il sistema di strong lensing a partire dalle osservazioni. È pertanto necessario comprendere quali informazioni siano effettivamente contenute nelle immagini e quali degenerazioni limitino il recupero dei parametri fisici della lente.

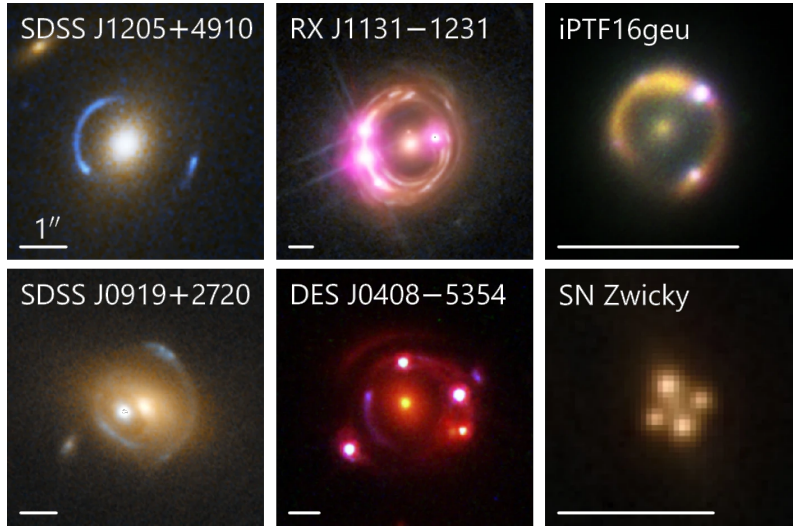


Figura 2.10: Esempi di fenomenologia di lenti forti su scala galattica, ognuno con sorgenti diverse. Nella prima colonna non è stato possibile risolvere la sorgente; nella seconda e nella terza si hanno rispettivamente immagini di quasar e supernovae. La barra bianca indica una scala di $1''$. Figura riprodotta da Shajib et al. (2024).

2.3.3 Osservabili e degenerazioni principali

In un sistema di strong lensing, si possono distinguere due categorie di osservabili principali. La prima sono archi gravitazionali e anelli di Einstein (per sorgenti estese) oppure immagini multiple (per sorgenti puntiformi). Le diverse manifestazioni delle lenti forti, come analizzato nel paragrafo 2.2.2, dipendono dalla posizione della sorgente rispetto alle caustiche della lente. Alcuni esempi sono presentati in Figura 2.10.

Da queste osservabili si possono ricavare vincoli sul potenziale della lente, dunque anche sulla sua distribuzione di massa. Se la sorgente è estesa, ogni pixel dell'arco costituisce un vincolo aggiuntivo sul modello della lente. Se invece è puntiforme, il fatto di poter osservare anche i rapporti e le anomalie di flusso permette di ricavare le magnificazioni e individuare sub-aloni di materia oscura altrimenti invisibili.

La seconda categoria è quella dei ritardi temporali. Se la sorgente è variabile nel tempo, come accade per quasar e supernovae, le immagini variano ad istanti diversi, poiché il percorso verso la posizione sul piano della lente differisce leggermente in base al raggio considerato. Misurando tali ritardi è possibile ottenere un ulteriore vincolo sul potenziale gravitazionale e su parametri cosmologici come H_0 .

Tuttavia, osservare perfettamente una lente non significa conoscere univocamente la distribuzione di massa. Modelli anche molto diversi fra loro possono infatti dare origine a immagini praticamente identiche, creando una degenerazione.

La degenerazione più significativa dal punto di vista della ricostruzione del profilo di massa totale è la *Mass-Sheet Degeneracy* (MSD). Osservando le immagini create dalla lente è possibile costruire un modello della distribuzione di massa che le riproduca. Tuttavia, esso non è univoco: esiste infatti un'intera famiglia di modelli che produce praticamente le stesse osservabili di imaging. Matematicamente, tale famiglia è descritta dalla trasformazione

$$\kappa \rightarrow \kappa' = \lambda\kappa + 1 - \lambda \quad (2.36)$$

dove λ è una costante ed il termine $1 - \lambda$ rappresenta una distribuzione uniforme di massa antistante la lente (infatti mass-sheet indica un "foglio" di densità di massa costante). Tale trasformazione implica uno shift anche nella posizione della sorgente

$$\beta \rightarrow \beta' = \lambda\beta \quad (2.37)$$

Per scegliere il modello corretto, è necessaria un'osservazione indipendente, ad esempio tramite la cinematica stellare. Le stelle infatti si muovono nel potenziale gravitazionale reale, ed in generale distribuzioni di massa diverse prediranno dispersioni di velocità diverse. Data una serie di distribuzioni di massa compatibili con le immagini, la cinematica permette dunque di eliminare quelle incompatibili con il moto delle stelle, dando informazioni complementari al lensing e permettendo di eliminare eventuali degenerazioni o di ridurle. Negli studi moderni, i due metodi sono dunque spesso analizzati insieme, in quanto il primo è sensibile alla massa proiettata, mentre il secondo è sensibile alla profondità della buca di potenziale; combinando le informazioni è possibile ricostruire il profilo di massa totale (e di conseguenza anche i contributi singoli di stelle e DM) con un'affidabilità più elevata.

Lo strong lensing permette dunque di ricostruire il profilo di massa totale della galassia lente, a cui contribuiscono sia la parte stellare che la materia oscura. Tuttavia, esse non possono essere osservate separatamente: la distinzione dei singoli contributi richiede ulteriori modelli e informazioni osservative. Indipendentemente da ciò, il lensing è sensibile anche a piccole irregolarità del potenziale gravitazionale. Esse sono utilizzate per indagare la sotto-struttura degli aloni di DM, anche quando la deflessione luminosa è appena percettibile. Lo strong lensing è dunque uno degli strumenti più potenti per investigare la natura della materia oscura, come verrà approfondito nel capitolo successivo.

3

Rilevazioni di sub-aloni di materia oscura tramite lensing gravitazionale forte

Nei primi due capitoli della tesi, si sono analizzati la materia oscura ed il lensing separatamente, esponendo lo stato dell'arte nei due ambiti. In questo, invece, lo scopo è quello di illustrare come lo strong gravitational lensing possa essere applicato come strumento allo studio della DM, ponendo dei vincoli sui vari modelli teorici tramite le diverse osservazioni. Dapprima verranno presentate in maggior dettaglio le due osservabili principali, ovvero le anomalie nei rapporti di flusso e le perturbazioni alla brillantezza superficiale. Successivamente verranno introdotti i modelli utilizzati per descrivere la lente principale e le perturbazioni dei sotto-aloni di materia oscura, ponendo particolare enfasi sulle relative criticità e degenerazioni. Infine, verranno presentati i vincoli attuali forniti dalla letteratura riguardo alle rilevazioni individuali di sotto-strutture, spiegando come essi possano essere usati in un'analisi statistica della popolazione di aloni di materia oscura.

3.1 Il lensing come strumento di indagine della materia oscura

I dati raccolti tramite strong gravitational lensing sono sensibili sia a variazioni della distribuzione di materia su scale sub-galattiche all'interno delle galassie lente, sia a quelle lungo la loro linea di vista. In particolare, ciò che viene modificato è il potenziale della

lente e le sue derivate, introdotti nella Sezione 2.2, che a loro volta influenzano la posizione delle immagini e la magnificazione. In questa sezione sono descritti brevemente la natura e l'intensità dei principali effetti.

3.1.1 Anomalie nei rapporti di flusso

Per modellare il potenziale della galassia lente, generalmente si usano modelli *smooth*, ovvero in cui la distribuzione di massa non presenta perturbazioni e segue un andamento regolare dato da una funzione analitica (come il SIE); ad essi viene talvolta aggiunto uno shear esterno per renderli più realistici. Tali modelli permettono di predire le posizioni delle immagini, le magnificazioni ed i rapporti di flusso, secondo le modalità già discusse. Se la massa reale fosse liscia come il modello, allora tali previsioni sarebbero in perfetto accordo con i dati sperimentali.

Tuttavia, all'interno delle lenti possono essere presenti sub-aloni di massa compresa tra $10^6 M_\odot$ e $10^{11} M_\odot$, che producono piccole perturbazioni locali del potenziale. In particolare, solitamente i più grandi contengono stelle e sono direttamente rilevabili tramite la loro luminosità, mentre i più piccoli risultano essere *dark*. Tali sotto-strutture originano perturbazioni delle posizioni delle immagini generalmente piccole rispetto alla scala del sistema macroscopico, mentre possono modificare significativamente le magnificazioni, che dipendono dalle derivate seconde del potenziale. Come visto nell'Equazione 2.25, infatti, la magnificazione è inversamente proporzionale al determinante della matrice A , che a sua volta è legata all'hessiana del potenziale, la quale dipende dalle derivate seconde. Poiché l'hessiana indica la curvatura locale del potenziale, anche una piccola massa aggiuntiva può influenzarne significativamente il valore.

Tali sotto-aloni danno dunque origine ad immagini che sono approssimativamente dove ci si aspetterebbe tramite le predizioni teoriche del modello, ma risultano troppo luminose o, viceversa, troppo deboli; tali incongruenze prendono il nome di *anomalie nei rapporti di flusso*, e permettono di sondare masse inferiori rispetto a quelle direttamente osservabili tramite emissione luminosa.

Da definizione matematica, una *cuspid* (in inglese *cusp*) è un punto in cui si incontrano due rami di una curva che hanno la stessa tangente. Se la caustica presenta delle cuspidi, quando la sorgente vi si avvicina si presenta una configurazione molto particolare sul piano della lente, in cui si formano tre immagini molto ravvicinate fra loro e con magnificazioni elevate; tale configurazione è detta *cusp triplet*. Denominate A , B e C le tre immagini, le relative magnificazioni vengono indicate rispettivamente con μ_A , μ_B e μ_C . A questo punto è possibile definire il parametro adimensionale

$$R_{cusp} = \frac{|\mu_A + \mu_B + \mu_C|}{|\mu_A| + |\mu_B| + |\mu_C|} \quad (3.1)$$

Poiché la teoria del lensing prevede che, se il potenziale è liscio, $\mu_A + \mu_B + \mu_C \rightarrow 0$, tale parametro indica quanto la configurazione osservata si discosta dalla relazione di cuspidi prevista per una lente con potenziale perfettamente liscio, ed è normalizzato rispetto alla somma delle magnificazioni assolute, rendendo il parametro indipendente dalla luminosità intrinseca della sorgente. Nell'intorno di una cuspidi, piccole perturbazioni al potenziale gravitazionale producono grandi variazioni nella luminosità, ed è dunque qui che diventa più facile osservare delle anomalie di flusso; inoltre, esse risultano facilmente quantificabili grazie al parametro appena introdotto.

Un articolo storico sulle anomalie di flusso che sfrutta l'analisi del parametro R_{cusp} è Keeton, Gaudi e Petters (2003). Gli autori sviluppano una descrizione quantitativa delle anomalie nelle configurazioni cusp, misurando la violazione della relazione di cuspidi riportata sopra in termini delle proprietà locali del potenziale di lensing. Essi mostrano che, sebbene R_{cusp} debba tendere a zero nel limite ideale in cui la sorgente si trova esattamente sulla cuspidi, valori non nulli sono attesi anche per modelli perfettamente lisci quando la sorgente si trova a distanza finita da essa. Tuttavia, alcune configurazioni osservate presentano valori di R_{cusp} significativamente più grandi rispetto alle predizioni dei modelli lisci realistici, nonostante al loro interno fosse stata inclusa una grande varietà di lenti, comprese galassie con ellitticità, shear esterno e diverse distribuzioni radiali di massa. Un sunto del loro studio viene mostrato graficamente in Figura 3.1. L'incongruenza che emerge tra simulazioni e dati raccolti indica che la distribuzione di massa liscia della galassia non è sufficiente a spiegare le osservazioni, ma ad oggi sappiamo che ciò non indica necessariamente la presenza di sotto-strutture di materia oscura nella galassia lente. Infatti, la presenza di struttura barionica o di aloni lungo la linea di vista crea anomalie simili, pur se causate da strutture a piccola scala differenti.

Le anomalie nei rapporti di flusso sono quindi osservabili che sfruttano la sensibilità della magnificazione alle perturbazioni locali del potenziale, e possono contribuire a porre dei vincoli osservativi all'indagine della DM. Tuttavia, esse sono limitate dalla natura puntiforme delle sorgenti (quindi sono applicate tipicamente ai casi di quasar lensati) e dalla degenerazione con fenomeni astrofisici non legati alla materia oscura. Un approccio complementare, utile da affiancarvi, consiste nell'utilizzare sorgenti estese, per le quali le perturbazioni si manifestano direttamente come deformazioni della distribuzione di brillantezza superficiale.

3.1.2 Perturbazioni alla brillantezza superficiale

Quando la sorgente non è puntiforme come un quasar, ma piuttosto estesa come una galassia, il numero di informazioni che si possono ricavare dalla deformazione tramite la lente è nettamente maggiore.

Nel galaxy-galaxy lensing, la sorgente è modellata esattamente allo stesso modo del caso puntiforme, ovvero tramite un modello liscio (tipicamente, anche in questo caso, SIE

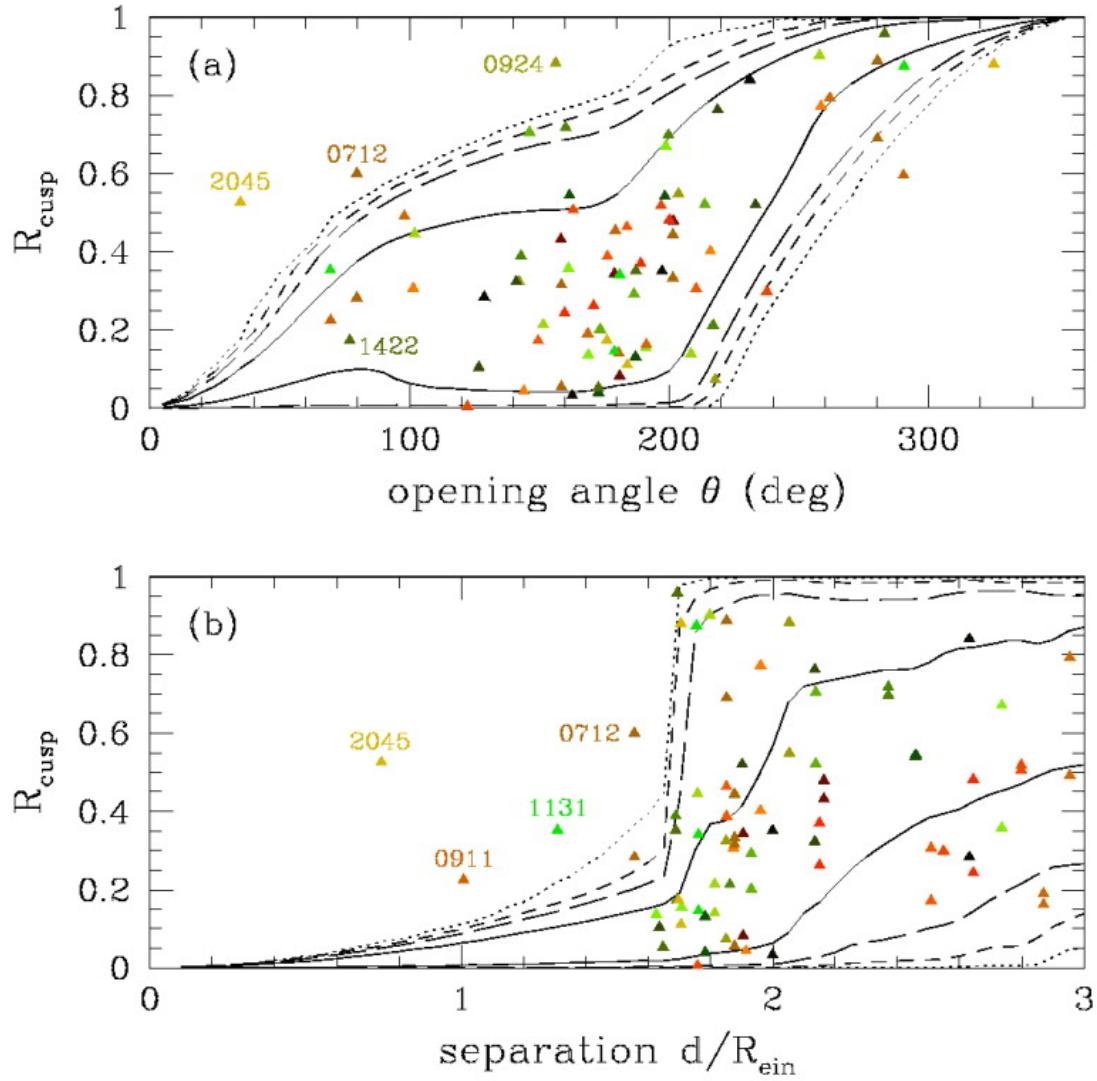


Figura 3.1: Immagine rappresentativa delle anomalie di flusso. Le varie linee indicano contorni di probabilità condizionata costante, ottenuti da simulazioni Monte Carlo. In particolare, esse rappresentano la probabilità di ottenere un certo valore di R_{cusp} dato l'angolo di apertura del tripletto (in alto) o data la distanza normalizzata tra le immagini (in basso). Il livello di confidenza aumenta procedendo dall'interno verso l'esterno; l'ultima curva punteggiata corrisponde al 99.9%. Il fatto che alcuni punti sperimentali (triangoli colorati) cadano ben al di fuori di qualsiasi contorno indica che la distribuzione di massa liscia della galassia non è sufficiente a spiegare le osservazioni.

