

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

Dipartimento di Fisica e Astronomia “Augusto Righi”
Corso di Laurea in Fisica

Universo oscuro.
Traguardi e limiti della cosmologia Λ CDM

Relatrice:
Prof.ssa Giulia Despali

Presentata da:
Francesco Masi

Anno Accademico 2025/2026

Abstract

La cosmologia moderna stima che circa il 95% della massa-energia totale dell'universo non sia attribuibile alla materia barionica, ovvero quella di cui sono costituite le stelle e gli altri oggetti osservabili, né alla radiazione elettromagnetica. L'universo è infatti composto in gran parte da altro, ovvero da due componenti invisibili alla radiazione, che costituiscono il **dark universe**: la **materia oscura** e l'**energia oscura**.

Diventa quindi di ovvia importanza studiarne la natura, in quanto rappresentano larga parte dell'universo e giocano un ruolo fondamentale in astrofisica e, in cosmologia, nello studio dell'evoluzione delle strutture nell'universo.

Questo lavoro ha come scopo l'analisi dei modelli, delle simulazioni numeriche e delle evidenze osservative più o meno recenti riguardanti la materia oscura e l'energia oscura. In particolare, questa analisi si concentrerà sui punti di forza e sulle contraddizioni del **modello standard della cosmologia**, basato proprio su queste due componenti oscure, detto Λ CDM.

Nel **capitolo 1** vengono esposte le basi teoriche della cosmologia moderna, partendo dalla relatività generale e dalla legge di Hubble, per arrivare alle ipotesi previste dal modello standard cosmologico attuale, che spiega in modo teorico la necessità dell'esistenza sia dell'energia oscura sia della materia oscura.

Nel **capitolo 2** sono esposte le proprietà della materia oscura, sia da un punto di vista astrofisico che particolare, e le evidenze osservative che ne indicano l'esistenza. Infine, sono descritti i metodi di simulazioni numeriche che ci permettono di studiare sistemi di materia oscura e barionica in condizioni dove l'osservazione non è possibile, oppure di ottenere un confronto tra simulazione e dati sperimentali in modo da validare o smontare modelli preesistenti.

Nel **capitolo 3** viene trattato l'argomento dell'energia oscura, in particolare discutendo i dati osservativi più recenti e cercando di dare un'interpretazione fisica a questa componente dell'Universo.

Infine, nel **capitolo 4**, vengono tratte delle conclusioni riassumendo gli argomenti già esposti ed evidenziando i traguardi raggiunti dal modello Λ CDM e i suoi limiti.

Questa tesi vuole, da una parte, sottolineare l'importanza della componente oscura dell'Universo, che ne costituisce di fatto la quasi totalità; dall'altra, vuole ricordare il vasto alone di incertezza che è (ancora) associato a questi temi di ricerca, i quali costituiscono potenzialmente una grande opportunità per scoprire nuova fisica.

Indice

1	Elementi di cosmologia	1
1.1	Fondamenti della cosmologia moderna	1
1.1.1	Legge di Hubble-Lemaître	1
1.1.2	Equazioni di campo di Einstein	3
1.1.3	Equazioni di Friedmann	3
1.1.4	Parametri cosmologici e densità critica	4
1.2	Cosmologia Λ CDM	5
1.2.1	Densità equivalente di radiazione	7
1.2.2	Densità di materia barionica	7
1.2.3	Densità di materia oscura	9
1.2.4	Termine Λ : densità di energia oscura	10
1.2.5	Evoluzione dell'universo	11
2	Materia oscura	14
2.1	Evidenze osservative in astrofisica	14
2.1.1	Velocità di rotazione delle galassie a spirale	14
2.1.2	Osservazioni sulle galassie ellittiche	16
2.1.3	Lensing gravitazionale	17
2.2	Modelli di materia oscura	20
2.2.1	Weakly Interacting Massive Particles (WIMPs)	21
2.2.2	Assioni	23
2.2.3	Neutrini sterili	24
2.3	Simulazioni cosmologiche	25
2.3.1	Simulazioni DM-only	25
2.3.2	Simulazioni idrodinamiche	27
2.3.3	ILLUSTRIS	29
2.3.4	AIDA-TNG	30
3	Energia oscura	35
3.1	Modelli di energia oscura	35
3.1.1	Costante cosmologica	35
3.1.2	Quintessenza	36
3.1.3	Altri modelli	37
3.2	Dati osservativi	37
3.2.1	Supernovae termonucleari (SNIa) ad alto redshift	38
3.2.2	Spettro di potenza della CMB	39
3.2.3	Baryon Acoustic Oscillations (BAO)	40
3.2.4	Misure di H_0 e tensione di Hubble	41

4	Conclusioni	44
4.1	Traguardi e limiti della cosmologia Λ CDM	44
4.1.1	Risultati verificati	44
4.1.2	Problemi e questioni aperte	45
	Appendici	46
A	Derivazioni ed approfondimenti	46
A.1	Principi della Relatività Generale	46
A.2	Derivazione delle equazioni di Friedmann	47
A.3	Equazione di stato cosmologica	48
B	Costanti e sigle	50
B.1	Costanti fondamentali	50
B.2	Sigle utilizzate	50
	Bibliografia	51

Capitolo 1

Elementi di cosmologia

1.1 Fondamenti della cosmologia moderna

La cosmologia è la branca della fisica e dell'astronomia che studia l'evoluzione e la dinamica su larga scala dell'universo. Storicamente, l'inizio della cosmologia moderna coincide con la pubblicazione della Teoria della Relatività Generale (GR) da parte di Albert Einstein nel 1916, la quale fu immediatamente utile negli anni successivi a matematici e fisici come Karl Schwarzschild, George Lemaître, Edwin Hubble, Arthur Eddington e altri, che vengono considerati i padri della cosmologia.

Il postulato fondamentale su cui si basa questa branca della fisica è detto **principio cosmologico**, il quale afferma che l'universo, se osservato su larga scala (> 100 Mpc), rispetta le proprietà di **omogeneità** (l'universo è uguale in ogni punto) ed **isotropia** (l'universo è uguale in ogni direzione). [Ryden, 2006]

Questo postulato è oggi verificato dalla struttura su larga scala dell'universo e dalla radiazione cosmica di fondo (di cui verrà discusso più avanti). In questa sezione vengono esposti definizioni e risultati che si basano su questa assunzione.

1.1.1 Legge di Hubble-Lemaître

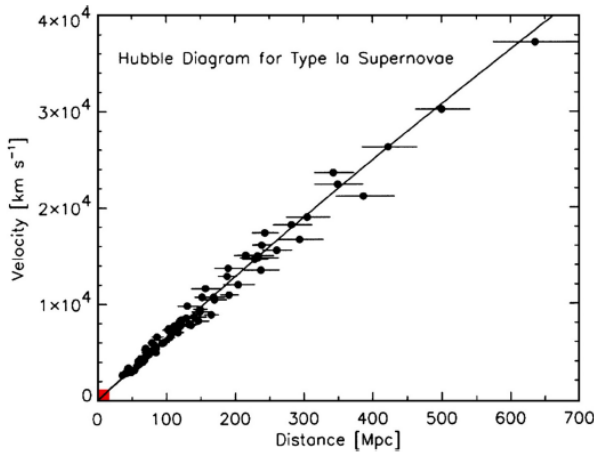
Nel 1929 Edwin Hubble fu il primo ad osservare che le righe spettrali provenienti dalle galassie lontane venivano traslate verso il colore rosso in modo proporzionale alla loro distanza dall'osservatore: in questo modo è stato possibile ricavarne una legge empirica attraverso un fit sui dati ricavati dalle righe spettrali, riportato in fig. 1.1a. Questa traslazione è interpretata attraverso l'effetto doppler relativistico, che secondo la relatività speciale è legato alla velocità di recessione lungo la linea di vista delle galassie osservate. [Hubble, 1929]

Questo ha permesso ad Hubble di trovare una relazione lineare tra la distanza di una galassia d e la velocità alla quale questa sembra allontanarsi dall'osservatore v :

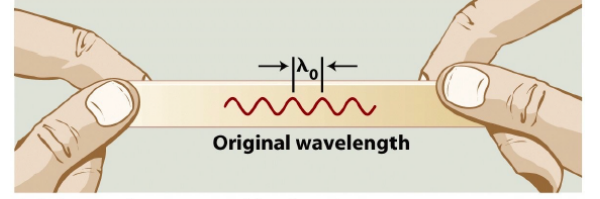
$$v = H_0 d \quad (1.1)$$

dove H_0 , la pendenza fittata attraverso i dati sperimentali, prende il nome di **costante di Hubble** e vale circa $73 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$.¹ Di conseguenza, se il principio cosmologico è valido, tutte le galassie recedono ugualmente a questo rate rispetto a tutte le altre, dal momento che la Via Lattea (MW) non

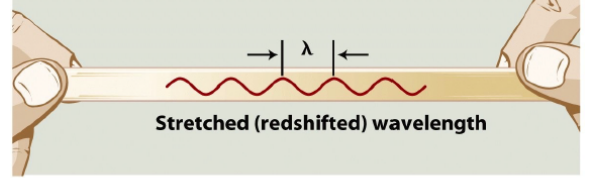
¹In realtà il valore della costante di Hubble non è ancora ben definito ed è oggetto di discussione: la misura riportata qui, ottenuta attraverso il metodo delle cefeidi, è in disaccordo con un'altra misura indipendente, effettuata attraverso il satellite Planck, che sottoastima questo valore ben oltre il range di incertezze accettato. Questo argomento verrà trattato più nel dettaglio nel Cap. 3.



(a) **Fit delle velocità di recessione** di alcune supernovae rispetto alla loro distanza dall'osservatore: la retta nera corrisponde alla legge di Hubble-Lemaître. [Hubble Space Telescope Key Project]



(a) A wave drawn on a rubber band ...



(b) ... increases in wavelength as the rubber band is stretched.

(b) **Analogia dell'elastico** per spiegare il redshift cosmologico: più questo è dilatato, più la frequenza dell'onda diminuisce. [Illustrazione: Pearson]

Figura 1.1: Legge di Hubble-Lemaître e interpretazione euristica del redshift.

ha un sistema di riferimento privilegiato. Questo ha suggerito a Lemaître e Hubble che l'universo si espande: dal momento che le galassie si allontanano l'una dall'altra, ma senza avere un punto fisso attorno al quale questa espansione avviene, è lo spaziotempo stesso a dilatarsi. A questo punto è possibile dare un'interpretazione della traslazione delle righe spettrali osservate da Hubble: queste non sono dovute ad un normale effetto doppler relativistico, ma si tratta di un effetto che d'ora in poi verrà chiamato **redshift cosmologico**.

Questo effetto è esplicabile fisicamente immaginando la radiazione elettromagnetica come un'onda disegnata su un elastico (lo spaziotempo) che, espandendosi, ne diminuisce la frequenza (fig. 1.1b). Questa analogia è quantificabile definendo il redshift attraverso la formula $z = (\lambda_{obs} - \lambda_0)/\lambda_0$. Attraverso questa definizione posso scrivere la legge di Hubble nell'approssimazione per redshift bassi ($d < 3000\text{Mpc}$), ovvero $v \approx cz$.

Misurare il redshift di una galassia diventa quindi equivalente a misurarne la distanza e, dal momento che l'informazione viaggia a c , misurarne l'età a cui la si sta osservando, secondo le formule

$$d \approx cz/H_0 \quad t \approx z/H_0 \quad (1.2)$$

Grazie alla nozione di redshift e a semplici considerazioni dimensionali (assumendo un'espansione a velocità costante dell'universo, che si rivelerà inesatta), si ottiene un valore per l'età dell'universo, detto tempo di Hubble, $t_H \approx 13.6\text{Gyr}$, che nonostante non sia concettualmente esatto è più che accettabile rispetto al valore ritenuto corretto oggi. Un'altra conseguenza cosmologica importante dell'espansione dell'universo è il concetto di orizzonte cosmologico e universo osservabile: questo corrisponde alla sfera costruita intorno alla MW di raggio $d_{\text{horizon}} \approx ct_H$. Risulta impossibile avere informazioni sull'universo che si trova oltre l'orizzonte cosmologico, causalmente sconnesso dall'osservatore secondo la relatività speciale. [Ryden, 2006]

Al fine di descrivere un universo in espansione dove vale il principio cosmologico, è possibile definire la nozione di distanza propria come $r(t) = r a(t)$, dove r è detta distanza comovente e $a(t)$ è detto **fattore di scala cosmologico**. Mentre la distanza comovente è misurata utilizzando un "righello" che si espande allo stesso rate dello spaziotempo, la distanza propria è misurata da un sistema di riferimento che non si espande. In questo modo il fattore di scala $a(t)$ è un fattore adimensionale che dà

informazioni sull'espansione dell'universo e viene utilizzato come parametro cinematico fondamentale. La nozione di distanza comovente verrà utilizzata nel capitolo 2, infatti le simulazioni cosmologiche sono eseguite utilizzando un sistema di riferimento comovente, conservando nel tempo il volume di universo simulato. A questo punto la legge di Hubble-Lemaître descrive l'espansione dell'universo per ogni tempo t e prende la forma

$$H(t) = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \quad (1.3)$$

dove $H(t)$ prende il nome di parametro di Hubble e valgono le seguenti convenzioni di normalizzazione: $a(t_0) = 1$, $H(t_0) = \dot{a}(t_0) = H_0$ e $t_0 =$ tempo presente. Da queste è possibile ricavare le relazioni 1-1 che esistono tra redshift e fattore di scala:

$$a(t) = \frac{1}{1+z} \quad z = \frac{1}{a(t)} - 1 \quad (1.4)$$

Si noti che il tempo presente corrisponde per le considerazioni fatte prima ad un redshift $z = 0$ e ad un fattore di scala $a = 1$ di modo che $r(t_0) = r$.

1.1.2 Equazioni di campo di Einstein

Una volta compresa la cinematica dell'universo in espansione, è necessario capirne la dinamica: dal momento che l'unica interazione non trascurabile su scale cosmologiche è la gravità, è necessario affidarsi alla GR. La gravità, secondo la logica relativistica, non è più una forza ma è descritta come deformazione dello spaziotempo causata dalla massa: le equazioni del moto seguiranno le traiettorie più brevi su questo spazio deformato, dette geodesiche. Le equazioni che descrivono il moto nello spaziotempo sono le equazioni di campo di Einstein, che espresse nel formalismo relativistico appaiono così:

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg^{\mu\nu} + \Lambda g^{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T^{\mu\nu}. \quad (1.5)$$

I primi due termini al primo membro descrivono la geometria dello spaziotempo, attraverso due tensori di rango 2, detti tensore di Ricci e tensore metrico; il secondo membro è invece proporzionale al tensore energia-impulso, che tiene conto della massa-energia. Queste equazioni quantificano, quindi, la natura della curvatura dello spaziotempo in base a cosa esso contiene e la sua evoluzione temporale. Il termine $\Lambda g^{\mu\nu}$, dove Λ è detta costante cosmologica, fu originariamente introdotto da Einstein in modo da ottenere soluzioni per un universo statico. Fu rimosso successivamente dallo stesso Einstein, poi reintrodotta, acquistando un significato profondamente diverso. [Carroll, 1997]

Il termine contenente Λ è infatti oggi ritenuto il responsabile dell'espansione accelerata dell'universo, quindi parte integrante del modello standard cosmologico, come verrà esposto più avanti in questo lavoro. Per ora è sufficiente ignorare la sua origine fisica e considerarlo solo dal punto di vista puramente matematico e cinematico. Queste equazioni non hanno sempre soluzioni analitiche o facili da trovare, tanto che se ne conosce solo un numero limitato. Una trattazione più approfondita della GR è stata fornita in appendice A.1.

1.1.3 Equazioni di Friedmann

Una delle soluzioni delle equazioni di Einstein in ambito cosmologico è la **prima equazione di Friedmann**; la sua derivazione a partire dalla GR è ottenuta in appendice A.2, incorporando la metrica di Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker [Carroll, 1997]:

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + \left[\frac{a^2(t)}{1 - kr^2} \right] dr^2 + r^2 d\Omega^2 \quad (1.6)$$

dove r e Ω sono coordinate spaziali sferiche e k è un parametro di curvatura, le cui proprietà sono descritte nell'analisi della eq. (1.6). Questa metrica porta con sé due ipotesi: l'universo, su larga scala, deve comportarsi come un fluido, ed essere modellato come tale; deve valere inoltre il principio cosmologico. Ora è possibile introdurre la **prima equazione di Friedmann** [Ryden, 2006]:

$$H^2(t) = -\frac{kc^2}{a^2(t)} + \frac{8\pi G\rho(t)}{3} + \frac{\Lambda}{3} \quad \text{dove} \quad H(t) = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \quad (1.7)$$

Compaiono: il parametro k , che rappresenta il coefficiente di curvatura dello spaziotempo; la variabile $\rho(t)$ rappresenta la densità di massa-energia; infine compaiono altre costanti e variabili note tra cui la costante cosmologica. In geometria differenziale il coefficiente di curvatura k è negativo se si sta lavorando su uno spaziotempo iperbolico, o aperto, ovvero due raggi luminosi paralleli all'infinito tendono a divergere. D'altra parte è positivo nel caso di uno spaziotempo chiuso, o sferico, dove due raggi luminosi paralleli all'infinito convergono. Per $k = 0$ l'universo è piatto, e di fatto raggi paralleli rimangono paralleli, come schematizzato in fig. 1.2.

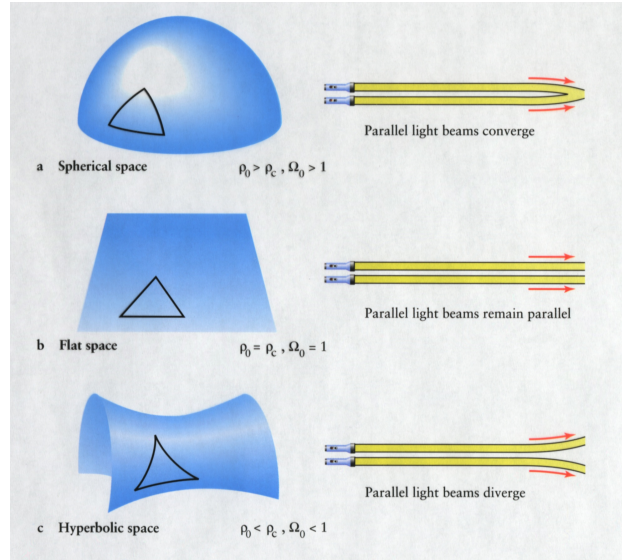


Figura 1.2: **Curvatura dello spaziotempo** rappresentata schematicamente in due dimensioni per i diversi possibili valori di k . [Illustrazione: Pearson]

Incorporando questa equazione all'equazione di stato cosmologica (trattata in appendice A), che aggiunge l'ipotesi di fluido perfetto, si ottiene la **seconda equazione di Friedmann** [Ryden, 2006]:

$$\frac{\ddot{a}(t)}{a(t)} = -\frac{4\pi G}{3} \left(\rho(t) + \frac{3P}{c^2} \right) + \frac{\Lambda}{3} \quad (1.8)$$

dove P indica la pressione media del fluido. Anche in questo caso la derivazione matematica è lasciata in appendice A.2.

Sia la eq. (1.7) che la eq. (1.8) sono equazioni differenziali rispettivamente del primo e second'ordine le cui soluzioni descrivono l'evoluzione del fattore di scala in funzione della densità e del tempo. In altre parole, in questo modo si sono ottenute delle equazioni del moto per l'universo in espansione dipendenti solamente dal tempo e da parametri fisici misurabili.

1.1.4 Parametri cosmologici e densità critica

Per poter utilizzare operativamente le equazioni di Friedmann ed effettuare delle misure, è necessario introdurre delle nuove variabili. Si consideri la prima equazione di Friedmann per i valori $k = 0$ (ipotesi

di un universo piatto) e $\Lambda = 0^2$. Invertendo questa equazione si ottiene

$$\rho_c(t) \equiv \rho(t) \Big|_{k=\Lambda=0} = \frac{3H^2(t)}{8\pi G} \quad (1.9)$$

Dove $\rho_c(t)$ prende il nome di densità critica. Si può quindi definire un parametro adimensionale di densità $\Omega(t) = \rho(t)/\rho_c(t)$, normalizzando la densità rispetto a quella critica. Sempre mantenendo l'approssimazione $\Lambda = 0$, l'equazione di Friedmann prende la forma

$$H^2(t)(\Omega(t) - 1)a^2(t) = kc^2 \quad (1.10)$$

Da questa equazione ci si può accorgere che il segno di k è determinato da $\Omega(t)$ che dà quindi informazioni sulla curvatura, perciò si ottiene:

- un universo iperbolico per $\Omega < 1$,
- un universo euclideo (o piano) per $\Omega = 1$,
- un universo chiuso (sferico) per $\Omega > 1$.

Direttamente dal principio cosmologico, si può dimostrare che la curvatura k dell'universo rimane costante nel tempo e di conseguenza anche il membro di destra della eq. (1.10). Immediatamente segue che, segnando con il pedice $_0$ i valori riferiti al tempo presente:

$$H^2(t)(\Omega(t) - 1)a^2(t) = kc^2 = \text{const} = H_0^2(\Omega_0 - 1)a_0^2 = H_0^2(\Omega_0 - 1) \quad (1.11)$$

ovvero si può ottenere la curvatura k dell'universo, costante nel tempo, a partire da parametri misurabili riferiti al tempo presente:

$$k = \frac{H_0^2(\Omega_0 - 1)}{c^2} \quad (1.12)$$

Si consideri l'equazione di stato cosmologica $P = w\rho c^2$ (descritta in appendice A.3): questa è una relazione costitutiva che lega la pressione media P alla densità ρ , trattando di fatto l'universo come un fluido. Utilizzando questa relazione come condizione su P e considerando le condizioni al contorno su $a(t)$ discusse precedentemente è possibile ottenere una soluzione nella variabile t per le equazioni differenziali eq. (1.7) e eq. (1.8):

$$\rho(t) = \rho_0 a^{-3(1+w)}(t) \quad (1.13)$$

o, equivalentemente, nella variabile z

$$\rho(z) = \rho_0 (1 + z)^{3(1+w)} \quad (1.14)$$

Queste soluzioni analitiche (fissato il parametro w , che sarà trattato nel prossimo paragrafo) descrivono quindi l'evoluzione della densità dell'universo: informazione molto utile, insieme alla possibilità di determinare la curvatura k , nella costruzione di un modello cosmologico come il Λ CDM. [Ryden, 2006]

1.2 Cosmologia Λ CDM

Il modello teorico della cosmologia più accettato dalla comunità scientifica, per la quantità di evidenze osservative raccolte finora, è il modello **Λ - Cold Dark Matter**, detto anche modello cosmologico standard. Questo modello è basato sulle equazioni di Friedmann e sull'ipotesi dell'esistenza di due nuove componenti dell'universo, oltre alla materia barionica e alla radiazione: la **materia oscura**

²Questa assunzione risulta essere accettabile, considerando che molte stime prevedono $\Lambda \approx 10^{-55} \text{cm}^{-2}$

(DM) fredda³ e l'energia oscura (DE), il cui studio è centrale in questo lavoro. Ignorando per ora la natura fisica di queste ultime, semplicemente accettando che siano invisibili alla radiazione e poco (o per nulla) interagenti con la materia barionica, è comunque possibile inserirle all'interno delle equazioni di Friedmann, considerando che la densità dell'universo deve essere la somma delle densità delle sue componenti

$$\rho = \rho_b + \rho_{\text{rad}} + \rho_{\text{DM}} + \rho_{\Lambda} \quad (1.15)$$

e di conseguenza

$$\Omega = \Omega_b + \Omega_{\text{rad}} + \Omega_{\text{DM}} + \Omega_{\Lambda} \quad (1.16)$$

ricordandosi della definizione di Ω . Si indicano con i pedici: $_b$ la materia barionica, $_{\text{rad}}$ la radiazione, $_{\text{DM}}$ la materia oscura e $_{\Lambda}$ l'energia oscura: la scelta di questo pedice sarà spiegata successivamente. A questo punto è possibile ricavare una versione alternativa dell'equazione di Friedmann nel modello Λ CDM:

$$H^2 = H_0^2(\Omega_{0,\text{rad}}a^{-4} + \Omega_{0,\text{mat}}a^{-3} + (1 - \Omega_0)a^{-2} + \Omega_{0,\Lambda}) \quad (1.17)$$

Dove le potenze per a sono state ricavate dalla eq. (1.13) assegnando i seguenti parametri per l'equazione di stato cosmologica: $w = 0$ per le componenti non relativistiche, ovvero materia barionica e DM, indicate con $_{\text{mat}}$; $w = 1/3$ per la radiazione, $w = -1$ per il termine di energia oscura. Con questi valori di w , le cui derivazioni vanno oltre gli scopi di questo lavoro, la eq. (1.17) descrive l'evoluzione dei parametri di densità nel tempo cosmico, valida ovviamente anche per il tempo presente. [Ryden, 2006]

Uno dei dati osservativi più preziosi in cosmologia è la **radiazione cosmica di fondo (CMB)**, ovvero un corpo nero di temperatura 2.73K, centrato sulla lunghezza d'onda delle microonde, uniforme su tutto il cielo, a parte per piccole oscillazioni di temperatura dell'ordine dei μK (fig. 1.3) [Wilson, 1978]. Questo segnale fu rilevato da Penzias e Wilson nel 1964 e studiato nei decenni successivi fornendo numerose evidenze osservative per la cosmologia moderna.

