

Dipartimento di Ingegneria Industriale
Corso di Laurea in Ingegneria Aerospaziale
Tesi di Laurea in Propulsione Aeronautica e Spaziale

**EFFETTO DEL GETTO PROPULSIVO SUI
COEFFICIENTI AERODINAMICI DI UN
RAZZO-SONDA TRAMITE SIMULAZIONI
RANS**

Relatore

Prof. Fabrizio Ponti

Studente

Lois Kostner

Correlatore

Dott. Mattia Magnani

Ringraziamenti

Il ringraziamento più importante è rivolto alla mia famiglia, e in particolare ai miei genitori. Mi avete sempre sostenuto con una fiducia silenziosa ma costante, anche nei momenti di dubbio e di difficoltà, senza aggiungere pressioni inutili. Avete continuato a credere in me anche quando io stesso facevo più fatica a farlo, e questo è stato il sostegno più importante che potessi ricevere.

Ringrazio mia sorella Nora. Nei periodi più stressanti mi hai sempre accolto con affetto e, con la tua leggerezza e le nostre conversazioni, mi hai regalato momenti preziosi di distacco e di respiro.

Un ringraziamento va anche a mia nonna e a mia zia. Il vostro sostegno economico ha avuto un ruolo concreto nel permettermi di portare avanti questo percorso.

Ringrazio Alessia. Da quando ti ho conosciuta al secondo anno, sei diventata una presenza importante nella mia quotidianità. Nei periodi più faticosi, sapere di poter staccare la sera e passare del tempo con te ha reso molto più leggere anche le giornate più pesanti.

Ringrazio poi Nicolò. Con te ho avuto il piacere di fondare Aurora Rocketry, un progetto che mi ha insegnato molto e mi ha portato a scoprire qualità che non sapevo di avere. A te e alla tua famiglia rivolgo inoltre un sentito ringraziamento per avermi dato accesso al server su cui è stata interamente svolta questa tesi. Senza una macchina da 32 core e 128 GB di RAM, gran parte del lavoro svolto non sarebbe stata possibile. Una risorsa del genere non è affatto scontata e, soprattutto, non è nemmeno gratuita da mantenere operativa.

Ringrazio inoltre Chiarina, Dan, Gian, Ire, Matti e Oli. Siete le persone con cui ho condiviso di più questi tre anni e, con la vostra presenza e con i piccoli gesti quotidiani, avete reso questo percorso più sereno e piacevole.

Ringrazio anche il mio Correlatore, il dottor Mattia Magnani. Ti ringrazio per la costante disponibilità e per la tempestività con cui hai sempre risposto alle domande e ai dubbi emersi durante la stesura di questa tesi.

Infine, desidero ringraziare il mio Relatore, il professor Fabrizio Ponti. La ringrazio per la disponibilità, la fiducia e l'autonomia che mi ha accordato nella stesura di questa tesi. La ringrazio inoltre per aver sostenuto fin dall'inizio il progetto Aurora Rocketry, credendo in noi e offrendoci il supporto necessario per portarlo avanti. Senza il Suo aiuto e senza le opportunità che ci ha permesso di conoscere e cogliere, questo percorso sarebbe stato molto più arduo.

Sommario

La presente tesi analizza, mediante simulazioni CFD di tipo RANS, l'influenza della modellazione del getto propulsivo sui coefficienti aerodinamici medi di un razzo-sonda. Il caso di studio considerato è il razzo *Nemesis*, sviluppato da Aurora Rocketry, esaminato in una configurazione di volo ritenuta significativa dal punto di vista dei carichi aerodinamici. L'obiettivo del lavoro è quantificare l'errore introdotto nel calcolo dei coefficienti aerodinamici medi quando il getto venga trascurato e sostituito da una semplice superficie chiusa.

A tale scopo è stata definita una metodologia numerica coerente per il confronto tra una configurazione con il getto modellato e una senza getto. La geometria del razzo è stata semplificata in modo compatibile con la natura differenziale dello studio, mentre il getto è stato rappresentato come un getto ideale di gas perfetto, imponendo in uscita dall'ugello condizioni al contorno ricavate tramite una modellazione assialsimmetrica semplificata. Una parte rilevante del lavoro è stata inoltre dedicata alla verifica della credibilità numerica dei risultati, attraverso test di indipendenza dal dominio e dalla mesh e controlli sulla qualità complessiva delle simulazioni.

I risultati mostrano che la presenza del getto ha un effetto contenuto sui coefficienti medi di portanza e di momento, mentre produce una variazione apprezzabile del coefficiente di resistenza, pari a circa il 6.8% entro le incertezze stimate. L'analisi dei contributi locali evidenzia che tale differenza è dovuta quasi interamente alla regione di corona di base, che nel caso con il getto presenta una pressione media più bassa rispetto al caso senza getto. Nelle condizioni esaminate, trascurare il getto propulsivo porta quindi a una sottostima della resistenza aerodinamica del veicolo, mentre l'effetto sugli altri coefficienti globali risulta molto più limitato.

Indice

1	Introduzione	1
2	Modellazione fluidodinamica	2
2.1	Sistema di Navier-Stokes e modellazione della turbolenza	2
2.2	Approcci di simulazione della turbolenza	3
2.2.1	Direct numerical simulation (DNS)	3
2.2.2	Large Eddy Simulation (LES)	4
2.2.3	Reynolds-Averaged Navier-Stokes (RANS)	5
3	Trattamento della parete	9
3.1	Funzioni di parete per la velocità	9
3.2	Funzioni di parete per la temperatura	11
3.3	Validità delle funzioni di parete	11
3.3.1	Condizioni di utilizzo non compatibili	11
3.3.2	Mesh non compatibile	12
3.4	Funzioni di parete e approcci di turbolenza	12
4	Metodologia numerica	13
4.1	Discretizzazione temporale	13
4.1.1	Schema esplicito e implicito	13
4.1.2	Flusso non stazionario e stazionario	14
4.2	Discretizzazione spaziale	15
4.2.1	Calcolo dei gradienti nei centroidi e skewness	16
4.2.2	Calcolo dei gradienti alle facce e orthogonal quality	16
4.3	Solutore pressure-based e density-based	17
5	Presentazione del problema	18
5.1	Geometria	18
5.2	Definizione dei parametri di output dello studio	19
5.3	Assetto di volo e condizioni al contorno atmosferiche	20
5.3.1	Determinazione dell'assetto e delle condizioni di volo	20
5.3.2	Determinazione delle condizioni al contorno in campo libero	22
5.4	Modellazione del getto propulsivo	24
5.4.1	Determinazione delle condizioni al contorno all'ugello	24
5.4.2	Verifica di validità dell'ipotesi di isentropicità	26
5.4.3	Verifica di coerenza tra la modellazione del getto e i dati sperimentali	28
6	Progettazione della mesh preliminare	29
6.1	Calcolo del dominio fluido	29
6.2	Determinazione del face sizing	29
6.3	Determinazione dei body of influence	30
6.3.1	Calcolo del Near BOI	31
6.3.2	Calcolo del Wake-BOI	31
6.4	Determinazione dei boundary layers	32
6.4.1	Calcolo dei boundary layers globali	32
6.4.2	Calcolo delle correzioni locali dei boundary layers	34
6.5	Determinazione del volume sizing	36
6.5.1	Verifica di qualità della mesh	36

7	Gestione numerica delle simulazioni	37
7.1	Verifica di stazionarietà statistica del regime	37
7.1.1	Verifica di indipendenza dalla posizione della finestra	38
7.1.2	Verifica di assenza di trend lento	40
7.2	Verifica di convergenza dell'equazione di continuità	40
7.3	Verifica di validità di y_1^+	41
7.4	Strategia di gestione del pseudo-Courant	42
8	Test di indipendenza del dominio	43
8.1	Criterio di validazione del dominio	43
8.2	Svolgimento del test di indipendenza del dominio	44
9	Test di indipendenza della mesh	46
9.1	Criterio di validazione della mesh	46
9.2	Svolgimento del test di indipendenza della mesh	46
10	Risultati	49
10.1	Presentazione dei risultati	49
10.2	Discussione dei risultati	49
11	Appendice A: Contorni di alcuni campi di moto	52
11.1	Contorni del modulo della velocità	52
11.2	Contorni della pressione	53
12	Appendice B: Controlli numerici delle simulazioni	54
12.1	Verifica di qualità delle mesh.	54
12.2	Verifica di stazionarietà statistica del regime	54
12.2.1	Verifica di indipendenza dalla posizione della finestra	54
12.2.2	Verifica di assenza di trend lento	54
12.3	Verifica di convergenza dell'equazione di continuità	55
12.4	Verifica di validità di y_1^+	55

Elenco delle figure

1	Flusso risolto tramite DNS.	4
2	Flusso risolto tramite LES.	5
3	Flusso risolto tramite RANS.	8
4	Funzione di parete.	10
5	Numero di Courant.	15
6	Skewness.	16
7	Orthogonal quality.	17
8	Nemesis reale.	18
9	Nemesis pulito.	19
10	Sezione di scarico.	20
11	Assetto considerato.	21
12	Pressione dinamica in funzione del tempo.	22
13	Scenari di espansione del getto.	27
14	Curva della spinta del motore Cesaroni Pro75 8187M1545-P.	28
15	Dominio fluido e_1	29
16	Near-BOI.	31
17	Wake-BOI.	32
18	Boundary layers.	34
19	Correzioni locali dei boundary layers.	36
20	Boundary layers nelle zone di coda e di base.	36
21	Convergenza di una simulazione stazionaria.	37
22	Regime oscillatorio di C_D	38
23	Spettro FFT del regime oscillatorio.	38
24	Regime grezzo e media mobile.	39
25	Errori relativi nel test di indipendenza del dominio.	45
26	Errori relativi nel test di indipendenza della mesh.	48
27	Diagramma di C_p nel caso del getto a sinistra e senza getto a destra.	50
28	Contorno globale di $\ \mathbf{u}\ $: con il getto in alto, senza getto in basso.	52
29	Contorno locale di $\ \mathbf{u}\ $: con il getto in alto, senza getto in basso.	52
30	Contorno globale di p : con il getto in alto, senza getto in basso.	53
31	Contorno locale di p : con il getto in alto, senza getto in basso.	53

Elenco delle tabelle

1	Coefficienti medi in e_1, e_2 e e_3	44
2	Errori relativi dei coefficienti medi rispetto a e_1, e_2 e e_3	44
3	Coefficienti medi in m_1, m_2 e m_3	46
4	Errori relativi dei coefficienti medi rispetto a m_1, m_2 e m_3	47
5	Coefficienti medi in m_3, m_4 e m_5	48
6	Errori relativi dei coefficienti medi rispetto a m_3, m_4 e m_5	48
7	Parametri di qualità delle mesh.	54
8	Errori relativi sulla posizione della finestra.	54
9	Errori relativi sul trend lento.	54
10	Errori relativi sullo sbilanciamento di massa.	55
11	Valori massimi di y_1^+ e del contributo normale alla base.	55

1 Introduzione

La stima dei carichi aerodinamici di un razzo-sonda in fase propulsa non dipende soltanto dalla geometria esterna e dalle condizioni di volo, ma anche dall'interazione tra il flusso esterno e il getto di scarico. In prossimità della base, infatti, il getto può modificare il campo di pressione e la struttura della scia, influenzando i coefficienti aerodinamici globali. Trascurare il getto e sostituire l'uscita dell'ugello con una superficie chiusa rappresenta quindi una semplificazione numericamente conveniente, ma non necessariamente trascurabile dal punto di vista fisico.

La letteratura mostra che l'effetto del getto sulla regione di base dipende in modo sensibile dalle condizioni di volo, dal rapporto di pressione del getto e dalla geometria della coda. Studi sperimentali su configurazioni assialsimmetriche con boat-tail evidenziano infatti che il getto può modificare in misura apprezzabile la pressione di base e, di conseguenza, la resistenza associata alla regione posteriore. Ne segue che l'influenza del getto non può essere valutata in modo generico, ma deve essere stimata in relazione alla specifica configurazione considerata [25].

In questo contesto si colloca il presente lavoro, dedicato al razzo-sonda *Nemesis*, sviluppato dall'associazione studentesca Aurora Rocketry. L'obiettivo della tesi è valutare, mediante simulazioni CFD di tipo RANS, l'influenza della modellazione del getto propulsivo sui coefficienti aerodinamici medi del veicolo, confrontando due configurazioni: una con il getto modellato e una senza getto, nella quale l'uscita dell'ugello viene sostituita da una parete chiusa. Lo scopo non è riprodurre in modo esaustivo tutta la fisica interna del motore, ma determinare se, e in quale misura, tale semplificazione alteri la stima dei carichi aerodinamici.

Per rispondere a questo quesito è stato costruito un modello numerico coerente tra i due casi, in modo da isolare il più possibile l'effetto della sola modellazione del getto. Il confronto è stato quindi sviluppato nell'ambito di una procedura numerica verificata, basata su controlli di indipendenza dal dominio e dalla mesh e su verifiche di coerenza delle principali scelte di discretizzazione e modellazione.

La tesi è organizzata come segue. Dopo il richiamo dei fondamenti teorici e numerici necessari alla comprensione del problema, vengono presentati il caso di studio, la modellazione del getto e la metodologia CFD adottata. Infine, sono discussi i test di verifica numerica e i risultati del confronto tra configurazione con il getto e senza getto.

2 Modellazione fluidodinamica

Si introducono i principali concetti di fluidodinamica rilevanti per il presente lavoro, con particolare attenzione alla modellazione della turbolenza.

2.1 Sistema di Navier-Stokes e modellazione della turbolenza

Il moto di un fluido continuo è descritto dai bilanci di massa, quantità di moto ed energia, dai quali si ricava il sistema di Navier-Stokes.

Si assume che il fluido sia continuo e descritto dai campi di velocità, pressione, densità e temperatura, rispettivamente $\mathbf{u}$, p , ρ e ϑ . Inoltre, il fluido è considerato newtoniano, con viscosità dinamiche molecolari μ e λ , e il tensore degli sforzi si esprime come [21]:

$$\mathbf{T} = (-p\mathbf{I} + \lambda \nabla \cdot \mathbf{u}) \mathbf{I} + 2\mu \mathbf{S} \quad (2.1)$$

dove $\mathbf{S}$ è il tensore di deformazione [23]:

$$\mathbf{S} = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T) \quad (2.2)$$

Per il trasporto di calore si considera la legge di Fourier, con conducibilità termica k_{th} [22]:

$$\mathbf{q} = -k_{th} \nabla \vartheta \quad (2.3)$$

Sotto queste ipotesi, i bilanci locali di massa, quantità di moto ed energia, si scrivono come [21–23]:

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0 \\ \rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{u} + (\lambda + \mu) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) + \rho \mathbf{f} \\ \rho c_v \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \vartheta \right) = -\vartheta \left(\frac{\partial p}{\partial \vartheta} \right)_v \nabla \cdot \mathbf{u} + k_{th} \nabla^2 \vartheta + 2\mu \mathbf{S} : \mathbf{S} + \lambda (\nabla \cdot \mathbf{u})^2 + \rho Q \\ p = f_s(\rho, \vartheta) \end{cases} \quad (2.4)$$

dove $\mathbf{f}$ è il vettore delle forze esterne, c_v è il calore specifico a volume costante, Q è la sorgente esterna di calore per unità di massa e $R = 8.314 \text{ J}/(\text{mol K})$ è la costante universale dei gas. L'espressione $(\cdot)_v$ indica che la quantità tra parentesi è valutata a volume costante.

Integrando nel sistema la funzione di stato f_s , esso comprende 6 equazioni scalari e 6 incognite scalari, quindi il problema risulta chiuso.

Le proprietà μ , λ e k_{th} possono essere assunte costanti oppure dipendenti da ϑ .

Il sistema deve poi essere completato con opportune condizioni al contorno. In un problema esterno si impongono tipicamente condizioni di campo libero per una certa combinazione delle variabili $\mathbf{u}$, p_∞ , ρ_∞ e ϑ_∞ .

Non è necessario imporle tutte indipendentemente: ad esempio, assegnati ϑ_∞ e p_∞ , ρ_∞ segue dall'equazione di stato.

Sulla parete solida si impongono inoltre condizioni sui campi trasportati, ad esempio la condizione di non scivolamento (*no-slip*) per la velocità, e nel caso di parete adiabatica, un flusso termico nullo per la temperatura:

$$\mathbf{u}|_w = \mathbf{0} \quad \mathbf{q}|_w = 0 \quad (2.5)$$

Per problemi realistici il sistema non ammette in generale una soluzione analitica, per cui è necessario ricorrere alla CFD.

Dal punto di vista numerico, il dominio spaziale viene suddiviso in una mesh di celle, mentre il tempo è discretizzato in istanti separati da un intervallo Δt , detto *time step*. Nei metodi a volumi finiti le variabili vengono generalmente memorizzate in punti rappresentativi delle celle, in genere i centroidi. I campi non sono quindi noti in forma continua, ma solo in un numero finito di punti e a tempi discreti.

2.2 Approcci di simulazione della turbolenza

Una risoluzione diretta del sistema di Navier-Stokes richiederebbe di catturare tutte le strutture del moto turbolento, dalle scale più grandi fino alla scala di Kolmogorov, con mesh molto fitte e time steps molto piccoli. Per i numeri di Reynolds (da ora in avanti Re) tipici delle applicazioni industriali, il costo computazionale risulta quindi proibitivo.

Per rendere la CFD sostenibile si ricorre ad approcci che introducono opportune approssimazioni, ad esempio tramite filtraggio (LES) o media (RANS) del sistema, seguite da una chiusura modellistica. Tali metodi si basano su ipotesi e parametri calibrati per specifiche classi di flussi, e possono quindi risultare affidabili in certi contesti e meno accurati in altri. Per questo motivo, l'uso della CFD richiede consapevolezza del campo di validità del modello adottato.

Gli approcci più comuni alla simulazione della turbolenza si distinguono in tre famiglie principali:

- Direct Numerical Simulation (DNS);
- Large Eddy Simulation (LES);
- Reynolds-Averaged Navier-Stokes (RANS).

Per ciascun approccio si riporta, a scopo illustrativo, il sistema per gas incomprimibili in assenza di sorgenti esterne, così da evidenziarne le differenze matematiche essenziali.

2.2.1 Direct numerical simulation (DNS)

Nel metodo DNS (*Direct Numerical Simulation*) il sistema DNS viene risolto senza introdurre modelli di turbolenza: tutte le scale del moto, dai vortici più grandi fino a quelli dissipativi, sono quindi risolte direttamente dal calcolo numerico.

Il sistema DNS coincide con quello di Navier-Stokes sotto le ipotesi introdotte:

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \\ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{u} \\ \frac{\partial \vartheta}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \vartheta = \frac{k_{th}}{\rho c_v} \nabla^2 \vartheta + \frac{2\nu}{c_v} \mathbf{S} : \mathbf{S} \end{cases} \quad (2.6)$$

La DNS richiede una risoluzione spaziale dell'ordine della scala di Kolmogorov e passi temporali molto piccoli; di conseguenza, il costo computazionale cresce rapidamente e risulta in genere proibitivo per i numeri di Reynolds di interesse applicativo. Per questo motivo trova impiego soprattutto in ambito di ricerca, su geometrie relativamente semplici e per valori moderati di Re , ad esempio nello studio di casi canonici utili all'analisi dei meccanismi della turbolenza [24].

Un esempio di flusso risolto tramite approccio DNS è riportato in Fig. 1 [14]:

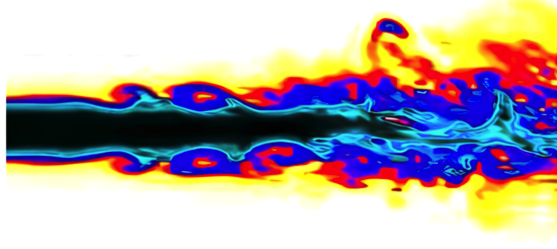


Figura 1: Flusso risolto tramite DNS.

2.2.2 Large Eddy Simulation (LES)

Nel metodo LES (*Large Eddy Simulation*) il sistema LES si ottiene sottoponendo il sistema di Navier-Stokes a un'operazione di filtraggio che separa le strutture risolte da quelle non risolte. Il filtro attenua le fluttuazioni associate a scale spaziali inferiori a una scala caratteristica Δ , spesso legata implicitamente alla dimensione locale della mesh. I campi di moto possono quindi essere interpretati come somma di una componente filtrata e di una componente di sottogriglia (*subgrid-scale*, SGS).