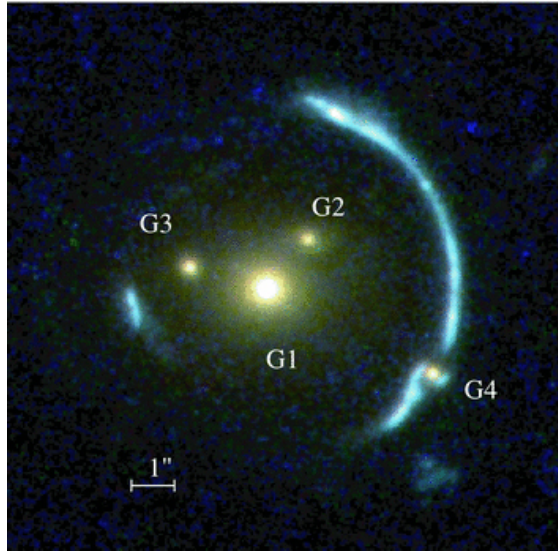


Figura 3.2: Esempio di arco gravitazionale deformato localmente da un satellite visibile, denominato con G4. L'etichetta G1 indica la galassia che funge da lente principale, mentre G2 e G3 sono altre due galassie del gruppo. Immagine riprodotta da Simona Vegetti, Czoske e Koopmans (2010).

con l'aggiunta di shear esterno). Tuttavia, quando essa viene deformata dalla galassia lente, ciò che si manifesta non sono più immagini puntiformi, bensì archi gravitazionali e, nella migliore delle ipotesi, interi anelli di Einstein. Il numero di pixel che possono essere confrontati fra simulazione e osservazione è dunque superiore. Inoltre, se vicino ad un arco è presente un sub-alone, esso come visto perturba localmente il potenziale. Di conseguenza, quando la massa è sufficientemente grande si crea una piccola deformazione locale dell'arco; studiando il residuo osservazione-modello è dunque possibile non solo localizzare l'alone, ma anche dedurne la distribuzione di massa (questo perché, come accennato nel Capitolo 1, più la distribuzione è concentrata, più efficace è la lente). Un esempio in cui il satellite presenta anche una controparte visibile è riportato in Figura 3.2; il satellite è indicato con l'etichetta G4.

In particolare, ciò che viene confrontato tra osservazioni e simulazioni è la *distribuzione della brillantezza* $I(x, y)$, cioè la luminosità in ogni punto dell'immagine: se non esiste un modello liscio capace di riprodurre ogni pixel dell'arco, allora ciò è indice di una mancanza di massa. Successivamente, il procedimento consiste nell'introdurre nel modello una piccola perturbazione del potenziale, provando il maggior numero di configurazioni possibili; se una certa posizione e una determinata massa migliorano drasticamente la ricostruzione dell'arco, allora la perturbazione viene interpretata come una sotto-struttura di DM. Esempi di applicazioni alla rilevazione di singole sotto-strutture sono presentati nel paragrafo 3.3.1.

Tale metodo risulta essere molto più potente del precedente, ed è fra i più utilizzati negli studi moderni: confrontare migliaia di pixel, infatti, permette di abbattere significativamente le incertezze statistiche rispetto ai pochi flussi precedenti, e dunque le stime della posizione del sub-alone, della sua massa e del suo raggio di scala risultano molto più precise. Tuttavia, uno dei limiti delle perturbazioni alla brillantezza superficiale è che la massa degli aloni rilevabili dipende fortemente dalla sensibilità degli strumenti di osservazione utilizzati: al di sotto di una certa massa soglia, infatti, gli effetti di deformazione diventano talmente deboli da risultare indistinguibili dall'arco originale; di conseguenza, l'alone diventa invisibile pur rimanendo presente. Nonostante ciò, studiare le perturbazioni alla brillantezza superficiale è attualmente preferito rispetto alle anomalie di flusso.

Entrambe le osservabili presentate si basano sullo stesso principio fisico, ovvero sull'identificazione di discrepanze tra le osservazioni e le predizioni ottenute da un modello del sistema di lensing. La costruzione di tale modello e la valutazione delle sue incertezze rivestono dunque un ruolo fondamentale nello studio della materia oscura, poiché determinano la capacità di distinguere le perturbazioni dovute a sotto-strutture massive da eventuali imperfezioni nella descrizione della lente e della sorgente. Per questo motivo, nella sezione successiva vengono approfondite le principali tecniche di modelling utilizzate per descrivere sia la lente principale, sia i sotto-aloni di materia oscura.

3.2 Modelling dei sistemi di strong gravitational lensing

L'analisi dei sistemi di strong gravitational lensing finalizzata alla ricerca di sotto-strutture di materia oscura viene generalmente formulata come un problema di *inferenza bayesiana gerarchica*. L'inferenza bayesiana consiste dapprima nel definire un modello parametrico del sistema, che permetta di simulare le osservazioni attese per un dato insieme di parametri. In seguito viene stimata computazionalmente la distribuzione a posteriori di tali parametri; confrontando le osservazioni simulate dal relativo modello con i dati reali, infatti, possono essere ricavati i valori dei parametri più probabili per il sistema e le relative incertezze. Esistono due livelli principali dell'inferenza: quello relativo ai parametri del singolo sistema in esame e quello relativo agli iperparametri che descrivono la popolazione dei sub-aloni. Il carattere gerarchico consente di combinare le informazioni ottenute da molti sistemi di lensing, con lo scopo di dedurre le proprietà statistiche della popolazione dei sub-aloni; ciò permette dunque di passare dal primo livello al secondo, ed è utile ai fini di distinguere tra loro i diversi modelli di materia oscura.

I parametri del modello sono quantità incognite del sistema e includono la distribuzione di massa della lente principale, le proprietà della sorgente e quelle delle eventuali

perturbazioni dei sub-aloni. Fra queste, il profilo di massa della lente determina il principale contributo al potenziale gravitazionale; gli aloni, invece, sono perturbazioni locali a tale potenziale. È necessario dunque parametrizzare entrambe le componenti, perché descrivono contributi fisici diversi.

3.2.1 Modello della lente principale

La prima componente da inserire nel modello è la distribuzione di massa della lente. Su scala galattica, il principale deflettore è tipicamente una singola galassia massiccia di tipo early-type. Le parametrizzazioni utilizzate più comunemente per descrivere queste distribuzioni di densità di massa sono un singolo profilo a legge di potenza (*single power law*, SPL) oppure il profilo SIE combinato con uno shear esterno.

Lo *shear esterno* è un campo che serve per descrivere l'effetto gravitazionale al primo ordine dovuto alla materia circostante alla galassia e alla distribuzione di massa lungo la linea di vista. Esso permette di sintetizzare gli effetti delle perturbazioni esterne, senza necessariamente distinguerne tutti i contributi, e soprattutto senza aggiungere massa alla lente principale. La distorsione quadrupolare del potenziale gravitazionale introdotta dallo shear modifica le posizioni relative delle immagini, la loro forma e le magnificazioni e influenza dunque le immagini sul piano della lente predette dal modello.

La scelta di questi specifici profili è motivata dall'analisi di campioni relativamente ampi di galassie lente, che ben vi si adattano. Tuttavia, la complessità del modello macroscopico rappresenta il limite principale alla capacità di interpretare un residuo come firma di un sub-alone. Infatti, è improbabile che le galassie reali siano semplici oggetti ellittici; al contrario, ci si aspetta che esse abbiano strutture radiali e angolari più complesse. Tutte le componenti che vengono trascurate nel modello della lente si riflettono in una potenziale sovrastima o sottostima degli aloni di materia oscura, che possono portare ad inferenze erranee sulle proprietà di quest'ultima.

Una delle criticità che sono emerse nel tempo, per esempio, è la scoperta di componenti a disco in diverse galassie lente che precedentemente erano state considerate puramente ellittiche. Tali dischi, infatti, producono un effetto di lensing non trascurabile, e in alcuni sistemi possono causare delle anomalie di flusso comparabili a quelle attribuite ai subhaloes di DM (Hsueh et al. 2017). Anche le perturbazioni di multipolo alla struttura angolare delle galassie lente sono una sorgente significativa di falsi positivi nella rilevazione di sub-aloni di masse maggiori (Conor M O'Riordan e Simona Vegetti 2024). Un'ulteriore degenerazione può essere dovuta alla distribuzione della brillantezza superficiale della galassia lente, che può talvolta sovrapporsi agli archi e introdurre residui. Essa viene generalmente sottratta ai dati preventivamente o inferita nel modello

usando (tipicamente) un *profilo di Sérsic*

$$I(r) = I_e e^{-b_n \left[\left(\frac{r}{r_e} \right)^{\frac{1}{n}} - 1 \right]} \quad (3.2)$$

dove I_e è la brillantezza superficiale al raggio efficace r_e , il quale contiene metà della luminosità totale, n è detto *indice di Sérsic* e controlla il grado di curvatura della funzione e b_n è una costante di normalizzazione che dipende dalla scelta di n . Ciò è vero in particolare per le *sorgenti risolte*, ovvero quelle di cui si distingue la struttura spaziale.

In conclusione, la degenerazione tra differenti forme di complessità del potenziale di lensing rappresenta in generale una delle principali fonti di errore sistematico nell'inferenza delle proprietà della materia oscura. Quando si modella la lente, è fondamentale includere quanti più contributi possibili nella parametrizzazione affinché le rilevazioni degli aloni possano essere considerate attendibili. Inoltre, i risultati basati su un unico sistema non possono essere generalizzati facilmente ad altri oggetti, in quanto le degenerazioni presenti cambiano in base al campione.

Una volta individuato con sufficiente confidenza il sub-alone, anch'esso deve essere compreso nel modello e parametrizzato; il modo in cui ciò viene fatto è approfondito nella sezione successiva.

3.2.2 Modello dei sub-aloni

Dopo aver individuato una possibile perturbazione compatibile con la presenza di una sotto-struttura di materia oscura, è necessario introdurla esplicitamente nel modello di lensing. In particolare, è importante porre la propria attenzione sulla scelta della parametrizzazione, in quanto sia la massa totale dell'alone che la sua distribuzione spaziale influenzano l'efficacia della lente.

In letteratura, sono stati sviluppati diversi approcci per descrivere i sub-aloni e, più in generale, tutti gli aloni di piccola massa. Le proprietà da specificare includono la massa, la posizione rispetto alla lente, il redshift ed il profilo di densità, in quanto tutte incidono direttamente sulla deflessione gravitazionale e sulla capacità di rilevare tali sub-aloni durante le osservazioni.

L'approccio più diffuso consiste nel rappresentare anche i sub-aloni con profili di densità parametrici, in perfetta analogia con le lenti. Tuttavia, la forma dei profili scelti è tipicamente differente; tra i più utilizzati vi sono il profilo NFW (Eq. 1.26) e il profilo Pseudo-Jaffe.

Nel caso del profilo NFW, la distribuzione di densità è descritta dal raggio di scala r_s e dalla densità di normalizzazione ρ_s , che sono caratteristici della struttura e dipendono dal modello di materia oscura utilizzato. In particolare, si richiama che il raggio di scala

individua la transizione tra una regione interna in cui la densità decresce approssimativamente come $\frac{1}{r}$ e una regione esterna in cui essa decresce come $\frac{1}{r^3}$. Insieme alla densità caratteristica, esso determina il grado di concentrazione dell'alone.

Il profilo *Pseudo-Jaffe*, invece, è generalmente espresso come differenza di due profili SIS

$$\rho(r) = \frac{\sigma_v^2}{2\pi G} \left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{r^2 + r_t^2} \right) \quad (3.3)$$

dove σ_v è la dispersione di velocità del sub-alone, mentre r_t è detto *raggio di troncamento*. Analogamente al raggio di scala del profilo NFW, esso identifica una scala caratteristica della distribuzione di massa; a differenza di r_s , tuttavia, il raggio r_t introduce un vero e proprio troncamento del profilo. Per $r \ll r_t$, infatti, si ha

$$\rho(r) \propto \frac{1}{r^2} \quad (3.4)$$

che è l'andamento del SIS e risulta più ripido rispetto al NFW nelle zone centrali. Per $r \gg r_t$, invece, l'andamento è

$$\rho(r) \propto \frac{1}{r^4} \quad (3.5)$$

Esso permette alla massa totale di rimanere finita anche per raggi infiniti, in quanto decresce più rapidamente di un classico profilo NFW.

Il profilo di Navarro, Frenk e White viene generalmente usato per descrivere aloni isolati, che possono influenzare il potenziale anche a grandi distanze; il troncamento del profilo *Pseudo-Jaffe*, invece, descrive particolarmente bene i sub-aloni, perché include gli effetti dello stripping mareale dell'alone ospite, che agisce sulla parte più esterna sottraendo massa. Esso permette anche di semplificare i calcoli analitici del lensing.

Nei modelli più completi, il numero di aloni e sub-aloni lungo la linea di vista viene estratto da distribuzioni statistiche basate sulla relativa funzione di massa. Le loro posizioni proiettate, invece, sono assegnate secondo distribuzioni spaziali motivate dalle simulazioni cosmologiche. Dopo aver definito tali proprietà, il contributo dei singoli aloni al potenziale gravitazionale totale può essere calcolato in maniera diretta e sommato al contributo della lente principale, il quale viene modellato come descritto nella sezione precedente.

Oltre ai modelli parametrici, esistono approcci più flessibili in cui i sub-aloni non vengono descritti individualmente. Tra di essi figurano i modelli *pixellati*, in cui le sottostrutture sono rappresentate come correzioni locali del potenziale gravitazionale senza ulteriori assunzioni sul numero di aloni o sul loro profilo di densità, e il *Gaussian Random Field* (GRF, campo gaussiano randomico), che modella le fluttuazioni statistiche complessive del campo di densità e da cui è possibile inferire le proprietà della popolazione di aloni. Tali metodi non saranno approfonditi in ulteriore dettaglio, in quanto esula dallo scopo di questa tesi.

Le differenti strategie di modelling descritte in queste sezioni costituiscono la base metodologica per l'interpretazione delle osservazioni di strong lensing. Definito il modello della lente e delle eventuali sotto-strutture è infatti possibile confrontarne le predizioni con i dati osservativi, ricavando così i vincoli quantitativi cercati sulle proprietà della materia oscura. Nella sezione seguente vengono presentati i principali risultati ottenuti in letteratura, sia attraverso rilevazioni individuali che mediante analisi statistiche.

3.3 Vincoli attuali della letteratura

A livello osservativo, esistono due principali tipi di sorgenti coinvolte nei sistemi di strong gravitational lensing: le *sorgenti irrisolte*, ovvero puntiformi, in cui le informazioni principali sono ottenibili tramite la posizione ed il flusso delle immagini multiple, e le *sorgenti risolte*, ovvero estese, in cui è possibile analizzare la struttura superficiale degli archi e degli anelli pixel per pixel. Entrambe risultano essere di fondamentale importanza nello studio della materia oscura, in quanto complementari fra loro. Tramite le sorgenti irrisolte si può sempre provare a porre vincoli sulla DM, in quanto sono sensibili a tutta la materia lungo la linea di vista in maniera integrata e in particolar modo agli aloni di piccola massa, ma sono anche più soggette a degenerazioni dovute alla complessità del modello e al microlensing. Per le sorgenti risolte, invece, è necessario trovare e rilevare singole perturbazioni lungo l'arco, che in generale è più raro, perché richiede allineamento con esso; un'altra difficoltà è che queste sorgenti richiedono risoluzioni angolari molto elevate. Tuttavia, esse permettono di ottenere vincoli più robusti sulla DM, in quanto grazie alla maggiore quantità di informazioni ottenibili è possibile distinguere le diverse componenti di massa coinvolte. In questo paragrafo si pone particolare attenzione alle sorgenti risolte, in quanto esse permettono, in linea di principio, di distinguere le strutture intrinseche della sorgente dalle perturbazioni locali del potenziale; i vincoli sulla DM sono dunque dedotti con maggiore confidenza.