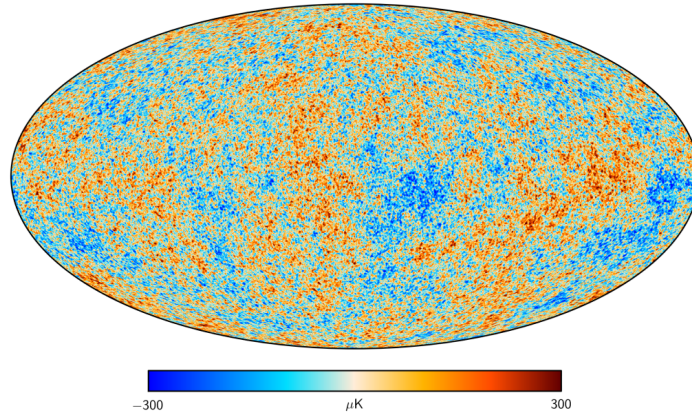


Figura 1.3: **Campo di temperatura della CMB**: si tratta di oscillazioni dell'ordine dei μK intorno a una media di 2.73K. [ESA, Planck]

Molti decenni dopo, le misure effettuate dall'esperimento Boomerang sullo spettro di potenza della CMB hanno stabilito che il parametro di densità totale vale $\Omega_0 \approx 1$, raggiungendo quindi l'importante conclusione che l'**universo è piatto** come conseguenza della eq. (1.12) [MacTavish et al., 2006]. Questo dà una condizione ulteriore per le eq. (1.16) e eq. (1.17), ovvero che

$$\Omega_{\text{rad}}a^{-4} + \Omega_b a^{-3} + \Omega_{\text{DM}}a^{-3} + \Omega_{\Lambda} = 1 \quad (1.18)$$

³Esistono altri modelli oltre a quello standard che prevedono diversi modelli di materia oscura, come è esposto nel capitolo 2; la materia oscura fredda è chiamata in questo modo quando è trattabile come un gas non-relativistico.

e in particolare

$$\Omega_{\text{rad},0} + \Omega_{\text{b},0} + \Omega_{\text{DM},0} + \Omega_{\Lambda,0} = 1 \quad (1.19)$$

A questo punto non resta che giustificare, oltre agli altri, i termini di densità di DM e DE che compaiono in questa equazione (che fino a questo momento sono stati un puro artificio matematico) e iniziare a comprenderne la necessità all'interno del modello ed il significato fisico.

1.2.1 Densità equivalente di radiazione

Il termine della eq. (1.19) che si vuole analizzare per primo è quello legato alla radiazione elettromagnetica, che nonostante sia priva di massa trasporta impulso: è quindi possibile assegnargli un contributo nella densità di massa-energia dell'universo. L'evoluzione di densità della radiazione elettromagnetica segue la eq. (1.14), ponendo $w = 1/3$:

$$\rho(z) = \rho_0(1+z)^4 \quad (1.20)$$

La stima per la densità equivalente di radiazione può essere effettuata utilizzando ancora una volta la radiazione cosmica di fondo con tutte le approssimazioni del caso: considerare la CMB come la principale componente di densità di massa equivalente di radiazione dell'universo nel tempo cosmico presente; considerare la CMB come un blackbody di temperatura 2.73K (fig. 1.3). Nello specifico, la densità equivalente di radiazione è esprimibile attraverso la legge di Stefan-Boltzmann, fornendo dopo una breve derivazione [Dodelson, 2003]

$$\Omega_{\text{rad},0} = \frac{4\sigma}{c^3} \frac{T^4}{\rho_{c,0}} \quad (1.21)$$

dove σ è la costante di Stefan-Boltzmann. Inserendo il valore di temperatura della CMB e quello di densità critica misurata ad oggi, ovvero $\rho_{c,0} \approx 10^{-29} \text{g/cm}^3$, la formula prevede un valore di densità totale di radiazione $\Omega_{\text{rad},0} \approx 10^{-5} \ll 1$, che può essere trascurato nel bilancio di densità totale dell'universo.

1.2.2 Densità di materia barionica

La materia ordinaria o barionica⁴, descritta dal modello standard delle particelle, come esposto in fig. 1.4, è per definizione l'unica che in astrofisica è osservabile direttamente grazie all'interazione elettromagnetica, attraverso la radiazione emessa e assorbita da essa. Alla materia ordinaria, come già detto, viene assegnato il coefficiente $w = 0$ nell'equazione di stato cosmologica: è possibile quindi descrivere l'evoluzione della densità di materia barionica usando la eq. (1.14)

$$\rho_b(z) = \rho_{b,0}(1+z)^3 \quad (1.22)$$

La densità di materia barionica è quindi crescente in modo cubico con il redshift, quindi decrescente con il tempo cosmico, ma in modo più lento rispetto alla densità equivalente di radiazione.

Per verificare la eq. (1.19) è necessario trovare un valore di $\Omega_{b,0} = \rho_{b,0}/\rho_{c,0}$: questo si può determinare sperimentalmente attraverso due metodi indipendenti:

⁴La materia può essere considerata, in prima approssimazione, come se fosse costituita esclusivamente da protoni e neutroni, contributi dominanti di densità. In realtà nella materia ordinaria sono compresi anche i quark pesanti e i leptoni di ogni sapore.

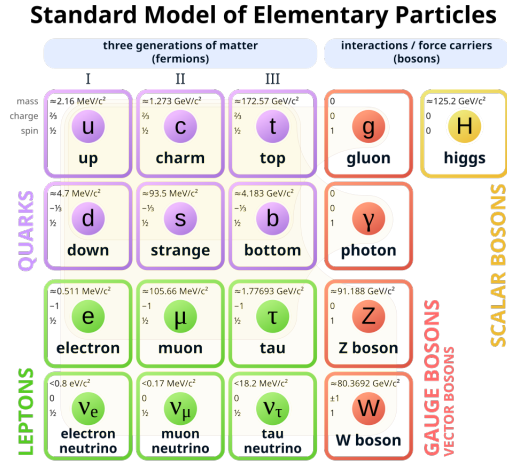
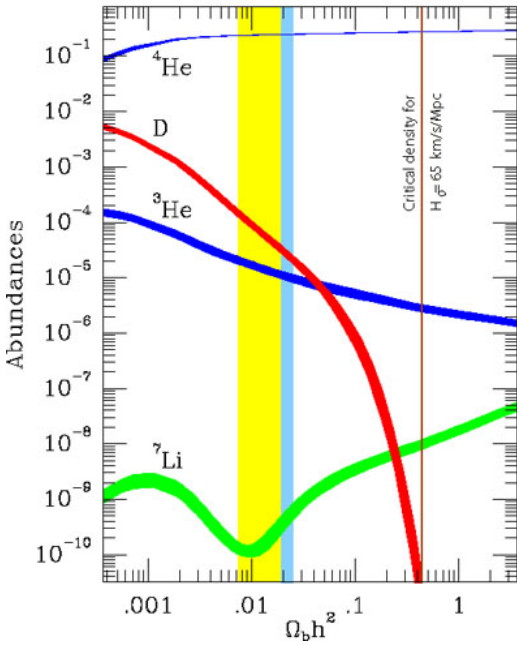
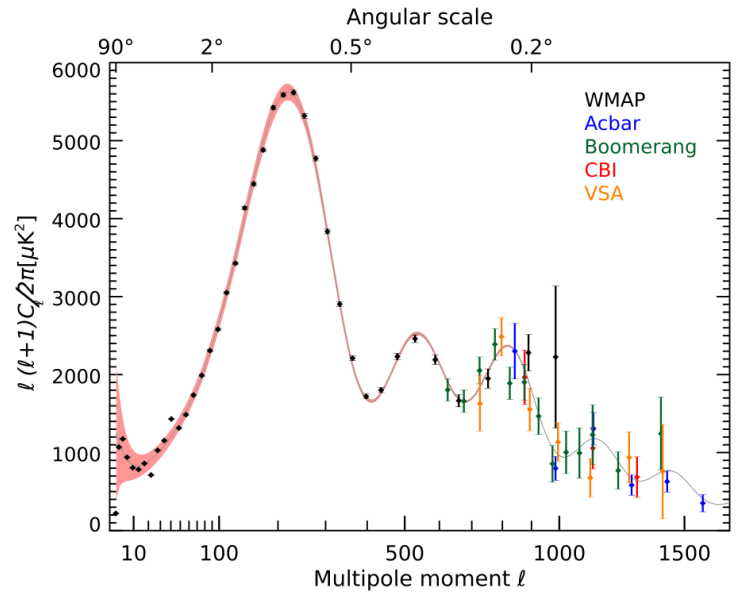


Figura 1.4: **Modello standard delle particelle elementari**: a sinistra le particelle che costituiscono la materia ordinaria, dette fermioni. Nel modello standard è anche presente la radiazione, ovvero l'interazione mediata da bosoni di spin 1, i fotoni. [FERMILAB, US Department of Energy]



(a) Stima della densità di barioni attraverso l'**abbondanza di elementi leggeri nella nucleosintesi primordiale**. La striscia rossa indica il deuterio, che è l'isotopo che ci permette di avere la maggiore precisione sulla misura finale. [FERMILAB Astrophysics Center]



(b) Misura della densità dei barioni attraverso lo **spettro di potenza della CMB** in funzione della risoluzione angolare. In alto a destra la legenda degli esperimenti che hanno contribuito a questa misura. [NASA, Goddard Space Flight Center]

Figura 1.5: **Plot dei risultati** dei due metodi sperimentali indipendenti per la misura di $\Omega_{b,0}$

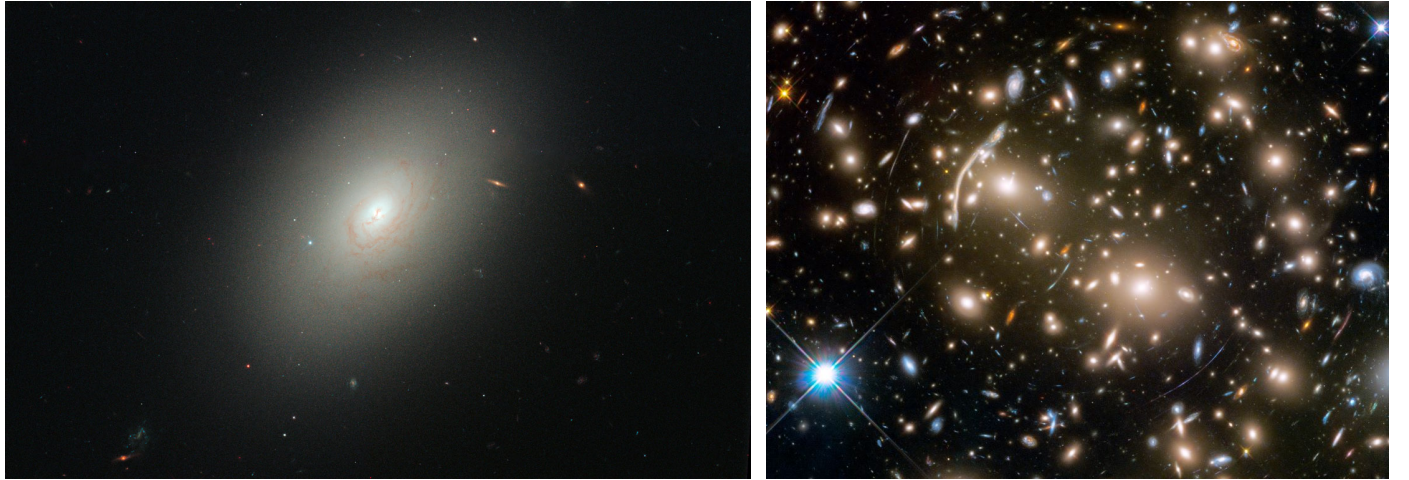
- stima dell'**abbondanza di elementi leggeri nella nucleosintesi primordiale (BBN)** (fig. 1.5a): attraverso la fisica nucleare è possibile dimostrare che l'abbondanza di isotopi come ^2D , ^3He e ^7Li è fortemente sensibile alla densità barionica del plasma in cui avvengono le reazioni nucleari

di fusione⁵ $p + n \longrightarrow {}^2\text{D} + \gamma$, ${}^2\text{D} + p \longrightarrow {}^3\text{He}$ e ${}^2\text{D} + {}^2\text{D} \longrightarrow {}^4\text{He}$. In particolare il rapporto delle abbondanze dei deutoni sui protoni è correlato alla densità $\Omega_{b,0}$: misurando l'abbondanza di questi isotopi nell'universo odierno e conoscendo tale correlazione si può risalire ad una stima del valore di densità, con più o meno precisione in base all'isotopo scelto. I dati confermano che i valori suggeriti dagli isotopi sono tutti compatibili nei relativi errori. [Dodelson, 2003]

- studio dello **spettro di potenza della CMB** (fig. 1.5b): l'anisotropia della CMB rispetto alla risoluzione angolare a cui la analizziamo ci dà informazioni su delle oscillazioni acustiche avvenute nell'universo primordiale: la velocità del suono, dipendente dalla densità dei barioni, va a modificare i picchi dello spettro con delle correlazioni ben precise. In particolare, la differenza tra i picchi pari e dispari ci permette di misurare la compressione e rarefazione della materia barionica e quindi alla sua densità. Il lato tecnico e approfondito di questa misura è legato alla fisica dei plasmi e non è trattato qui per la sua complessità. [Dodelson, 2003]

Uno studio dello spettro di potenza della CMB effettuato dal satellite Planck ha portato ad una misura di $\Omega_b = (0.0493 \pm 0.0003)$ [Planck Collaboration, 2020], mentre attraverso il metodo della BBN si è misurato $\Omega_b = (0.0480 \pm 0.0020)$ [Kaplinghat and Turner, 2001]. I risultati presentano una discrepanza trascurabile (entro 1σ della misura), concordando su un valore di densità dei barioni di $\Omega_{b,0} \approx 0.049 \ll 1$. Si può quindi osservare che la materia che osserviamo sulla Terra, nelle stelle e nelle galassie rappresenta, secondo questa previsione, circa il 5% della massa-energia dell'universo.

1.2.3 Densità di materia oscura



(a) **Galassia ellittica NCG 4150**: in questo caso viene studiato il profilo di temperatura e di luminosità della galassia ellittica e ne viene stimata la massa totale. La massa non luminosa non può essere né gas caldo, né polvere, né la massa stellare: deve trattarsi di DM. [NASA/ESA, Hubble Space Telescope]

(b) **Lensing gravitazionale** in un cluster di galassie: la massa di materia oscura si ottiene confrontando la massa della lente gravitazionale con la massa luminosa. [NASA/ESA, Hubble Space Telescope]

Figura 1.6: **Due evidenze osservative di DM** e modalità di determinare $\Omega_{\text{DM},0}$.

Il termine $\Omega_{\text{DM},0}$, introdotto nella eq. (1.19) in maniera naïve, ha in realtà un significato fisico ben preciso: sta ad indicare tutta la materia che non può essere osservata tramite la radiazione

⁵La maggior parte degli isotopi leggeri ($A < 8$) sono stati prodotti nella nucleosintesi primordiale a causa di condizioni di densità e temperatura mai più replicate dopo il Big Bang.

elettromagnetica, la cui esistenza è però supportata da numerose osservazioni indirette in astrofisica e cosmologia⁶. Nonostante non sia ancora chiara la natura particellare della DM, il modello Λ CDM la considera come materia non relativistica e perciò è associata al parametro $w = 0$, rendendo la sua evoluzione temporale uguale a quella della materia barionica (eq. (1.22)). La densità $\Omega_{\text{DM},0}$ è misurabile attraverso vari metodi, tra cui i principali sono: lo studio della **curva di rotazione** delle galassie a spirale, l'analisi del **profilo di temperatura e luminosità** delle galassie ellittiche (fig. 1.6a) e la modellizzazione della distribuzione di massa in contesti di **lensing gravitazionale**(fig. 1.6b)⁷ per galassie ellittiche e cluster di galassie.

In tutti questi metodi, che verranno trattati nel dettaglio nel prossimo capitolo, si procede nel modo seguente: si stima la quantità di materia che emette radiazione, attraverso dei fit sui profili di luminosità; si stima la massa totale dell'oggetto osservato attraverso uno dei tre metodi elencati; infine si calcola la differenza e si individua la percentuale della massa invisibile contenuta nell'oggetto. Molte misure indipendenti effettuate in contesti astrofisici diversi hanno dato risultati compatibili con il valore $\Omega_{\text{DM},0} \approx 0.26$. [Dodelson, 2003]

Questo sta a significare che: non solo il termine di densità di DM non è un artificio matematico ma è misurabile, ma soprattutto è nettamente superiore al parametro di densità di materia barionica: la DM è più di cinque volte più abbondante nell'universo rispetto alla materia ordinaria.

1.2.4 Termine Λ : densità di energia oscura

L'eq. (1.19), attraverso la nozione di universo euclideo, prevede che tutti i contributi di densità si sommino a 1: il termine Λ , o di "densità di energia oscura", l'ultimo ad essere analizzato, deve quindi necessariamente coprire la differenza, nonché la maggior parte della densità dell'universo: siamo costretti a concludere che $\Omega_{\Lambda} \approx 0.69$.

Questa argomentazione è ben lontana da fornire un'interpretazione fisica per questa densità di energia, per cui è necessario fare alcune considerazioni. L'ipotesi che viene fatta in cosmologia standard è identificare l'energia oscura con la costante cosmologica Λ , che compare, come già visto, nelle equazioni di Friedmann. Riprendendo quindi la eq. (1.6) ed inserendo l'evoluzione di densità di materia barionica e oscura (eq. (1.22)) si ottiene [Ryden, 2006]

$$\dot{a}^2(t) = -kc^2 + \frac{8\pi G\rho_{m,0}}{3a(t)} + \frac{\Lambda a^2(t)}{3} \quad (1.23)$$

che derivata rispetto a t dà

$$2\dot{a}(t)\ddot{a}(t) = -\frac{8\pi G\rho_{m,0}\dot{a}(t)}{3a^2(t)} + \frac{2\Lambda a(t)\dot{a}(t)}{3} \quad (1.24)$$

$$\ddot{a}(t) = -\frac{4\pi G\rho_{m,0}}{3a^2(t)} + \frac{\Lambda a(t)}{3} \propto -\frac{1}{a^2(t)} + \lambda a(t) \quad \text{con} \quad \lambda = \frac{\Lambda}{4\pi G\rho_{m,0}} \quad (1.25)$$

La eq. (1.25) è un'espressione per l'accelerazione dell'espansione dell'universo (diversa da zero!), che permette di identificare due termini opposti. Il primo, negativo, dipende dalla densità di massa ed è dipendente dall'inverso del quadrato del fattore di scala: questo termine riconduce alla gravità newtoniana, che rallenta l'espansione dell'universo attraendo le galassie l'una all'altra. Il secondo termine è invece lineare con il fattore di scala ed è positivo: **assumendo che la costante cosmologica rappresenti l'energia oscura**, allora questa è la responsabile di un'espansione accelerata dell'universo.

⁶Vedi capitolo 2.

⁷Si tratta di un effetto della GR per cui la luce è distorta quando lambisce una zona dove è concentrata della massa; questo argomento sarà trattato nel capitolo 2.

Questa previsione fu confermata nel 2011 attraverso lo studio di supernovae termonucleari in galassie ad alto redshift⁸: l'espansione dell'universo non avviene a velocità costante, ma è accelerata [Royal Swedish Academy of Sciences, 2011]. Questo studio conferma anche che la densità di DE è compatibile con un valore di $\Omega_\Lambda \approx 70\%$, come previsto. L'evoluzione temporale della densità di energia oscura si ottiene assegnandovi un parametro $w = -1$, per ragioni che saranno accennate nel capitolo 3. L'evoluzione di DE risulta perciò in una costante:

$$\rho_\Lambda(z) = \rho_{0,\Lambda} \quad (1.26)$$

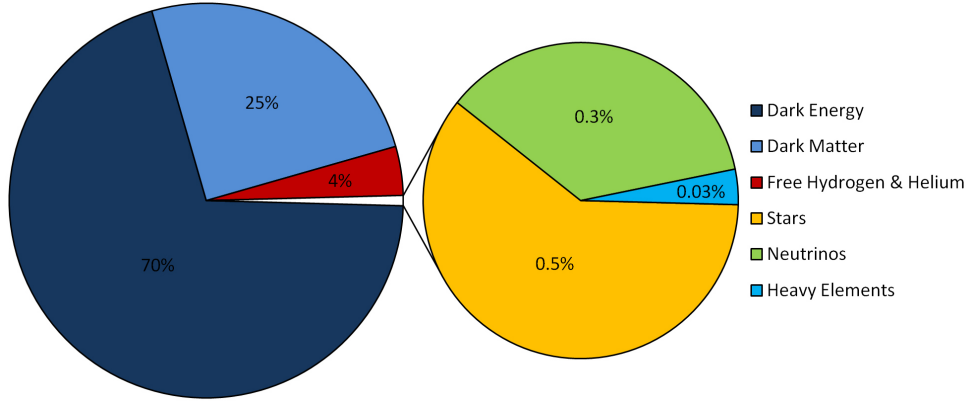


Figura 1.7: **Diagramma a torta del contenuto di massa-energia dell'universo**: compaiono la materia ordinaria e oscura, e l'energia oscura. Le percentuali corrispondono ai parametri di densità calcolati rispetto alla densità critica, ovvero gli Ω_0 . [Illustrazione di A. Z. Colvin]

Attraverso questo modello l'energia oscura ha un ruolo fisico ben preciso ed è perfettamente integrata nelle equazioni del moto ricavate sin dall'inizio. Inoltre, rappresenta la maggior parte della densità di massa energia dell'universo, come mostrato in fig. 1.7. Rimane il problema di non sapere che cosa sia effettivamente questa forza misteriosa e come interagisca con la materia, la gravità e la radiazione: si tratta di un tema fortemente dibattuto e ancora poco conosciuto.

1.2.5 Evoluzione dell'universo

La cosmologia Λ CDM ci permette di tracciare un'evoluzione temporale dell'universo, sulla base dell'evoluzione delle singole componenti, come mostra la eq. (1.14): queste evoluzioni di densità di massa-energia, riportate in fig. 1.8, determinano le caratteristiche fisiche dell'universo e la sua storia, che viene quindi classificata in diverse epoche. Senza avere la pretesa di andare nel dettaglio, qui viene fornita una linea temporale dell'evoluzione dell'universo secondo la cosmologia affrontata finora (fig. 1.9).

Il modello accettato per l'origine dell'universo è detto **Hot Big Bang** (BB): considerando l'espansione dell'universo e invertendo l'asse temporale si arriva necessariamente ad un istante di tempo in cui tutto l'universo era concentrato in una singolarità spazio-temporale di densità e temperatura virtualmente infinite e di dimensioni al di sotto della scala di Planck. Necessariamente, quindi, l'universo ha iniziato ad espandersi a partire da questa singolarità, con temperatura e densità progressivamente decrescenti. Il Big Bang è quindi interpretabile in modo euristico come l'origine dello spazio e del tempo e come l'istante di "creazione" della materia e della radiazione. A tali energie e densità, al livello delle interazioni fondamentali si crede che queste siano coincidenti in una unica e che non siano quindi distinguibili tra loro. La fisica dell'origine dell'universo è quindi essenzialmente inaccessibile, per un

⁸Questo argomento sarà approfondito nel capitolo 3.

motivo di scale di interazione: trovandoci al di sotto della scala di Planck non è possibile separare la gravitazione dalle altre interazioni, intrinsecamente quantistiche a queste scale. Non avendo una teoria quantistica della gravità, prima del tempo di Planck $t_P \approx 10^{-43}\text{s}$ le leggi fisiche perdono di significato.