Assumendo la forma incomprimibile a proprietà costanti, il sistema LES può essere scritto come [19]:

$$\begin{cases} \nabla \cdot \bar{\mathbf{u}} = 0 \\ \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial t} + \bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla \bar{\mathbf{u}} = -\frac{1}{\rho} \nabla \bar{p} + \nu \nabla^2 \bar{\mathbf{u}} - \nabla \cdot \boldsymbol{\tau}^{\text{SGS}} \\ \frac{\partial \bar{\vartheta}}{\partial t} + \bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla \bar{\vartheta} = \frac{k_{\text{th}}}{\rho c_v} \nabla^2 \bar{\vartheta} + \frac{2\nu}{c_v} \bar{\mathbf{S}} : \bar{\mathbf{S}} - \nabla \cdot \mathbf{q}^{\text{SGS}} \end{cases} \quad (2.7)$$

dove $\boldsymbol{\tau}^{\text{SGS}}$ è il tensore degli sforzi di sottogriglia e $\mathbf{q}^{\text{SGS}}$ è il vettore del flusso di calore turbolento di sottogriglia [19]:

$$\boldsymbol{\tau}^{\text{SGS}} = \overline{\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}} - \bar{\mathbf{u}} \otimes \bar{\mathbf{u}} \quad \mathbf{q}^{\text{SGS}} = \overline{\mathbf{u} \vartheta} - \bar{\mathbf{u}} \bar{\vartheta} \quad (2.8)$$

Questi termini rappresentano l'effetto non noto delle scale non risolte sul trasporto di quantità di moto e di calore delle scale risolte e richiedono quindi modelli di chiusura, detti modelli SGS.

Poiché le scale inferiori a Δ non vengono risolte, la LES richiede mesh meno fini della DNS. Restano però necessarie griglie di elevata qualità, soprattutto in prossimità delle pareti e nelle regioni a forte gradiente, oltre a passi temporali sufficientemente piccoli. Il costo computazionale, pur inferiore a quello della DNS, resta quindi spesso elevato in ambito industriale. La LES è particolarmente adatta quando interessano le grandi strutture vorticosi e la loro evoluzione temporale, come in scie, separazioni complesse e carichi aerodinamici non stazionari [20].

Un esempio di flusso risolto tramite approccio LES è riportato in Fig. 2 [14]:

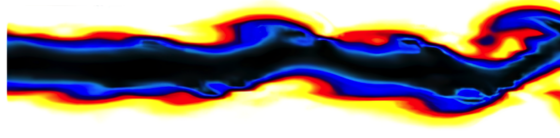


Figura 2: Flusso risolto tramite LES.

2.2.3 Reynolds-Averaged Navier-Stokes (RANS)

L'approccio RANS (*Reynolds-Averaged Navier-Stokes*) è quello di maggiore interesse per il presente lavoro. Esso si basa sulla decomposizione di Reynolds delle grandezze di campo e sulla soluzione del sistema in termini di valori medi. Ogni quantità scalare o vettoriale φ viene infatti scomposta in una parte media e in una fluttuazione [11]:

$$\varphi = \langle \varphi \rangle + \varphi' \quad (2.9)$$

dove $\langle \varphi \rangle$ rappresenta il valore medio e φ' lo scostamento rispetto alla media.

Assumendo la forma incomprimibile a proprietà costanti, il sistema RANS può essere espresso come [11]:

$$\begin{cases} \nabla \cdot \langle \mathbf{u} \rangle = 0 \\ \frac{\partial \langle \mathbf{u} \rangle}{\partial t} + \langle \mathbf{u} \rangle \cdot \nabla \langle \mathbf{u} \rangle = -\frac{1}{\rho} \nabla \langle p \rangle + \nu \nabla^2 \langle \mathbf{u} \rangle - \nabla \cdot \mathbf{R} \\ \frac{\partial \langle \vartheta \rangle}{\partial t} + \langle \mathbf{u} \rangle \cdot \nabla \langle \vartheta \rangle = \frac{k_{th}}{\rho c_v} \nabla^2 \langle \vartheta \rangle + \frac{2\nu}{c_v} \langle \mathbf{S} \rangle : \langle \mathbf{S} \rangle - \nabla \cdot \mathbf{q}^t \end{cases} \quad (2.10)$$

dove $\mathbf{R}$ è il tensore degli sforzi di Reynolds e $\mathbf{q}^t$ è il vettore del flusso di calore turbolento associato alle fluttuazioni [11]:

$$\mathbf{R} = -\langle \mathbf{u}' \otimes \mathbf{u}' \rangle \quad \mathbf{q}^t = \langle \mathbf{u}' \vartheta' \rangle \quad (2.11)$$

Questi termini rappresentano l'effetto delle fluttuazioni sul campo medio e introducono nuove incognite; per chiudere il sistema è quindi necessario adottare opportuni modelli di turbolenza.

Tra i modelli più diffusi e computazionalmente convenienti vi sono quelli di tipo *eddy-viscosity*, basati sull'ipotesi di Boussinesq.

Ipotesi di Boussinesq

Il trasporto molecolare di quantità di moto ed energia dipende dalle proprietà fisiche del fluido, in particolare dalla viscosità dinamica molecolare μ e dalla conducibilità termica k_{th} .

La turbolenza introduce però un trasporto aggiuntivo, generalmente molto più intenso e complesso da descrivere nel dettaglio. Entro l'ambito di validità dell'ipotesi di Boussinesq, questo contributo viene modellato introducendo una viscosità turbolenta μ_t e una conducibilità termica turbolenta k_{th_t} , che dipendono dallo stato turbolento locale [11].

A livello matematico, il sistema adotta per gli sforzi turbolenti $\mathbf{R}$ e per il flusso termico turbolento $\mathbf{q}^t$ equazioni costitutive formalmente analoghe a quelle molecolari [11]:

$$\mathbf{R} = 2\mu_t \langle \mathbf{S} \rangle - \frac{2}{3} \rho k \mathbf{I} \quad \mathbf{q}^t = -k_{th_t} \nabla \langle \vartheta \rangle \quad (2.12)$$

e poiché si può esprimere k_{tht} in funzione di μ_t dalla definizione del numero di Prandtl turbolento Pr_t costante [11]:

$$Pr_t = \frac{\mu_t c_p}{k_{tht}} \quad \Rightarrow \quad k_{tht} = \frac{\mu_t c_p}{Pr_t} \quad (2.13)$$

è possibile esprimere i termini di chiusura del sistema in funzione di una singola incognita scalare, μ_t , riducendo drasticamente la complessità del problema. Il vantaggio è evidente: si passa da un tensore di Reynolds e da un flusso di calore turbolento a una sola grandezza scalare. Il limite è che un singolo scalare non può rappresentare in modo completo effetti anisotropi e assume, in prima approssimazione, un comportamento isotropo del trasporto turbolento.

Inoltre, non è sempre vero che gli sforzi turbolenti siano proporzionali al tasso di deformazione come quelli molecolari. In presenza di separazioni tridimensionali complesse o forte curvatura delle linee di corrente, questa ipotesi tende a sovrastimare μ_t , aumentando eccessivamente la diffusione turbolenta e riducendo l'affidabilità del modello [17].

I modelli di turbolenza di tipo eddy-viscosity adottano quindi l'ipotesi di Boussinesq e si differenziano per il modo in cui determinano μ_t . Tra i modelli più diffusi si ricordano:

- Modello k - ε standard;
- Modello k - ω standard;
- Modello k - ω SST.

Modello k - ε standard

Nel modello k - ε standard la viscosità turbolenta μ_t è espressa in funzione dell'energia cinetica turbolenta k , che rappresenta l'energia contenuta nelle fluttuazioni di velocità, e del tasso di dissipazione ε , che quantifica la velocità con cui tale energia viene dissipata [17]:

$$\nu_t = C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \quad (2.14)$$

dove C_μ è una costante del modello.

Le grandezze k e ε sono quindi due incognite aggiuntive e richiedono l'introduzione di due equazioni di trasporto supplementari [17]:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Sistema RANS} \\ \frac{\partial k}{\partial t} + \langle \mathbf{u} \rangle \cdot \nabla k = P_k - \varepsilon + \nabla \cdot \left[\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_k} \right) \nabla k \right] \\ \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \langle \mathbf{u} \rangle \cdot \nabla \varepsilon = C_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon}{k} P_k - C_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{k} + \nabla \cdot \left[\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \nabla \varepsilon \right] \end{array} \right. \quad (2.15)$$

dove $P_k = P_k(\mathbf{u}, k)$ è il termine di produzione di energia cinetica turbolenta e $C_{\varepsilon 1}$, $C_{\varepsilon 2}$, σ_k , σ_ε sono costanti calibrate su flussi turbolenti canonici.

Il modello k - ε standard fornisce generalmente buone prestazioni in flusso libero, ma non è adatto a risolvere direttamente lo strato limite fino alla parete senza modellazione aggiuntiva; per questo viene spesso accoppiato a funzioni di parete. Inoltre, richiede l'assegnazione di opportune condizioni al contorno, ad esempio k_∞ ed ε_∞ .

Modello k - ω standard

Nel modello k - ω standard la viscosità turbolenta è espressa in funzione di k e di ω , detta frequenza specifica di dissipazione [17]:

$$\nu_t = \frac{k}{\omega} \quad (2.16)$$

Anche in questo caso k e ω sono incognite aggiuntive e richiedono due equazioni di trasporto supplementari [17]:

$$\begin{cases} \text{Sistema RANS} \\ \frac{\partial k}{\partial t} + \langle \mathbf{u} \rangle \cdot \nabla k = P_k - \beta^* k \omega + \nabla \cdot \left[\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_k} \right) \nabla k \right] \\ \frac{\partial \omega}{\partial t} + \langle \mathbf{u} \rangle \cdot \nabla \omega = \alpha_\omega \frac{\omega}{k} P_k - \beta \omega^2 + \nabla \cdot \left[\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_\omega} \right) \nabla \omega \right] \end{cases} \quad (2.17)$$

Le equazioni aggiuntive hanno struttura analoga a quelle del modello k - ε standard, ma la seconda è scritta in termini di ω anziché di ε e impiega costanti di calibrazione diverse.

Rispetto al modello k - ε standard, il k - ω standard descrive meglio la regione di parete e può essere impiegato per risolvere lo strato limite turbolento fino alla parete senza ricorrere necessariamente a funzioni di parete. Di contro, è generalmente più sensibile alle condizioni turbolente in campo libero: piccole variazioni nella scelta di ω_∞ possono propagarsi nel dominio e influenzare in modo significativo la soluzione [17].

Modello k - ω SST

I due modelli standard si compensano a vicenda: il k - ε standard è in genere robusto in flusso libero ma meno affidabile vicino alla parete, mentre il k - ω standard descrive bene lo strato limite fino alla parete ma risulta più sensibile alle condizioni in campo libero. Il modello k - ω SST (*Shear Stress Transport*) nasce per combinarne i punti di forza, ottenendo un comportamento di tipo k - ω in prossimità della parete e di tipo k - ε lontano da essa tramite opportune funzioni di *blending*.

Un primo elemento caratteristico è la definizione della viscosità turbolenta [17]:

$$\nu_t = \frac{a_1 k}{\max(a_1 \omega, \|\langle \mathbf{S} \rangle\| F_2)} \quad (2.18)$$

dove a_1 è una costante del modello, $\|\mathbf{S}\|$ è una misura del tasso di deformazione del campo medio e F_2 è una funzione di blending che dipende principalmente dalla distanza dalla parete. Questa forma limita la sovrastima di μ_t in regioni critiche, ad esempio in presenza di gradienti avversi di pressione o separazioni, risolvendo in parte le limitazioni dell'ipotesi di Boussinesq.

Per ottenere il passaggio controllato tra il comportamento k - ω vicino alla parete e quello equivalente al k - ε in campo libero, il modello impiega una funzione di blending F_1 tale che [17]:

$$F_1 \approx \begin{cases} 1 & \text{vicino alla parete} \\ 0 & \text{in campo libero} \end{cases} \quad (2.19)$$

e definisce i coefficienti del modello come combinazione dei due insiemi di costanti [17]:

$$\phi_{\text{SST}} = F_1 \phi_{k-\omega} + (1 - F_1) \phi_{k-\varepsilon} \quad (2.20)$$

dove ϕ_{SST} è un generico coefficiente del modello.

Un ulteriore elemento chiave è il termine di *cross-diffusion* nell'equazione di ω , introdotto per ridurre la sensibilità del modello alle condizioni in campo libero e favorire il comportamento di tipo k - ε lontano dalla parete [17]:

$$CD_{\text{SST}} = (1 - F_1) \frac{2}{\sigma_{\omega 2}} \frac{1}{\omega} \nabla k \cdot \nabla \omega \quad (2.21)$$

dove il fattore $(1 - F_1)$ rende il termine principalmente attivo fuori dalla regione di parete.

Il sistema risultante è quindi costituito dal sistema RANS e da due ulteriori equazioni di trasporto per k e ω [17]:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Sistema RANS} \\ \frac{\partial k}{\partial t} + \langle \mathbf{u} \rangle \cdot \nabla k = P_k - \beta_{\text{SST}}^* k \omega + \nabla \cdot \left[\left(\nu + \sigma_{k, \text{SST}} \frac{\mu_t}{\rho} \right) \nabla k \right] \\ \frac{\partial \omega}{\partial t} + \langle \mathbf{u} \rangle \cdot \nabla \omega = \alpha_{\text{SST}} \frac{\omega}{k} P_k - \beta_{\text{SST}} \omega^2 + \nabla \cdot \left[\left(\nu + \sigma_{\omega, \text{SST}} \frac{\mu_t}{\rho} \right) \nabla \omega \right] + CD_{\text{SST}} \end{array} \right. \quad (2.22)$$

Nel complesso, il modello SST risulta in genere più robusto in flusso libero rispetto al k - ω standard e più affidabile in prossimità della parete rispetto al k - ε standard. Richiede infine l'assegnazione di condizioni al contorno per le variabili turbolente in ingresso, ad esempio k_∞ e ω_∞ [17].

Conclusioni sull'utilizzo della RANS

Il principale limite dei modelli RANS di tipo eddy-viscosity è che una viscosità scalare può risultare inadeguata in presenza di forte anisotropia o di fenomeni tridimensionali complessi, come separazioni 3D, swirl o forte curvatura delle linee di corrente. In tali casi i risultati possono perdere affidabilità anche con mesh fitte, e può essere necessario ricorrere a modelli più avanzati o ad approcci alternativi, come LES o metodi ibridi RANS-LES.

Poiché RANS restituisce grandezze mediate, non risolve esplicitamente i dettagli istantanei della turbolenza. L'approccio è quindi adatto soprattutto alla stima di carichi aerodinamici medi e alla descrizione del moto medio, mentre è meno indicato quando la fisica dipende in modo sostanziale da fenomeni istantanei.

Dal punto di vista computazionale, non essendo richiesta la risoluzione delle scale turbolente istantanee, i modelli RANS risultano molto meno onerosi di DNS e LES e consentono l'impiego di mesh e time steps più grossolani. Questo ne giustifica l'ampio utilizzo in ambito industriale, purché i risultati siano interpretati criticamente e supportati da un'adeguata verifica numerica [17].

Un esempio di flusso risolto tramite approccio RANS è riportato in Fig. 3 [14]:



Figura 3: Flusso risolto tramite RANS.

3 Trattamento della parete

Nei modelli RANS e LES il trattamento della parete non viene sempre gestito tramite risoluzione diretta dello strato limite fino alla parete, principalmente a causa dell'elevato costo computazionale richiesto per descrivere con sufficiente dettaglio tale regione. Poiché in questo capitolo il problema è discusso nell'ambito di formulazioni mediate o filtrate, le variabili dovrebbero formalmente essere indicate con i corrispondenti operatori di media o di filtraggio. Per semplicità, tuttavia, nel seguito si adotterà una notazione più compatta, utilizzando i campi “nudi” invece di quelli mediati o filtrati; essi saranno quindi da intendersi, di volta in volta, come grandezze mediate in RANS o filtrate in LES.

3.1 Funzioni di parete per la velocità

In ambito CFD, le interazioni tra fluido e parete sono particolarmente importanti anche per il calcolo dei carichi aerodinamici, esprimibili come [11]:

$$\mathbf{F} = \int_S (-p_w \mathbf{n} + \tau_w \mathbf{s}) dS \quad (3.1)$$

dove S è la superficie di integrazione, $p_w \mathbf{n}$ è la componente normale della tensione a parete e $\tau_w \mathbf{s}$ è la componente tangenziale, in cui $\mathbf{n}$ è il versore normale alla superficie e $\mathbf{s}$ è il versore tangenziale in direzione del flusso.

La pressione a parete p_w è ottenuta direttamente dalla soluzione del sistema RANS o LES con le opportune chiusure, mentre la tensione tangenziale τ_w dipende dal gradiente di velocità in prossimità della parete. In forma scalare, lungo la direzione normale alla parete, si può scrivere [11]:

$$\tau_w = \mu \left. \frac{\partial u_t}{\partial n} \right|_w \quad (3.2)$$

dove u_t è la componente tangenziale della velocità. Una stima accurata dei carichi richiede quindi una buona predizione sia di p_w sia del gradiente di velocità vicino alla parete.

Poiché ciò impone una discretizzazione molto fitta e quindi costosa, per il calcolo di τ_w si ricorre spesso a trattamenti alternativi, come le funzioni di parete, che modellano la regione di parete senza risolverla integralmente.

Per introdurre tali metodi si definiscono una velocità caratteristica e una distanza adimensionalizzata dalla parete.

Velocità caratteristica e adimensionalizzata

La velocità caratteristica u_τ è una scala di velocità costruita a partire dalla tensione tangenziale a parete τ_w e dalla densità ρ . Essa consente di definire la velocità adimensionalizzata u^+ [11]:

$$u_\tau = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}} \quad u^+ = \frac{u_t}{u_\tau} \quad (3.3)$$

dove u_t è valutata nel punto considerato all'interno dello strato limite.

Distanza dalla parete adimensionalizzata

La distanza adimensionalizzata dalla parete y^+ si definisce normalizzando la distanza y dalla parete tramite u_τ e la viscosità cinematica ν [11]:

$$y^+ = \frac{u_\tau y}{\nu} \quad (3.4)$$

L'uso di u^+ e y^+ è utile perché, sotto ipotesi ideali come parete liscia, strato limite turbolento in equilibrio e gradiente di pressione trascurabile, il profilo di velocità vicino alla parete può essere descritto in forma universale tramite una legge di parete:

$$u^+ \sim \begin{cases} y^+ & y^+ < y_{\text{crit}_1}^+ \\ \text{buffer} & y_{\text{crit}_1}^+ \leq y^+ \leq y_{\text{crit}_2}^+ \\ \ln y^+ & y^+ > y_{\text{crit}_2}^+ \end{cases} \quad (3.5)$$

Le espressioni matematiche che descrivono questo andamento sono dette funzioni di parete. La formulazione standard modella il solo tratto logaritmico [11]:

$$u^+ = \frac{1}{\kappa} \ln y^+ + B \quad (3.6)$$

dove κ è la costante di von Kármán e B è una costante empirica, mentre formulazioni più recenti descrivono anche la parte lineare, come mostrato in Fig. 4 [2]:

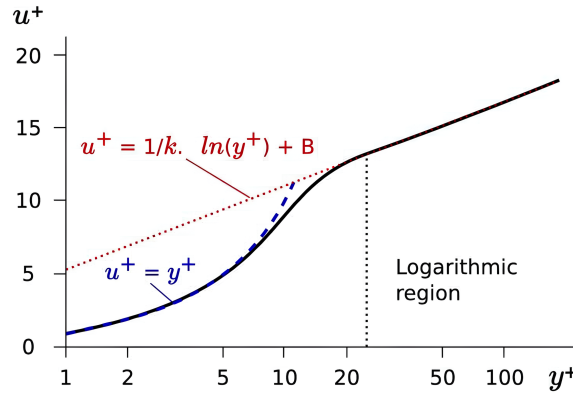


Figura 4: Funzione di parete.

L'uso di grandezze adimensionali rende la legge di parete più generale, poiché assorbe la dipendenza dai parametri locali dello strato limite.

Per quantificare l'infittimento della mesh necessario a catturare lo strato limite si utilizza il parametro y^+ . Nel caso della risoluzione *wall-resolved*, che non prevede l'utilizzo di funzioni di parete, si richiede tipicamente che i centroidi del primo strato di celle si trovino a una distanza adimensionale $y_1^+ \lesssim 1$. Inoltre, la regione vicina alla parete, indicativamente $y^+ \lesssim 20$, deve essere discretizzata con un numero adeguato di celle, così da rappresentare correttamente il profilo di velocità.