Individuata la sorgente è poi possibile avere tipi diversi di rilevazioni. Se la rilevazione è *individuale*, viene identificata un'anomalia in un singolo sistema e la si interpreta come un possibile sub-alone. Tuttavia, dato il carattere gerarchico dell'inferenza dei modelli, è possibile porre anche *vincoli statistici*, considerando una popolazione numerosa di sistemi e deducendo proprietà collettive come la normalizzazione della funzione di massa, la sua pendenza o lo spettro di potenza delle strutture su piccola scala. Tali informazioni permettono poi di confrontare i vari modelli teorici di materia oscura e di discernarli tra loro. Nel seguito, verranno approfonditi entrambi gli approcci in relazione alle sorgenti risolte.

3.3.1 Rilevazioni individuali di sub-aloni

La prima rilevazione di una galassia satellite nana al di fuori dell'Universo Locale, ottenuta unicamente tramite effetto gravitazionale, è descritta nell'articolo Simona Vegetti, Czoske e Koopmans (2010). In particolare, gli autori hanno individuato una sotto-struttura oscura, precedentemente passata inosservata dall'immagine di HST, nella galassia lente SDSSJ0946+1006, appartenente al campione SLACS e più comunemente conosciuta come *Double Einstein Ring*. Tale rilevazione, avvenuta mediante imaging gravitazionale diretto, è stata poi confermata modellando la sotto-struttura con una variazione del profilo di densità Pseudo-Jaffe. Tramite tale modello, si è stimato che la struttura avesse una massa pari a $M_{sub} = (3.51 \pm 0.15) \cdot 10^9 M_{\odot}$ e fosse localizzata esattamente nella posizione in cui la mappa di densità superficiale mostrava un marcato picco di convergenza.

In Figura 3.3 sono mostrate diverse ricostruzioni della sorgente e delle correzioni del potenziale della lente per valori crescenti del parametro di regolarizzazione, ottenute tramite imaging gravitazionale diretto. Sebbene la presenza della sotto-struttura non sia osservabile direttamente nei dati originali, essa diventa particolarmente evidente quando si analizza la convergenza associata alla correzione del potenziale, in quanto essa presenta un picco localizzato (rappresentato in rosso in figura) sempre più accentuato.

Una seconda rilevazione di satellite oscuro in una galassia lente early-type tramite gravitational lensing è descritta nell'articolo S. Vegetti, Lagattuta et al. (2012). Gli autori, seguendo un procedimento simile a quello dell'articolo precedente, riportano la presenza di una galassia satellite oscura di massa $M = (1.9 \pm 0.1) \cdot 10^8 M_{\odot}$ nel sistema Einstein ring JVAS B1938+666. Tale sistema è un candidato eccellente per la ricerca di perturbazioni alla brillantezza superficiale, in quanto presenta un anello di Einstein quasi completo e fortemente amplificato; di conseguenza, la presenza della galassia satellite introduce una perturbazione localizzata nell'arco originario. Il sistema è stato osservato a due diverse lunghezze d'onda nel vicino infrarosso, mediante l'ausilio di ottiche adattive, dal telescopio Keck. Per il modello di massa totale si è utilizzata una legge di potenza ellissoidale, il cui best fit è stato poi raffinato da correzioni locali del potenziale definite su una griglia regolare. Anche in questo caso, come nel precedente, è possibile osservare un picco localizzato nella mappa della convergenza associata alla correzione del potenziale; tuttavia, a differenza del caso precedente, esso corrisponde ad un punto di flusso elevato associato ai dati, ed ha dunque una controparte osservativa.

Lo stesso sistema è stato recentemente oggetto di una nuova rilevazione nell'articolo Powell et al. (2025). Essa risulta particolarmente sorprendente, in quanto si riporta la scoperta di un oggetto di massa estremamente bassa, almeno due ordini di grandezza in meno rispetto agli articoli precedenti, individuato attraverso la sua perturbazione gravitazionale su un arco sottile sottoposto a lensing. L'oggetto è stato identificato tramite

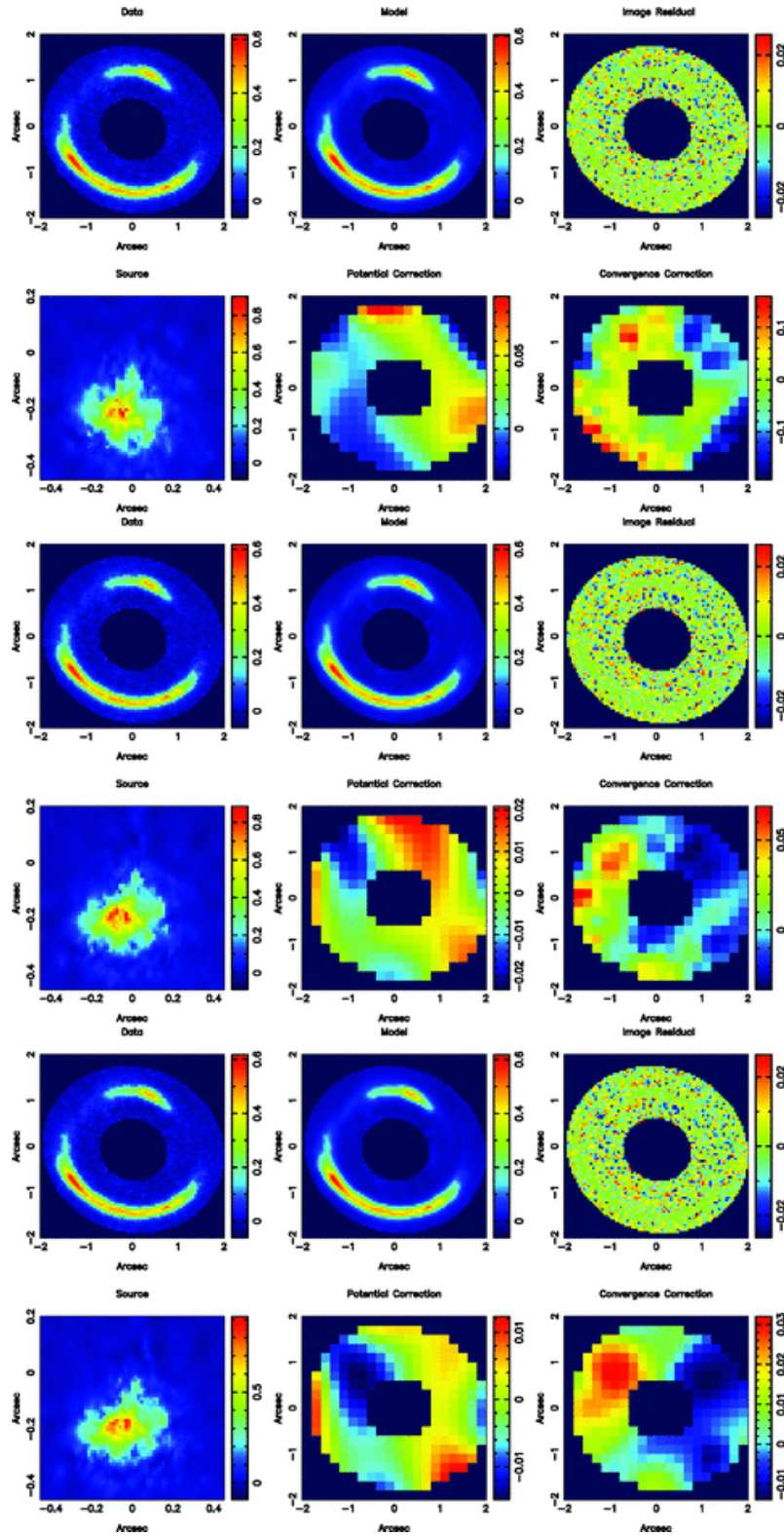


Figura 3.3: Risultato della ricostruzione pixelizzata della sorgente e delle correzioni al potenziale della lente per tre diversi valori del parametro di regolarizzazione $\lambda_{\delta\psi}$ (dall'alto verso il basso, 10^7 , 10^8 , 10^9). Il pannello in alto a sinistra mostra i dati originali della lente, quello centrale la ricostruzione finale del modello e quello in alto a destra i residui delle immagini. Nella seconda riga, invece, da sinistra verso destra, sono mostrate rispettivamente la ricostruzione della sorgente, la correzione al potenziale e la convergenza associata alla correzione del potenziale. Immagine riprodotta da Simona Vegetti, Czoske e Koopmans (2010).

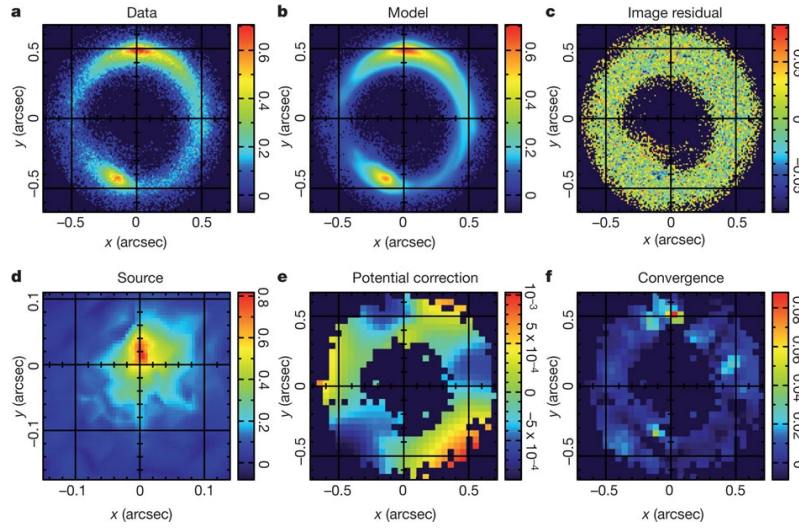


Figura 3.4: Dati ottenuti dal telescopio Keck del sistema JVAS B1938+666 (pannello a), ricostruzione finale del modello (pannello b), residui dell'immagine (pannello c), ricostruzione della sorgente (pannello d), correzione del potenziale (pannello e) e corrispondenti correzioni della densità superficiale proiettata (pannello f). Nella parte superiore dell'arco sottoposto a lensing viene rilevato un picco localizzato, similmente a quanto accadeva nel sistema SDSSJ0946+1006. Immagine riprodotta da S. Vegetti, Lagattuta et al. (2012).

una tecnica di imaging non parametrica, poi confermato tramite un modello parametrico indipendente. La massa stimata dell'oggetto è pari a $m_{80} = (1.13 \pm 0.04) \cdot 10^6 M_{\odot}$. Quando l'articolo è stato pubblicato, questo era l'oggetto di massa più bassa mai rilevato a distanza cosmologica attraverso il suo effetto gravitazionale. In Figura 3.5 è riportata la ricostruzione più recente del sistema. Oltre alla galassia oscura individuata già dodici anni prima e indicata con $\mathcal{A}$, la nuova tecnica di *Very Long Baseline Interferometry* (VLBI) ha mostrato la presenza di un secondo perturbatore più piccolo, indicato con $\mathcal{V}$. L'oggetto è stato confermato utilizzando un confronto con un modello Pseudo-Jaffe.

Ciò che si nota seguendo il filo conduttore di quindici anni di rilevazioni individuali è che, per le sorgenti risolte, è di fondamentale importanza costruire telescopi con una risoluzione angolare sempre maggiore. Il passaggio da HST, a Keck AO (ovvero con *adaptive optics*, ottiche adattive) e infine al più recente VLBI ha permesso di scoprire strutture nuove sempre meno massicce, permettendo di abbattere il limite di massa osservabile di conseguenza. Poter rilevare strutture oscure sempre più piccole, come anticipato nel Capitolo 1, permette di vincolare le proprietà della materia oscura, distinguendo tra i diversi modelli teorici che proprio in questa regione presentano previsioni discordanti. Nella sezione successiva, si riprenderanno le stesse rilevazioni e inseriranno nel contesto di campioni più ampi, per analizzarne i vincoli statistici sulla popolazione degli aloni di DM.

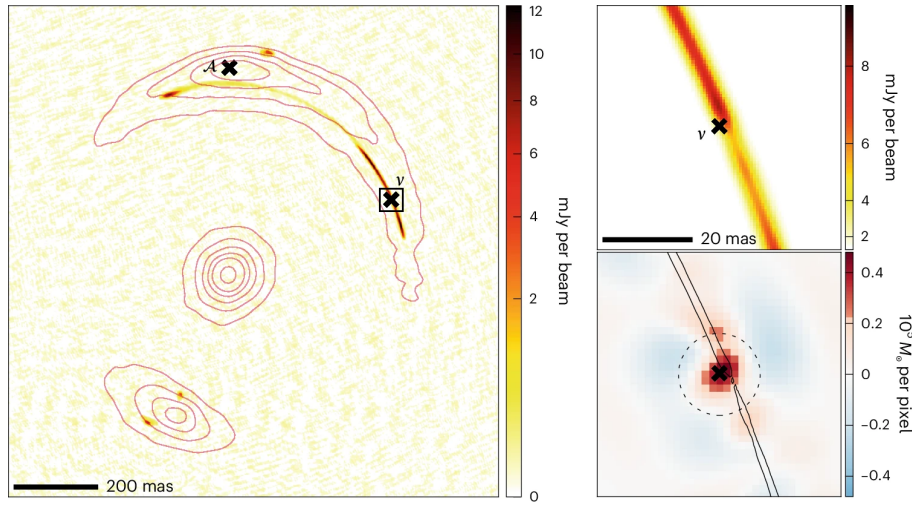


Figura 3.5: Ricostruzione più recente del sistema JVAS B1938+666. A sinistra si osserva il miglior modello di brillantezza superficiale, in cui sono indicate le due posizioni dei perturbatori con una croce nera; in particolare, $\mathcal{A}$ è l'alone già individuato in S. Vegetti, Lagattuta et al. (2012), mentre $\mathcal{V}$ è la nuova scoperta. Nei pannelli laterali si possono osservare il gap nell'arco prodotto dalla perturbazione gravitazionale di $\mathcal{V}$ (in alto a destra) e la mappa di convergenza associata alle correzioni del potenziale gravitazionale (in basso a destra). Immagine riprodotta da Powell et al. (2025).

3.3.2 Vincoli statistici sui modelli di DM

Finora, nei vari articoli analizzati erano state presentate caratteristiche proprie del singolo alone, come la sua massa o la posizione proiettata sul piano della lente. Tuttavia, il gran numero di pixel a disposizione per le sorgenti risolte permette di fare una prima inferenza sugli iperparametri della popolazione di cui questi aloni fanno parte. In particolare, generalmente quando si effettua la rilevazione di un nuovo sistema si stimano due parametri: la frazione di massa contenuta all'interno dell'anello di Einstein costituita da sotto-strutture di DM, denotata con f , e la pendenza della legge di potenza che, in prima approssimazione, descrive il numero di strutture attese per unità di massa, ovvero il parametro α dell'Equazione 1.25.

A seguito della prima rilevazione di una struttura oscura tramite strong gravitational lensing (Simona Vegetti, Czoske e Koopmans 2010), si era ottenuto, per l'anello più interno, $f_{CDM} = 2.15^{+2.05}_{-1.25}\%$ nel range di massa tra $4 \cdot 10^6 M_{\odot}$ e $4 \cdot 10^9 M_{\odot}$, fissando α a 1.9 ± 0.1 , in quanto valore ottenuto nella maggior parte delle simulazioni cosmologiche Λ CDM. Gli autori hanno poi realizzato una seconda stima, in cui hanno permesso ad α di variare in un range più ampio, in particolare tra 1.0 e 3.0. In questo secondo caso, la percentuale è salita a $f_{CDM} = 2.56^{+3.26}_{-1.50}\%$, ma si noti che è salita anche l'incertezza associata. Ciò implica che la stima della frazione di massa corrispondente alle sotto-strutture

dipende in maniera non trascurabile dall'assunzione teorica su α , e non solo dai dati osservati. Le simulazioni Λ CDM prevedono un valore pari a $f_{\text{CDM}} = 0.3\%$, ovvero circa un settimo di quanto stimato dalla rilevazione. Tuttavia, data l'ampiezza delle barre di errore, il valore ottenuto dalle simulazioni ha una *likelihood* pari a circa la metà di quella del best-fit osservato; ciò implica che il best-fit, pur non essendo favorito, è plausibile in un Universo dominato dalla materia oscura fredda.