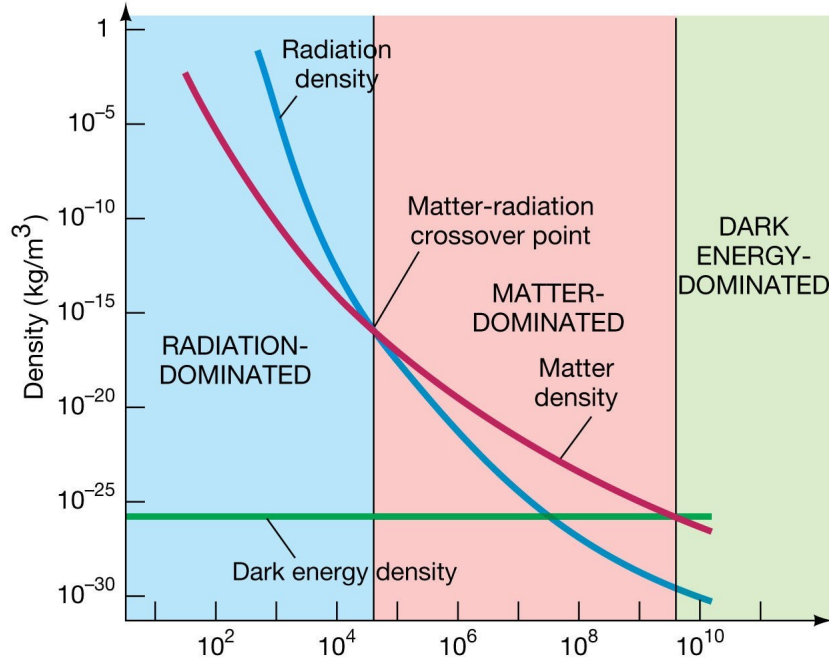


Figura 1.8: **Evoluzione di densità dell'universo** divisa nei suoi contributi principali: materia, radiazione ed energia oscura. Sull'asse delle ascisse il tempo misurato dal Big Bang in anni. [Illustrazione di F. Pacucci, Yale University]

Da $t \approx 10^{-43}\text{s}$ a $t \approx 10^{-35}\text{s}$ l'interazione gravitazionale è disaccoppiata dalle altre tre, secondo le Teorie di Grande Unificazione (GUTs). Da $t \approx 10^{-35}\text{s}$ in poi anche l'interazione forte è disaccoppiata da quella elettrodebole. In questo istante si ha una repentina e violenta espansione dell'universo di circa 50 ordini di grandezza in un intervallo temporale dell'ordine di 10^{-34}s , detta **inflazione**. Le minuscole fluttuazioni quantistiche dell'universo primordiale vengono espanse in modo repentino: queste sono la probabile causa delle fluttuazioni di temperatura della CMB. L'inflazione è necessaria in questo modello perché giustifica l'uniformità della CMB a meno di queste piccole fluttuazioni: queste, trovandosi in punti anche angolarmente opposti del cielo sarebbero, secondo la relatività, causalmente sconnesse. L'unico modo per giustificare il principio cosmologico senza intaccare il principio di causalità è quindi l'inflazione.

Nel grafico in fig. 1.8, questa epoca è rappresentata dalla zona colorata in celeste, detta **epoca della radiazione**: la maggior parte della densità di energia dell'universo è dovuta alla pressione di radiazione dei fotoni. Dopo pochi minuti dal Big Bang si iniziano a formare i primi nuclei atomici, processo detto **nucleosintesi primordiale** (essenzialmente nuclei leggeri come Deutoni, nuclei di Elio e tracce di nuclei di Litio). Ad un redshift di circa $z \approx 3000$, ovvero poche migliaia di anni dopo il Big Bang, si entra nell'**epoca della materia**: la densità di massa domina su quella di pressione di radiazione. Fino a questa fase dell'evoluzione dell'universo, la radiazione e la materia barionica e oscura sono considerate "accoppiate", ovvero i fotoni sono continuamente coinvolti in processi di scattering. Il primo processo che avviene è il disaccoppiamento tra DM (fredda) e materia barionica, che d'ora in poi risulterà in un'evoluzione distinta delle due. A $z \approx 1100$ si ha il processo di **ricombinazione** degli elettroni formando gli atomi e il **disaccoppiamento tra materia e radiazione**, che rende l'universo trasparente ai fotoni: è a questo redshift che si osservano i fotoni della CMB, che ora è possibile interpretare come la radiazione più antica osservabile.

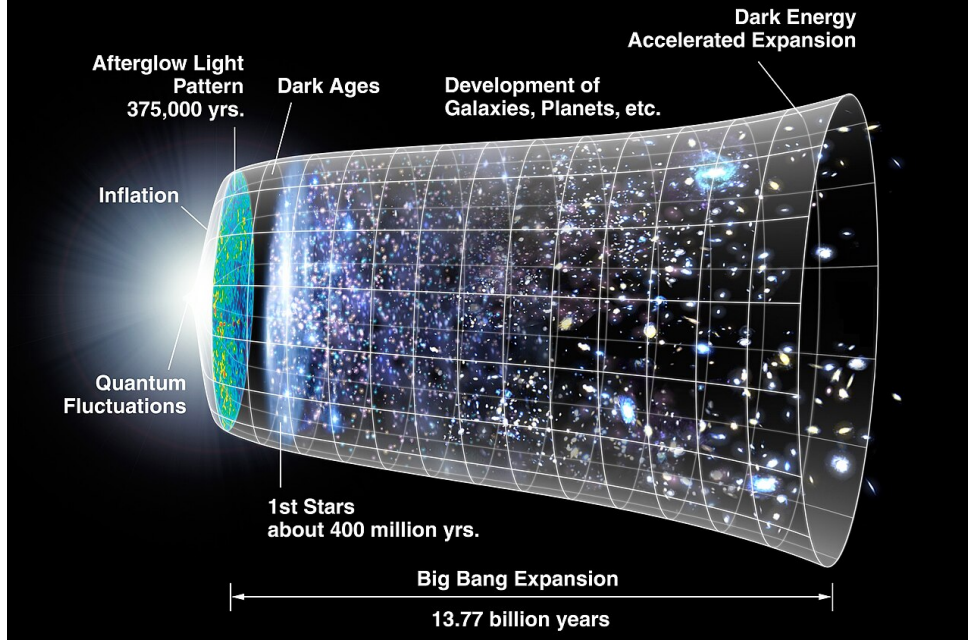


Figura 1.9: **Schema descrittivo** dell'evoluzione temporale dell'universo. [Illustrazione: NASA WMAP]

In altre parole, è possibile osservare la "superficie di ultimo scattering" dei fotoni. A questo punto si entra nella fase della storia dell'universo detta **dark age**, dove l'universo è formato da essenzialmente atomi neutri di Idrogeno ed Elio. Piccole fluttuazioni gravitazionali (con una possibile origine quantistica) fanno in modo di raggruppare degli aloni di DM che, per auto-gravitazione, vanno a creare delle buche di potenziale, una volta raggiunta la massa di Jeans.⁹

Proprio in queste buche di potenziale viene raggrupata la materia barionica, che attraverso collassi di nubi di gas freddo può formare strutture stellari (presenza di reazioni termonucleari) e protostellari (solo equilibrio viriale). La formazione di strutture cosmiche è quindi determinata fortemente dalla distribuzione iniziale e dall'interazione della materia oscura con se stessa e con la materia barionica: questo sarà l'oggetto delle simulazioni trattate nel capitolo 2.

L'epoca della materia termina quando la densità di energia oscura diventa dominante, ad un redshift di $z \approx 0.5$: si tratta dell'ultima e attuale era dell'universo, detta **epoca dell'energia oscura**. Il destino dell'universo, assumendo come valida l'ipotesi dell'energia oscura come costante cosmologica, è quello di espandersi adiabaticamente in maniera accelerata, senza arrestarsi, essendo l'evoluzione di densità di energia oscura costante: una volta terminata l'attività termonucleare di tutte le stelle, si va incontro ad un raffreddamento progressivo, detto morte termica dell'universo. [Ryden, 2006]

Questi argomenti saranno trattati più nel dettaglio nei capitoli successivi, dal momento che lo studio di DM e DE è essenziale per comprendere l'evoluzione dell'universo.

⁹Massa minima richiesta per la formazione di strutture autogravitanti ad una certa temperatura, $M_J \approx 10^5 M_\odot$ per la materia oscura fredda.

Capitolo 2

Materia oscura

2.1 Evidenze osservative in astrofisica

La materia oscura, per sua definizione, non può essere osservata direttamente poiché non interagisce con la radiazione elettromagnetica. Questo la rende invisibile ad ogni tipo di telescopio. Tuttavia, è possibile osservarne gli effetti gravitazionali in molti contesti osservativi diversi; inoltre è possibile effettuare misure riguardanti la sua abbondanza e la sua densità. In astrofisica è quindi possibile "vedere", indirettamente, dove si trova la materia oscura e soprattutto come interagisce con le strutture cosmiche dove la osserviamo. Storicamente, il primo ad ipotizzare l'esistenza di una materia invisibile fu Fritz Zwicky nel 1933: applicando il teorema del viriale all'ammasso di galassie *Coma* egli notò che parte della massa necessaria per spiegare le proprietà osservate non era riconducibile alla parte luminosa delle galassie nell'ammasso. Più avanti, furono fornite prove sempre più convincenti in vari contesti osservativi. In questa sezione si riportano misure effettuate su curve di rotazione di galassie a spirale, profili di temperatura di galassie ellittiche e su distribuzioni di massa in contesti di lensing gravitazionale forte e debole.

2.1.1 Velocità di rotazione delle galassie a spirale

Una delle evidenze osservative di materia oscura storicamente più significative è costituita dallo studio delle velocità di rotazione delle galassie a spirale: una galassia non ruota come un corpo rigido, ma la velocità segue un certo andamento radiale $v(R)$. Utilizzando la gravità newtoniana, in simmetria sferica, si trova

$$\frac{v^2}{R} = G \frac{M(R)}{R^2} \implies v(R) = \sqrt{\frac{GM(R)}{R}}, \quad (2.1)$$

dove la massa contenuta all'interno della regione di raggio R si ottiene in tre modi diversi, in base alla regione della galassia in cui ci si trova (bulge, disco o fuori dal disco):

$$M(R) = \begin{cases} 4\pi\rho_b \int_0^R r^2 dr = \frac{4\pi}{3}\rho_b R^3 & \text{nel bulge} \\ 2\pi \int_{R_b}^R \Sigma_d(r) r dr & \text{nel disco} \\ M_{\text{tot}} & \text{fuori dal disco} \end{cases} \quad (2.2)$$

assumendo costante la densità del bulge ρ_b . A questo punto è immediato calcolare la velocità di rotazione nel bulge e fuori dal disco (andamento chiamato caduta kepleriana), mentre per quanto riguarda il disco la situazione è più complessa. Non è applicabile la eq. (2.1) perché non si è in condizioni di simmetria sferica, inoltre la densità superficiale Σ_d non è costante. La soluzione si ottiene impiegando le funzioni di Bessel sferiche. Qualitativamente questa ha un andamento $v_d(R)$

crescente, fino ad un massimo, per poi tendere al valore di partenza. Quindi il profilo di velocità completo è:

$$v(R) = \begin{cases} R\sqrt{\frac{4}{3}\pi G\rho_b} \propto R & \text{nel bulge} \\ v_d(R) & \text{nel disco} \\ \sqrt{\frac{GM_{\text{tot}}}{R}} \propto \frac{1}{\sqrt{R}} & \text{fuori dal disco} \end{cases} \quad (2.3)$$

Tuttavia, negli anni '80, V. Rubin e K. Ford misurarono, attraverso l'effetto doppler, il profilo di velocità di alcune galassie a spirale: la velocità ricavata dal doppler su gas e luce stellare è in contraddizione con il modello basato sulla materia visibile, come si può notare nella fig. 2.1 [Rubin et al., 1980]. Ulteriori studi furono effettuati osservando l'effetto doppler sulla riga di transizione dell'idrogeno iperfine, detta riga dei 21cm. Questa è utile per studiare i profili di velocità lungo i bordi esterni della galassia, dove si trova principalmente idrogeno neutro (regioni HI). Tale transizione energetica è generata dall'interazione spin-spin tra nucleo (protone) ed elettrone ed è di entità molto debole, dell'ordine dei 10^{-6}eV , emettendo fotoni in banda radio di lunghezza d'onda di 21.106 cm. Uno stato eccitato (spin paralleli) $|\uparrow_p\uparrow_e\rangle$ decade nello stato fondamentale (spin antiparalleli) $|\uparrow_p\downarrow_e\rangle$ con una probabilità molto piccola, rendendola essenzialmente una transizione proibita in qualunque laboratorio. Tuttavia la transizione è osservabile grazie alla grande abbondanza di idrogeno neutro nelle regioni galattiche più esterne.

Attraverso la spettroscopia doppler, risulta che nelle regioni più esterne della galassia, ai limiti del disco, la velocità rimane pressoché costante ($\approx 200\text{ km s}^{-1}$), andamento molto diverso dalla caduta kepleriana prevista dal modello precedente [Binney and Tremaine, 2008]. Questa discrepanza è decisamente significativa e può essere spiegata in soli due modi: o la gravità newtoniana non è appropriata a queste scale, oppure nelle galassie a spirale c'è più massa di quella che si osserva, ovvero c'è della massa che non emette in alcuna banda elettromagnetica, che modifica il profilo di massa $M(R)$ in modo da cambiare $v(R)$. La seconda spiegazione, che presuppone l'esistenza di DM, è quella ad oggi più accreditata perché supportata da molte altre evidenze osservative in altri contesti e attraverso altri strumenti. In conclusione, è possibile mantenere il modello newtoniano a costo di introdurre una certa quantità di massa invisibile che giustifichi il profilo di velocità osservato: questa è una delle evidenze osservative di materia oscura più importanti.

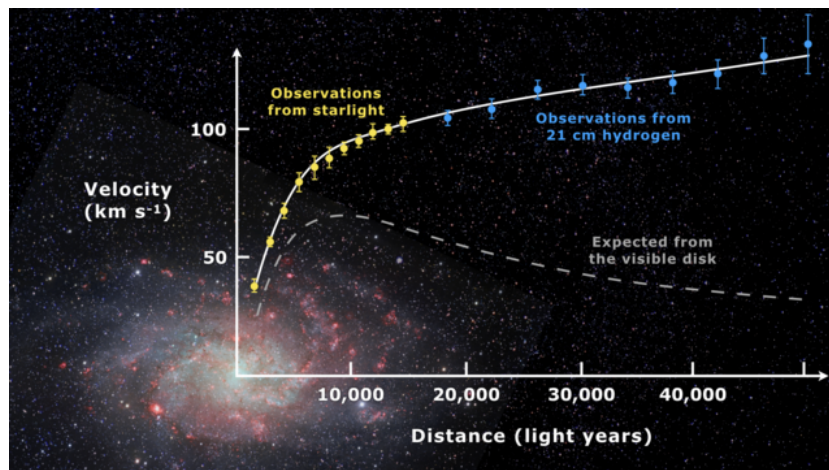


Figura 2.1: **Grafico qualitativo** del profilo radiale di velocità della galassia M33. In grigio tratteggiato è visibile il profilo descritto dalla eq. (2.3), mentre il tratto continuo è l'andamento dei punti sperimentali: in giallo i punti ottenuti dall'osservazione di luce di origine stellare, mentre in azzurro i punti ottenuti dall'osservazione della riga di transizione iperfine dell'idrogeno neutro. [Illustrazione di Mario de Leo]

2.1.2 Osservazioni sulle galassie ellittiche

Per quanto riguarda le galassie ellittiche non è possibile ricostruire un profilo di velocità delle stelle che le compongono, in quanto il loro moto è caotico e non esistono delle orbite fisse. Per questo tipo di galassie si definisce la dispersione di velocità σ come deviazione standard sulla popolazione di velocità nella galassia. Questa è un parametro misurabile attraverso la spettroscopia doppler: l'allargamento delle righe osservato è proporzionale alla dispersione di velocità. Ci sono due metodi principali per stimare l'abbondanza di materia oscura in una galassia ellittica.

Il primo metodo è il seguente. Attraverso il teorema del viriale è possibile risalire alla massa totale della galassia data una certa σ , infatti l'energia cinetica si scrive come:

$$T = \frac{1}{2}M\langle v^2 \rangle = \frac{3}{2}M\sigma^2, \quad (2.4)$$

dove si è utilizzata l'ipotesi di isotropia delle velocità. L'energia potenziale gravitazionale vale invece

$$V = -\alpha \frac{GM^2}{R} \propto -\frac{GM^2}{R}, \quad (2.5)$$

dove il coefficiente α dipende dalla distribuzione di massa in una galassia approssimata come una sfera di raggio R . Utilizzando l'ipotesi di equilibrio viriale si ottiene una stima per la massa totale della galassia

$$2T + V \propto 3M\sigma^2 - \frac{GM^2}{R} = 0 \implies M \propto \frac{3\sigma^2 R}{G}. \quad (2.6)$$

In molte galassie ellittiche, almeno nella regione centrale, la maggior parte della massa barionica è stellare ed emette una certa luminosità, secondo il fattore massa-luminosità $\Upsilon_\star = M_\star/L$. Questo fattore è calibrato sull'età della popolazione stellare della galassia e su altri fattori come metallicità e IMF.¹ Confrontando M e $M_\star$ è possibile stimare la quantità di massa non luminosa (candidata a essere non barionica oppure gas) all'interno di una galassia ellittica.

Il secondo metodo utilizza profili di luminosità in banda X per ricostruire il profilo di temperatura $T(R)$ e densità $\rho(R)$ dei gas caldi, che emettono per bremsstrahlung termico, abbondanti in questo tipo di galassie. Il profilo di densità è ottenuto tramite la luminosità, mentre quello di temperatura è ricavabile dallo spettro. Per ricavare la massa totale della galassia da queste due funzioni si può utilizzare l'equazione di equilibrio idrostatico:

$$\frac{dP}{dR} = -\rho(R) \frac{GM(R)}{R^2} \quad (2.7)$$

Dove, sostituendo la pressione P con l'equazione dei gas perfetti, si ottiene:

$$M(R) = -\frac{k_b T(R) R}{G \mu m_p} \left(\frac{d \log \rho}{d \log R} + \frac{d \log T}{d \log R} \right) \quad (2.8)$$

dove μ è la massa molecolare media (in unità di massa atomica) del gas e m_p la massa del protone. Integrando questo profilo di massa in R si ottiene la massa totale, che, confrontata con la massa stellare stimata come nel caso precedente e la massa del gas caldo (ottenuta direttamente dal profilo di densità), si può finalmente ottenere la quantità di materia non barionica nelle galassie ellittiche. Misure su diverse galassie ellittiche hanno provato che il 50% – 80% della massa è non barionica [Mathews and Brighenti, 2003].

¹Initial Mass Function, parametro che quantifica quante stelle nascono in una certa popolazione per un certo intervallo di massa iniziale.

2.1.3 Lensing gravitazionale

Il lensing gravitazionale è un effetto previsto dalla relatività generale che modifica il percorso dei fotoni provenienti da una sorgente distante quando sulla linea di vista si trova un oggetto particolarmente massivo (detto lente gravitazionale) che curva lo spaziotempo locale. I fotoni seguono quindi cammini curvi, evitando l'ostacolo interposto tra sorgente ed osservatore e arrivando a quest'ultimo. L'effetto che si osserva è un'immagine deformata della sorgente: questa deformazione è correlata direttamente alla massa totale della lente, senza dipendere dalla sua luminosità. Questo costituisce una potenziale stima della massa della lente completamente indipendente da altri tipi di osservazioni, per esempio basate sulla luminosità e sullo spettro dell'oggetto.

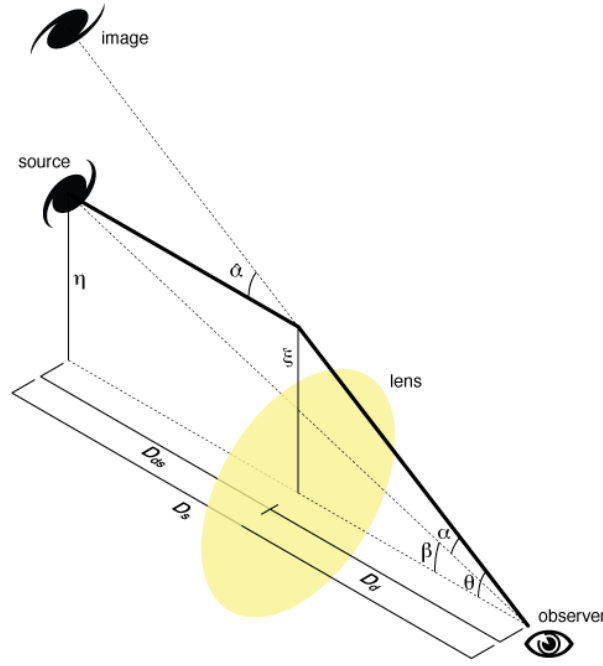


Figura 2.2: **Grandezze coinvolte** nel formalismo che descrive il lensing gravitazionale. Si indicano con D_{ds} , D_d e D_s le distanze tra osservatore, lente e sorgente lungo la linea di vista. Si può notare come le posizioni angolari riferite all'osservatore seguano la legge della lente gravitazionale. [Illustrazione di Michael Sachs]

Il lensing, pur essendo un effetto della GR, viene modellato attraverso equazioni specifiche che non richiedono il formalismo della teoria, a patto che si consideri un'approssimazione dove la lente è sottile, ovvero il suo spessore è trascurabile rispetto alle distanze tra lente e sorgente. Questa approssimazione è generalmente sempre valida in contesti astrofisici, dove la distanza tra il telescopio e la galassia lente è molto maggiore rispetto alle dimensioni di quest'ultima. In questo regime, si consideri l'equazione della lente gravitazionale:

$$\beta = \theta - \alpha(\theta) \quad (2.9)$$

dove β è la posizione angolare reale della sorgente, θ la posizione angolare osservata e α la **deflessione osservata** prodotta dalla lente. Si può dimostrare che la deflessione α dipende direttamente dalla **distribuzione di massa proiettata** sul piano della lente Σ secondo il seguente integrale:

$$\alpha(\xi) = \frac{4G}{c^2} \int \frac{\Sigma(\xi')(\xi - \xi')}{|\xi - \xi'|^2} d^2\xi' \quad (2.10)$$

dove Σ è definita come

$$\Sigma(\boldsymbol{\xi}') = \int \rho(\boldsymbol{\xi}', z) dz \quad (2.11)$$

dove z rappresenta la coordinata della distanza lungo la linea di vista, ρ la densità volumetrica e $\boldsymbol{\xi} = D_d \boldsymbol{\theta}$ (con D_d definito come in figura fig. 2.2) il vettore che definisce la posizione nel piano ortogonale alla linea di vista, detto piano di lensing.

La eq. (2.10) costituisce una relazione tra deflessione e massa proiettata: introducendo un modello tridimensionale della lente, è possibile determinare la sua distribuzione di massa, dipendente solo dalle deformazioni osservate al telescopio.

Per trattare con efficacia il fenomeno del lensing è utile introdurre altre grandezze, come la **convergenza**

$$\kappa(\boldsymbol{\theta}) = \frac{\Sigma(\boldsymbol{\theta})}{\Sigma_0} \quad \text{con} \quad \Sigma_0 = \frac{c^2}{4\pi G} \frac{D_s}{D_d D_{ds}}, \quad (2.12)$$

dove i parametri D_s , D_d e D_{ds} sono le distanze mostrate in fig. 2.2. Tutte le grandezze introdotte finora sono ricavabili attraverso il **potenziale di lensing**, definito nel modo seguente

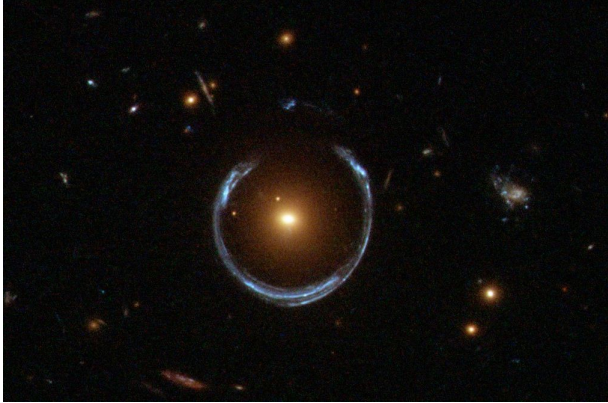
$$\psi(\boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{\pi} \int \kappa(\boldsymbol{\theta}') \ln(\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}') d^2 \boldsymbol{\theta}' \quad (2.13)$$

il quale soddisfa le relazioni

$$\nabla \psi(\boldsymbol{\theta}) = \boldsymbol{\alpha} \quad (2.14)$$

$$\nabla^2 \psi(\boldsymbol{\theta}) = 2\kappa. \quad (2.15)$$

le quali rendono completo il modello della lente gravitazionale in approssimazione di lenti sottili [Schneider et al., 1992]. Il lensing gravitazionale si distingue in due categorie di natura osservativa: il lensing forte (SL) e debole (WL).



(a) **Anello di Einstein** [Hubble Space Telescope, NASA]



(b) **Croci di Einstein** [GAIA, ESA]

Figura 2.3: **Osservazioni di lensing forte:** a sinistra è riportato un esempio di anello di Einstein e a destra alcuni esempi di croci di Einstein. Nel primo caso la sorgente è una galassia estesa, mentre a destra le sorgenti sono dei quasar, oggetti molto più compatti che appaiono quindi puntiformi.

