

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

Dipartimento di Fisica e Astronomia “Augusto Righi”
Corso di Laurea in Fisica

CONNESSIONI SU FIBRATI E TEORIE DI GAUGE

Relatore:
Prof. Emanuele Latini

Presentata da:
Riccardo Nisi

Anno Accademico 2025/2026

Abstract

In questa tesi si esaminano le connessioni sui fibrati principali, con lo scopo di spiegare come queste siano collegate alle teorie di gauge. Prima di definire le connessioni si costruiscono tutte le strutture necessarie. In particolare, si introducono e analizzano numerosi concetti di geometria differenziale, come le varietà, i vettori tangenti e le forme differenziali, per poi definire e approfondire i gruppi di Lie e le algebre di Lie e, successivamente, i fibrati, i fibrati vettoriali e i fibrati principali. A questo punto si definiscono le connessioni sui fibrati principali e svariate strutture matematiche, tra le quali la 1-forma di connessione, il trasporto parallelo, la derivata covariante e la 2-forma di curvatura, utili per caratterizzarle e studiarle. Si esamina anche come alcune di queste, prima fra tutte la derivata covariante, possano essere estese ai fibrati vettoriali. Infine, si mostra come le teorie di gauge siano l'interpretazione fisica delle connessioni sui fibrati, indagando le relazioni tra le entità geometriche definite e le variabili fisiche che descrivono tali teorie.

Indice

Introduzione	1
1 Geometria differenziale	3
1.1 Varietà	3
1.1.1 Varietà topologiche	3
1.1.2 Varietà lisce	4
1.2 Mappe lisce	6
1.3 Vettori tangenti	9
1.3.1 Derivazioni, vettori tangenti e spazio tangente	9
1.3.2 Fibrato tangente	11
1.3.3 1-forme e spazio cotangente	13
1.3.4 Tensori e campi vettoriali	14
1.3.5 Pushforward e pullback	15
1.4 Flussi e parentesi di Lie	16
1.4.1 Curve integrali e flussi	16
1.4.2 Gruppo di trasformazioni a 1 parametro	16
1.4.3 Parentesi di Lie	17
1.5 Forme differenziali	17
1.5.1 Tensori simmetrici e antisimmetrici	17
1.5.2 Forme differenziali e prodotto wedge	18
1.5.3 Derivata esterna	20
2 Gruppi di Lie e algebre di Lie	21
2.1 Gruppi di Lie	21
2.2 Algebre di Lie	22
2.3 Sottogruppo a 1 parametro	24
2.4 Rappresentazioni di gruppi di Lie e algebre di Lie	25
2.5 Azione di un gruppo di Lie	25
3 Fibrati	29
3.1 Fibrati	29
3.1.1 Definizioni	29
3.1.2 Morfismo di fibrati ed equivalenza tra fibrati	32
3.1.3 Fibrato di pullback e mappe omotopiche	34
3.2 Fibrati vettoriali	35

3.2.1	Definizioni ed esempi	35
3.2.2	Fibrato duale	36
3.2.3	Sezioni di fibrati vettoriali	37
3.3	Fibrati principali	37
3.3.1	Definizioni	37
3.3.2	Fibrati associati	38
4	Connessioni su fibrati	41
4.1	Connessioni su fibrati principali	42
4.1.1	Definizioni	42
4.1.2	1-forma di connessione	44
4.1.3	Sollevamento orizzontale, trasporto parallelo e ologonia	48
4.1.4	Derivata covariante e 2-forma di curvatura	51
4.2	Derivata covariante su fibrati vettoriali	55
4.2.1	Derivata covariante su fibrati vettoriali associati	55
4.2.2	Forma locale della derivata covariante	56
5	Teorie di gauge	59
5.1	Costruzione delle teorie di gauge a partire dalle connessioni sui fibrati principali	59
5.1.1	Potenziale di gauge e trasformazioni di gauge	59
5.1.2	Necessità geometrica e fisica della derivata covariante	60
5.1.3	Campo di forza	61
5.2	Esempi di teorie di gauge	62
5.2.1	Teoria di gauge $U(1)$: interazione elettromagnetica	62
5.2.2	Teoria di gauge $SU(2)$: interazione debole	64
	Conclusioni	67
	Bibliografia	69
	Ringraziamenti	71

Introduzione

Le teorie di gauge rivestono un ruolo basilare nella descrizione fisica delle interazioni fondamentali e del modello standard. Il grande successo di queste teorie spazia dall'aver permesso la costruzione di un quadro teorico in grado di descrivere le interazioni elettromagnetiche, deboli e forti, fino al loro ruolo all'interno del meccanismo di Higgs, che spiega l'origine della massa delle particelle. Inoltre, la maggior parte dei *framework* teorici sono costruiti in modo da rispettare le simmetrie e i principi su cui si basano le teorie di gauge.

Come a tutti i modelli fisici, anche alle teorie di gauge corrispondono delle strutture matematiche che le formalizzano da un punto di vista astratto e permettono di giustificare e spiegare numerosi dei loro risultati. In particolare le teorie di gauge, se viste da una prospettiva geometrica, altro non sono che le connessioni sui fibrati principali.

Un fibrato può euristicamente essere visto come il prodotto diretto di due varietà, ossia di due strutture localmente euclidee, e le connessioni sono costruite su di essi per permettere di confrontare punti appartenenti a spazi diversi e di introdurre una nuova nozione di derivata. Esse costituiscono un elegante strumento grazie a cui è possibile ottenere svariati importanti esiti nell'ambito dello studio dei fibrati e, più in generale, della geometria differenziale. Tali risultati trovano un loro equivalente nelle leggi che le quantità fisiche devono rispettare quando si trattano le teorie di gauge.

Questa tesi si pone in primo luogo l'obiettivo di definire e indagare le connessioni sui fibrati, focalizzandosi sui fibrati principali, e le strutture geometriche ad esse collegate; parimenti vuole esplicitare come queste coincidano, in fisica, alle teorie di gauge e alle grandezze fisiche che le descrivono.

Per fare ciò, la tesi si compone di cinque capitoli. I primi tre contengono tutte le nozioni necessarie per arrivare a parlare di connessioni, in particolare: il Capitolo 1 contiene una panoramica delle principali definizioni e dei più significativi teoremi della geometria differenziale, trattando argomenti come le varietà, i vettori tangenti e le forme differenziali; il Capitolo 2 introduce e analizza i gruppi di Lie e le algebre di Lie, concetti essenziali per ciò di cui si discute successivamente; il Capitolo 3 definisce e caratterizza i fibrati, i fibrati vettoriali e i fibrati principali. Una volta chiarite le basi, nel Capitolo 4 inizia la trattazione delle connessioni, prima definendole sui fibrati principali e introducendo numerose strutture necessarie per studiarle ed utilizzarle, e in seguito estendendo alcune di queste ai fibrati vettoriali. Infine, nel Capitolo 5 si mostra la corrispondenza tra connessioni sui fibrati e teorie di gauge, rendendo esplicito come quanto definito fino a

quel momento abbia un significato fisico all'interno di tali teorie.

Capitolo 1

Geometria differenziale

In questo capitolo si presentano diversi risultati della geometria differenziale che saranno necessari per il continuo della trattazione.

1.1 Varietà

Il primo concetto che si introduce è quello di varietà. Una varietà è, come si definisce a breve, uno spazio che localmente assomiglia ad uno spazio euclideo $\mathbb{R}^n$. Richiedendo che valgano alcune specifiche proprietà, sulle varietà è possibile introdurre mappe, vettori e altre strutture che permettono di svolgere numerose operazioni, come si mostra nel seguito.

1.1.1 Varietà topologiche

Definizione 1.1. Sia M uno spazio topologico (ossia un insieme con una topologia). M è una **varietà topologica** di dimensione n se ha le seguenti proprietà:

- i. M è uno spazio di Hausdorff;
- ii. M è secondo numerabile;
- iii. M è localmente euclideo di dimensione n , ossia $\forall p \in M$ esistono un sottoinsieme aperto $U \subset M$ contenente p , un sottoinsieme aperto $\hat{U} \subset \mathbb{R}^n$ e un omeomorfismo $\varphi : U \rightarrow \hat{U}$.

Sfruttando il fatto che sia localmente euclidea, è possibile collegare i sottoinsiemi di una varietà topologica a $\mathbb{R}^n$.

Definizione 1.2. Sia M una varietà topologica di dimensione n . Una **carta** su M è una coppia (U, φ) , dove U è un sottoinsieme aperto di M e $\varphi : U \rightarrow \hat{U}$ è un omeomorfismo da U a un sottoinsieme aperto $\hat{U} = \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$.

U è detto **dominio coordinato**; nel caso in cui $\varphi(U)$ sia una palla aperta in $\mathbb{R}^n$, U è anche detto **palla coordinata**.

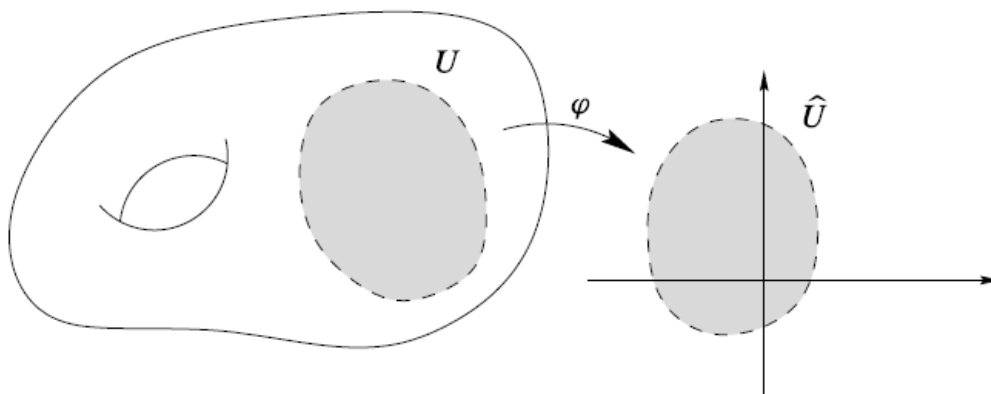


Figura 1.1: Esempio di varietà topologica (a sinistra) su cui è evidenziato il dominio coordinato U , che è mappato dalla mappa coordinata φ in $\hat{U} \subset \mathbb{R}^2$ (a destra).

La mappa φ è detta **mappa coordinata**, e le funzioni che la compongono $(x^1, \dots, x^n)$, definite da $\varphi(p) = (x^1(p), \dots, x^n(p)) \forall p \in U$, sono dette **coordinate locali** su U .

Per definizione di varietà topologica ogni punto $p \in M$ è contenuto nel dominio di qualche carta (U, φ) . Se $\varphi(p) = 0$ si dice che la carta è **centrata in** p .

Un esempio di varietà topologica e di carta è visibile in Figura 1.1.

Queste definizioni sono sufficienti per studiare le proprietà topologiche delle varietà, ma non per effettuarvi dei calcoli.

1.1.2 Varietà lisce

Definizione 1.3. Sia M una varietà topologica e siano (U, φ) e (V, ψ) due carte tali che $U \cap V \neq \emptyset$. La mappa composta $\psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \rightarrow \psi(U \cap V)$ è detta **mappa di transizione** da φ a ψ .

Due carte (U, φ) e (V, ψ) sono **compatibili in modo liscio** se $U \cap V = \emptyset$ oppure la mappa di transizione $\psi \circ \varphi^{-1}$ è un diffeomorfismo.

Essendo $\varphi(U \cap V)$ e $\psi(U \cap V)$ sottoinsiemi aperti di $\mathbb{R}^n$, i termini “liscio” e “diffeomorfismo” sono da intendere nel senso ordinario di funzioni di classe C^∞ .

In Figura 1.2 è presente un disegno in cui è rappresentata una mappa di transizione.

Definizione 1.4. Sia M una varietà topologica. Un **atlante** per M è un insieme di carte i cui domini coprono M .

Un atlante $\mathcal{A}$ è detto **atlante liscio** se tutte le carte in $\mathcal{A}$ sono compatibili in modo liscio a due a due.

Si vuole ora definire una “struttura liscia” su M dotando la varietà di un atlante liscio, in modo tale da poter successivamente definire una funzione $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ che sia liscia se e solo se $f \circ \varphi^{-1}$ è liscia (nel senso ordinario) per ogni carta nell’atlante. È presente però

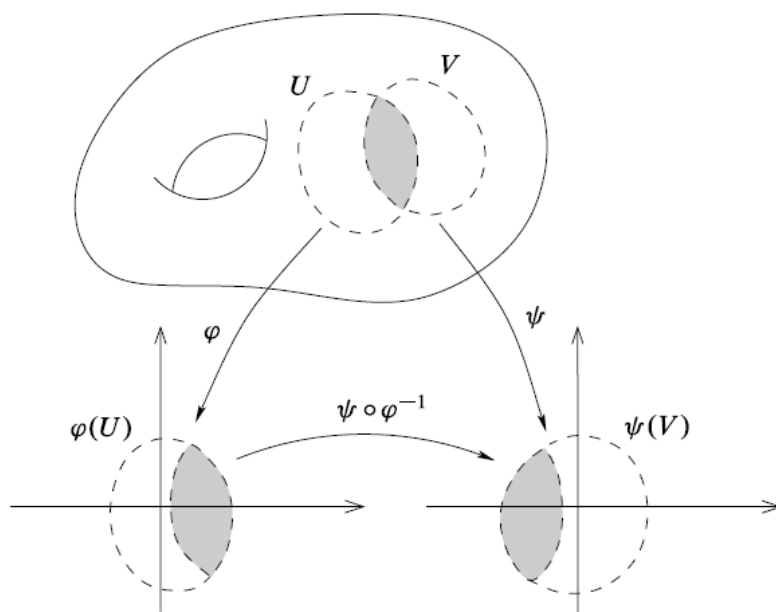


Figura 1.2: Disegno raffigurante una varietà topologica su cui sono definite le carte (U, φ) e (V, ψ) tali che $U \cap V \neq \emptyset$, e nel quale sono visibili le mappe φ e ψ e la mappa di transizione $\psi \circ \varphi^{-1}$.

un problema: in generale possono esistere più atlanti che determinano la stessa struttura liscia. Pertanto è necessaria la seguente

Definizione 1.5. Un atlante liscio $\mathcal{A}$ sulla varietà topologica M è detto **massimale** se non è strettamente contenuto in nessun altro atlante liscio.

È ora possibile definire una varietà liscia.

Definizione 1.6. Sia M una varietà topologica. Una **struttura liscia** su M è un atlante liscio massimale.

Una **varietà liscia** è una coppia $(M, \mathcal{A})$ dove M è una varietà topologica e $\mathcal{A}$ è una struttura liscia su M .

Proposizione 1.1. Sia M una varietà topologica. Allora:

- ogni atlante liscio $\mathcal{A}$ per M è contenuto in un unico atlante liscio massimale;
- due atlanti lisci per M determinano la stessa struttura liscia se e solo se la loro unione è un atlante liscio.

Quindi la struttura liscia può essere vista equivalentemente come la classe di equivalenza di tutti gli atlanti lisci la cui unione è un atlante liscio, oppure come il corrispondente atlante liscio massimale.

Si guardano ora alcuni esempi di varietà liscia.

Esempio 1.1. Per un qualsiasi $n \in \mathbb{N}$ lo spazio euclideo $\mathbb{R}^n$ è una varietà liscia n -dimensionale, con la struttura liscia determinata dall'atlante costituito dalla singola carta

$(\mathbb{R}^n, \text{Id}_{\mathbb{R}^n})$. Questa struttura liscia è detta struttura liscia standard su $\mathbb{R}^n$ e le componenti della risultante mappa coordinata sono dette coordinate standard.

Esempio 1.2. Si consideri l'omeomorfismo $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dato da $\psi(x) = x^3$. L'atlante consistente della singola carta $(\mathbb{R}, \psi)$ definisce una struttura liscia su $\mathbb{R}$. Questa carta non è compatibile in maniera liscia con la struttura liscia standard perché la mappa di transizione $\text{Id}_{\mathbb{R}} \circ \psi^{-1}(y) = y^{1/3}$ non è liscia nell'origine. Quindi la struttura liscia definita su $\mathbb{R}$ da ψ è diversa dalla struttura liscia standard.

Negli esempi visti per definire una varietà liscia si è per prima cosa definito uno spazio topologico, successivamente si è verificato che esso fosse una varietà topologica, e infine vi si è costruita una struttura liscia. Il seguente lemma mostra come definire in un unico passaggio sia una topologia, sia una struttura liscia, su un insieme non dotato di nessuna delle due.

Lemma 1.1. Sia M un insieme, e sia $\{U_\alpha\}$ un insieme di sottoinsiemi di M sui quali sono definite le mappe $\varphi_\alpha : U_\alpha \rightarrow \mathbb{R}^n$ tali che le seguenti proprietà sono soddisfatte:

- i. $\forall \alpha$, φ_α è una biiezione tra U_α e un sottoinsieme aperto $\varphi_\alpha(U_\alpha) \subset \mathbb{R}^n$;
- ii. $\forall \alpha$ e $\forall \beta$, gli insiemi $\varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ e $\varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ sono aperti di $\mathbb{R}^n$;
- iii. ovunque $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, la mappa $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ è liscia;
- iv. M è ricoperto da una quantità numerabile di insiemi U_α ;
- v. ovunque p e q sono punti distinti in M , esistono alcuni U_α contenenti sia p che q o esistono due insiemi disgiunti U_α e U_β con $p \in U_\alpha$ e $q \in U_\beta$.

Allora M ha un'unica struttura liscia tale per cui $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ sia una carta liscia.

1.2 Mappe lisce

Una volta definite le varietà lisce, è possibile svolgere operazioni su di queste. Come prima cosa si introducono le funzioni e le mappe lisce.

Definizione 1.7. Siano M una varietà liscia di dimensione n , $k \in \mathbb{N}$ e $f : M \rightarrow \mathbb{R}^k$ una funzione. Si dice che f è una **funzione liscia** se $\forall p \in M$ esiste una carta liscia (U, φ) contenente p tale che la funzione composta $f \circ \varphi^{-1}$ sia liscia sull'insieme aperto $\hat{U} = \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$.

In Figura 1.3 è rappresentata una funzione liscia, usando la medesima notazione che si è utilizzata nella definizione.

Definizione 1.8. Siano M e N varietà lisce, e sia $F : M \rightarrow N$ una mappa. Si dice che F è una **mappa liscia** se $\forall p \in M$ esistono due carte lisce (U, φ) contenente p e (V, ψ) contenente $F(p)$ tali che $F(U) \subset V$ e la mappa composta $\psi \circ F \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \rightarrow \psi(V)$ sia liscia.

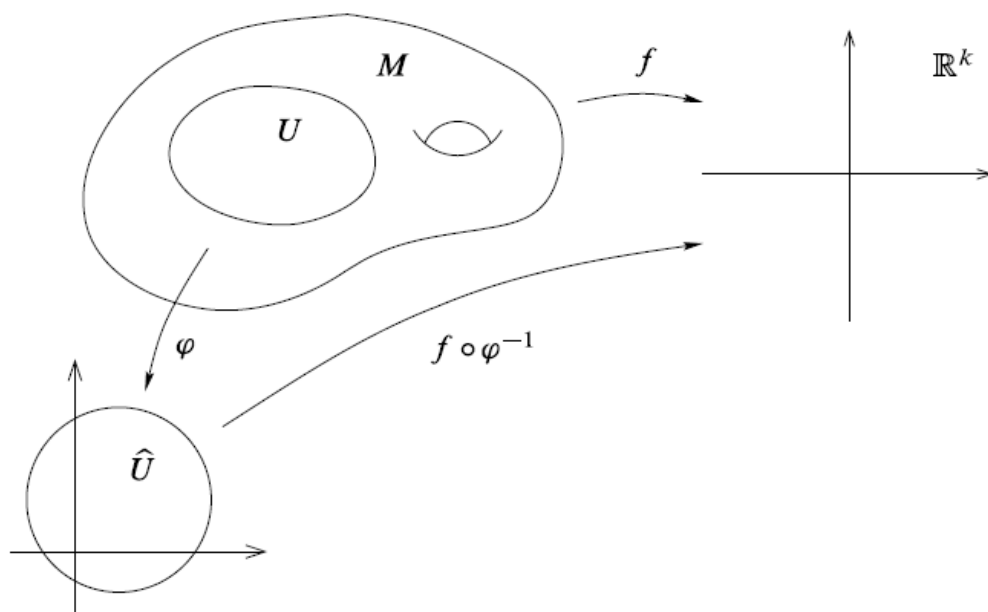


Figura 1.3: Disegno raffigurante una varietà liscia M , una carta liscia (U, φ) , l'insieme aperto $\hat{U} = \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$, e una funzione liscia $f: M \rightarrow \mathbb{R}^k$.

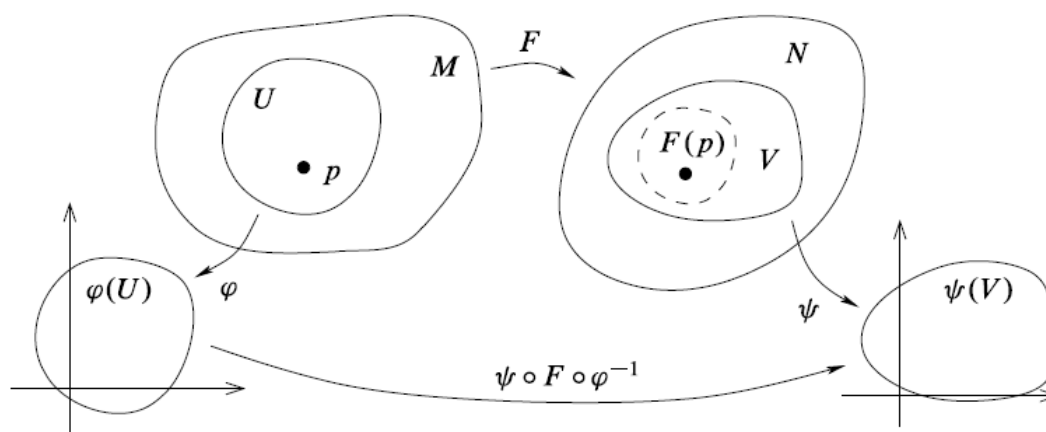


Figura 1.4: Disegno raffigurante le varietà lisce M e N tra le quali è definita la mappa liscia $F: M \rightarrow N$, insieme alle strutture che si sono usate nella Definizione 1.8.

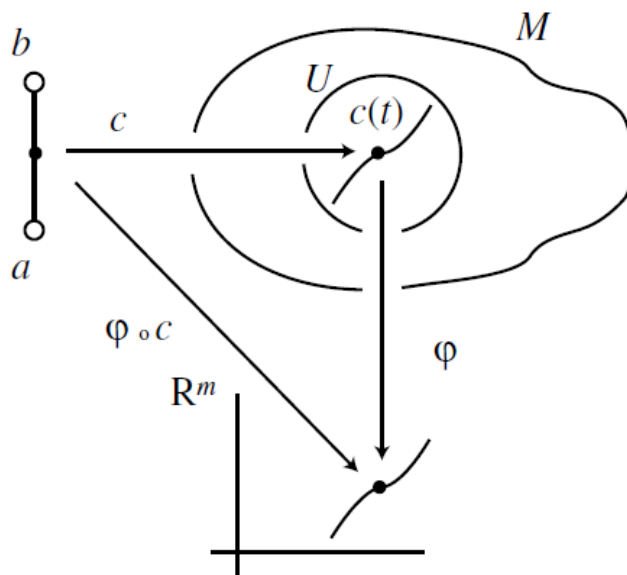


Figura 1.5: Disegno raffigurante la varietà liscia M di dimensione m , la curva $c : (a, b) \rightarrow M$ e la sua rappresentazione coordinata.

In Figura 1.4 è rappresentata una mappa liscia, usando la medesima notazione che si è utilizzata nella definizione.

Proposizione 1.2. Ogni mappa liscia è continua.

Definizione 1.9. Siano M e N varietà lisce. Un **diffeomorfismo** da M a N è una mappa liscia e biettiva $F : M \rightarrow N$ la cui inversa è liscia.

Se esiste un diffeomorfismo tra le varietà lisce M e N si dice che queste sono **diffeomorfe**.

Proposizione 1.3. Valgono le seguenti proprietà:

- i. ogni composizione di diffeomorfismi è un diffeomorfismo;
- ii. ogni diffeomorfismo è un omeomorfismo;
- iii. essere o non essere diffeomorfe è una relazione di equivalenza tra varietà lisce.

Teorema 1.1. Una varietà liscia non vuota di dimensione m non può essere diffeomorfa a una varietà liscia non vuota di dimensione n a meno che non sia $m = n$.

Definizione 1.10. Una **curva aperta** in una varietà liscia M è una mappa $c : (a, b) \rightarrow M$, dove $a, b \in \mathbb{R}$ siano tali che $a < 0 < b$ (eventualmente $a = -\infty$ e $b = +\infty$).

Una **curva chiusa** in una varietà liscia M è una mappa $c : S^1 \rightarrow M$.

In entrambi i casi, c è localmente una mappa da un intervallo aperto a M . Su una carta (U, φ) una curva $c(t)$ ha rappresentazione coordinata $x = \varphi \circ c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$, come si vede in Figura 1.5.

1.3 Vettori tangenti

Dopo aver definito le mappe, è possibile introdurre vettori, vettori duali e tensori.

1.3.1 Derivazioni, vettori tangenti e spazio tangente

Su una varietà, per definire i vettori si usa il concetto di vettore tangente a una curva nella varietà. Si analizzano prima i vettori tangenti nel caso di uno spazio euclideo $\mathbb{R}^n$.

Dato un punto $a \in \mathbb{R}^n$, si definisce lo spazio tangente geometrico a $\mathbb{R}^n$ in a come l'insieme $\mathbb{R}_a^n := \{a\} \times \mathbb{R}^n = \{(a, v) \text{ con } v \in \mathbb{R}^n\}$. Un vettore tangente geometrico a $\mathbb{R}^n$ è un elemento di $\mathbb{R}_a^n$ per qualche $a \in \mathbb{R}^n$. È possibile immaginare il vettore $v_a := (a, v)$ come un vettore v applicato al punto a . L'insieme $\mathbb{R}_a^n$ è uno spazio vettoriale con operazioni

$$v_a + w_a = (v + w)_a, \quad c(v_a) = (cv)_a. \quad (1.1)$$

Il problema di questa definizione è che non è immediatamente estendibile alle varietà, e perciò si dà un'altra caratterizzazione di vettore tangente che abbia senso sulle varietà.