Quando invece si dispone di un'opportuna funzione di parete f_p , è possibile evitare la risoluzione esplicita della fascia più interna dello strato limite; si passa quindi alla risoluzione *wall-modeled*. In tal caso, la tensione tangenziale a parete può essere stimata imponendo [11]:

$$u_1^+ = f_p(y_1^+) \quad \Rightarrow \quad \frac{u_{t,1}}{u_\tau} = f_p\left(\frac{u_\tau y_1}{\nu}\right) \quad (3.7)$$

dove $u_{t,1}$ è la componente tangenziale della velocità nel centroide della prima cella. La relazione fornisce un'equazione per determinare u_τ , da cui la tensione a parete:

$$\tau_w = \rho u_\tau^2 \quad (3.8)$$

Nel contesto numerico, $u_{t,1}$ è disponibile come valore di soluzione e viene utilizzato per aggiornare la stima di τ_w tramite la funzione di parete.

Le funzioni di parete permettono così di evitare valori molto piccoli di y_1^+ , consentendo di collocare il primo centroide anche a $y_1^+ \gtrsim 100$, a seconda del trattamento adottato, con un costo computazionale inferiore. In tali condizioni, τ_w può essere comunque stimata con buona accuratezza, purché siano rispettati i limiti di validità della funzione di parete impiegata.

Una volta stimata τ_w , è possibile ricostruire la trazione a parete $\mathbf{t}_w$ e quindi il contributo ai carichi aerodinamici tramite l'integrale di superficie.

3.2 Funzioni di parete per la temperatura

In modo del tutto analogo al caso della velocità, le funzioni di parete possono essere estese anche al problema termico. Infatti, per determinare il flusso di calore tra fluido e parete q_w sarebbe necessario valutare accuratamente il gradiente di temperatura [10]:

$$q_w = -k_{th} \left. \frac{\partial \vartheta}{\partial n} \right|_w \quad (3.9)$$

Questa quantità è rilevante poiché la condizione al contorno termica è spesso espressa proprio in termini di flusso, ad esempio $q_w = 0$ nel caso di parete adiabatica.

Come per la tensione tangenziale a parete, una risoluzione diretta del gradiente termico richiede una discretizzazione molto fine vicino alla parete. Quando invece si adottano funzioni di parete, il flusso di calore può essere stimato tramite una legge di parete per la temperatura, costruita in modo analogo a quella per la velocità e valida entro il medesimo campo di ipotesi. In questo senso, le funzioni di parete termiche consentono di evitare la risoluzione esplicita della regione più interna dello strato limite anche per il problema termico, riducendo il costo computazionale.

3.3 Validità delle funzioni di parete

Le funzioni di parete sono derivate sotto ipotesi specifiche sullo strato limite; il loro impiego è quindi affidabile solo finché tali ipotesi risultano ragionevolmente soddisfatte. Alcune formulazioni includono correzioni per rugosità o separazioni deboli, ma restano comunque approssimazioni basate su profili medi idealizzati.

Un uso improprio delle funzioni di parete si manifesta principalmente in due casi:

- Le condizioni locali di flusso non sono compatibili con le ipotesi alla base della funzione di parete;
- La discretizzazione vicino alla parete, in particolare il posizionamento del primo centroide, non è coerente con il trattamento adottato.

3.3.1 Condizioni di utilizzo non compatibili

L'errore consiste nell'applicare funzioni di parete in condizioni per le quali l'ipotesi di profilo logaritmico non è valida, ad esempio in presenza di strato limite laminare o in transizione, forti gradienti avversi di pressione, separazioni marcate o pareti rugose senza un adeguato trattamento dedicato. In tali casi il profilo medio di velocità può discostarsi sensibilmente dalla legge logaritmica, con possibili errori non trascurabili nelle grandezze derivate, come τ_w e q_w [17, 24].

3.3.2 Mesh non compatibile

Anche quando le condizioni di flusso sono compatibili con le ipotesi near-wall, una discretizzazione inadatta può compromettere l'uso delle funzioni di parete. Nel caso delle funzioni di parete standard, τ_w è ricavata imponendo al primo centroide una relazione di tipo logaritmico, quindi il primo punto deve ricadere nella regione logaritmica, tipicamente [17]:

$$y_1^+ \in [20, 400] \quad (3.10)$$

Se invece y_1^+ cade nella fascia di buffer o a profilo lineare, l'ipotesi logaritmica al primo punto non è più coerente. In questi casi si adottano trattamenti alternativi, ad esempio formulazioni *all- y^+* , che includono anche il comportamento lineare e il raccordo verso la fascia logaritmica.

Il solo rispetto di y_1^+ non garantisce comunque l'accuratezza: è infatti necessario discretizzare lo strato limite con un numero sufficiente di strati di boundary layer [17].

3.4 Funzioni di parete e approcci di turbolenza

La scelta del trattamento di parete è strettamente legata all'approccio di modellazione della turbolenza, perché determina se la regione vicino alla parete venga risolta direttamente oppure modellata tramite una funzione di parete. Per questo, sia in LES sia in RANS si distinguono formulazioni wall-resolved e wall-modeled, mentre nella DNS l'impiego di funzioni di parete è concettualmente incompatibile, poiché tutte le scale del moto devono essere risolte fino alla parete [24].

Nel caso RANS si distinguono in particolare modelli formulati per risolvere il sistema fino alla parete e modelli che richiedono un trattamento dedicato:

- **Low-Re:** il modello è formulato per risolvere il sistema fino alla parete, risolvendo direttamente lo strato limite;
- **High-Re:** la regione vicino alla parete è modellata tramite funzioni di parete e il sistema viene risolto principalmente nel campo esterno allo strato limite.

Ad esempio, il modello $k-\varepsilon$ standard è tipicamente impiegato in configurazione high-Re, poiché non è progettato per la risoluzione diretta fino alla parete senza uno specifico trattamento. [11, 17].

4 Metodologia numerica

Per ottenere risultati CFD affidabili non basta definire correttamente la geometria e le condizioni al contorno: anche la metodologia numerica e le impostazioni del solutore influenzano stabilità, accuratezza e costo computazionale. Scelte quali lo schema temporale, la discretizzazione spaziale, l'accoppiamento pressione-velocità e i criteri di convergenza possono infatti introdurre smorzamento numerico, instabilità o errori sistematici. In questa sezione si richiamano i concetti essenziali che motivano le scelte adottate nello studio, ragionando direttamente in termini del sistema di Navier-Stokes; tuttavia, i concetti illustrati si estendono anche ai casi in cui il sistema governante è costituito dalla sua forma filtrata o mediata, con le opportune chiusure.

4.1 Discretizzazione temporale

4.1.1 Schema esplicito e implicito

Nel modello continuo e non stazionario si definisce φ come vettore delle incognite:

$$\varphi = (u, v, w, \vartheta, \rho) \quad (4.1)$$

dove φ è una sua componente generica. Manipolando algebricamente il sistema, le equazioni di continuità, quantità di moto ed energia possono essere ricondotte alla forma generale [5]:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = f_{\varphi}(\varphi) \quad (4.2)$$

dove φ coincide con ρ per la continuità, con u, v, w per la quantità di moto e con ϑ per l'energia, mentre la pressione p si assume determinata tramite l'equazione di stato.

Una volta discretizzato spazialmente il dominio, la discretizzazione temporale può essere eseguita con schema esplicito o implicito.

Schema esplicito

Nello schema esplicito si scrive [5]:

$$\frac{\varphi_{t+1} - \varphi_t}{\Delta t} = f_{\varphi}(\varphi_t) \quad \Rightarrow \quad \varphi_{t+1} \approx \varphi_t + \Delta t f_{\varphi}(\varphi_t) \quad (4.3)$$

dove t è l'indice temporale. Le grandezze al nuovo time step sono quindi calcolate direttamente a partire da quelle note al passo precedente. Lo svantaggio principale è che, per ragioni di stabilità numerica, intesa come la capacità del solutore di non amplificare errori numerici dovuti a troncamenti, arrotondamenti e approssimazioni, questo approccio richiede in genere passi temporali molto piccoli, soprattutto su mesh fitte o in presenza di velocità elevate.

Schema implicito

Nello schema implicito si scrive [5]:

$$\frac{\varphi_{t+1} - \varphi_t}{\Delta t} = f_{\varphi}(\varphi_{t+1}) \quad (4.4)$$

La presenza del termine $f(\varphi^{n+1})$ rende necessario determinare iterativamente, o tramite linearizzazione, le incognite al time step $n + 1$. Questo richiede iterazioni interne a ogni passo temporale, ma consente in genere di utilizzare Δt più grandi rispetto allo schema esplicito.

4.1.2 Flusso non stazionario e stazionario

Flusso non stazionario

Nel caso non stazionario, le grandezze di campo φ evolvono nel tempo e la discretizzazione temporale introduce un time step Δt . Ad esempio, con formulazione implicita:

$$\frac{\varphi_{t+1} - \varphi_t}{\Delta t} = f_\varphi(\varphi_{t+1}) \quad (4.5)$$

In una simulazione non stazionaria, Δt deve essere scelto in modo da risolvere adeguatamente la dinamica temporale di interesse.

Nel seguito, tuttavia, non vengono eseguite simulazioni non stazionarie: questo richiamo serve solo a distinguere il passo fisico Δt dal pseudo-passo $\Delta \tau$ impiegato nelle simulazioni stazionarie.

Flusso stazionario e pseudo-transiente

Sotto ipotesi di stazionarietà, le derivate temporali si annullano e il problema discreto si riduce a [32]:

$$f_\varphi(\varphi) = 0 \quad (4.6)$$

Per migliorarne la robustezza numerica si introduce spesso un pseudo-tempo τ e si risolve iterativamente [32]:

$$\frac{\varphi_{n+1} - \varphi_n}{\Delta \tau} + f_\varphi(\varphi_{n+1}) = 0 \quad (4.7)$$

dove n è l'iterazione numerica e $\Delta \tau$ è un pseudo-passo privo di significato fisico. Formalmente l'equazione ha la stessa struttura del caso non stazionario, ma qui $\Delta \tau$ non serve a risolvere una dinamica reale, ma a guidare il solver verso la soluzione stazionaria.

La soluzione è raggiunta quando il termine in pseudo-tempo tende ad annullarsi:

$$\frac{\varphi_{n+1} - \varphi_n}{\Delta \tau} \rightarrow 0 \quad \Rightarrow \quad f_\varphi(\varphi) \rightarrow 0 \quad (4.8)$$

In modo coerente, si può definire un residuo dell'equazione stazionaria come [32]:

$$r_n = f_\varphi(\varphi_n) \quad (4.9)$$

che idealmente tende ad annullarsi al convergere della soluzione. In pratica, la convergenza si valuta combinando la riduzione dei residui con la stabilizzazione delle grandezze integrate, ad esempio i coefficienti aerodinamici.

Eventuali oscillazioni dei coefficienti aerodinamici durante l'avanzamento in pseudo-tempo non rappresentano frequenze fisiche, poiché $\Delta \tau$ non è scelto per risolvere la dinamica reale; esse indicano piuttosto convergenza incompleta o una possibile tendenza del problema verso un comportamento intrinsecamente non stazionario.

Numeri di Courant e pseudo-Courant

Si definiscono, in forma scalare di riferimento [1, 8]

$$CFL = \frac{\|\mathbf{u}\| \Delta t}{\Delta x} \quad pCFL = \frac{\|\mathbf{u}\| \Delta \tau}{\Delta x} \quad (4.10)$$

dove Δx è una misura della dimensione locale di cella. Nel caso non stazionario, CFL può essere interpretato come il numero di celle percorse da una particella fluida in un time step, come illustrato in Fig. 5 [29]:

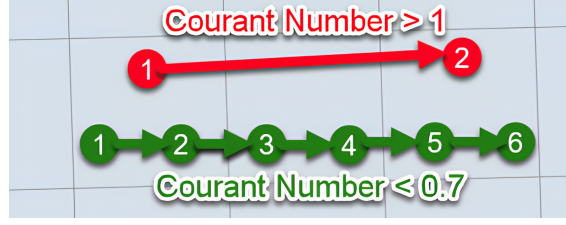


Figura 5: Numero di Courant.

Nel caso stazionario, $pCFL$ ha lo stesso significato, solo espresso in termini di pseudo-tempo.

CFL e $pCFL$ giocano un ruolo centrale nella stabilità del solutore, poiché consentono di quantificare i vincoli degli schemi espliciti e impliciti e di metterli in relazione con i valori adottati.

Per schemi espliciti, la stabilità impone tipicamente un vincolo del tipo $CFL \lesssim 1$ o $pCFL \lesssim 1$ nel caso pseudo-transiente. Negli schemi impliciti non esiste un vincolo rigido analogo, ma valori troppo elevati di CFL e $pCFL$ possono degradare la robustezza della convergenza e condurre a oscillazioni o divergenza. Per questo motivo, in simulazioni stazionarie è spesso utile adottare una strategia di incremento graduale del $pCFL$, iniziando da valori moderati e aumentandoli solo quando la soluzione mostra un comportamento regolare.

4.2 Discretizzazione spaziale

Il solutore CFD risolve il sistema in forma discretizzata, e il campo può considerarsi numericamente risolto quando, in ogni cella, ciascuna equazione risulta soddisfatta.

Si dimostra che ogni equazione di Navier-Stokes può essere scritta nella seguente forma [5]:

$$\underbrace{\int_V \frac{\partial(\rho\varphi)}{\partial t} dV}_{\text{Accumulo}} + \underbrace{\oint_{\partial V} \rho\varphi \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dA}_{\text{Convezione}} = \underbrace{\oint_{\partial V} \Gamma_\varphi \nabla\varphi \cdot \mathbf{n} dA}_{\text{Diffusione}} + \underbrace{\int_V S_\varphi dV}_{\text{Sorgente}} \quad (4.11)$$

dove Γ_φ è il coefficiente diffusivo e S_φ è la sorgente volumetrica.

Per un dato volume di controllo V , la variazione del campo φ dipende quindi dai contributi di accumulo, convezione, diffusione e sorgente.

Discretizzando il dominio, il volume di controllo V_c coincide con la generica cella c , con cui si indica anche il relativo centroide, mentre la sua superficie è rappresentata dall'insieme delle facce f , in numero N_f . Le equazioni discretizzate si possono allora scrivere come [5]:

$$\underbrace{V_c \frac{\partial(\rho_c\varphi_c)}{\partial t}}_{\text{Accumulo}} + \underbrace{\sum_{f=1}^{N_f} (\rho\varphi)_f (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n})_f A_f}_{\text{Convezione}} = \underbrace{\sum_{f=1}^{N_f} \Gamma_{\varphi_f} (\nabla\varphi \cdot \mathbf{n})_f A_f}_{\text{Diffusione}} + \underbrace{S_{\varphi_c} V_c}_{\text{Sorgente}} \quad (4.12)$$

Il campo risulta quindi numericamente risolto quando, per ogni cella, le equazioni discretizzate del sistema sono soddisfatte. L'accuratezza dei singoli termini dipende perciò anche dalla qualità della mesh.

4.2.1 Calcolo dei gradienti nei centroidi e skewness

La *skewness* è particolarmente rilevante nella discretizzazione del termine convettivo, nel quale compare φ_f , cioè il valore del campo φ sulla faccia f .

Poiché il campo è risolto nei centroidi delle celle, i valori sulla faccia devono essere ricostruiti a partire dai valori noti nei centroidi. I metodi più comuni sono il *first order upwind* e il *second order upwind*.

Nel primo caso, φ_f viene assunto uguale al valore nella cella sopravvento rispetto alla direzione del flusso, il cui centroide è indicato con c_{uw} [5]:

$$\varphi_f = \varphi_{c_{uw}} \quad (4.13)$$

Questo approccio è semplice e robusto, ma introduce una diffusione numerica elevata, tendendo ad appiattire i campi.

Per questo motivo si preferisce spesso il *second order upwind*, che stima φ_f tramite un'interpolazione lineare a partire dal valore e dal gradiente nella cella sopravvento [5]:

$$\varphi_f = \varphi_{c_{uw}} + \nabla \varphi_{c_{uw}} \cdot (\mathbf{x}_f - \mathbf{x}_{c_{uw}}) \quad (4.14)$$

dove $\mathbf{x}_c$ e $\mathbf{x}_f$ sono rispettivamente le posizioni del centroide di cella e del centro della faccia.

Questo schema richiede una stima del gradiente $\nabla \varphi_c$. Un metodo molto usato è il *least squares cell based*, che ricava il gradiente imponendo un sistema costruito sulle differenze di φ tra la cella di centroide c e le N_c celle adiacenti [31]:

$$\begin{cases} \varphi_1 - \varphi_c = \nabla \varphi_c \cdot (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_c) \\ \varphi_2 - \varphi_c = \nabla \varphi_c \cdot (\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_c) \\ \dots \\ \varphi_{N_c} - \varphi_c = \nabla \varphi_c \cdot (\mathbf{x}_{N_c} - \mathbf{x}_c) \end{cases} \quad (4.15)$$

Poiché $\nabla \varphi_c$ contiene tre componenti scalari e in genere $N > 3$, il sistema risulta sovradeterminato e viene normalmente risolto in senso ai minimi quadrati.

L'accuratezza della procedura dipende anche dalla disposizione geometrica delle celle adiacenti attorno a c : quanto più esse risultano distribuite in modo regolare, tanto più la stima del gradiente tende a essere affidabile. Per questo si introduce la *skewness*, parametro di qualità che misura quanto la forma della cella si discosti da quella ideale. Valori prossimi a 0 indicano celle di buona qualità, mentre valori vicini a 1 corrispondono a celle fortemente distorte, come illustrato in Fig. 6 [9]:

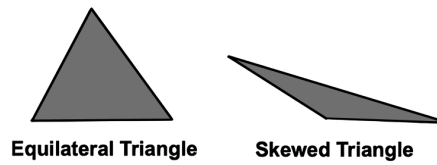


Figura 6: Skewness.

4.2.2 Calcolo dei gradienti alle facce e orthogonal quality

L'*orthogonal quality* è invece particolarmente importante nella discretizzazione del termine diffusivo, in cui compare il prodotto scalare:

$$(\nabla \varphi \cdot \mathbf{n})_f = (\nabla \varphi)_f \cdot \mathbf{n}_f \quad (4.16)$$

Il problema è che il gradiente viene tipicamente stimato nei centroidi, mentre qui serve una sua componente normale sulla faccia.

Una strategia semplice consiste nello stimare $(\nabla\varphi \cdot \mathbf{n})_f$ tramite la differenza tra i valori di φ nei centroidi c_1 e c_2 delle due celle adiacenti alla faccia, divisa per la loro distanza [18]:

$$(\nabla\varphi \cdot \mathbf{n})_f \approx \frac{\varphi_{c_2} - \varphi_{c_1}}{\|\mathbf{x}_{c_2} - \mathbf{x}_{c_1}\|} \quad (4.17)$$

Questa relazione è esatta solo se la faccia è perpendicolare al segmento che congiunge i due centroidi. In una mesh reale tale condizione non è perfettamente verificata, e l'errore cresce al diminuire dell'ortogonalità geometrica.

Per questo si monitora la *orthogonal quality*, indicatore compreso tra 0 e 1 che misura quanto le facce risultino ortogonali rispetto ai segmenti che collegano i centroidi delle celle adiacenti: valori vicini a 1 indicano una buona ortogonalità, mentre valori bassi corrispondono a celle più distorte. La differenza tra configurazioni favorevoli e sfavorevoli è osservabile in Fig. 7 [29]:

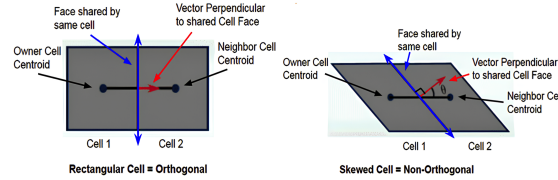


Figura 7: Orthogonal quality.

I solutori moderni includono correzioni di non-ortogonalità per migliorare la stima del gradiente sulle facce, ma tali correzioni diventano più sensibili al rumore numerico all'aumentare della distorsione geometrica. Di conseguenza, mantenere una buona *orthogonal quality* resta una priorità nella generazione della mesh.