Quando, due anni dopo, si è scoperto un secondo sistema di massa inferiore (S. Vegetti, Lagattuta et al. 2012), combinando i dati presentati in precedenza con quelli nuovi si è ottenuta una frazione di sotto-strutture media pari a $\langle f \rangle = 3.3^{+3.6}_{-1.8}\%$ e una pendenza di $\alpha = 1.1^{+0.6}_{-0.4}$. Tali valori sembrano indicare due discrepanze distinte. Il fatto che f sia superiore al valore previsto di 0.3% indica che, a distanze cosmologiche, la frazione di massa contenuta in sotto-strutture potrebbe essere maggiore di quanto atteso. Il fatto che il valore di α sia minore di 1.9 , invece, potrebbe indicare che la popolazione è meno dominata dalle masse piccole di quanto preveda lo standard Λ CDM. Ciò potrebbe essere indice di una componente non trascurabile di WDM, che abbia in parte soppresso le strutture più piccole. In ogni caso, i risultati ottenuti sono consistenti al 95% con quanto atteso dalle simulazioni standard, indicando un buon accordo di base e confermando la formazione gerarchica delle strutture.

Come sottolineato da Powell et al. (2025), le osservazioni su scale sub-galattiche non hanno finora fornito una conferma definitiva del modello Λ CDM, principalmente a causa della complessa interazione non lineare tra materia barionica e materia oscura, come descritto in maniera estesa nella Sezione 1.2.3. Le principali discordanze e tensioni tra i modelli, infatti, si hanno per masse al di sotto delle $10^8 M_{\odot}$, ovvero su piccola scala. In questo contesto, se la struttura di $10^6 M_{\odot}$ rilevata fosse realmente un alone di DM (e nell'articolo gli autori spiegano meglio quali sono le alternative plausibili e perché le ritengono meno probabili), essa potrebbe risultare fondamentale nell'indagine sulla materia oscura. La sua presenza, infatti, sarebbe coerente con il numero atteso di aloni rilevabili in una cosmologia Λ CDM: considerando una piccola zona attorno alle immagini lensate, di grandezza paragonabile alla risoluzione strumentale, la probabilità di osservarvi un grumo di materia oscura fredda è infatti pari al 65% . Per la WDM, a seconda della massa della particella prodotta termicamente, la probabilità scende a 36% per le particelle più pesanti (di massa pari a 9.1 keV), che si comportano in modo simile alla CDM, e ancora a 14% per le particelle più leggere (di massa pari a 4.6 keV), coerente con la soppressione degli aloni di piccola massa che ci si aspetta per questa tipologia di materia oscura. Sebbene la rilevazione sia dunque compatibile con entrambi i modelli teorici, la probabilità di osservare un alone tanto piccolo è favorita in uno scenario di CDM prevalente e rappresenta un vincolo indipendente rispetto ai parametri f e α presentati in precedenza.

In conclusione, lo strong gravitational lensing risulta essere uno strumento potente: esso, in linea di principio, permette di inferire e rilevare la presenza di oggetti che,

non emettendo radiazione elettromagnetica, non sarebbero osservabili direttamente attraverso la loro brillantezza superficiale. Tuttavia, come si è cercato di mostrare in questo capitolo, la firma dei sotto-aloni di materia oscura non è sempre netta; poiché entrano in gioco molteplici variabili e interazioni complesse tra di esse, è importante comprendere, attraverso simulazioni di sistemi controllati, come la presenza di un perturbatore modifichi le quantità osservabili. Nel prossimo capitolo, il problema reale di *Bayesian inference* verrà dunque ricondotto a un problema di *forward modelling*, nel quale le proprietà del perturbatore sono fissate a priori e si calcolano le conseguenti modifiche alle osservabili del sistema di lensing, seguendo un filo logico contrario rispetto a quanto si fa normalmente con le osservazioni.

4

Simulazioni di immagini lensate

Nei capitoli precedenti si è cercato di capire come inferire la presenza di una sottostruttura di materia oscura a partire dai dati astronomici, ovvero dalle osservabili legate allo strong gravitational lensing. Tuttavia, data la complessità del problema, è fondamentale comprendere come variazioni della lente, della sorgente e della configurazione geometrica del sistema si manifestino singolarmente nelle immagini osservative.

A questo scopo, nel presente capitolo vengono mostrate simulazioni in cui diversi parametri sono variati in maniera controllata, analizzando dapprima un caso di riferimento privo di perturbazioni. Successivamente, viene introdotto un perturbatore modellato mediante due profili differenti, quello isoterma ellittico e quello di Navarro, Frenk e White (NFW, Eq. 1.26).

In apertura si presenta brevemente il software utilizzato, introducendo la libreria `PyLensLib` e descrivendo sinteticamente l'architettura del codice sviluppato.

4.1 Il software utilizzato

Le simulazioni presentate nel seguito sono state realizzate mediante la libreria `PyLensLib`, sviluppata da Massimo Meneghetti. Essa permette di implementare le principali relazioni teoriche utilizzate nel lensing gravitazionale forte e introdotte nei Capitoli precedenti, secondo il formalismo comunemente adottato in letteratura (Meneghetti et al. 2022). In questa sezione ne vengono richiamate brevemente le funzionalità rilevanti e le relative applicazioni al codice sviluppato per il presente lavoro. Successivamente si riporta schematicamente la struttura del codice e i parametri di base attribuiti alle diverse funzioni presenti. Ove non diversamente specificato, tali parametri sono da intendersi come costanti per tutta la struttura del codice.

4.1.1 Introduzione a PyLensLib

La libreria scientifica PyLensLib, sviluppata in linguaggio di programmazione Python, è un software open-source che nasce per simulare sistemi di lenti gravitazionali dalle scale del microlensing fino agli ammassi di galassie (PyLensLib 2025). In particolare, il pacchetto si concentra su simulazioni astrofisiche nell'ambito di lensing gravitazionale forte ad opera di galassie su galassie ed ammassi.

La classe base utilizzata per simulare una lente è `genlen`, che gestisce la creazione della griglia, la ricerca delle linee critiche ed il calcolo delle corrispondenti caustiche. Vi sono poi otto classi figlie, che ne ereditano le caratteristiche implementando ciascuna un profilo analitico differente; quelle rilevanti ai fini delle successive simulazioni sono `sie` per il profilo SIE, `nfwell` per il profilo di Navarro, Frenk e White e `compositeModel`, usato per combinare più profili analitici fra loro e introdurre eventuali perturbatori.

La classe base per modellare la sorgente, invece, è `gensrc`. Da essa ereditano altre sette classi; l'unica fra queste utilizzata successivamente nel codice è `sersic`, la quale implementa la brillantezza superficiale di una sorgente estesa seguendo il profilo di Sérsic (Eq. 3.2).

La generazione delle immagini viene gestita internamente dalla libreria tramite *ray tracing*. Quando viene definito l'oggetto lente mediante il relativo profilo di densità, è calcolato internamente il campo di deflessione associato $\alpha(\theta)$ su tutta la griglia numerica. Successivamente, durante la costruzione dell'oggetto sorgente, il campo di deflessione della lente passata in input viene utilizzato per applicare puntualmente l'equazione della lente (Eq. 2.13) a ciascun punto θ del piano immagine, ricavando la corrispondente posizione $\beta(\theta)$ sul piano della sorgente. Poiché la distribuzione di brillantezza superficiale della sorgente è nota a priori, ad ogni pixel dell'immagine viene assegnato il valore di brillantezza associato al punto β corrispondente, ottenendo così l'immagine lensata finale.

La libreria include anche strumenti per la simulazione degli effetti osservativi, come ad esempio il rumore strumentale, nonché moduli dedicati alla costruzione di scenari cosmologici più realistici. Tali funzionalità permettono di includere nel modello alcune delle complessità discusse nel Capitolo 3; tuttavia, esse non sono state utilizzate nel presente lavoro, in quanto l'obiettivo è limitato all'analisi delle deformazioni indotte dal lensing in condizioni ideali e controllate.

4.1.2 Architettura del codice

Il codice utilizzato per sviluppare le simulazioni e le relative immagini è stato scritto in linguaggio Python, con l'ausilio della libreria appena introdotta, ovvero PyLensLib, ma anche di `numpy`, libreria specifica per la programmazione numerica, e `astropy`, un insieme di pacchetti pensati appositamente per l'utilizzo in contesti astronomici. Come ausilio per la visualizzazione grafica si è utilizzata la libreria `matplotlib`; tramite

Parametro	Simbolo	Valore
Dispersione di velocità	σ_0	260.0 km s ⁻¹
Ellitticità	q	0.75
Posizione angolare dell'asse maggiore	p_a	35°
Raggio di core	θ_c	10 ⁻⁴ arcsec
Posizione della lente sul piano immagine	(θ_1, θ_2)	(0, 0) arcsec

Tabella 4.1: Parametri della lente base usata nelle simulazioni; tali valori sono da considerarsi costanti per tutto il codice ove non diversamente specificato.

pathlib, invece, si è creata una cartella specifica per raccogliere gli output del codice, chiamata outputs.

La cosmologia di riferimento è stata definita tramite il metodo FlatLambdaCDM() di astropy, che accetta come parametri la costante di Hubble al tempo presente, posta a $H_0 = 70.0$, e la densità di materia al tempo presente, posta a $\Omega_m = 0.3$, coerentemente con quanto era stato riportato in Tabella 1.1.

La griglia delle immagini è stata definita una volta sola all'inizio per coerenza delle rappresentazioni e delle simulazioni, scegliendo un campo visivo di 6.0". Nel seguito, esso è visualizzato tramite pannelli quadrati di lato pari a 220 pixel; l'angolo θ sul piano dell'immagine è stato definito dividendo il campo visivo per il numero di pixel e centrandolo rispetto all'origine. In questo frangente si sono definiti anche il redshift della lente, pari a $z_l = 0.5$, e quello della sorgente, pari a $z_s = 2.0$, mantenuti costanti nel resto del codice. Tali valori sono stati scelti sulla base dei picchi delle distribuzioni riportate nel secondo pannello della Figura 2.6.

Per simulare il sistema privo di perturbazioni, si è inizialmente creata la lente tramite il metodo sie. I parametri geometrici caratteristici della lente base sono riassunti in Tabella 4.1. Il raggio di core è un parametro impostato piccolo ma non nullo per eliminare la singolarità del profilo, mentre la dispersione di velocità è stata scelta sempre facendo riferimento ai grafici della Figura 2.6. Poiché non conta la posizione della lente singolarmente, bensì la posizione relativa tra essa e la sorgente, si è scelto di porre la galassia lente al centro del pannello, per una migliore visualizzazione delle immagini.

Successivamente si sono calcolate le linee critiche tramite i metodi getCritPoints() e tancl() dell'oggetto lens e il raggio di Einstein tramite il metodo bsie(). Ove necessario, si sono calcolate le caustiche chiamando il metodo getCaustics() sulla lente e passando come argomento lens.tancl().

Per creare l'oggetto source, ovvero la sorgente, si è utilizzata invece la funzione sersic, a cui si è passata come parametro la lente lens creata in precedenza. I parametri geometrici caratteristici della sorgente base sono riassunti in Tabella 4.2. L'indice di Sérsic pari a uno denota un profilo di densità esponenziale, tipico delle galassie a spirale, il quale ignora la loro struttura fine. Come disposizione di partenza si è scelto di lasciare

Parametro	Simbolo	Valore
Indice di Sérsic	n	1.0
Raggio efficace	r_e	0.15
Ellitticità	q	0.7
Posizione angolare dell'asse maggiore	p_a	20°
Flusso luminoso totale	F	10^4
Posizione della sorgente	(β_1, β_2)	(0.06, 0.03) arsec

Tabella 4.2: Parametri della sorgente base usata nelle simulazioni; tali valori sono da considerarsi costanti per tutto il codice ove non diversamente specificato.

Parametro	Simbolo	Valore
Indice di Sérsic	n	4.0
Raggio efficace	r_e	0.55
Ellitticità	q	0.75
Posizione angolare dell'asse maggiore	p_a	35°
Flusso luminoso totale	F	$3 \cdot 10^4$
Posizione del centro di luce	(θ_1, θ_2)	(0, 0) arcsec

Tabella 4.3: Parametri relativi alla luce della lente, usati come base nelle simulazioni; tali valori sono da considerarsi costanti per tutto il codice ove non diversamente specificato.

la sorgente e la lente quasi allineate, in modo da poter visualizzare l'anello di Einstein.

È stato utilizzato poi un secondo profilo di Sérsic per generare la luce prodotta dalla galassia lente, ed è stato attribuito all'oggetto `lens_light`. I relativi parametri geometrici adottati sono riportati in Tabella 4.3. In questo caso, l'indice di Sérsic è stato posto pari a quattro, perché tipico delle galassie ellittiche, in cui le stelle centrali contribuiscono maggiormente rispetto alle spirali. Per la lente si è anche scelto un flusso luminoso maggiore rispetto alla sorgente, in quanto essa è più vicina all'osservatore.

Per memorizzare le immagini della sorgente lensata a cui è sovrapposta la luce della lente si è creato l'oggetto `total_image`, definito come

```
total_image = source.image + lens_light.image
```

Per ogni figura generata è stata definita la quantità `vmax` come

```
vmax = max(
    np.percentile(img[np.isfinite(img)], 99.5)
    for img in images_array
)
```

dove `images_array` è stato sostituito di volta in volta con la lista in cui erano state precedentemente salvate tutte le immagini di una stessa tipologia (ad esempio, tutte le

Parametro	Simbolo	Valore
Dispersione di velocità	σ_{pert}	90.0 km s^{-1}
Ellitticità	q	0.9
Posizione angolare dell'asse maggiore	p_a	-20°
Raggio di core	θ_c	$1 \cdot 10^{-4} \text{ arcsec}$
Posizione del satellite SIE	$(\theta_{SIE,1}, \theta_{SIE,2})$	$(1, -1.05) \text{ arcsec}$

Tabella 4.4: Parametri relativi al perturbatore SIE, usati come base nelle simulazioni; tali valori sono da considerarsi costanti per tutto il codice ove non diversamente specificato.

Parametro	Simbolo	Valore
Massa del satellite	M_{pert}	$5 \cdot 10^{11} M_\odot$
Concentrazione	c	11.0
Ellitticità	q	0.95
Posizione angolare dell'asse maggiore	p_a	-20°
Posizione del satellite NFW	$(\theta_{NFW,1}, \theta_{NFW,2})$	$(1, -1.05) \text{ arcsec}$

Tabella 4.5: Parametri relativi al perturbatore NFW, usati come base nelle simulazioni; tali valori sono da considerarsi costanti per tutto il codice ove non diversamente specificato.

immagini lensate al variare della dispersione di velocità della galassia lente). Ciò permette di poter confrontare direttamente fra loro tutti i pannelli di una stessa riga, in quanto sono riferiti alla stessa scala. A tale scopo, ove utile alla lettura è stata riportata nelle immagini una *colorbar* come riferimento. Quando si sono riportate informazioni diverse riferite alla stessa configurazione geometrica del sistema di lensing, i pannelli sono stati allineati in verticale.

Vi sono immagini in cui, oltre alla lente principale, è presente un perturbatore, che può assumere sia un profilo SIE che un profilo NFW. Per parametrizzare questa duplice possibilità, la funzione per creare la lente composita, ovvero `make_composite_lens`, accetta come parametri sia il tipo di lente (una stringa SIE o NFW) sia i relativi parametri base di costruzione, riportati nelle Tabelle 4.4 e 4.5, e costruisce il perturbatore con `sie` o `nfwell` a seconda del tipo passato.

Entrambi sono stati posti nella stessa posizione per facilitare un confronto fra i due casi; inoltre, di base sono stati scelti molto massicci, per accentuare gli effetti di deflessione e perturbazione al sistema.

Una volta definite singolarmente lente e satellite, sempre all'interno della medesima funzione il metodo `compositeModel` li combina per ottenere la lente finale. A questo punto vengono ricalcolate le linee critiche e, ove necessario, le caustiche; inoltre, per il profilo SIE viene calcolato il raggio di Einstein del satellite, mentre per il profilo NFW viene calcolato il raggio di scala r_s tramite il metodo `rs_as` del perturbatore. Il ray tracing

è svolto in maniera analoga al caso imperturbato, ma in input, quando si inizializzano i profili di Sérsic, viene passata la lente composita. A titolo esemplificativo, in Appendice A è riportato il codice utilizzato per simulare e rappresentare i sistemi in Figura 4.3.

4.2 Sistema privo di perturbazioni

Per iniziare, si è studiato un sistema senza sotto-strutture, così da avere un riferimento chiaro da confrontare con i casi più complessi. Ciò è importante per poter comprendere meglio come i parametri della lente e la configurazione geometrica del sistema influenzino le immagini, al fine di riconoscere e distinguere poi la firma e le distorsioni dovute a piccole perturbazioni locali del potenziale di lensing.

In particolare, nei paragrafi successivi si indaga come la dispersione di velocità (e dunque, per quanto visto nella Sezione 2.3, la massa della galassia lente) ed il disallineamento tra sorgente e lente lungo la linea di vista si rifletta sulle immagini osservate.