Ogni vettore tangente geometrico $v_a \in \mathbb{R}_a^n$ produce una mappa $D_v|_a : C^\infty(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$ che restituisce la derivata direzionale nella direzione di v in a :

$$D_v|_a f = D_v f(a) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f(a + tv). \quad (1.2)$$

Quest'operazione è lineare su $\mathbb{R}$ e soddisfa la regola del prodotto

$$D_v|_a (fg) = f(a) D_v|_a g + g(a) D_v|_a f. \quad (1.3)$$

Tenendo a mente ciò, è possibile definire le derivazioni. Sia $a \in \mathbb{R}^n$, una mappa $w : C^\infty(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$ è detta derivazione in a se è lineare in $\mathbb{R}$ e soddisfa la regola del prodotto

$$w(fg) = f(a)wg + g(a)wf. \quad (1.4)$$

Sia $T_a\mathbb{R}^n$ l'insieme delle derivazioni di $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ in a . $T_a\mathbb{R}^n$ è uno spazio vettoriale con operazioni

$$(w_1 + w_2)f = w_1f + w_2f, \quad (cw)f = c(wf). \quad (1.5)$$

Valgono i seguenti risultati:

- se f è una funzione costante, allora $wf = 0$;
- se $f(a) = g(a) = 0$, allora $w(fg) = 0$;
- la mappa $D_v|_a : C^\infty(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$ definita da (1.2) è una derivazione in a ;
- la mappa $v_a \mapsto D_v|_a$ è un isomorfismo da $\mathbb{R}_a^n$ a $T_a\mathbb{R}^n$;
- le n derivazioni $\left. \frac{\partial}{\partial x^1} \right|_a, \dots, \left. \frac{\partial}{\partial x^n} \right|_a$, definite da $\left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_a f = \frac{\partial f}{\partial x^i}(a)$, formano una base di $T_a\mathbb{R}^n$.

È ora possibile definire le derivazioni e i vettori tangenti sulle varietà.

Definizione 1.11. Sia M una varietà liscia e sia $p \in M$. Una mappa lineare $v : C^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R}$ è detta **derivazione** in p se soddisfa

$$v(fg) = f(p)vg + g(p)vf \quad \forall f, g \in C^\infty(M). \quad (1.6)$$

L'insieme delle derivazioni di $C^\infty(M)$ in p T_pM è chiamato **spazio tangente** ad M in p . Un elemento di T_pM è detto **vettore tangente** a p .

T_pM è uno spazio vettoriale.

Per le derivazioni su una varietà valgono proprietà analoghe a quelle che valgono per le derivazioni in uno spazio euclideo.

Lemma 1.2. Siano M una varietà liscia, $p \in M$, $v \in T_pM$ e $f, g \in C^\infty(M)$. Si ha che:

- se f è una funzione costante, allora $vf = 0$;
- se $f(p) = g(p) = 0$, allora $v(fg) = 0$.

Per ora è stata data una definizione astratta di vettori tangenti. Si vuole adesso vedere come lavorare con essi in coordinate locali.

Sia M una varietà liscia e sia (U, φ) una carta liscia su M . Combinando le proprietà dei differenziali e il fatto che φ è un diffeomorfismo, si ottiene che $d\varphi_p : T_pM \rightarrow T_{\varphi(p)}\mathbb{R}^n$ è un isomorfismo. Come si è visto, le derivazioni $\partial/\partial x^1|_{\varphi(p)}, \dots, \partial/\partial x^n|_{\varphi(p)}$ formano una base per $T_{\varphi(p)}\mathbb{R}^n$. Di conseguenza le controimmagini di questi vettori attraverso l'isomorfismo $d\varphi_p$ formano una base per T_pM . In Figura 1.6 è presente un disegno che schematizza quanto detto. Per tali vettori si userà la notazione $\partial/\partial x^i|_p \in T_pM$, caratterizzata dalle seguenti espressioni:

$$\frac{\partial}{\partial x^i}\bigg|_p = (d\varphi_p)^{-1} \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\bigg|_{\varphi(p)} \right) = d(\varphi^{-1})_{\varphi(p)} \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\bigg|_{\varphi(p)} \right). \quad (1.7)$$

Analizzando questa definizione si vede che $\partial/\partial x^i|_p$ agisce su una funzione $f \in C^\infty(U)$ attraverso

$$\frac{\partial}{\partial x^i}\bigg|_p f = \frac{\partial}{\partial x^i}\bigg|_{\varphi(p)} (f \circ \varphi^{-1}) = \frac{\partial \hat{f}}{\partial x^i}(\hat{p}) \quad (1.8)$$

dove $\hat{f} = f \circ \varphi^{-1}$ è la rappresentazione coordinata di f e $\hat{p} = (p^1, \dots, p^n) = \varphi(p)$ è la rappresentazione coordinata di p . In altre parole $\partial/\partial x^i|_p$ è la derivazione che prende la i -esima derivata parziale della rappresentazione coordinata di f nella rappresentazione coordinata di p . I vettori $\partial/\partial x^i|_p$ sono detti vettori coordinati in p associati a un dato sistema di coordinate.

Essendo, come detto, $\partial/\partial x^1|_p, \dots, \partial/\partial x^n|_p$ una base per T_pM , un qualsiasi vettore $v \in T_pM$ può essere scritto univocamente come la combinazione lineare

$$v = v^i \frac{\partial}{\partial x^i}\bigg|_p. \quad (1.9)$$

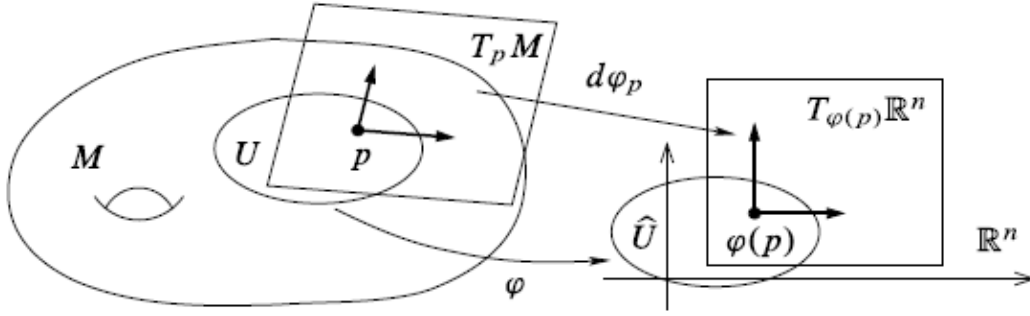


Figura 1.6: Disegno raffigurante il legame tra i vettori tangenti alla varietà liscia M in un punto p e le corrispondenti rappresentazioni coordinate in $\mathbb{R}^n$, usando le notazioni utilizzate nel paragrafo.

Da come è stato costruito, si vede che un vettore $v \in T_p M$ esiste a prescindere dalle coordinate in cui è espresso. Pertanto, siano (U_i, φ_i) e (U_j, φ_j) due carte tali che $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ e siano $p \in U_i \cap U_j$, $x = \varphi_i(p)$ e $y = \varphi_j(p)$. Allora è possibile scrivere v nei due modi

$$v = v^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \tilde{v}^\mu \frac{\partial}{\partial y^\mu} \quad (1.10)$$

da cui è possibile vedere la relazione tra v^μ e $\tilde{v}^\mu$

$$\tilde{v}^\mu = v^\nu \frac{\partial y^\mu}{\partial x^\nu}. \quad (1.11)$$

1.3.2 Fibrato tangente

Spesso è utile considerare l'insieme degli spazi tangenti a tutti i punti di una varietà.

Definizione 1.12. Sia M una varietà liscia. Si definisce il **fibrato tangente** di M , denotato con TM , come l'unione disgiunta degli spazi tangenti a tutti i punti di M :

$$TM := \bigcup_{p \in M} T_p M. \quad (1.12)$$

Per il momento si prende l'espressione "fibrato tangente" come un semplice nome dato a quanto appena definito. Nel seguito della trattazione si introducono alcune strutture geometriche chiamate "fibrati" e si mostra come il fibrato tangente ne costituisca un esempio.

Si denotano gli elementi di TM come (p, v) con $p \in M$ e $v \in T_p M$. Il fibrato tangente è naturalmente equipaggiato con una mappa di proiezione.

Definizione 1.13. Siano M una varietà liscia e TM il suo fibrato tangente. Si definisce **mappa di proiezione** $\pi : TM \rightarrow M$ la mappa che manda ogni elemento di $T_p M$ nel punto p a cui è tangente: $\pi(p, v) = p$.

Il fibrato tangente può essere visto come una semplice unione disgiunta di spazi vettoriali, ma è anche esso stesso una varietà.

Proposizione 1.4. Sia M una varietà liscia di dimensione n . Allora il suo fibrato tangente TM ha una topologia naturale e una struttura liscia che lo rendono una varietà liscia di dimensione $2n$. Inoltre, rispetto a questa struttura, la proiezione $\pi : TM \rightarrow M$ è liscia.

Dimostrazione. Come prima cosa si definisce la mappa che costituirà la carta liscia su TM . Data una qualsiasi carta liscia (U, φ) su M , si nota che $\pi^{-1}(U) \subset TM$ è l'insieme dei vettori tangenti a M a tutti i punti di U . Siano $(x^1, \dots, x^n)$ le funzioni coordinate di φ , e si definisca la mappa $\tilde{\varphi} : \pi^{-1}(U) \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ tale che

$$\tilde{\varphi} \left(v^i \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p \right) = (x^1(p), \dots, x^n(p), v^1, \dots, v^n). \quad (1.13)$$

Si veda Figura 1.7 per una visualizzazione grafica di quanto appena definito. L'insieme immagine di $\tilde{\varphi}$ è $\varphi(U) \times \mathbb{R}^n$, che è un sottoinsieme aperto di $\mathbb{R}^{2n}$. È una biiezione sulla propria immagine, dato che la sua inversa può essere scritta esplicitamente come

$$\tilde{\varphi}^{-1}(x^1, \dots, x^n, v^1, \dots, v^n) = v^i \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_{\varphi^{-1}(x)}. \quad (1.14)$$

Si supponga ora di avere due carte lisce (U, φ) e (V, ψ) su M , e siano $(\pi^{-1}(U), \tilde{\varphi})$ e $(\pi^{-1}(V), \tilde{\psi})$ le corrispondenti carte su TM . Gli insiemi $\tilde{\varphi}(\pi^{-1}(U) \cap \pi^{-1}(V)) = \varphi(U \cap V) \times \mathbb{R}^n$ e $\tilde{\psi}(\pi^{-1}(U) \cap \pi^{-1}(V)) = \psi(U \cap V) \times \mathbb{R}^n$ sono aperti di $\mathbb{R}^{2n}$, e la mappa di transizione $\tilde{\psi} \circ \tilde{\varphi}^{-1} : \varphi(U \cap V) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \psi(U \cap V) \times \mathbb{R}^n$ può essere scritta esplicitamente usando l'Equazione (1.11) come

$$\tilde{\psi} \circ \tilde{\varphi}^{-1} (x^1, \dots, x^n, v^1, \dots, v^n) = \left(\tilde{x}^1(x), \dots, \tilde{x}^n(x), \frac{\partial \tilde{x}^1}{\partial x^j}(x) v^j, \dots, \frac{\partial \tilde{x}^n}{\partial x^j}(x) v^j \right). \quad (1.15)$$

Essa è chiaramente liscia.

Scegliendo un ricoprimento numerabile $\{U_i\}$ di M tramite domini coordinati lisci, si ottiene un ricoprimento numerabile di TM grazie ai domini coordinati $\{\pi^{-1}(U_i)\}$ soddisfacenti le condizioni i., ii., iii. e iv. del Lemma 1.1. Per verificare la condizione v., si noti che due qualsiasi punti sulla fibra di π giacciono in una carta, mentre se (p, v) e (q, w) giacciono in fibre differenti, allora esistono due domini coordinati lisci disgiunti $U, V \subset M$ tali che $p \in U$ e $q \in V$, e allora $\pi^{-1}(U)$ e $\pi^{-1}(V)$ sono domini coordinati disgiunti contenenti, rispettivamente, (p, v) e (q, w) .

Per vedere che π è liscia, si noti che rispetto alla carta (U, φ) di M e $(\pi^{-1}(U), \tilde{\varphi})$ di TM la sua rappresentazione coordinata è $\pi(x, v) = x$. $\square$

Definizione 1.14. Le coordinate (x^i, v^i) date dall'Equazione (1.13) sono dette **coordinate naturali** su TM .

Proposizione 1.5. Sia M una varietà liscia di dimensione n che può essere ricoperta da una sola carta liscia. Allora il suo fibrato tangente TM è diffeomorfo a $M \times \mathbb{R}^n$.

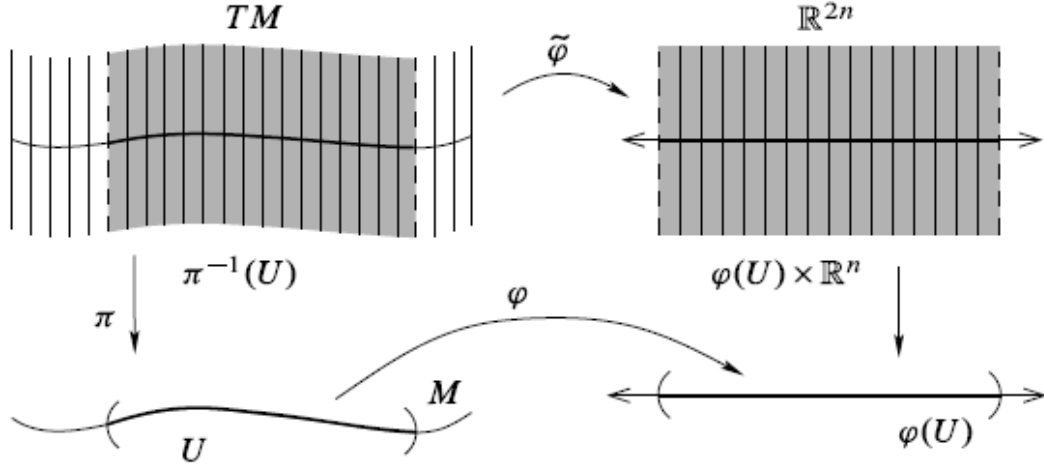


Figura 1.7: Disegno raffigurante come sono definite le coordinate di un fibrato tangente, in cui si usa la notazione introdotta nella dimostrazione della Proposizione 1.4.

1.3.3 1-forme e spazio cotangente

Dato che $T_p M$ è uno spazio vettoriale, esiste il suo spazio vettoriale duale.

Definizione 1.15. Siano M una varietà liscia e $p \in M$. Lo spazio duale dello spazio tangente $T_p M$ è chiamato **spazio cotangente** a p $T_p^* M$.

Un elemento $\omega : T_p M \rightarrow \mathbb{R}$ di $T_p^* M$ è chiamato **vettore duale**, **vettore cotangente** o **1-forma**.

Si introduce una 1-forma di particolare rilevanza.

Definizione 1.16. Siano M una varietà liscia, $p \in M$, $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione liscia e $V \in T_p M$ un vettore tangente. $df \in T_p^* M$, detto **differenziale** di f , è la 1-forma la cui azione su V è uguale all'azione di V su f :

$$\langle df, V \rangle := V[f] = V^\mu \frac{\partial f}{\partial x^\mu} \in \mathbb{R} \quad (1.16)$$

dove $\langle df, V \rangle$ indica l'azione di df su V .

Notando che df è esprimibile in termini delle coordinate $x = \varphi(p)$ come $df = (\partial f / \partial x^\mu) dx^\mu$, si giunge al risultato che $\{dx^\mu\}$ è una base di $T_p^* M$. Inoltre essa è una base duale, dato che

$$\langle dx^\mu, \frac{\partial}{\partial x^\nu} \rangle = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^\nu} = \delta_\nu^\mu. \quad (1.17)$$

È possibile scrivere una qualsiasi 1-forma ω come

$$\omega = \omega_\mu dx^\mu \quad (1.18)$$

dove ω_μ sono le componenti di ω .

Definizione 1.17. Siano M una varietà liscia, $p \in M$, $V = V^\mu \partial / \partial x^\mu \in T_p M$ un vettore e $\omega = \omega_\mu dx^\mu$ una 1-forma. Si definisce il **prodotto interno** $\langle \cdot, \cdot \rangle : T_p^* M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$ tramite

$$\langle \omega, V \rangle = \omega_\mu V^\nu \langle dx^\mu, \frac{\partial}{\partial x^\nu} \rangle = \omega_\mu V^\nu \delta_\nu^\mu = \omega_\mu V^\mu. \quad (1.19)$$

Essendo $\omega \in T_p^* M$ definito in maniera indipendente dal sistema di coordinate, date (U_i, φ_i) e (U_j, φ_j) due carte tali che $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, $p \in U_i \cap U_j$, $x = \varphi_i(p)$ e $y = \varphi_j(p)$, per il punto p si ha

$$\omega = \omega_\mu dx^\mu = \tilde{\omega}_\nu dy^\nu. \quad (1.20)$$

Da $dy^\nu = (\partial y^\nu / \partial x^\mu) dx^\mu$ si trova

$$\tilde{\omega}_\nu = \omega_\mu \frac{\partial x^\mu}{\partial y^\nu}. \quad (1.21)$$

Come si è fatto per gli spazi tangenti, si definisce l'unione degli spazi cotangenti a tutti i punti in M .

Definizione 1.18. Sia M una varietà liscia. Si definisce il **fibrato cotangente** di M $T^* M$ come l'unione disgiunta degli spazi cotangenti a tutti i punti di M :

$$T^* M := \bigcup_{p \in M} T_p^* M. \quad (1.22)$$

1.3.4 Tensori e campi vettoriali

Dopo aver definito i vettori tangenti e i vettori cotangenti, è possibile introdurre i tensori.

Definizione 1.19. Sia M una varietà liscia e sia $p \in M$. Un **tensore di tipo** (q, r) T_p è una funzione multilineare che mappa q elementi di $T_p^* M$ e r elementi di $T_p M$ in un numero reale:

$$T_p : \underbrace{T_p^* M \times \cdots \times T_p^* M}_{q \text{ volte}} \times \underbrace{T_p M \times \cdots \times T_p M}_{r \text{ volte}} \rightarrow \mathbb{R}. \quad (1.23)$$

$\mathfrak{T}_{r,p}^q(M)$ è l'insieme dei tensori di tipo (q, r) in p .

È possibile scrivere un tensore T in coordinate come

$$T = T^{\mu_1 \dots \mu_q}_{\nu_1 \dots \nu_r} \frac{\partial}{\partial x^{\mu_1}} \cdots \frac{\partial}{\partial x^{\mu_q}} dx^{\nu_1} \cdots dx^{\nu_r}. \quad (1.24)$$

Se un vettore è assegnato in maniera liscia ad ogni punto di M si parla di campo vettoriale.

Definizione 1.20. Sia M una varietà liscia. Un **campo vettoriale** è una mappa $V : M \rightarrow TM$ tale che $V(p) \in T_p M \forall p \in M$ e per cui per ogni funzione liscia f su M si ha che anche $V[f]$ è una funzione liscia su M .

$\mathfrak{X}(M)$ è l'insieme dei campi vettoriali su M .

Analogamente, è possibile definire un campo tensoriale.

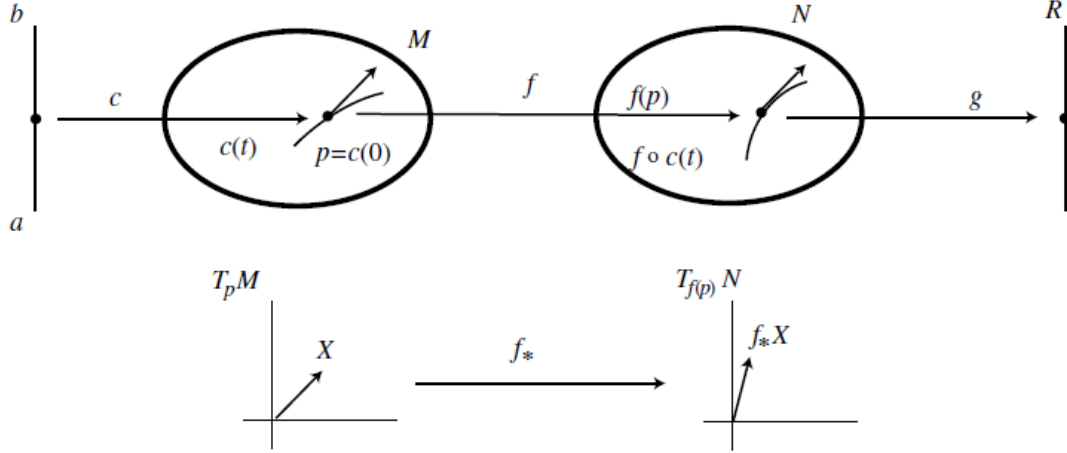


Figura 1.8: Disegno raffigurante le varietà lisce M e N tra le quali è definita la mappa liscia $f : M \rightarrow N$, che induce la mappa differenziale $f_* : T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$. In figura sono anche rappresentati la funzione liscia $g : N \rightarrow \mathbb{R}$, la curva c su M , il vettore $X \in T_p M$ e come sono trasformati dalle funzioni definite.

1.3.5 Pushforward e pullback

Definizione 1.21. Siano M e N varietà lisce, $p \in M$ e $f : M \rightarrow N$ una mappa liscia. La mappa $f_* : T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$ è detta **mappa differenziale** o **pushforward** se, per ogni funzione liscia $g : N \rightarrow \mathbb{R}$ e $\forall V \in T_p M$, si ha

$$(f_* V)[g] = V[g \circ f]. \quad (1.25)$$

In Figura 1.8 è presente un disegno che schematizza quanto appena detto.

Usando le carte (U, φ) su M e $(\tilde{U}, \psi)$ su N , l'Equazione (1.25) diventa

$$(f_* V)[g \circ \psi^{-1}(y)] = V[g \circ f \circ \varphi^{-1}(x)] \quad (1.26)$$

dove $x = \varphi(p)$ e $y = \psi(f(p))$.

Definizione 1.22. Siano M e N varietà lisce, $p \in M$ e $f : M \rightarrow N$ una mappa liscia. La mappa $f^* : T_{f(p)}^* N \rightarrow T_p^* M$ è detta **pullback** se, $\forall V \in T_p M$ e $\forall \omega \in T_{f(p)}^* N$, si ha

$$\langle f^* \omega, V \rangle = \langle \omega, f_* V \rangle. \quad (1.27)$$

Utilizzando la mappa differenziale si introducono le sottovarietà.

Definizione 1.23. Siano M e N varietà lisce tali che $\dim M \leq \dim N$ e sia $f : M \rightarrow N$ una mappa liscia. Allora:

- la mappa f è detta **immersione** di M in N se $f_* : T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$ è iniettiva;
- la mappa f è detta **immersione iniettiva** se è sia un'immersione, sia iniettiva, e in tal caso l'immagine $f(M)$ è detta **sottovarietà** di N .

1.4 Flussi e parentesi di Lie

In questa sezione vengono presentati le curve integrali, i flussi, i gruppi di trasformazioni a 1 parametro e le parentesi di Lie, strutture che permettono di svolgere operazioni sulle varietà di cui si farà ampio uso successivamente.

1.4.1 Curve integrali e flussi

Definizione 1.24. Sia X un campo vettoriale sulla varietà liscia M . Una **curva integrale** $x(t)$ di X è una curva in M tale per cui il vettore tangente a un certo $x(t)$ è $X|_x$.

Data una carta (U, φ) , questo significa

$$\frac{dx^\mu}{dt} = X^\mu(x(t)) \quad (1.28)$$

dove $x^\mu(t)$ è la μ -esima componente di $\varphi(x(t))$ e $X = X^\mu \partial / \partial x^\mu$. Trovare la curva integrale corrisponde a risolvere il sistema di equazioni differenziali ordinarie contenuto nell'Equazione (1.28). Il teorema di esistenza e unicità delle equazioni differenziali ordinarie garantisce che ognuna di queste equazioni è risolvibile con condizione iniziale $x_0^\mu := x^\mu(0)$, almeno localmente (e quindi solo per alcuni $t \in \mathbb{R}$). Nel seguito assumeremo che la curva integrale esista $\forall t \in \mathbb{R}$ (fatto vero nel caso in cui la varietà sia compatta).

Sia $\sigma(t, x_0)$ una curva integrale di X che passa per x_0 a $t = 0$ e siano $\sigma^\mu(t, x_0)$ le sue coordinate. L'Equazione (1.28) diventa

$$\frac{d}{dt} \sigma^\mu(t, x_0) = X^\mu(\sigma(t, x_0)) \quad (1.29)$$

con condizione iniziale

$$\sigma^\mu(0, x_0) = x_0^\mu. \quad (1.30)$$

Facendo variare x_0 in M , si ottiene una mappa $\sigma : \mathbb{R} \times M \rightarrow M$.

Definizione 1.25. Sia X un campo vettoriale sulla varietà liscia M . Il **flusso** di X è la mappa $\sigma : \mathbb{R} \times M \rightarrow M$ che associa a ogni $(t, x_0) \in \mathbb{R} \times M$ il punto $\sigma(t, x_0)$ della curva integrale di X passante per x_0 a $t = 0$.

Per costruzione il flusso soddisfa $\sigma(0, x) = x$ e

$$\sigma(t, \sigma(s, x_0)) = \sigma(t + s, x_0) \quad \forall s, t \in \mathbb{R}. \quad (1.31)$$

1.4.2 Gruppo di trasformazioni a 1 parametro

A $t \in \mathbb{R}$ fissato, il flusso $\sigma(t, x)$ è un diffeomorfismo da M a M , denotato con $\sigma_t : M \rightarrow M$. M con l'operazione σ_t è un gruppo abeliano, detto gruppo di trasformazioni a 1 parametro, grazie alle seguenti regole:

- i. $\sigma_t(\sigma_s(x)) = \sigma_{t+s}(x)$;
- ii. $\sigma_0 = \text{Id}$, con Id identità, che funge da elemento neutro;
- iii. $\sigma_{-t} = (\sigma_t)^{-1}$.

Sotto l'azione di σ_ε , con ε infinitesimo, si trova dalle Equazioni (1.29) e (1.30) che un punto x le cui coordinate sono x^μ è mappato in

$$\sigma_\varepsilon^\mu(x) = \sigma^\mu(\varepsilon, x) = x^\mu + \varepsilon X^\mu(x). \quad (1.32)$$

Il campo vettoriale X è chiamato generatore infinitesimo della trasformazione σ_t .

1.4.3 Parentesi di Lie

Definizione 1.26. Siano X e Y campi vettoriali sulla varietà liscia M . Si definiscono le **parentesi di Lie** $[X, Y]$ di modo che, data una qualsiasi funzione liscia $f : M \rightarrow \mathbb{R}$, si ha

$$[X, Y]f = X[Y[f]] - Y[X[f]]. \quad (1.33)$$

Proposizione 1.6. Siano $X = X^\mu \partial / \partial x^\mu$ e $Y = Y^\mu \partial / \partial x^\mu$ campi vettoriali sulla varietà liscia M . Allora $[X, Y]$ è un campo vettoriale dato da

$$[X, Y] = \left(X^\mu \frac{\partial Y^\nu}{\partial x^\mu} - Y^\mu \frac{\partial X^\nu}{\partial x^\mu} \right) \frac{\partial}{\partial x^\nu}. \quad (1.34)$$

1.5 Forme differenziali

Le forme differenziali sono dei tensori antisimmetrici di grande importanza, di cui si mostrano le proprietà più rilevanti.