In regime di **lensing forte** la distribuzione di massa della lente è molto concentrata in una regione relativamente piccola e dà origine ad una deflessione significativa dell'immagine della sorgente, rendendo la eq. (2.9) non più biunivoca, ovvero è possibile avere angoli di deflessione diversi per la stessa posizione angolare reale $\boldsymbol{\beta}$; inoltre, la lente e la sorgente sono quasi perfettamente allineate lungo la linea di vista. Uno dei casi possibili è che si osservi più volte la stessa sorgente, ai bordi della galassia

lente: queste configurazioni prendono il nome di archi o croci di Einstein (fig. 2.3b). Nel caso si abbia un perfetto allineamento tra osservatore, lente e sorgente e questa abbia una certa estensione angolare nel cielo, si può osservare il fenomeno dell'anello di Einstein (fig. 2.3a)[[Bartelmann and Schneider, 2001](#)]. Matematicamente questo corrisponde a porre $\beta \approx 0$ e di conseguenza $\alpha(\theta) = \theta$; riprendendo la eq. (2.10), assumendo una distribuzione di massa puntiforme e assumendo una simmetria centrale si ottiene l'equazione scalare

$$\theta = \sqrt{\frac{4GM}{c^2} \frac{D_{ds}}{D_d D_s}} \quad (2.16)$$

Definendo $\theta = \theta_E = \xi_E/D_d$, questo prende il nome di raggio angolare di Einstein, ovvero la distanza angolare occupata dall'immagine osservata attraverso una lente di massa M . Nella pratica la distribuzione di massa, come si è visto, è tutt'altro che puntiforme. Si può dimostrare che la condizione per un anello di Einstein reale è $\kappa \approx 1$, ovvero $\Sigma \approx \Sigma_0$. Analogamente a quanto fatto precedentemente, integrando la eq. (2.10), per una qualche distribuzione di massa, si arriva alla medesima conclusione del caso puntiforme, ottenendo una relazione tra massa della lente e raggio angolare di Einstein: [[Schneider et al., 1992](#)]

$$M(\theta < \theta_E) = \pi D_d^2 \theta_E^2 \Sigma_0 = \frac{c^2}{4G} \frac{D_{ds}}{D_d D_s} \theta_E^2 \quad (2.17)$$

Stimando la massa stellare e del gas nella lente attraverso i metodi impiegati per le galassie ellittiche nel paragrafo precedente, la differenza di massa $M_{DM} = M_{\text{lente}} - M_{\star} - M_{\text{gas}}$ è da attribuire alla materia non barionica. Adottando tecniche simili, è possibile fare stime della quantità di DM nelle lenti gravitazionali anche senza avere anelli di Einstein, ma ad esempio archi e croci. Questo è il caso dello Sloan Lens ACS Survey, che ha raccolto dati da molte lenti (galassie ellittiche) misurando una frazione di materia oscura entro il raggio di Einstein di $\Omega_{DM} = 0.38 \pm 0.07$ [[Bolton et al., 2008](#)]. Nel caso del doppio anello di Einstein "SDSS J0946+1006", osservato nel 2010, una tecnica simile ha permesso di individuare una struttura di sola materia non barionica della massa di $3.5 \times 10^9 M_{\odot}$ mai individuata prima [[Vegetti et al., 2024](#)].

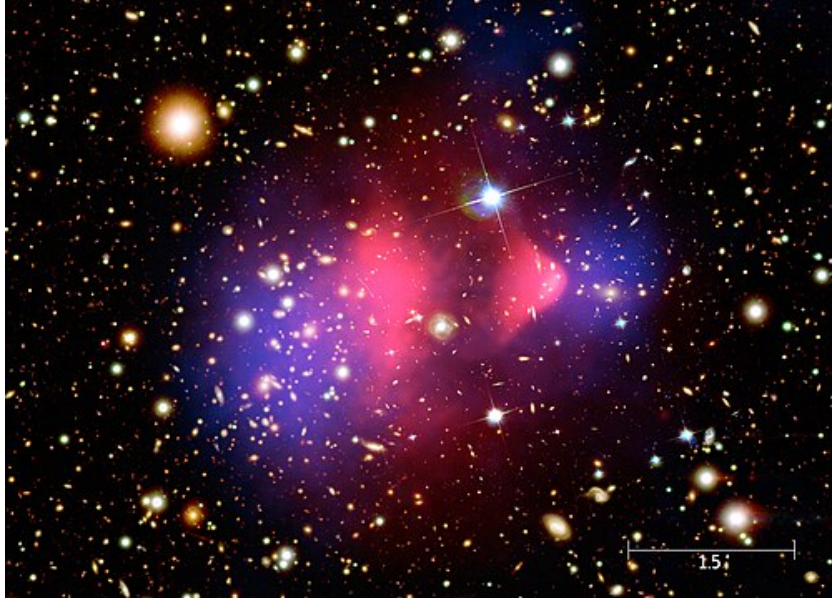


Figura 2.4: **Bullet Cluster** osservato in una sovrapposizione di bande, ottica e ai raggi X. L'alone rosa è l'immagine in banda X, che mostra la distribuzione del gas caldo. In azzurro è rappresentata la distribuzione di massa calcolata tramite lensing debole. [Chandra X-Ray Observatory, NASA]

Il regime di **lensing debole** è caratterizzato da una deflessione troppo debole per essere osservata direttamente attraverso una sola lente: in termini di convergenza, la condizione è $\kappa \ll 1$. Il lensing debole si osserva tipicamente negli ammassi di galassie, che hanno una massa abbastanza elevata da riuscire a deflettere la luce di sorgenti anche lontane dal centro della lente. Ipotizzando che le orientazioni intrinseche delle galassie siano casuali, è possibile considerarne un insieme statistico traendo delle conclusioni generali sull'orientazione media, che segue un pattern coerente alla distribuzione di massa nella lente [Refregier, 2003]. Matematicamente, si introduce la jacobiana della trasformazione $\boldsymbol{\theta} \mapsto \boldsymbol{\beta}$ che avviene nella eq. (2.9) che può essere scritta come

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \partial_{\theta_1}\beta_1 & \partial_{\theta_2}\beta_1 \\ \partial_{\theta_1}\beta_2 & \partial_{\theta_2}\beta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \kappa - \gamma_1 & -\gamma_2 \\ -\gamma_2 & 1 - \kappa + \gamma_1 \end{pmatrix} \quad (2.18)$$

ricordandosi che $2\kappa = \nabla \alpha = \nabla^2 \psi$ e introducendo una grandezza complessa, lo **shear** γ , definito come segue:

$$\gamma = \gamma_- + i\gamma_+ \quad (2.19)$$

$$\gamma_- = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \alpha_1}{\partial \theta_1} - \frac{\partial \alpha_2}{\partial \theta_2} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta_1^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta_2^2} \right) \quad (2.20)$$

$$\gamma_+ = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \alpha_1}{\partial \theta_2} + \frac{\partial \alpha_2}{\partial \theta_1} \right) = \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta_1 \partial \theta_2}. \quad (2.21)$$

Geometricamente, la convergenza misura la deformazione isotropa lungo entrambi gli assi, mentre lo shear stima l'anisotropia, o "schiacciamento" delle galassie. Torna utile definire l'ellitticità di una galassia con la formula

$$\epsilon = |\epsilon| e^{2i\phi} \quad (2.22)$$

Per ipotesi di casualità di orientazione delle galassie, è possibile affermare che $\langle \epsilon \rangle \approx \gamma$: questa relazione rende misurabile lo shear. Delle trasformazioni nello spazio complesso di Fourier rendono possibile ricavare κ a partire da γ , unico parametro misurabile. Avendo un valore di κ caratteristico del campione scelto, si può applicare la eq. (2.12) ricavando la distribuzione di massa $\Sigma(\boldsymbol{\theta})$. Analogamente al lensing forte, ora è possibile stimare la quantità di materia non barionica facendo la differenza delle masse misurate tramite lensing e tramite la luce stellare o in banda X [Bartelmann and Schneider, 2001] [Refregier, 2003]. Uno dei più importanti risultati del lensing debole come strumento osservativo per la materia oscura è il caso del Bullet Cluster (2006). L'ammasso di galassie Bullet (fig. 2.4) è costituito per la maggior parte da gas diffuso caldo che emette raggi X, la cui massa supera di gran lunga quella stellare. Ci si aspetta che la massa sia concentrata nelle regioni dove la banda X risulta più intensa: tuttavia i risultati ottenuti tramite osservazioni sul lensing debole nel cluster suggeriscono che la massa si trova per la maggior parte in prossimità delle galassie stesse, povere di stelle. Questa osservazione costituisce, secondo lo studio, una prova inequivocabile che nell'ammasso Bullet è presente una grande quantità di materia non barionica, in proporzioni simili ai risultati ottenuti tramite lensing forte in altre galassie. Essendo il Bullet Cluster un prodotto di una collisione tra due ammassi di galassie, si può osservare dalla fig. 2.4 come il gas, che ha interagito durante la collisione, sia rimasto separato rispetto alla DM, che ha superato il processo di fusione quasi indisturbata. Questa è un'ulteriore prova che ciò che si osserva in azzurro nella fig. 2.4 si tratta di DM [Clowe et al., 2006].

2.2 Modelli di materia oscura

Finora ci si è preoccupati di analizzare dei contesti astrofisici dove della massa invisibile è necessaria, almeno non modificando la relatività generale, per interpretare i dati ottenuti e le misure effettuate. Tuttavia, la natura della DM non è stata ancora per nulla indagata, se non per la sua proprietà

di non interagire con l'elettromagnetismo. Risulta quindi importante studiare la DM dal punto di vista della fisica particellare, per poter capire con più dettaglio come interagisce con se stessa e con la materia barionica. Dal momento che il modello standard della fisica delle particelle elementari (fig. 1.4) non risulta completo (non riesce a spiegare alcuni risultati sperimentali della fisica delle particelle moderna) ci si aspetta che le particelle di materia oscura costituiscano della fisica oltre il modello standard. L'altra possibilità prevede che la materia oscura sia già presente all'interno del modello standard, tuttavia questo è stato escluso dalle numerose osservazioni che non sono coerenti con le proprietà previste dal modello standard stesso per le particelle candidate ad essere DM [Dodelson, 2003]. Infatti, le osservazioni dirette impongono i seguenti vincoli:

- **vita media** maggiore o uguale all'età dell'universo o almeno dello stesso ordine di grandezza;
- **abbondanza cosmologica** coerente con le osservazioni e i modelli proposti ($\Omega_{\text{DM}} \approx 26\%$);
- **carica elettrica nulla**, necessaria a spiegare la bassa sezione d'urto con l'interazione elettromagnetica;
- **sezioni d'urto totali basse** con la materia ordinaria, per spiegarne la difficoltà di rivelazione;
- **energia termica bassa** per spiegare la formazione delle strutture cosmiche primordiali: esistono modelli di materia oscura fredda (Cold DM, CDM) o tiepida (Warm DM, WDM). Una temperatura bassa è infatti fondamentale nella formazione di strutture autogravitanti, dove il potenziale gravitazionale di un gas di particelle deve prevalere sull'energia termica. Quest'ultimo vincolo è quello che esclude modelli di materia oscura relativistica (Hot DM, HDM), che avrebbe ammesso i neutrini non sterili come candidati [Bertone et al., 2005].

In questa sezione vengono proposti dei modelli teorici CDM e WDM che possano spiegare la struttura particellare della materia oscura, i cui candidati particellari possono essere WIMPs, Assioni e Neutrini sterili. Inoltre vengono elencati alcuni tentativi sperimentali di rivelazione di DM.

2.2.1 Weakly Interacting Massive Particles (WIMPs)

Le WIMPs sono particelle ipotetiche al di fuori del modello standard², di massa compresa tra qualche GeV e qualche TeV, di carica nulla e di sezioni d'urto con la materia ordinaria troppo piccole da essere state rivelate sperimentalmente fino ad ora. Queste particelle costituirebbero della materia oscura fredda (CDM) perché, a causa della loro grande massa, si comportano in maniera non relativistica e la loro energia termica è mediamente bassa rispetto ad altre particelle. L'esistenza di queste particelle è spiegata da un processo cosmologico detto **freeze-out termico**:

- Poco dopo il Big Bang le WIMPs (indicate con χ) si trovano in equilibrio termico con il plasma, attraverso processi di annichilazione e creazione

$$\chi + \chi \longleftrightarrow X + \bar{X} \quad (2.23)$$

dove le X sono fermioni o bosoni del modello standard. In questa fase la temperatura dell'universo è molto superiore alla massa delle WIMPs e la densità del plasma rende molto elevato il tasso di interazione, che segue la dipendenza

$$\Gamma \propto n_\chi \langle \sigma v \rangle \quad (2.24)$$

dove σ rappresenta la sezione d'urto con la materia ordinaria, v la velocità e n_χ la densità numerica di WIMPs. Nonostante la sezione d'urto con la materia ordinaria sia molto piccola, le

²Le WIMPs sono previste nel contesto delle teorie di supersimmetria, la cui trattazione esula dallo scopo di questo lavoro.

condizioni primordiali rendono possibile una continua creazione e distruzione di particelle WIMPs e del modello standard come bosoni $W_{+/-}$.

- Con il progressivo raffreddamento dell'universo, la temperatura raggiunge una soglia oltre la quale l'energia termica è più bassa della differenza di massa necessaria per la creazione di due WIMPs da due particelle del modello standard ($T \ll m_\chi - m_X$): ora è molto più probabile che vi siano annichilazioni di WIMPs in particelle standard, piuttosto che viceversa.
- All'aumentare dell'espansione dell'universo, tuttavia, la densità diminuisce, secondo la eq. (2.24): ora anche l'annichilazione risulta un processo proibito, "congelando" la densità di WIMPs dell'universo Ω_χ . La condizione per la quale l'annichilazione risulta proibita, detta **disaccoppiamento**, risulta essere $\Gamma < H$, dove H è il parametro di Hubble. Secondo il freeze-out questa densità dovrebbe corrispondere alla densità di DM misurata oggi.

L'equazione che descrive il processo di freeze-out è l'equazione di Boltzmann:

$$\dot{n}_\chi + 3Hn_\chi + \langle\sigma v\rangle(n_\chi^2 - n_{\chi,\text{eq}}^2) = 0 \quad (2.25)$$

dove $n_{\chi,\text{eq}}$ è la densità delle WIMPs all'equilibrio termico. Le soluzioni di questa equazione descrivono l'evoluzione della densità di particelle, in particolare forniscono una relazione tra densità residua dopo il freeze-out e sezione d'urto con la materia ordinaria:

$$\Omega_\chi h^2 \approx \frac{3 \times 10^{-27} \text{cm}^3 \text{s}^{-1}}{\langle\sigma v\rangle} \quad (2.26)$$

dove $h = H/(100 \text{kms}^{-1} \text{Mpc}^{-1})$ è una normalizzazione del parametro di Hubble. Scegliendo un ordine di grandezza per il denominatore $\langle\sigma v\rangle = 10^{-26} \text{cm}^3 \text{s}^{-1}$, caratteristico per una particella massiva e poco interagente come la WIMP, avviene ciò che è conosciuto in letteratura come **WIMP miracle**: il parametro di densità cosmologico ottenuto dalla eq. (2.26) risulta essere $\Omega_\chi \approx 0.26$, come confermato da molte osservazioni [Jungman et al., 1996]. Proprio grazie a questa apparente coincidenza di valori il modello WIMP è il più accreditato per rappresentare la materia oscura fredda.

Rivelare le WIMPs è una sfida che è stata accettata da molti esperimenti di varia natura, ovvero rivelazione diretta, indiretta e attraverso l'uso di acceleratori. Per esempio l'esperimento XENON, situato ai laboratori nazionali del Gran Sasso, mira a rivelare queste particelle in modo diretto, ovvero cerca di rivelare segnali compatibili con il rinculo nucleare indotto sullo Xenon da una WIMP. L'apparato sperimentale è costituito da una camera con dello Xenon liquido e gassoso e un sistema di rivelazione a "doppia fase", che riesce a distinguere i rinculi nucleari (compatibili con un'interazione con WIMPs) da quelli elettronici. Nonostante le migliorie apportate all'esperimento negli anni, come per esempio la riduzione del rumore di fondo, non è mai stata rivelata nessuna interazione attribuibile a DM; tuttavia, proprio grazie all'assenza di segnali distintivi, questo esperimento ha fornito dei limiti superiori alla sezione d'urto WIMP-nucleo [Aprile et al., 2018].

Un altro approccio di rivelazione è quello indiretto, che sfrutta l'annichilazione di due WIMPs per rivelarne i prodotti, come fotoni in banda gamma e coppie neutrino/antineutrino. L'esperimento più notevole è sicuramente l'osservatorio di neutrini IceCube, che utilizza il fenomeno della radiazione Čerenkov per rivelare l'energia e la direzione di neutrini attraverso un enorme blocco di ghiaccio antartico. Il ruolo di IceCube nella ricerca di WIMPs sta nell'individuare un eccesso di neutrini provenienti dal Sole, poiché essendo la regione più densa del sistema solare, è più probabile che delle WIMP interagiscano con la materia, dando origine ad eventi di annichilazione $\chi\chi \rightarrow \nu\bar{\nu}$; anche il centro della Via Lattea è stato un target dell'esperimento in quanto si tratta di una regione particolarmente densa. Anche nel caso di IceCube non sono stati raccolti dati che confermino l'esistenza dei WIMPs, ma i risultati sono stati impiegati per porre dei limiti sempre più stringenti sul modello [Aartsen et al.,

2013].

Il terzo approccio consiste nel cercare di produrre dei WIMPs attraverso collisioni ad alta energia in acceleratori di particelle. Ci si aspetta che, se le WIMPs esistono, processi molto energetici (TeV) del tipo $pp \rightarrow \chi\chi + \text{Particelle del Modello Standard}$ possano avvenire. Non potendo rivelare direttamente la χ , si lavora sul **momento trasverso mancante**: se il momento trasverso iniziale è nullo e i prodotti che è possibile rivelare ne hanno una certa quantità, allora necessariamente, per conservazione della quantità di moto, devono esistere altri prodotti di collisione invisibili che portano la somma del momento trasverso a zero. Collaborazioni come ATLAS hanno come scopo, nella ricerca di DM, l'individuare eccessi di eventi contenenti prodotti invisibili rispetto alle previsioni del modello standard; anche in questo caso, fino ad oggi non sono state osservate evidenze chiare dell'esistenza di questi prodotti all'interno degli acceleratori [Aad et al., 2021].

2.2.2 Assioni

Gli assioni sono particelle di natura bosonica teorizzate per risolvere il problema della simmetria CP nel contesto dell'interazione forte, governata dalla cromodinamica quantistica (QCD). Senza entrare troppo nel dettaglio, queste particelle oltre il modello standard permettono di giustificare perché, nell'interazione forte, il parametro legato alla violazione della parità e coniugazione di carica è associato a valori sperimentali estremamente piccoli rispetto a quanto previsto dalla QCD. L'assione, attraverso un meccanismo detto di Peccei-Quinn, giustifica perché non si osservi una violazione della simmetria CP nelle interazioni forti nonostante il modello standard la preveda [Kim and Carosi, 2010].

Gli assioni, oltre a costituire una soluzione al problema CP forte, sono considerati dei possibili candidati per la natura particellare della CDM. Infatti si tratta di particelle neutre, molto stabili e debolmente interagenti con la materia ordinaria. Queste particelle hanno una massa molto piccola, compresa tra il μeV e il meV ; tuttavia la loro abbondanza cosmologica potrebbe essere estremamente alta, rendendo la densità prevista compatibile con quella delle osservazioni. Il processo che renderebbe queste particelle così abbondanti è detto **meccanismo di misalignment**: nelle prime fasi di espansione dell'universo, il campo associato agli assioni³ non è libero di evolvere, poiché soppresso dal valore del parametro di Hubble $H(t)$ (lavorando in unità naturali) che genera un certo "attrito cosmologico", dovuto al termine del prim'ordine nell'equazione del moto del campo (eq. (2.27)). Il campo inizia a emergere solo quando il parametro di Hubble è dello stesso ordine di grandezza della massa dell'assione, $3H(t) \approx m_a$. Questa evoluzione è descritta dall'equazione del moto

$$\ddot{A} + 3H\dot{A} + \frac{\partial V}{\partial A} = 0 \quad (2.27)$$

Dove A rappresenta il campo assionico, V il potenziale generato dagli effetti della QCD e H il parametro di Hubble. Quando la massa dell'assione risulta molto più grande del parametro di Hubble, il potenziale $V(A)$ si comporta come un oscillatore armonico, determinando una certa densità di energia ρ_A . Si può dimostrare che questa densità di energia varia con il fattore di scala dell'universo come la materia non relativistica:

$$\rho_A \propto a^{-3}(t) \quad (2.28)$$

dove $a(t)$ è il fattore di scala. Questo comportamento non relativistico rende possibile la formazione di strutture cosmiche, facendo dell'assione un buon candidato (estremamente diverso dalle WIMPs ma comunque funzionante) per costituire materia oscura fredda. [Kim and Carosi, 2010].

La rivelazione degli assioni si basa essenzialmente sul possibile processo di conversione dell'assione in fotone in presenza di un forte campo magnetico $A \rightarrow \gamma$. L'esperimento CAST (CERN Axion Solar

³In teoria dei campi ad ogni particella è associato un campo, che nel caso degli assioni è un campo scalare che permea tutto l'universo.

Telescope) sfrutta questo principio per rivelare assioni provenienti dal Sole: utilizzando un magnete superconduttore di 9 T orientato verso il sole si dovrebbero produrre, all'interno del campo, fotoni in banda X la cui frequenza è correlata alla massa dell'assione. Finora non sono stati osservati eventi compatibili con l'esistenza di assioni, ma l'esperimento è stato di grande importanza per porre limiti sulla massa dell'assione e sul suo accoppiamento con il campo magnetico [CAST Collaboration, 2017].

2.2.3 Neutrini sterili

I neutrini sterili sono fermioni ipotetici al di fuori del modello standard, nati per spiegare il problema della massa del neutrino⁴. Mentre i neutrini ordinari, o attivi (di tre sapori diversi, ovvero elettronici, muonici o tauonici) interagiscono esclusivamente per interazione debole, i neutrini sterili non interagiscono direttamente con la materia attraverso le interazioni del modello standard. Inoltre sono particelle stabili e elettricamente neutre, come i neutrini ordinari. Per poter descrivere la produzione di neutrini sterili è necessario introdurre il meccanismo del **mixing**.

Si consideri che ogni neutrino può corrispondere ad una combinazione degli autostati di massa $|\nu_1\rangle$, $|\nu_2\rangle$, $|\nu_3\rangle$, $|\nu_4\rangle$, che hanno massa ben definita. Un'altra base possibile è quella degli autostati di interazione, ovvero $|\nu_\tau\rangle$ (autostato attivo tauonico), $|\nu_\mu\rangle$ (autostato attivo muonico), $|\nu_e\rangle$ (autostato attivo elettronico) o $|\nu_s\rangle$ (autostato sterile): questi autostati distinguono i neutrini sterili da quelli attivi, ovvero quelli interagenti nel modello standard. Il mixing sostiene che ogni neutrino può essere descritto da una combinazione lineare sulle basi degli autostati di massa oppure di interazione, e queste basi non coincidono. Questo meccanismo fa in modo che quando un certo neutrino di stato

$$|\nu\rangle = \sum_{i=1}^4 \alpha_i |\nu_i\rangle = \sum_{j=e,\mu,\tau,s} \beta_j |\nu_j\rangle \quad (2.29)$$

evolve nel tempo, le fasi accumulate ai coefficienti dei singoli autostati di massa siano diverse (secondo l'evoluzione temporale delle soluzioni dell'equazione di Schrodinger) a causa del fatto che la loro energia dipende dalla massa:

$$|\nu_i(t)\rangle = e^{-iE_i(t-t_0)} |\nu_i(t_0)\rangle \quad (2.30)$$

A questo punto, però, l'autostato finale sarà una combinazione lineare diversa, sugli stati di interazione, da quella iniziale, a causa delle fasi accumulate. Attraverso questo meccanismo la probabilità di rivelare il neutrino di un certo sapore cambia nel tempo: questo fenomeno, se riguarda esclusivamente neutrini attivi viene detto **oscillazione dei neutrini** e risulta verificato sperimentalmente. Nel caso dei neutrini sterili, si suppone che questo meccanismo avvenga in modo analogo, considerando il quarto autostato sterile $|\nu_s\rangle$. Tuttavia, i neutrini sterili prodotti in condizioni primordiali attraverso questo meccanismo sarebbero, nelle condizioni dell'universo odierno, per nulla interagenti con la materia ordinaria. In questo modo questi potrebbero risultare dei candidati di materia oscura, essendo oggi una quantità fissa di particelle neutre e non interagenti. La loro massa deve essere dell'ordine del keV per poter confermare le osservazioni. A causa del meccanismo di produzione di questi neutrini e a causa della loro massa, la velocità media delle particelle deve essere più alta rispetto alla CDM, ma abbastanza bassa da giustificare la formazione delle strutture cosmiche. Perciò i neutrini sterili vengono classificati nei modelli come WDM, ovvero materia oscura tiepida [Dodelson and Widrow, 1994].

La rivelazione dei neutrini sterili sfrutta il loro (rarissimo) decadimento in neutrini attivi, possibile grazie al mixing: $\nu_s \rightarrow \nu_a + \gamma$. Nonostante questo decadimento sia fortemente soppresso, questo dovrebbe essere osservabile grazie all'abbondanza dei neutrini nell'universo. Il fotone emesso nel decadimento

⁴Il neutrino, nel modello standard, ha massa nulla. Tuttavia, molti esperimenti (tra cui l'oscillazione dei neutrini) hanno confermato che il neutrino ha massa, evidenza di fisica oltre il modello standard.

ha un'energia di circa metà della massa del neutrino sterile, ovvero $E_\gamma = m_s/2$; considerando che le previsioni per la massa di un neutrino sterile concordano su un valore di 7 keV, i fotoni prodotti dal decadimento dovrebbero osservarsi in banda X con una riga a 3.5 keV. Nonostante questa riga sia stata osservata in diverse galassie da vari telescopi in banda X, si crede che questa non sia legata alla presenza di neutrini sterili a causa di altre osservazioni che non risultano consistenti con i 3.5 keV; queste indicherebbero altre cause (di natura astrofisica) di emissioni X, come le righe di emissione di alcuni elementi pesanti [Aharonian et al., 2017].