4.2.1 Effetto della variazione della dispersione di velocità

Nella prima parte del codice, in fase di creazione della galassia lente, è stata variata la dispersione di velocità σ_0 in maniera controllata. Utilizzando come riferimento la distribuzione mostrata nel terzo pannello della Figura 2.6, si è creata la lista

```
sigma0_values = [180, 250, 290]
```

in cui sono contenuti i valori studiati della dispersione di velocità in km s^{-1} ; essi corrispondono nell'ordine, basandosi sul riferimento in Figura 2.8, a circa $4 \cdot 10^{10} M_\odot$, $2 \cdot 10^{11} M_\odot$ e $4 \cdot 10^{11} M_\odot$. In particolare, si è scelto un valore inferiore al picco più probabile, uno di poco superiore e uno nella coda superiore della distribuzione, per indagare casi limitrofi alla fenomenologia più probabile osservativamente. In Figura 4.1 sono sintetizzati visivamente i risultati ottenuti. Nei tre pannelli superiori si è riportata l'immagine composita della sorgente lensata e della luce della lente, a cui è stata sovrapposta la linea critica (in bianco). Si può notare che, a parità degli altri parametri, un aumento della dispersione di velocità ha come effetto l'aumento del raggio di Einstein, dato che aumentare σ_0 equivale ad aumentare la massa della lente. Ciò risulta coerente con quanto si era trovato nella formula 2.29: infatti, calcolando i rapporti tra le dispersioni di velocità massima e minima al quadrato si ha

$$\left(\frac{\sigma_{max}}{\sigma_{min}} \right)^2 \simeq 2.60 \quad (4.1)$$

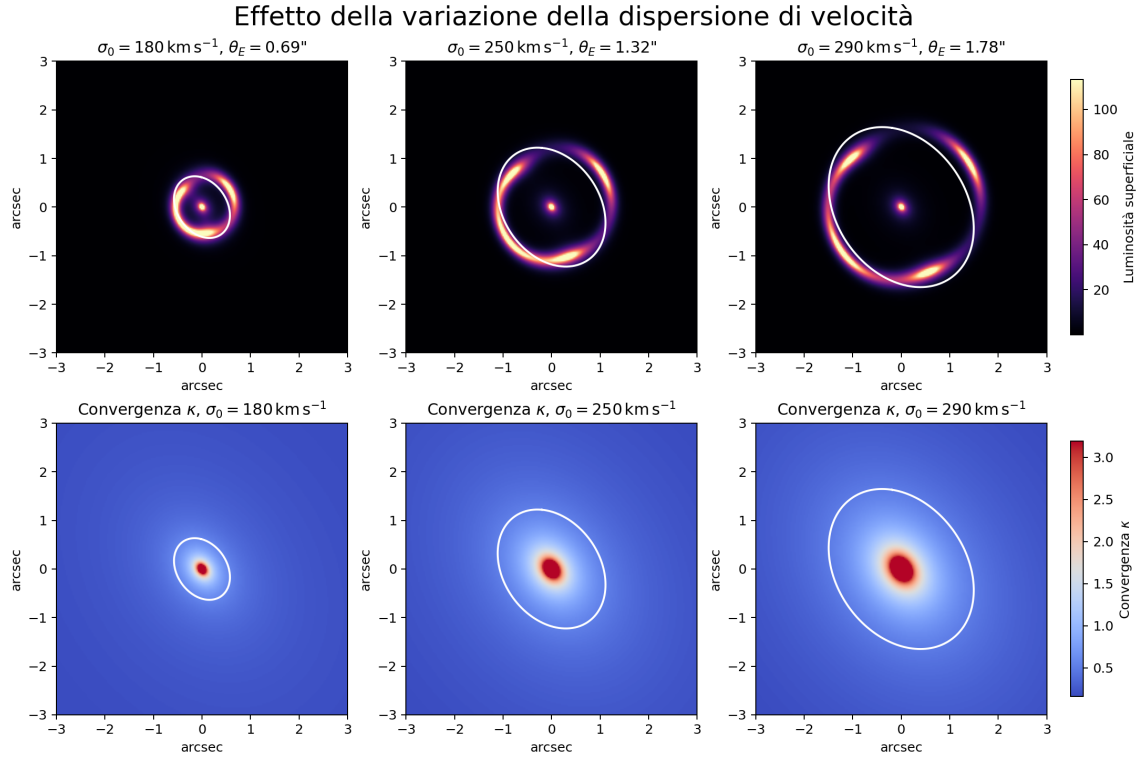


Figura 4.1: Effetto dell'aumento della dispersione di velocità della galassia lente in un sistema di galaxy-galaxy lensing. Nei pannelli superiori sono riportate le immagini della sorgente lensata, a cui è stata sovrapposta la luce della lente, con relative dispersioni di velocità e raggi di Einstein. Nei pannelli inferiori, invece, sono riportate le relative mappe di convergenza. Su tutti i pannelli sono state disegnate le linee critiche (in bianco). Le immagini di una stessa riga sono riferite alla stessa scala, indicata dalla colorbar a destra, e sono dunque confrontabili fra loro.

mentre calcolando il rapporto tra i relativi raggi di Einstein si trova

$$\frac{\theta_{E,max}}{\theta_{E,min}} \simeq 2.58 \quad (4.2)$$

da cui

$$\left(\frac{\sigma_{max}}{\sigma_{min}} \right)^2 \simeq \frac{\theta_{E,max}}{\theta_{E,min}} \quad (4.3)$$

coerentemente con quanto atteso. Tale aumento è chiaramente visibile anche nelle immagini, in quanto il raggio dell'anello di Einstein cresce guardando i pannelli da sinistra verso destra. Un altro dettaglio da cogliere è che galassie più massicce permettono una separazione angolare maggiore fra le immagini, rendendole distinguibili. Nel primo pannello in alto a sinistra, infatti, tre delle quattro immagini previste teoricamente sono fuse

in unico arco. Nel pannello centrale si iniziano a distinguere singolarmente e si può notare che due sono interne alla linea critica, mentre le altre due si trovano all'esterno. Nell'ultimo caso a destra le quattro immagini sono infine perfettamente distinte.

Nei tre pannelli inferiori sono riportate le mappe di convergenza relative alle immagini superiori, a cui sono state nuovamente sovrapposte le linee critiche. Considerando la formula 2.28, la teoria prevede che, a parità di posizione angolare θ sul piano immagine, κ aumenti linearmente con il raggio di Einstein; qualitativamente si osserva, infatti, che la regione a convergenza più alta si espande gradualmente al crescere di σ_0 (zona rossa). La formula per le linee critiche tangenziali, ovvero quelle rappresentate in Figura 4.1, per una lente generica, è

$$1 - \kappa - \gamma = 0 \quad (4.4)$$

dove si è omessa la dipendenza dei due parametri da θ . Puntualmente, lo shear rimane costante nei tre casi, mentre κ aumenta; per questo motivo, il luogo di punti descritto da 4.4 si allontana progressivamente dal centro della galassia lente, ovvero si sposta a valori di θ maggiori, mantenendo però la stessa forma. Ciò è chiaramente visibile nelle ellissi di dimensioni crescenti sia nei pannelli superiori che in quelli inferiori. Si noti che l'ellitticità della linea critica è strettamente legata a quella della lente, dunque rimane invariata, così come la direzione dell'asse maggiore; ciò che cambia è unicamente la scala.

4.2.2 Effetto del disallineamento rispetto alla linea di vista

Come visto nella Sezione 2.2.2, a seconda della geometria del sistema cambiano sia la quantità di immagini prodotte che le loro proprietà. Per indagare questa fenomenologia, si è scelto di variare la posizione della sorgente mantenendo la lente fissa nell'origine. Si è dunque definita la lista

```
positions = [(0.01, 0.03), (0.15, 0.1), (-0.15, 0.05), (0.3, 0.3)]
```

in cui sono contenuti i valori dati in arcsec. Essi sono stati scelti in modo che la sorgente si trovasse nel primo caso quasi allineata alla lente, nel secondo vicino ad una cuspidale della caustica, nel terzo vicino ad una *fold* della caustica e nel quarto disallineata ed esterna alla caustica. In Figura 4.2 sono sintetizzati visivamente i risultati ottenuti. Nei quattro pannelli superiori si è riportata l'immagine della sola sorgente lensata sul piano della lente, a cui è stata sovrapposta la linea critica (in bianco puntinato). Per etichettare le diverse configurazioni, è stata definita la quantità $d_{\perp}$, ovvero la distanza tra la sorgente e la caustica più vicina, proiettata sulla direzione normale alla curva in quel punto. Il segno indica da che lato della caustica si trova la sorgente: positivo all'interno, negativo all'esterno. Nei quattro pannelli inferiori, invece, sono state riportate le immagini della sorgente originaria, su un campo visivo ridotto di 2.0", ovvero un terzo di quello totale.

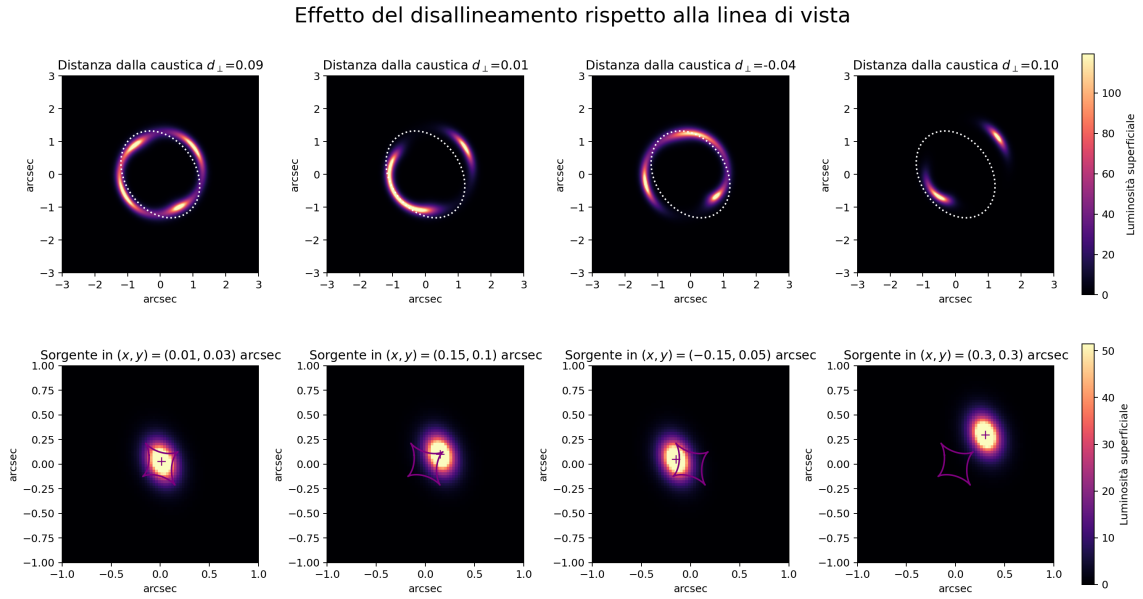


Figura 4.2: Effetto del disallineamento rispetto alla linea di vista in un sistema di galaxy-galaxy lensing. Nei pannelli superiori sono riportate le immagini della sorgente lensata, con relativa distanza perpendicolare della sorgente dalla caustica. Ad esse sono state sovrapposte le linee critiche (in bianco, puntinate). Nei pannelli inferiori, invece, sono riportate le immagini della sorgente originaria, ingrandite su un campo visivo di $2.0''$ e con relativa posizione della sorgente. Ad esse sono state sovrapposte le caustiche (linee viola continue) e un marker indicante il centro della sorgente. Le immagini di una stessa riga sono riferite alla stessa scala, indicata dalla colorbar a destra, e sono dunque confrontabili fra loro. Le immagini di una stessa colonna, invece, essendo riferite a scale diverse, non lo sono.

Ad esse sono state sovrapposte le caustiche e un marker per indicare la posizione del centro della sorgente (in viola). Nei titoli sono state riportate le coordinate della sorgente.

Nella prima colonna, la sorgente è posta all'interno della caustica e vicina al suo centro, dove si trova la lente. Questo implica che sorgente e lente sono pressoché allineate rispetto alla linea di vista; la loro distanza euclidea è infatti pari a

$$d = \sqrt{0.01^2 + 0.03^2} \simeq 0.032 \text{ arcsec} \quad (4.5)$$

In questo caso, analogamente a quanto visto al variare di σ_0 , si formano quattro immagini molto magnificate lungo l'anello di Einstein: due sono interne alla linea critica e sono di tipo II, mentre l'altra coppia è esterna ed è di tipo I. Sarebbe prevista anche un'immagine di tipo III centrale, ma essa risulta troppo debole per essere osservata.

Nella seconda colonna, la sorgente è posta vicino ad una cuspidale della caustica. La

distanza euclidea tra la sorgente e la lente è pari a

$$d = \sqrt{0.15^2 + 0.1^2} \simeq 0.180 \text{ arcsec} \quad (4.6)$$

dunque esse risultano più lontane rispetto al caso precedente. La teoria, in questo caso, prevederebbe la formazione del cusp triplet, in cui sono presenti due immagini di tipo II ed una di tipo I; tuttavia, in questo caso le tre immagini non risultano angolarmente distinguibili, in quanto fuse in un unico arco gravitazionale molto brillante, interno alla linea critica. La quarta immagine, invece, si trova all'esterno e risulta molto meno magnificata; il flusso è dominato dal tripletto.

Nella terza colonna, la sorgente è posta vicino ad una *fold* della caustica. La distanza euclidea tra sorgente e lente è pari a

$$d = \sqrt{0.15^2 + 0.05^2} \simeq 0.158 \text{ arcsec} \quad (4.7)$$

L'attraversamento di una *fold* di una caustica prevede la nascita o la scomparsa di una coppia di immagini, una di tipo I e una di tipo II, a seconda del verso di attraversamento. Tale fenomeno è osservabile nel pannello superiore: si distingue una prima coppia di immagini, di cui una esterna e una interna alla linea critica, mentre la seconda, sovrapposta alla linea critica, è quella che sta scomparendo.

Infine, nell'ultima colonna si è studiato un caso in cui la sorgente risulta esterna alla caustica e più distante rispetto alla linea di vista

$$d = \sqrt{0.3^2 + 0.3^2} \simeq 0.424 \text{ arcsec} \quad (4.8)$$

In questo caso, si formano solo due immagini più compatte e meno magnificate, una interna alla linea critica (di tipo II) ed una esterna (di tipo I), coerentemente con quanto appena esposto.

Da questa trattazione si osserva esattamente quanto discusso discorsivamente nel Capitolo 2: all'aumentare del disallineamento del sistema, l'anello di Einstein si frantuma, dando luogo ad immagini multiple. L'attraversamento della caustica comporta un calo nel numero di immagini osservabili; delle quattro della prima colonna, infatti, nell'ultima ne sono rimaste solo due. È inoltre interessante notare che, anche quando i moduli delle distanze dalla caustica o dalla linea di vista sono simili fra loro, la fenomenologia delle immagini può variare significativamente; questo è indice dell'importanza della topologia dello spazio e della curva, che non può essere riassunta in un unico valore. Tuttavia, si può notare che più basso è il valore di $d_{\perp}$, maggiore è la magnificazione delle immagini; la distanza dalla caustica incide dunque sulla brillantezza della configurazione.

4.3 Introduzione di un perturbatore

Finora si è analizzato come la morfologia delle immagini è influenzata da variazioni della configurazione geometrica del sistema e delle proprietà fisiche degli oggetti coinvolti. In questo paragrafo si introduce una sotto-struttura aggiuntiva, che produce perturbazioni locali al potenziale sulla base del proprio profilo di densità; in particolare vengono analizzati e confrontati il caso SIE ed il caso NFW.