1.5.1 Tensori simmetrici e antisimmetrici

Prima di introdurre le forme differenziali, si esaminano le proprietà di simmetria dei tensori.

Definizione 1.27. Siano M una varietà liscia e $\omega \in \mathfrak{T}_{r,p}^0(M)$. Si definisce l'**operazione di simmetria** P sul tensore ω tramite la relazione

$$P\omega(V_1, \dots, V_r) := \omega(V_{P(1)}, \dots, V_{P(r)}) \quad (1.35)$$

dove $V_i \in T_p M$ e P è un elemento del gruppo simmetrico di ordine r S_r .

Se si vuole trattare un tensore di tipo (q, r) generico, le operazioni di simmetria sono definite separatamente per gli indici q e r .

Definizione 1.28. Siano M una varietà liscia e $\omega \in \mathfrak{T}_{r,p}^0(M)$. Si definiscono l'**operatore di simmetrizzazione** $\mathcal{S}$ tale per cui

$$\mathcal{S}\omega = \frac{1}{r!} \sum_{P \in S_r} P\omega \quad (1.36)$$

e l'**operatore di antisimmetrizzazione** $\mathcal{A}$ tale per cui

$$\mathcal{A}\omega = \frac{1}{r!} \sum_{P \in S_r} \text{sign}(P) P\omega \quad (1.37)$$

dove $\text{sign}(P) = +1$ per permutazioni pari e -1 per permutazioni dispari.

Così costruiti, si ha che $\mathcal{S}\omega$ è totalmente simmetrico, ossia $P\mathcal{S}\omega = \mathcal{S}\omega \forall P \in S_r$, e che $\mathcal{A}\omega$ è totalmente antisimmetrico, ossia $P\mathcal{A}\omega = \text{sign}(P)\mathcal{A}\omega \forall P \in S_r$.

1.5.2 Forme differenziali e prodotto wedge

Definizione 1.29. Una **forma differenziale di ordine r** o **r -forma** è un tensore totalmente antisimmetrico di tipo $(0, r)$.

Data una varietà liscia M , $\Omega_p^r(M)$ è l'insieme delle r -forme in $p \in M$.

$\Omega_p^r(M)$ è uno spazio vettoriale.

Definizione 1.30. Il **prodotto wedge** $\wedge$ di r 1-forme $dx^{\mu_1}, \dots, dx^{\mu_r}$ è il prodotto tensoriale totalmente antisimmetrico

$$dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_r} := \sum_{P \in S_r} \text{sign}(P) dx^{\mu_{P(1)}} \otimes \dots \otimes dx^{\mu_{P(r)}}. \quad (1.38)$$

Esempio 1.3. Il prodotto wedge di due 1-forme dx^μ e dx^ν è

$$dx^\mu \wedge dx^\nu = dx^\mu \otimes dx^\nu - dx^\nu \otimes dx^\mu \quad (1.39)$$

mentre quello di tre 1-forme dx^μ , dx^ν e dx^λ è

$$\begin{aligned} dx^\mu \wedge dx^\nu \wedge dx^\lambda &= dx^\mu \otimes dx^\nu \otimes dx^\lambda + dx^\lambda \otimes dx^\mu \otimes dx^\nu \\ &\quad + dx^\nu \otimes dx^\lambda \otimes dx^\mu - dx^\nu \otimes dx^\mu \otimes dx^\lambda \\ &\quad - dx^\mu \otimes dx^\lambda \otimes dx^\nu - dx^\lambda \otimes dx^\nu \otimes dx^\mu. \end{aligned} \quad (1.40)$$

Il prodotto wedge verifica la seguente

Proposizione 1.7. Siano $dx^{\mu_1}, \dots, dx^{\mu_r}$ r 1-forme. Allora:

- i. $dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_r} = 0$ se qualcuno degli indici μ appare almeno due volte;
- ii. $dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_r} = \text{sign}(P) dx^{\mu_{P(1)}} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_{P(r)}}$;

iii. $dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_r}$ è lineare in ogni dx^μ .

L'insieme delle r -forme dello stesso tipo di quella nell'Equazione (1.38) costituisce una base di $\Omega_p^r(M)$. Un elemento $\omega \in \Omega_p^r(M)$ è scrivibile come

$$\omega = \frac{1}{r!} \omega_{\mu_1 \dots \mu_r} dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_r} \quad (1.41)$$

dove $\omega_{\mu_1 \dots \mu_r}$ sono presi totalmente antisimmetrici.

Esempio 1.4. Le componenti di un qualsiasi tensore di rango $(0, 2)$ $\omega_{\mu\nu}$ sono decomposte in una parte simmetrica $\sigma_{\mu\nu}$ e in una antisimmetrica $\alpha_{\mu\nu}$:

$$\sigma_{\mu\nu} := \frac{1}{2}(\omega_{\mu\nu} + \omega_{\nu\mu}) \quad (1.42)$$

$$\alpha_{\mu\nu} := \frac{1}{2}(\omega_{\mu\nu} - \omega_{\nu\mu}). \quad (1.43)$$

Se la dimensione di M è m , allora ci sono $\binom{m}{r}$ scelte dell'insieme $(\mu_1, \dots, \mu_r)$ tra $(1, \dots, m)$ nell'Equazione (1.38), e quindi la dimensione dello spazio vettoriale $\Omega_p^r(M)$ è

$$\binom{m}{r} = \frac{m!}{(m-r)!r!}. \quad (1.44)$$

Per convenzione, si definisce $\Omega_p^0(M) := \mathbb{R}$. Chiaramente $\Omega_p^1(M) = T_p^*M$. Se $r > m$, il prodotto wedge è identicamente nullo, dato che alcuni indici compariranno almeno due volte nella somma antisimmetrizzata.

Si definisce ora il prodotto esterno tra una q -forma e una r -forma.

Definizione 1.31. Siano M una varietà liscia di dimensione m e $p \in M$. Si definisce il **prodotto esterno** tra una q -forma e una r -forma $\wedge : \Omega_p^q(M) \times \Omega_p^r(M) \rightarrow \Omega_p^{q+r}(M)$ una mappa che, presi in ingresso $\omega \in \Omega_p^q(M)$ e $\xi \in \Omega_p^r(M)$ qualsiasi, restituisce la $(q+r)$ -forma $\omega \wedge \xi$ tale che

$$(\omega \wedge \xi)(V_1, \dots, V_{q+r}) = \frac{1}{q!r!} \sum_{P \in S_{q+r}} \text{sign}(P) \omega(V_{P(1)}, \dots, V_{P(q)}) \xi(V_{P(q+1)}, \dots, V_{P(q+r)}) \quad (1.45)$$

dove $V_i \in T_pM$.

Con questo prodotto, si definisce l'algebra

$$\Omega_p^*(M) := \Omega_p^0(M) \oplus \Omega_p^1(M) \oplus \dots \oplus \Omega_p^m(M). \quad (1.46)$$

$\Omega_p^*(M)$ è lo spazio di tutte le forme differenziali in p ed è chiuso per il prodotto esterno.

Analogamente a quanto fatto per vettori e tensori generici nella Sottosezione 1.3.4, è possibile assegnare in maniera liscia una r -forma a ogni punto $p \in M$. $\Omega^r(M)$ è lo spazio delle r -forme lisce su M .

1.5.3 Derivata esterna

Definizione 1.32. Sia M una varietà liscia. La **derivata esterna** d_r è una mappa $d_r : \Omega^r(M) \rightarrow \Omega^{r+1}(M)$ la cui azione su una r -forma

$$\omega = \frac{1}{r!} \omega_{\mu_1 \dots \mu_r} dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_r} \quad (1.47)$$

è

$$d_r \omega = \frac{1}{r!} \left(\frac{\partial}{\partial x^\nu} \omega_{\mu_1 \dots \mu_r} \right) dx^\nu \wedge dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_r} \quad (1.48)$$

Teorema 1.2. Sia M una varietà liscia. La derivata esterna di una derivata esterna è identicamente nulla:

$$d^2 := d_{r+1} d_r = 0. \quad (1.49)$$

Dimostrazione. Si prenda

$$\omega = \frac{1}{r!} \omega_{\mu_1 \dots \mu_r} dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_r} \in \Omega^r(M). \quad (1.50)$$

L'azione di d^2 su ω è

$$\begin{aligned} d^2 \omega &= d_{r+1} \left(\frac{1}{r!} \left(\frac{\partial}{\partial x^\nu} \omega_{\mu_1 \dots \mu_r} \right) dx^\nu \wedge dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_r} \right) \\ &= \frac{1}{r!} \frac{\partial^2 \omega_{\mu_1 \dots \mu_r}}{\partial x^\lambda \partial x^\nu} dx^\lambda \wedge dx^\nu \wedge dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_r}. \end{aligned} \quad (1.51)$$

Essa è identicamente nulla perché $\partial^2 \omega_{\mu_1 \dots \mu_r} / \partial x^\lambda \partial x^\nu$ è simmetrico rispetto a λ e ν mentre $dx^\lambda \wedge dx^\nu$ è antisimmetrico rispetto a λ e ν . $\square$

Capitolo 2

Gruppi di Lie e algebre di Lie

In questo capitolo sono definiti i gruppi di Lie e le algebre di Lie, e sono approfonditi numerosi risultati di notevole importanza per la loro comprensione e applicazione.

2.1 Gruppi di Lie

I gruppi di Lie sono delle varietà su cui sono definite le operazioni di gruppo.

Definizione 2.1. Un **gruppo di Lie** G è una varietà liscia dotata di una struttura di gruppo in modo tale che le operazioni del gruppo

- $\cdot : G \times G \rightarrow G$
 $g_1, g_2 \mapsto g_1 \cdot g_2$
- $^{-1} : G \rightarrow G$
 $g \mapsto g^{-1}$

siano lisce.

Esempio 2.1. Sia $S^1 := \{e^{i\theta} \text{ con } \theta \in \mathbb{R}\}$. Le operazioni del gruppo definite da $e^{i\theta}e^{i\phi} = e^{i(\theta+\phi)}$ e $(e^{i\theta})^{-1} = e^{-i\theta}$ sono lisce e pertanto formano un gruppo di Lie, che chiamiamo $U(1)$.

Esempio 2.2. Esempi di particolare interesse, soprattutto in fisica, sono il gruppo lineare generale $GL(n, \mathbb{R}) := \{M \in M_n(\mathbb{R}) \mid \det M \neq 0\}$, dove $M_n(\mathbb{R})$ indica l'insieme delle matrici quadrate a entrate reali, e alcuni suoi sottogruppi. In $GL(n, \mathbb{R})$ il prodotto è semplicemente la moltiplicazione riga per colonna tra matrici e l'inverso è dato dalla matrice inversa. Le coordinate di $GL(n, \mathbb{R})$ sono date dagli n^2 elementi della matrice, ed è possibile dimostrare che le operazioni del gruppo sono lisce. Si ha quindi che $GL(n, \mathbb{R})$ è un gruppo di Lie di dimensione n^2 .

Si introducono i sottogruppi di Lie e si dà un utile teorema su di essi.

Definizione 2.2. Sia G un gruppo di Lie. Un sottogruppo H di G che sia anche una sottovarietà di G , e per il quale le operazioni di gruppo siano lisce, è detto **sottogruppo di Lie** di G .

Teorema 2.1. Ogni sottogruppo chiuso H di un gruppo di Lie G è un sottogruppo di Lie.

Esempio 2.3. Alcuni importanti sottogruppi di $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ sono:

- il gruppo ortogonale $\mathrm{O}(n) := \{M \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) | MM^T = M^T M = I_n\}$;
- il gruppo lineare speciale $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R}) := \{M \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) | \det M = 1\}$;
- il gruppo ortogonale speciale $\mathrm{SO}(n) := \mathrm{O}(n) \cap \mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$.

Essi sono chiusi, pertanto per il Teorema 2.1 sono sottogruppi di Lie.

Esempio 2.4. Analogamente a quanto fatto nel caso reale, si definisce il gruppo lineare generale $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C}) := \{M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C}) | \det M \neq 0\}$, dove $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ indica l'insieme delle matrici quadrate a entrate complesse. Come $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$, anche $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ è un gruppo di Lie. Si definiscono poi:

- il gruppo unitario $\mathrm{U}(n) := \{M \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C}) | MM^\dagger = M^\dagger M = \mathbf{1}\}$;
- il gruppo lineare speciale $\mathrm{SL}(n, \mathbb{C}) := \{M \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C}) | \det M = 1\}$;
- il gruppo unitario speciale $\mathrm{SU}(n) := \mathrm{U}(n) \cap \mathrm{SL}(n, \mathbb{C})$.

Essi sono sottogruppi chiusi del gruppo di Lie $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$, pertanto per il Teorema 2.1 sono sottogruppi di Lie.

Il concetto di sottogruppo permette anche di introdurre una relazione di equivalenza tra gli elementi del gruppo di Lie.

Definizione 2.3. Siano G un gruppo di Lie, H un suo sottogruppo di Lie e $g_1, g_2 \in G$. Si definisce la **relazione di equivalenza** $g_1 \sim g_2$ se esiste $h \in H$ tale che $g_2 = g_1 \cdot h$.

Pertanto una classe di equivalenza è del tipo $[g] = \{g \cdot h \text{ con } h \in H\}$. Se H è un sottogruppo di Lie chiuso di G , lo spazio quoziente G/H è una varietà con dimensione $\dim(G/H) = \dim G - \dim H$, ed è un gruppo di Lie se H è un sottogruppo normale di G (ossia se $\forall g \in G$ e $\forall h \in H$ si ha $g \cdot h \cdot g^{-1} \in H$).

2.2 Algebre di Lie

Sfruttando l'operazione del gruppo di Lie e fissando un suo elemento, è possibile definire due importanti funzioni dal gruppo in se stesso.

Definizione 2.4. Siano a e g elementi del gruppo di Lie G . Si definiscono **traslazione destra** $R_a : G \rightarrow G$ e **traslazione sinistra** $L_a : G \rightarrow G$ di g tramite a due funzioni tali che

$$R_a g = ga \tag{2.1}$$

e

$$L_a g = ag \tag{2.2}$$

Per definizione, R_a e L_a sono diffeomorfismi da G a G . Queste due trasformazioni producono teorie equivalenti, perciò ci si concentrerà sullo studio della traslazione sinistra. Un'analisi equivalente può essere fatta per la traslazione destra.

Definizione 2.5. Sia X un campo vettoriale su un gruppo di Lie G . X è un **campo vettoriale invariante a sinistra** se $(L_a)_*X|_g = X|_{ag} \forall a, g \in G$.

Si definisce $\mathfrak{g}$ l'insieme dei campi vettoriali invarianti a sinistra su G .

Esiste una corrispondenza tra campi vettoriali invarianti a sinistra e vettori tangenti all'elemento neutro, come mostra la seguente

Proposizione 2.1. Sia G un gruppo di Lie, il cui elemento neutro è denotato con e . Un vettore $V \in T_e G$ definisce un unico campo vettoriale invariante a sinistra X_V su G tramite $X_V|_g = (L_g)_*V$, con $g \in G$. Viceversa, un campo vettoriale invariante a sinistra X definisce un unico vettore $V = X_e \in T_e G$. Inoltre la mappa $T_e G \rightarrow \mathfrak{g}$ definita da $V \mapsto X_V$ è un isomorfismo.

Proposizione 2.2. $\mathfrak{g}$ è chiuso per le parentesi di Lie.

Dimostrazione. Siano $g \in G$ e $ag = L_a g \in G$. Dati $X, Y \in \mathfrak{g}$ si ha

$$(L_a)_*[X, Y]|_g = [(L_a)_*X|_g, (L_a)_*Y|_g] = [X, Y]_{ag} \quad (2.3)$$

e pertanto $[X, Y] \in \mathfrak{g}$. □

Si può ora introdurre il concetto di algebra di Lie.

Definizione 2.6. Sia G un gruppo di Lie. L'insieme dei campi vettoriali invarianti a sinistra $\mathfrak{g}$ con le parentesi di Lie $[\cdot, \cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ è detto **algebra di Lie** di G .

Esempio 2.5. Siano $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ l'algebra di Lie di $\text{GL}(n, \mathbb{R})$ e $c : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \text{GL}(n, \mathbb{R})$ una curva tale che $c(0) = I_n$. La curva è approssimata da $c(s) = I_n + sA + O(s^2)$ attorno a $s = 0$, con $A \in M_n(\mathbb{R})$. Per s sufficientemente piccolo $\det c(s)$ non si annulla, come dev'essere dato che $c(s) \in \text{GL}(n, \mathbb{R})$. Il vettore tangente a $c(s)$ in I_n è $c'(s)|_{s=0} = A$. Questo mostra che $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ è l'insieme delle matrici $n \times n$. Si ha $\dim \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) = n^2 = \dim \text{GL}(n, \mathbb{R})$.

Esempio 2.6. Cerchiamo l'algebra di Lie $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$ di $\text{SL}(n, \mathbb{R})$. Come fatto nell'esempio precedente, approssimiamo una curva attorno a I_n con $c(s) = I_n + sA + O(s^2)$. Il vettore tangente a $c(s)$ in I_n è $c'(s)|_{s=0} = A$. Essendo la curva $c(s)$ in $\text{SL}(n, \mathbb{R})$, essa deve soddisfare $1 = \det c(s) = 1 + \text{str}A + O(s^2)$, ossia $\text{tr}A = 0$. Pertanto $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$ è l'insieme delle matrici $n \times n$ a traccia nulla e $\dim \mathfrak{sl}(n, \mathbb{R}) = n^2 - 1$.

Esempio 2.7. Cerchiamo ora l'algebra di Lie $\mathfrak{so}(n)$ di $\text{SO}(n)$. Sia $c(s) = I_n + sA + O(s^2)$ una curva in $\text{SO}(n)$ approssimata attorno a I_n . Essendo una curva in $\text{SO}(n)$, essa soddisfa $c(s)^T c(s) = I_n$. Differenziando questa uguaglianza si ottiene $c'(s)^T c(s) + c(s)^T c'(s) = 0$. In $s = 0$ questo diventa $A^T + A = 0$. Pertanto $\mathfrak{so}(n)$ è l'insieme delle matrici antisimmetriche. Essendo interessati solo ad un intorno dell'elemento neutro, l'algebra di Lie di $\text{O}(n)$ è la stessa di $\text{SO}(n)$: $\mathfrak{o}(n) = \mathfrak{so}(n)$. Si ottiene anche che $\dim \mathfrak{o}(n) = \dim \mathfrak{so}(n) = n(n-1)/2$.

2.3 Sottogruppo a 1 parametro

Come visto nella Sottosezione 1.4.1, un campo vettoriale $X \in \mathfrak{X}(M)$ genera un flusso in M . Si è ora interessati al flusso generato da un campo vettoriale invariante a sinistra.

Definizione 2.7. Una curva $\phi : \mathbb{R} \rightarrow G$ è detta **sottogruppo a 1 parametro** del gruppo di Lie G se soddisfa la condizione

$$\phi(s)\phi(t) = \phi(s+t). \quad (2.4)$$

Proposizione 2.3. Valgono le seguenti proprietà:

- $\phi(0) = e$;
- $\phi^{-1}(t) = \phi(-t)$;
- $\phi(s)\phi(t) = \phi(t)\phi(s)$ (ossia ϕ è sempre abeliano, anche se G potrebbe non esserlo).

Proposizione 2.4. Dato un sottogruppo a 1 parametro $\phi : \mathbb{R} \rightarrow G$, esiste un campo vettoriale X tale che $d\phi^\mu(t)/dt = X^\mu(\phi(t))$; inoltre esso è invariante a sinistra. Viceversa, dato un campo vettoriale invariante a sinistra X , esistono un gruppo a 1 parametro di trasformazioni $\sigma(t, g)$ tale che $d\sigma(t, g)/dt = X(\sigma(t, g))$ e $\sigma(0, g) = g$ e un sottogruppo a 1 parametro di trasformazioni $\phi : \mathbb{R} \rightarrow G$ definito da $\phi(t) := \sigma(t, e)$.

Si è visto che un sottogruppo a 1 parametro di G e un campo vettoriale invariante a sinistra sono in corrispondenza biunivoca. Tale corrispondenza diventa esplicita definendo la mappa esponenziale come segue.

Definizione 2.8. Siano G un gruppo di Lie e $V \in T_e G$. La **mappa esponenziale** $\exp : T_e G \rightarrow G$ è definita da

$$\exp V := \phi_V(1) \quad (2.5)$$

dove ϕ_V è un sottogruppo a 1 parametro di G generato dal campo vettoriale invariante a sinistra $X_V|_g = (L_g)_* V$.

Proposizione 2.5. Siano $V \in T_e G$ e $t \in \mathbb{R}$. Allora $\exp(tV) = \phi_V(t)$, dove $\phi_V(t)$ è un sottogruppo a 1 parametro di G generato dal campo vettoriale invariante a sinistra $X_V|_g = (L_g)_* V$.

Sia $\{V_1, \dots, V_n\}$ una base di $T_e G$, dove $n = \dim G$. Questa base definisce l'insieme di vettori invarianti a sinistra linearmente indipendenti $\{X_1, \dots, X_n\}$ in corrispondenza di ogni punto $g \in G$ tramite la relazione $X_\mu|_g = (L_g)_* V_\mu$. Dato che $[X_\mu, X_\nu]|_g$ è ancora un elemento di $\mathfrak{g}$ in g , può essere espanso in termini di $\{X_\mu\}$ come

$$[X_\mu, X_\nu] = c_{\mu\nu}^\lambda X_\lambda \quad (2.6)$$

dove $c_{\mu\nu}^\lambda$ sono dette costanti di struttura di G .

2.4 Rappresentazioni di gruppi di Lie e algebre di Lie

Si definisce una specifica mappa tra gruppi di Lie, ed una tra algebre di Lie.

Definizione 2.9. Sia G_1 un gruppo di Lie con operazione $\cdot$ e sia G_2 un gruppo di Lie con operazione $*$. Un **omomorfismo di gruppi di Lie** è una mappa liscia $F : G_1 \rightarrow G_2$ tale che, $\forall a, b \in G_1$,

$$F(a \cdot b) = F(a) * F(b). \quad (2.7)$$

Siano $\mathfrak{g}$ e $\mathfrak{h}$ algebre di Lie. Un **omomorfismo di algebre di Lie** è una mappa lineare $L : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$ tale che, $\forall c, d \in \mathfrak{g}$,

$$L([c, d]) = [L(c), L(d)]. \quad (2.8)$$

Si introducono ora i concetti di rappresentazione di un gruppo di Lie e di rappresentazione di un'algebra di Lie.

Definizione 2.10. Sia V uno spazio vettoriale. Si definisce il gruppo generale lineare di V $GL(V) := \{T : V \rightarrow V | T \text{ è lineare e invertibile}\}$.

Se V è uno spazio vettoriale reale o complesso di dimensione finita, $GL(V)$ è un gruppo di Lie.

Definizione 2.11. Siano V uno spazio vettoriale reale o complesso di dimensione finita e G un gruppo di Lie. Una **rappresentazione** di G su V è un omomorfismo di gruppi di Lie $\rho : G \rightarrow GL(V)$.

Siano $\mathfrak{g}$ l'algebra di Lie di G e $\mathfrak{gl}(V)$ l'algebra di Lie di $GL(V)$. Una **rappresentazione** di $\mathfrak{g}$ su V è un omomorfismo di algebre di Lie $\theta : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$.

2.5 Azione di un gruppo di Lie

Un gruppo di Lie appare spesso, soprattutto in fisica, come un gruppo di trasformazioni che agisce su una varietà. In particolare, esso agisce su questa tramite un'azione.

Definizione 2.12. Siano G un gruppo di Lie e M una varietà. L'**azione** di G su M è una mappa liscia $\sigma : G \times M \rightarrow M$ tale per cui $\forall p \in M$ valgono:

- i. $\sigma(e, p) = p$;
- ii. $\sigma(g_1, \sigma(g_2, p)) = \sigma(g_1 g_2, p)$.

A partire dal prossimo capitolo, al posto di $\sigma(g, p) \in M$ si userà la notazione $gp \in M$. Inoltre, fissata un'azione, ad ogni $g \in G$ corrisponde una mappa liscia $M \rightarrow M$, $p \mapsto \sigma(g, p)$, e si parlerà in maniera interscambiabile di g e di tale funzione associata.

Esempio 2.8. Un flusso è un'azione di $\mathbb{R}$ su una varietà M .

Esempio 2.9. Un flusso periodico $\sigma(t, x)$ con periodo T può essere visto come un'azione di $U(1)$ su M , infatti è possibile costruire una nuova azione $\tilde{\sigma}(\exp(2\pi it/T), x) := \sigma(t, x)$ il cui gruppo è $U(1)$.

Esempio 2.10. Si definisce l'azione del gruppo $GL(n, \mathbb{R})$ sulla varietà $\mathbb{R}^n$ tramite l'usuale azione di una matrice su un vettore, cioè, dati $D \in GL(n, \mathbb{R})$ e $x \in \mathbb{R}^n$,

$$\sigma(D, x) = D \cdot x. \quad (2.9)$$

Si classificano le azioni in base ad alcune proprietà di cui possono godere o meno.

Definizione 2.13. Sia G un gruppo di Lie che agisce sulla varietà M tramite l'azione $\sigma : G \times M \rightarrow M$. L'azione σ è detta:

- **transitiva** se $\forall p_1, p_2 \in M$ esiste un elemento $g \in G$ tale che $\sigma(g, p_1) = p_2$;
- **libera** se $\forall g \in G, g \neq e$, non esiste $p \in M$ tale che $\sigma(g, p) = p$;
- **effettiva** se $e \in G$ è l'unico elemento di G tale per cui $\sigma(e, p) = p \forall p \in M$.

Dato un punto $p \in M$, l'azione di G su di esso lo trasporta in vari altri punti di M .

Definizione 2.14. Sia G un gruppo di Lie che agisce sulla varietà M tramite l'azione σ e sia $p \in M$. $Gp = \{\sigma(g, p) \text{ con } g \in G\} \subset M$ è detta **orbita** di p sotto l'azione di σ .

Dato un punto $p \in M$, possono esistere alcuni elementi di G la cui azione su p restituisce p stesso.

Definizione 2.15. Sia G un gruppo di Lie che agisce sulla varietà M tramite l'azione σ e sia $p \in M$. $H(p) = \{g \in G | \sigma(g, p) = p\} \subset G$ è detto **gruppo di isotropia** di p o **stabilizzatore** di p .

Proposizione 2.6. $H(p)$ è un sottogruppo di G .