2.3 Simulazioni cosmologiche

Le simulazioni cosmologiche sono strumenti computazionali che, date delle condizioni iniziali, permettono di riprodurre con una certa risoluzione l'evoluzione di una certa porzione di universo, ovvero la formazione di strutture cosmiche, distribuzioni di materia e le caratteristiche di alcune osservabili astronomiche e fisiche. Queste simulazioni sono uno degli strumenti più potenti per lo studio della materia oscura nell'universo e del suo ruolo nella formazione delle strutture cosmiche: infatti, fissando delle condizioni iniziali per l'universo primordiale e fissando dei parametri caratteristici di un certo modello teorico (per esempio, la massa delle particelle di DM) si può simulare l'evoluzione dell'universo fino ad un determinato redshift. A questo punto è possibile confrontare le osservabili previste dalla simulazione con i dati osservativi reali per poter avere un riscontro sulla veridicità del modello testato. Le simulazioni cosmologiche volte allo studio della materia oscura possono essere di due tipi:

- **DM-only**, ovvero l'unica componente dell'universo simulata è la DM, che viene fatta interagire con se stessa senza collisioni, secondo la sola interazione gravitazionale;
- **simulazioni idrodinamiche**, dove la materia oscura viene fatta interagire con se stessa secondo la gravità in modo analogo alle DM-only, ma in questo caso vengono considerati anche gas barionico e stelle. La simulazione diventa molto più complessa poiché è necessario modellare il gas con le equazioni della fluidodinamica ed è necessario considerare i processi astrofisici come supernovae, AGN, formazione stellare, eccetera. Nonostante queste complessità, questo tipo di simulazioni sono estremamente utili per lo studio della materia oscura perché permettono di quantificare come un certo modello di DM interagisce indirettamente con le strutture cosmiche osservabili.

Fatte queste premesse, risulta chiaro che il processo di integrazione numerica che utilizzato nelle DM-only per simulare l'interazione gravitazionale della materia oscura è valido anche nelle simulazioni idrodinamiche, a patto di considerare anche le interazioni e i processi della materia barionica. In questa sezione vengono quindi presentati i metodi numerici utilizzati per la simulazione dell'evoluzione della DM; inoltre vengono introdotti degli esempi di simulazioni idrodinamiche come ILLUSTRIS. Infine viene presentato il progetto AIDA-TNG, che utilizza simulazioni di tipo ILLUSTRIS per testare modelli alternativi di materia oscura.

2.3.1 Simulazioni DM-only

In questo paragrafo si descrive il metodo numerico di risoluzione del problema N-corpi collisionless (ovvero le particelle non collidono l'una con l'altra) legato alla simulazione DM-only, in particolare facendo riferimento al metodo TREE-PM sviluppato da Springel con il codice GADGET-2. Si considerino N particelle di DM, ciascuna rappresentabile nello spazio delle fasi 6-dimensionale con coordinate $(r_1, r_2, r_3, v_1, v_2, v_3)$, che saranno le condizioni iniziali della simulazione. Risulta possibile definire una distribuzione continua $f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$, che evolve secondo l'equazione di Boltzmann collisionless

o equazione di Vlasov:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \nabla_{\mathbf{r}} f - \nabla_{\mathbf{r}} \phi \nabla_{\mathbf{v}} f = 0 \quad (2.31)$$

Inoltre, la densità di massa si ricava integrando nelle velocità la f :

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \int f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d^3v \quad (2.32)$$

La cui versione discretizzata si può scrivere come

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \sum_{i=1}^N m_i \delta_D(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) \quad (2.33)$$

utilizzando una delta di Dirac. Più avanti nell'algoritmo sarà in realtà necessario assegnare un valore di densità ad una certa cella di una griglia individuata dagli indici i, j, k : quindi nella pratica si utilizza una densità ρ_{ijk} . Il passo successivo è determinare il valore del potenziale gravitazionale ϕ dalla densità attraverso la nota equazione di Poisson

$$\nabla_{\mathbf{r}}^2 \phi = 4\pi G \rho \quad (2.34)$$

Si noti che finora sono state utilizzate le coordinate fisiche $\mathbf{r}(t)$ e $\mathbf{v}(t)$, tali per cui $\mathbf{r}(t) = a(t)\mathbf{x}(t)$ e $\mathbf{v}(t) = \dot{\mathbf{r}}(t) = \dot{a}(t)\mathbf{x}(t) + a(t)\dot{\mathbf{x}}(t)$ dove $a(t)$ è il fattore di scala e $\mathbf{x}(t)$ le coordinate comoventi. Definendo il contrasto di densità $\delta(\mathbf{x}, t) = (\rho(\mathbf{x}, t) - \bar{\rho}(t))/\bar{\rho}(t)$ (in modo discreto $\delta_{ijk}(t) = (\rho_{ijk}(t) - \bar{\rho}(t))/\bar{\rho}(t)$) è utile riscrivere l'equazione di Poisson in coordinate comoventi nella forma

$$\nabla_{\mathbf{x}}^2 \Phi = 4\pi G a^2(t) \bar{\rho}(t) \delta(\mathbf{x}, t) \quad (2.35)$$

in modo da separare il moto di espansione dell'universo da il moto delle particelle nelle coordinate comoventi. Φ è detto potenziale peculiare, ed è definito a partire dalle coordinate comoventi. A questo punto, non resta che determinare Φ e il campo gravitazionale $\mathbf{g} = -\nabla_{\mathbf{x}} \Phi$. Il calcolo del campo gravitazionale si divide in due casi.

Il **campo generato da sorgenti lontane** $\mathbf{g}_{\text{long}}$ viene calcolato risolvendo Poisson su una griglia, metodo detto **Particle Mesh** (PM). Come prima cosa, analiticamente si effettuerebbe una trasformata di Fourier, rendendo la eq. (2.34):

$$\Phi(\mathbf{k}) = -\frac{4\pi G a^2(t) \bar{\rho}(t)}{k^2} \delta(\mathbf{k}) \quad (2.36)$$

ma nella pratica questa viene discretizzata su una griglia

$$\Phi_{lmn} = -\frac{4\pi G a^2(t) \bar{\rho}(t)}{k_{lmn}^2} \delta_{lmn} \quad (2.37)$$

Da questa equazione, ricordandosi della relazione tra modi del campo e del potenziale nello spazio di Fourier in coordinate comoventi

$$\mathbf{g}(\mathbf{k}) = -\frac{i\mathbf{k}}{a(t)} \Phi(\mathbf{k}) \quad (2.38)$$

in notazione discreta

$$g_{lmn} = -\frac{ik_{lmn}}{a(t)} \Phi_{lmn} \quad (2.39)$$

si ottiene l'espressione discretizzata del modo del campo gravitazionale di una cella nello spazio di Fourier:

$$g_{lmn} = -\frac{4\pi G a(t) \bar{\rho} k_{lmn}}{ik^2} \delta_{lmn} \quad (2.40)$$

A questo punto si può ricavare il contributo a lungo raggio del campo gravitazionale in coordinate comoventi con l'antitrasformata di Fourier $\mathbf{g}_{\text{long}}(\mathbf{x}) = \mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathcal{F}^{-1}\{\mathbf{g}(\mathbf{k})\}$, che nella pratica viene effettuata in modo discreto.

Le **interazioni a corto raggio** sono calcolate attraverso una semplificazione del problema a molti corpi della gravità newtoniana. Invece che considerare le interazioni di una particella con tutte le particelle vicine come nel problema classico

$$\mathbf{a}_i = -G \sum_{i \neq j} m_j \frac{\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j}{|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|^3} \quad (2.41)$$

vengono individuati dei gruppi di particelle vicine che vengono considerati come una massa puntiforme A , rendendo il calcolo del campo molto più semplice:

$$\mathbf{a}_{i,A} = -GM_A \frac{\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_A}{|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_A|^3} \quad (2.42)$$

L'algoritmo che è incaricato di scegliere i raggruppamenti di particelle è detto **TREE**. Inoltre, è necessario fare un'altra modifica alla gravità newtoniana per ovviare al problema della divergenza del campo per $r \rightarrow 0$, che risulta non fisico considerando particelle puntiformi. Si introduce quindi il softening, ovvero viene aggiunto un parametro al denominatore della eq. (2.41) in modo che la divergenza non avvenga, cambiando leggermente l'andamento del campo a corto raggio:

$$\mathbf{a}_{i,A} = -GM_A \frac{\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_A}{(|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_A|^2 + \epsilon^2)^{3/2}}, \quad (2.43)$$

dove questa formula è un esempio di softening gravitazionale: in GADGET 2 viene utilizzato un approccio leggermente diverso. In questo modo si risale al campo a corto raggio $\mathbf{g}_{\text{short}}$.

Il campo gravitazionale totale, derivato dai precedenti passi dell'algoritmo risulta essere $\mathbf{g} = \mathbf{g}_{\text{short}} + \mathbf{g}_{\text{long}}$; avendo questa informazione è possibile integrare, dal punto di vista numerico, le equazioni del moto in coordinate comoventi, ovvero

$$\ddot{\mathbf{x}} + 2H\dot{\mathbf{x}} - \frac{1}{a^2(t)}\mathbf{g} = \mathbf{0} \quad (2.44)$$

dove vengono utilizzate le condizioni iniziali, convertite in coordinate comoventi, fornite all'inizio della simulazione. In questo caso si usa un metodo di integrazione numerica detto LEAPFROG, che ottimizza il costo computazionale di questa operazione senza accumulare errori eccessivi. Le coordinate ottenute dall'integrazione possono essere successivamente utilizzate come condizioni iniziali del passo iterativo successivo, e così via [Springel, 2005].

Molte simulazioni DM-only si basano su questo algoritmo di calcolo e permettono di riprodurre l'evoluzione della distribuzione di materia oscura nell'universo, senza però darci informazioni dirette su come questa interagisca con gli oggetti osservabili direttamente nell'universo.

2.3.2 Simulazioni idrodinamiche

Risulta di fondamentale importanza simulare, insieme all'evoluzione della DM, anche l'evoluzione della materia barionica, poiché le due sono strettamente connesse l'una con l'altra. Le simulazioni cosmologiche idrodinamiche si occupano di integrare all'evoluzione della DM collisionless la componente barionica, ovvero il gas, che si comporta come un fluido. Ad un livello inferiore della risoluzione della simulazione, detto sub-grid, possono essere implementati dei modelli astrofisici che simulino la formazione stellare, i processi termici legati al gas, o feedback di stelle e buchi neri supermassicci (SMBH).

In questo modo, si possono riprodurre la maggior parte delle caratteristiche osservabili dell'universo. Per descrivere l'evoluzione del gas è necessario considerare le variabili: $\rho_g(\mathbf{r}, t)$, $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$, $P(\mathbf{r}, t)$, $u(\mathbf{r}, t)$, che rappresentano rispettivamente la densità del gas, la sua velocità, la pressione e l'energia interna media. Questo sistema idrodinamico può essere risolto, fissando il potenziale gravitazionale ϕ , considerando quattro equazioni, ovvero

$$\frac{\partial \rho_g}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_g \mathbf{v}_g) = 0 \quad (2.45)$$

$$\rho_g \left(\frac{\partial \mathbf{v}_g}{\partial t} + (\mathbf{v}_g \cdot \nabla) \mathbf{v}_g \right) = -\nabla P - \rho_g \nabla \phi \quad (2.46)$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \nabla \cdot [(E + P) \mathbf{v}_g] = -\rho_g \mathbf{v}_g \cdot \nabla \phi + \mathcal{H} - \mathcal{C} \quad (2.47)$$

$$P = (\gamma - 1) \rho_g u \quad (2.48)$$

dove E è definita come

$$E = \rho_g \left(u + \frac{1}{2} |\mathbf{v}_g|^2 \right). \quad (2.49)$$

e le grandezze $\mathcal{H}$ e $\mathcal{C}$ sono rispettivamente il tasso di riscaldamento e raffreddamento del gas, entrambi dovuti a vari processi astrofisici. L'eq. (2.45) garantisce la conservazione della massa, l'eq. (2.46) la quantità di moto. L'eq. (2.47) è la condizione di conservazione dell'energia e l'ultima, l'eq. (2.48), è l'equazione di stato dei gas perfetti, dove $\gamma = c_p/c_v$ è il fattore adiabatico del gas.

Facendo variare il potenziale ϕ è necessario aggiungere un'altra equazione, la già citata equazione di Poisson:

$$\nabla_{\mathbf{r}}^2 \phi = 4\pi G \rho = 4\pi G (\rho_{DM} + \rho_g + \rho_{\star} + \rho_{BH}) \quad (2.50)$$

Dove la densità ρ è la somma dei contributi di materia oscura, gas, stelle e buchi neri. La prima componente può essere trattata come nel paragrafo precedente, utilizzando l'algoritmo N-body; la densità del gas viene calcolata attraverso le equazioni idrodinamiche presentate sopra; le ultime due componenti sono spesso calcolate da modelli sub-grid più complessi. Senza entrare troppo nel dettaglio negli algoritmi di calcolo delle simulazioni idrodinamiche, la struttura generale è la seguente:

- per prima cosa si assegnano le condizioni iniziali sulle particelle di DM e le condizioni iniziali termodinamiche del gas;
- il passo successivo è il calcolo della densità di materia oscura (attraverso il metodo delle celle descritto precedentemente) e della densità del gas, ottenuta risolvendo numericamente le equazioni idrodinamiche. In questa fase si utilizzano anche i modelli sub-grid per la densità stellare e dei buchi neri;
- la densità totale viene utilizzata per determinare il potenziale gravitazionale utilizzando l'equazione di Poisson (eq. (2.50)) portata in coordinate comoventi come nel paragrafo precedente, utilizzando lo stesso algoritmo della DM; da qui, analogamente a prima, si procede a calcolare il campo gravitazionale;
- il campo viene utilizzato per integrare le equazioni del moto di un Δt sia per materia oscura che per il gas (le equazioni del moto sono, nel caso del gas, le equazioni idrodinamiche eq. (2.46) e eq. (2.47));
- le configurazioni appena calcolate per il gas e la DM fungono da condizioni iniziali del passo iterativo successivo [Springel, 2010].

Esistono diversi metodi utilizzati per implementare la parte idrodinamica di questo algoritmo, come ad esempio SPH (metodo lagrangiano, dove le celle si muovono con il gas), AMR (metodo euleriano, dove le celle rimangono fisse), oppure "Moving Mesh", che è il metodo implementato dal codice AREPO, utilizzato da ILLUSTRIS, descritto nel prossimo paragrafo.

2.3.3 ILLUSTRIS

Il progetto ILLUSTRIS è una serie di simulazioni cosmologiche idrodinamiche sviluppate per testare il modello Λ CDM, in particolare come la materia oscura influisca nella formazione delle strutture cosmiche dell'universo.

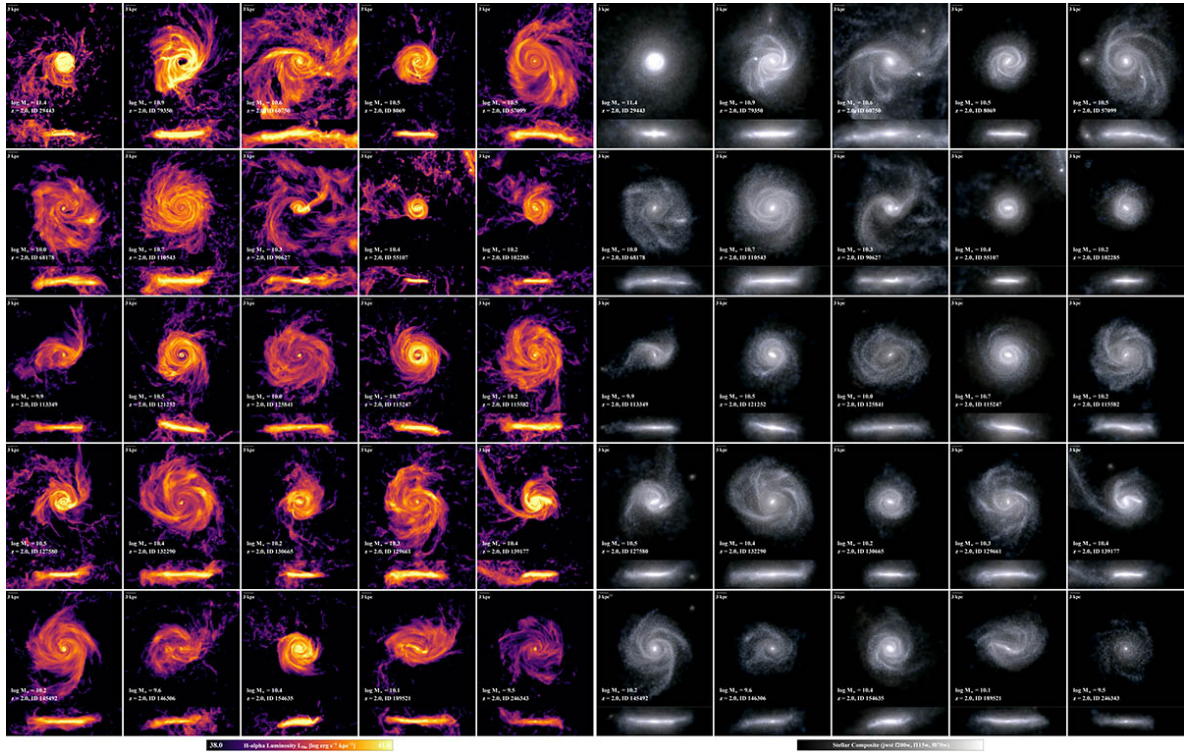


Figura 2.5: **Frames di simulazioni di 25 galassie** eseguite con TNG: a sinistra è rappresentata la loro emissione HI (Lyman α) mentre a destra la luce stellare. [ILLUSTRIS-TNG]

Come descritto precedentemente in generale, il progetto ILLUSTRIS riproduce l'evoluzione della materia oscura in maniera collisionless, attraverso il modello N-body, mentre il gas interagisce con se stesso attraverso le equazioni idrodinamiche e attraverso la gravità con la materia oscura: la materia oscura simulata è quindi un prototipo di materia oscura fredda, CDM. La parte idrodinamica della simulazione è implementata con un metodo detto "**Moving Mesh**"; questo è nato come via intermedia tra metodo lagrangiano e metodo euleriano: si considerano delle celle che si muovono con il gas, come nel metodo lagrangiano, ma si studia il moto del gas da una cella all'altra (che hanno un volume finito) calcolandone i flussi attraverso le pareti. Inoltre la dimensione delle celle si adatta alla distribuzione del gas, ovvero la risoluzione spaziale può essere variata in base alla regione che si sta simulando. Questo è possibile grazie alla **tassellazione di Voronoi**, il procedimento che permette di adattare dinamicamente le celle alla distribuzione di massa, utilizzando dei punti generatori [Springel, 2010]. Ciò che permette ad ILLUSTRIS di riprodurre strutture cosmiche come le galassie in modo realistico sono i modelli sub-grid che, come già citato, permettono di riprodurre processi astrofisici che si trovano al di sotto delle capacità di risoluzione della simulazione a livello globale. Questi modelli, di origine fenomenologica, permettono di riprodurre fenomeni come: formazione stellare, feedback

stellare (come l'effetto delle supernovae sul gas), trasporto radiativo all'interno del gas, formazione ed evoluzione dei SMBH e feedback dei SMBH nelle regioni a loro circostanti (dischi di accrescimento e getti) [Vogelsberger et al., 2014].

Il progetto ILLUSTRIS è stato sviluppato nel 2014 ed è stato migliorato nel 2019 con ILLUSTRIS-TNG, versione più accurata per quanto riguarda la formazione galattica. Inoltre, in TNG, è stata introdotta la presenza dei campi magnetici all'interno delle equazioni, rendendola una simulazione magneto-idrodinamica. Ciò che rende particolarmente interessante entrambe le versioni è la possibilità di paragonare una simulazione DM-only e una idrodinamica che contengono la stessa distribuzione di materia oscura, osservando che l'evoluzione degli aloni di DM è influenzata da alcune componenti barioniche. I principali risultati qualitativi ottenuti dal progetto ILLUSTRIS sono i seguenti.

Le simulazioni riproducono qualitativamente il **profilo di rotazione delle galassie a spirale**, riproducendo complessivamente le evidenze osservative; inoltre le galassie simulate riproducono le relazioni di Tully-Fisher (correlazioni empiriche tra luminosità e velocità di rotazione di una galassia a spirale), fornendo un controllo in più a cui sottoporre la simulazione. Questo risultato è importante, in quanto molte simulazioni precedenti non riuscivano a riprodurre dischi galattici realistici [Vogelsberger et al., 2014].

Un altro importante risultato consiste nel confronto della **formazione degli aloni di DM** nelle simulazioni DM-only e idrodinamiche. Infatti, nelle simulazioni collisionless gli aloni tendono ad essere meno regolari, allontanandosi da distribuzioni sferiche. Le simulazioni idrodinamiche, invece, modificano la forma degli aloni in oggetti quasi sferici, soprattutto nelle regioni più interne, come confermano le osservazioni. Queste considerazioni sono un indizio che la materia barionica ha un ruolo nell'evoluzione degli aloni. Inoltre, nelle simulazioni DM-only sono presenti sub-aloni di piccola massa che nelle simulazioni idrodinamiche sono poco probabili in regioni con densità barionica alta [Chua et al., 2019]. Il progetto ILLUSTRIS-TNG, come già citato, basa le simulazioni su un paradigma CDM: confrontare queste simulazioni con le evidenze osservative significa testare previsioni del modello CDM e, eventualmente, porre dei vincoli su parametri del modello ancora non ben definiti.

2.3.4 AIDA-TNG

Il progetto AIDA-TNG (Alternative DARK Matter - TNG) nasce con l'obiettivo di testare modelli alternativi al CDM utilizzando simulazioni di stampo TNG eseguite su box di lato 51.7 o 110.7 Mpc. Infatti, mentre ILLUSTRIS-TNG adotta implicitamente modello CDM, AIDA vuole testare 6 modelli: CDM, tre modelli WDM (con masse di 1, 3, 5 keV), e 2 modelli SIDM (Self Interacting Dark Matter), dove la materia oscura interagisce solo con se stessa con una certa sezione d'urto (costante nel modello SIDM e dipendente dalla velocità nel modello vSIDM). Tra gli scopi del progetto AIDA-TNG, c'è lo studio delle differenze osservate nelle strutture cosmiche simulate attraverso un modello piuttosto che attraverso un altro (fig. 2.6).

Un altro obiettivo è identificare la scala alla quale si osservano differenze tra modelli (quando si osservano), e se queste siano osservabili facilmente o meno tramite i metodi osservativi disponibili. Come ultimo obiettivo, AIDA cerca di quantificare in che modo la materia barionica incida sulla formazione delle strutture cosmiche, al di là del modello utilizzato. Riassumendo, AIDA vuole indagare la natura della materia oscura (CDM, WDM, SIDM) simulandone gli effetti sulle strutture cosmiche, i quali, se abbastanza evidenti, potrebbero eventualmente essere confermati dai dati osservativi. Entrando nel dettaglio delle simulazioni, si riportano alcuni dei risultati ottenuti dalle simulazioni AIDA-TNG.