4.3 Solutore pressure-based e density-based

Nel solutore *density-based* le equazioni di continuità, quantità di moto ed energia vengono risolte in modo accoppiato, determinando tipicamente $\mathbf{u}$, ϑ e ρ , mentre la pressione p si ricava tramite l'equazione di stato. Questa formulazione risulta in genere particolarmente robusta nei regimi transonici e supersonici, nei quali la fisica del problema è fortemente influenzata dalla propagazione delle onde di pressione e dalla possibile presenza di onde d'urto.

Nel solutore *pressure-based*, invece, l'equazione dell'energia è in genere trattata in modo disaccoppiato rispetto al blocco continuità-quantità di moto: si risolvono iterativamente pressione e velocità, quindi si aggiorna la temperatura e, di conseguenza, lo stato termodinamico del fluido. All'interno del blocco continuità-quantità di moto, l'accoppiamento pressione-velocità può essere gestito con approccio segregato o accoppiato.

Nel *pressure-based* la densità non è una variabile primaria, ma viene ricavata tramite l'equazione di stato. Per questa struttura il metodo è tradizionalmente adatto a flussi incomprimibili e comprimibili subsonici, ma con opportune impostazioni numeriche può essere applicato anche a regimi comprimibili più spinti. In presenza di onde d'urto marcate, rispetto al *density-based* può richiedere maggiore attenzione nella discretizzazione e nelle impostazioni numeriche per limitare la dissipazione e catturare correttamente le discontinuità.

5 Presentazione del problema

L'obiettivo dello studio è quantificare, per la configurazione di volo considerata del razzo-sonda Nemesis, le differenze nei carichi aerodinamici calcolati al variare della fisica rappresentata.

Nel caso reale, quando il motore è acceso, il moto del razzo è influenzato anche dalla presenza del getto. La sua modellazione introduce però complessità aggiuntive nell'impostazione delle simulazioni CFD e, in molti casi, il getto viene trascurato, sostituendo l'uscita dell'ugello con una semplice superficie chiusa. Questa semplificazione può introdurre errori dovuti a una rappresentazione incompleta della fisica; lo scopo del lavoro è quindi stimare l'errore atteso sui coefficienti aerodinamici medi qualora il getto venga completamente trascurato.

5.1 Geometria

La geometria considerata nel problema è il razzo-sonda Nemesis, presentato in Fig. 8:

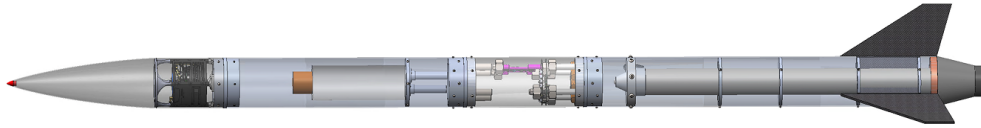


Figura 8: Nemesis reale.

Il razzo presenta una lunghezza pari a $l = 2930$ mm, un diametro di fusoliera pari a $d = 150$ mm e una massa a pieno pari a $m = 27.1$ kg. È stato progettato e realizzato dall'Associazione Studentesca Universitaria Aurora Rocketry nell'anno 2025. Il telaio è prevalentemente realizzato in alluminio ed è progettato per raggiungere una quota nominale di 3000 m.

Ai fini delle simulazioni non è stata adottata la geometria completa in ogni suo dettaglio costruttivo, ma una versione semplificata e pulita. In particolare, sono stati trascurati elementi secondari come viteria, *rail buttons* e rugosità superficiale. Tale scelta è coerente con la natura differenziale dello studio, che mira a confrontare i casi con il getto e senza getto: si è infatti ipotizzato che il contributo aerodinamico di questi dettagli sarebbe risultato pressoché identico in entrambe le configurazioni, cancellandosi in larga parte nel confronto finale.

Questa semplificazione consente inoltre di ridurre la complessità geometrica e la difficoltà di generazione della mesh, evitando un appesantimento computazionale non giustificato rispetto alle grandezze di interesse.

Il razzo viene infine posizionato in un opportuno sistema di riferimento, dove:

- L'origine O è posta sull'asse longitudinale del razzo, in corrispondenza dell'estremità posteriore;
- L'asse x è lungo la direzione di una delle tre alette, entrante nel foglio;
- L'asse y è perpendicolare alla stessa aletta, verso l'alto nel foglio;
- L'asse z è lungo la direzione del flusso, verso destra nel foglio.

La geometria effettivamente utilizzata nelle simulazioni è dunque quella riportata in Fig. 9:



Figura 9: Nemesis pulito.

Per questa applicazione risulta utile suddividere il razzo in tre zone, al fine di distinguere contributi aerodinamici associati a parti differenti del velivolo:

- **Fusoliera:** zona comprendente il nose-cone e il corpo del razzo, fino alla radice del bordo di attacco delle alette.
- **Coda:** zona comprendente le alette, la porzione di fusoliera da esse interessata e il boat-tail.
- **Base:** superficie posteriore comprendente sia la sezione su cui viene imposta l'uscita del getto di scarico, sia l'anello circostante, detto corona di base.

Quando si farà riferimento alla base, si intenderà l'unione tra la sezione di uscita del getto e la corona di base.

5.2 Definizione dei parametri di output dello studio

Per definire i coefficienti aerodinamici di interesse, si anticipa che la configurazione considerata presenta un angolo di attacco, ottenuto ruotando Nemesis attorno all'asse x .

In tale configurazione il razzo risulta simmetrico rispetto al piano d'attacco, quindi si può assumere nullo il contributo di forza aerodinamica lungo x e, idealmente, anche i momenti associati a tale direzione.

Le azioni aerodinamiche di forza $\mathbf{F}$ e momento $\mathbf{M}_{CG}$ possono quindi essere scritte come:

$$\mathbf{F} = (0, L, D) \quad \mathbf{M}_{CG} = (M, 0, 0) \quad (5.1)$$

dove il momento è calcolato rispetto al baricentro del razzo nell'istante in cui si verificano le condizioni di volo considerate nello studio, posto sull'asse longitudinale del razzo a una distanza di $d_{CG} = 1300$ mm dall'estremità posteriore.

Adimensionalizzando le componenti, si ottengono i coefficienti aerodinamici [7]:

$$C_L = \frac{L}{p_{d\infty} S_t} \quad C_D = \frac{D}{p_{d\infty} S_t} \quad C_M = \frac{M}{p_{d\infty} S_t d} \quad (5.2)$$

dove $S_t = 1.767 \cdot 10^4$ mm² è l'area di riferimento, assunta pari alla sezione trasversale della fusoliera, e $p_{d\infty}$ è la pressione dinamica indisturbata, definita come [7]:

$$p_{d\infty} = \frac{1}{2} \rho_{\infty} U_{\infty}^2 \quad (5.3)$$

Lo studio mira a quantificare, in termini percentuali, le differenze nei coefficienti aerodinamici medi dovute alla presenza o meno della modellazione del getto. Indicando con $\overline{C}^{(g)}$ e $\overline{C}^{(ng)}$ un generico coefficiente medio rispettivamente nel caso con il getto e nel caso senza getto, si definisce:

$$\Delta \overline{C} = \left| \frac{\overline{C}^{(g)} - \overline{C}^{(ng)}}{\overline{C}^{(g)}} \right| \pm \delta \overline{C} \quad (5.4)$$

dove $\pm\delta\overline{C}$ è l'incertezza associata al risultato, dovuta agli effetti di dominio e mesh, definita come:

$$\delta\overline{C} = \delta\overline{C}_e + \delta\overline{C}_m \quad (5.5)$$

dove $\delta\overline{C}_e$ è il contributo di incertezza dovuto al dominio, mentre $\delta\overline{C}_m$ è quello dovuto alla mesh. Queste grandezze guidano quindi la progettazione di un dominio e di una discretizzazione adeguati per l'applicazione considerata.

Si osservi infine che, sia nel caso con il getto che quello senza getto, la superficie del razzo inclusa nel calcolo dei coefficienti aerodinamici medi è la stessa ed esclude la superficie sulla quale, nel caso con il getto, viene imposta l'uscita del flusso di scarico, evidenziata in arancione in Fig. 10.

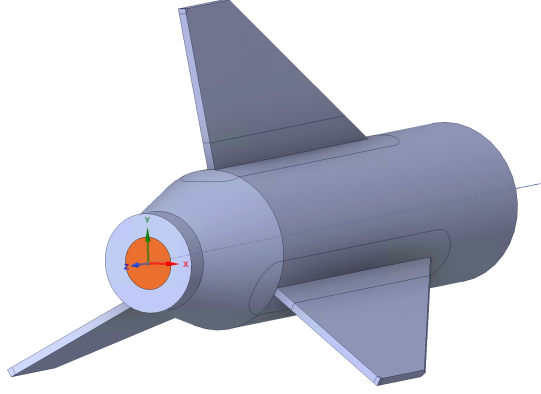


Figura 10: Sezione di scarico.

5.3 Assetto di volo e condizioni al contorno atmosferiche

5.3.1 Determinazione dell'assetto e delle condizioni di volo

Determinare l'assetto e le condizioni di volo da simulare è fondamentale per fissare le condizioni al contorno $\mathbf{u}_\infty$, p_∞ , ρ_∞ e ϑ_∞ del problema CFD. In questo studio si ricerca la condizione di volo più gravosa dal punto di vista aerodinamico, cioè quella che imprime sul razzo il carico globale massimo e che può quindi risultare di maggiore interesse, ad esempio, ai fini di una successiva verifica strutturale.

Si calcola il modulo della risultante aerodinamica nel sistema di riferimento adottato:

$$\|\mathbf{F}\| = \sqrt{L^2 + D^2} \quad (5.6)$$

Individuare la condizione di volo peggiorativa equivale quindi a determinare la condizione che massimizza $\|\mathbf{F}\|$.

Dalle definizioni dei coefficienti aerodinamici si ottiene:

$$L = p_d S_t C_L \quad D = p_d S_t C_D \quad \Rightarrow \quad F = q S_t \sqrt{C_L^2 + C_D^2} \quad (5.7)$$

dove p_d è la pressione dinamica:

$$p_d = \frac{1}{2} \rho U^2 \quad (5.8)$$

Assumendo C_L lineare con α e C_D descrivibile mediante la polare di Prandtl [7]:

$$C_L = C_{L_\alpha} \alpha \quad C_D = C_{D_0} + K C_L^2 \quad (5.9)$$

il modulo della forza aerodinamica può essere scritto come:

$$\|\mathbf{F}\| = p_d S_t \sqrt{a + b \alpha^2 + c \alpha^4} \quad (5.10)$$

dove a , b e c sono costanti che dipendono esclusivamente dalla geometria e sono dati da:

$$a = C_{D_0}^2 \quad b = (1 + 2 C_{D_0} K) C_{L_\alpha}^2 \quad c = K^2 C_{L_\alpha}^4 \quad (5.11)$$

Il massimo del modulo della forza aerodinamica dipende quindi dai valori assunti da α e q .

Calcolo dell'angolo di attacco α

Poiché F cresce monotonamente all'aumentare di α , il valore massimo di F è associato al valore massimo di α .

Le simulazioni effettuate con **RocketPy** mostrano che, durante l'ascesa del razzo, l'angolo di attacco raggiunge un valore massimo pari a:

$$\max(\alpha) \approx 1.4^\circ \quad (5.12)$$

Tale valore conferma inoltre la validità dell'ipotesi di piccolo angolo adottata. Nelle simulazioni CFD questo angolo viene imposto ruotando il razzo attorno all'asse x in verso positivo, come illustrato in Fig. 11.

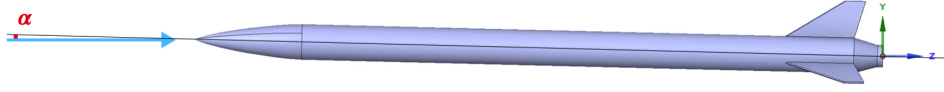


Figura 11: Assetto considerato.

Calcolo della pressione dinamica p_d

Poiché F dipende linearmente da p_d , il valore massimo di F è associato al valore massimo di p_d .

Le simulazioni effettuate con **RocketPy** forniscono densità $\rho(t)$, velocità $U(t)$ e quota $h(t)$ su un intervallo temporale di 25 s, discretizzato in 500 istanti, che copre l'intero tratto di volo dal decollo all'apogeo. È quindi possibile calcolare l'andamento della pressione dinamica nel tempo come:

$$p_d(t) = \frac{1}{2} \rho(t) U(t)^2 \quad (5.13)$$

il cui grafico è riportato in Fig. 12.

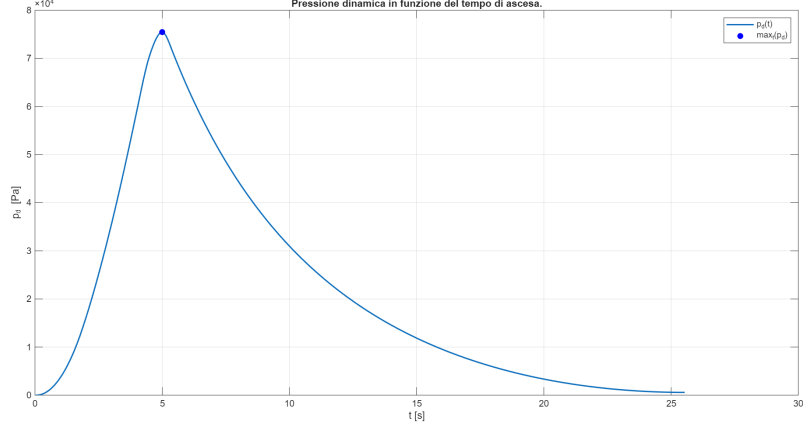


Figura 12: Pressione dinamica in funzione del tempo.

Si individua il picco di $p_d(t)$ all'istante e alla quota:

$$t' = 4.996 \text{ s} \quad h(t') = 861.7 \text{ m} \quad (5.14)$$

L'istante t' viene quindi assunto come condizione di volo peggiorativa, in cui i carichi aerodinamici globali risultano massimi.

5.3.2 Determinazione delle condizioni al contorno in campo libero

A partire dalla condizione di volo ottenuta vengono ricavate le condizioni atmosferiche da utilizzare come condizioni al contorno nelle simulazioni CFD.

Calcolo della temperatura all'infinito ϑ_∞

Per la temperatura atmosferica nella condizione di volo peggiorativa si assume il gradiente termico lineare in troposfera [15]:

$$\vartheta_\infty = \vartheta(t') = \vartheta_0 + \lambda_\vartheta h(t') \quad \Rightarrow \quad \vartheta_\infty = 282.5 \text{ K} \quad (5.15)$$

dove $\vartheta_0 = 288.2 \text{ K}$ è la temperatura al livello del mare e $\lambda_\vartheta = -0.0065 \text{ K/m}$ è il gradiente termico verticale medio in troposfera.

Calcolo della pressione all'infinito p_∞

Tramite il modello ISA76 si calcola la pressione atmosferica nella condizione di volo peggiorativa [15]:

$$p_\infty = p(t') = p_0 \left(\frac{\vartheta(t')}{\vartheta_0} \right)^{-\frac{g_0}{\lambda R_a}} \quad \Rightarrow \quad p_\infty = 9.139 \cdot 10^4 \text{ Pa} \quad (5.16)$$

dove $p_0 = 1.013 \cdot 10^5 \text{ Pa}$ è la pressione al livello del mare, $g_0 = 9.807 \text{ m/s}^2$ è l'accelerazione gravitazionale al livello del mare e $R_a = 287.1 \text{ J/(kg K)}$ è la costante specifica dell'aria.

Calcolo della densità all'infinito ρ_∞

La condizione al contorno sulla densità coincide con il valore già determinato al tempo t' [15]:

$$\rho_\infty = \rho_0 \left(\frac{\vartheta(t')}{\vartheta_0} \right)^{-\left(\frac{g_0}{\lambda R_a} + 1\right)} \quad \Rightarrow \quad \rho_\infty = 1.127 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \quad (5.17)$$

Calcolo della viscosità all'infinito μ_∞ e ν_∞

Si è visto come la viscosità dinamica venga spesso assunta costante. Per una maggiore accuratezza, è però possibile esprimerla in funzione della temperatura tramite la legge di Sutherland. Essa viene qui applicata per determinare la viscosità dinamica nella condizione di volo peggiorativa [5]:

$$\mu_\infty = \mu(t') = \mu_{\text{ref}} \left(\frac{\vartheta(t')}{\vartheta_{\text{ref}}} \right)^{3/2} \frac{\vartheta_{\text{ref}} + S_s}{\vartheta(t') + S_s} \Rightarrow \mu_\infty = 1.762 \cdot 10^{-5} \frac{\text{kg}}{\text{m s}} \quad (5.18)$$

dove $\mu_{\text{ref}} = 1.716 \cdot 10^{-5} \text{ kg/(m s)}$ e $\vartheta_{\text{ref}} = 273.1 \text{ K}$ sono rispettivamente i valori di viscosità e temperatura di riferimento, mentre $S_s = 110.6 \text{ K}$ è la costante di Sutherland.

Alla viscosità dinamica così ottenuta corrisponde la seguente viscosità cinematica [15]:

$$\nu_\infty = \nu(t') = \frac{\mu(t')}{\rho(t')} \Rightarrow \nu_\infty = 1.563 \cdot 10^{-5} \frac{\text{m}^2}{\text{s}} \quad (5.19)$$

Calcolo della conducibilità termica all'infinito $k_{\text{th}\infty}$

Anche la conducibilità termica può essere espressa in funzione della temperatura secondo la teoria cinetica [5]:

$$k_{\text{th}\infty} = k_{\text{th}}(t') = \left(C_{p_a} + \frac{5}{4} R_a \right) \mu(t') \Rightarrow k_{\text{th}\infty} = 0.02406 \frac{\text{W}}{\text{m K}} \quad (5.20)$$

dove $C_{p_a} = 1006 \text{ J/(kg K)}$ è il calore specifico a pressione costante dell'aria, assunto costante.

Calcolo della velocità e mach all'infinito $\mathbf{u}_\infty$ e M_∞

La velocità all'infinito si ricava dal valore corrispondente a t' ottenuto dalle simulazioni `RocketPy`:

$$\mathbf{u}_\infty = \mathbf{u}_\infty(t') = (0, 0, U(t')) \Rightarrow \mathbf{u}_\infty = (0, 0, 258.8) \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad (5.21)$$

A essa corrisponde il seguente mach di volo [15]:

$$M_\infty = M_\infty(t') = \frac{U_\infty}{\sqrt{\gamma_a R_a \vartheta_\infty}} \Rightarrow M_\infty = 0.7680 \quad (5.22)$$

dove $\gamma_a = 1.4$ è il coefficiente adiabatico dell'aria.

Calcolo dell'energia cinetica turbolenta all'infinito k_∞

Per un flusso esterno, il valore di k_∞ non è noto a priori e può variare sensibilmente. In assenza di informazioni più precise, si adottano quindi valori convenzionali ritenuti ragionevoli. Tali valori non sono generalmente espressi direttamente in termini di k , ma tramite l'intensità turbolenta I , legata a k dalla relazione [5]:

$$k = \frac{3}{2} (UI)^2 \quad (5.23)$$

Un valore comunemente adottato per un flusso esterno è [3]:

$$I_\infty = 0.05 \quad (5.24)$$

da cui segue:

$$k_\infty = \frac{3}{2} (U_\infty I_\infty)^2 \Rightarrow k_\infty = 251.2 \frac{\text{J}}{\text{kg}} \quad (5.25)$$

Calcolo del tasso di dissipazione all'infinito ω_∞

Analogamente al caso di k_∞ , anche ω_∞ non è noto a priori. In pratica, tali condizioni vengono spesso assegnate indirettamente tramite il *viscosity ratio* VR , definito come [5]:

$$VR = \frac{\mu_t}{\mu} \quad (5.26)$$

Poiché per la modellazione k - ω SST, adottata in questo lavoro, il campo libero si comporta come il modello k - ω standard, si può assumere [5]:

$$\mu_t = \rho \frac{k}{\omega} \quad \Rightarrow \quad VR = \frac{\rho k}{\omega \mu} \quad (5.27)$$

Un valore ragionevole per il campo libero è [3]:

$$VR_\infty = 10 \quad (5.28)$$

da cui si ottiene:

$$\omega_\infty = \frac{\rho_\infty k_\infty}{\mu_\infty VR_\infty} \quad \Rightarrow \quad \omega_\infty = 1.607 \cdot 10^6 \text{ s}^{-1} \quad (5.29)$$

5.4 Modellazione del getto propulsivo

Poiché il solutore richiede in ingresso le condizioni al contorno di temperatura ϑ_e , pressione p_e e velocità U_e in uscita dall'ugello, si procede al calcolo di tali parametri.