Dimostrazione. Se $g_1, g_2 \in H(p)$, allora per definizione di azione

$$\sigma(g_1 g_2, p) = \sigma(g_1, \sigma(g_2, p)) = \sigma(g_1, p) = p \quad (2.10)$$

$$\implies g_1 g_2 \in H(p).$$

Per definizione di azione $\sigma(e, p) = p \implies e \in H(p)$.

Se $g \in H(p)$, allora

$$p = \sigma(e, p) = \sigma(g^{-1} g, p) = \sigma(g^{-1}, \sigma(g, p)) = \sigma(g^{-1}, p) \quad (2.11)$$

$$\implies g^{-1} \in H(p). \quad \square$$

Teorema 2.2. Sia G un gruppo di Lie agente sulla varietà M . Allora $\forall p \in M$ il gruppo di isotropia $H(p)$ è un sottogruppo di Lie.

Dimostrazione. Per $p \in M$ fissato, sia σ l'azione di G su M e sia $\varphi_p : G \rightarrow M$ tale che $\varphi_p(g) := \sigma(g, p)$; per definizione σ è liscia $\implies \sigma$ è continua $\implies \varphi_p$ è continua; $H(p)$ è la controimmagine φ_p^{-1} del punto p , e pertanto per la continuità di φ_p è un insieme chiuso. Come visto nella precedente proposizione, $H(p)$ è un sottogruppo. Per il Teorema 2.1 segue che $H(p)$ è un sottogruppo di Lie. $\square$

Un gruppo di Lie induce un campo vettoriale sulla varietà su cui agisce.

Definizione 2.16. Sia G un gruppo di Lie che agisce sulla varietà M da sinistra e sia $V \in T_e G$. Definendo il sottogruppo a 1 parametro $\gamma(t) = \exp(tV)$ che agisce su $x \in M$ e genera la curva $x(t) = \exp(tV)x$, è possibile definire il **campo vettoriale indotto** $V^\#$ tale che

$$V^\#|_x = \left. \frac{d}{dt} \exp(tV)x \right|_{t=0} \in T_x M. \quad (2.12)$$

Si è così ottenuta la mappa $\# : T_e G \rightarrow \mathfrak{X}(M)$ definita da $V \mapsto V^\#$.

Si guarda ora come un gruppo di Lie agisce su se stesso.

Definizione 2.17. Sia G un gruppo di Lie e sia σ l'azione di G su se stesso. Preso $a \in G$, l'omomorfismo $\text{ad}_a : G \rightarrow G$, $g \mapsto \sigma(a, \sigma(g, a^{-1})) = a g a^{-1}$ è detto **rappresentazione aggiunta** di G .

Dato che $\text{ad}_e = e$, è possibile restringere la mappa indotta $(\text{ad}_a)_* : T_g G \rightarrow T_{\text{ad}_a g} G$ a $g = e$, ottenendo $\text{Ad}_a := (\text{ad}_a)_*|_{T_e G} : T_e G \rightarrow T_e G$. Grazie alla Proposizione 2.1 è possibile identificare $T_e G$ e $\mathfrak{g}$, e quindi ottenere la mappa $\text{Ad} : G \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$.

Definizione 2.18. La mappa $\text{Ad} : G \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ appena costruita è detta **mappa aggiunta** di G .

Esempio 2.11. Se G è un gruppo di matrici, la rappresentazione aggiunta diventa una semplice operazione tra matrici. Siano $g \in G$, $X_V \in \mathfrak{g}$ e $\sigma_V(t) = \exp(tV)$ un sottogruppo a 1 parametro generato da $V \in T_e G$. Allora ad_g agendo su $\sigma_V(t)$ produce $g \exp(tV) g^{-1} = \exp(tgVg^{-1})$. Segue che

$$\text{Ad}_g V = \left. \frac{d}{dt} (\text{ad}_g \exp(tV)) \right|_{t=0} = \left. \frac{d}{dt} \exp(tgVg^{-1}) \right|_{t=0} = gVg^{-1} \quad (2.13)$$

e quindi $\text{Ad}_g : V \mapsto gVg^{-1}$.

Capitolo 3

Fibrati

Come si è visto nel capitolo 1, una varietà è uno spazio topologico che è localmente euclideo. Introducendo una carta, si dà una struttura euclidea locale alla varietà, permettendo di usare gli strumenti dell'analisi matematica in più variabili. Un fibrato è uno spazio topologico che può essere visto come il prodotto diretto di due varietà. Numerose teorie in fisica, prime fra tutte le teorie di gauge e la relatività generale, sono descritte a partire dai fibrati.

3.1 Fibrati

Nella Sottosezione 1.3.2 si è già incontrato il fibrato tangente. Esso è un esempio di una struttura più generale, chiamata fibrato.

3.1.1 Definizioni

Definizione 3.1. Un **fibrato** (E, π, M, F, G) , denotato anche con $E \xrightarrow{\pi} M$, è l'insieme dei seguenti elementi:

- una varietà liscia E , detta **spazio totale**;
- una varietà liscia M , detta **spazio base**;
- una varietà liscia F , detta **fibra**;
- una mappa suriettiva $\pi : E \rightarrow M$, detta **proiezione**, la cui controimmagine $\pi^{-1}(p) = F_p$, per ogni punto $p \in M$, è chiamata **fibra** in p ;
- un gruppo di Lie G , detto **gruppo di struttura**, che agisce su F da sinistra;
- un insieme di ricoprimenti aperti $\{U_i\}$ di M e un insieme di diffeomorfismi $\{\phi_i\}$, con $\phi_i : U_i \times F \rightarrow \pi^{-1}(U_i)$ tale che $\pi \circ \phi_i(p, f) = p$

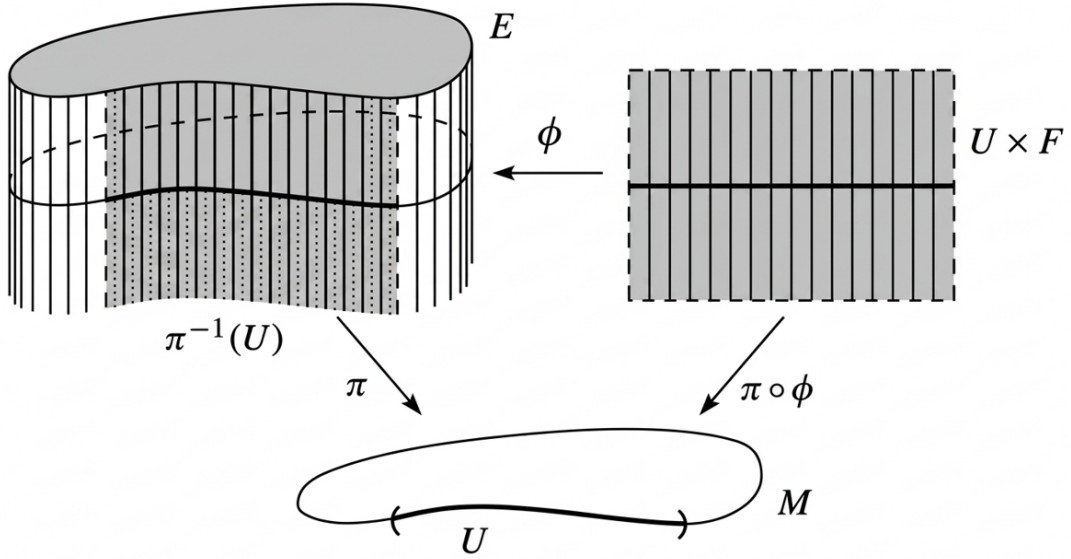


Figura 3.1: Disegno raffigurante un fibrato, in particolare lo spazio totale E , lo spazio base M , la proiezione π , $U \subset M$, $\pi^{-1}(U) \subset E$, la trivializzazione locale ϕ , lo spazio $U \times F$ e la funzione $\pi \circ \phi$.

per i quali, definendo a p fissato il diffeomorfismo $\phi_{i,p}(f) := \phi_i(p, f)$, $\phi_{i,p} : F \rightarrow F_p$, si richiede su $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ che

$$t_{ij}(p) := \phi_{i,p}^{-1} \circ \phi_{j,p} : F \rightarrow F \quad (3.1)$$

sia un elemento di G . Quindi ϕ_i e ϕ_j sono legate da una mappa liscia $t_{ij} : U_i \cap U_j \rightarrow G$, dato che

$$\phi_j(p, f) = \phi_i(p, t_{ij}(p)f). \quad (3.2)$$

Ogni mappa ϕ_i è detta **trivializzazione locale**, dato che ϕ_i^{-1} mappa $\pi^{-1}(U_i)$ nel prodotto diretto $U_i \times F$.

Le mappe t_{ij} sono dette **funzioni di transizione**. Si richiede che esse soddisfino le seguenti condizioni di consistenza:

- $t_{ii}(p) = \text{Id} \ \forall p \in U_i, \forall U_i$;
- $t_{ij}(p) = t_{ji}^{-1}(p) \ \forall p \in U_i \cap U_j, \forall U_i, U_j$;
- $t_{ij}(p) \cdot t_{jk}(p) = t_{ik}(p) \ \forall p \in U_i \cap U_j \cap U_k, \forall U_i, U_j, U_k$.

In Figura 3.1 è presente un disegno che mostra un fibrato e una sua trivializzazione locale.

Sia U_i una carta sullo spazio base M . $\pi^{-1}(U_i)$ è un prodotto diretto diffeomorfo a $U_i \times F$, con $\phi_i^{-1} : \pi^{-1}(U_i) \rightarrow U_i \times F$ come diffeomorfismo. Se $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, si hanno due mappe ϕ_i e ϕ_j su $U_i \cap U_j$. Sia $u \in E$ tale che $\pi(u) = p \in U_i \cap U_j$. Ad esso sono associati due elementi di F , f_i e f_j , il primo tramite ϕ_i^{-1} e il secondo tramite ϕ_j^{-1} :

$$\phi_i^{-1}(u) = (p, f_i), \quad \phi_j^{-1}(u) = (p, f_j) \quad (3.3)$$

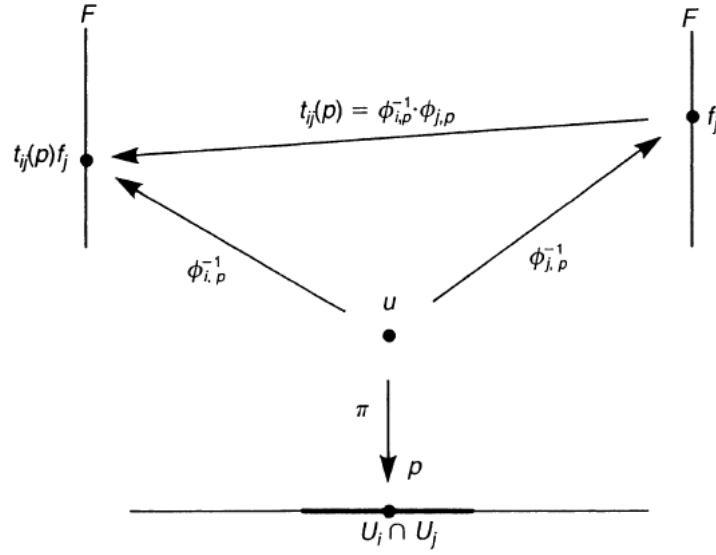


Figura 3.2: Disegno che mostra come, nell'intersezione $U_i \cap U_j$, al punto $u \in \pi^{-1}(p)$, con $p \in U_i \cap U_j$, sono assegnati due elementi f_i e f_j collegati dalla relazione $f_i = t_{ij}(p)f_j$.

come mostrato in Figura 3.2. Esiste una mappa $t_{ij} : U_i \cap U_j \rightarrow G$ che collega f_i e f_j tramite la relazione $f_i = t_{ij}(p)f_j$, che è analoga a quella in Equazione (3.2).

Definizione 3.2. Un fibrato in cui è possibile prendere tutte le funzioni di transizione uguali all'identità è detto **fibrato triviale**.

In altre parole, un fibrato triviale è il prodotto diretto $M \times F$.

Siano $\{U_i\}$ un ricoprimento di M e $\{\phi_i\}$ e $\{\tilde{\phi}_i\}$ due insiemi di trivializzazioni locali generanti lo stesso fibrato. Le corrispondenti funzioni di transizione sono

$$t_{ij}(p) = \phi_{i,p}^{-1} \circ \phi_{j,p}, \quad \tilde{t}_{ij}(p) = \tilde{\phi}_{i,p}^{-1} \circ \tilde{\phi}_{j,p}. \quad (3.4)$$

$\forall p \in M$ è possibile definire una mappa $g_i(p) : F \rightarrow F$ tale che

$$g_i(p) := \phi_{i,p}^{-1} \circ \tilde{\phi}_{i,p} \quad (3.5)$$

e, definendo $\{\phi_i\}$ e $\{\tilde{\phi}_i\}$ lo stesso fibrato, imporre che appartenga a G . Si ha quindi che

$$\tilde{t}_{ij}(p) = g_i^{-1}(p) \circ t_{ij}(p) \circ g_j(p). \quad (3.6)$$

Definizione 3.3. Sia (E, π, M, F, G) un fibrato. Una **sezione globale** $s : M \rightarrow E$ è una mappa liscia che soddisfa $\pi \circ s = \text{Id}_M$. $\Gamma(M, F)$ è l'insieme di tutte le sezioni globali. Dato $U \subset M$, una **sezione locale** $s : U \rightarrow E$ è una mappa liscia che soddisfa $\pi \circ s = \text{Id}_U$. $\Gamma(U, F)$ è l'insieme di tutte le sezioni locali su U .

In Figura 3.3 è visibile una sezione locale $s : U \rightarrow E$.

Esempio 3.1. $\Gamma(M, TM)$ è l'insieme dei campi vettoriali $\mathfrak{X}(M)$ su M .

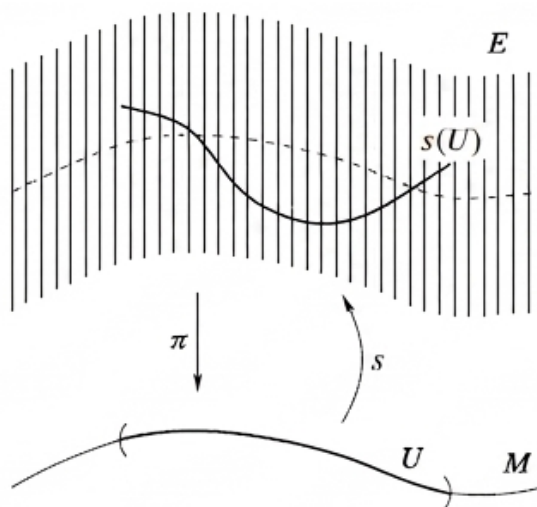


Figura 3.3: Il fibrato $E \xrightarrow{\pi} M$, il sottoinsieme $U \subset M$, la sezione locale $s : U \rightarrow E$ e la sua immagine $s(U)$.

Non tutti i fibrati ammettono sezioni globali.

Esempio 3.2. Sia $(E, \pi, S^1, [-1, 1], G)$ un fibrato. Siano $U_1 = (0, 2\pi)$ e $U_2 = (-\pi, \pi)$ ricoprimenti aperti di S^1 e siano $A = (0, \pi)$ e $B = (\pi, 2\pi)$ l'intersezione $U_1 \cap U_2$, come mostrato in Figura 3.4. Per $\theta \in A$ le trivializzazioni locali ϕ_1 e ϕ_2 sono date da $\phi_1^{-1}(u) = (\theta, t)$ e $\phi_2^{-1}(u) = (\theta, t)$, con $t \in [-1, 1]$. La funzione di transizione $t_{12}(\theta)$ per $\theta \in A$ è l'identità: $t_{12}(\theta) : t \mapsto t$. Su invece B ci sono due scelte:

- $\phi_1^{-1}(u) = (\theta, t)$ e $\phi_2^{-1}(u) = (\theta, t)$;
- $\phi_1^{-1}(u) = (\theta, t)$ e $\phi_2^{-1}(u) = (\theta, -t)$.

Nel primo caso, si trova che $t_{12}(\theta)$ è l'identità e i due pezzi del fibrato si incollano insieme a formare un cilindro, come mostrato a sinistra in Figura 3.5. Nel secondo caso, si ha $t_{12}(\theta) : t \mapsto -t$ per $\theta \in B$, e si ottiene un nastro di Möbius, visibile in Figura 3.5 a destra. Pertanto, il cilindro ha il gruppo di struttura triviale $G = \{e\}$, dove e è l'identità di F in F , mentre il nastro di Möbius ha $G = \{e, g\}$, con $g : t \mapsto -t$. Il cilindro è un fibrato triviale $S^1 \times [-1, 1]$, il nastro di Möbius no.

3.1.2 Morfismo di fibrati ed equivalenza tra fibrati

È possibile definire delle particolari mappe tra fibrati.

Definizione 3.4. Siano $E \xrightarrow{\pi} M$ e $E' \xrightarrow{\pi'} M'$ due fibrati. Un **morfismo di fibrati** è una mappa liscia $\bar{f} : E' \rightarrow E$ che mappa ogni fibra F'_p di E' in F_q di E , inducendo quindi una mappa liscia $f : M' \rightarrow M$ tale che $f(p) = q$.

In Figura 3.6 è possibile visualizzare il morfismo di fibrati $\bar{f}$ come appena definito. Si

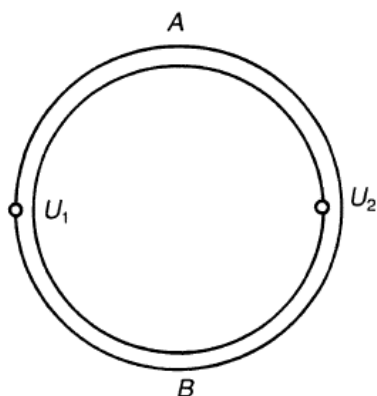


Figura 3.4: Lo spazio base S^1 e due carte $U_1 = (0, 2\pi)$ e $U_2 = (-\pi, \pi)$, con intersezione $A = (0, \pi)$ e $B = (\pi, 2\pi)$.

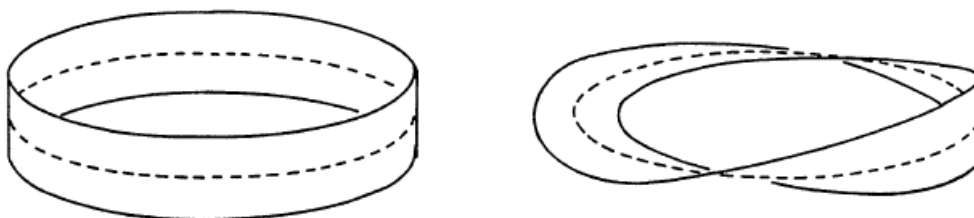


Figura 3.5: I due fibrati che hanno S^1 come spazio base: il cilindro a sinistra e il nastro di Möbius a destra.

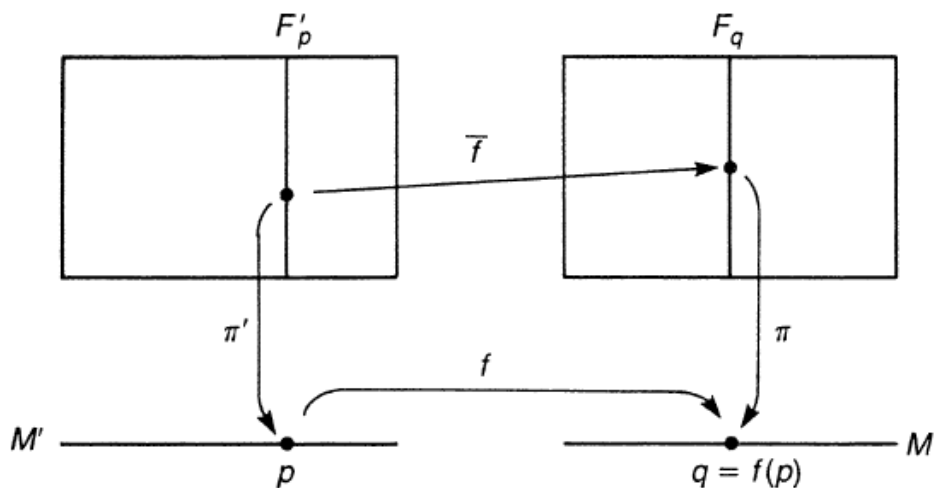


Figura 3.6: Disegno raffigurante i fibrati $E \xrightarrow{\pi} M$ e $E' \xrightarrow{\pi'} M'$, le fibre F'_p e F_q , il morfismo di fibrati $\bar{f}$ e la mappa da esso indotta f .

nota che il diagramma

$$\begin{array}{ccc} E' & \xrightarrow{\bar{f}} & E \\ \pi' \downarrow & & \downarrow \pi \\ M' & \xrightarrow{f} & M \end{array} \quad \left(\begin{array}{ccc} u & \xrightarrow{\bar{f}} & \bar{f}(u) \\ \pi' \downarrow & & \downarrow \pi \\ p & \xrightarrow{f} & q \end{array} \right) \quad (3.7)$$

commuta.

Definizione 3.5. Due fibrati $E \xrightarrow{\pi} M$ e $E' \xrightarrow{\pi'} M$ si dicono **equivalenti** se esiste un morfismo di fibrati $\bar{f} : E' \rightarrow E$ tale che la mappa indotta sulla base $f : M \rightarrow M$ è l'identità e $\bar{f}$ è un diffeomorfismo:

$$\begin{array}{ccc} E' & \xrightarrow{\bar{f}} & E \\ \pi' \downarrow & & \downarrow \pi \\ M & \xrightarrow{\text{Id}_M} & M \end{array} \quad (3.8)$$

3.1.3 Fibrato di pullback e mappe omotopiche

Siano $E \xrightarrow{\pi} M$ un fibrato con fibra F e $f : N \rightarrow M$ una mappa liscia tra la varietà liscia N ed M , allora E e f definiscono un nuovo fibrato su N con la stessa fibra F .

Definizione 3.6. Siano $E \xrightarrow{\pi} M$ un fibrato con fibra F e $f : N \rightarrow M$ una mappa liscia tra la varietà liscia N ed M . La varietà $f^*E := \{(p, u) \in N \times E \mid f(p) = \pi(u)\} \subset N \times E$, insieme alla proiezione $\pi_1 : f^*E \rightarrow N$ tale che $\pi_1 : (p, u) \mapsto p$, forma $f^*E \xrightarrow{\pi_1} N$, detto **fibrato di pullback** di E tramite f .

Come mostrato in 3.7, la fibra F_p di f^*E è una copia della fibra $F_{f(p)}$ di E . Per come è stato definito, il fibrato di pullback $f^*E \xrightarrow{\pi_1} N$ è un fibrato. Inoltre se si definisce $f^*E \xrightarrow{\pi_2} E$ tramite $\pi_2 : (p, u) \mapsto u$, si ottiene il morfismo di fibrati π_2 . Tra essi vale il diagramma

$$\begin{array}{ccc} f^*E & \xrightarrow{\pi_2} & E \\ \pi_1 \downarrow & & \downarrow \pi \\ N & \xrightarrow{f} & M \end{array} \quad \left(\begin{array}{ccc} (p, u) & \xrightarrow{\pi_2} & \bar{u} \\ \pi_1 \downarrow & & \downarrow \pi \\ p & \xrightarrow{f} & f(p) \end{array} \right) \quad (3.9)$$

Esso commuta, infatti $\pi(\pi_2(p, u)) = \pi(u) = f(p) = f(\pi_1(p, u)) \forall (p, u) \in f^*E$.

Si definiscono ora le mappe omotopiche, concetto che viene subito dopo utilizzato in un teorema sull'equivalenza tra fibrati di pullback, dal quale si ottiene una condizione sufficiente per determinare la trivialità di un fibrato.

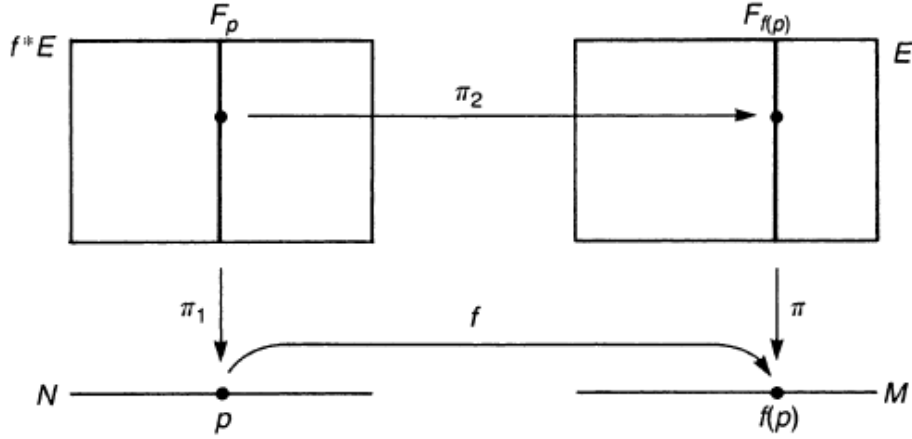


Figura 3.7: Disegno che raffigura come, dato un fibrato $E \xrightarrow{\pi} M$, la mappa liscia $f : N \rightarrow M$ definisce il fibrato di pullback f^*E su N .

Definizione 3.7. Siano f e g mappe da M' a M . Esse si dicono **omotopiche** se esiste una mappa liscia $F : M' \times [0, 1] \rightarrow M$ tale che $F(p, 0) = f(p)$ e $F(p, 1) = g(p) \forall p \in M'$. In tal caso F è detta **omotopia**.

Teorema 3.1. Sia $E \xrightarrow{\pi} M$ un fibrato e siano $f : N \rightarrow M$ e $g : N \rightarrow M$ mappe omotopiche. Allora f^*E e g^*E sono fibrati equivalenti su N .

Corollario 3.1. Sia $E \xrightarrow{\pi} M$ un fibrato. Se M è contraibile a un punto, allora E è triviale.

Dimostrazione. Essendo M contraibile a un punto, esiste un'omotopia $F : M \times [0, 1] \rightarrow M$ tale che $F(p, 0) = p$ e $F(p, 1) = p_0$, con $p_0 \in M$ punto fissato. Definendo $h_t(p) := F(p, t)$, si ha che il fibrato h_1^*E è un pullback del fibrato $\{p_0\} \times F$ e pertanto è un fibrato triviale, mentre $h_0^*E = E$ essendo h_0 l'identità. Per il teorema 3.1 h_0^*E e h_1^*E sono equivalenti, e quindi anche E è un fibrato triviale. $\square$

3.2 Fibrati vettoriali

Un fibrato vettoriale è un fibrato la cui fibra è uno spazio vettoriale.

3.2.1 Definizioni ed esempi

Definizione 3.8. Un **fibrato vettoriale** (E, π, M, F, G) è un fibrato la cui fibra F è uno spazio vettoriale.