4.3.1 Perturbatore modellato tramite profilo SIE

Il primo modelling della struttura perturbatrice è avvenuto tramite un profilo analogo a quello della lente principale, ovvero il SIE (Eq. 2.26 con cambio di variabile 2.34). Analogamente a quanto fatto per il caso imperturbato, si sono studiati gli effetti di diversi valori della dispersione di velocità, o equivalentemente della massa dell'alone; in particolare si sono scelti i valori, espressi in km s^{-1}

```
sigma0_values_pert = [50.0, 70.0, 90.0]
```

che corrispondono approssimativamente a masse di, rispettivamente, $2 \cdot 10^8 M_\odot$, $8 \cdot 10^8 M_\odot$ e $2 \cdot 10^9 M_\odot$. In Figura 4.3 sono sintetizzati visivamente i risultati ottenuti; come riferimento, nella prima colonna è stato riportato il caso senza perturbatore. Nei quattro pannelli superiori sono rappresentate le immagini composite della sorgente lensata e della luce della lente, a cui sono state sovrapposte le relative linee critiche (in bianco, puntinate). Analogamente a quanto accade per la lente principale, un aumento della dispersione di velocità ha come effetto l'aumento del raggio di Einstein del perturbatore, coerentemente con la relazione precedente. Calcolando il rapporto delle dispersioni massima e minima al quadrato si ha

$$\left(\frac{\sigma_{max, pert}}{\sigma_{min, pert}} \right)^2 = 3.24 \quad (4.9)$$

mentre calcolando il rapporto dei raggi di Einstein si trova

$$\frac{\theta_{E, max}}{\theta_{E, min}} = 3.20 \quad (4.10)$$

da cui nuovamente

$$\left(\frac{\sigma_{max, pert}}{\sigma_{min, pert}} \right)^2 \simeq \frac{\theta_{E, max}}{\theta_{E, min}} \quad (4.11)$$

Inoltre, con l'intensificarsi della perturbazione, l'immagine della sorgente in basso a destra diventa progressivamente meno estesa ed intensa, e aumenta la sua separazione

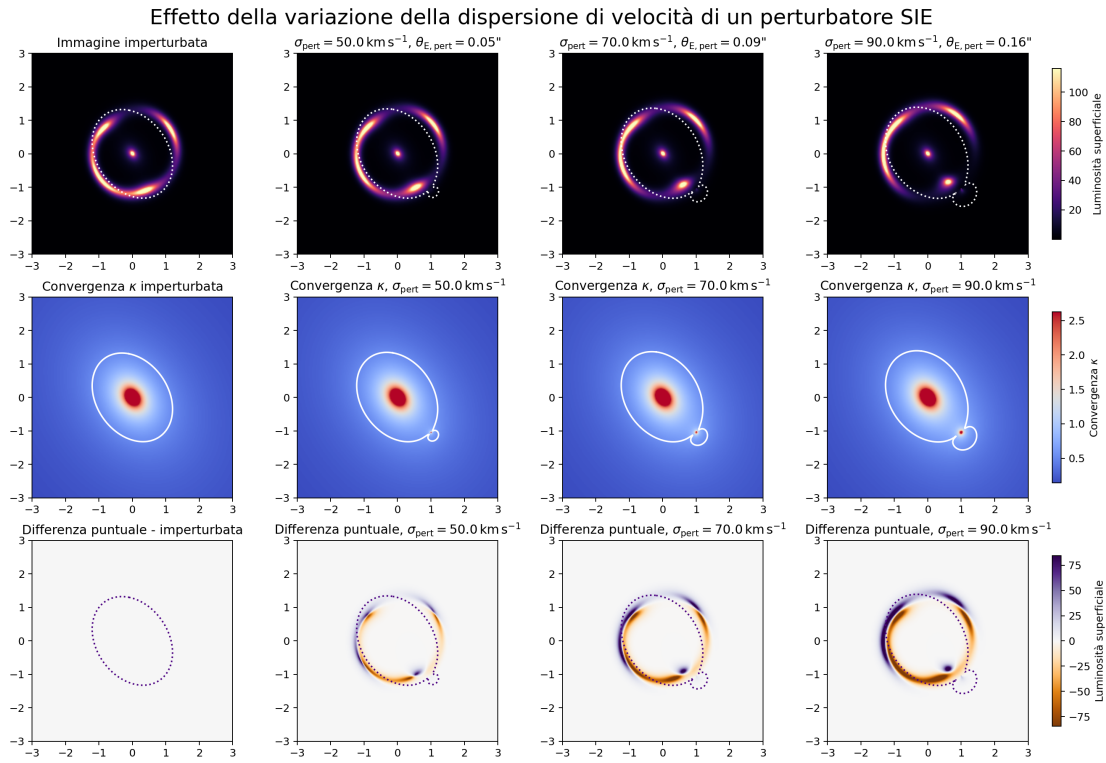


Figura 4.3: Effetto dell'aggiunta di un perturbatore con profilo SIE di massa crescente in un sistema di galaxy-galaxy lensing. Nei pannelli superiori sono riportate le immagini della sorgente lensata, a cui è stata sovrapposta la luce della lente, con relative dispersioni di velocità e raggi di Einstein del perturbatore. Nei pannelli intermedi sono riportate le relative mappe di convergenza. Infine, nei pannelli inferiori sono riportate le differenze tra l'immagine perturbata e quella imperturbata. Nella prima colonna sono riportati in tutti i casi i riferimenti imperturbati. Su tutti i pannelli sono state disegnate le linee critiche (punteggiate sopra, linee continue nella riga intermedia, in viola sotto). Le immagini di una stessa riga sono riferite alla stessa scala, indicata dalla colorbar a destra, e sono dunque confrontabili fra loro.

angolare rispetto all'arco adiacente. Nell'ultimo pannello, si può anche notare la formazione di una nuova immagine poco brillante in prossimità della sotto-struttura. Tali effetti sono coerenti con le perturbazioni alla brillantezza superficiale discusse nella Sezione 3.1.2.

Nei quattro pannelli intermedi, invece, sono riportate le mappe di convergenza relative alle immagini superiori, a cui sono state nuovamente sovrapposte le linee critiche. In analogia con quanto già visto, la regione a convergenza più alta in corrispondenza del perturbatore (puntino rosso in basso a destra) si espande gradualmente al crescere di σ_{pert} . Con essa si estende anche la linea critica del perturbatore, di forma ellittica; di conseguenza, la linea critica complessiva viene deformata localmente, fondendo fra loro due ellissi di ellitticità differenti e disposte in maniera diversa nello spazio.

Infine, nella riga inferiore sono riportate le differenze puntuali tra l'immagine in cui è presente il perturbatore e il caso imperturbato. Nel primo pannello si osserva uno sfondo uniformemente bianco, in quanto l'immagine imperturbata è stata sottratta a se stessa. Nei pannelli successivi si vedono gradualmente comparire i residui, che si intensificano con l'aumento di σ_{pert} ; le tracce in arancione identificano un calo nella brillantezza superficiale, e indicano dunque la posizione delle immagini in assenza del sotto-alone. Le tracce in viola, invece, mostrano un aumento della brillantezza superficiale a seguito della perturbazione. Cali e aumenti risultano essere sempre adiacenti tra loro e situati in prossimità dell'anello; ciò indica che l'aggiunta della sotto-struttura causa una traslazione e un rimodellamento delle immagini, dovuti ad un cambiamento nel campo gravitazionale, e di conseguenza nell'angolo di deflessione.

Per quantificare la firma gravitazionale lasciata dal perturbatore nel modello, visualizzata finora solo in maniera puntuale, si è definita la grandezza

```
flux_ratio = (
    source_with_second.image.sum()
    - source.image.sum()
) / source.image.sum()
```

ovvero la differenza fra il flusso totale dell'immagine con perturbatore e quella imperturbata, normalizzata rispetto al flusso totale imperturbato. In Figura 4.4 è riportato un grafico che mostra la `flux_ratio` al variare della dispersione di velocità, per σ_{pert} che passa da 0 a 90 km s⁻¹ ad intervalli di 10. Da esso può essere confermato quantitativamente quanto era già stato intuito qualitativamente: nel complesso, si ha una progressiva diminuzione di flusso all'aumentare della dispersione di velocità del satellite. In particolare, per $\sigma_{pert} = 50.0$ km s⁻¹ si ha $\frac{\Delta F}{F} = -1.7\%$, per $\sigma_{pert} = 70.0$ km s⁻¹ si ha $\frac{\Delta F}{F} = -5.1\%$ e infine per $\sigma_{pert} = 90.0$ km s⁻¹ si ha $\frac{\Delta F}{F} = -8.9\%$. Poiché il profilo SIE ha un andamento $1/r^2$ per $r \rightarrow 0$, le sotto-strutture modellate risultano molto compatte, e sono lenti molto efficienti; infatti, anche per dispersioni di velocità relativamente basse (ad esempio 40 km s⁻¹) si ottengono già anomalie di flusso dell'ordine del percento. Ciò rende gli effetti

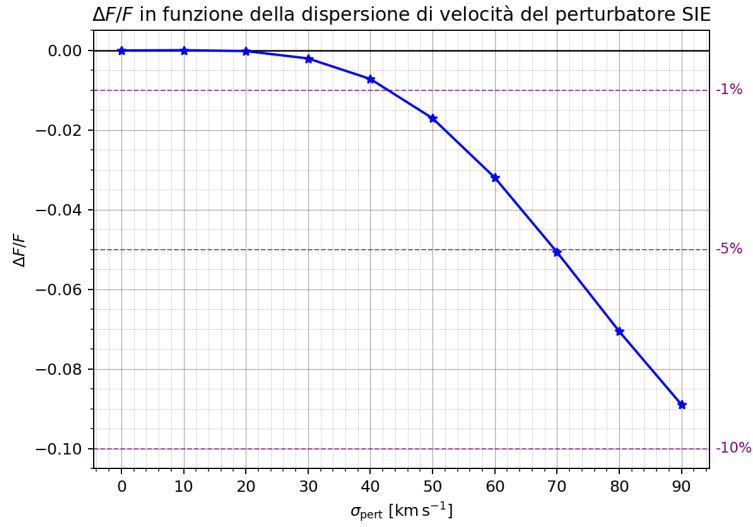


Figura 4.4: Differenza fra il flusso totale dell'immagine con perturbatore e quella imperturbata, normalizzata rispetto al flusso totale imperturbato, al variare della dispersione di velocità del perturbatore SIE. In blu sono rappresentati i valori simulati, connessi da una linea per mostrarne l'andamento. In viola invece, sono rappresentate le soglie per una diminuzione, dall'alto verso il basso, dell'1%, del 5% e del 10%.

degli aloni più semplici da rilevare rispetto a profili che, a parità di massa, risultano più diffusi, come emergerà chiaramente nella trattazione del perturbatore NFW.

4.3.2 Perturbatore modellato tramite profilo NFW

Come visto nel Capitolo 1, un profilo di densità migliore per descrivere nello specifico le sotto-strutture di materia oscura è il profilo NFW (Eq. 1.26). Se per il profilo SIE il parametro caratteristico è la dispersione di velocità, per il profilo NFW le due grandezze che determinano la forma della curva sono la massa M_{pert} e la concentrazione c . Nell'analisi di questa tesi, la concentrazione viene mantenuta costante, mentre viene variata la massa dell'alone; in particolare, sulla base degli articoli presentati e citati nelle rilevazioni individuali del Capitolo 3, si sono scelti

```
mass_values = [5.0e8, 7.0e9, 1.0e11]
```

espressi in unità di masse solari $M_{\odot}$. In Figura 4.5 sono sintetizzati visivamente i risultati ottenuti; anche in questo caso, nella prima colonna è stato riportato il caso senza perturbatore come riferimento.

Nei quattro pannelli superiori sono rappresentate le immagini composite della sorgente lensata e della luce della lente, a cui sono state sovrapposte le relative linee critiche

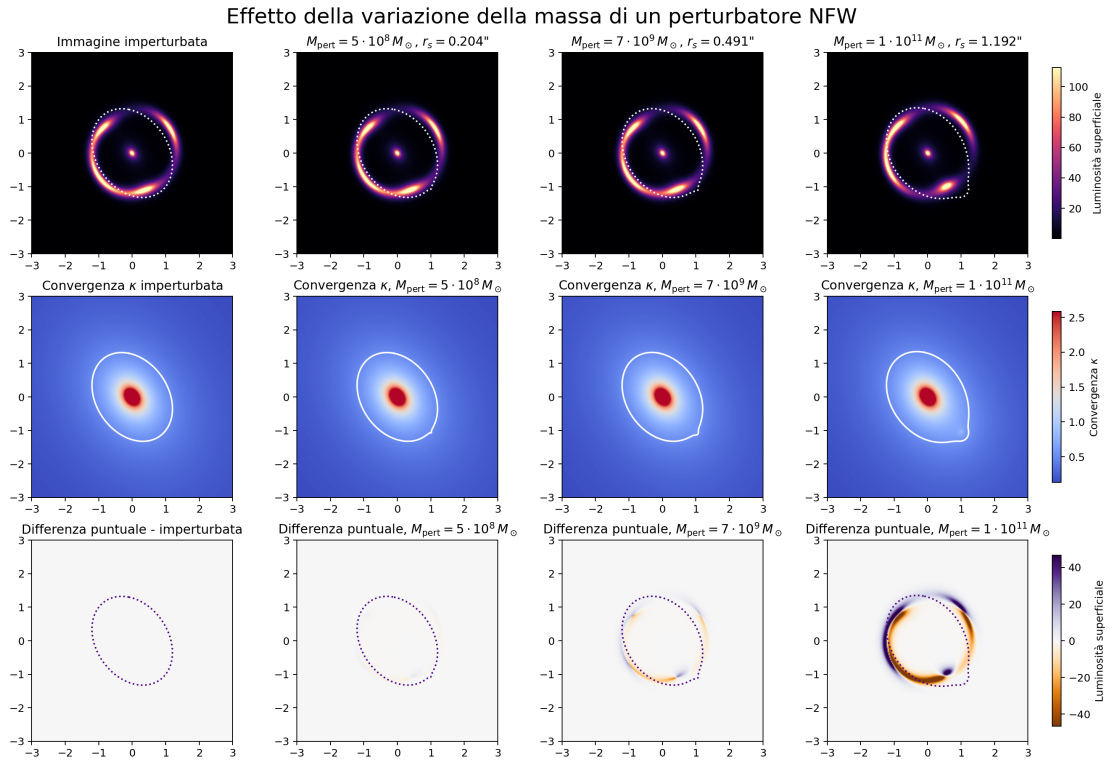


Figura 4.5: Effetto dell'aggiunta di un perturbatore con profilo NFW di massa crescente in un sistema di galaxy-galaxy lensing. Nei pannelli superiori sono riportate le immagini della sorgente lensata, a cui è stata sovrapposta la luce della lente, con relative masse e raggi di scala del perturbatore. Nei pannelli intermedi sono riportate le relative mappe di convergenza. Infine, nei pannelli inferiori sono riportate le differenze tra l'immagine perturbata e quella imperturbata. Nella prima colonna sono riportati in tutti i casi i riferimenti imperturbati. Su tutti i pannelli sono state disegnate le linee critiche (punteggiate sopra, linee continue nella riga intermedia, in viola sotto). Le immagini di una stessa riga sono riferite alla stessa scala, indicata dalla colorbar a destra, e sono dunque confrontabili fra loro.

(in bianco, puntinate). Nel caso del profilo NFW è importante ricordare che esso decade a grandi r come $1/r^3$. Di conseguenza, le masse nominali riportate sopra corrispondono all'integrazione della densità di massa da zero all'infinito, e possono essere sensibilmente maggiori rispetto alla massa proiettata entro l'area effettivamente rilevante per il lensing. Inoltre, per $r \rightarrow 0$ il profilo NFW ha un andamento più dolce del SIE, in quanto cresce come $1/r$. Di conseguenza, anche a parità di massa proiettata, un alone NFW è meno concentrato rispetto ad un SIE: la lente gravitazionale che ne risulta è meno efficace, e gli effetti osservabili sono meno evidenti.

Ciò si manifesta anche a livello simulativo. Infatti, osservando i pannelli superiori, la presenza di un perturbatore di massa dell'ordine di 10^8 o 10^9 masse solari non presenta perturbazioni di brillantezza superficiali evidenti, come invece accadeva nel caso SIE. Solo nell'ultimo caso, per $M_{pert} = 1 \cdot 10^{11} M_\odot$, dove l'alone sarebbe abbastanza massiccio da presentare materia luminosa al proprio interno, si nota una deformazione delle immagini. In particolare, quella in basso a destra diminuisce la propria estensione ed aumenta la propria separazione angolare rispetto alle altre, che invece si avvicinano fra loro e tendono a fondersi in un unico arco gravitazionale. Un'altra differenza rispetto al profilo SIE è proprio questa: esso risulta molto concentrato, quindi le anomalie più evidenti si riscontrano solo nell'immagine in prossimità del perturbatore. Il profilo NFW, invece, sebbene causi localmente deformazioni meno evidenti, mostra anomalie alla brillantezza superficiale diffuse tra tutte le immagini. Ciò lo rende nettamente più difficile da distinguere dagli effetti geometrici e fisici del sistema.

La minor concentrazione degli aloni si riflette anche nelle mappe di convergenza riportate nei pannelli intermedi. Infatti, la deformazione delle linee critiche nei primi due casi perturbati è appena percettibile, e non si osservano i picchi di convergenza evidenti del caso ellittico; solo nell'ultimo pannello si manifestano fenomenologie simili al caso precedente, e si può notare che la curva critica si deforma in maniera simile a quanto accadeva nel SIE.