Il motore di Nemesis è un Cesaroni Pro75 8187M1545-P, che utilizza un propellente solido composito al perclorato d'ammonio (APCP), in cui l'ossidante è il perclorato d'ammonio, il combustibile è l'alluminio in polvere e il tutto è tenuto insieme da un legante polimerico, ad esempio HTPB.

Poiché la chimica del getto non è di interesse per il presente studio, il getto è stato modellato come un getto ideale di gas perfetto imposto sulla base del razzo, su una sezione equivalente a quella di uscita dell'ugello.

Si anticipa che è necessario conoscere la geometria dell'ugello, in particolare la sezione di gola A^* e la sezione di uscita A_e . Poiché questi dati non sono noti con esattezza e non è stata trovata una fonte diretta per il motore in esame, sono state adottate le dimensioni di un ugello appartenente a un motore simile, il Cesaroni Pro75 7455M2150-P, per cui $A^* = 451.6 \text{ mm}^2$ e $A_e = 1903 \text{ mm}^2$.

Il calcolo delle grandezze in uscita dall'ugello è stato effettuato mediante una modellazione bidimensionale assialsimmetrica. Tale scelta è giustificata dalla geometria assialsimmetrica del condotto e dall'ipotesi di flusso prevalentemente isentropico all'interno dell'ugello, per cui le condizioni di uscita dipendono principalmente dal rapporto di area e dalle condizioni di camera. L'approccio 2D consente quindi di stimare in modo coerente le grandezze globali del getto, con un costo computazionale molto inferiore rispetto a una modellazione tridimensionale completa.

5.4.1 Determinazione delle condizioni al contorno all'ugello

Per il calcolo delle condizioni in uscita si determina innanzitutto il numero di Mach di uscita tramite la relazione area-Mach [30]:

$$\frac{A_e}{A^*} = \frac{1}{M_e} \left[\frac{2}{\gamma_g + 1} \left(1 + \frac{\gamma_g - 1}{2} M_e^2 \right) \right]^{\frac{\gamma_g + 1}{2(\gamma_g - 1)}} \quad \Rightarrow \quad M_e = 2.659 \quad (5.30)$$

dove $\gamma_g = 1.2$ è un valore ragionevole per il coefficiente adiabatico del getto [30].

Determinazione della temperatura in uscita ϑ_e

La temperatura in uscita si ottiene sfruttando M_e e la temperatura di camera ϑ_c tramite la relazione di Poisson per la temperatura [30]:

$$\frac{\vartheta_c}{\vartheta_e} = 1 + \frac{\gamma_g - 1}{2} M_e^2 \quad \Rightarrow \quad \vartheta_e = 1640 \text{ K} \quad (5.31)$$

dove $\vartheta_c = 2800 \text{ K}$ è un valore ragionevole per la temperatura di camera [30], intesa come la temperatura totale in camera di combustione.

Calcolo della pressione in uscita p_e

La pressione in uscita si ottiene sfruttando il valore di M_e e la pressione di camera p_c , mediante la relazione di Poisson per la pressione [30]:

$$\frac{p_c}{p_e} = \left(1 + \frac{\gamma_g - 1}{2} M_e^2 \right)^{\frac{\gamma_g}{\gamma_g - 1}} \quad \Rightarrow \quad p_e = 4.955 \cdot 10^4 \text{ Pa} \quad (5.32)$$

dove $p_c = 1.226 \cdot 10^6 \text{ Pa}$ è la pressione di camera, intesa come la pressione totale in camera di combustione; è determinata in modo da allineare la fisica del getto modellata a quella reale, garantendo che la spinta fornita dal modello risulti coerente con quella sperimentale. Tale confronto è discusso nel seguito.

Calcolo della velocità in uscita U_e

La velocità in uscita dall'ugello è assunta assiale rispetto al razzo e, in presenza dell'angolo di attacco α , il vettore velocità rispetto agli assi vento è:

$$\mathbf{u}_e = (0, -U_e \sin \alpha, U_e \cos \alpha) \quad (5.33)$$

dove U_e si ricava da M_e :

$$M_e = \frac{U_e}{\sqrt{\gamma_g R_g \vartheta_e}} \quad \Rightarrow \quad U_e = 2238 \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad (5.34)$$

dove $R_g = 360 \text{ J/(kg K)}$ è un valore ragionevole per la costante specifica del getto [30].

Quindi:

$$\mathbf{u}_e = (0, -54.68, 2237) \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad (5.35)$$

Calcolo dell'energia cinetica turbolenta in uscita k_e

Analogamente al caso di k_∞ , anche k_e può essere stimata a partire da un valore assegnato di intensità turbolenta:

$$I_e = 0.05 \quad (5.36)$$

da cui:

$$k_e = \frac{3}{2} (U_e I_e)^2 \quad \Rightarrow \quad k_e = 1.878 \cdot 10^5 \frac{\text{J}}{\text{kg}} \quad (5.37)$$

Calcolo del tasso di dissipazione in uscita ω_e

Per quanto riguarda ω_e , la stima non viene effettuata come nel caso di ω_∞ , poiché in questo caso il flusso non è in campo libero ma in uscita da un condotto.

In tali condizioni, ω viene stimata a partire da una scala di lunghezza caratteristica dei vortici nel condotto, assunta pari a [4]:

$$L_v = 0.07 D_c \quad (5.38)$$

dove D_c è il diametro del condotto. Nel presente caso si assume come riferimento il diametro di uscita dell'ugello D_e , quindi:

$$D_e = \sqrt{\frac{4}{\pi} A_e} \quad \Rightarrow \quad D_e = 49.23 \text{ mm} \quad (5.39)$$

da cui:

$$L_{v_e} = 0.07 D_e \quad \Rightarrow \quad L_{v_e} = 3.446 \text{ mm} \quad (5.40)$$

La relazione che lega ω a L_v è data da [4]:

$$\omega = \frac{k^{1/2}}{C_\mu^{1/4} L_v} \quad \text{con} \quad C_\mu = 0.09 \quad (5.41)$$

pertanto:

$$\omega_e = \frac{k_e^{1/2}}{C_\mu^{1/4} L_{v_e}} \quad \Rightarrow \quad \omega_e = 2.296 \cdot 10^5 \text{ s}^{-1} \quad (5.42)$$

5.4.2 Verifica di validità dell'ipotesi di isentropicità

Si osserva che il modello isentropico fornisce una pressione di uscita tale da avere il seguente rapporto di pressione:

$$\frac{p_e}{p_\infty} = 0.5422 \quad (5.43)$$

Questo risultato può essere interpretato fisicamente osservando che, all'istante $t' = 4.996 \text{ s}$, il motore si trova in prossimità del burnout, previsto all'istante $t_b = 5.29 \text{ s}$. In tali condizioni, una sovraespansione del getto può comportare, nel processo di adattamento alla pressione ambiente, la comparsa di onde d'urto.

Nel caso in esame si possono distinguere qualitativamente tre scenari:

- **Caso $p_e \lesssim p_\infty$:** se la pressione in uscita è solo lievemente inferiore a quella atmosferica, il getto supersonico tende a comprimersi per ridurre la propria velocità e aumentare la pressione; tale adattamento avviene generalmente mediante onde d'urto oblique.
- **Caso $p_e < p_\infty$:** se la pressione in uscita è sensibilmente inferiore a quella atmosferica, può rendersi necessario un passaggio a regime subsonico attraverso un'onda d'urto normale localizzata all'esterno dell'ugello.
- **Caso $p_e \ll p_\infty$:** se la pressione in uscita è molto inferiore a quella atmosferica, l'onda d'urto normale può penetrare all'interno dell'ugello.

Per l'applicazione in esame, lo scenario più critico è il terzo. Poiché l'onda d'urto normale costituisce un fenomeno non isentropico, il suo eventuale instaurarsi all'interno dell'ugello invaliderebbe le grandezze termo-fluidodinamiche precedentemente calcolate sotto l'ipotesi di isentropicità.

Tale scenario è illustrato qualitativamente in Fig. 13 [30]:

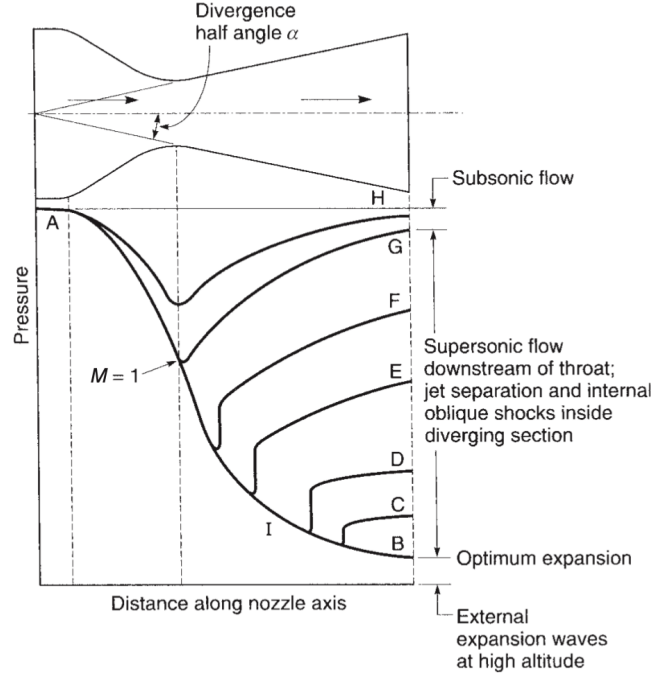


Figura 13: Scenari di espansione del getto.

Per convalidare il modello isentropico è quindi necessario escludere quest'ultima eventualità. Il metodo adottato consiste nello stimare la sezione teorica A_s alla quale si instaurerebbe una presunta onda d'urto normale e nel verificare che tale sezione non corrisponda ad alcuna sezione interna dell'ugello. In altri termini, si richiede che:

$$A_s \notin [A^*, A_e] \quad (5.44)$$

Se tale condizione risulta soddisfatta, si può escludere la formazione di un'onda d'urto normale all'interno dell'ugello, convalidando così l'ipotesi di isentropicità e, di conseguenza, i dati precedentemente ricavati.

Il calcolo di A_s si effettua determinando innanzitutto il mach M_s corrispondente alla posizione dell'onda d'urto [1]:

$$\frac{p_\infty}{p_c} = \left[\frac{(\gamma_g + 1) M_s^2}{2 + (\gamma_g - 1) M_s^2} \right]^{\frac{\gamma_g}{\gamma_g - 1}} \left[\frac{\gamma_g + 1}{2 \gamma_g M_s^2 - (\gamma_g - 1)} \right]^{\frac{1}{\gamma_g - 1}} \Rightarrow M_s = 3.852 \quad (5.45)$$

da cui si ricava la sezione teorica dell'ugello in cui l'onda si formerebbe:

$$\frac{A_s}{A^*} = \frac{1}{M_s} \left[\frac{2}{\gamma_g + 1} \left(1 + \frac{\gamma_g - 1}{2} M_s^2 \right) \right]^{\frac{\gamma_g + 1}{2(\gamma_g - 1)}} \Rightarrow A_s = 1.034 \cdot 10^4 \text{ mm}^2 \quad (5.46)$$

Poiché

$$A_s > A_e \quad (5.47)$$

anche nell'ipotesi di presenza di un'onda d'urto questa si formerebbe esternamente all'ugello. Il modello isentropico adottato risulta quindi coerente per il calcolo delle grandezze termo-cinetiche alla sezione di uscita.

5.4.3 Verifica di coerenza tra la modellazione del getto e i dati sperimentali

La coerenza delle condizioni di uscita calcolate viene verificata confrontando la spinta da esse derivata con quella fornita dalla curva sperimentale del motore, illustrata in Fig. 14 [26]:

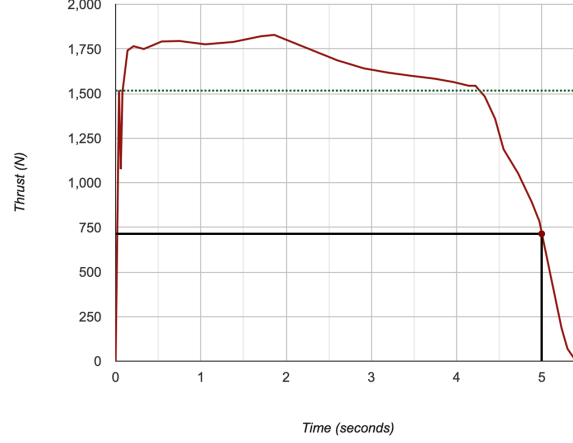


Figura 14: Curva della spinta del motore Cesaroni Pro75 8187M1545-P.

Definito $\mathbf{T}$ il vettore della spinta, dalla curva di spinta risulta che all'istante $t' = 4.996$ s il motore fornisce approssimativamente un modulo della spinta pari a:

$$\|\mathbf{T}(t')\| = 720 \text{ N} \quad (5.48)$$

Si calcola quindi la spinta teorica associata alle grandezze termo-cinetiche ricavate in precedenza [30]:

$$\|\mathbf{T}\| = p_c A^* \sqrt{\frac{2 \gamma_g^2}{\gamma_g - 1} \left(\frac{2}{\gamma_g + 1} \right)^{\frac{\gamma_g + 1}{\gamma_g - 1}} \left[1 - \left(\frac{p_e}{p_c} \right)^{\frac{\gamma_g - 1}{\gamma_g}} \right] + (p_e - p_\infty) A_e} \Rightarrow \|\mathbf{T}\| \approx 720 \text{ N} \quad (5.49)$$

da cui:

$$\|\mathbf{T}\| \approx \|\mathbf{T}(t')\| \quad (5.50)$$

Le condizioni imposte in uscita dall'ugello possono quindi considerarsi coerenti con la fisica del problema.

6 Progettazione della mesh preliminare

6.1 Calcolo del dominio fluido

Data la forma snella e approssimativamente assialsimmetrica del razzo, per questa applicazione si adotta un dominio fluido cilindrico, caratterizzato da tre parametri geometrici:

- **Raggio** H_{ff} : inteso come la distanza radiale della superficie laterale del dominio detta *far field*;
- **Altezza a monte** H_{in} : intesa come la distanza tra la punta del razzo e la sezione di ingresso del flusso;
- **Altezza a valle** H_{out} : intesa come la distanza tra la base del razzo e la sezione di uscita del flusso.

Un generico dominio fluido, o *enclosure* e , può quindi essere definito univocamente da questi tre parametri.

In genere, le dimensioni del dominio vengono espresse in funzione di una lunghezza caratteristica della geometria, che nel presente caso viene assunta pari al diametro del razzo d . Il primo dominio, indicato con e_1 , è stato scelto come configurazione iniziale di riferimento ed è definito da:

$$\begin{aligned} H_{ff_{e_1}} &= 30 d & \Rightarrow & H_{ff_{e_1}} = 4.5 \text{ m} \\ H_{in_{e_1}} &= 30 d & \Rightarrow & H_{in_{e_1}} = 4.5 \text{ m} \\ H_{out_{e_1}} &= 90 d & \Rightarrow & H_{out_{e_1}} = 13.5 \text{ m} \end{aligned} \tag{6.1}$$

Il dominio fluido implementato è riportato in Fig. 15.

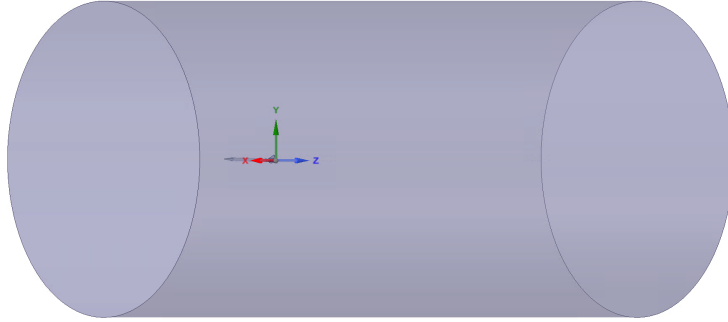


Figura 15: Dominio fluido e_1 .

6.2 Determinazione del face sizing

Il *face sizing* sulle superfici di Nemesis è stato definito in funzione di una lunghezza caratteristica locale, con l'obiettivo di ottenere una discretizzazione coerente con la geometria delle diverse zone del razzo senza introdurre un numero eccessivo di celle dove non necessario.

Calcolo del face sizing nella zona di fusoliera

Lungo la fusoliera principale è stata assunta come scala di riferimento il diametro del razzo, imponendo una discretizzazione pari a 20 celle sul diametro:

$$\frac{d}{f_{s1}} = 20 \quad \Rightarrow \quad f_{s1} = 7.500 \text{ mm} \quad (6.2)$$

Questa scelta è stata applicata alle porzioni cilindriche e ogivali del razzo, garantendo una risoluzione regolare della geometria globale. In corrispondenza della punta, tuttavia, la presenza della singolarità geometrica ha reso opportuno un affinamento locale, ottenuto riducendo di un fattore 0.25 il face-sizing, quindi a un valore di 1.875 mm.

Calcolo del face sizing nella zona di coda

Nella zona di coda, invece, la scala caratteristica rilevante non è più il diametro della fusoliera ma la corda alla radice delle alette. In questa zona il face-sizing è stato quindi impostato imponendo 50 celle sulla corda pari a $c_a = 285.1$ mm:

$$\frac{c_a}{f_{s2}} = 50 \quad \Rightarrow \quad f_{s2} = 5.703 \text{ mm} \quad (6.3)$$

In questo modo si ottiene una discretizzazione più adatta a descrivere le superfici portanti, che sono particolarmente sensibili nel calcolo dei carichi aerodinamici e nella formazione delle strutture vorticosi locali.

Una ulteriore attenzione è stata dedicata ai bordi delle alette, in particolare al *leading edge*, dove lo spessore locale risulta confrontabile con la dimensione delle celle superficiali. In questa regione è stato quindi introdotto un affinamento locale, imponendo almeno due celle sullo spessore del bordo di attacco, pari a 6.280 mm, da cui deriva una dimensione locale di 3.140 mm.

Calcolo del face sizing nella zona di base

Infine, nella zona di base e in corrispondenza della sezione di uscita del getto, il face-sizing è stato definito a partire dal diametro esterno dell'ugello, imponendo 10 celle sul diametro:

$$\frac{D_e}{f_{s3}} = 10 \quad \Rightarrow \quad f_{s3} = 4.923 \text{ mm} \quad (6.4)$$

Questa scelta consente di descrivere in modo adeguato una zona cruciale per il confronto tra il caso con il getto e senza getto, poiché è proprio in prossimità della base che si concentrano buona parte delle differenze di pressione e di interazione tra scia e scarico.

Per l'intera discretizzazione superficiale è stato mantenuto un growth rate pari a 1.2, in modo da garantire una transizione sufficientemente regolare tra zone con diversa densità di mesh.

6.3 Determinazione dei body of influence

I *body of influence* (BOI) sono stati introdotti per controllare localmente la dimensione della mesh volumetrica e distribuire l'infittimento solo nelle regioni in cui esso è effettivamente utile alla cattura della fisica del problema.

6.3.1 Calcolo del Near BOI

Il primo volume di controllo locale è il *Near BOI*, disposto attorno al razzo con geometria assialsimmetrica rispetto all'asse longitudinale. Il suo scopo è duplice. Da un lato, esso permette di realizzare una transizione regolare tra i boundary layers e la mesh volumetrica del dominio; dall'altro, consente di mantenere una discretizzazione sufficientemente fine nella regione immediatamente esterna alla parete, cioè proprio dove si sviluppano le interazioni tra strato limite, separazione, ricircolo di base e prima porzione del getto.

Per garantire una transizione corretta, il Near-BOI è stato calibrato in modo che la dimensione delle celle volumetriche risulti dello stesso ordine di grandezza della dimensione tangenziale dell'ultimo strato di boundary layer, cioè del face-sizing locale. Poiché la superficie del razzo non è uniforme dal punto di vista geometrico, anche il Near-BOI è stato differenziato localmente in modo coerente con le tre zone: fusoliera, coda e base. In pratica, nelle diverse porzioni del Near-BOI il BOI-sizing è stato assunto pari a circa 1.2 volte il face-sizing della zona corrispondente, così da evitare salti troppo bruschi nella dimensione delle celle.

Nelle regioni più sensibili dal punto di vista aerodinamico, in particolare attorno alla coda e alla base, è stato inoltre adottato un growth rate più contenuto, pari a 1.1, così da estendere l'infillimento locale e rendere più graduale la transizione verso la mesh più grossolana del dominio esterno. Nelle regioni meno critiche è stato invece mantenuto un valore pari a 1.2.