Esempio 3.3. Sia dato il fibrato vettoriale $(E, \pi, M, \mathbb{R}^k, G)$. Le funzioni di transizione mappano uno spazio vettoriale in un altro spazio vettoriale di uguale dimensione isomorficamente, e quindi appartengono a $GL(k, \mathbb{R})$.

Esempio 3.4. Il fibrato tangente TM di una varietà liscia m -dimensionale M è un fibrato vettoriale. Sia $u \in TM$ tale che $\pi(u) = p \in U_i \cap U_j$, con $\{U_i\}$ ricoprimento di M . Siano $x^\mu = \varphi_i(p)$ e $y^\mu = \varphi_j(p)$ i sistemi di coordinate di, rispettivamente, U_i e U_j . Il vettore $V \in TM$ corrispondente a u è espresso da

$$V = V^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} \Big|_p = \tilde{V}^\mu \frac{\partial}{\partial y^\mu} \Big|_p. \quad (3.10)$$

Si ha che $\{V^\mu\}$ e $\{\tilde{V}^\mu\}$ sono legati dalla relazione

$$V^\mu = G^\mu_\nu(p) \tilde{V}^\nu \quad (3.11)$$

dove $\{G^\mu_\nu(p)\} = \{(\partial x^\mu / \partial y^\nu)_p\} \in \text{GL}(m, \mathbb{R})$. Di conseguenza un fibrato tangente è un fibrato vettoriale $(TM, \pi, M, \mathbb{R}^m, \text{GL}(m, \mathbb{R}))$. Le sezioni di TM sono i campi vettoriali su M , ossia $\mathfrak{X}(M) = \Gamma(M, TM)$.

Definizione 3.9. Sia $E \xrightarrow{\pi} M$ un fibrato vettoriale con fibra $\mathbb{R}^k$. Su una carta U_i si ha che $\pi^{-1}(U_i)$ è triviale, perciò esistono sezioni su U_i ed è possibile scegliere k sezioni linearmente indipendenti $\{e_1(p), \dots, e_k(p)\} \forall p \in U_i$. Si dice che queste sezioni definiscono un **frame** su U_i .

3.2.2 Fibrato duale

Esempio 3.5. Il fibrato cotangente T^*M di una varietà liscia m -dimensionale M è un fibrato vettoriale. Su una carta U_i le cui coordinate sono x^μ , come base di T_p^*M si prende $\{dx^1, \dots, dx^m\}$, che è il duale di $\{\partial/\partial x^1, \dots, \partial/\partial x^m\}$. Siano y^μ le coordinate di U_j , con $U_i \cap U_j \neq \emptyset$. Per $p \in U_i \cap U_j$ si ha

$$dy^\mu = dx^\nu \left(\frac{\partial y^\mu}{\partial x^\nu} \right)_p. \quad (3.12)$$

Una 1-forma ω può essere espressa come $\omega = \omega_\mu dx^\mu = \tilde{\omega}_\mu dy^\mu$, da cui segue che

$$\tilde{\omega}_\mu = G_\mu^\nu(p) \omega_\nu \quad (3.13)$$

dove $G_\mu^\nu(p) := (\partial x^\nu / \partial y^\mu)_p$ corrisponde alla funzione di transizione $t_{ji}(p)$. Si ha che $\Gamma(M, T^*M) = \Omega^1(M)$.

Definizione 3.10. Sia (E, π, M, F, G) un fibrato vettoriale. (E^*, π, M, F^*, G) è il suo **fibrato duale**.

Data una generica base $\{e_\alpha(p)\}$ di F_p , si definisce la **base duale** $\{\theta^\alpha(p)\}$ di F_p^* in modo tale che $\langle \theta^\alpha(p), e_\beta(p) \rangle = \delta^\alpha_\beta$.

Esempio 3.6. Il fibrato cotangente T^*M è il fibrato duale del fibrato tangente TM .

3.2.3 Sezioni di fibrati vettoriali

Si introducono alcune operazioni tra le sezioni di un fibrato vettoriale.

Definizione 3.11. Siano s e s' sezioni del fibrato vettoriale (E, π, M, F, G) . Si definiscono punto per punto la **somma vettoriale** e il **prodotto per scalare** come segue:

- $(s + s')(p) = s(p) + s'(p)$
- $(fs)(p) = f(p)s(p)$

dove $p \in M$ e $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione liscia.

Il vettore nullo 0 di ciascuna fibra è invariante a sinistra sotto $GL(k, \mathbb{R})$. Qualsiasi fibrato vettoriale (E, π, M, F, G) ammette una sezione globale, chiamata sezione nulla $s_0 \in \Gamma(M, E)$, tale che $\phi_i^{-1}(s_0(p)) = (p, 0)$ in tutte le trivializzazioni locali.

È possibile definire punto per punto una metrica $h_{\mu\nu}(p)$ sulla fibra.

Definizione 3.12. Siano $(E, \pi, M, \mathbb{R}^k, G)$ un fibrato vettoriale e $h_{\mu\nu}(p)$ la metrica della sua fibra su p , e siano s e s' sezioni sullo stesso $U_i \subset M$. Il **prodotto interno** tra s e s' nel punto p è

$$(s, s')_p = h_{\mu\nu}(p) s^\mu(p) s'^\nu(p). \quad (3.14)$$

Analogamente, siano $(E, \pi, M, \mathbb{C}^k, G)$ un fibrato vettoriale e $h_{\mu\nu}(p)$ la metrica della sua fibra su p , e siano s e s' sezioni sullo stesso $U_i \subset M$. Il **prodotto interno** tra s e s' nel punto p è

$$(s, s')_p = h_{\mu\nu}(p) \overline{s^\mu(p)} s'^\nu(p). \quad (3.15)$$

3.3 Fibrati principali

Un fibrato principale è un fibrato in cui la fibra e il gruppo di struttura coincidono.

3.3.1 Definizioni

Definizione 3.13. Un **fibrato principale** $P(M, G)$ è un fibrato sulla varietà liscia M la cui fibra è uguale al gruppo di struttura G , $P(M, G) := (P, \pi, M, G, G)$.

In aggiunta alle funzioni di transizione, che agiscono sulla fibra da sinistra, si definisce un'azione di G sulla fibra da destra.

Definizione 3.14. Sia $\phi_i : U_i \times G \rightarrow \pi^{-1}(U_i)$ la trivializzazione locale data da $\phi_i^{-1}(u) = (p, g_i)$, con $u \in \pi^{-1}(U_i)$ e $p = \pi(u)$. L'**azione da destra** di G su $\pi^{-1}(U_i)$ è definita tramite $\phi_i^{-1}(ua) = (p, g_i a)$, cioè

$$ua = \phi_i(p, g_i a) \quad (3.16)$$

$\forall a \in G$ e $\forall u \in \pi^{-1}(p)$.

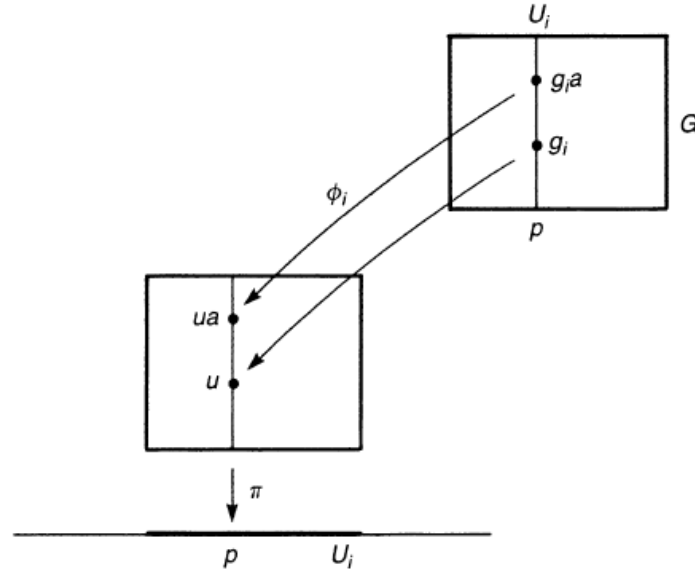


Figura 3.8: Disegno che mostra il modo in cui è definita l'azione da destra di G su F rispetto alla trivializzazione locale ϕ_i .

La definizione di azione da destra appena data è visibile in forma grafica in Figura 3.8. Dato che l'azione da destra commuta con l'azione da sinistra, si ha che $\forall p \in U_i \cap U_j$ risulta

$$ua = \phi_j(p, g_j a) = \phi_j(p, t_{ji}(p) g_i a) = \phi_i(p, g_i a) \quad (3.17)$$

ossia la definizione di azione da destra è indipendente dalla trivializzazione locale. L'azione da destra è quindi una funzione $P \times G \rightarrow P$, $(u, a) \mapsto ua$. Si ha che $\pi(ua) = \pi(u)$.

Proposizione 3.1. L'azione da destra di G su $\pi^{-1}(p)$ è transitiva e libera.

Sia s_i una sezione su U_i . Il fatto che, dato $u \in \pi^{-1}(p)$ con $p \in U_i$, ci sia un unico elemento $g_u \in G$ tale che $u = s_i(p)g_u$, giustifica la seguente

Definizione 3.15. $\phi_i : U_i \times G \rightarrow \pi^{-1}(U_i)$ tale che $\phi_i^{-1}(u) = (p, g_u)$ è detta **trivializzazione locale canonica**.

In questa trivializzazione $s_i(p) = \phi(p, e)$.

Per definizione $\phi_i(p, g) = \phi_i(p, e)g = s_i(p)g$. Se $p \in U_i \cap U_j$, le sezioni $s_i(p)$ e $s_j(p)$ sono legate dalla funzione di transizione $t_{ij}(p)$ come segue:

$$s_i(p) = \phi_i(p, e) = \phi_j(p, t_{ji}(p)e) = \phi_j(p, t_{ji}(p)) = \phi_j(p, e)t_{ji}(p) = s_j(p)t_{ji}(p). \quad (3.18)$$

3.3.2 Fibrati associati

Dato un fibrato principale, è possibile costruire un fibrato ad esso associato.

Definizione 3.16. Sia $P(M, G)$ un fibrato principale, e sia F una varietà su cui G agisce da sinistra. Definendo l'azione di $g \in G$ su $E = P \times F$ in modo tale che $(u, f) \mapsto (ug, g^{-1}f)$, con $u \in P$ e $f \in F$, si definisce il **fibrato associato** al fibrato principale $P(M, G)$, denotato con (E, π, M, G, F, P) , come una classe di equivalenza $(P \times F)/G$ nella quale i punti (u, f) e $(ug, g^{-1}f)$ sono associati.

Esempio 3.7. Consideriamo il caso in cui F sia uno spazio vettoriale V di dimensione k . Sia $\rho : G \rightarrow \text{GL}(V)$ una rappresentazione di G su V . Il fibrato vettoriale associato $P \times_{\rho} V$ è definito identificando i punti (u, v) e $(ug, \rho(g)^{-1}v)$ di $P \times V$, dove $u \in P$, $g \in G$ e $v \in V$.

Viceversa, un fibrato vettoriale induce un fibrato principale associato ad esso: sia $E \xrightarrow{\pi} M$ un fibrato vettoriale con fibra di dimensione k ; allora E induce un fibrato principale $P(M, G)$ su M avente le stesse funzioni di transizione e con gruppo di struttura $\text{GL}(V)$.

Esiste un importante teorema sulla trivialità dei fibrati principali, che è esteso ai fibrati vettoriali grazie a quanto appena detto.

Teorema 3.2. Un fibrato principale è triviale se e solo se ammette una sezione globale.

Corollario 3.2. Un fibrato vettoriale è triviale se e solo se il suo fibrato principale associato ammette una sezione globale.

Capitolo 4

Connessioni su fibrati

Le connessioni sui fibrati sono delle importanti strutture che si introducono per risolvere il problema dell'impossibilità di confrontare in maniera diretta punti appartenenti a fibre diverse.

Data una curva γ nello spazio base, si vorrebbe seguire questa curva dentro lo spazio totale, ossia trovare $\tilde{\gamma}$ tale che $\pi \circ \tilde{\gamma} = \gamma$, dove π è la proiezione. Tali curve nello spazio totale sono però infinite, e l'obiettivo che ci si pone introducendo una connessione è scegliere una di tali curve.

Il ragionamento che si segue è il seguente. Il pushforward della proiezione proietta un vettore tangente allo spazio totale sullo spazio base. È possibile che un vettore tangente allo spazio totale abbia proiezione sulla base nulla: in tal caso la curva integrale del vettore si sta muovendo lungo la fibra, e viene detto verticale. Aggiungendo un vettore verticale ad un qualsiasi altro vettore, la sua proiezione rimarrà invariata. Si vuole allora trovare un vettore che rappresenti il puro movimento orizzontale, senza movimenti lungo la fibra. La scelta di tale vettore, chiamato vettore orizzontale, è detta connessione. In questo modo è possibile, dato un vettore tangente allo spazio base, scegliere un unico vettore ad esso corrispondente nello spazio totale, detto sollevamento orizzontale. Si è così definito un modo per seguire univocamente nello spazio totale una curva γ giacente nello spazio base.

Il punto finale della curva $\tilde{\gamma}$ nello spazio totale si trova su una fibra diversa da quella del punto iniziale, e la mappa che collega queste due fibre è detta trasporto parallelo. Si è così costruito un modo per confrontare punti appartenenti a fibre diverse: $p \in \pi^{-1}(x)$ e $q \in \pi^{-1}(y)$ non possono essere confrontati direttamente, trovandosi essi su spazi diversi, ma è ora possibile trasportare p dalla fibra su x a quella su y e poi confrontarlo con q .

Avendo un modo per confrontare punti che si trovano su fibre differenti, è anche possibile definire una nuova nozione di derivata per le sezioni.

4.1 Connessioni su fibrati principali

Le connessioni sui fibrati principali sono delle strutture estremamente importanti in fisica, perché costituiscono il framework geometrico delle teorie di gauge.

Esistono vari modi equivalenti per definirle. Qui si seguirà un approccio basato sulla separazione dello spazio tangente $T_u P$ in un sottospazio verticale e uno orizzontale.

4.1.1 Definizioni

Definizione 4.1. Sia u un elemento del fibrato principale $P(M, G)$ e sia G_p la fibra in $p = \pi(u)$. Il **sottospazio verticale** $V_u P$ è un sottospazio dello spazio tangente $T_u P$ tangente a G_p in u .

Guardiamo come è possibile costruire $V_u P$. Si prenda un elemento $A \in \mathfrak{g}$. Tramite l'azione destra $R_{\exp(tA)} u = u \exp(tA)$ si definisca una curva in P passante per u . Essendo $\pi(u) = \pi(u \exp(tA)) = p$, questa curva giace in G_p . Si definisca un vettore $A^\# \in T_u P$ tramite la relazione

$$A^\# f(u) = \left. \frac{d}{dt} f(u \exp(tA)) \right|_{t=0} \quad (4.1)$$

dove $f : P \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione liscia arbitraria. Il vettore $A^\#$ è tangente a P in u , pertanto $A^\# \in V_u P$. In questo modo è possibile definire un vettore $A^\#$ in ogni punto P e costruire un campo vettoriale $A^\#$, chiamato campo vettoriale fondamentale generato da A . È presente un isomorfismo tra spazi vettoriali $\# : \mathfrak{g} \rightarrow V_u P$ dato da $A \mapsto A^\#$.

Definizione 4.2. Sia u un elemento del fibrato principale $P(M, G)$. Il **sottospazio orizzontale** $H_u P$ è un sottospazio complementare al sottospazio verticale $V_u P$ nello spazio tangente $T_u P$.

In generale $H_u P$ non è univocamente determinato e non esiste una scelta canonica, a meno che non si definisca una connessione.

Definizione 4.3. Siano $P(M, G)$ un fibrato principale e $u \in P$. Una **connessione** su P è una separazione dello spazio tangente $T_u P$ nel sottospazio verticale $V_u P$ e nel sottospazio orizzontale $H_u P$ tali che:

- i. $T_u P = H_u P \oplus V_u P$;
- ii. ogni campo vettoriale liscio X su P è separato nei campi vettoriali lisci $X^H \in H_u P$ e $X^V \in V_u P$ come $X = X^H + X^V$;
- iii. $H_{ug} P = (R_g)_* H_u P$ per arbitrario $g \in G$.

In Figura 4.1 è visibile come una connessione, dati $x, y \in M$, separi gli spazi tangenti a $p \in \pi^{-1}(x) = F_p$ e $q \in \pi^{-1}(y) = F_q$ in modo univoco negli spazi verticali (tangenti alle fibre nei punti), rispettivamente V_p e V_q , e negli spazi orizzontali, rispettivamente H_p e H_q . La condizione iii., che è visualizzabile graficamente nel disegno in Figura 4.2, afferma che i sottospazi orizzontali $H_u P$ e $H_{ug} P$ sulla stessa fibra sono legati tramite la mappa

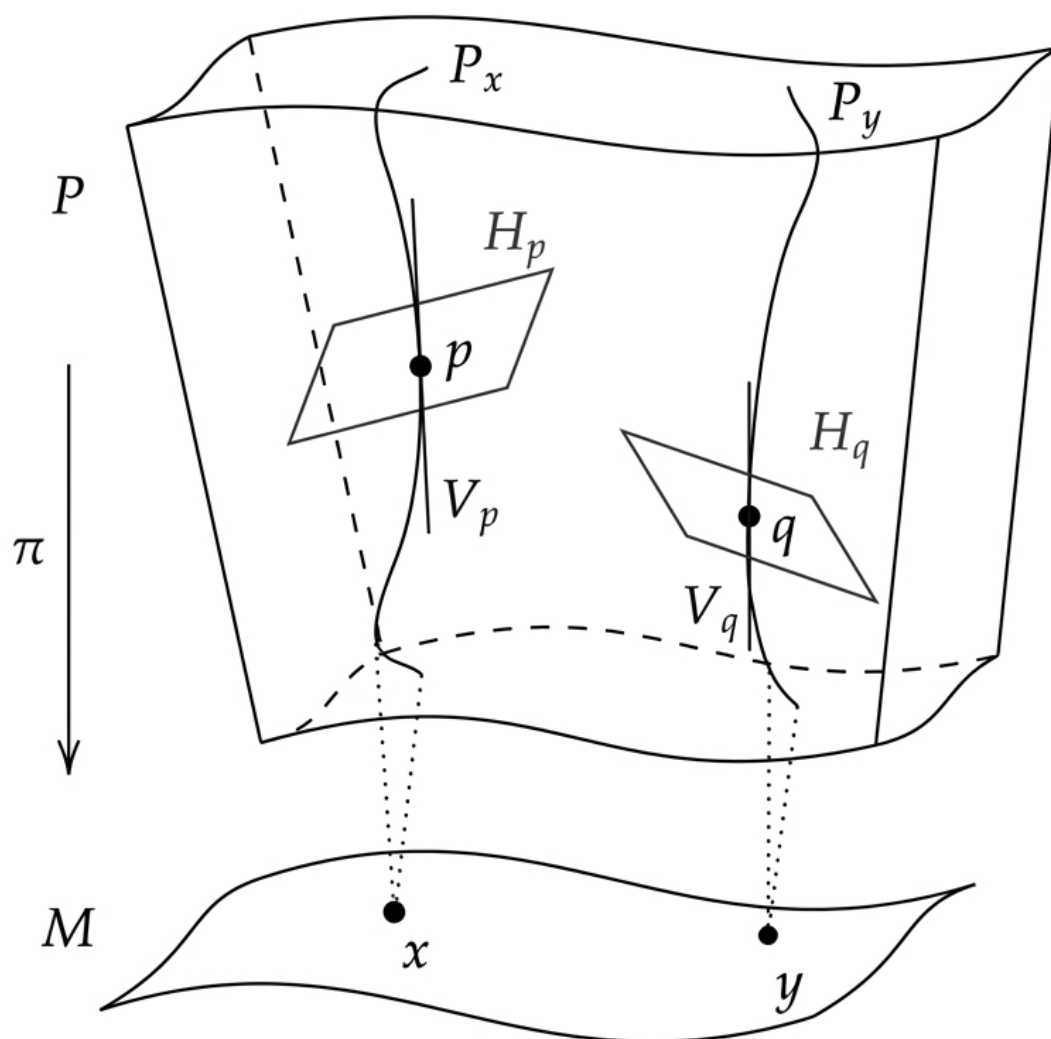


Figura 4.1: Il fibrato principale $P(M, G)$, con proiezione π , dotato di una connessione per la quale, dati $x, y \in M$, gli spazi tangenti a $p \in \pi^{-1}(x) = F_p$ e $q \in \pi^{-1}(y) = F_q$ sono separati in modo univoco nei rispettivi spazi verticali V_p e V_q e nei rispettivi spazi orizzontali H_p e H_q .

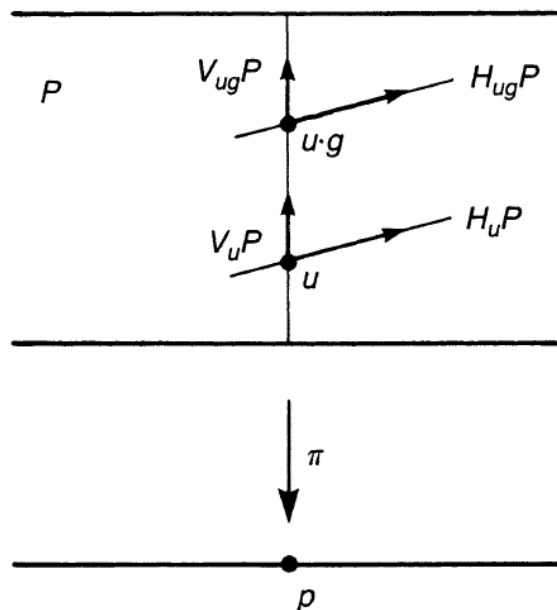


Figura 4.2: Il sottospazio orizzontale $H_{ug}P$, ottenuto a partire dal sottospazio orizzontale H_uP tramite l'azione da destra.

lineare $(R_g)_*$ indotta dall'azione da destra. Pertanto un sottospazio H_uP in u genera tutti i sottospazi orizzontali sulla stessa fibra.

4.1.2 1-forma di connessione

Nella Sezione 1.5 si erano definite le forme differenziali come tensori antisimmetrici di tipo $(0, r)$, ossia mappe lineari antisimmetriche $\omega : \underbrace{T_p M \times \cdots \times T_p M}_{r \text{ volte}} \rightarrow \mathbb{R}$, e tramite un'assegnazione liscia a tutti i punti di M si erano ottenute forme differenziali agenti su tutto M , il cui insieme di appartenenza era stato chiamato $\Omega^r(M)$. Si estendono ora queste definizioni a forme differenziali a valori in un generico spazio vettoriale reale.

Definizione 4.4. Siano V uno spazio vettoriale reale e M una varietà liscia. Si definisce **forma differenziale di ordine r a valori in V** o **r -forma a valori in V** una famiglia liscia di mappe multilineari antisimmetriche

$$\omega_p : \underbrace{T_p M \times \cdots \times T_p M}_{r \text{ volte}} \rightarrow V \quad (4.2)$$

con $p \in M$.

$\Omega^r(M, V)$ è l'insieme delle r -forme a valori in V su M .

Per effettuare calcoli ed avere un modo per dividere sistematicamente $T_u P$ in $V_u P$ e $H_u P$ si introduce una 1-forma a valori nell'algebra di Lie.

Definizione 4.5. Sia $P(M, G)$ un fibrato principale su cui è definita una connessione. Si definisce **1-forma di connessione** $\omega \in \Omega^1(P, \mathfrak{g})$ la 1-forma su P a valori in $\mathfrak{g}$ tale per cui, $\forall u \in P$ e $\forall X \in T_u P$, $\omega(X) = A \in \mathfrak{g}$, con A tale che $(A^\#)_u$ sia uguale alla componente verticale di X .

Proposizione 4.1. $\omega(X) = 0 \iff X$ è orizzontale, cioè $H_u P$ è il nucleo di ω : $H_u P = \{X \in T_u P \mid \omega(X) = 0\}$.

La 1-forma di connessione gode di certe proprietà, e ogni connessione è posta in corrispondenza biunivoca con la propria 1-forma, come si vede nella seguente

Proposizione 4.2. Sia $P(M, G)$ un fibrato principale su cui è definita una connessione. La 1-forma di connessione ω soddisfa le seguenti condizioni:

- i. $\omega(A^\#) = A \quad \forall A \in \mathfrak{g}$
- ii. $(R_g)^* \omega = \text{Ad}_{g^{-1}} \omega$

ossia, per $X \in T_u P$,

$$((R_g)^* \omega)_u(X) = \omega_{ug}((R_g)_* X) = \text{Ad}_{g^{-1}}(\omega_u(X)). \quad (4.3)$$

Viceversa, data una 1-forma ω a valori in $\mathfrak{g}$ sul fibrato principale $P(M, G)$ che soddisfa le condizioni i. e ii., esiste un'unica connessione in P la cui 1-forma di connessione è ω .

Esempio 4.1. Nel caso in cui il gruppo di struttura G sia un gruppo matriciale, nell'Esempio 2.11 si è visto che $\text{Ad}_a(Y) = aYa^{-1}$, perciò l'Equazione 4.3 diventa $((R_g)^* \omega)_u(X) = \omega_{ug}((R_g)_* X) = \text{Ad}_{g^{-1}}(\omega_u(X)) = g^{-1}\omega_u(X)g$.

Dovendo spesso lavorare su M , conviene introdurre anche delle 1-forme sullo spazio base M .

Definizione 4.6. Siano $P(M, G)$ un fibrato principale, ω una 1-forma di connessione, $\{U_i\}$ un ricoprimento aperto di M e σ_i una sezione locale definita per ogni U_i . Si definisce la 1-forma a valori in $\mathfrak{g}$ su U_i

$$\mathcal{A}_i := \sigma_i^* \omega \in \Omega^1(U_i, \mathfrak{g}) \quad (4.4)$$

detta **forma locale di connessione**.

Al contrario, data una 1-forma a valori nell'algebra di Lie $\mathcal{A}_i$ su U_i , è possibile ricostruire una 1-forma di connessione ω il cui pullback tramite σ_i^* sia $\mathcal{A}_i$, come mostra il seguente

Teorema 4.1. Data una 1-forma a valori in $\mathfrak{g}$ $\mathcal{A}_i$ su U_i e una sezione locale $\sigma_i : U_i \rightarrow \pi^{-1}(U_i)$, esiste una 1-forma di connessione ω tale che $\mathcal{A}_i = \sigma_i^* \omega$.

Dimostrazione. Si definisce una 1-forma ω a valori in $\mathfrak{g}$ su P tramite

$$\omega_i := g_i^{-1} \pi^* \mathcal{A}_i g_i + g_i^{-1} d_P g_i \quad (4.5)$$

dove d_P è la derivata esterna su P e g_i è la trivializzazione locale canonica definita da $\phi_i^{-1}(u) = (p, g_i)$ per $u = \sigma_i(p)g_i$.