Una particolarità del profilo NFW rispetto al SIE è che, anche se la firma di una sotto-struttura non è evidente dalle immagini spettrometriche, essa può essere rilevata dai residui. Ciò è chiaro anche osservando anche la riga inferiore della Figura 4.5: confrontando i vari casi con quello imperturbato a sinistra, per il secondo pannello la differenza è appena percepibile, ma già ad una massa di $M_{pert} = 7 \cdot 10^9 M_\odot$ la firma del sotto-alone è chiaramente visibile; nell'ultimo caso si hanno poi effetti macroscopici evidenti. È dunque chiaro che l'entità della perturbazione cresce all'aumentare della massa della sotto-struttura. Anche in questo caso, inoltre, le zone arancioni corrispondenti ai cali e quelle viola corrispondenti agli aumenti della luminosità superficiale risultano sempre accoppiate fra loro e poste in prossimità degli archi, indicando una traslazione e un rimodellamento delle immagini causati dal cambiamento nel potenziale gravitazionale del sistema.

Successivamente, si è adottata la `flux_ratio` per quantificare la firma gravitazionale

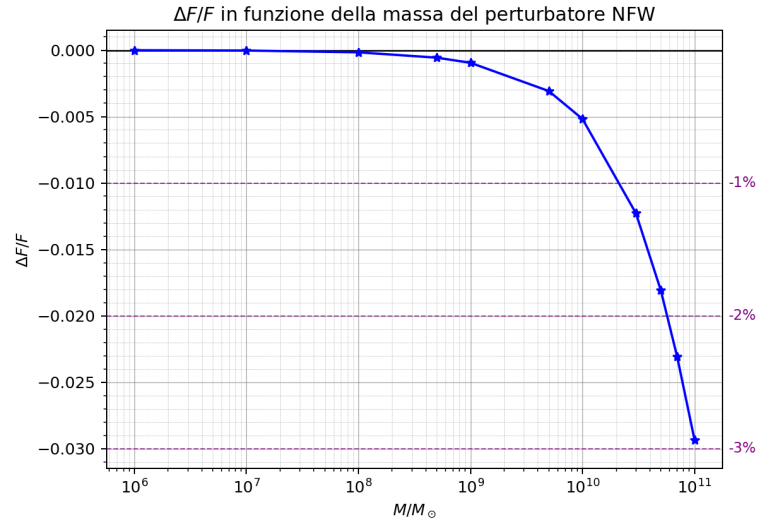


Figura 4.6: Differenza fra il flusso totale dell'immagine con perturbatore e quella imperturbata, normalizzata rispetto al flusso totale imperturbato, al variare della massa del perturbatore NFW. In blu sono rappresentati i valori simulati, connessi da una linea per mostrarne l'andamento. In viola invece, sono rappresentate le soglie per una diminuzione, dall'alto verso il basso, dell'1%, del 2% e del 3%. L'asse delle masse è stato visualizzato in scala logaritmica.

lasciata dal perturbatore nel modello; in Figura 4.6 è riportato il suo andamento al variare della massa dell'alone.

Si nota nuovamente una progressiva diminuzione di flusso all'aumentare della massa della sotto-struttura; in particolare, per $M_{pert} = 5 \cdot 10^8 M_{\odot}$ si ha $\frac{\Delta F}{F} = -0.06\%$, per $M_{pert} = 7 \cdot 10^9 M_{\odot}$ si ha $\frac{\Delta F}{F} = -0.39\%$ e infine per $M_{pert} = 1 \cdot 10^{11} M_{\odot}$ si ha $\frac{\Delta F}{F} = -2.93\%$. Tali valori sono stati calcolati all'interno del codice; per disegnare il grafico si è utilizzato il campionamento più grossolano

```
mass_values_graph = [1.0e6, 1.0e7, 1.0e8, 5.0e8, 1.0e9, 5.0e9, 1.0e10, 3.0e10, 5.0e10, 7.0e10, 1.0e11]
```

Osservando il grafico ed i valori riportati nel testo è evidente che, poiché le sotto-strutture NFW più piccole causano anomalie di flusso inferiori al punto percentuale, rilevarle può diventare complesso e richiedere un'alta risoluzione strumentale. Tuttavia, come visto ampiamente nei capitoli precedenti, sono proprio i sotto-aloni meno massivi a porre i vincoli più importanti sulla natura della materia oscura, in quanto è alle masse più basse che si hanno le maggiori divergenze tra i modelli teorici.

In conclusione, quanto presentato in questo capitolo conferma come il lensing gravitazionale sia uno strumento particolarmente sensibile per lo studio della materia oscura. Tuttavia, la presente trattazione non tiene conto di fattori fondamentali nelle rilevazioni

reali, quali il rumore strumentale, la risoluzione del telescopio usato o l'influenza che la materia barionica circostante può avere sul sistema. Le simulazioni presentate permettono dunque di comprendere la morfologia generale delle immagini e costituiscono un utile banco di prova per studiare le numerose condizioni geometriche, fisiche e strumentali che caratterizzano un sistema osservativo; esse però non sono da considerare confrontabili con rilevazioni reali, le quali presentano tutte le complicazioni già discusse nei capitoli precedenti.

5

Conclusioni

Da quanto discusso in questo elaborato emerge come il lensing gravitazionale forte rappresenti una delle tecniche osservative più promettenti per lo studio della materia oscura su piccola scala. Partendo dal modello cosmologico standard Λ CDM, si è visto come la componente dominante della materia dell'Universo sia oscura, ovvero non interagisca con i fotoni, e come differenze nelle sue proprietà si riflettano sulla storia termica dell'Universo e sulla formazione delle strutture. In seguito, si sono riportate le principali evidenze osservative che hanno indotto gli scienziati a teorizzare questa nuova componente cosmica e si sono ripercorse le predizioni teoriche del modello più accreditato, ovvero quello della materia oscura fredda, tra cui il profilo di NFW per la densità di massa degli aloni. Il modello Λ CDM, sebbene rappresenti uno dei più grandi trionfi della cosmologia moderna, presenta delle tensioni su piccola scala rispetto ai risultati osservativi, che potrebbero essere risolte, almeno in parte, da modelli di DM alternativi, come la WDM e la SIDM. La possibilità di rilevare direttamente o indirettamente sotto-strutture prive di controparte luminosa consente dunque di testare in maniera sempre più stringente le predizioni del modello Λ CDM e di modelli alternativi.

Tali rilevazioni sono possibili grazie ai fenomeni di lenti gravitazionali. Sono stati introdotti i rudimenti del lensing gravitazionale, evidenziando il ruolo centrale del potenziale della lente e dei principali parametri geometrici che ne descrivono la fenomenologia. Le lenti più frequenti in natura sono le ETGs, ovvero galassie ellittiche primordiali, poste a redshift tra 0.1 e 1; per modellarle in maniera semplice si è dunque introdotto il profilo SIE, che permette di riprodurre gli effetti gravitazionali principali, sebbene sia singolare e dunque semplificativo rispetto al profilo reale seguito dalle galassie. Attraverso gli anelli di Einstein e gli archi gravitazionali osservabili nelle immagini, è possibile stimare con una precisione dell'1-2% la massa totale, luminosa e oscura, presente all'interno del raggio di Einstein; tuttavia, tale stima, se effettuata utilizzando il

solo lensing, non è univoca. Essa è infatti soggetta a degenerazioni quali la MSD, risolvibili utilizzando, ove possibile, metodi osservativi complementari, come la cinematica stellare.

Combinando quanto presentato nei primi due capitoli, si è mostrato più concretamente come lo strong gravitational lensing possa essere applicato allo studio della materia oscura. Poiché essa non è direttamente osservabile nelle immagini, bisogna sfruttare le sue firme gravitazionali, quali le anomalie di flusso e le perturbazioni alla brillantezza superficiale. Nei sistemi reali si formula un problema di inferenza bayesiana gerarchica, che permette, a posteriori, di stimare la probabilità che i parametri del modello potessero generare una specifica immagine. Tuttavia, tale stima è resa difficoltosa dalla forte degenerazione tra la presenza di una sotto-struttura e altre caratteristiche delle immagini riconducibili alle complessità del modello della lente; affinché una rilevazione possa essere considerata robusta, sono necessari più approcci complementari e una particolare attenzione ai modelli utilizzati.

Allo scopo di semplificare, almeno in parte, l'interpretazione di un'osservazione, è utile invertire il problema di inferenza bayesiana e generare simulazioni controllate che mostrino come cambia la morfologia delle immagini di lensing al variare di singoli parametri fisici e geometrici del sistema. Sebbene non consentano di riprodurre tutta la complessità dei sistemi reali, tali simulazioni rappresentano uno strumento utile per costruire un'intuizione fisica del fenomeno e per identificare il legame tra specifiche caratteristiche osservabili e i parametri che le generano. In questo contesto, assumono particolare rilevanza le simulazioni presentate nell'elaborato, progettate per studiare in ambiente controllato l'effetto dei singoli parametri fisici e geometrici sulla morfologia delle immagini. Esse sono state svolte in ambiente ideale, privo di rumore, utilizzando profili semplificati e trascurando sia la risoluzione strumentale che le complessità del modello della lente presentate nei capitoli precedenti.

Future simulazioni più realistiche, che tengano in considerazione quanto qui è stato tralasciato, permetteranno a fisici e astronomi di comprendere più a fondo e nel dettaglio come la presenza di sotto-strutture oscure possa influenzare la fenomenologia del lensing gravitazionale forte. Ciò si rivelerà uno strumento fondamentale per le presenti e future campagne osservative come *Euclid* e il *Vera Rubin Observatory*, le quali non solo si stima che incrementeranno il numero di lenti finora scoperte, ma grazie alla loro elevata risoluzione angolare permetteranno di abbassare la massa soglia rivelabile. Si stima dunque che la sinergia tra osservazioni e simulazioni permetterà nei prossimi dieci anni di porre vincoli robusti e statisticamente significativi sulla natura della DM.

A

Esempio di codice sviluppato

In questa Appendice sono riportati i principali frammenti di codice utilizzati per simulare e rappresentare i sistemi in Figura 4.3. Come nel resto del progetto, il codice e i relativi commenti sono in lingua inglese.

In primo luogo, si è istanziata la sorgente imperturbata, utilizzando i parametri e i profili definiti nelle Tabelle 4.1 e 4.2 e si sono salvate in variabili globali le relative immagini di interesse. Successivamente, si è definita la funzione `make_composite_lens`, che costruisce sia il satellite sulla base del profilo di densità di massa scelto dall'utente (SIE o NFW), sia la lente composita. Si sono poi definiti la posizione del perturbatore, in quanto mantenuta costante nei due casi, e i parametri di base dei due profili.

```
source_unperturbed = sersic(size=fov, Npix=npix, gl=lens,
                             save_unlensed=True, **source_kwargs)
total_image_unperturbed = source_unperturbed.image + lens_light.
                             image
difference_unperturbed = source_unperturbed.image -
                             source_unperturbed.image

# Create a composite lens made of the main lens plus either a SIE
# or NFW perturber
def make_composite_lens(
    base_lens,
    perturbation_kind,
    perturbation_kwargs,
    co,
    zl,
    zs,
    theta,
):
    if perturbation_kind == "SIE":
        perturbation = sie(
```

```

        co=co,
        zl=zl,
        zs=zs,
        **perturbation_kwargs
    )

    if perturbation_kind == "NFW":
        perturbation = nfwell(
            co=co,
            zl=zl,
            zs=zs,
            **perturbation_kwargs
        )
        perturbation.setGrid(theta=theta)

    composite = compositeModel(
        co,
        models=[base_lens, perturbation]
    )

    composite.zl = zl
    composite.zs = zs
    composite.dl = base_lens.dl
    composite.ds = base_lens.ds
    composite.dls = base_lens.dls
    composite.setGrid(theta=theta)

    return perturbation, composite

pert_pos = [1, -1.05]

second_sie_kwargs = {
    "sigma0": 90.0,
    "q": 0.9,
    "pa": np.deg2rad(-20.0),
    "theta_c": 1.0e-4,
    "x1": pert_pos[0],
    "x2": pert_pos[1],
}

second_nfw_kwargs = {
    "mass": 5.0e11, # total mass
    "conc": 11.0, # concentration
    "q": 0.95,
    "pa": np.deg2rad(-20.0),
    "x1": pert_pos[0],
    "x2": pert_pos[1],
}

```

La funzione appena definita viene quindi utilizzata per aggiungere alla lente principale un satellite SIE con dispersione di velocità variabile, salvando le lenti composite e le relative linee critiche per poterle successivamente rappresentare.

```
sigma0_values_pert = [50.0, 70.0, 90.0]
second_lens_SIE_all = []
composite_lens_SIE_all = []
composite_critical_lines_SIE = []

for sigma0_pert in sigma0_values_pert:
    second_sie_kwargs_var = {
        "sigma0": sigma0_pert,
        "q": 0.9,
        "pa": np.deg2rad(-20.0),
        "theta_c": 1.0e-4,
        "x1": pert_pos[0],
        "x2": pert_pos[1],
    }

    second_lens_SIE, lens_with_second_SIE = make_composite_lens(
        lens, "SIE", second_sie_kwargs_var, co, z1, zs, theta)

    second_lens_SIE_all.append(second_lens_SIE)
    composite_lens_SIE_all.append(lens_with_second_SIE)

    critical_lines_with_second_SIE = [lens_with_second_SIE.
        getCritPoints(cl) for cl in lens_with_second_SIE.tancl()]
    composite_critical_lines_SIE.append(
        critical_lines_with_second_SIE)
```

Il blocco di codice seguente esegue il ray tracing attraverso la lente composta e salva le immagini simulate, le mappe di convergenza e i residui in apposite liste, che verranno successivamente utilizzate per la rappresentazione grafica.

```
composite_sources_all_SIE = []
composite_total_images_all_SIE = []
composite_kappa_maps_all_SIE = []
SIE_residuals = []

for i, pert in enumerate(second_lens_SIE_all):
    source_with_second_SIE = sersic(
        size=fov,
        Npix=npix,
        gl=composite_lens_SIE_all[i],
        save_unlensed=True,
        **source_kwargs,
    )
    composite_sources_all_SIE.append(source_with_second_SIE)
```

```

    composite_kappa_maps_all_SIE.append(composite_lens_SIE_all[i].
        ka)

    total_image_with_second_SIE = source_with_second_SIE.image +
        lens_light.image
    composite_total_images_all_SIE.append(
        total_image_with_second_SIE)

    difference_SIE = source_with_second_SIE.image -
        source_unperturbed.image
    SIE_residuals.append(difference_SIE)

```

Infine, questo implementa la visualizzazione grafica del risultato:

```

vmax_image_SIE = percentile_vmax(composite_total_images_all_SIE)
vmax_kappa_SIE = percentile_vmax(composite_kappa_maps_all_SIE)
vmax_difference_SIE = percentile_vmax(SIE_residuals)

fig3, ax3 = plt.subplots(3, 4, figsize=(15, 10), constrained_layout
    =True)

# Effect of varying the velocity dispersion of a SIE perturbator
fig3.suptitle("Effetto della variazione della dispersione di
    velocita di un perturbatore SIE", fontsize=20)

for ax in ax3.flat:
    ax.set_label("arcsec")
    ax.set_aspect("equal")

# Unperturbed references
ax3[0,0].set_title("Immagine imperturbata")
ax3[0,0].imshow(total_image_unperturbed, origin="lower", extent=
    extent, cmap="magma", vmax=vmax_image_SIE)
ax3[1,0].set_title('Convergenza $\kappa$ imperturbata')
ax3[1,0].imshow(lens.ka, origin="lower", extent=extent, cmap="
    coolwarm", vmax=vmax_kappa_SIE)
ax3[2,0].set_title("Differenza puntuale - imperturbata")
ax3[2,0].imshow(difference_unperturbed, origin="lower", extent=
    extent, cmap="PuOr", vmin=-vmax_difference_SIE, vmax=
    vmax_difference_SIE)

for xcritu, ycritu in critical_lines_lens:
    ax3[0,0].plot(xcritu, ycritu, color="white", linestyle="dotted"
        )
    ax3[1,0].plot(xcritu, ycritu, color="white")
    ax3[2,0].plot(xcritu, ycritu, color="indigo", linestyle="dotted"
        )