Il primo risultato che si vuole riportare è legato alla funzione di massa degli aloni (**Halo Mass Function**) che dà informazioni su quanti aloni si formano data una certa massa logaritmica di materia oscura, definita con la derivata

$$\text{HMF} = \frac{dn}{d\log M} . \quad (2.51)$$

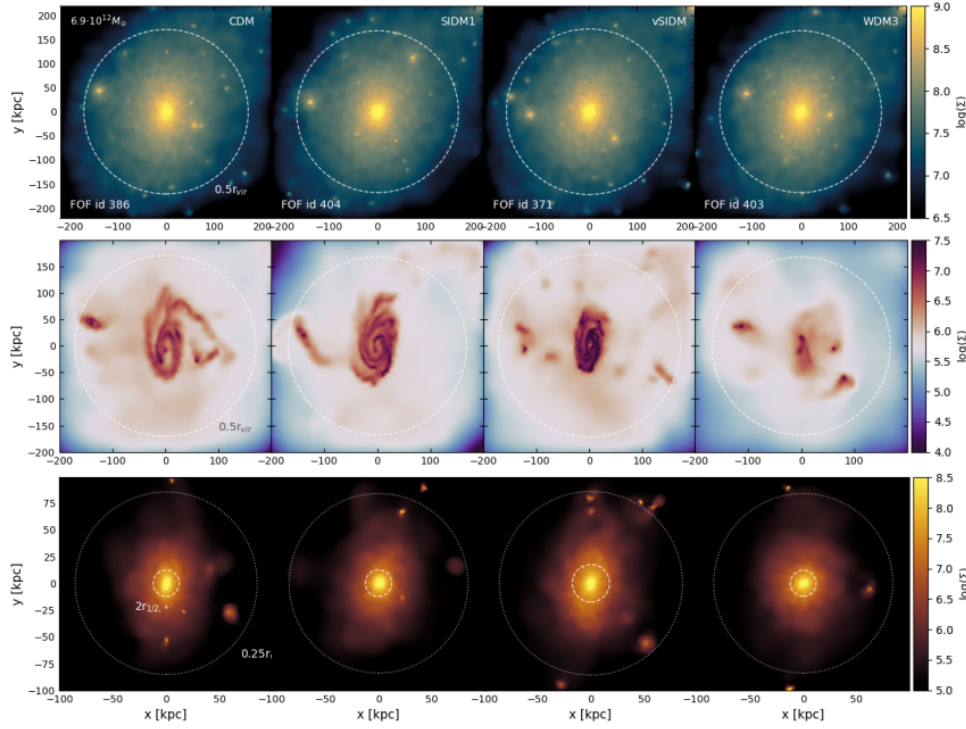


Figura 2.6: **Simulazioni di una galassia** della massa della Via Lattea ottenute attraverso diversi modelli di DM, da sinistra verso destra: CDM, SIDM1, vSIDM, WDM3. In alto è rappresentata la densità di materia oscura, nel mezzo il gas e in basso la densità di massa stellare. [Despali et al., 2025]

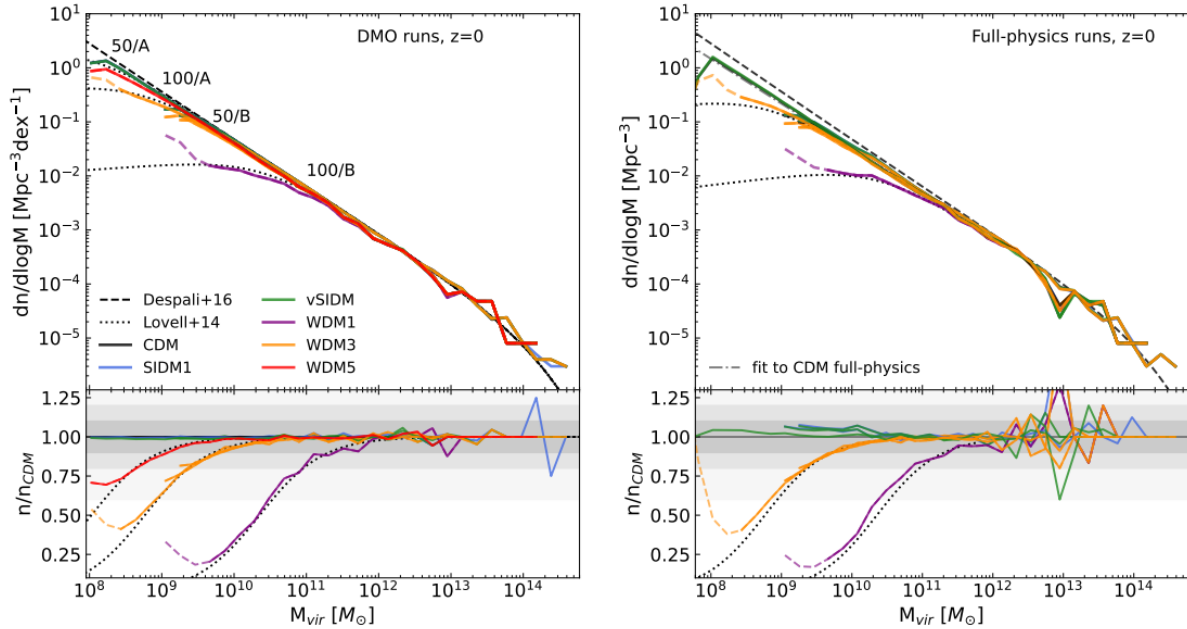


Figura 2.7: **Halo Mass Function** ottenuta da due tipi di simulazioni, DM-only e full-physics. Nella legenda, le sigle vSIDM e SIDM indicano la materia oscura interagente; WDM1, WDM3 e WDM5 indicano rispettivamente i modelli di WDM con particelle di 1, 3, 5 keV. In entrambi i grafici sono riportate sull'asse x la massa considerata e sull'asse y la funzione di massa. Nei riquadri in basso, in y è riportato il rapporto tra HMF di un certo modello e quella del CDM. [Despali et al., 2025]

Osservando la fig. 2.7, si possono vedere i diversi comportamenti della funzione di massa ad un redshift di $z = 0$ in base al modello di DM scelto. Il risultato generale che traspare da questi grafici consiste nel fatto che per masse elevate (più di $10^{12} M_{\odot}$) il numero di aloni formati per unità di massa logaritmica è complessivamente uguale per ogni modello. Per masse piccole, invece, la funzione di massa è più alta per il modello CDM mentre risulta più bassa per i modelli WDM, in particolare per quanto il modello WDM1, che utilizza particelle da 1keV, la più leggera tra le masse proposte. Fisicamente, questo sta a significare che le particelle di WDM rendono più difficile l'aggregazione di aloni di massa piccola, con un effetto più accentuato se si tratta di particelle leggere. I modelli SIDM non sembrano invece mostrare differenze sulla Halo Mass Function rispetto al CDM: le interazioni della materia oscura con se stessa non modificano il numero di aloni osservati in un certo intervallo di massa. In sintesi, le simulazioni suggeriscono che un modello WDM possa dare, come conseguenza osservativa, un numero di aloni di piccola massa più basso. In fig. 2.7 vengono riportati due grafici, uno che si riferisce alle simulazioni DM-only (sinistra), l'altro che si riferisce alle simulazioni "full-physics", ovvero quelle magnetoidrodinamiche: i risultati sono leggermente diversi l'uno dall'altro, in quanto processi come il feedback dei buchi neri possono andare ad influenzare la formazione degli aloni.

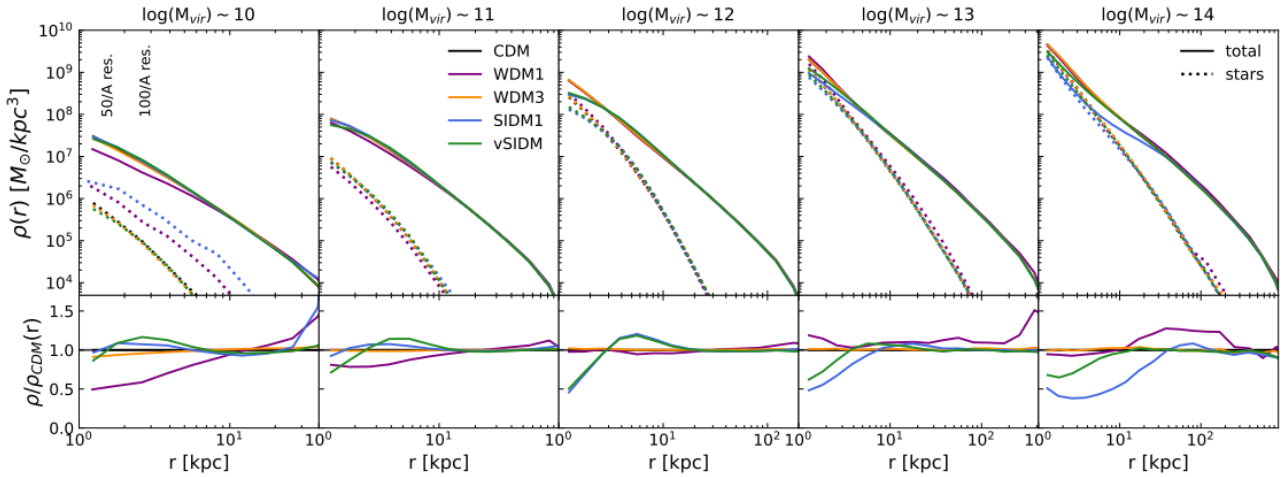


Figura 2.8: **Profili di densità radiale** di materia totale (barionica e oscura) all'interno di un alone. I cinque pannelli contengono i profili corrispondenti ad una massa totale di rispettivamente $\log(M/M_{\odot}) = 10, 11, 12, 13, 14$. Sulle ascisse è riportato il raggio, mentre sulle ordinate sono rappresentati i profili di densità in $M_{\odot}/\text{kpc}^3$. Le etichette della legenda sono le stesse della figura fig. 2.7. Le linee tratteggiate corrispondono al profilo della sola massa stellare, mentre le linee continue rappresentano il profilo di densità. In basso è mostrato, per ogni valore di massa totale, il rapporto tra il profilo di densità totale con un certo modello e il profilo simulato con il CDM.

Il secondo risultato riguarda come è distribuita la materia negli aloni: vengono studiati i **profili di densità radiali** $\rho(r)$ al variare della massa dell'alone e del modello di materia oscura considerato. Come si può osservare in fig. 2.8, nel primo pannello a sinistra, che si riferisce a masse totali "piccole", il profilo WDM1 (particelle da 1keV) è inferiore a bassi raggi ($r < r_{1/2}$) rispetto al CDM: questo è dovuto alla dispersione di velocità delle particelle che domina sulla gravità a piccole scale (fenomeno detto "free streaming"). Spostandosi verso destra, in particolare nell'ultimo pannello, si osserva un'inversione del comportamento tra WDM e SIDM1/vSIDM: la parte centrale dell'alone, per grandi masse totali, risulta meno densa della parte più esterna, dando origine ad un "core". Questo fenomeno è dovuto alle interazioni tra le particelle, che ne modificano la quantità di moto e redistribuiscono l'energia media. Il risultato interessante legato a questi grafici consiste nel fatto che per masse totali tipiche di molte

galassie ($\log(M/M_\odot) = 11, 12, 13$) il modello di materia oscura non può essere dedotto con sicurezza dal profilo di densità radiale a bassi raggi: nelle galassie la fisica della regione centrale è dominata dalle stelle e in generale dalla materia barionica. Tuttavia, attraverso le simulazioni full-physics, è comunque possibile individuare una firma del modello di DM dal profilo più esterno della galassia.

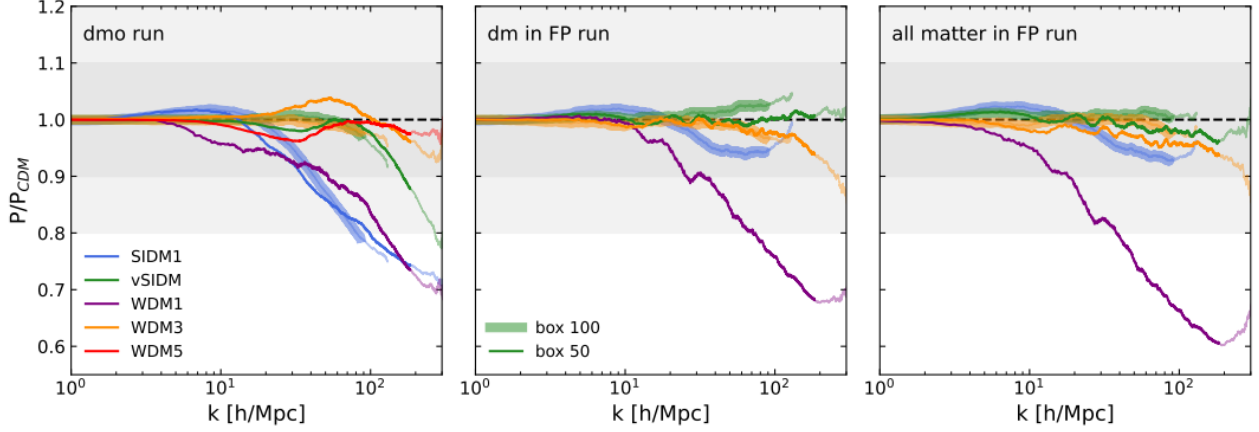


Figura 2.9: **Rapporto tra spettri di potenza** di modelli alternativi e spettro del CDM. Sulle ascisse è rappresentato il numero d'onda mentre nelle ordinate il rapporto tra spettri. La legenda dei modelli rimane analoga a quella delle fig. 2.7 e fig. 2.8; si indicano con linee spesse i dati ottenuti attraverso simulazioni su box di lato 110.7Mpc mentre le linee sottili corrispondono a simulazioni su box di 51.7Mpc. [Despali et al., 2025]

Il terzo risultato che si intende citare riguarda la forma dello **spettro di potenza della densità di materia** $P(k)$ nei vari modelli alternativi proposti. Lo spettro di potenza dà informazioni sull'entità delle fluttuazioni di densità di materia al variare della scala alla quale le si osserva. Matematicamente, si definisce a partire dal contrasto di densità, come definito precedentemente:

$$\delta(\mathbf{x}) = \frac{\rho(\mathbf{x}) - \bar{\rho}}{\bar{\rho}} \quad (2.52)$$

Attraverso la trasformata di Fourier $\mathcal{F}\{\delta(\mathbf{x})\} = \delta(\mathbf{k})$ si definisce il contrasto nello spazio di Fourier dove $\mathbf{k} = 2\pi\hat{\mathbf{k}}/\lambda$ è il vettore d'onda che vive in tale spazio corrispondente ad una certa scala λ . Lo spettro di potenza è quindi definito come la media (effettuata su tutti i vettori d'onda di modulo k) dei moduli quadri del contrasto di densità:

$$P(k) = \langle |\delta(\mathbf{k})|^2 \rangle \quad (2.53)$$

Uno spettro di potenza piccato su numeri d'onda bassi sta ad indicare delle fluttuazioni di densità su grandi scale, mentre dei picchi a numeri d'onda alti indicano fluttuazioni su piccole scale. In fig. 2.9 la grandezza riportata nelle ordinate dei grafici è il rapporto tra lo spettro di potenza del modello alternativo testato e quello del modello CDM: $P_{\text{ADM}}(k)/P_{\text{CDM}}(k)$. I tre pannelli presentati corrispondono rispettivamente da sinistra a destra a: simulazioni DM-only, simulazioni full-physics calcolando lo spettro dei soli barioni, full-physics calcolando lo spettro su tutta la materia. In tutti e tre i casi si può notare come tutti i modelli alternativi diano gli stessi risultati del CDM a bassi numeri d'onda, ovvero su grandi scale. Le differenze tra modelli iniziano infatti ad emergere significativamente solamente a scale più piccole, corrispondenti a numeri d'onda maggiori di $3 h \text{Mpc}^{-1}$, dove $h = H/(100 \text{kms}^{-1} \text{Mpc}^{-1})$ è la costante di normalizzazione del parametro di Hubble. In particolare si consideri il primo pannello da sinistra: nelle simulazioni DM-only, il modello WDM1 si discosta notevolmente dal CDM a scale

non troppo piccole. Tuttavia, questo modello è stato considerato come "caso estremo", utile solamente per definire dei vincoli, in quanto risulta essenzialmente incompatibile con i dati osservativi (si tratta di materia oscura troppo calda, ai limiti del WDM). Risulta interessante, invece, il modello SIDM1, che a causa delle auto interazioni formerebbe dei "core" già individuati dai risultati precedenti. Tuttavia, osservando i pannelli centrale e di destra, si nota che inserendo la materia barionica nella simulazione questo effetto viene decisamente soppresso: la materia barionica interagisce in modo decisivo nella formazione della strutture. Complessivamente, questo studio sullo spettro di potenza suggerisce che la natura della materia oscura diventa osservabile solo su piccole scale, mentre su grandi scale ogni modello fornisce gli stessi risultati. Inoltre, la materia barionica gioca un ruolo non trascurabile nella formazione galattica e perciò risulta necessario considerarla nell'interpretazione dei dati [[Despali et al., 2025](#)].

Questi ed altri risultati, uniti ad evidenze osservative opportune, potrebbero permettere ad AIDA-TNG di fissare dei vincoli su modelli di materia oscura alternativi come WDM e SIDM, oppure di escluderli o confermarli come modelli da sostituire o integrare al CDM.

Capitolo 3

Energia oscura

3.1 Modelli di energia oscura

Con energia oscura (dark energy, DE) si intende, come già affrontato nel capitolo 1, l'agente responsabile dell'espansione accelerata dell'Universo, che compare nelle equazioni Λ CDM con termine Ω_Λ . Esistono vari modelli teorici di DE che potrebbero fare luce sulla sua natura fisica: il modello Λ CDM la associa alla costante cosmologica, che compare già nelle equazioni di campo della GR; altri modelli, come la Quintessenza, la descrivono matematicamente in modo più complesso di una semplice costante, attraverso un campo scalare dinamico; esistono, inoltre, modelli che propongono descrizioni ancora diverse. Questa sezione intende presentare i vari modelli per poi confrontarli con i dati osservativi disponibili.

3.1.1 Costante cosmologica

Il modello Λ CDM associa l'energia oscura al termine Λ che compare nelle equazioni di campo di Einstein (eq. (1.5)) e nelle equazioni di Friedmann (eq. (1.7) e eq. (1.8)), come già esposto nel capitolo 1. In particolare, è possibile definire la componente del tensore energia impulso dovuto a Λ , attraverso la eq. (A.23). Il significato dietro a questa definizione sta nell'assegnare a Λ un contributo nella densità di massa-energia dell'universo che, secondo la GR, è la causa delle deformazioni dello spaziotempo. Come è esposto in appendice A.3, a partire dalla forma di questo termine si dimostra che l'equazione di stato cosmologica per un'energia oscura descritta da Λ deve avere un valore di $w = -1$. Nonostante questo modello sia perfettamente integrato nella GR, non si è ancora discusso il senso fisico di Λ come energia oscura. La risposta sta nel considerare l'energia oscura come un'**energia associata al vuoto**, ovvero un'energia costante e isotropa il cui valore è indipendente dall'espansione dell'universo, coerentemente con l'evoluzione di energia oscura nel Λ CDM. In GR, se l'energia del vuoto è isotropa, deve essere necessariamente invariante rispetto alle trasformazioni di Lorentz e, di conseguenza, proporzionale alla metrica. Infatti, partendo dalla definizione di tensore di energia-impulso di un fluido perfetto (eq. (A.22)) e imponendo la condizione di isotropia si ottiene, come tensore **energia-impulso del vuoto**, l'espressione:

$$T_{\mu\nu}^{\text{vac}} = -\rho_{\text{vac}} c^2 g_{\mu\nu}, \quad (3.1)$$

dove ρ_{vac} è la densità associata al vuoto e $g_{\mu\nu}$ la metrica utilizzando la convenzione $(-, +, +, +)$. Ora si eguagli questa espressione con quella ottenuta dalla cosmologia Λ CDM per l'energia oscura:

$$-\rho_{\text{vac}} c^2 g_{\mu\nu} = -\frac{\Lambda c^4}{8\pi G} g_{\mu\nu} \quad (3.2)$$

Da questa equazione si ottiene un'espressione per la densità associata al vuoto, che risulta essere costante:

$$\rho_{\text{vac}} = \frac{\Lambda c^2}{8\pi G} \quad (3.3)$$

In altre parole, risulta che il termine di densità energia del vuoto ottenuto dalle ipotesi di isotropia e il termine di energia oscura basato su Λ hanno le stesse proprietà cosmologiche, evolvono nello stesso modo (costante) e hanno lo stesso coefficiente $w = -1$ nell'equazione di stato cosmologica. In sostanza, nel modello Λ CDM, la costante cosmologica determina l'**effetto gravitazionale dell'energia del vuoto** [Peebles and Ratra, 2003].

Tuttavia, il modello descritto finora dà non pochi problemi. Mentre la GR non fornisce un valore per Λ , in QFT l'energia del vuoto è attribuita alle fluttuazioni quantistiche minime dei campi, calcolate come **energie di punto zero di oscillatori armonici**:

$$\rho_{\text{vac}} \propto \frac{1}{2} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \hbar \omega_k \quad (3.4)$$

Il calcolo di questo integrale risulta essere molto complesso ed è decisamente oltre gli scopi di questo lavoro. Tuttavia, questo fornisce un risultato diretto che non è dipendente dalle osservazioni, ma solo dalla QFT. Invece, attraverso i dati osservativi, si può stimare il valore di Λ , che inserito nella eq. (3.3) fornisce un valore per ρ_{vac} dipendente da osservazioni e dalla GR. Confrontando i due valori, però, si ottiene un'enorme discrepanza: la densità di energia calcolata dalla QFT è stimata essere fino a 120 ordini di grandezza maggiore rispetto al valore ottenuto da osservazioni e GR. Questa discrepanza è conosciuta come **problema della costante cosmologica** ed è ad oggi una delle più grandi sfide teoriche in cosmologia [Weinberg, 1989].

Nonostante questo, il modello della costante cosmologica come energia oscura rimane il punto di riferimento principale in cosmologia, in quanto fornisce delle descrizioni particolarmente efficaci delle osservazioni fatte finora. Infatti, per quanto il modello non fornisca spiegazioni sulla natura microscopica dell'energia oscura, esso fornisce una buona interpretazione di molti dati osservativi, come la formazione di strutture su grandi scale, mantenendo relativamente semplice la dinamica della DE.

3.1.2 Quintessenza

La quintessenza è un modello che associa l'energia oscura ad un **campo scalare dinamico** ϕ , ovvero libero di evolvere nel tempo. Questo si contrappone alla costante cosmologica, che rimane invariata nel tempo e, di conseguenza, fornisce un parametro $w = -1$ e un'evoluzione della densità costante. Nel caso della quintessenza il parametro w può variare e l'evoluzione di densità non è più costante. Si possono definire la densità associata a ϕ

$$\rho_\phi = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + V(\phi) \quad (3.5)$$

e la pressione

$$p_\phi = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 - V(\phi), \quad (3.6)$$

dove $V(\phi)$ è il potenziale associato al campo. Queste due grandezze sono in relazione secondo l'equazione di stato cosmologica (eq. (A.17)): si ricava immediatamente il parametro

$$w_\phi = \frac{\frac{1}{2} \dot{\phi}^2 - V(\phi)}{\frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + V(\phi)} \quad (3.7)$$

Siccome il campo evolve nel tempo, anche il parametro w_ϕ sarà dipendente dal tempo, o dal fattore di scala $a(t)$. In particolare vale la condizione $-1 < w_\phi(a) < 1$. Considerando il limite in cui $\dot{\phi}^2 \ll V(\phi)$, che corrisponde ad una lenta evoluzione del campo, allora $w_\phi \rightarrow -1$, riproducendo di fatto il comportamento della costante cosmologica.

La quintessenza nasce con lo scopo di risolvere il problema della costante cosmologica, ipotizzando che l'energia oscura non corrisponda all'energia del vuoto, ma che sia un'entità fisica che evolve nel tempo. Inoltre potrebbe spiegare il problema della coincidenza cosmologica: questo si riferisce al fatto che nel tempo cosmico presente la densità di materia e di energia oscura sono dello stesso ordine di grandezza, condizione molto rara secondo le evoluzioni delle densità delle due componenti. Eppure questo è quello che si osserva, che potrebbe essere una sola coincidenza oppure un indizio che ci potrebbe essere qualcosa di sbagliato nell'evoluzione della DE. Con la quintessenza, è possibile includere scenari di tracking, ovvero ipotizzare che, essendo la DE un campo dinamico con un certo potenziale, possa interagire con la materia e la sua evoluzione sia legata ad essa. Questo modello, anche se potenzialmente fornisce delle soluzioni ai problemi del Λ CDM, pone nuovi interrogativi. Infatti, la costante cosmologica resta compatibile con la maggior parte dei dati osservativi e se la quintessenza esistesse allora dovrebbe avere, per i dati osservativi riferiti al tempo cosmico presente, un parametro $w \approx -1$ difficilmente distinguibile da quello attribuibile alla costante cosmologica. Inoltre, la quintessenza costringe ad introdurre una nuova entità fisica: sono necessari una nuova particella ed un certo potenziale $V(\phi)$, per i quali non si ha alcun vincolo osservativo [Tsujikawa, 2013]. In conclusione, nonostante la quintessenza fornisca un'alternativa all'interpretazione della DE come energia del vuoto, questo modello pone molti nuovi problemi tra cui l'assenza completa di vincoli osservativi.

3.1.3 Altri modelli

Il modello della costante cosmologica e la quintessenza sono i modelli più accettati, anche se esistono molte altre descrizioni della DE. In seguito sono elencati e descritti brevemente alcuni modelli di energia oscura alternativi:

- le **k-essence** sono modelli di DE alternativi simili alla quintessenza ma che aggiungono dei termini cinetici non convenzionali alle eq. (3.5) e eq. (3.6);
- i modelli **phantom** prevedono invece un coefficiente $w < -1$, ovvero minore di quello caratteristico della costante cosmologica;
- esistono modelli in cui, durante la sua evoluzione temporale, il parametro w può passare da essere $w < -1$ a $w > -1$ e viceversa, detti **quintom**.

Infine, utilizzando un approccio del tutto diverso, esistono teorie dette **modified gravity** che suppongono che l'accelerazione dell'espansione dell'universo non sia dovuta ad una forza esterna, ma che, su scale cosmologiche, sia la gravità a non essere più descritta bene dalla GR e che quindi serva un nuovo modello di gravitazione universale. Queste teorie si basano sul modificare le equazioni di campo e la gravità newtoniana in modo che la DE non sia necessaria.