Per prima cosa si mostra che $\sigma_i^* \omega_i = \mathcal{A}_i$. Per $X \in T_p M$ si ha

$$\begin{aligned}\sigma_i^* \omega_i(X) &= \omega_i(\sigma_{i*} X) = \pi^* \mathcal{A}_i(\sigma_{i*} X) + d_P g_i(\sigma_{i*} X) \\ &= \mathcal{A}_i(\pi_* \sigma_{i*} X) + d_P g_i(\sigma_{i*} X)\end{aligned}\quad (4.6)$$

dove si è notato che $\sigma_{i*} X \in T_{\sigma_i} P$ e $g_i = e$ in σ_i , come visibile in Figura 4.3. Si nota inoltre che $\pi_* \sigma_{i*} = \text{Id}_{T_p(M)}$ e $d_P g_i(\sigma_{i*} X) = 0$, dato che $g = e$ lungo $\sigma_{i*} X$. Si è perciò ottenuto $\sigma_i^* \omega_i(X) = \mathcal{A}_i(X)$.

Rimane da verificare che ω_i soddisfi i due assiomi delle 1-forme di connessione contenuti nella Definizione 4.5:

- i. siano $A \in \mathfrak{g}$ e $X = A^\# \in V_u P$. Dato che $\pi_* Y = 0 \ \forall Y \in V_u P$, si ha che $\pi_* X = 0$. Pertanto si ha

$$\omega_i(A^\#) = g_i^{-1} d_P g_i(A^\#) = g_i(u)^{-1} \left. \frac{dg(u \exp(tA))}{dt} \right|_{t=0} \quad (4.7)$$

$$= g_i(u)^{-1} g_i(u) \left. \frac{d \exp(tA)}{dt} \right|_{t=0} = A. \quad (4.8)$$

- ii. Si prendano $X \in T_u P$ e $h \in G$. Si ha

$$(R_h)^* \omega_i(X) = \omega_i((R_h)_* X) = g_{iuh}^{-1} \mathcal{A}_i(\pi_* (R_h)_* X) g_{iuh} + g_{iuh}^{-1} d_P g_{iuh}((R_h)_* X). \quad (4.9)$$

Essendo che $g_{iuh} = g_{iu} h$ e $\pi_* (R_h)_* X = \pi_* X$ (si noti che $\pi R_h = \pi$), si ha

$$(R_h)^* \omega_i(X) = h^{-1} g_{iu}^{-1} \mathcal{A}_i(\pi_* X) g_{iu} h + h^{-1} g_{iu}^{-1} d_P g_{iu}(X) h \quad (4.10)$$

$$= h^{-1} \omega_i(X) h \quad (4.11)$$

dove abbiamo notato che

$$g_{iuh}^{-1} d_P g_{iuh}((R_h)_* X) = g_{iuh}^{-1} \left. \frac{d}{dt} g_{i\gamma(t)h} \right|_{t=0} \quad (4.12)$$

$$= h^{-1} g_{iu}^{-1} \left. \frac{d}{dt} g_{i\gamma(t)} \right|_{t=0} h = h^{-1} g_{iu}^{-1} d_P g_{iu}(X) h \quad (4.13)$$

nel quale $\gamma(t)$ è una curva passante per $u = \gamma(0)$, il cui vettore tangente in u è X .

Si è quindi dimostrato che ω_i soddisfa $\mathcal{A}_i = \sigma_i^* \omega_i$ e gli assiomi delle 1-forme di connessione. $\square$

Per avere ω definita univocamente su P , cioè per avere la separazione $T_u P = H_u P \oplus V_u P$ unica, bisogna avere $\omega_i = \omega_j$ su $U_i \cap U_j$. In tal modo $\omega|_{U_i} = \omega_i$ definisce un'unica 1-forma di connessione ω su P . Per realizzare questa condizione, le forme locali $\mathcal{A}_i$ devono soddisfare certe proprietà di trasformazione.

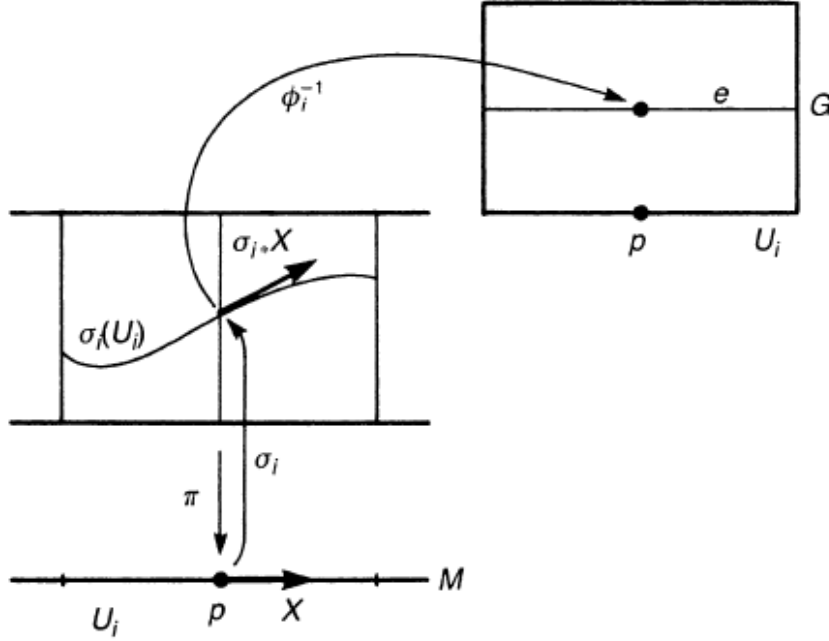


Figura 4.3: La trivializzazione locale canonica definita dalla sezione locale σ_i su U_i .

Lemma 4.1. Sia $P(M, G)$ un fibrato principale e siano σ_i e σ_j due sezioni locali su, rispettivamente, U_i e U_j tali che $U_i \cap U_j \neq \emptyset$. Dati $p \in U_i \cap U_j$ e $X \in T_p M$, $\sigma_{i*} X$ e $\sigma_{j*} X$ soddisfano

$$\sigma_{j*} X = (R_{t_{ij}})_* (\sigma_{i*} X) + (t_{ij}^{-1} dt_{ij}(X))^{\#}, \quad (4.14)$$

dove $t_{ij} : U_i \cap U_j \rightarrow G$ è la funzione di transizione.

Teorema 4.2. Sia $P(M, G)$ un fibrato principale, ω una 1-forma di connessione, e $U_i, U_j \subset M$ tali che $U_i \cap U_j \neq \emptyset$. Le forme locali $\mathcal{A}_i$ e $\mathcal{A}_j$ soddisfano la seguente condizione di compatibilità:

$$\mathcal{A}_j = \text{Ad}_{t_{ij}^{-1}} \mathcal{A}_i + t_{ij}^{-1} dt_{ij}. \quad (4.15)$$

Dimostrazione. Si prendano due sezioni locali σ_i e σ_j su, rispettivamente, U_i e U_j , $p \in U_i \cap U_j$ e $X \in T_p M$, in modo tale da poter applicare il Lemma 4.1. Applicando ω all'Equazione (4.14) si ottiene

$$\sigma_j^* \omega(X) = (R_{t_{ij}})^* \omega(\sigma_{i*} X) + t_{ij}^{-1} dt_{ij}(X) = \text{Ad}_{t_{ij}^{-1}} \omega(\sigma_{i*} X) + t_{ij}^{-1} dt_{ij}(X) \quad (4.16)$$

dove nell'ultima uguaglianza si è usata la Proposizione 4.2. Dato che quest'equazione è vera $\forall X \in T_p M$, essa si riduce alla condizione di compatibilità che si stava cercando. $\square$

Viceversa, dati un ricoprimento aperto $\{U_i\}$, le sezioni locali $\{\sigma_i\}$ e le forme locali $\{\mathcal{A}_i\}$ tali che soddisfano l'Equazione (4.15), si può costruire la 1-forma ω a valori in $\mathfrak{g}$ su P . Dato che un fibrato principale non triviale non ammette sezioni globali, il pullback $\mathcal{A}_i = \sigma_i^* \omega$ esiste localmente ma non necessariamente globalmente.

Esempio 4.2. Nel caso in cui il gruppo di struttura G sia un gruppo matriciale, sfruttando il risultato dell'Esempio 4.1 si ottiene che la condizione di compatibilità presente nell'Equazione (4.15) diventa

$$\mathcal{A}_j = t_{ij}^{-1} \mathcal{A}_i t_{ij} + t_{ij}^{-1} dt_{ij}. \quad (4.17)$$

Esempio 4.3. Sia $P(M, U(1))$ un fibrato principale. Si prendano due carte U_i e U_j tali che $U_i \cap U_j \neq \emptyset$. Siano $\mathcal{A}_i$ e $\mathcal{A}_j$ forme locali su, rispettivamente, U_i e U_j . La funzione di transizione $t_{ij} : U_i \cap U_j \rightarrow U(1)$ è data da

$$t_{ij}(p) = \exp[i\Lambda(p)] \quad (4.18)$$

con $\Lambda(p) \in \mathbb{R}$. $\mathcal{A}_i$ e $\mathcal{A}_j$ sono legate da

$$\mathcal{A}_j(p) = t_{ij}(p)^{-1} \mathcal{A}_i(p) t_{ij}(p) + t_{ij}(p)^{-1} dt_{ij}(p) = \mathcal{A}_i(p) + \text{id}\Lambda(p). \quad (4.19)$$

In componenti, abbiamo l'espressione

$$\mathcal{A}_{j\mu} = \mathcal{A}_{i\mu} + i\partial_\mu \Lambda. \quad (4.20)$$

Si noti nuovamente che ω è definita globalmente su $P(M, G)$. Nonostante ci siano varie 1-forme di connessione su $P(M, G)$, esse condividono le stesse informazioni globali sul fibrato principale. In contrapposizione, un singolo pezzo locale $\mathcal{A}_i$ è associato al fibrato triviale $\pi^{-1}(U_i)$ e non può avere nessuna informazione globale su $P(M, G)$. È ω o, equivalentemente, l'insieme $\{\mathcal{A}_i\}$ a soddisfare le condizioni di compatibilità presenti nell'Equazione (4.15), che portano le informazioni globali sul fibrato principale.

4.1.3 Sollevamento orizzontale, trasporto parallelo e olonomia

Definizione 4.7. Sia $P(M, G)$ un fibrato principale munito di connessione e sia $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$ una curva in M . Una curva $\tilde{\gamma} : [0, 1] \rightarrow P$ è detta **sollevamento orizzontale** di γ se $\pi \circ \tilde{\gamma} = \gamma$ e il vettore tangente a $\tilde{\gamma}(t)$ appartiene sempre a $H_{\tilde{\gamma}(t)}P$.

La costruzione di un sollevamento orizzontale è visibile in Figura 4.4.

Teorema 4.3. Sia $P(M, G)$ un fibrato principale munito di connessione, sia $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$ una curva in M e sia $u_0 \in \pi^{-1}(\gamma(0))$. Allora esiste un unico sollevamento orizzontale $\tilde{\gamma}(t)$ in P tale che $\tilde{\gamma}(0) = u_0$.

Dimostrazione. Costruiamo $\tilde{\gamma}$. Sia U_i una carta che contiene γ e si prenda una sezione σ_i su U_i . Se esiste un sollevamento orizzontale $\tilde{\gamma}$, esso può essere espresso come

$$\tilde{\gamma}(t) = \sigma_i(\gamma(t)) g_i(t) \quad (4.21)$$

dove $g_i(t) := g_i(\gamma(t)) \in G$. Senza perdita di generalità, possiamo prendere una sezione tale che $\sigma_i(\gamma(0)) = \tilde{\gamma}(0)$, cioè $g_i(0) = e$. Sia X un vettore tangente a $\gamma(t)$ in $\gamma(0)$. Allora

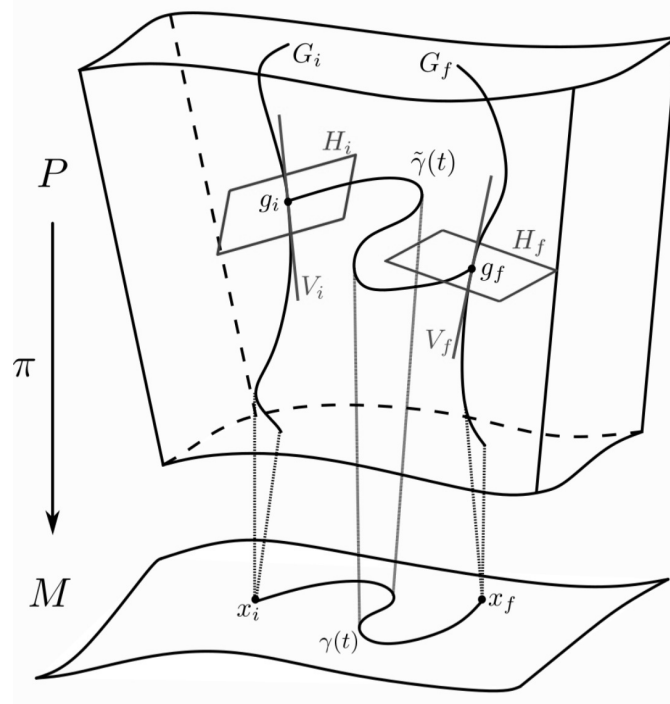


Figura 4.4: Una curva $\gamma(t)$ in M e il suo sollevamento orizzontale $\tilde{\gamma}(t)$ in P , costruito in modo tale che i vettori tangenti ad esso si trovino nei sottospazi orizzontali.

$\tilde{X} := \tilde{\gamma}_* X$ è tangente a $\tilde{\gamma}$ in $u_0 = \tilde{\gamma}(0)$. Essendo il vettore tangente $\tilde{X}$ orizzontale, esso soddisfa $\omega(\tilde{X}) = 0$. Una leggera modifica del Lemma 4.1 porta a

$$\tilde{X} = g_i(t)^{-1} \sigma_{i*} X g_i(t) + [g_i(t)^{-1} dg_i(X)]^\#.$$
 (4.22)

Applicando ω a questa equazione si trova

$$0 = \omega(\tilde{X}) = g_i(t)^{-1} \omega(\sigma_{i*} X) g_i(t) + g_i(t)^{-1} \frac{dg_i(t)}{dt}.$$
 (4.23)

Moltiplicando per $g_i(t)$, si ottiene

$$\frac{dg_i(t)}{dt} = -\omega(\sigma_{i*} X) g_i(t).$$
 (4.24)

Il teorema fondamentale delle equazioni differenziali ordinarie garantisce l'esistenza e l'unicità della soluzione di questa equazione. Pertanto, anche $\tilde{\gamma}(t) = \sigma_i(\gamma(t)) g_i(t)$ esiste ed è unico. $\square$

Dato che $\omega(\sigma_{i*} X) = \sigma_i^* \omega(X) = \mathcal{A}_i(X)$, è possibile esprimere in forma locale l'equazione differenziale contenuta nell'Equazione (4.24) come

$$\frac{dg_i(t)}{dt} = -\mathcal{A}_i(X) g_i(t)$$
 (4.25)

la cui soluzione formale (con $g_i(0) = e$) è

$$g_i(\gamma(t)) = \mathcal{P} \exp \left(- \int_0^t \mathcal{A}_{i\mu} \frac{dx^\mu}{dt} dt \right) = \mathcal{P} \exp \left(- \int_{\gamma(0)}^{\gamma(t)} \mathcal{A}_{i\mu}(\gamma(t)) dx^\mu \right) \quad (4.26)$$

dove $\mathcal{P}$ è un operatore di ordinamento dei cammini. Quindi il sollevamento orizzontale è espresso come

$$\tilde{\gamma}(t) = \sigma_i(\gamma(t)) g_i(\gamma(t)) = \sigma_i(\gamma(t)) \mathcal{P} \exp \left(- \int_{\gamma(0)}^{\gamma(t)} \mathcal{A}_{i\mu}(\gamma(t)) dx^\mu \right). \quad (4.27)$$

Corollario 4.1. Sia $P(M, G)$ un fibrato principale, sia $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$ una curva in M e siano $\tilde{\gamma}$ e $\tilde{\gamma}'$ sollevamenti orizzontali di γ diversi tali che $\tilde{\gamma}'(0) = \tilde{\gamma}(0)g$. Allora $\tilde{\gamma}'(t) = \tilde{\gamma}(t)g$ $\forall t \in [0, 1]$.

Dimostrazione. Si noti che lo spazio orizzontale è invariante a destra, $(R_g)_* H_u P = H_{ug} P$. Essendo $\tilde{\gamma}$ un sollevamento orizzontale di γ , anche $\tilde{\gamma}_g : t \mapsto \tilde{\gamma}(t)g$ lo è, dato che il suo vettore tangente appartiene a $H_{\tilde{\gamma}_g} P$. Dal Teorema 4.3 si trova che $\tilde{\gamma}'$ è l'unico sollevamento orizzontale che parte da $\tilde{\gamma}(0)g$. $\square$

Sia $P(M, G)$ un fibrato principale, sia $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$ una curva in M e sia $u_0 \in \pi^{-1}(\gamma(0))$. Come visto, esiste un unico sollevamento orizzontale $\tilde{\gamma}(t)$ di $\gamma(t)$ attraverso u_0 , e quindi un unico punto $u_1 = \tilde{\gamma}(1) \in \pi^{-1}(\gamma(1))$. Ad ogni $u_0 \in \pi^{-1}(\gamma(0))$ corrisponde quindi un unico $u_1 \in \pi^{-1}(\gamma(1))$, ed è possibile quindi definire una mappa che mandi u_0 in u_1 .

Definizione 4.8. Siano $P(M, G)$ un fibrato principale, $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$ una curva in M , $u_0 \in \pi^{-1}(\gamma(0))$, $\tilde{\gamma}(t)$ il sollevamento orizzontale di $\gamma(t)$ attraverso u_0 e $u_1 = \tilde{\gamma}(1) \in \pi^{-1}(\gamma(1))$. La mappa tra fibre $\Gamma(\tilde{\gamma}) : \pi^{-1}(\gamma(0)) \rightarrow \pi^{-1}(\gamma(1))$ tale che $u_0 \mapsto u_1$ è detta **trasporto parallelo**.

In Figura 4.5 sono disegnati una curva $\gamma(t) \subset M$ e i suoi sollevamenti orizzontali $\tilde{\gamma}(t)$ e $\tilde{\gamma}(t)g$, e si vede come i punti u_1 e u_1g siano unici. Usando la forma locale scritta nell'Equazione (4.26) si ha

$$u_1 = \sigma_i(\gamma(1)) \mathcal{P} \exp \left(- \int_0^1 \mathcal{A}_{i\mu} \frac{dx^\mu(\gamma(t))}{dt} dt \right). \quad (4.28)$$

Proposizione 4.3. $\Gamma(\tilde{\gamma})$ commuta con l'azione da destra R_g .

Dimostrazione. Si noti che $R_g \Gamma(\tilde{\gamma})(u_0) = u_1g$ e $\Gamma(\tilde{\gamma}) R_g(u_0) = \Gamma(\tilde{\gamma})(u_0g)$. Si osservi che $\tilde{\gamma}g$ è un sollevamento orizzontale attraverso u_0g e u_1g . Dall'unicità del trasporto orizzontale attraverso u_0g si ha $u_1g = \Gamma(\tilde{\gamma})(u_0g)$, ossia $R_g \Gamma(\tilde{\gamma})(u_0) = \Gamma(\tilde{\gamma}) R_g(u_0)$. Essendo vero $\forall u_0 \in \pi^{-1}(\gamma(0))$, si ha $R_g \Gamma(\tilde{\gamma}) = \Gamma(\tilde{\gamma}) R_g$, cioè $\Gamma(\tilde{\gamma})$ e R_g commutano. $\square$

Sia $P(M, G)$ un fibrato principale e siano $\alpha, \beta : [0, 1] \rightarrow M$ due curve con $\alpha(0) = \beta(0) = p_0$ e $\alpha(1) = \beta(1) = p_1$. Si prendano i sollevamenti orizzontali $\tilde{\alpha}$ e $\tilde{\beta}$ rispettivamente di α e

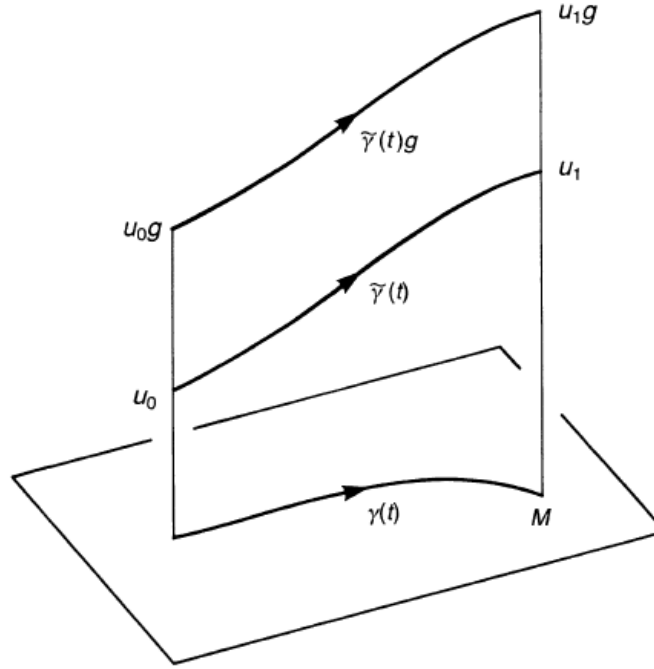


Figura 4.5: Una curva $\gamma(t)$ in M e i suoi sollevamenti orizzontali $\tilde{\gamma}(t)$ e $\tilde{\gamma}(t)g$; è visibile come il trasporto parallelo mandi u_0 in u_1 e u_0g in u_1g , e che tali u_1 e u_1g siano unici.

β tali che $\tilde{\alpha}(0) = \tilde{\beta}(0) = u_0$. Si ha che $\tilde{\alpha}(1)$ potrebbe essere diverso da $\tilde{\beta}(1)$. Quindi, se consideriamo una curva chiusa $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$ in $p = \gamma(0) = \gamma(1)$, in generale si avrà $\tilde{\gamma}(0) \neq \tilde{\gamma}(1)$. Una curva chiusa γ definisce una trasformazione $\tau_\gamma : \pi^{-1}(p) \rightarrow \pi^{-1}(p)$ sulla fibra. Dalla Proposizione 4.3 segue che questa trasformazione è compatibile con l'azione da destra del gruppo, $\tau_\gamma(ug) = \tau_\gamma(u)g$. Si noti che τ_γ non dipende solo dalla curva chiusa, ma anche dalla connessione.

Definizione 4.9. Siano $P(M, G)$ un fibrato principale, $u \in P$ con $\pi(u) = p$, e $C_p := \{\gamma : [0, 1] \rightarrow M \mid \gamma(0) = \gamma(1) = p\}$ l'insieme delle curve chiuse in p . L'insieme $\Phi_u := \{g \in G \mid \tau_\gamma(u) = ug, \text{ con } \gamma \in C_p(M)\}$ è chiamato **gruppo di ologonia** in u .

Proposizione 4.4. Siano $P(M, G)$ un fibrato principale e $u \in P$. Il gruppo di ologonia in u è un sottogruppo del gruppo di struttura G .

4.1.4 Derivata covariante e 2-forma di curvatura

Nella Sottosezione 1.5.3 si è definita la derivata esterna $d : \Omega^r(P) \rightarrow \Omega^{r+1}(P)$, che agisce sulle r -forme differenziali a valori reali $\eta \in \Omega^r(P)$,

$$\eta : TP \wedge \cdots \wedge TP \rightarrow \mathbb{R}. \quad (4.29)$$

Ora si vuole introdurre una nuova operazione che differenzi r -forme a valori in uno spazio vettoriale V , ossia $\phi \in \Omega^r(P, V)$,

$$\phi : TP \wedge \cdots \wedge TP \rightarrow V. \quad (4.30)$$

È possibile scrivere ogni ϕ come

$$\phi = \sum_{\alpha=1}^{\dim V} \phi^\alpha \otimes e_\alpha \quad (4.31)$$

dove $\{e_\alpha\}$ è una base di V e $\phi^\alpha \in \Omega^r(P)$. In questo caso si ha

$$d_P \phi = \sum_{\alpha=1}^{\dim V} d_P \phi^\alpha \otimes e_\alpha. \quad (4.32)$$

Definizione 4.10. Sia $P(M, G)$ un fibrato principale su cui è definita una connessione che decompone ogni $X \in T_u P$ in $X = X^H + X^V$, con $X^H \in H_u P$, $X^V \in V_u P$ e $u \in P$, sia V uno spazio vettoriale, sia $\phi \in \Omega^r(P, V)$ una r -forma differenziale a valori in V , e siano $X_1, \dots, X_{r+1} \in T_u P$. La **derivata covariante** $D : \Omega^r(P, V) \rightarrow \Omega^{r+1}(P, V)$ di ϕ è definita da

$$D\phi(X_1, \dots, X_{r+1}) := d_P \phi(X_1^H, \dots, X_{r+1}^H). \quad (4.33)$$

Definizione 4.11. Sia $P(M, G)$ un fibrato principale e ω una 1-forma di connessione su P . La **2-forma di curvatura** Ω è la derivata covariante della 1-forma di connessione ω :

$$\Omega := D\omega \in \Omega^2(P, \mathfrak{g}). \quad (4.34)$$

Proposizione 4.5. Sia $P(M, G)$ un fibrato principale. La 2-forma di curvatura Ω soddisfa

$$(R_a)^* \Omega = \text{Ad}_{a^{-1}} \Omega \quad (4.35)$$

con $a \in G$.

Esempio 4.4. Nel caso in cui il gruppo di struttura sia $G \subset \text{GL}(n, \mathbb{R})$, si ha $\mathfrak{g} \in \text{M}_n(\mathbb{R})$, e quindi $(R_a)^* \Omega = \text{Ad}_{a^{-1}} \Omega = a^{-1} \Omega a$.

Si introduce ora il commutatore tra due forme differenziali.