```

```

for i, sigma0_pert in enumerate(sigma0_values_pert):
    # Perturbed images and convergence maps
    ax3[0,i+1].set_title(
        rf'$\sigma_{\mathrm{{pert}}}=\{\sigma0\_pert\}\,\mathrm{{km}},s^{\{-1\}}$', '
        rf'$\theta_{\mathrm{{E, pert}}}=\{\text{second\_lens\_SIE\_all}[i].\text{bsie}
            ().2f\}$''')
    im0 = ax3[0, i+1].imshow(composite_total_images_all_SIE[i],
        origin="lower", extent=extent, cmap="magma", vmax=
        vmax_image_SIE)

    ax3[1,i+1].set_title(
        rf'Convergenza $\kappa$, $\sigma_{\mathrm{{pert}}}=\{
            \sigma0\_pert\}\,\mathrm{{km}},s^{\{-1\}}$')
    im1 = ax3[1,i+1].imshow(composite_kappa_maps_all_SIE[i], origin
        ="lower", extent=extent, cmap="coolwarm", vmax=
        vmax_kappa_SIE)

    ax3[2,i+1].set_title(
        rf'Differenza puntuale, $\sigma_{\mathrm{{pert}}}=\{
            \sigma0\_pert\}\,\mathrm{{km}},s^{\{-1\}}$'
    )
    im2 = ax3[2, i+1].imshow(SIE_residuals[i], origin = "lower",
        extent=extent, cmap="PuOr", vmin=-vmax_difference_SIE, vmax
        =vmax_difference_SIE)

    for xcrit, ycrit in composite_critical_lines_SIE[i]:
        ax3[0,i+1].plot(xcrit, ycrit, color="white", linestyle="
            dotted")
        ax3[1,i+1].plot(xcrit, ycrit, color="white")
        ax3[2,i+1].plot(xcrit, ycrit, color="indigo", linestyle="
            dotted")

# Surface brightness
cbar0 = fig3.colorbar(
    im0,
    ax=ax3[0, :],
    shrink=0.85,
    pad=0.02
)
cbar0.set_label("Luminosita superficiale")

# Convergence
cbar1 = fig3.colorbar(
    im1,
    ax=ax3[1, :],
    shrink=0.85,
    pad=0.02
)

```

```
)  
cbar1.set_label(r"Convergenza  $\kappa$ ")  
  
# Surface brightness (again)  
cbar2 = fig3.colorbar(  
    im2,  
    ax=ax3[2, :],  
    shrink=0.85,  
    pad=0.02  
)  
cbar2.set_label("Luminosita superficiale")
```

Per uniformare la scala di visualizzazione delle immagini appartenenti alla stessa riga, era stata definita in precedenza la funzione

```
def percentile_vmax(images, percentile=99.5):  
    return max(  
        np.percentile(img[np.isfinite(img)], percentile)  
        for img in images  
    )
```

Bibliografia

- Auger, M. W. et al. (2010). «THE SLOAN LENS ACS SURVEY. X. STELLAR, DYNAMICAL, AND TOTAL MASS CORRELATIONS OF MASSIVE EARLY-TYPE GALAXIES». In: *The Astrophysical Journal* 724.1, p. 511. DOI: 10.1088/0004-637X/724/1/511.
- Bartelmann, Matthias e Peter Schneider (2001). «Weak gravitational lensing». In: *Physics Reports* 340.4, pp. 291–472. DOI: 10.1016/S0370-1573(00)00082-X.
- Bernardi, Mariangela et al. (2013). «The Massive End of the Luminosity and Stellar Mass Functions and Clustering from SDSS DR7». In: *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 436.1, pp. 697–704. DOI: 10.1093/mnras/stt1607.
- Bullock, James S. e Michael Boylan-Kolchin (2017). «Small-Scale Challenges to the Λ CDM Paradigm». In: *Annual Review of Astronomy and Astrophysics* 55. Volume 55, 2017, pp. 343–387. DOI: 10.1146/annurev-astro-091916-055313.
- Burkert, Andreas (1995). «The Structure of Dark Matter Halos in Dwarf Galaxies». In: *The Astrophysical Journal Letters* 447, pp. L25–L28. DOI: 10.1086/309560.
- Clowe, Douglas et al. (2006). «A Direct Empirical Proof of the Existence of Dark Matter». In: *The Astrophysical Journal* 648, pp. L109–L113. DOI: 10.1086/508162.
- Collett, Thomas E. (2015). «THE POPULATION OF GALAXY–GALAXY STRONG LENSES IN FORTHCOMING OPTICAL IMAGING SURVEYS». In: *The Astrophysical Journal* 811.1, p. 20. DOI: 10.1088/0004-637X/811/1/20.
- Fixsen, D. J. (2009). «The Temperature of the Cosmic Microwave Background». In: *The Astrophysical Journal* 707.2, pp. 916–920. DOI: 10.1088/0004-637X/707/2/916.
- Freese, Katherine (2009). «Review of Observational Evidence for Dark Matter in the Universe and in Upcoming Searches for Dark Stars». In: *EAS Publications Series* 36, pp. 113–126. DOI: 10.1051/eas/0936015.
- Hsueh, J.-W. et al. (2017). «SHARP – IV. An apparent flux-ratio anomaly resolved by the edge-on disc in B0712+472». In: *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 469.3, pp. 3713–3721. DOI: 10.1093/mnras/stx1082.
- Keeton, Charles R., B. Scott Gaudi e A. O. Petters (2003). «Identifying Lenses with Small-Scale Structure. I. Cusp Lenses». In: *The Astrophysical Journal* 598.1, pp. 138–161. DOI: 10.1086/378934.

- Longair, Malcolm (2015). «Bending space-time: A commentary on Dyson, Eddington and Davidson (1920) 'A determination of the deflection of light by the Sun's gravitational field'». In: *Philosophical transactions. Series A, Mathematical, physical, and engineering sciences* 373. DOI: 10.1098/rsta.2014.0287.
- Meneghetti, Massimo (2021). *Introduction to Gravitational Lensing: With Python Examples*. Springer International Publishing. ISBN: 9783030735821.
- Meneghetti, Massimo et al. (2022). «The probability of galaxy–galaxy strong lensing events in hydrodynamical simulations of galaxy clusters». In: *Astronomy & Astrophysics* 668, A188. DOI: 10.1051/0004-6361/202243779.
- Navarro, Julio F., Carlos S. Frenk e Simon D. M. White (1996). «The Structure of Cold Dark Matter Halos». In: *ApJ* 462, p. 563. DOI: 10.1086/177173.
- O’Riordan, C. M. et al. (2025). «Euclid: A complete Einstein ring in NGC 6505». In: *Astronomy & Astrophysics* 694, A145. DOI: 10.1051/0004-6361/202453014.
- O’Riordan, Conor M e Simona Vegetti (2024). «Angular complexity in strong lens substructure detection». In: *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 528.2, pp. 1757–1768. DOI: 10.1093/mnras/stae153.
- Oh, Se-Heon et al. (2015). «High-Resolution Mass Models of Dwarf Galaxies from LITTLE THINGS». In: *The Astronomical Journal* 149.6, p. 180. DOI: 10.1088/0004-6256/149/6/180.
- Planck Collaboration (2020). «Planck 2018 results. VI. Cosmological parameters». In: *Astronomy & Astrophysics* 641, A6. DOI: 10.1051/0004-6361/201833910.
- Powell, D. M. et al. (2025). «A million-solar-mass object detected at a cosmological distance using gravitational imaging». In: *Nature Astronomy* 9.11, pp. 1714–1722. DOI: 10.1038/s41550-025-02651-2.
- PyLensLib (2025). *PyLensLib Documentation*. URL: <https://maxmen.github.io/pyLensLib/>.
- Rubin, Vera C. e W. Kent Jr. Ford (1970). «Rotation of the Andromeda Nebula from a Spectroscopic Survey of Emission Regions». In: *The Astrophysical Journal* 159, pp. 379–403. DOI: 10.1086/150317.
- Ryden, Barbara Sue (2003). *Introduction to Cosmology*. Addison-Wesley. ISBN: 9780805389128.
- Schneider, Peter, Jürgen Ehlers e Emilio E. Falco (1992). *Gravitational Lenses*. Springer. ISBN: 9783540665069.
- Shajib, A. J. et al. (2024). «Strong Lensing by Galaxies». In: *Space Science Reviews* 220.8. DOI: 10.1007/s11214-024-01105-x.
- Vegetti, S., S. Birrer et al. (2024). «Strong Gravitational Lensing as a Probe of Dark Matter». In: *Space Science Reviews* 220, 58. DOI: 10.1007/s11214-024-01087-w.
- Vegetti, S., D. J. Lagattuta et al. (2012). «Gravitational detection of a low-mass dark satellite galaxy at cosmological distance». In: *Nature* 481.7381, pp. 341–343. DOI: 10.1038/nature10669.
- Vegetti, Simona, Oliver Czoske e Léon V. E. Koopmans (2010). «Quantifying dwarf satellites through gravitational imaging: the case of SDSS J120602.09+514229.5». In:

- Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 407.1, pp. 225–231. DOI: 10.1111/j.1365-2966.2010.16952.x.
- Walmsley, M. et al. (2026). «Euclid Quick Data Release (Q1): XXVI. The Strong Lensing Discovery Engine A – System overview and first lens sample». In: *Astronomy & Astrophysics* 711, A26. DOI: 10.1051/0004-6361/202555141.
- Wilkinson, Ryan J. (2016). «Deciphering Dark Matter with Cosmological Observations». Tesi di dott. Durham University. URL: <http://etheses.dur.ac.uk/11762/>.
- Wright, A. H. et al. (2017). «Galaxy And Mass Assembly (GAMA): The Galaxy Stellar Mass Function to $z = 0.1$ from the r-band Selected Equatorial Regions». In: *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 470.1, pp. 283–302. DOI: 10.1093/mnras/stx1149.
- Zwicky, Fritz (1933). «Die Rotverschiebung von extragalaktischen Nebeln». In: *Helvetica Physica Acta* 6, pp. 110–127. DOI: 10.5169/seals-110267.

Ringraziamenti

*"Dimostro gratitudine non perché un altro,
stimolato dal mio esempio, mi aiuti più volentieri,
ma per compiere un'azione bellissima che mi riempie di gioia;
sono grato non perché mi conviene, ma perché mi piace."*

– Seneca, *Lettere a Lucilio*

Ogni storia ha un eroe o un'eroina, ma difficilmente il o la protagonista potrebbe compiere la sua missione senza una squadra al suo fianco. Ulisse non avrebbe mai fatto ritorno ad Itaca senza la propria ciurma. Katniss non sarebbe mai uscita viva dall'Arena senza Peeta o Haymitch.

Io non faccio eccezione. Se sono riuscita ad arrivare fino a qui e a compiere il primo piccolo passo verso il coronamento di un sogno, il merito è anche delle persone meravigliose che hanno camminato al mio fianco.

Partendo dalle conoscenze più recenti, vorrei ringraziare la mia relatrice, la professoressa Giulia Despali, per la cura, la gentilezza e la costanza con cui mi ha aiutato a redigere questa tesi. Il tempo che mi ha dedicato è stato prezioso: grazie per avermi guidato con pazienza nell'approfondimento non di uno, ma di ben due argomenti che da sempre mi affascinano.

Vorrei approfittarne per ringraziare anche la professoressa Barbara Lanzoni, che ha permesso il nostro incontro e mi ha fornito le basi di astrofisica. Senza il suo lavoro, la partenza sarebbe stata necessariamente molto più difficoltosa.

Tra le altre insegnanti incontrate nel tempo, un pensiero speciale va alla professoressa Danila Berti, per avermi ricordato il valore della gentilezza in un periodo in cui il buio aveva preso il sopravvento e per la forza d'animo che ha sempre dimostrato. Mi ha insegnato come combattere senza mai arrendersi, nonostante alla fine il suo nemico abbia avuto la meglio.

Un angolo del mio cuore è dedicato poi a tutta la famiglia del Liceo Scientifico "Augusto Righi" di Cesena, che mi accoglie ancora a braccia aperte ogni volta che torno, per aver reso quelle mura speciali.

Tra loro, un ringraziamento particolare al professor Francesco Benvenuti, per aver creduto in me anche quando mi sentivo persa e per avermi dato la possibilità di diventare una scienziata più competente, dimostrandosi un insegnante esigente ma non intransigente. Con la sua passione ha acceso la mia, e La ricorderò sempre con affetto.

Tra i docenti universitari vorrei rivolgere un ringraziamento a quanti mi hanno dimostrato che, tra chi spiega in cattedra e chi siede tra i banchi, non deve per forza esserci una distanza abissale o un rapporto impersonale. Un grazie speciale alla professoressa Sara Valentinetti, che più di una volta mi ha aperto le porte del suo laboratorio, accogliendomi con tutti i miei dubbi e le mie fragilità, e condividendo le sue.

Grazie anche a tutti i tutor e i tecnici di laboratorio, per la pazienza, l'aiuto nel sostituire i diodi bruciati e per le preziose dispense.

Tra chi ha condiviso i banchi con me, in primo luogo vorrei ringraziare tutti i membri del gruppo *eh?! nononono, basta statistica*. Mi avete dimostrato, con ogni pranzo e ogni serata, che non servono grandi cose per essere felici. Grazie per aver reso speciali i piccoli gesti quotidiani e per l'aiuto reciproco che ci siamo dati, nello studio come nelle piccole difficoltà di ogni giorno.

In particolare, grazie a Bianca, che per tre anni è stata la mia fedele compagna nelle lunghe ore in laboratorio e nella stesura delle relazioni. Averti al mio fianco me le ha fatte pesare un po' meno. Anche se negli ultimi anni non ci siamo viste ogni giorno, hai sempre trovato il modo di farti sentire vicina quando ne avevo più bisogno.

A Giulia, grazie per le chiacchiere sul passato e sul futuro e per aver messo a disposizione il tuo frigorifero quando il mio si è rotto.

A Riccardo, grazie per tutto il supporto e il sostegno. Dall'esame di Algebra Lineare a quello di Meccanica Quantistica, in questi tre anni abbiamo fatto tutto insieme. Avrei dovuto capirlo quando abbiamo iniziato a chiacchierare di Seneca e Montale che saresti diventato uno dei miei migliori amici. Grazie per essere stato al mio fianco, sempre, e per avermi spronato a *nun mullà!* quando ho vacillato.

Una parte importante in questa esperienza di crescita l'hanno avuta anche le mie coinquiline: grazie per avermi dato un luogo sicuro in cui tornare nella grande metropoli di Bologna, per tutte le serate sul nostro divano, che ormai ne sa una più del diavolo, per i post-it colorati lasciati sul tavolo e per le cioccolate calde condivise in inverno.

In particolare, grazie a Marianna, che ha saputo vedere oltre il finto sorriso indossato in un momento di inquietudine profonda. Mi hai aiutata ogni giorno, standomi accanto senza invadenza, a volermi bene e a raccogliere il coraggio necessario ad agire di conseguenza.

Se i miei amici e le mie amiche sono stati come una seconda famiglia a cento chilometri da casa, il ringraziamento più sentito va ai miei genitori. Mi avete insegnato a lottare per ciò in cui credo e ad amare la cultura, nel senso più ampio del termine. Grazie,

per avermi sostenuta incondizionatamente nella mia scelta di laurearmi in Fisica, anche se talvolta non l'avete compresa.

Grazie a mamma, perché non mi ha mai nascosto come essere una donna nella nostra società non sia facile, ma nonostante questo mi ha sempre spronato a lavorare sodo per qualsiasi obiettivo mi fossi posta, indipendentemente dalle convenzioni sociali. Grazie per tutti i consigli di lettura, cucina, moda e vita in generale. E grazie, per avermi insegnato il valore dell'onestà, qualunque cosa accada.

Grazie a papà, che mi ha sempre accompagnato ovunque volessi andare, indipendentemente dalla distanza. E grazie per la passione condivisa per tutto il mondo scientifico.

Vorrei ringraziare anche mia sorella, perché, nonostante su molte cose siamo agli antipodi, riusciamo comunque a trovare delle passioni condivise e a volerci bene a modo nostro.

Grazie ad Ariel, che ha dormito sui miei appunti durante le lunghe ore di studio a casa, tenendomi compagnia con costanza. Con i poteri conferitomi (ovvero neanche uno) ti dichiaro Laureata in Fisica ad honorem.

Grazie a tutti i parenti, ed in particolare a nonna, per aver provato a capire cosa faccio e avermi sostenuto anche quando non ci sono riusciti.

Grazie a tutti gli amici storici, ormai annoverati in famiglia, perché nonostante la distanza che separa alcuni di noi, non mi avete mai fatto sentire sola.

E grazie a tutti coloro che hanno condiviso con me una parte del viaggio, anche se non ne hanno visto il finale, per esserci stati, almeno in quel tratto.

Vorrei infine ringraziare sentitamente tutte le donne, e in particolar modo quelle di scienza, che nel corso della Storia si sono battute con determinazione e costanza per i nostri diritti e per il riconoscimento dei nostri meriti. Non sarei qui oggi senza di voi.

Infine, grazie a te lettore o lettrice: spero tu abbia imparato qualcosa in più rispetto a quando ti sei imbattuta in questo elaborato, che sia scientifica o meno. Grazie, per essere rimasta con me, fin proprio alla fine.