Un secondo aspetto importante è che il Near-BOI non si arresta alla base, ma si estende anche a valle per una distanza pari a $10 d_e$. Tale estensione permette di catturare con maggiore accuratezza la fisica della regione immediatamente a valle della base, dove si sviluppano la prima parte del getto nel caso propulso oppure il ricircolo di base nel caso senza getto. La base è la zona che influisce maggiormente sui carichi medi, quindi questo raffinamento è risultato particolarmente importante.

Il Near-BOI è riportato in Fig. 16:

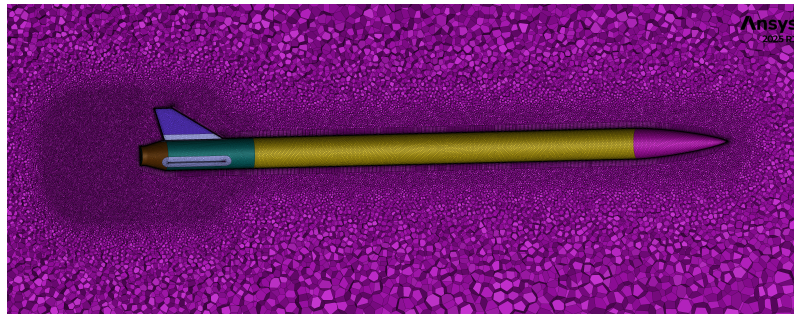


Figura 16: Near-BOI.

6.3.2 Calcolo del Wake-BOI

Più esternamente è stato poi introdotto un secondo livello di infittimento, indicato come *Wake-BOI*, con lo scopo di controllare la mesh nella regione occupata dal getto e dalla scia. Questo volume ingloba il razzo e il Near-BOI, e si sviluppa a valle con una discretizzazione progressivamente più grossolana. In questo modo si evita di mantenere una mesh troppo fine in tutta la parte posteriore del dominio, ma si conserva comunque una risoluzione adeguata nelle zone in cui la scia presenta ancora gradienti significativi.

Il Wake-BOI è stato suddiviso in tre porzioni successive, caratterizzate da una progressiva crescita della dimensione di cella, rispettivamente pari a 50 mm, 100 mm e 200 mm.

Questa scelta riflette il fatto che, allontanandosi dal razzo, sia il getto sia la scia tendono progressivamente a diffondersi e a presentare gradienti meno intensi, rendendo non necessario mantenere la stessa densità di mesh presente nelle regioni più vicine alla base. Nell'intero Wake-BOI è stato adottato un growth rate pari a 1.1.

Il Wake-BOI è illustrato in Fig. 17:

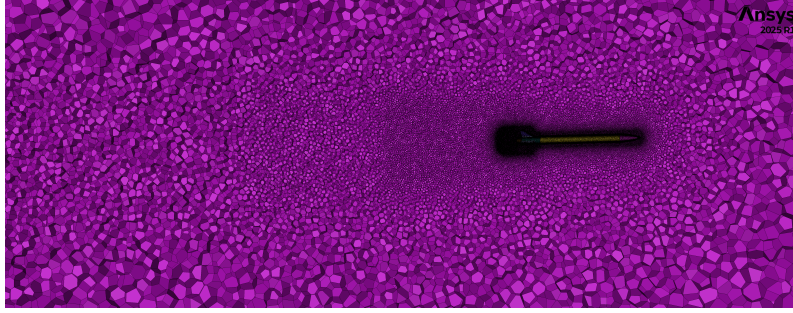


Figura 17: Wake-BOI.

6.4 Determinazione dei boundary layers

Si è visto come nella regione di strato limite siano presenti gradienti molto elevati in direzione normale alla parete, dai quali dipendono direttamente i carichi aerodinamici. È quindi fondamentale risolvere tali gradienti con una discretizzazione sufficientemente fitta in direzione normale alla superficie. I *boundary layers* sono strati di celle che avvolgono la geometria e assolvono proprio a questa funzione.

Nel presente lavoro sono stati utilizzati boundary layers di tipo *uniform*, definiti da quattro parametri principali:

- **Spessore totale T** : è dato dalla somma degli spessori di tutti gli strati e deve essere almeno dello stesso ordine di grandezza dello spessore locale dello strato limite:

$$T \sim \delta_{99} \quad (6.5)$$

- **Spessore del primo strato t_1** : deve essere coerente con i valori di y^+ richiesti dal trattamento della parete adottato;
- **Growth rate g** : è il rapporto tra lo spessore di uno strato e quello del precedente; deve essere sufficientemente contenuto per evitare variazioni troppo brusche nella dimensione delle celle;
- **Numero di strati N** : deve essere abbastanza elevato da garantire una risoluzione adeguata dei gradienti normali nello strato limite.

La relazione che lega tali grandezze discende direttamente dalla definizione di spessore totale T [5]:

$$T = \sum_{i=1}^N t_1 g^{i-1} \quad \Rightarrow \quad T = t_1 \frac{g^N - 1}{g - 1} \quad (6.6)$$

Ne segue che, assegnati tre parametri, il quarto risulta univocamente determinato.

6.4.1 Calcolo dei boundary layers globali

Nel caso in questione sono stati applicati boundary layers globali, dimensionati a partire da una stima dello spessore massimo di strato limite atteso sul razzo.

Spessore totale T

Per determinare lo spessore totale T , si vuole anzitutto stimare l'ordine di grandezza dello spessore dello strato limite.

A tal fine è necessario stabilire se il regime sia laminare o turbolento. Si calcola quindi il numero di Reynolds in funzione del diametro [28]:

$$Re_d = \frac{U_\infty d}{\nu_\infty} \quad \Rightarrow \quad Re_d = 2.484 \cdot 10^6 \quad (6.7)$$

che corrisponde chiaramente a un regime turbolento. Lo spessore dello strato limite viene quindi stimato mediante la formula per lastra piana turbolenta. In primo luogo si calcola il numero di Reynolds rispetto alla lunghezza [28]:

$$Re_l = \frac{U_\infty l}{\nu_\infty} \quad \Rightarrow \quad Re_l = 4.851 \cdot 10^7 \quad (6.8)$$

e successivamente si ricava lo spessore massimo stimato dello strato limite [17]:

$$\delta_{99}(l) = \frac{0.37 l}{Re_l^{1/5}} \quad \Rightarrow \quad \delta_{99}(l) = 31.47 \text{ mm} \quad (6.9)$$

che viene assunto come riferimento per lo spessore totale dei boundary layers:

$$T = \delta_{99}(l) \quad \Rightarrow \quad T = 31.47 \text{ mm} \quad (6.10)$$

Si ribadisce che la formula impiegata non intende fornire lo spessore reale dello strato limite sul razzo, ma soltanto un ordine di grandezza ragionevole su cui basare la progettazione della mesh.

Spessore del primo strato t_1

Nelle simulazioni è stato utilizzato l'approccio RANS con modello di turbolenza $k-\omega$ SST e trattamento near-wall basato su funzioni di parete. Secondo la documentazione FLUENT, per i modelli ω -based viene adottato un y^+ -insensitive near-wall treatment, con l'obiettivo di ridurre la sensibilità del risultato al valore locale di y_1^+ . In particolare, tale trattamento si comporta in modo ibrido tra formulazione wall-resolved e wall-modeled: per $y_1^+ \leq 20$ il solutore utilizza una formulazione di tipo wall-resolved, mentre per $y_1^+ > 20$ adotta funzioni di parete.

Lo spessore del primo strato viene quindi stimato a partire da un valore desiderato:

$$y_{1\text{des}}^+ = 150 \quad (6.11)$$

che ricade nel range idoneo all'utilizzo delle funzioni di parete.

Il calcolo di t_1 viene effettuato nei passaggi seguenti. Si stima innanzitutto il coefficiente di attrito mediante la formula di Prandtl-Schlichting, valida per flusso turbolento [27]:

$$C_f = [2 \log_{10}(Re_l) - 0.65]^{-2.3} \quad \Rightarrow \quad C_f = 2.059 \cdot 10^{-3} \quad (6.12)$$

da cui si ottiene lo sforzo a parete [27]:

$$\tau_w = \frac{1}{2} \rho_\infty C_f U_\infty^2 \quad \Rightarrow \quad \tau_w = 77.71 \text{ Pa} \quad (6.13)$$

e quindi la velocità d'attrito:

$$u_\tau = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho_\infty}} \quad \Rightarrow \quad u_\tau = 8.304 \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad (6.14)$$

Si ricava così la distanza del centroide della prima cella dalla parete:

$$y = \frac{\nu_\infty y^+}{u_\tau} \quad \Rightarrow \quad y = 0.2823 \text{ mm} \quad (6.15)$$

Assumendo il centroide posto a metà del primo strato, lo spessore della prima cella risulta:

$$t_1 = 2y \quad \Rightarrow \quad t_1 = 0.5646 \text{ mm} \quad (6.16)$$

Numero di strati N

Per quanto riguarda il numero di strati N , la medesima documentazione sul trattamento near-wall indica che una buona risoluzione dello strato limite richiede un numero adeguato di layer nei boundary layers. In applicazioni industriali una risoluzione accettabile può essere ottenuta già a partire da 10 strati, ma nel presente lavoro si è scelto in modo conservativo di adottare:

$$N = 20 \quad (6.17)$$

Tale scelta si è inoltre rivelata utile per mantenere il growth rate sufficientemente contenuto.

Growth rate g

Il valore del growth rate g si ottiene come conseguenza dei parametri già assegnati:

$$T = t_1 \frac{g^N - 1}{g - 1} \quad \Rightarrow \quad g = 1.098 \quad (6.18)$$

Un limite comunemente adottato è [3]:

$$g \lesssim 1.2 \quad (6.19)$$

e con un numero di strati pari a 10 tale vincolo non sarebbe stato rispettato.

In Fig. 18 sono riportati i boundary layers globali.

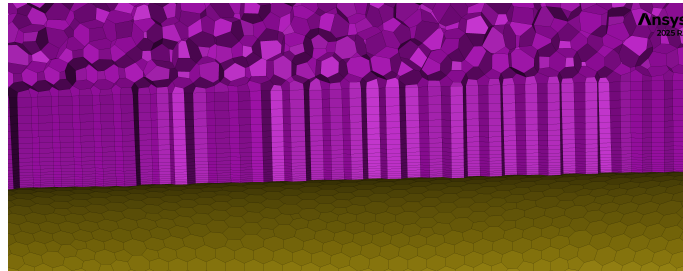


Figura 18: Boundary layers.

6.4.2 Calcolo delle correzioni locali dei boundary layers

I boundary layers globali così definiti non sono stati applicati in modo uniforme su tutta la superficie di Nemesis, ma sono stati corretti localmente nelle zone in cui la geometria avrebbe degradato la qualità della mesh o reso problematica la generazione degli strati.

Correzione sulla punta

In primo luogo, sulla punta i boundary layers sono stati completamente omessi. In corrispondenza della punta, infatti, la presenza della singolarità geometrica avrebbe compromesso la qualità degli strati prismatici, introducendo celle molto distorte senza un reale beneficio nella descrizione della fisica locale.

Correzione sui bordi esterni delle alette

Una seconda regione critica è costituita dai bordi esterni delle alette. In questa regione la presenza del bordo di attacco laminato e degli angoli acuti in prossimità del bordo di uscita rende difficoltosa l'applicazione dei boundary layers globali. Una loro rimozione completa, tuttavia, avrebbe avuto un effetto indesiderato anche sulle superfici principali delle alette, poiché il mesher avrebbe dovuto consumare spazio sulla superficie per estinguere progressivamente gli strati prima di raggiungere il bordo. Ciò avrebbe ridotto in modo eccessivo lo sviluppo dei boundary layers proprio in una regione importante per il calcolo dei carichi aerodinamici. Per questo motivo si è scelto un compromesso: anziché eliminare del tutto gli strati sui bordi esterni, se ne è ridotto localmente lo spessore complessivo di un fattore 0.25 rispetto a quello globale. Indicando con T_e lo spessore totale locale, si assume quindi:

$$T_e = \frac{T}{4} \quad \Rightarrow \quad T_e = 7.868 \text{ mm} \quad (6.20)$$

da cui si ricava il numero di strati necessario:

$$N_e = \left\lceil \log_g \left[\frac{T_e}{t_1} (g - 1) + 1 \right] \right\rceil \quad \Rightarrow \quad N_e = 10 \quad (6.21)$$

Questa scelta rappresenta un compromesso tra la necessità di preservare lo sviluppo degli strati sulle superfici delle alette e quella di mantenere una qualità di mesh accettabile in prossimità dei bordi.

Correzione sulle radici delle alette

Un problema analogo si presenta in corrispondenza delle radici delle alette. In questo caso l'applicazione dei boundary layers globali genera interferenze nella regione dello spigolo interno tra aletta e fusoliera. Per migliorare la gestione geometrica di tale raccordo, si è quindi deciso di ridurre localmente il numero di strati, dimezzando lo spessore totale rispetto al valore globale. Indicando con T_r lo spessore totale in questa regione, si ottiene:

$$T_r = 15.74 \text{ mm} \quad \Rightarrow \quad N_r = 15 \quad (6.22)$$

Anche in questo caso la scelta costituisce un compromesso tra la qualità della mesh e la necessità di mantenere una copertura near-wall ancora significativa.

In Fig. 19 sono riportati i boundary layers nella regione in cui sono state applicate le correzioni:

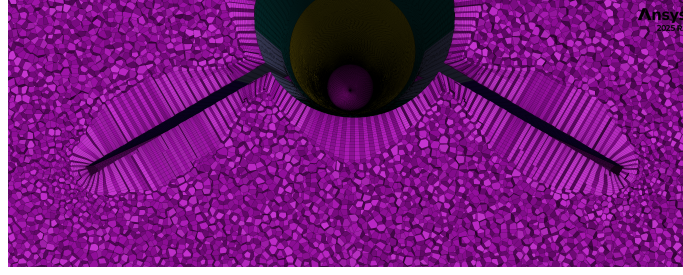


Figura 19: Correzioni locali dei boundary layers.

Correzione sulla zona di base

Infine, una correzione locale è stata introdotta anche nella zona di base. Questa zona è infatti caratterizzata, a seconda del caso considerato, dalla presenza del getto oppure di una regione di ricircolo, e presenta quindi una fisica diversa rispetto a quella che si sviluppa sulle pareti laterali del razzo. Anche qui una rimozione completa dei boundary layers avrebbe prodotto un effetto indesiderato sulla mesh del boat-tail, causando l'estinzione graduale degli strati in una regione che invece richiede continuità nella discretizzazione. Si è quindi scelto di mantenere i boundary layers anche sulla base, ma con spessore totale dimezzato, analogamente al caso delle radici.

In Fig. 20 sono illustrati i boundary layers sulle zone di coda e di base:

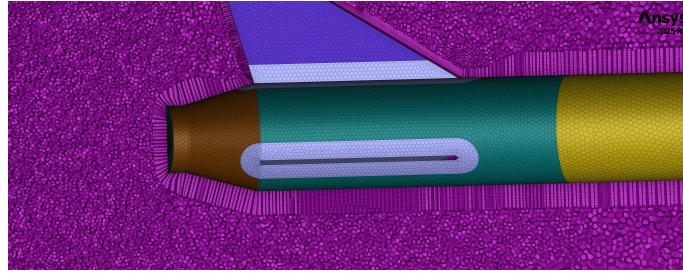


Figura 20: Boundary layers nelle zone di coda e di base.

6.5 Determinazione del volume sizing

Per quanto riguarda il *volume sizing* nel campo libero attorno al razzo, è stato mantenuto un sizing target pari a 0.4 m, mentre il growth rate è stato lasciato al valore di default pari a 1.2.

6.5.1 Verifica di qualità della mesh

Per ogni mesh generata, si richiede che la skewness e l'orthogonal quality rispettino i seguenti vincoli:

$$\max(\text{Skw}) < 0.6 \quad \text{e} \quad \min(\text{OQ}) > 0.4 \quad (6.23)$$

7 Gestione numerica delle simulazioni

Il software utilizzato è ANSYS Fluent 2025 R1. Come anticipato, è stato adottato un approccio RANS high-Re con modello di turbolenza $k-\omega$ SST, in quanto questo modello, grazie al limitatore sulla viscosità turbolenta, costituisce una delle opzioni RANS più robuste per la descrizione dei fenomeni di interesse. Nel caso in esame, tali fenomeni si sviluppano soprattutto nella regione di separazione a valle della base.

Nelle simulazioni si è assunta l'ipotesi di stazionarietà, poiché lo studio mira al calcolo dei coefficienti aerodinamici medi, trascurando la dinamica.

L'equazione dell'energia è stata mantenuta attiva, poiché in un flusso comprimibile, come quello qui considerato, la termodinamica influenza direttamente la meccanica del moto. Inoltre, ciò consente anche l'attivazione delle funzioni di parete per la temperatura.

È stato utilizzato un solutore density-based, ritenuto più adatto a catturare la fisica supersonica del getto. Per la modellazione dell'aria si sono adottati: equazione di stato dei gas ideali, legge di Sutherland per la viscosità dinamica e teoria cinetica dei gas per la conducibilità termica. I calori specifici sono stati invece assunti costanti.

Durante una simulazione stazionaria, i coefficienti aerodinamici raramente convergono a un regime perfettamente piatto. Più spesso essi presentano oscillazioni residue, che in molti casi indicano che la fisica del problema non è strettamente stazionaria. Nel presente studio tale comportamento si è manifestato in tutte le simulazioni. Un esempio è riportato in Fig. 21, che mostra l'andamento dei coefficienti aerodinamici in funzione delle iterazioni nel caso della simulazione relativa al dominio e_1 , durante il test di indipendenza dal dominio nel caso senza getto:

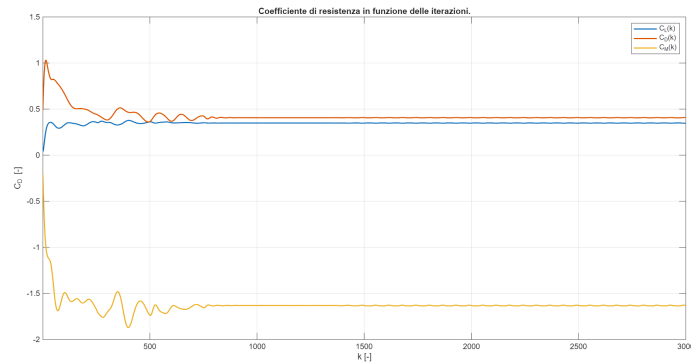


Figura 21: Convergenza di una simulazione stazionaria.

A differenza di una simulazione non stazionaria, la frequenza di queste oscillazioni non ha significato fisico diretto. Tuttavia, a condizione di eseguire opportuni controlli di stazionarietà statistica e convergenza, è comunque possibile estrarre dai segnali oscillatori dei coefficienti aerodinamici medi statisticamente rappresentativi. A questo scopo sono stati introdotti criteri specifici per verificare sia la stazionarietà statistica del regime finale sia la convergenza numerica.

Infine è stato aggiunto un controllo su y_1^+ .

7.1 Verifica di stazionarietà statistica del regime

In modo operativo, in questo lavoro si assume che un regime sia statisticamente stazionario se:

1. La media calcolata su finestre equivalenti del regime non cambia in modo apprezzabile al variare della posizione della finestra;
2. Non è presente una deriva lenta nelle iterazioni.

Tali verifiche vengono eseguite su ciascun coefficiente aerodinamico medio considerato.

7.1.1 Verifica di indipendenza dalla posizione della finestra

Sia $C(n)$ il coefficiente aerodinamico campionato in funzione dell'iterazione n . Se il regime è realmente stazionario, la media calcolata su una finestra del tratto finale deve risultare quasi indipendente dalla posizione della finestra stessa.

Si torni all'esempio precedentemente introdotto e ci si concentri su C_D . Nel tratto finale, il regime oscillatorio può essere osservato più chiaramente in Fig. 22:

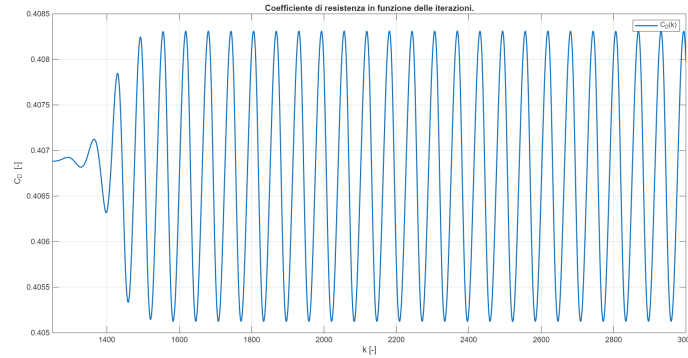


Figura 22: Regime oscillatorio di C_D .