Definizione 4.12. Siano $P(M, G)$ un fibrato principale, ζ una p -forma a valori in $\mathfrak{g}$ e η una q -forma a valori in $\mathfrak{g}$. Si definisce il **commutatore** tra ζ e η come

$$[\zeta, \eta] := \zeta \wedge \eta - (-1)^{pq} \eta \wedge \zeta. \quad (4.36)$$

Proposizione 4.6. Siano $P(M, G)$ un fibrato principale, $\zeta = \zeta^\alpha \otimes T_\alpha$ una p -forma a valori in $\mathfrak{g}$, $\eta = \eta^\alpha \otimes T_\alpha$ una q -forma a valori in $\mathfrak{g}$, dove $\zeta^\alpha \in \Omega^p(P)$ e $\eta^\alpha \in \Omega^q(P)$, e $\{T_\alpha\}$ una base di $\mathfrak{g}$ tale che $[T_\alpha, T_\beta] = f_{\alpha\beta}^\gamma T_\gamma$. Il commutatore tra ζ e η è uguale a

$$[\zeta, \eta] = f_{\alpha\beta}^\gamma T_\gamma \otimes \zeta^\alpha \wedge \eta^\beta. \quad (4.37)$$

Dimostrazione. Partendo dalla definizione di commutatore si ha

$$\begin{aligned} [\zeta, \eta] &= \zeta \wedge \eta - (-1)^{pq} \eta \wedge \zeta = T_\alpha T_\beta \zeta^\alpha \wedge \eta^\beta - (-1)^{pq} T_\beta T_\alpha \eta^\beta \wedge \zeta^\alpha \\ &= [T_\alpha, T_\beta] \otimes \zeta^\alpha \wedge \eta^\beta = f_{\alpha\beta}^\gamma T_\gamma \otimes \zeta^\alpha \wedge \eta^\beta. \end{aligned} \quad (4.38)$$

□

Lemma 4.2. Siano $P(M, G)$ un fibrato principale su cui è definita una connessione tale che $T_u P = H_u P \oplus V_u P$, $X \in H_u P$ e $Y \in V_u P$. Allora $[X, Y] \in H_u P$.

Teorema 4.4. Siano $P(M, G)$ un fibrato principale e $X, Y \in T_u P$. Allora la 2-forma di curvatura Ω e la 1-forma di connessione ω soddisfano l'equazione di struttura di Cartan

$$\Omega(X, Y) = d_P \omega(X, Y) + [\omega(X), \omega(Y)] \quad (4.39)$$

che è anche scritta come

$$\Omega = d_P \omega + \omega \wedge \omega. \quad (4.40)$$

Si vuole dare ora un'interpretazione geometrica alla curvatura. Siano $X, Y \in H_u P$. Dato che $\omega(X) = \omega(Y) = 0$, si ha

$$d_P \omega(X, Y) = X\omega(Y) - Y\omega(X) - \omega([X, Y]) = -\omega([X, Y]). \quad (4.41)$$

Essendo $X^H = X$ e $Y^H = Y$, si ha

$$\Omega(X, Y) = d_P \omega(X^H, Y^H) = d_P \omega(X, Y) = -\omega([X, Y]). \quad (4.42)$$

Si consideri un sistema di coordinate $\{x^\mu\}$ su una carta U . Siano $V = \partial/\partial x^1$ e $W = \partial/\partial x^2$. Si prenda un parallelogramma infinitesimo γ i cui vertici sono $O = \{0, \dots, 0\}$, $P = \{\epsilon, 0, \dots, 0\}$, $Q = \{\epsilon, \delta, 0, \dots, 0\}$ e $R = \{0, \delta, 0, \dots, 0\}$. Si consideri il sollevamento orizzontale $\tilde{\gamma}$ di γ . Siano $X, Y \in H_u P$ tali che $\pi_* X = \epsilon V$ e $\pi_* Y = \delta W$. Allora

$$\pi_*([X, Y]^H) = \epsilon \delta [V, W] = \epsilon \delta \left[\frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2} \right] = 0 \quad (4.43)$$

ossia $[X, Y]$ è verticale. Questa considerazione mostra che il sollevamento orizzontale $\tilde{\gamma}$ della curva chiusa γ fallisce a chiudersi. Questo fallimento è proporzionale al vettore verticale $[X, Y]$ che collega il punto iniziale e quello finale sulla stessa fibra. La curvatura misura la distanza, $\Omega(X, Y) = -\omega([X, Y]) = A$, dove A è un elemento di $\mathfrak{g}$ tale che $[X, Y] = A^\#$.

Dato che la discrepanza tra i punti iniziale e finale del sollevamento orizzontale di una curva chiusa è l'olonomia, ci si aspetta che il gruppo di olonomia sia esprimibile in termini della curvatura.

Teorema 4.5. (di Ambrose-Singer) Sia $P(M, G)$ un fibrato principale munito di connessione. L'algebra di Lie $\mathfrak{h}$ del gruppo di olonomia Φ_{u_0} di un punto $u_0 \in P$ coincide con la sottoalgebra di $\mathfrak{g}$ generata dagli elementi della forma $\Omega_u(X, Y)$, dove $u \in P$ è un punto sullo stesso sollevamento orizzontale di u_0 e $X, Y \in H_u P$.

Come è stato fatto per la 1-forma di connessione, si definisce una forma locale della 2-forma di curvatura.

Definizione 4.13. Siano $P(M, G)$ un fibrato principale, Ω una 2-forma di curvatura, $\{U_i\}$ un ricoprimento aperto di M e σ_i una sezione locale definita per ogni U_i . Si definisce la 2-forma a valori in $\mathfrak{g}$ su U_i

$$\mathcal{F}_i := \sigma_i^* \Omega \in \Omega^2(U_i, \mathfrak{g}) \quad (4.44)$$

detta **forma locale di curvatura**.

Proposizione 4.7. Siano $P(M, G)$ un fibrato principale, $\mathcal{F}$ una forma locale di curvatura e $\mathcal{A}$ una forma locale di connessione, entrambe definite su una carta U di M . Tra $\mathcal{F}$ e $\mathcal{A}$ vale la relazione

$$\mathcal{F} = d\mathcal{A} + \mathcal{A} \wedge \mathcal{A} \quad (4.45)$$

e l'azione di $\mathcal{F}$ su un vettore $(X, Y) \in TM$ è data da

$$\mathcal{F}(X, Y) = d\mathcal{A}(X, Y) + [\mathcal{A}(X), \mathcal{A}(Y)]. \quad (4.46)$$

Dimostrazione. Si sa che $\mathcal{A} = \sigma^*\omega$, $d_P\omega = d\sigma^*\omega$ e $\sigma^*(\zeta \wedge \eta) = \sigma^*\zeta \wedge \sigma^*\eta$. Dall'equazione di Cartan scritta nella forma visibile nell'Equazione (4.39) si trova

$$\mathcal{F} = \sigma^*(d_P\omega + \omega \wedge \omega) = d\sigma^*\omega + \sigma^*\omega \wedge \sigma^*\omega = d\mathcal{A} + \mathcal{A} \wedge \mathcal{A}. \quad (4.47)$$

Siano x^μ le coordinate della carta U e sia $\mathcal{A} = \mathcal{A}_\mu dx^\mu$. Partendo da $\mathcal{F} = \frac{1}{2}\mathcal{F}_{\mu\nu}dx^\mu \wedge dx^\nu$ si ottiene

$$\mathcal{F}_{\mu\nu} = \partial_\mu \mathcal{A}_\nu - \partial_\nu \mathcal{A}_\mu + [\mathcal{A}_\mu, \mathcal{A}_\nu] \quad (4.48)$$

che porta all'equazione che si voleva dimostrare. $\square$

Essendo $\mathcal{A}_\mu$ e $\mathcal{F}_{\mu\nu}$ funzioni a valori in $\mathfrak{g}$, esse possono essere espanse in termini della base $\{T_\alpha\}$ di $\mathfrak{g}$ come $\mathcal{A}_\mu = A_\mu^\alpha T_\alpha$ e $\mathcal{F}_{\mu\nu} = F_{\mu\nu}^\alpha T_\alpha$. I vettori della base soddisfano la solita relazione di commutazione $[T_\alpha, T_\beta] = f_{\alpha\beta}^\gamma T_\gamma$. Si ottiene quindi

$$F_{\mu\nu}^\alpha = \partial_\mu A_\nu^\alpha - \partial_\nu A_\mu^\alpha + f_{\beta\gamma}^\alpha A_\mu^\beta A_\nu^\gamma. \quad (4.49)$$

Teorema 4.6. Siano $P(M, G)$ un fibrato principale munito di connessione, U_i e U_j carte su M tali che $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ e $\mathcal{F}_i$ e $\mathcal{F}_j$ forme locali di curvatura sulle rispettive carte. Su $U_i \cap U_j$ soddisfano la condizione di compatibilità

$$\mathcal{F}_j = \text{Ad}_{t_{ij}^{-1}} \mathcal{F}_i. \quad (4.50)$$

Teorema 4.7. Siano $P(M, G)$ un fibrato principale munito di connessione e Ω la 2-forma di curvatura. Vale l'identità di Bianchi

$$D\Omega = 0. \quad (4.51)$$

Dimostrazione. Essendo ω e Ω a valori in $\mathfrak{g}$, è possibile espanderle nella base $\{T_\alpha\}$ di $\mathfrak{g}$ come $\omega = \omega^\alpha T_\alpha$ e $\Omega = \Omega^\alpha T_\alpha$. Quindi l'equazione di Cartan, scritta nella forma presente nell'Equazione (4.40), diventa

$$\Omega^\alpha = d_P\omega^\alpha + f_{\beta\gamma}^\alpha \omega^\beta \wedge \omega^\gamma. \quad (4.52)$$

Applicando la derivata esterna, si ottiene

$$d_P\Omega^\alpha = f_{\beta\gamma}^\alpha d_P\omega^\beta \wedge \omega^\gamma + f_{\beta\gamma}^\alpha \omega^\beta \wedge d_P\omega^\gamma. \quad (4.53)$$

Dato che per un vettore orizzontale X si ha $\omega(X) = 0$, si trova

$$D\Omega(X, Y, Z) = d_P\Omega(X^H, Y^H, Z^H) = 0. \quad (4.54)$$

$\square$

Cerchiamo una forma locale per l'identità di Bianchi. Se si applica σ^* all'Equazione (4.53), si ottiene $\sigma^*d_P\Omega = d(\sigma^*\Omega) = d\mathcal{F}$ per il membro a sinistra, e

$$\sigma^*(d_P\omega \wedge \omega - \omega \wedge d_P\omega) = d\sigma^*\omega \wedge \sigma^*\omega - \sigma^*\omega \wedge d\sigma^*\omega = d\mathcal{A} \wedge \mathcal{A} - \mathcal{A} \wedge d\mathcal{A} = \mathcal{F} \wedge \mathcal{A} - \mathcal{A} \wedge \mathcal{F} \quad (4.55)$$

per il membro a destra. Pertanto, definendo $\mathcal{D}$ tale che la sua azione su una p -forma η a valori in $\mathfrak{g}$ su M sia $\mathcal{D}\eta := d\eta + [\mathcal{A}, \eta]$, si ottiene

$$\mathcal{D}\mathcal{F} = d\mathcal{F} + [\mathcal{A}, \mathcal{F}] = d\mathcal{F} + \mathcal{A} \wedge \mathcal{F} - \mathcal{F} \wedge \mathcal{A} = 0. \quad (4.56)$$

4.2 Derivata covariante su fibrati vettoriali

A partire da una connessione su un fibrato principale, è possibile definire la derivata covariante su un fibrato vettoriale ad esso associato.

Tale operazione di derivazione è spesso usata in fisica. Ad esempio un campo scalare carico in elettrodinamica quantistica è rappresentato da una sezione di un fibrato vettoriale associato a un fibrato principale con gruppo di struttura $U(1)$, e poter differenziare in maniera covariante questa sezione è importante per costruire un'azione gauge-invariante.

4.2.1 Derivata covariante su fibrati vettoriali associati

Sia $P(M, G)$ un fibrato principale con proiezione π_P . Si prendano una carta U_i di M e una sezione σ_i su U_i . Sia $\tilde{\gamma}$ il sollevamento orizzontale di una curva $\gamma : [0, 1] \rightarrow U_i$, e si denotino $\gamma(0) = p_0$ e $\tilde{\gamma}(0) = u_0$. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione k . Come visto nell'Esempio 3.7, data una rappresentazione $\rho : G \rightarrow GL(V)$ di G su V , si definisce il fibrato vettoriale $E = P \times_\rho V$ associato a P , con proiezione π_E . Sia $X \in T_{p_0}M$ un vettore tangente a $\gamma(t)$ in p_0 . Sia $s \in \Gamma(M, E)$ una sezione su M . Si scriva un elemento di E come $[(u, v)] = \{(ug, \rho(g)^{-1}v) \mid g \in G\}$, con $u \in P$ e $v \in V$. Fissata una sezione locale σ_i , ogni sezione di E può essere rappresentata localmente nella forma $s(p) = [(\sigma_i(p), \xi(p))]$.

Si vuole ora definire il trasporto parallelo su E lungo la curva γ in M .

Definizione 4.14. Siano $P(M, G)$ un fibrato principale, $E = P \times_\rho V$ il fibrato vettoriale ad esso associato e $\tilde{\gamma}$ il sollevamento orizzontale di una curva $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$. Una sezione lungo γ $s(\gamma(t)) = [(\tilde{\gamma}(t), \eta(\gamma(t)))]$ è **trasportata parallelamente** se η è costante lungo $\gamma(t)$.

Questa definizione è intrinseca dato che se $\tilde{\gamma}'(t)$ è un altro sollevamento orizzontale di γ , allora può essere scritto come $\tilde{\gamma}'(t) = \tilde{\gamma}(t)a$ con $a \in G$, e si ha

$$[(\tilde{\gamma}(t), \eta(\gamma(t)))] = [(\tilde{\gamma}'(t)a^{-1}, \eta(\gamma(t)))] = [(\tilde{\gamma}'(t), \rho(a^{-1})\eta(\gamma(t)))]. \quad (4.57)$$

Se $\eta(\gamma(t))$ è costante lungo $\gamma(t)$, allora, essendo a indipendente da t , anche $\rho(a^{-1})\eta(\gamma(t))$ è costante, e quindi la definizione è indipendente dalla scelta del sollevamento orizzontale.

È ora possibile definire la derivata covariante sul fibrato vettoriale E .

Definizione 4.15. Siano $P(M, G)$ un fibrato principale ed $E = P \times_\rho V$ il suo fibrato vettoriale associato. Sia $s(p)$ una sezione di E tale per cui lungo la curva $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$ si ha $s(\gamma(t)) = [(\tilde{\gamma}(t), \eta(\gamma(t)))]$, dove $\tilde{\gamma}(t)$ è un sollevamento orizzontale di $\gamma(t)$. La **derivata covariante** di $s(\gamma(t))$ lungo $\gamma(t)$ a $p_0 = \gamma(0)$ è

$$\nabla_X s := \left[\left(\tilde{\gamma}(0), \frac{d}{dt} \eta(\gamma(t)) \Big|_{t=0} \right) \right] \quad (4.58)$$

dove X è il vettore tangente a $\gamma(t)$ in p_0 .

Perché la derivata covariante sia intrinseca, essa non deve dipendere dal sollevamento orizzontale. Sia $\tilde{\gamma}'(t) = \tilde{\gamma}(t)a$, con $a \in G$, un altro sollevamento orizzontale di γ . Se si sceglie $\tilde{\gamma}'(t)$ come sollevamento orizzontale, si ha $[(\tilde{\gamma}'(t), \rho(a^{-1})\eta(\gamma(t)))]$, e la derivata covariante è

$$\begin{aligned} \left[\left(\tilde{\gamma}'(0), \frac{d}{dt} \{ \rho(a^{-1})\eta(\gamma(t)) \} \Big|_{t=0} \right) \right] &= \left[\left(\tilde{\gamma}'(0), \rho(a^{-1}) \frac{d}{dt} \eta(\gamma(t)) \Big|_{t=0} \right) \right] \\ &= \left[\left(\tilde{\gamma}'(0)a^{-1}, \frac{d}{dt} \eta(\gamma(t)) \Big|_{t=0} \right) \right] = \left[\left(\tilde{\gamma}(0), \frac{d}{dt} \eta(\gamma(t)) \Big|_{t=0} \right) \right]. \end{aligned} \quad (4.59)$$

Pertanto essa dipende solo dal vettore tangente X e dalla sezione $s \in \Gamma(M, E)$, e non dal sollevamento orizzontale.

Per ora si è definita la derivata covariante in un punto $p_0 = \gamma(0)$, e si vuole estendere tale definizione a tutti i punti $p \in M$. Si prenda, al posto di un vettore, un campo vettoriale $X \in \mathfrak{X}(M)$ il cui valore in p sia $X_p \in T_p M$. Esiste una curva $\alpha : [0, 1] \rightarrow M$ tale che $\alpha(0) = p$ e abbia X_p come vettore tangente in p . Quindi ogni sollevamento orizzontale $\tilde{\alpha}$ di α permette di definire la derivata covariante $\nabla_X s|_p := \nabla_{X_p} s$. Variando $p \in M$ si ottiene una nuova sezione di E , pertanto $\nabla_X : \Gamma(M, E) \rightarrow \Gamma(M, E)$, $s \mapsto \nabla_X s$.

Si definisce anche $\nabla : \Gamma(M, E) \rightarrow \Omega^1(M, E)$ tale che $\nabla s(X) := \nabla_X s$, con $X \in \mathfrak{X}(M)$ e $s \in \Gamma(M, E)$.

4.2.2 Forma locale della derivata covariante

Per effettuare operazioni conviene avere una rappresentazione in coordinate locali della derivata covariante.

Siano $P(M, G)$ un fibrato principale ed $E = P \times_\rho V$ un fibrato vettoriale ad esso associato. Si prenda una sezione locale $\sigma_i(p) \in \Gamma(U_i, P)$ e si costruisca la trivializzazione locale canonica $\sigma_i(p) = \phi_i(p, e)$. Siano $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$ una curva in U_i e $\tilde{\gamma}$ il suo sollevamento orizzontale, il quale è scritto come

$$\tilde{\gamma}(t) = \sigma_i(t)g_i(t) \quad (4.60)$$

dove $g_i(t) := g_i(\gamma(t)) \in G$. Si prenda una sezione $e_\alpha(p) := [(\sigma_i(p), e_\alpha^0)]$ di E , dove e_α^0 è l' α -esimo vettore di base di V , $(e_\alpha^0)^\beta = (\delta_\alpha)^\beta$. Si ha

$$e_\alpha(t) = [(\tilde{\gamma}(t)g_i(t)^{-1}, e_\alpha^0)] = [(\tilde{\gamma}(t), g_i(t)^{-1}e_\alpha^0)]. \quad (4.61)$$

Si noti che $g_i(t)^{-1}$ agisce su e_α^0 per compensare il cambio di base lungo γ . La derivata covariante di e_α è data da

$$\begin{aligned}\nabla_X e_\alpha &= \left[\left(\tilde{\gamma}(0), \frac{d}{dt} \{g_i(t)^{-1} e_\alpha^0\} \Big|_{t=0} \right) \right] \\ &= \left[\left(\tilde{\gamma}(0), -g_i(t)^{-1} \left\{ \frac{d}{dt} g_i(t) \right\} g_i(t)^{-1} e_\alpha^0 \right) \Big|_{t=0} \right] \\ &= [(\tilde{\gamma}(0)g_i(0)^{-1}, \mathcal{A}_i(X)e_\alpha^0)]\end{aligned}\quad (4.62)$$

dove si è usata l'Equazione (4.25). Da qui si trova l'espressione locale

$$\nabla_X e_\alpha = [(\sigma_i(0), \mathcal{A}_i(X)e_\alpha^0)]. \quad (4.63)$$

Sia $\mathcal{A}_i = \mathcal{A}_{i\mu} dx^\mu = \mathcal{A}_{i\mu}^\alpha dx^\mu$, dove $\mathcal{A}_{i\mu}^\alpha := \mathcal{A}_{i\mu}^\gamma (T_\gamma)^\alpha_\beta$. Il secondo membro dell'Equazione (4.63) diventa

$$\mathcal{A}_i(X)e_\alpha^0 = \frac{dx^\mu}{dt} e_\beta^0 \mathcal{A}_{i\mu}^\beta \delta_\alpha^\gamma = \frac{dx^\mu}{dt} \mathcal{A}_{i\mu}^\beta e_\beta^0. \quad (4.64)$$

Sostituendo nell'Equazione (4.63) si ottiene

$$\nabla_X e_\alpha = \left[\left(\sigma_i(0), \frac{dx^\mu}{dt} \mathcal{A}_{i\mu}^\beta e_\beta^0 \right) \right] = \frac{dx^\mu}{dt} \mathcal{A}_{i\mu}^\beta e_\beta \quad (4.65)$$

o

$$\nabla e_\alpha = \mathcal{A}_{i\alpha}^\beta e_\beta. \quad (4.66)$$

In particolare, per una curva coordinata x^μ , si ha

$$\nabla_{\partial/\partial x^\mu} e_\alpha = \mathcal{A}_{i\mu}^\beta e_\beta. \quad (4.67)$$

Dato che ∇ deve soddisfare la regola di Leibniz, e sfruttando l'Equazione (4.66), si può calcolare

$$\begin{aligned}\nabla s &= \nabla(\xi^\alpha e_\alpha) = d\xi^\alpha \otimes e_\alpha + \xi^\alpha \nabla e_\alpha \\ &= d\xi^\alpha \otimes e_\alpha + \xi^\alpha \mathcal{A}_{i\alpha}^\beta e_\beta = e_\alpha \otimes (d\xi^\alpha + \mathcal{A}_{i\beta}^\alpha \xi^\beta).\end{aligned}\quad (4.68)$$

È importante sottolineare che $\mathcal{A}$, ossia una connessione sul fibrato principale, definisce interamente una derivata covariante su un suo fibrato vettoriale associato.

La derivata covariante è, per costruzione, indipendente dalla scelta della trivializzazione locale. È possibile osservare ciò anche dalla forma locale di $\nabla_X s$, dove $s(p) = [(\sigma_i(p), \xi_i(p))]$. Siano $\sigma_i(p)$ e $\sigma_j(p)$ sezioni locali, rispettivamente, sulle carte U_i e U_j tali che $U_i \cap U_j \neq \emptyset$. Nell'intersezione $U_i \cap U_j$ si ha $\sigma_j(p) = \sigma_i(p)t_{ij}(p)$. Nella trivializzazione i -esima la derivata covariante è

$$\begin{aligned}\nabla_X s &= \left[\left(\sigma_i(0), \frac{d\xi_i}{dt} + \mathcal{A}_i(X)\xi_i \Big|_{t=0} \right) \right] \\ &= \left[\left(\sigma_j(0) \cdot t_{ij}^{-1}, \frac{d}{dt} (t_{ij}\xi_j) + \mathcal{A}_i(X)t_{ij}\xi_j \Big|_{t=0} \right) \right] \\ &= \left[\left(\sigma_j(0), \frac{d\xi_j}{dt} + \mathcal{A}_j(X)\xi_j \Big|_{t=0} \right) \right]\end{aligned}\quad (4.69)$$

dove si è usata la condizione di compatibilità nell'Equazione (4.15). L'ultima riga è proprio $\nabla_X s$ espressa nella trivializzazione j -esima, e quindi si può concludere, come ci si aspettava, che $\nabla_X s$ non dipende dalla scelta della trivializzazione locale.

Esempio 4.5. Si consideri il fibrato principale $P(M, U(1))$ e si definisca il fibrato vettoriale associato $E = P \times_\rho \mathbb{C}$, dove ρ è l'identificazione naturale di un elemento di $U(1)$ con un numero complesso. L'espressione locale per ω è $\mathcal{A}_i = \mathcal{A}_{i\mu} dx^\mu$. Sia γ una curva in M , e si chiami X il vettore tangente alla curva in $\gamma(0)$. Si prenda una sezione locale e si esprima un sollevamento orizzontale $\tilde{\gamma}$ di γ come $\tilde{\gamma}(t) = \sigma_i(t)e^{i\varphi(t)}$. Se $1 \in \mathbb{C}$ è preso come vettore di base, la sezione di base è

$$e = [(\sigma_i(p), 1)]. \quad (4.70)$$

Sia $\phi(p) = [(\sigma_i(p), \Phi(p))] = \Phi(p)e$ una sezione di E , con $\Phi : M \rightarrow \mathbb{C}$. Tale sezione è identificabile come un campo scalare complesso, e rispetto a $\tilde{\gamma}(t)$ essa è data da

$$\phi(t) = \Phi(t)[(\tilde{\gamma}(t), U(t)^{-1})] \quad (4.71)$$

dove $U(t) = e^{i\varphi(t)}$. La derivata covariante di ϕ lungo γ è

$$\begin{aligned} \nabla_X \phi &= \frac{d\Phi}{dt} [(\tilde{\gamma}(0), U(0)^{-1})] + \Phi(0) [(\tilde{\gamma}(0), U(0)^{-1} \mathcal{A}_i(X) \cdot 1)] \\ &= \left(\frac{d\Phi}{dt} + \mathcal{A}_{i\mu} \Phi \frac{dx^\mu}{dt} \right) e = X^\mu \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x^\mu} + \mathcal{A}_{i\mu} \Phi \right) e. \end{aligned} \quad (4.72)$$

Come si è visto nella Sottosezione 4.2.1, la derivata covariante $\nabla_X s$ definisce un operatore $\nabla : \Gamma(M, E) \rightarrow \Omega^1(M, E)$, che è equivalente a scrivere $\nabla : \Gamma(M, E) \rightarrow \Gamma(M, E \otimes \Omega^1(M))$. Più in generale, l'azione di ∇ su una p -forma a valori vettoriali $s \otimes \eta$, con $\eta \in \Omega^p(M)$, è definita da

$$\nabla(s \otimes \eta) := (\nabla s) \wedge \eta + s \otimes d\eta. \quad (4.73)$$

Proposizione 4.8. Siano $P(M, G)$ un fibrato principale su cui è definita una connessione, $E = P \times_\rho V$ un suo fibrato vettoriale associato, U_i una carta di M e σ_i una sezione di P su U_i . Prendendo la trivializzazione locale canonica su U_i e definendo $e_\alpha := [(\sigma_i, e_\alpha^0)] \in \Gamma(U_i, E)$, dove e_α^0 è l' α -esimo vettore di base di V , si ha

$$\nabla \nabla e_\alpha = e_\beta \otimes \mathcal{F}_{i\alpha}^\beta. \quad (4.74)$$

Dimostrazione. Tramite calcoli diretti si ottiene

$$\begin{aligned} \nabla \nabla e_\alpha &= \nabla(e_\beta \otimes \mathcal{A}_{i\alpha}^\beta) = \nabla e_\beta \wedge \mathcal{A}_{i\alpha}^\beta + e_\beta \otimes d\mathcal{A}_{i\alpha}^\beta \\ &= e_\beta \otimes (d\mathcal{A}_{i\alpha}^\beta + \mathcal{A}_{i\gamma}^\beta \wedge \mathcal{A}_{i\alpha}^\gamma) = e_\beta \otimes \mathcal{F}_{i\alpha}^\beta. \end{aligned} \quad (4.75)$$

□

Di conseguenza, data una sezione di E $s(p) = \xi^\alpha(p)e_\alpha(p)$, vale

$$\nabla \nabla s = e_\alpha \otimes \mathcal{F}_{i\beta}^\alpha \xi^\beta. \quad (4.76)$$

Capitolo 5

Teorie di gauge

Nel Capitolo 4 sono state definite le connessioni. Quello che si mostra in questo capitolo è che le connessioni altro non sono che le teorie di gauge viste da un punto di vista geometrico, e come queste compaiano naturalmente a partire da quanto detto finora. Saranno poi analizzati due esempi notevoli di teorie di gauge da un punto di vista geometrico.