3.2 Dati osservativi

In questa sezione vengono esposti alcuni dati osservativi utili allo studio dell'energia oscura che possano essere confrontati con le previsioni del modello Λ CDM o dei modelli alternativi. Attraverso queste osservazioni, è possibile porre dei vincoli sui parametri dei modelli, tra cui il Λ CDM. I dati osservativi descritti in seguito non sono sufficienti a confermare o rigettare alcun modello; tuttavia forniscono dei vincoli significativi, che riducono lo spazio dei parametri possibili.

3.2.1 Supernovae termonucleari (SNIa) ad alto redshift

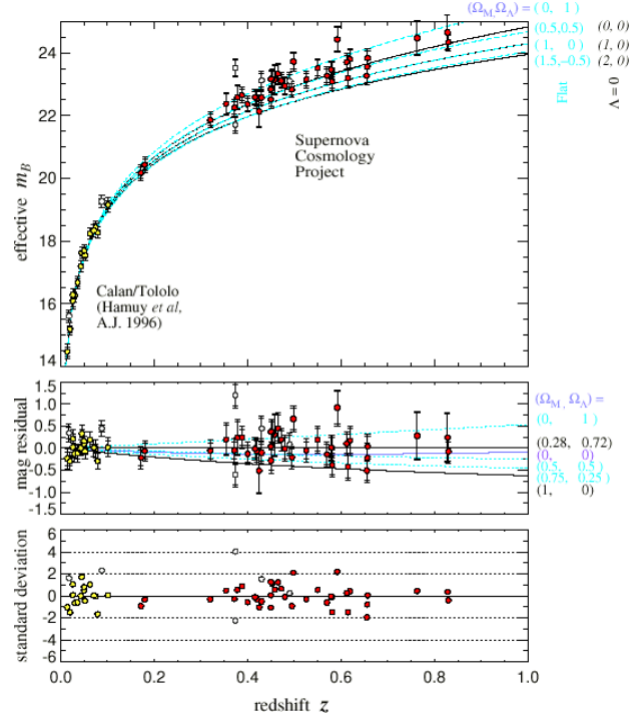


Figura 3.1: **Diagramma redshift-magnitudine** ottenuto dal progetto Supernovae Cosmology Project. Le linee azzurre sono previsioni di modelli con valori di Ω_Λ e Ω_{mat} differenti, mentre i punti rossi sono i dati osservativi delle supernovae ad alto redshift. [Perlmutter et al., 1999]

Le supernovae SNIa, dette anche termonucleari, sono esplosioni causate dall'accrescimento di massa in un sistema binario, dove la stella che acquista massa è una nana bianca. Infatti, quando la nana bianca raggiunge una certa massa critica ($1.44 M_\odot$, detto limite di Chandrasekhar), questa collassa ed esplode. Siccome il limite di massa di Chandrasekhar è pressoché costante per ogni nana bianca, le supernovae termonucleari possono essere utilizzate in astronomia come candele standard. In particolare, il loro picco di magnitudine assoluta è correlato alla curva di luminosità nel tempo. Quindi, misurando la magnitudine apparente di una supernova e conoscendone la curva di luminosità, è possibile risalire alla magnitudine assoluta. Conoscere la magnitudine assoluta e relativa di una sorgente significa conoscerne la distanza, secondo la nota formula

$$\mu = m - M = 5 \log \left(\frac{D_L}{\text{Mpc}} \right) + 25 \quad (3.8)$$

dove m e M sono rispettivamente la magnitudine apparente ed assoluta, μ è la loro differenza e D_L è la distanza di luminosità, ovvero la distanza calcolata attraverso questa formula. Allora risulta possibile costruire, raccogliendo dei dati osservativi, un diagramma redshift-magnitudine $\mu(z)$ o, equivalentemente, redshift-distanza di luminosità $D_L(z)$. La distanza di luminosità è in relazione al redshift, per un universo piatto, con l'integrale

$$D_L(z) = (1+z)c \int_0^z \frac{dz'}{H(z')} \quad (3.9)$$

che è la versione esatta della eq. (1.2). La forma del parametro di Hubble è determinata dal modello in cui ci si trova. Per esempio per il Λ CDM, invertendo la eq. (1.17) e inserendola nella eq. (3.9) si

ottiene

$$D_L(z) = (1+z)c \int_0^z \frac{dz'}{H_0 \sqrt{\Omega_{\text{mat}}(1+z')^3 + \Omega_\Lambda}}; \quad (3.10)$$

Nel caso si consideri un modello di energia oscura con $w \neq -1$, vale in generale

$$D_L(z) = (1+z)c \int_0^z \frac{dz'}{H_0 \sqrt{\Omega_{\text{mat}}(1+z')^3 + \Omega_\Lambda(1+z')^{3(1+w)}}} \quad (3.11)$$

Quindi risulta chiaro che, potendo misurare le magnitudini apparenti di un insieme di supernovae a diverso redshift, è possibile porre dei vincoli sul parametro cosmologico $w(z)$, Ω_Λ e Ω_{mat} (fig. 3.1).

Il metodo delle supernovae termonucleari fu impiegato per la prima volta nel 1998 nel contesto del High- z Supernova Search Team e successivamente nel 1999 con il Supernova Cosmology Project: furono osservate decine di supernovae ad alto redshift e si notò che queste apparivano circa il 10 – 15% più lontane rispetto alle previsioni fornite da un modello dominato dalla materia con $\Lambda = 0$ [Perlmutter et al., 1999] [Riess et al., 1998]. Questi risultati ed altri provarono che **l'espansione dell'universo è accelerata** e che tale accelerazione dipende dal termine $\Lambda > 0$, come descritto dall'eq. (1.10), derivata direttamente dalle equazioni di Friedmann.

Più recentemente, il progetto Pantheon+, attraverso l'osservazione di circa 1500 supernovae, vincolò il parametro nell'intervallo $w = (-0.90 \pm 0.14)$, compatibile con il modello della costante cosmologica. Questo intervallo fu poi ristretto ulteriormente combinando questo metodo con osservazioni provenienti da CMB e BAO [Brout et al., 2022].

3.2.2 Spettro di potenza della CMB

La radiazione cosmica di fondo non permette di studiare direttamente la DE, dal momento che a redshift così alti la sua densità era decisamente trascurabile rispetto a quella della materia. Tuttavia, la scala delle anisotropie della CMB permette di fissare alcuni parametri del modello cosmologico con cui viene descritta l'espansione dell'universo, attraverso il seguente metodo. Per prima cosa viene definito lo spettro di potenza angolare di temperatura C_l : a bassi l questo ci dà informazioni sulle anisotropie su grandi scale, mentre ad alti l lo spettro descrive la distribuzione delle anisotropie a basse scale. Si dimostra che la posizione dei picchi dello spettro è determinata da una grandezza detta scala acustica

$$\theta = \frac{r_s(z)}{D_M(z)}, \quad (3.12)$$

dove $r_s(z)$ è detto "sound horizon" e dipende unicamente dalla fisica dell'universo primordiale, che prima del disaccoppiamento si trovava in uno stato di plasma fotone-barione. All'interno di questo plasma avvenivano delle oscillazioni acustiche che, dopo il disaccoppiamento, sono rimaste visibili nella CMB come anisotropie nello spettro di potenza. $D_M(z)$ è la distanza comovente dalla superficie di ultimo scattering, ovvero la distanza tra l'osservatore e la superficie della CMB, che dipende dalla storia dell'espansione dell'universo. Infatti la distanza comovente può essere scritta, in un universo piatto, come

$$D_M(z) = c \int_0^z \frac{dz'}{H_0 \sqrt{\Omega_{\text{mat}}(1+z')^3 + \Omega_\Lambda(1+z')^{3(1+w)} + \Omega_{\text{rad}}(1+z')^4}} \quad (3.13)$$

Di conseguenza, osservando i picchi dello spettro di potenza (fig. 1.5b), nello specifico misurando θ , è possibile ottenere dei vincoli sia sui parametri Ω_{mat} e Ω_{rad} , sia sui parametri legati all'espansione dell'universo e quindi alla DE (w e Ω_Λ).

Si riporta il risultato fornito dal satellite Planck, ovvero una misura della scala angolare acustica di

$100\theta = 1.0411 \pm 0.0003$. Questa misura, insieme al metodo delle SNIa (e alle BAO) ha fornito una stima ancora più precisa per il valore di w , anche in questo caso perfettamente coerente con il modello della costante cosmologica, ovvero $w = -1.03 \pm 0.03$ [Planck Collaboration, 2020].

3.2.3 Baryon Acoustic Oscillations (BAO)

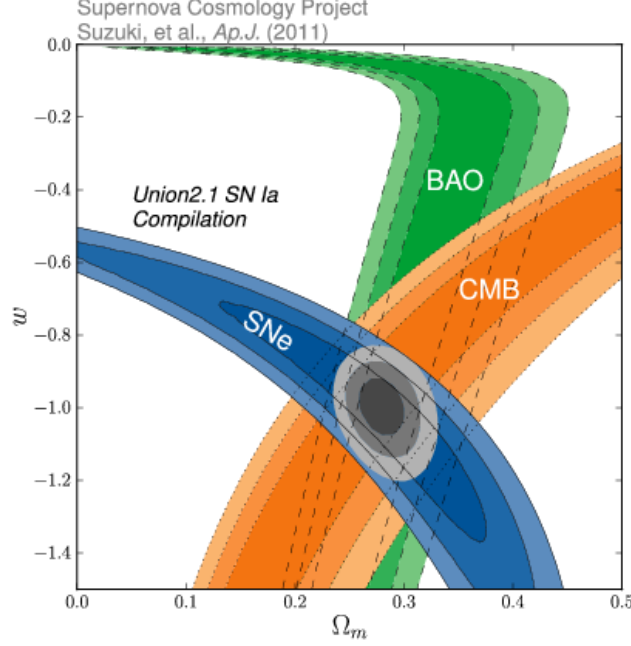


Figura 3.2: **Stime incrociate dei parametri w e Ω_{mat}** utilizzando BAO, CMB e SNIa. La regione grigia contiene i valori confermati da tutti e tre i metodi. [Perlmutter et al., 1999]

La firma delle oscillazioni acustiche avvenute all'interno del plasma fotone-barione, oltre che nella CMB, può essere letta nella distribuzione dei barioni nell'universo a basso redshift. Infatti, dopo il disaccoppiamento, le oscillazioni acustiche dei barioni rimasero congelate, poiché non era più possibile la propagazione. La grandezza misurabile è la scala $r_d \approx 147 \text{ Mpc}$, che non è altro che la distanza comoviente percorsa dall'onda acustica nel periodo di tempo che va dal Big Bang al disaccoppiamento fotone-barione. Questa distanza costituisce un righello standard: è possibile calibrarla utilizzando la CMB, poiché le anisotropie dello spettro sono causate dallo stesso processo fisico. Ciò che si osserva nell'universo a basso redshift è un picco di probabilità di trovare due galassie separate da circa 150 Mpc: queste sono distribuite nell'universo prediligendo la scala di distanza percorsa dalle onde acustiche nell'universo primordiale r_d . A questo punto, basterà calibrare il righello standard sulla CMB e, di conseguenza, confrontarlo con i dati osservativi della distanza tra galassie. Infatti r_d compare nelle seguenti relazioni:

$$r_d = D_M(z)\Delta\theta \quad (3.14)$$

$$r_d = \frac{c\Delta z}{H(z)} \quad (3.15)$$

dove $\Delta\theta$ e Δz sono rispettivamente la distanza angolare che separa le galassie sul piano del cielo e la differenza di redshift tra due galassie osservate lungo la linea di vista. Utilizzando le relazioni eq. (3.14) e eq. (3.15) è possibile calcolare $D_M(z)$ e $H(z)$ definite nella eq. (3.13) e nella eq. (1.17), che dipendono dai parametri di interesse $w, \Omega_\Lambda, \Omega_{\text{mat}}, H_0$ e Ω_{rad} . Utilizzando i dati provenienti da queste osservazioni insieme alla CMB e alle SNIa si ottengono delle stime di questi parametri [Eisenstein et al., 2005]. Nel 2024 la collaborazione DESI ha fornito, attraverso questo metodo, dei risultati coerenti con il

modello della costante cosmologica tra cui $w = -0.99^{+0.15}_{-0.13}$ dopo l'analisi di più di 6 milioni di oggetti extragalattici. Tuttavia, in un secondo progetto DESI, dei modelli di energia oscura dinamica sono stati statisticamente favoriti, aprendo la strada nel considerare, al fianco del Λ CDM, modelli come la quintessenza [DESI Collaboration et al., 2025]. Nel grafico in fig. 3.2 si può osservare come le stime del parametro w sono state rese più precise utilizzando dati provenienti da CMB, BAO e SNIa.

3.2.4 Misure di H_0 e tensione di Hubble

Con l'espressione "tensione di Hubble" si intende la discrepanza che si osserva tra le misure della costante H_0 ottenute da metodi osservativi indipendenti, attraverso indicatori posti a distanze diverse dall'osservatore. La costante di Hubble può essere infatti misurata attraverso vari metodi osservativi indipendenti, in particolare qui se ne riportano due: il primo è utilizzare le SNIa, la cui relazione tra curva di luce e magnitudine assoluta è calibrata attraverso le cefeidi; il secondo metodo è utilizzare la CMB e le ipotesi del modello Λ CDM. Come appena citato, sono state fatte molte altre misure oltre alle due esposte qui. Per completezza, si riportano due insiemi di misure effettuate nell'universo ad alto redshift (fig. 3.3) e in quello locale (fig. 3.4).

Il primo metodo di misura di H_0 consiste nell'impiegare la scala delle distanze per rendere le SNIa vicine delle candele standard, per poi misurarne il redshift. Nella calibrazione viene utilizzata la eq. (3.8) per calcolare la magnitudine assoluta della supernova, essendo D_L nota grazie al metodo delle Cefeidi¹. A questo punto è possibile costruire una relazione tra la curva di luce della supernova e la magnitudine assoluta, ora nota. Questo metodo viene calibrato per supernovae a basso redshift, condizione in cui il metodo delle Cefeidi è accessibile; come già esposto precedentemente in questa sezione, il risultato di tale calibrazione può poi essere impiegato anche nello studio delle SNIa ad alto redshift. La misura di H_0 sfrutta le SNIa vicine, così da poter utilizzare una delle eq. (1.2), che in questo caso diventa

$$H_0 \approx \frac{cz}{D_L}. \quad (3.16)$$

Questa misura, effettuata dalla collaborazione SH0ES, ripetuta su molte SNIa vicine, ha fornito un valore del rate dell'espansione dell'universo di $H_0 = (73.04 \pm 1.04) \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ [Riess et al., 2022].

Il secondo metodo è utilizzare, analogamente a quanto fatto precedentemente in questa sezione, lo spettro di potenza della CMB. Misurando la scala acustica angolare θ ci si può ricondurre alla distanza comovente $D_M(z)$, che dipende dal redshift e dai vari parametri cosmologici seguendo la eq. (3.13), che porta con sé le ipotesi del modello Λ CDM. Attraverso dei fit, si può ricavare il valore di H_0 similmente a quanto fatto per w . La misura della costante di Hubble secondo Planck utilizzando questo metodo risulta essere $H_0 = (67.4 \pm 0.5) \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ [Planck Collaboration, 2020].

I due intervalli sono evidentemente incompatibili, inoltre distano di circa 5σ l'uno dall'altro: questa discrepanza implica un errore nelle osservazioni o nella teoria. Questa tensione ha più possibili interpretazioni: nel primo caso, è possibile che vi sia una sistematica ad un qualche livello nella scala delle distanze, che non è stata ancora individuata; l'altra interpretazione sostiene che la misura attraverso le SNIa sia corretta e che ciò che è da rivedere sia la forma della eq. (3.13), ovvero il modello Λ CDM stesso.

Questa ultima interpretazione è quella che giustifica la presenza di questo paragrafo in un capitolo dedicato alla DE: il modello Λ CDM potrebbe aver bisogno, secondo questa misura, di una modifica per quanto riguarda l'energia oscura. Tuttavia, molti modelli alternativi (come la quintessenza) non bastano a spiegare la divergenza dei due valori, soprattutto per quanto riguarda il comportamento di $D_M(z)$ ad alti redshift. Per questo esistono dei modelli di DE, come per esempio la Early Dark Energy, che consentirebbero di riprodurre valori di H_0 più alti e simili a quello misurato da SH0ES.

¹Le Cefeidi sono stelle di luminosità variabile che sono utilizzate in astrofisica come candele standard.

Questo modello suppone la presenza di una quantità di energia oscura nell'universo primordiale molto più alta rispetto al Λ CDM e alla quintessenza. In conclusione, nonostante la tensione di Hubble potrebbe potenzialmente indicare l'incompletezza del Λ CDM, non è possibile escludere, al momento, una sistematica in SH0ES. Inoltre, non esistono evidenze osservative dei modelli alternativi che possano rendere la misura CMB compatibile con SH0ES [Verde et al., 2019].

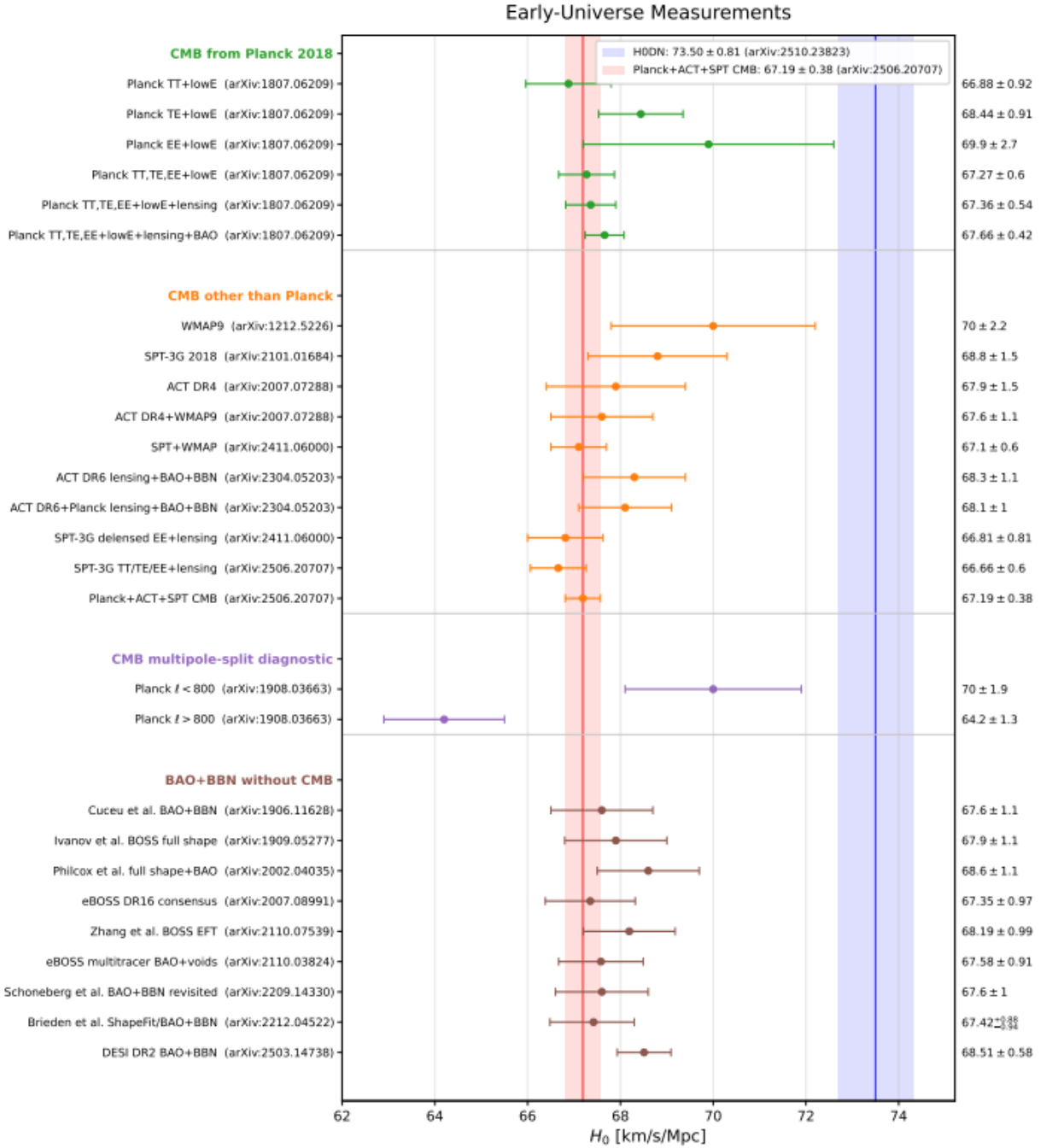


Figura 3.3: **Misure di H_0 nell'universo ad alto redshift.** La regione rossa rappresenta un intervallo di riferimento ottenuto dalle misure ad alto redshift, che appaiono quasi tutte compatibili tra loro. La regione blu rappresenta l'intervallo delle misure effettuate nell'universo locale. A sinistra sono riportate le tipologie di misure, mentre a destra i valori corrispondenti. [Cai and Wang, 2026]

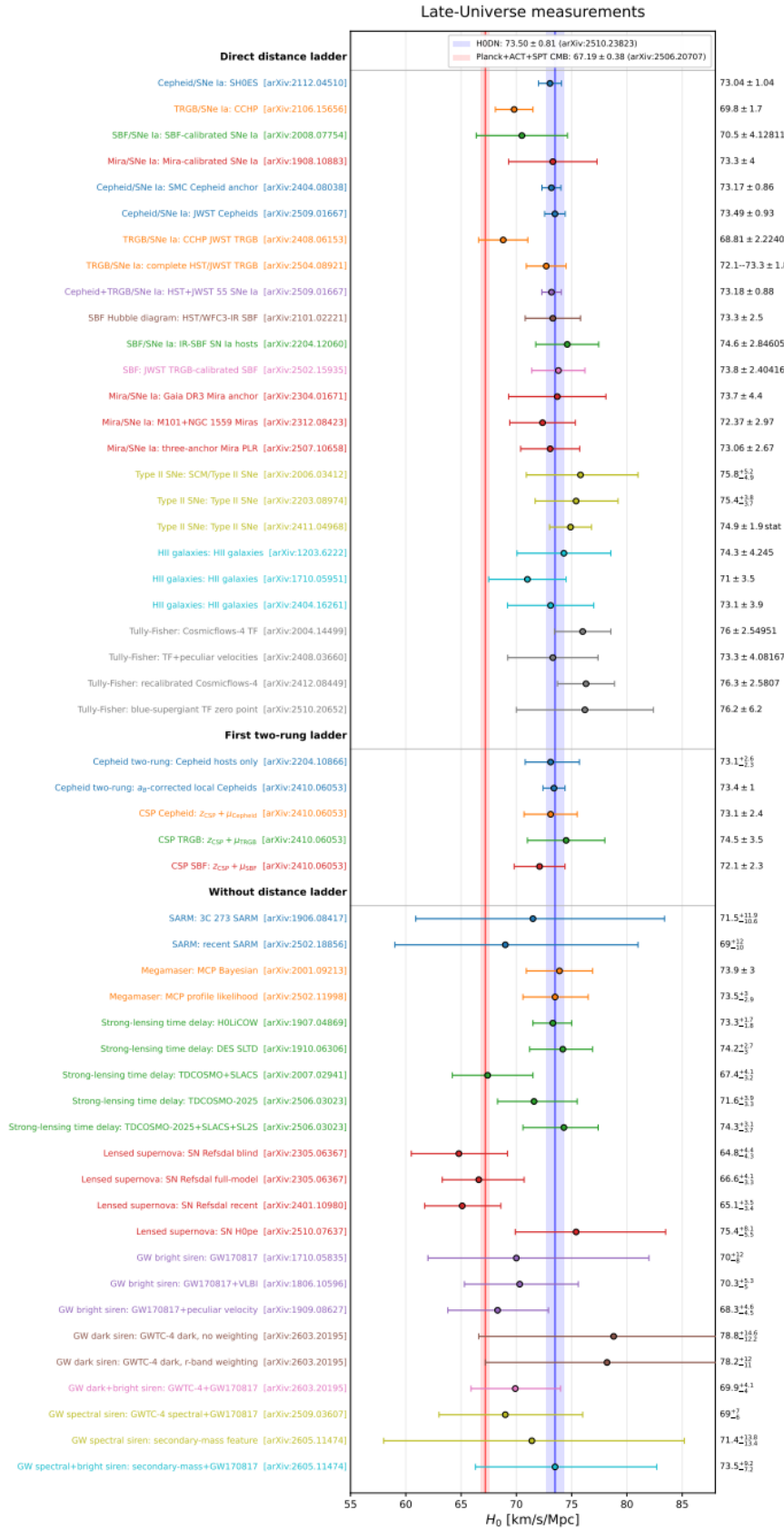


Figura 3.4: **Misure di H_0 nell'universo locale.** La regione blu rappresenta un intervallo di riferimento ottenuto dalle misure effettuate nell'universo vicino. La regione rossa rappresenta l'intervallo delle misure effettuate nell'universo ad alto redshift. A sinistra sono riportate le tipologie di misure, mentre a destra i valori corrispondenti. [Cai and Wang, 2026]

Capitolo 4

Conclusioni

4.1 Traguardi e limiti della cosmologia Λ CDM

In questa ultima sezione si intende, alla luce dei risultati presentati finora, discutere la validità del modello Λ CDM: in altre parole, si cerca di individuare dove il Λ CDM fornisce delle robuste previsioni confermate da osservazioni e dove invece i dati osservativi corrispondono in modo più accurato a previsioni provenienti da altri modelli o semplicemente costituiscono problemi ancora del tutto irrisolti. Lo scopo di questa sezione non è decretare se il modello Λ CDM sia adatto o meno a descrivere l'Universo, ma è quello di riassumerne i punti di forza ed i limiti, sia per quanto riguarda la materia oscura che l'energia oscura.