Poiché il segnale a regime risulta oscillante con periodo pressoché regolare, si sceglie come lunghezza minima statisticamente significativa della finestra un periodo dell'oscillazione. Il periodo T_n , espresso in iterazioni, viene stimato a partire dalla frequenza dominante f_n , ottenuta mediante analisi FFT del segnale nel regime, come mostrato in Fig. 23. Si è inoltre osservato che, per una determinata simulazione, la frequenza dominante risulta identica per ogni coefficiente aerodinamico:

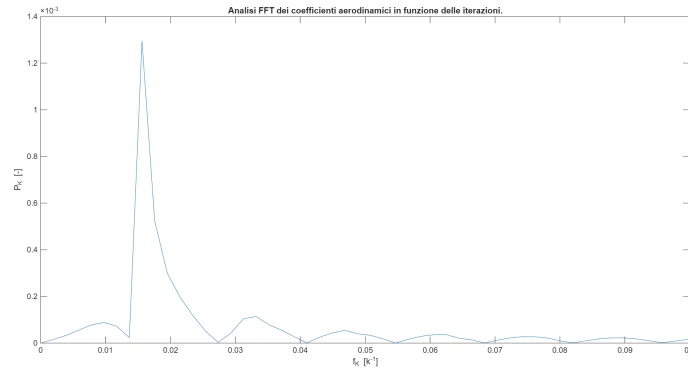


Figura 23: Spettro FFT del regime oscillatorio.

Il periodo in iterazioni viene quindi calcolato come:

$$T_n = \left\lceil \frac{1}{f_n} \right\rceil \quad (7.1)$$

dove l'arrotondamento per eccesso è necessario perché T_n non è in generale un intero.

Si seleziona quindi un intervallo a regime I_{reg} di lunghezza $\text{len}(I_{\text{reg}})$:

$$I_{\text{reg}} = [n_i, n_f] \quad \text{len}(I_{\text{reg}}) = n_f - n_i + 1 \quad (7.2)$$

in modo che esso contenga almeno $N_{T_n} = 10$ periodi dell'oscillazione:

$$\text{len}(I_{\text{reg}}) \geq N_{T_n} T_n \quad (7.3)$$

All'interno di I_{reg} si calcola quindi la media di $C(n)$ su tutte le finestre di lunghezza T_n , costruendo una curva di media mobile:

$$\bar{C}_{MA}(n) = \frac{1}{T_n} \sum_{i=n}^{n+T_n-1} C(i) \quad (7.4)$$

e l'intervallo su cui essa è definita è dato da:

$$I_{MA} = [n_i, n_f - T_n + 1] \quad \text{len}(I_{MA}) = \text{len}(I_{\text{reg}}) - T_n + 1 \quad (7.5)$$

Il confronto tra segnale grezzo e media mobile è riportato in Fig. 24:

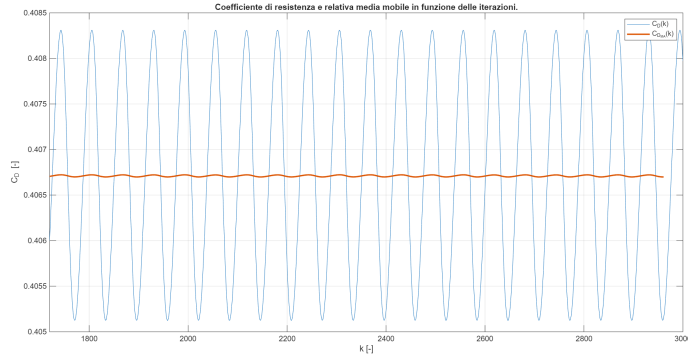


Figura 24: Regime grezzo e media mobile.

Infine, si misura quanto la media cambi al variare della posizione della finestra tramite l'escursione relativa massima:

$$\varepsilon_{\bar{C}} = \frac{\max_{n \in I_{MA}} \bar{C}_{MA}(n) - \min_{n \in I_{MA}} \bar{C}_{MA}(n)}{|\bar{C}|} \quad (7.6)$$

dove

$$\bar{C} = \frac{1}{\text{len}(I_{\text{reg}})} \sum_{i=n_i}^{n_f} C(i) \quad (7.7)$$

è il generico coefficiente medio calcolato sull'intero intervallo di regime considerato.

La media si considera statisticamente stabile se:

$$\varepsilon_{\bar{C}} [\%] < 0.1 \% \quad (7.8)$$

7.1.2 Verifica di assenza di trend lento

Anche quando un segnale oscilla attorno a un coefficiente medio pressoché costante, può comunque essere presente una deriva lenta del livello medio. Questo comportamento può mascherare un trend residuo che, a un'osservazione qualitativa, potrebbe essere scambiato per un regime stazionario. In presenza di tale deriva, la media calcolata sugli ultimi N_{T_n} periodi risulta meno affidabile. Per questo motivo si introduce un indicatore quantitativo di trend, costruito a partire dalla media mobile $\overline{C}_{MA}(n)$.

Lo scopo è definire un indice del tipo:

$$\varepsilon_{C_t} = \frac{\Delta C_t}{\overline{C}} \quad (7.9)$$

dove ΔC_t rappresenta una variazione sistematica del coefficiente $\overline{C}_{MA}(n)$ lungo l'intervallo considerato, attribuibile a un effettivo trend residuo.

Moltiplicando e dividendo il numeratore per la lunghezza dell'intervallo I_{MA} , si ottiene:

$$\varepsilon_{C_t} = \frac{\frac{\Delta C_t}{\text{len}(I_{MA})} \text{len}(I_{MA})}{\overline{C}} \quad (7.10)$$

La quantità $\Delta C_t / \text{len}(I_{MA})$ ha la forma di un coefficiente angolare e può quindi essere interpretata come la pendenza m_{reg} della retta di regressione associata al segnale $\overline{C}_{MA}(n)$:

$$\overline{C}_{MA}(n) \approx m_{\text{reg}} n + q_{\text{reg}} \quad (7.11)$$

Se m_{reg} risulta apprezzabilmente diverso da zero, significa che nel tratto considerato è ancora presente un trend residuo.

Si definisce quindi il trend relativo:

$$\varepsilon_{C_t} = \frac{|m_{\text{reg}}| \text{len}(I_{MA})}{|\overline{C}|} \quad (7.12)$$

e si assume che l'assenza di trend lento sia verificata se:

$$\varepsilon_{C_t} [\%] < 0.1 \% \quad (7.13)$$

7.2 Verifica di convergenza dell'equazione di continuità

Per verificare la convergenza della continuità, il monitoraggio dei residui è stato affiancato a una verifica più concreta, basata sulla conservazione della massa. Tale scelta è motivata dal fatto che la conservazione della massa costituisce un vincolo fisico globale che ogni soluzione ammissibile deve necessariamente soddisfare. Il bilancio di massa tra ingressi e uscite del dominio fornisce quindi un controllo diretto della correttezza della soluzione, risultando in questo senso più significativo dei soli residui numerici.

Si consideri l'equazione di continuità in forma integrale [1]:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dV + \oint_{\partial V} \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS = 0 \quad (7.14)$$

e applicandola in forma discreta all'intero dominio fluido, essa richiede che il solutore soddisfi:

$$\frac{\Delta M}{\Delta t} + \dot{m}_{\text{walls}} \approx 0 \quad (7.15)$$

dove $\dot{m}_{\text{walls}}$ è la portata totale che attraversa le superfici di contorno del dominio fluido. Nel caso della modellazione del getto, questo contributo tiene anche conto della portata in ingresso dovuta al getto.

Normalizzando il termine residuo rispetto a una portata di riferimento, in questo caso $\dot{m}_{\text{in}}$, cioè la portata che attraversa la sezione di ingresso, e considerando il massimo valore assoluto nel tempo, si ottiene lo sbilanciamento relativo di massa:

$$\varepsilon_m = \max_t \left| \frac{\frac{\Delta M(t)}{\Delta t} + \dot{m}_{\text{walls}}(t)}{\dot{m}_{\text{in}}(t)} \right| \quad (7.16)$$

Nel caso di simulazioni stazionarie, la dipendenza temporale non compare esplicitamente e la formulazione dello sbilanciamento relativo di massa si riduce a una formulazione nelle iterazioni n .

In particolare, definito l'intervallo a regime considerato I_{reg} , si definisce lo sbilanciamento relativo di massa nel caso stazionario:

$$\varepsilon_m = \max_{n \in I_{\text{reg}}} \left| \frac{\dot{m}_{\text{walls}}(n)}{\dot{m}_{\text{in}}(n)} \right| \quad (7.17)$$

e per convalidare la convergenza si impone che sia limitato:

$$\varepsilon_m [\%] < 0.1\% \quad (7.18)$$

7.3 Verifica di validità di y_1^+

Un ulteriore controllo da effettuare prima di analizzare il regime consiste nel verificarne la validità, accertando che, sull'insieme delle zone di fusoliera e coda, il valore di y_1^+ non superi il limite superiore di ammissibilità per tutto l'intervallo di regime considerato. A tal fine, dette Z_{fus} e Z_{cod} le zone corrispondenti rispettivamente a fusoliera e coda, e indicata con $Z_{\text{fc}} = Z_{\text{fus}} \cup Z_{\text{cod}}$ la loro unione, si definisce il valore estremo massimo di y_1^+ nel regime come:

$$y_{1\text{max}}^+ = \max_{\substack{\mathbf{x} \in Z_{\text{fc}} \\ n \in I_{\text{reg}}}} y_1^+(\mathbf{x}, n) \quad (7.19)$$

Si richiede quindi che:

$$y_{1\text{max}}^+ < 400 \quad (7.20)$$

Non si introduce invece un vincolo inferiore su y_1^+ , poiché il trattamento di parete adottato è di tipo y^+ -insensitive; di conseguenza, eventuali valori bassi di y_1^+ risultano in linea di principio meno critici rispetto al caso di formulazioni basate su funzioni di parete standard, mentre resta opportuno verificare che non si manifestino valori eccessivamente elevati, tali da allontanare eccessivamente il primo punto di calcolo dalla parete.

Si noti che, ai fini di questo controllo, sono state considerate esclusivamente le zone di fusoliera e coda, poiché esse sono quelle per le quali il contributo tangenziale τ_w fornisce una componente significativa dei carichi aerodinamici.

La base è invece caratterizzata da separazione e getto, condizione che esula dall'ambito di validità delle funzioni di parete; in tale zona è quindi pressoché inevitabile che il vincolo su y_1^+ non sia rispettato. Tuttavia, ci si attende che sulla corona di base il contributo dominante ai carichi sia associato alla componente normale alla parete, cioè alla pressione di parete p_w , il cui effetto non dipende direttamente dall'utilizzo delle funzioni di parete.

Pertanto, per la corona di base il controllo di validità non viene formulato imponendo un vincolo su y_1^+ , bensì verificando che il contributo dovuto agli sforzi tangenziali sia

trascurabile rispetto a quello dovuto alla pressione. A tal fine, si esprime il carico sulla corona di base in assi corpo come:

$$\mathbf{F}_b = \int_{A_b} (-p_{wb} \mathbf{n}_b + \tau_{wb} \mathbf{s}_b) dA \quad (7.21)$$

e si scompone tale contributo nelle due componenti:

$$\mathbf{F}_{b_p} = \int_{A_b} -p_{wb} \mathbf{n}_b dA \quad \mathbf{F}_{b_\tau} = \int_{A_b} \tau_{wb} \mathbf{s}_b dA \quad (7.22)$$

Si introduce quindi il contributo relativo normale alla base:

$$\eta_{F_b} = \max_{n \in I_{\text{reg}}} \frac{\|\mathbf{F}_{b_p}(n)\|}{\|\mathbf{F}_{b_p}(n)\| + \|\mathbf{F}_{b_\tau}(n)\|} \quad (7.23)$$

che misura la frazione del carico totale sulla corona di base imputabile al contributo di pressione.

Ai fini della convalida della simulazione, si richiede che:

$$\eta_{F_b}[\%] > 99.9\% \quad (7.24)$$

in modo da garantire che l'eventuale errore associato al contributo tangenziale, verosimilmente meno affidabile in presenza di separazione, dovuto al mancato rispetto delle condizioni di validità delle funzioni di parete, risulti trascurabile rispetto al carico complessivo sulla corona di base.

7.4 Strategia di gestione del pseudo-Courant

Nelle simulazioni, il valore iniziale di $pCFL$ è stato mantenuto basso, pari a 5, così da favorire la stabilizzazione iniziale del solutore e il progressivo abbassamento dei residui. Dopo un numero adeguato di iterazioni, una volta osservata la convergenza dei residui e la stabilizzazione dei carichi attorno a un attrattore, il $pCFL$ è stato incrementato progressivamente ai valori 10, 20, 50, 100, 200 e 500.

Quando si osservava l'innescio dell'oscillazione a regime, il $pCFL$ veniva infine riportato e mantenuto al valore standardizzato di 200, così da garantire che la raccolta dei dati fosse sempre effettuata con le stesse impostazioni del solutore. In questo modo si evita di introdurre differenze nei coefficienti aerodinamici medi dovute unicamente a una diversa gestione numerica del pseudo-tempo.

8 Test di indipendenza del dominio

Sui bordi del dominio fluido vengono imposte le condizioni al contorno $\mathbf{u}_\infty$, p_∞ , ρ_∞ e ϑ_∞ . Affinché la soluzione numerica sia coerente con la fisica reale, è necessario che tali bordi siano sufficientemente lontani dal razzo, così da non interferire con le strutture di flusso generate dal razzo.

Si consideri, ad esempio, la scia: se nella simulazione la sezione di uscita fosse posta troppo vicino alla base, le condizioni al contorno verrebbero imposte prima che la scia si sia sviluppata in modo naturale, forzando una soluzione numerica distorta. In modo analogo, anche l'estensione laterale e a monte del dominio deve essere sufficientemente ampia da non influenzare artificialmente il campo di moto attorno al razzo.

D'altra parte, un dominio eccessivamente grande comporta un aumento del numero di celle, della memoria richiesta e quindi del costo computazionale. È quindi necessario individuare un compromesso tra accuratezza fisica ed efficienza numerica.

8.1 Criterio di validazione del dominio

Per strutturare il test di indipendenza dal dominio si ricorda che l'output del problema è associato a un'incertezza complessiva dovuta sia al dominio sia alla mesh:

$$\delta\bar{C} = \delta\bar{C}_e + \delta\bar{C}_m \quad (8.1)$$

Il test di indipendenza dal dominio consiste quindi nel richiedere che il contributo di incertezza dovuto al dominio, cioè $\delta\bar{C}_e$, risulti sufficientemente piccolo.

A tal fine, si considerino due domini di dimensione crescente, e_i ed e_{i+1} , e i corrispondenti risultati:

$$\Delta\bar{C}_{e_i} = \frac{\bar{C}_{e_i}^{(g)} - \bar{C}_{e_i}^{(ng)}}{\bar{C}_{e_i}^{(g)}} \quad \Delta\bar{C}_{e_{i+1}} = \frac{\bar{C}_{e_{i+1}}^{(g)} - \bar{C}_{e_{i+1}}^{(ng)}}{\bar{C}_{e_{i+1}}^{(g)}} \quad (8.2)$$

L'incertezza associata al dominio e_i viene quindi stimata come differenza assoluta tra i risultati ottenuti sui due domini:

$$\delta\bar{C}_{e_i} = |\Delta\bar{C}_{e_{i+1}} - \Delta\bar{C}_{e_i}| \quad (8.3)$$

Il dominio e_i viene considerato validato se, per ciascun coefficiente aerodinamico medio di interesse vale:

$$\delta\bar{C}_{e_i} [\%] < 1\% \quad (8.4)$$

e il valore così ottenuto viene assunto come stima dell'incertezza dovuta al dominio, cioè $\delta\bar{C}_e$.

Il test viene svolto iterativamente su domini via via più grandi, fino a quando tale condizione non risulta soddisfatta per tutti i coefficienti aerodinamici medi considerati. I domini successivi vengono ottenuti scalando uniformemente quello precedente di un fattore 1.5.

Per il dominio selezionato viene inoltre introdotto un controllo aggiuntivo relativo al fenomeno di *backflow* in corrispondenza dell'outlet. La presenza, all'uscita del dominio, di una componente di velocità entrante indica infatti che il flusso in tale sezione non si è ancora sufficientemente sviluppato e può quindi costituire un segnale di estensione insufficiente del dominio a valle.

Il controllo consiste nel verificare che la componente della velocità normale all'outlet risulti positiva in ogni punto della superficie di uscita A_{out} e per tutto l'intervallo di regime

considerato. Si definisce pertanto:

$$w_{\text{out}} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_{\text{out}} \quad (8.5)$$

dove $\mathbf{n}_{\text{out}}$ è il versore normale ad A_{out} orientato verso l'esterno del dominio. Si pone quindi:

$$w_{\text{out}_{\min}} = \min_{\substack{\mathbf{x} \in A_{\text{out}} \\ n \in I_{\text{reg}}}} w_{\text{out}}(\mathbf{x}, n) \quad (8.6)$$

e si richiede che:

$$w_{\text{out}_{\min}} > 0 \quad (8.7)$$

In questo modo si impone che, in ogni punto dell'outlet e per tutto il regime, il flusso risulti uscente dal dominio.

8.2 Svolgimento del test di indipendenza del dominio

Le simulazioni effettuate sui tre domini considerati forniscono i coefficienti aerodinamici medi riportati in Tab. 1, sia per il caso con il getto sia quello senza getto:

Tabella 1: Coefficienti medi in e_1 , e_2 e e_3 .

Sim.	$\overline{C}_L$		$\overline{C}_D$		$\overline{C}_M$	
	g	ng	g	ng	g	ng
e_1	0.3463	0.3488	0.4662	0.4067	-1.625	-1.632
e_2	0.3402	0.3452	0.4620	0.4051	-1.5800	-1.608
e_3	0.3393	0.3452	0.4662	0.4070	-1.575	-1.610

A partire da tali risultati, si calcolano le variazioni relative tra domini consecutivi, riportate in Tab. 2.

Tabella 2: Errori relativi dei coefficienti medi rispetto a e_1 , e_2 e e_3 .

Sim.	$\delta \overline{C}_L$ [%]	$\delta \overline{C}_D$ [%]	$\delta \overline{C}_M$ [%]
$e_{1 \rightarrow 2}$	0.7554 ✓	0.4405 ✓	1.275 ✗
$e_{2 \rightarrow 3}$	0.2636 ✓	0.3664 ✓	0.4606 ✓

Si osserva che il dominio e_1 non può ancora essere considerato indipendente, poiché nel passaggio a e_2 $\delta \overline{C}_M$ non rispetta la tolleranza imposta. Per questo motivo il test viene esteso al dominio successivo e_3 .

Il confronto tra e_2 e e_3 mostra invece che, per tutti i coefficienti aerodinamici medi considerati, le variazioni rientrano nella soglia assegnata. Di conseguenza, il dominio e_2 viene assunto come dominio validato per le successive simulazioni.

A supporto di tale scelta, si riporta il backflow relativo al dominio e_2 :

$$w_{\text{out}_{\min}}^{(g)} = 258.7 \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad \checkmark \quad w_{\text{out}_{\min}}^{(\text{ng})} = 257.9 \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad \checkmark \quad (8.8)$$

In entrambi i casi il valore minimo risulta positivo, da cui emerge l'assenza di backflow all'outlet sia nel caso con il getto che senza getto.

Si procede quindi con il test di indipendenza dalla mesh utilizzando il dominio e_2 .

In Fig. 25 sono riportati gli andamenti degli errori relativi, con evidenza della tolleranza imposta.

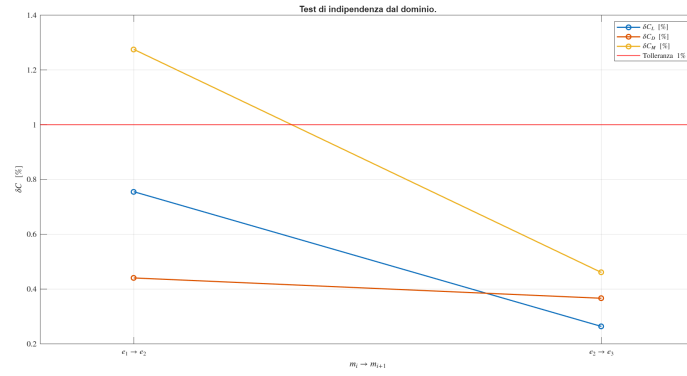


Figura 25: Errori relativi nel test di indipendenza del dominio.