5.1 Costruzione delle teorie di gauge a partire dalle connessioni sui fibrati principali

Partendo da un fibrato principale su cui è presente una connessione, si mette in evidenza il legame tra le strutture geometriche fino a questo momento definite e le teorie di gauge.

5.1.1 Potenziale di gauge e trasformazioni di gauge

Sia $P(M, G)$ un fibrato principale munito di una connessione. La forma locale di connessione $\mathcal{A}_i$ introdotta nella Definizione 4.6 è detta, in fisica, **potenziale di gauge** o **campo di gauge**. Se $\{T_\alpha\}$ è una base di $\mathfrak{g}$, si può scrivere

$$\mathcal{A}_i = \mathcal{A}_{i\mu}^\alpha T_\alpha dx^\mu \quad (5.1)$$

dove $\mathcal{A}_{i\mu}$ sono le componenti del campo di gauge.

Come visto, la 1-forma di connessione $\omega \in \Omega^1(P, \mathfrak{g})$ è in corrispondenza biunivoca con la connessione ed è globale e indipendente dalla scelta della trivializzazione locale. Il potenziale di gauge $\mathcal{A}_i$ è una rappresentazione locale di ω e dipende perciò dalla trivializzazione locale ϕ_i scelta. È possibile cambiare trivializzazione spostandosi su una carta diversa. Il Teorema 4.2 mostra che tra $\mathcal{A}_i$ definita su $U_i \subset M$ e $\mathcal{A}_j$ definita su $U_j \subset M$, con $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, vale

$$\mathcal{A}_j = \text{Ad}_{t_{ij}^{-1}} \mathcal{A}_i + t_{ij}^{-1} dt_{ij}. \quad (5.2)$$

Nel caso in cui il gruppo di struttura G sia un gruppo matriciale sottoinsieme del gruppo lineare generale $\text{GL}(n, \mathbb{R})$ o del gruppo $\text{GL}(n, \mathbb{C})$, come accade nella maggior parte delle

interazioni fisiche, la precedente relazione diventa

$$\mathcal{A}_j = t_{ij}^{-1} \mathcal{A}_i t_{ij} + t_{ij}^{-1} dt_{ij} \quad (5.3)$$

come dimostrato nell'Esempio 4.2. Questo cambio di trivializzazione altro non è che una **trasformazione di gauge**. Essa non rappresenta una trasformazione fisica del campo, ma un cambiamento della descrizione locale della medesima connessione.

Nella Sezione 3.1 si era esplicitato che le funzioni di transizione $t_{ij}(p) := \phi_{i,p}^{-1} \circ \phi_{j,p}$, che permettono di passare da una trivializzazione a un'altra, appartengono al gruppo di struttura. Pertanto una trasformazione di gauge può essere identificata con un cambio di trivializzazione o con l'azione locale di un elemento del gruppo di struttura G . Da qua si evince che G è il **gruppo di gauge** che determina la simmetria interna del sistema sotto trasformazioni di gauge.

Sotto una trasformazione di gauge, una quantità Q può comportarsi in 3 modi:

- non variare, $Q \mapsto Q$, e in tal caso essa è detta **invariante**;
- trasformarsi secondo una legge compatibile con la trasformazione della quantità a cui è associata, e in tal caso è detta **covariante**. Ad esempio, se $q \mapsto \rho(g)q$, una quantità covariante Q che si trasformi secondo la stessa rappresentazione soddisfa $Q \mapsto \rho(g)Q$;
- trasformarsi secondo una legge che non soddisfa le precedenti proprietà.

5.1.2 Necessità geometrica e fisica della derivata covariante

Sia $E = P \times_\rho V$ un fibrato vettoriale associato a $P(M, G)$ tramite la rappresentazione $\rho : G \rightarrow \text{GL}(V)$. Una sezione del fibrato associato $s \in \Gamma(M, E)$ può essere interpretata, nel linguaggio fisico, come un **campo di materia**. Localmente, fissata una sezione σ_i del fibrato principale, essa può essere rappresentata come $s(p) = [(\sigma_i(p), \xi_i(p))]$, dove $\xi_i : U_i \rightarrow V$ è la rappresentazione locale del campo.

La derivata covariante è stata introdotta nella Sottosezione 4.2.1 per permettere di derivare le sezioni di E , dato che una sezione valutata in punti differenti appartiene a spazi distinti e quindi non può essere derivata utilizzando la derivata esterna.

Per comprendere l'origine fisica della derivata covariante, si consideri una trasformazione del campo di materia indotta da un elemento $g \in G$. Se la trasformazione è globale, si ha

$$\xi_i(p) \mapsto \rho(g)\xi_i(p) \quad (5.4)$$

con g indipendente dal punto $p \in M$. Una tale trasformazione agisce nello stesso modo in ogni punto di M .

Nelle teorie di gauge si richiede invece la possibilità che la trasformazione dipenda dal punto: $g = g(p)$. Si ottiene così una trasformazione locale

$$\xi_i(p) \mapsto \rho(g(p))\xi_i(p). \quad (5.5)$$

La derivata esterna del campo non si trasforma, in generale, nello stesso modo. Infatti supponendo di avere due trivializzazioni locali, nelle quali le componenti di una sezione $s \in \Gamma(M, E)$ sono legate dalla relazione $\xi_i = \rho(t_{ij})\xi_j$, dove $t_{ij} : U_i \cap U_j \rightarrow G$ è la funzione di transizione tra le due trivializzazioni, si ha

$$d\xi_i = d(\rho(t_{ij})\xi_j) = d\rho(t_{ij})\xi_j + \rho(t_{ij})d\xi_j. \quad (5.6)$$

Compare quindi il termine $d\rho(t_{ij})\xi_j$, che in generale impedisce a $d\xi_i$ di trasformarsi nello stesso modo di ξ_i .

Di conseguenza, se si vuole la covarianza dell'operazione di derivazione, è necessario sostituire la derivata esterna con un operatore che tenga conto della variazione locale della trasformazione. Questo è precisamente il ruolo della derivata covariante ∇ , che come si è visto agisce su una sezione $s = \xi^\alpha e_\alpha$ nel seguente modo:

$$\nabla s = e_\alpha \otimes (d\xi^\alpha + \mathcal{A}_i^\alpha \xi^\beta). \quad (5.7)$$

Introducendo come rappresentazione dell'algebra di Lie la mappa differenziale di ρ all'identità $\rho_* : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$, questa espressione può essere riscritta localmente nella trivializzazione i -esima come

$$\nabla_i \xi_i = d\xi_i + \rho_*(\mathcal{A}_i)\xi_i. \quad (5.8)$$

Utilizzando la relazione $\xi_i = \rho(t_{ij})\xi_j$, si ottiene

$$\begin{aligned} \nabla_i \xi_i &= d(\rho(t_{ij})\xi_j) + \rho_*(\mathcal{A}_i)\rho(t_{ij})\xi_j \\ &= d\rho(t_{ij})\xi_j + \rho(t_{ij})d\xi_j + \rho_*(\mathcal{A}_i)\rho(t_{ij})\xi_j. \end{aligned} \quad (5.9)$$

Applicando la rappresentazione ρ_* alla legge di trasformazione della forma locale di connessione, si ottiene

$$\rho_*(\mathcal{A}_i)\rho(t_{ij}) = -d\rho(t_{ij}) + \rho(t_{ij})\rho_*(\mathcal{A}_j). \quad (5.10)$$

Pertanto

$$\begin{aligned} \nabla_i \xi_i &= d\rho(t_{ij})\xi_j + \rho(t_{ij})d\xi_j - d\rho(t_{ij})\xi_j + \rho(t_{ij})\rho_*(\mathcal{A}_j)\xi_j \\ &= \rho(t_{ij})(d\xi_j + \rho_*(\mathcal{A}_j)\xi_j) \\ &= \rho(t_{ij})\nabla_j \xi_j \end{aligned} \quad (5.11)$$

da cui si vede che la derivata covariante si trasforma nello stesso modo delle componenti del campo, ossia è una quantità covariante.

Si è visto come l'introduzione della derivata covariante, oltre a rispondere alla necessità geometrica di derivare le sezioni di un fibrato associato, risolve un problema di natura fisica permettendo alla derivata di un campo di trasformarsi come le sue componenti.

5.1.3 Campo di forza

La forma locale di curvatura, definita nella Definizione 4.13, nel contesto delle teorie di gauge è identificata con il **campo di forza**. Come si è visto nella Proposizione 4.7, vale la relazione

$$\mathcal{F} = d\mathcal{A} + \mathcal{A} \wedge \mathcal{A}. \quad (5.12)$$

Quando si cambia trivializzazione locale e si passa da una carta U_i a una carta U_j , tra $\mathcal{F}_i$ e $\mathcal{F}_j$ vale la relazione

$$\mathcal{F}_j = \text{Ad}_{t_{ij}^{-1}} \mathcal{F}_i \quad (5.13)$$

che nel caso di gruppo di struttura matriciale diventa

$$\mathcal{F}_j = t_{ij}^{-1} \mathcal{F}_i t_{ij}. \quad (5.14)$$

Si è quindi trovato che, in generale, sotto trasformazioni di gauge il campo di forza non è invariante, bensì covariante.

Nel caso in cui il gruppo di struttura sia abeliano la mappa aggiunta è banale, e quindi $\mathcal{F}$ è invariante.

5.2 Esempi di teorie di gauge

Si applica quanto studiato fino ad adesso ad alcuni esempi specifici di teorie di gauge.

5.2.1 Teoria di gauge U(1): interazione elettromagnetica

Dato un fibrato principale $P(M, G)$, l'elettromagnetismo di Maxwell è descritto da una teoria di gauge nella quale il gruppo di struttura è $G = \text{U}(1)$.

$\text{U}(1)$ è un gruppo abeliano e unidimensionale, pertanto si possono omettere gli indici del gruppo $\alpha, \beta, \dots$ e si può porre la costante di struttura $f_{\alpha\beta} = 0$.

Si supponga che lo spazio base M sia uno spazio di Minkowski quadridimensionale. Essendo questo contraibile a un punto, il Corollario 3.1 dice che P è triviale, pertanto esso può essere scritto come $P = \mathbb{R}^4 \times \text{U}(1)$ ed è necessaria una sola trivializzazione locale su M . Il potenziale di gauge è

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_\mu dx^\mu. \quad (5.15)$$

Come visto nell'Esempio 4.3, i potenziali di gauge $\mathcal{A}_i$ e $\mathcal{A}_j$ su due carte U_i e U_j tali che $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ sono legati dalla trasformazione di gauge descritta dall'Equazione 4.20, che si riporta data la sua centralità nello studio dell'elettromagnetismo:

$$\mathcal{A}_{j\mu} = \mathcal{A}_{i\mu} + i\partial_\mu \Lambda. \quad (5.16)$$

Da questo risultato si vede che il potenziale di gauge $\mathcal{A}$ differisce dal quadripotenziale elettromagnetico standard A per il fattore dell'algebra di Lie i : $\mathcal{A}_\mu = iA_\mu$.

Il campo di forza è

$$\mathcal{F} = d\mathcal{A}. \quad (5.17)$$

Essendo $\text{U}(1)$ abeliano, esso è invariante sotto trasformazioni di gauge.

In componenti si ha

$$\mathcal{F}_{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{A}_\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial \mathcal{A}_\mu}{\partial x^\nu}. \quad (5.18)$$

$\mathcal{F}$ soddisfa l'identità di Bianchi

$$d\mathcal{F} = \mathcal{F} \wedge \mathcal{A} - \mathcal{A} \wedge \mathcal{F} = 0. \quad (5.19)$$

A questo risultato si poteva anche giungere considerando che $\mathcal{F}$ è esatto, ossia $\mathcal{F} = d\mathcal{A}$, e quindi chiuso, cioè $d\mathcal{F} = d^2\mathcal{A} = 0$. In componenti si ha

$$\partial_\lambda \mathcal{F}_{\mu\nu} + \partial_\nu \mathcal{F}_{\lambda\mu} + \partial_\mu \mathcal{F}_{\nu\lambda} = 0. \quad (5.20)$$

Se si identificano le componenti $\mathcal{F}_{\mu\nu} = iF_{\mu\nu}$ con le componenti del campo elettrico $\mathbf{E}$ e del campo magnetico $\mathbf{B}$ come

$$E_i = F_{i0} \quad (5.21)$$

$$B_i = \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}F_{jk} \quad (5.22)$$

dove ϵ_{ijk} è il simbolo di Levi-Civita, l'Equazione (5.20) si riduce a due delle equazioni di Maxwell:

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0 \quad (5.23)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \quad (5.24)$$

Queste equazioni sono conseguenza della geometria dell'interazione, e non della sua dinamica. Per descrivere la dinamica, è necessario specificare l'azione. L'azione di Maxwell $\mathcal{S}_M[\mathcal{A}]$ è un funzionale di $\mathcal{A}$ ed è data da

$$\mathcal{S}_M[\mathcal{A}] := \frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}^4} \mathcal{F}_{\mu\nu} \mathcal{F}^{\mu\nu} d^4x = -\frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}^4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} d^4x. \quad (5.25)$$

Dalla variazione di $\mathcal{S}_M[\mathcal{A}]$ rispetto ad $\mathcal{A}_\mu$ si ottiene l'equazione del moto

$$\partial_\mu \mathcal{F}^{\mu\nu} = 0. \quad (5.26)$$

Da questa si trovano le due rimanenti equazioni di Maxwell nel vuoto

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \quad (5.27)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} - \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = 0. \quad (5.28)$$

Nell'Esempio 4.5 si era considerato il fibrato vettoriale associato $E = P \times_\rho \mathbb{C}$ e data una sua sezione $\phi(p) = [(\sigma_i(p), \Phi(p))] = \Phi(p)e$, con $\Phi : M \rightarrow \mathbb{C}$, identificabile come un campo scalare complesso, se ne era trovata la derivata covariante

$$\nabla_X \phi = X^\mu \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x^\mu} + \mathcal{A}_{i\mu} \Phi \right) e. \quad (5.29)$$

Grazie all'identificazione $\mathcal{A}_\mu = iA_\mu$, questa diventa

$$\nabla_X \phi = X^\mu \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x^\mu} + iA_{i\mu} \Phi \right) e \quad (5.30)$$

che altro non è che la derivata covariante di un campo di materia nell'elettrodinamica scalare, in cui è stata normalizzata la carica elettrica.

5.2.2 Teoria di gauge SU(2): interazione debole

Si consideri la teoria di gauge SU(2) definita su $\mathbb{R}^4$, che descrive le interazioni deboli. Il fibrato principale su cui è costruita questa teoria di gauge è $P(\mathbb{R}^4, \text{SU}(2))$. Essendo $\mathbb{R}^4$ contraibile a un punto, per il Corollario 3.1 è anche triviale, e perciò è possibile descrivere globalmente la connessione mediante un singolo potenziale di gauge

$$\mathcal{A} = A_\mu^\alpha T_\alpha dx^\mu \quad (5.31)$$

dove $T_\alpha := \sigma_\alpha/2i$ sono i generatori dell'algebra $\mathfrak{su}(2)$ e σ_α le matrici di Pauli. Tra i vari T_α vale la relazione

$$[T_\alpha, T_\beta] = \epsilon_{\alpha\beta\gamma} T_\gamma. \quad (5.32)$$

I potenziali di gauge $\mathcal{A}_i$ e $\mathcal{A}_j$ su due carte U_i e U_j tali che $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ sono legati dalla trasformazione di gauge

$$\mathcal{A}_j = t_{ij}^{-1} \mathcal{A}_i t_{ij} + t_{ij}^{-1} dt_{ij} \quad (5.33)$$

Si noti che, al contrario di quanto accade con U(1) come gruppo di struttura, il primo termine non si riduce ad $\mathcal{A}_i$.

Il campo di forza è

$$\mathcal{F} = d\mathcal{A} + \mathcal{A} \wedge \mathcal{A} = \frac{1}{2} \mathcal{F}_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu \quad (5.34)$$

dove

$$\mathcal{F}_{\mu\nu} = \partial_\mu \mathcal{A}_\nu - \partial_\nu \mathcal{A}_\mu + [\mathcal{A}_\mu, \mathcal{A}_\nu] = F_{\mu\nu}^\alpha T_\alpha \quad (5.35)$$

con

$$F_{\mu\nu}^\alpha = \partial_\mu A_\nu^\alpha - \partial_\nu A_\mu^\alpha + \epsilon_{\beta\gamma}^\alpha A_{\mu\beta} A_{\nu\gamma}. \quad (5.36)$$

A differenza del caso elettromagnetico, nel quale il gruppo U(1) è abeliano e quindi il termine $\mathcal{A} \wedge \mathcal{A}$ si annulla, nel caso SU(2) la non-abelianità del gruppo produce nel campo di forza il termine $\epsilon_{\alpha\beta\gamma}^\alpha A_{\mu\beta} A_{\nu\gamma}$. Quindi $\mathcal{F}$ non dipende soltanto dalle derivate del potenziale di gauge, ma anche dal prodotto tra le sue componenti.

L'identità di Bianchi in forma locale è

$$\mathcal{D}\mathcal{F} = d\mathcal{F} + [\mathcal{A}, \mathcal{F}] = 0. \quad (5.37)$$

In questo caso l'azione, detta di Yang-Mills, è

$$\mathcal{S}_{\text{YM}}[\mathcal{A}] := -\frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}^4} \text{tr}(\mathcal{F}_{\mu\nu} \mathcal{F}^{\mu\nu}) d^4x. \quad (5.38)$$

La variazione dell'azione rispetto ad $\mathcal{A}_\mu$ porta a

$$\mathcal{D}_\mu \mathcal{F}^{\mu\nu} = 0. \quad (5.39)$$

Si prenda ora il fibrato vettoriale associato $E = P \times_\rho \mathbb{C}^2$, dove si è presa la rappresentazione fondamentale di SU(2) su $\mathbb{C}^2$. Siano e_α^0 , con $\alpha = 1, 2$, vettori di base di $\mathbb{C}^2$, e si consideri la sezione $e_\alpha(p) := [(\sigma_i(p), e_\alpha^0)]$, dove $\sigma_i(p)$ definisce la trivializzazione canonica di P sulla

carta U_i . Sia $\phi(p) = [(\sigma_i(p), \Phi^\alpha(p)e_\alpha^0)]$ una sezione di E su M . Lungo un sollevamento orizzontale $\tilde{\gamma}(t) = \sigma_i(\gamma(t))U(t)$, con $U(t) \in \text{SU}(2)$, si ha

$$\phi(t) = [(\tilde{\gamma}(t), U(t)^{-1}\Phi^\alpha(t)e_\alpha^0)]. \quad (5.40)$$

La derivata covariante di ϕ lungo $X = d/dt$ è

$$\begin{aligned} \nabla_X \phi &= \left[\left(\tilde{\gamma}(0), U(0)^{-1} \frac{d\Phi^\alpha(0)}{dt} e_\alpha^0 \right) \right] + [(\tilde{\gamma}(0), U(0)^{-1} \mathcal{A}_i(X)^\alpha{}_\beta \Phi^\beta(0) e_\alpha^0)] \\ &= X^\mu \left(\frac{\partial \Phi^\alpha}{\partial x^\mu} + \mathcal{A}_{i\mu}{}^\alpha{}_\beta \Phi^\beta \right) e_\alpha \end{aligned} \quad (5.41)$$

dove nell'ultimo passaggio si è usata l'Equazione (4.25).

Conclusioni

In questa tesi, dopo aver costruito la struttura geometrica necessaria, si sono studiate le connessioni sui fibrati e si è mostrato come queste corrispondano alle teorie di gauge.

Si sono presentati inizialmente i concetti alla base della geometria differenziale, prime fra tutte le varietà topologiche e le varietà lisce, a partire dalle quali si sono trattate le mappe lisce e si sono definiti i vettori, gli spazi e il fibrato tangenti, i loro duali, e i tensori. Dopo aver introdotto il concetto di campo vettoriale e le importanti mappe pushforward e pullback, si sono trattati i flussi e le forme differenziali, sulle quali si è definita la derivata esterna. Successivamente si sono analizzati i gruppi di Lie e le algebre di Lie, di cui sono stati fatti alcuni rilevanti esempi. Si è poi visto come un gruppo di Lie agisca su una varietà e possa essere visto proprio come un insieme di elementi agenti su di essa. Una volta introdotte queste nozioni, si sono definite le strutture sulle quali le connessioni sono costruite: i fibrati. Dopo aver parlato del caso generale, si è entrati nel dettaglio studiando i fibrati vettoriali, che hanno uno spazio vettoriale come fibra, e i fibrati principali, che hanno come fibra il gruppo di struttura. Sono stati enunciati i teoremi più importanti riguardanti i fibrati, e si è mostrato come a partire dai fibrati principali si possano costruire dei fibrati associati.

Il passaggio successivo è stato quello di definire le connessioni sui fibrati principali come scelta del sottospazio orizzontale. Una suddivisione sistematica dello spazio tangente nei suoi sottospazi verticale e orizzontale è resa possibile dalla 1-forma di connessione, della quale si sono enunciate le proprietà e si è introdotta una forma locale. Per rendere possibile un confronto tra punti giacenti in fibre distinte si sono definiti il sollevamento orizzontale e il trasporto parallelo, grazie ai quali si è anche potuta introdurre la derivata covariante. Essa fornisce un modo per derivare le sezioni del fibrato, e quando la si applica alla 1-forma di connessione produce la 2-forma di curvatura. Tale 2-forma, di cui si è data una forma locale, è collegata al fallimento nel chiudersi del sollevamento orizzontale di curve chiuse. Sfruttando la nozione di fibrati associati, a partire dalla connessione su un fibrato principale si è poi introdotta la derivata covariante su un fibrato vettoriale associato, della quale è stata esplicitata la forma locale.

L'ultima parte di questa tesi si è concentrata sul mostrare come le connessioni sui fibrati, viste da un punto di vista fisico, diventino le teorie di gauge, e si sono in questa maniera identificate la forma locale di connessione con il potenziale di gauge, un cambio di trivializzazione con una trasformazione di gauge, il gruppo di struttura con il gruppo di gauge, le sezioni di un fibrato vettoriale associato con i campi di materia e la forma locale di curvatura con il campo di forza. Pertanto si è visto che una trasformazione di gauge altro non

è che un cambio di trivializzazione: esso trasforma il potenziale di gauge, che è un oggetto locale, ma lascia invariata la 1-forma di connessione, la quale invece caratterizza univocamente la connessione. Per effettuare e motivare tali associazioni non è stata introdotta nessuna nuova struttura, perché esse sono semplicemente la naturale riscrittura di quanto già definito e dimostrato se si adotta una prospettiva fisica al posto che geometrica. Si è inoltre giustificata la necessità di introdurre la derivata covariante da un punto di vista fisico e, infine, si sono presentati due esempi notevoli, accennandone le differenze: il caso in cui il gruppo di struttura sia $U(1)$, che corrisponde all'interazione elettromagnetica, e quello in cui il gruppo di struttura sia $SU(2)$, che corrisponde all'interazione debole.

Lo studio delle connessioni sui fibrati e delle teorie di gauge, così come quello del loro legame, potrebbe andare più a fondo di quanto si è andati in questa tesi, e numerosi altri esempi potrebbero essere analizzati. Quello che si è qui esposto è il fatto che le connessioni sui fibrati e le teorie di gauge altro non sono che due facce di una stessa medaglia, le quali se studiate insieme possono portare ad una comprensione globale e più completa di questi argomenti.

Bibliografia

- ¹M. Nakahara, *Geometry, Topology and Physics*, 2^a ed. (Institute of Physics Publishing, 2003).
- ²J. M. Lee, *Introduction to Smooth Manifolds*, 2^a ed. (Springer, 2012).
- ³S. Kobayashi e K. Nomizu, *Foundations of Differential Geometry*, vol. 1 (Interscience Publishers, 1963).
- ⁴A. Cap e J. Slovák, *Parabolic Geometries I: Background and General Theory* (American Mathematical Society, 2009).
- ⁵N. Steenrod, *The Topology of Fibre Bundles* (Princeton University Press, 1951).
- ⁶B. C. Hall, *Lie Groups, Lie Algebras, and Representations, An Elementary Introduction* (Springer, 2003).
- ⁷T. Eguchi, P. B. Gilkey e A. J. Hanson, *Gravitation, Gauge Theories and Differential Geometry*, vol. 66, 6 (1980).
- ⁸E. Latini, *Riemannian geometry*, https://virtuale.unibo.it/pluginfile.php/2899471/mod_unibores/content/1/RiemGeomNotes.pdf (visitato il giorno 20/03/2026).
- ⁹I. Terek, *Connections on Associated Vector Bundles*, https://web.williams.edu/Mathematics/it3/texts/associated_connection.pdf (visitato il giorno 31/08/2026).

Ringraziamenti

Terminata questa tesi, ed essendo la Laurea il momento di chiusura di un capitolo estremamente importante della mia formazione e della mia vita, ci tengo a ringraziare le persone che mi hanno accompagnato durante questo percorso di studi, al quale sono corrisposti anni molto intensi e belli.

Ringrazio mia mamma Deborah e mio babbo Mirco, per l'instancabile supporto e il continuo aiuto che mi offrono, nelle grandi e nelle piccole cose, per tutto ciò che hanno fatto per me, per la loro presenza, per come anche grazie a loro sono la persona che sono, e soprattutto per l'infinito amore che mi hanno sempre dimostrato.

Ringrazio mio fratello Leonardo, per esserci, per il nostro stupendo rapporto e per l'immenso bene che, grazie a lui e per lui, ho provato e provo ogni giorno.

Ringrazio mia zia Pamela, i miei nonni Gianna e Giuseppe, e i miei nonni Albertina e Bruno, per il bene che mi hanno sempre voluto, per tutto il magnifico tempo passato insieme e per la gioia che mi dà ogni volta fare qualcosa con loro.

Ringrazio Ghini, e Cami, Coluc e Bonni, e Pietro e Fracca, per tutte le esperienze vissute insieme e per come, nonostante le nostre strade siano sempre più differenti, la nostra amicizia rimanga un punto inamovibile e in cui sentirmi me stesso.

Ringrazio, e lo faccio con particolare emozione, Alessia, Anita, Artan, Diego, Elisa, Emanuele, Emma, Federico, Gaetano, Guglielmo, Niccolò, Petra e Tomaso, che hanno vissuto con me questo percorso e lo hanno reso più divertente e leggero, e contemporaneamente più emozionante e vivo.

Ringrazio i miei cugini, i miei zii, i miei altri parenti e i miei altri amici, perché se penso ad ognuno di loro e a ciò che in un qualche momento abbiamo fatto assieme, non posso che sorridere.

Ringrazio infine Sofia, che ho conosciuto durante, e in parte grazie a, questo percorso, e che ha reso la mia vita più felice.