4.1.1 Risultati verificati

Le evidenze osservative di materia oscura, tra cui il **profilo di rotazione delle galassie a spirale**, i **profili di densità e temperatura delle galassie ellittiche** e le **osservazioni di lensing gravitazionale**, confermano le previsioni Λ CDM con grande precisione. In particolare, questi tre metodi indipendenti forniscono risultati spesso compatibili tra loro in contesti astrofisici opportuni; non solo queste osservazioni supportano l'eventuale presenza della materia oscura ma ne danno anche una stima quantitativa.

Le **simulazioni di tipo ILLUSTRIS-TNG**, basate sull'ipotesi di una cosmologia Λ CDM, permettono di affermare che simulando un universo di materia oscura fredda, includendo gli effetti della materia barionica, si riproducono proprietà delle galassie molto simili a quelle osservate. In particolare sono riprodotte le relazioni di Tully-Fisher, il che avvalora l'ipotesi Λ CDM. Il **progetto AIDA**, testando modelli alternativi di DM su simulazioni di matrice TNG, ha confermato che modelli di WDM di massa troppo bassa (1 keV) non sono compatibili con la formazione galattica. Questo, pur non essendo sufficiente a confermare il Λ CDM, restringe lo spazio dei parametri dei modelli possibili in maniera significativa.

Per quanto riguarda l'energia oscura, i risultati ottenuti dall'osservazione delle supernovae termoneucleari ad alto redshift sono perfettamente compatibili con il modello della costante cosmologica, verificando un'espansione accelerata dell'universo. In particolare questi dati supportano il Λ CDM per quanto riguarda il valore di w , che risulta compatibile con -1 . Inoltre, questa misura può essere resa molto più precisa integrando i dati ottenuti dalla CMB e dalle BAO.

4.1.2 Problemi e questioni aperte

Per quanto riguarda i **candidati particellari di materia oscura**, nessuno di questi è stato confermato da alcun esperimento; la mancanza della rivelazione di particelle di DM è senza dubbio una questione problematica. Infatti, la rivelazione di materia oscura fredda come le WIMPs sarebbe senza dubbio un punto a favore per il Λ CDM, dal momento che è il modello che descriverebbe al meglio le osservazioni: il fatto che questa non sia mai stata rivelata alimenta la possibilità che il modello sia in parte sbagliato. D'altra parte, anche la WDM (come i neutrini sterili) non è stata mai rivelata da alcun esperimento; la struttura microscopica della DM rimane perciò un problema essenzialmente aperto, che di fatto né conferma né smentisce il Λ CDM.

Dal punto di vista delle **simulazioni AIDA**, il progetto ha testato, oltre al modello di materia oscura fredda, altri 5 modelli alternativi. Una delle conclusioni più importanti consiste nel fatto che, per quanto riguarda molte osservabili tipiche delle galassie, queste dovrebbero differire in base al modello solo a scale relativamente piccole, mentre quasi tutti i modelli convergono allo stesso valore su grandi scale. Quindi, sarebbe necessario ottenere misure di queste osservabili su piccole scale per determinare il modello microscopico di DM a partire dalle osservazioni. Alcuni esempi di osservabili che potrebbero presentare delle discrepanze tra modelli sono: i profili di densità delle galassie nane, le curve di rotazione osservate ad alto z ed il numero caratteristico di satelliti (di una certa galassia) composti interamente da DM.

Il problema più evidente del Λ CDM per quanto riguarda l'energia oscura è sicuramente il **problema della costante cosmologica**, che consiste nell'enorme discrepanza emergente dal calcolo di ρ_Λ attraverso il modello e la QFT. Siccome nel modello della costante cosmologica la DE rappresenta l'energia del vuoto, gli scenari possibili sono due: o l'interpretazione della DE del Λ CDM è errata, oppure lo è il calcolo ottenuto dalla QFT. L'interpretazione fisica della DE rimane, quindi, un problema del tutto aperto, che non può essere verificato, ad oggi, da evidenze osservative dirette.

Un'altra discrepanza significativa, non spiegata dal Λ CDM, è la **tensione di Hubble**, ovvero la discrepanza tra i valori di H_0 misurati nell'universo locale (ad esempio SH0ES) e ad alto redshift: anche in questo caso la tensione di per sé non dimostra la scorrettezza dal modello, ma suggerisce di non ignorare lo studio di modelli alternativi.

Infine, lo studio delle BAO attraverso il progetto **DESI** ha recentemente fornito risultati statisticamente favorevoli verso il modello della quintessenza, con w dinamico, rispetto al modello della costante cosmologica. Tuttavia tali risultati non sono ancora statisticamente significativi a discreditarne le altre ipotesi.

In conclusione, nonostante la cosmologia Λ CDM sia un modello avvalorato da molte osservazioni indipendenti e le riproduca con il minor numero di parametri possibili, esistono numerose questioni aperte che non possono essere spiegate dal modello. Nessuna di queste prova, per il momento, che il Λ CDM sia fondamentalmente sbagliato; tuttavia suggeriscono che potrebbe essere necessario considerare anche modelli alternativi. Di fatto, il Λ CDM rimane il principale punto di riferimento per la cosmologia moderna, rappresentando una robusta rampa di lancio da utilizzare nello studio sempre più approfondito della parte oscura dell'Universo.

Appendice A

Derivazioni ed approfondimenti

A.1 Principi della Relatività Generale

La GR è la generalizzazione della relatività speciale ai sistemi non inerziali e la migliore descrizione matematica della gravitazione che si possiede ad oggi. Perciò i postulati della relatività ristretta vengono generalizzati a tutti i sistemi di riferimento, inerziali e non inerziali. Il primo postulato è il **principio di covarianza**, ovvero ogni legge fisica è **localmente** covariante rispetto alle trasformazioni di Lorentz in ogni sistema di riferimento, perciò le leggi fisiche hanno la stessa forma matematica in ogni sistema di riferimento. Il secondo postulato riguarda la costanza della velocità della luce, che quindi non varia da un sistema di riferimento all'altro.

Sempre dalla relatività speciale viene ereditata la struttura quadritensoriale e quadritensoriale delle grandezze fisiche, che possono quindi essere scritte nella loro base covariante e contravariante e si trasformano localmente da un sistema inerziale all'altro attraverso le matrici di Lorentz. Gli indici covarianti e contravarianti danno origine ad una contrazione, quindi in generale

$$\sum_{\mu,\nu=0}^3 A_{\mu\nu} B^\nu = A_{\mu\nu} B^\nu = C_\mu \quad (\text{A.1})$$

In relatività e quindi in questo lavoro si utilizza la notazione di Einstein sulle sommatorie, ovvero la somma è sottintesa ove compaiono due indici uguali (uno alto e uno basso).

La GR aggiunge ai principi della relatività speciale il **principio di equivalenza**, che afferma: in un intorno sufficientemente piccolo di un punto nello spaziotempo, esiste un sistema di riferimento che può essere considerato inerziale e gli effetti della gravità sono indistinguibili da un moto rettilineo uniformemente accelerato. La gravità non è quindi una forza ma una proprietà geometrica dello spaziotempo.

In GR lo spaziotempo è una varietà differenziabile di dimensione 4 su cui posso indurre una metrica locale del tipo

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (\text{A.2})$$

dove $g_{\mu\nu}$ è il tensore metrico locale di segnatura $(-, +, +, +)^1$ e $x^\mu = (ct, \mathbf{x})$ è il quadritettore posizione (contravariante) usato in relatività speciale.

Dalla struttura locale dello spaziotempo posso quindi definire la nozione di connessione di Levi-Civita ∇ , ovvero una generalizzazione della derivata che tiene conto della deformazione dello spaziotempo. La connessione di Levi-Civita deve soddisfare la condizione di assenza di torsione e di compatibilità rispetto alla metrica, ovvero $\nabla_\lambda g_{\mu\nu} = 0$. Questa derivata dà la possibilità di definire la variazione di un

¹In realtà la segnatura di $g_{\mu\nu}$ può essere convenzionalmente anche scritta nel modo $(+, -, -, -)$ senza alterarne le proprietà.

campo tensoriale come lo spaziotempo: una particella libera si muoverà seguendo traiettorie tangenti rispetto a ∇ , dette **geodesiche**. Queste soddisfano, secondo il principio di equivalenza, l'equazione

$$u^\nu \nabla_\nu u^\mu = 0 \quad (\text{A.3})$$

dove u^μ è la quadrivelocità $(c, \mathbf{v})$. Risulta possibile, a questo punto, andare a definire in modo quantitativo la curvatura della connessione di Levi-Civita. È possibile farlo attraverso il **tensore di Riemann** $R^\rho_{\sigma\mu\nu}$, definito appositamente. Questo tensore di rango 4 può essere contratto (come si fa in relatività speciale) ottenendo il **tensore di Ricci** $R_{\mu\nu}$ e, contraendo ulteriormente, lo **scalare di Ricci** R . Queste quantità indicano quindi la curvatura effettiva dello spaziotempo: è possibile definire, attraverso questi, il **tensore di Einstein**

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} \quad (\text{A.4})$$

che tiene conto di tutte le proprietà geometriche dello spaziotempo e soddisfa la legge di conservazione

$$\nabla^\mu G_{\mu\nu} = 0 \quad (\text{A.5})$$

Ricordando il **tensore energia-impulso** già definito in relatività speciale, che rappresenta il contenuto di massa ed energia dello spaziotempo, è possibile verificare che rispetta anch'esso la stessa legge di conservazione

$$\nabla^\mu T_{\mu\nu} = 0 \quad (\text{A.6})$$

Si può dimostrare che questi due tensori possono essere messi in relazione attraverso le costanti G e c , ottenendo le equazioni della dinamica della GR, dette equazioni di Einstein

$$G^{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T^{\mu\nu}. \quad (\text{A.7})$$

Aggiungendo il termine $\Lambda g^{\mu\nu}$, approfondito nel capitolo 3, si ottiene la eq. (1.5) [Carroll, 1997]. $\square$

A.2 Derivazione delle equazioni di Friedmann

Si riporta in questa sezione la derivazione delle equazioni di Friedmann (eq. (1.7) e eq. (1.8)) a partire dalle equazioni di campo di Einstein (eq. (1.5)). Per prima cosa si consideri la metrica FLRW, l'eq. (1.6), da cui è possibile calcolare le connessioni di Levi-Civita in funzione del fattore di scala $a(t)$, e di conseguenza calcolare il tensore di Ricci e lo scalare di Ricci. Si ottiene perciò la componente 00 del tensore di Ricci

$$R_{00} = -3 \frac{\ddot{a}}{a} \quad (\text{A.8})$$

e la componente ij

$$R_{ij} = (a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2kc^2) \frac{g_{ij}}{c^2 a^2} \quad (\text{A.9})$$

mentre lo scalare di Ricci risulta essere

$$R = 6 \left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{kc^2}{a^2} \right) \quad (\text{A.10})$$

Per definizione è possibile ottenere le componenti 00 e ij^2 del tensore di Einstein ricordando che il tensore metrico vale localmente $g_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, +1, +1, +1)$:

$$G_{00} = 3 \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + 3 \frac{kc^2}{a^2} \quad (\text{A.11})$$

²Gli indici ij usati da ora in poi sono indici spaziali di un vettore tridimensionale e quindi valgono $i, j = \{1, 2, 3\}$

$$G_{ij} = - \left(2 \frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{kc^2}{a^2} \right) g_{ij} \quad (\text{A.12})$$

Ora è inserita l'ipotesi di fluido perfetto per il calcolo del tensore energia-impulso, che in questo caso si scrive nel seguente modo:

$$T_{00} = \rho c^2 \quad (\text{A.13})$$

$$T_{ij} = pg_{ij} \quad (\text{A.14})$$

A questo punto è sufficiente sostituire il tensore di Einstein ed il tensore energia-impulso nelle equazioni di campo, ricordandosi del termine Λ , per ottenere le equazioni di Friedmann. Le equazioni tensoriali ottenute scritte per le componenti 00 costituiscono la prima equazione di Friedmann (eq. (1.7)):

$$\left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = - \frac{kc^2}{a^2} + \frac{8\pi G\rho}{3} + \frac{\Lambda}{3} \quad (\text{A.15})$$

mentre le stesse equazioni nelle componenti ij costituiscono la seconda (eq. (1.8)):

$$\frac{\ddot{a}}{a} = - \frac{4\pi G}{3} \left(\rho + \frac{3P}{c^2} \right) + \frac{\Lambda}{3} \quad (\text{A.16})$$

□

Si noti che queste equazioni sono state ricavate esclusivamente dalle equazioni di Einstein, dalla metrica FLRW e dall'ipotesi di fluido perfetto [Carroll, 1997][Ryden, 2006].

A.3 Equazione di stato cosmologica

In questa sezione si intende analizzare l'equazione

$$P = \langle p \rangle = w\rho c^2 \quad (\text{A.17})$$

che rappresenta la relazione costitutiva per l'universo modellato come un fluido perfetto, dove p è l'impulso e P la pressione. La relazione è infatti lineare, $P \propto \rho$, come nell'equazione di stato dei gas ideali. Mentre il termine c^2 ha un ruolo puramente dimensionale, il termine w è cruciale in quanto determina la forma delle soluzioni alle equazioni di Friedmann (eq. (1.13)). Per scegliere il valore da assegnare a w per le varie componenti di universo è sufficiente invertire la formula e fare alcune considerazioni sulla fisica di quella situazione specifica.

In generale, vale

$$w = \langle p \rangle / (\rho c^2) \quad (\text{A.18})$$

dove la densità di massa a riposo e il termine di pressione relativistico sono legati dall'espressione energia-impulso

$$\langle p \rangle = \frac{1}{c} \left\langle \sqrt{(E^2 - m^2 c^4)} \right\rangle = \left\langle \sqrt{(T^2 + 2Tmc^2)} \right\rangle \quad (\text{A.19})$$

dove E è l'energia totale e T l'energia cinetica. Per la materia non relativistica è possibile sostituire la eq. (A.19) nella eq. (A.18) (sapendo che $m/n = \rho$ con n densità numerica) e prendere il limite di energie a riposo molto maggiori dell'energia cinetica, ottenendo

$$w = \left\langle \sqrt{\left(\frac{T^2}{m^2 c^4} + \frac{2T}{mc^2} \right)} \right\rangle \xrightarrow{T/(mc^2) \rightarrow 0} 0 \quad (\text{A.20})$$

Per la radiazione si consideri la relazione energia-impulso $E = pc$ e la relazione della pressione di un gas isotropo $P = \langle p \rangle = \frac{1}{3}n\langle pv \rangle$: queste due combinate danno

$$\langle p \rangle = \frac{1}{3}n\langle E \rangle = \frac{1}{3}\rho c^2 \implies w = 1/3 \quad (\text{A.21})$$

dove nell'ultima uguaglianza è stata usata la definizione di densità equivalente di radiazione.

Il valore di w per quanto riguarda l'energia oscura è ricavabile dalle equazioni di campo di Einstein e dall'ipotesi di fluido perfetto. In relatività generale il tensore di energia impulso di un fluido perfetto ha la forma

$$T^{\mu\nu} = (\rho c^2 + p)\frac{u^\mu u^\nu}{c^2} + pg^{\mu\nu} \quad (\text{A.22})$$

inoltre è possibile portare il termine di costante cosmologica a destra delle equazioni di campo (eq. (1.5)) interpretandolo come un contributo costante al tensore energia-impulso

$$T_\Lambda^{\mu\nu} = -\frac{\Lambda c^4}{8\pi G}g^{\mu\nu} \quad (\text{A.23})$$

Eguagliando le due equazioni precedenti si ottiene $u^\mu u^\nu = 0$ e la condizione su p e ρ

$$p = -\rho c^2 \implies w = -1 \quad (\text{A.24})$$

Il valore $w = -1$ è fisicamente rilevante per due motivi. Per prima cosa è l'unico valore di w che dà un'evoluzione costante alle soluzioni delle equazioni di Friedmann, il che è coerente con un'interpretazione di "energia del vuoto" di energia oscura (come esposto nel capitolo 3). In secondo luogo, un valore negativo è coerente con l'accelerazione dell'espansione dell'universo: in questo modello l'energia oscura esercita infatti una pressione negativa (opposta all'attrazione gravitazionale) costante ed isotropa. [Carroll, 1997][Ryden, 2006]

Appendice B

Costanti e sigle

B.1 Costanti fondamentali

Si riportano nella seguente tabella le costanti utilizzate in questo lavoro ed il loro valore. Sono state utilizzate, come da convenzione in astrofisica, le unità CGS, tranne che per la costante di Hubble.

Simbolo	Descrizione	Valore
c	Velocità della luce nel vuoto	$29\,979\,245\,800\,\text{cm s}^{-1}$
G	Costante di gravitazione universale	$6.67430 \times 10^{-8}\,\text{cm}^3\,\text{g}^{-1}\,\text{s}^{-2}$
h	Costante di Hubble normalizzata	≈ 0.73
H_0	Costante di Hubble (SH0ES)	$\approx 73\,\text{km s}^{-1}\,\text{Mpc}^{-1}$
$\hbar$	Costante di Planck ridotta	$1.054571817 \times 10^{-27}\,\text{erg s}$
k_B	Costante di Boltzmann	$1.380649 \times 10^{-16}\,\text{erg K}^{-1}$
$M_\odot$	Massa solare	$1.98847 \times 10^{33}\,\text{g}$

B.2 Sigle utilizzate

Si elencano in questa sezione le sigle utilizzate, per brevità, in questo lavoro.

Sigla	Significato	Sigla	Significato
AIDA	Alternative Dark Matter	GR	General Relativity
AGN	Active Galactic Nucleus	HMF	Halo Mass Function
BAO	Baryon Acoustic Oscillations	Λ CDM	Lambda Cold Dark Matter
BBN	Big Bang Nucleosynthesis	MW	Milky Way
BH	Black Hole	QFT	Quantum Field Theory
CDM	Cold Dark Matter	SH0ES	Supernovae, H_0 , for the Eq. of State
CMB	Cosmic Microwave Background	SIDM	Self-Interacting Dark Matter
DE	Dark Energy	SMBH	Super Massive Black Hole
DESI	Dark Energy Spectroscopic Instrument	SN Ia	Type Ia Supernovae
DMO	Dark Matter Only	TNG	The Next Generation
DM	Dark Matter	WDM	Warm Dark Matter
FP	Full Physics	WIMP	Weakly Interacting Massive Particle

Bibliografia

- Aad, G. et al. (2021). Search for new phenomena in events with an energetic jet and large missing transverse momentum in proton-proton collisions at $\sqrt{s} = 13$ tev using the ATLAS detector. *Physical Review D*.
- Aartsen, M. G. et al. (2013). Search for dark matter annihilation in the sun with the 79-string IceCube detector. *Physical Review Letters*.
- Aharonian, F. A. et al. (2017). Hitomi constraints on the 3.5 kev line in the perseus galaxy cluster. *The Astrophysical Journal Letters*.
- Aprile, E. et al. (2018). Dark matter search results from a one tonne-year exposure of XENON1T. *Physical Review Letters*.
- Bartelmann, M. and Schneider, P. (2001). Weak gravitational lensing. *Physics Reports*.
- Bertone, G., Hooper, D., and Silk, J. (2005). Particle dark matter: Evidence, candidates and constraints. *Physics Reports*.
- Binney, J. and Tremaine, S. (2008). *Galactic Dynamics*. Princeton University Press, 2 edition.
- Bolton, A. et al. (2008). The sloan lens acs survey vii. elliptical galaxy scaling laws from direct observational mass measurements. *The Astrophysical Journal*.
- Brout, D., Scolnic, D., Popovic, B., Riess, A. G., Zuntz, J., et al. (2022). The pantheon+ analysis: Cosmological constraints. *The Astrophysical Journal*.
- Cai, R.-G. and Wang, S.-J. (2026). The hubble tension: A decade review. *Research in Astronomy and Astrophysics*.
- Carroll, S. M. (1997). Lecture notes on general relativity. University of California.
- CAST Collaboration (2017). New cast limit on the axion-photon interaction. *Nature Physics*.
- Chua, K. T. E., Pillepich, A., Vogelsberger, M., and Hernquist, L. (2019). Shape of dark matter haloes in the illustris simulation: effects of baryons. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*.
- Clowe, D., Bradař, M., Gonzalez, A., et al. (2006). A direct empirical proof of the existence of dark matter. *The Astrophysical Journal Letters*.
- DESI Collaboration, Adame, A. G., Aguilar, J., Ahlen, S., Alam, S., Alexander, D. M., Alvarez, M., Alves, O., Anand, U., Andrade, U., et al. (2025). Desi 2024 vi: Cosmological constraints from the measurements of baryon acoustic oscillations. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*.

- Despali, G., Moscardini, L., Nelson, D., Pillepich, A., Springel, V., and Vogelsberger, M. (2025). Introducing the aida-tng project: galaxy formation in alternative dark matter models. *Astronomy & Astrophysics*.
- Dodelson, S. (2003). *Modern Cosmology*. Academic Press.
- Dodelson, S. and Widrow, L. M. (1994). Sterile neutrinos as dark matter. *Physical Review Letters*.
- Eisenstein, D. J., Zehavi, I., Hogg, D. W., Scoccimarro, R., Blanton, M. R., Nichol, R. C., Scranton, R., Seo, H.-J., Tegmark, M., Zheng, Z., et al. (2005). Detection of the baryon acoustic peak in the large-scale correlation function of sdss luminous red galaxies. *The Astrophysical Journal*.
- Hubble, E. (1929). A relation between distance and radial velocity among extra-galactic nebulae. *Proceedings of the National Academy of Sciences*.
- Jungman, G., Kamionkowski, M., and Griest, K. (1996). Supersymmetric dark matter. *Physics Reports*.
- Kaplinghat, M. and Turner, M. S. (2001). Precision cosmology and the density of baryons in the universe. *Physical Review Letters*.
- Kim, J. E. and Carosi, G. (2010). Axions and the strong cp problem. *Reviews of Modern Physics*.
- MacTavish, C. J. et al. (2006). Cosmological parameters from the 2003 flight of boomerang. *The Astrophysical Journal*.
- Mathews, W. G. and Brighenti, F. (2003). Hot gas in and around elliptical galaxies. *Annual Review of Astronomy and Astrophysics*.
- Peebles, P. J. E. and Ratra, B. (2003). The cosmological constant and dark energy. *Reviews of Modern Physics*.
- Perlmutter, S., Aldering, G., Goldhaber, G., et al. (1999). Measurements of ω and λ from 42 high-redshift supernovae. *The Astrophysical Journal*.
- Planck Collaboration (2020). Planck 2018 results. vi. cosmological parameters. *Astronomy & Astrophysics*.
- Refregier, A. (2003). Weak gravitational lensing by large-scale structure. *Annual Review of Astronomy and Astrophysics*.
- Riess, A. G., Filippenko, A. V., Challis, P., et al. (1998). Observational evidence from supernovae for an accelerating universe and a cosmological constant. *The Astronomical Journal*.
- Riess, A. G., Yuan, W., Macri, L. M., Scolnic, D., Brout, D., Casertano, S., Jones, D. O., Murakami, Y., Anand, G. S., Breu, C., et al. (2022). A comprehensive measurement of the local value of the hubble constant with $1 \text{ km s}^{-1} \text{ mpc}^{-1}$ uncertainty from the hubble space telescope and the sh0es team.
- Royal Swedish Academy of Sciences (2011). The accelerating universe. Nobel Prize in Physics.
- Rubin, V. C., Ford, W. K., and Thonnard, N. (1980). Rotational properties of 21 sc galaxies with a large range of luminosities and radii. *The Astrophysical Journal*.

- Ryden, B. (2006). *Introduction to Cosmology*. Addison-Wesley.
- Schneider, P., Ehlers, J., and Falco, E. E. (1992). *Gravitational Lenses*. Springer.
- Springel, V. (2005). The cosmological simulation code gadget-2. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*.
- Springel, V. (2010). E pur si muove: Galilean-invariant cosmological hydrodynamical simulations on a moving mesh. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*.
- Tsujikawa, S. (2013). Quintessence: A review. *Classical and Quantum Gravity*.
- Vegetti, S. et al. (2024). Strong gravitational lensing as a probe of dark matter. *Space Science Reviews*.
- Verde, L., Treu, T., and Riess, A. G. (2019). Tensions between the early and late universe.
- Vogelsberger, M., Genel, S., Springel, V., Torrey, P., Sijacki, D., Xu, D., Snyder, G., Nelson, D., and Hernquist, L. (2014). Introducing the illustris project: Simulating the coevolution of dark and visible matter in the universe. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*.
- Weinberg, S. (1989). The cosmological constant problem. *Reviews of Modern Physics*.
- Wilson, R. W. (1978). The cosmic microwave background radiation. Nobel Lecture.