9 Test di indipendenza della mesh

La mesh determina l'accuratezza con cui vengono calcolati i campi di moto, ed è quindi necessario che risulti sufficientemente fitta. In generale, la risoluzione dei gradienti migliora all'aumentare del numero di celle presenti nelle regioni in cui tali gradienti si sviluppano; un esempio diretto è la risoluzione dello strato limite. Una mesh troppo grossolana introduce invece una maggiore diffusione numerica dei campi, con conseguente difficoltà nel catturare gradienti intensi e localizzati da cui dipendono le grandezze di interesse, soprattutto in regime transonico e supersonico, dove possono essere presenti anche onde d'urto.

È quindi fondamentale verificare che i carichi medi ottenuti risultino, entro una prefissata tolleranza, indipendenti dalla mesh adottata.

9.1 Criterio di validazione della mesh

La logica di validazione della mesh è analoga a quella già adottata per il dominio. Si richiama infatti la relazione per l'incertezza complessiva:

$$\delta\bar{C} = \delta\bar{C}_e + \delta\bar{C}_m \quad (9.1)$$

Come nel caso del dominio, si considerano due mesh m_i e m_{i+1} in ordine di infittimento crescente e si calcolano i corrispondenti risultati:

$$\Delta\bar{C}_{m_i} = \frac{\bar{C}_{m_i}^{(g)} - \bar{C}_{m_i}^{(ng)}}{\bar{C}_{m_i}^{(g)}} \quad \Delta\bar{C}_{m_{i+1}} = \frac{\bar{C}_{m_{i+1}}^{(g)} - \bar{C}_{m_{i+1}}^{(ng)}}{\bar{C}_{m_{i+1}}^{(g)}} \quad (9.2)$$

Si definisce quindi l'incertezza assoluta dovuta alla mesh come:

$$\delta\bar{C}_{m_i} = |\Delta\bar{C}_{m_{i+1}} - \Delta\bar{C}_{m_i}| \quad (9.3)$$

e la mesh m_i viene considerata validata se per ciascun coefficiente aerodinamico medio di interesse vale:

$$\delta\bar{C}_{m_i} [\%] < 1\% \quad (9.4)$$

Poiché lo studio è focalizzato sull'effetto del getto, l'attenzione viene posta soprattutto sulla coda del razzo. Il refinement della mesh viene quindi effettuato nella parte posteriore del Near-BOI in corrispondenza delle zone di coda e di base, diminuendo progressivamente le dimensioni caratteristiche della discretizzazione. In particolare, le mesh successive vengono ottenute dividendo per 1.25 le dimensioni locali della mesh in tali zone.

9.2 Svolgimento del test di indipendenza della mesh

Poiché la mesh m_1 coincide con quella già utilizzata nelle simulazioni eseguite sul dominio validato e_2 , i relativi risultati sono già noti. I coefficienti aerodinamici medi ottenuti sulle tre mesh considerate sono riportati in Tab. 3.

Tabella 3: Coefficienti medi in m_1 , m_2 e m_3 .

Sim.	$\bar{C}_L$		$\bar{C}_D$		$\bar{C}_M$	
	g	ng	g	ng	g	ng
m_1	0.3402	0.3452	0.4620	0.4051	-1.580	-1.608
m_2	0.3419	0.3457	0.4467	0.3985	-1.589	-1.608
m_3	0.3394	0.3434	0.4379	0.3989	-1.568	-1.591

A partire da tali risultati si calcolano le variazioni relative tra mesh consecutive, riportate in Tab. 4.

Tabella 4: Errori relativi dei coefficienti medi rispetto a m_1 , m_2 e m_3 .

Sim.	$\delta\overline{C}_L$ [%]	$\delta\overline{C}_D$ [%]	$\delta\overline{C}_M$ [%]
$m_{1 \rightarrow 2}$	0.3452 ✓	1.517 ✗	0.5124 ✓
$m_{2 \rightarrow 3}$	0.07395 ✓	1.878 ✗	0.2387 ✓

Si osserva che né m_1 né m_2 possono essere considerate indipendenti dalla mesh, poiché $\delta\overline{C}_D$ continua a non soddisfare la tolleranza imposta. Inoltre, nel passaggio da m_2 a m_3 , l'incertezza associata a $\overline{C}_D$ non mostra neppure un miglioramento apprezzabile. Prima di procedere con ulteriori raffinamenti globali, è quindi opportuno individuare quale regione del razzo sia effettivamente responsabile della residua sensibilità alla mesh.

A questo scopo, invece di analizzare direttamente $\delta\overline{C}_D$, che dipende dalla normalizzazione scelta, si considera la variazione di $\overline{C}_D$ tra due mesh successive nei singoli casi fisici. In particolare, tra m_2 e m_3 si ha:

$$\overline{C}_{D_{m_3}}^{(g)} - \overline{C}_{D_{m_2}}^{(g)} = -0.008770 \quad \overline{C}_{D_{m_3}}^{(ng)} - \overline{C}_{D_{m_2}}^{(ng)} = 4.027 \cdot 10^{-4} \quad (9.5)$$

da cui emerge che la sensibilità alla mesh è dominata dal caso con il getto. In termini relativi:

$$\eta_g = \frac{|\overline{C}_{D_{m_3}}^{(g)} - \overline{C}_{D_{m_2}}^{(g)}|}{|\overline{C}_{D_{m_3}}^{(g)} - \overline{C}_{D_{m_2}}^{(g)}| + |\overline{C}_{D_{m_3}}^{(ng)} - \overline{C}_{D_{m_2}}^{(ng)}|} \Rightarrow \eta_g [\%] = 95.61 \% \quad (9.6)$$

Si deduce quindi che il mancato soddisfacimento del criterio di indipendenza è imputabile quasi interamente alla risposta di $\overline{C}_D^{(g)}$.

Per localizzare ulteriormente il fenomeno, si scompone quindi $\overline{C}_D^{(g)}$ nel contributo della corona di base $\overline{C}_{D_b}^{(g)}$ e in quello associato al resto del razzo, indicato con $\overline{C}_{D_r}^{(g)}$:

$$\overline{C}_D^{(g)} = \overline{C}_{D_b}^{(g)} + \overline{C}_{D_r}^{(g)} \quad (9.7)$$

e quindi:

$$\overline{C}_{D_{m_3}}^{(g)} - \overline{C}_{D_{m_2}}^{(g)} = \left(\overline{C}_{D_{bm_3}}^{(g)} - \overline{C}_{D_{bm_2}}^{(g)} \right) + \left(\overline{C}_{D_{rm_3}}^{(g)} - \overline{C}_{D_{rm_2}}^{(g)} \right) \quad (9.8)$$

Calcolando numericamente i due contributi si ottiene:

$$\overline{C}_{D_{bm_3}}^{(g)} - \overline{C}_{D_{bm_2}}^{(g)} = -0.008674 \quad \overline{C}_{D_{rm_3}}^{(g)} - \overline{C}_{D_{rm_2}}^{(g)} = -9.622 \cdot 10^{-5} \quad (9.9)$$

da cui segue che:

$$\eta_{b_g} = \frac{|\overline{C}_{D_{bm_3}}^{(g)} - \overline{C}_{D_{bm_2}}^{(g)}|}{|\overline{C}_{D_{bm_3}}^{(g)} - \overline{C}_{D_{bm_2}}^{(g)}| + |\overline{C}_{D_{rm_3}}^{(g)} - \overline{C}_{D_{rm_2}}^{(g)}|} \Rightarrow \eta_{b_g} [\%] = 98.90 \% \quad (9.10)$$

ossia quasi tutta la sensibilità della resistenza nel caso con il getto è localizzata sulla corona di base.

Questo risultato mostra che un ulteriore raffinamento esteso a tutta la coda del razzo sarebbe poco efficiente, poiché infittirebbe anche zone già sostanzialmente indipendenti

dalla mesh, aumentando il costo computazionale senza un beneficio proporzionato. Si sceglie quindi di localizzare ulteriormente il refinement in prossimità della base, procedendo con una nuova famiglia di mesh, e i coefficienti aerodinamici medi ottenuti sono riportati in tab. 5:

Tabella 5: Coefficienti medi in m_3 , m_4 e m_5 .

Sim.	$\overline{C}_L$		$\overline{C}_D$		$\overline{C}_M$	
	g	ng	g	ng	g	ng
m_3	0.3394	0.3434	0.4379	0.3989	-1.568	-1.591
m_4	0.3407	0.3435	0.4313	0.3982	-1.577	-1.591
m_5	0.3414	0.3442	0.4269	0.3978	-1.581	-1.596

Da cui è possibile ottenere gli errori relativi, riportati in Tab. 6:

Tabella 6: Errori relativi dei coefficienti medi rispetto a m_3 , m_4 e m_5 .

Sim.	$\delta\overline{C}_L$ [%]	$\delta\overline{C}_D$ [%]	$\delta\overline{C}_M$ [%]
$m_{3 \rightarrow 4}$	0.3439 ✓	1.233 ✗	0.5465 ✓
$m_{4 \rightarrow 5}$	0.02206 ✓	0.8733 ✓	0.01060 ✓

Si osserva che il raffinamento localizzato consente effettivamente di ridurre $\delta\overline{C}_D$ fino a rientrare nella soglia imposta nel passaggio da m_4 a m_5 . La mesh m_4 viene quindi assunta come mesh validata per le successive simulazioni.

In Fig. 26 sono riportati gli andamenti degli errori relativi, con evidenza della tolleranza imposta:

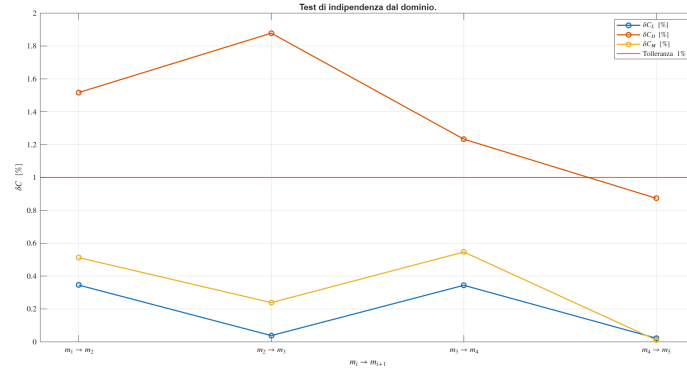


Figura 26: Errori relativi nel test di indipendenza della mesh.

10 Risultati

10.1 Presentazione dei risultati

I risultati finali sono espressi nella forma:

$$\Delta \bar{C} = \left| \frac{\bar{C}^{(g)} - \bar{C}^{(ng)}}{\bar{C}^{(g)}} \right| \pm \delta \bar{C} [\%] \quad (10.1)$$

Si calcolano innanzitutto i risultati nominali, trascurando le incertezze dovute a dominio e mesh, indicati con $\Delta \bar{C}_n [\%]$:

$$\Delta \bar{C}_n = \left| \frac{\bar{C}^{(g)} - \bar{C}^{(ng)}}{\bar{C}^{(g)}} \right| \quad (10.2)$$

Tali valori sono ricavati a partire dalla mesh m_4 , poiché il confronto con la mesh più raffinata m_5 mostra variazioni inferiori alla tolleranza prefissata.

Numericamente, per i coefficienti aerodinamici medi $\bar{C}_L$, $\bar{C}_D$ e $\bar{C}_M$ si ottiene:

$$\Delta \bar{C}_{L_n} [\%] = 0.8170 \% \quad \Delta \bar{C}_{D_n} [\%] = 6.816 \% \quad \Delta \bar{C}_{M_n} [\%] = 0.9350 \% \quad (10.3)$$

Le incertezze complessive sono quindi assunte come somma dei contributi dovuti a dominio e mesh:

$$\delta \bar{C} = \delta \bar{C}_e + \delta \bar{C}_m \quad (10.4)$$

Nel presente caso si ottiene:

$$\delta \bar{C}_L [\%] = 0.2856 \% \quad \delta \bar{C}_D [\%] = 1.240 \% \quad \delta \bar{C}_M [\%] = 0.4712 \% \quad (10.5)$$

I risultati finali sono pertanto:

$$\begin{aligned} \Delta \bar{C}_L [\%] &= 0.8170 \% \pm 0.2856 \% \\ \Delta \bar{C}_D [\%] &= 6.816 \% \pm 1.240 \% \\ \Delta \bar{C}_M [\%] &= 0.9350 \% \pm 0.4712 \% \end{aligned} \quad (10.6)$$

10.2 Discussione dei risultati

Per $\bar{C}_L$ e $\bar{C}_M$, le variazioni risultano contenute e suggeriscono che, entro le incertezze stimate, i casi con il getto e senza getto restituiscono coefficienti aerodinamici medi tra loro comparabili. Il comportamento di $\bar{C}_D$ è invece diverso: nel caso con il getto si osserva un incremento nominale pari a circa 6.8 %. In particolare, sulla mesh m_4 si ottiene:

$$\bar{C}_D^{(g)} = 0.4313 \quad \bar{C}_D^{(ng)} = 0.3982 \quad (10.7)$$

Per chiarire l'origine di questa differenza, si considera la variazione assoluta tra i due casi:

$$\bar{C}_D^{(g)} - \bar{C}_D^{(ng)} = 0.03317 \quad (10.8)$$

e si vuole ora quantificare il contributo della corona di base in questa differenza.

Isolando i contributi della corona di base e del resto del razzo si ottiene:

$$\bar{C}_{D_b}^{(g)} - \bar{C}_{D_b}^{(ng)} = 0.03493 \quad \bar{C}_{D_r}^{(g)} - \bar{C}_{D_r}^{(ng)} = -1.760 \cdot 10^{-3} \quad (10.9)$$

da cui segue:

$$\eta_b = \frac{|\overline{C}_{D_b}^{(g)} - \overline{C}_{D_b}^{(ng)}|}{|\overline{C}_{D_b}^{(g)} - \overline{C}_{D_b}^{(ng)}| + |\overline{C}_{D_r}^{(g)} - \overline{C}_{D_r}^{(ng)}|} \Rightarrow \eta_b [\%] = 95.20 \% \quad (10.10)$$

Ne segue che la variazione di resistenza è dominata dalla sola corona di base. In altri termini, il fenomeno principale non è un generico aumento della resistenza dell'intero razzo, ma una specifica modifica del contributo della corona di base.

Per comprendere la causa fisica del fenomeno, si confrontano i coefficienti di pressione mediati sull'area della corona di base calcolati nel caso con il getto e nel caso senza getto, indicati rispettivamente con $\overline{C}_p^{(g)}$ e $\overline{C}_p^{(ng)}$:

$$\overline{C}_{p_b}^{(g)} = \frac{\overline{p}_b^{(g)} - p_\infty}{p_{d_\infty}} \quad \overline{C}_{p_b}^{(ng)} = \frac{\overline{p}_b^{(ng)} - p_\infty}{p_{d_\infty}} \quad (10.11)$$

da cui risulta:

$$\overline{C}_{p_b}^{(g)} = -0.05978 \quad \overline{C}_{p_b}^{(ng)} = 0.04253 \quad (10.12)$$

Si osserva quindi che, nel caso con il getto, la corona di base è soggetta a una sottopressione, coerente con l'incremento di resistenza osservato, mentre nel caso senza getto è presente una lieve sovrappressione media, tale da generare un contributo locale di resistenza negativo, cioè debolmente spingente.

Una rappresentazione qualitativa della distribuzione di $\overline{C}_p$ nei due casi è riportata in Fig. 27:

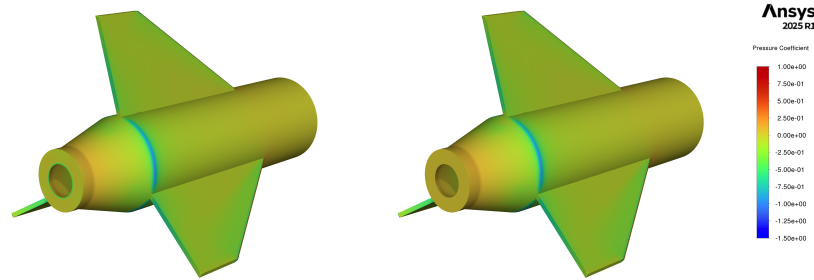


Figura 27: Diagramma di C_p nel caso del getto a sinistra e senza getto a destra.

Il segno ottenuto nel caso senza getto non deve essere interpretato automaticamente come un artefatto numerico. Report NASA riportano infatti che, per configurazioni a base tronca in regime subsonico, la resistenza di base può assumere valori negativi e che il numero di Mach oltre il quale tale contributo torna positivo è dell'ordine di $M \approx 1.1$. Poiché nel presente lavoro il numero di Mach è circa 0.77, il risultato del caso senza getto risulta compatibile con evidenze sperimentali [25].

Tale risultato è inoltre coerente con quanto discusso da Buresti per corpi assialsimmetrici con base tronca e boat-tail. L'autore mostra infatti che il boat-tail può aumentare sensibilmente la pressione sulla base, fino a ottenere anche coefficienti di pressione positivi. In tali condizioni, il contributo di pressione della base può divenire spingente, ossia equivalente a una resistenza di base negativa [6].

Nel caso con il getto, invece, la pressione della corona di base diminuisce e il relativo contributo di resistenza diventa positivo, determinando l'aumento della resistenza della corona di base osservato. Tale comportamento è coerente con risultati sperimentali NASA,

che mostrano come, in condizioni di sovraespansione, il getto, uscendo a una pressione inferiore a quella ambiente, debba riadattarsi al campo esterno. Questa interazione può accentuare l'aspirazione della regione di ricircolo a valle della base, con conseguente riduzione della pressione statica media posteriore e aumento del contributo di resistenza [12, 13].

Nel presente studio il getto risulta sovraespanso, essendo

$$\frac{p_e}{p_\infty} \approx 0.54 \quad (10.13)$$

per cui il risultato ottenuto risulta allineato con tale interpretazione fisica.

Va tuttavia sottolineato che l'effetto del getto sulla resistenza non è univoco, ma dipende dal regime operativo. Aumentando il rapporto di pressione, i risultati sperimentali mostrano che la pressione della corona di base cresce rapidamente, anche a superare i valori del caso senza getto, causando quindi il fenomeno opposto di quello osservato nel presente lavoro: una riduzione di resistenza.

11 Appendice A: Contorni di alcuni campi di moto

11.1 Contorni del modulo della velocità

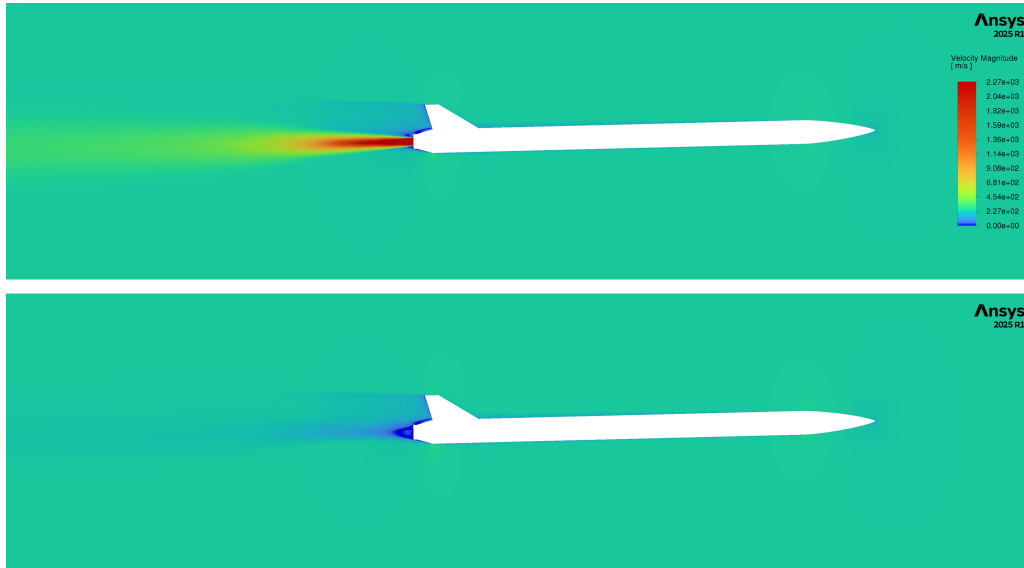


Figura 28: Contorno globale di $\|\mathbf{u}\|$: con il getto in alto, senza getto in basso.

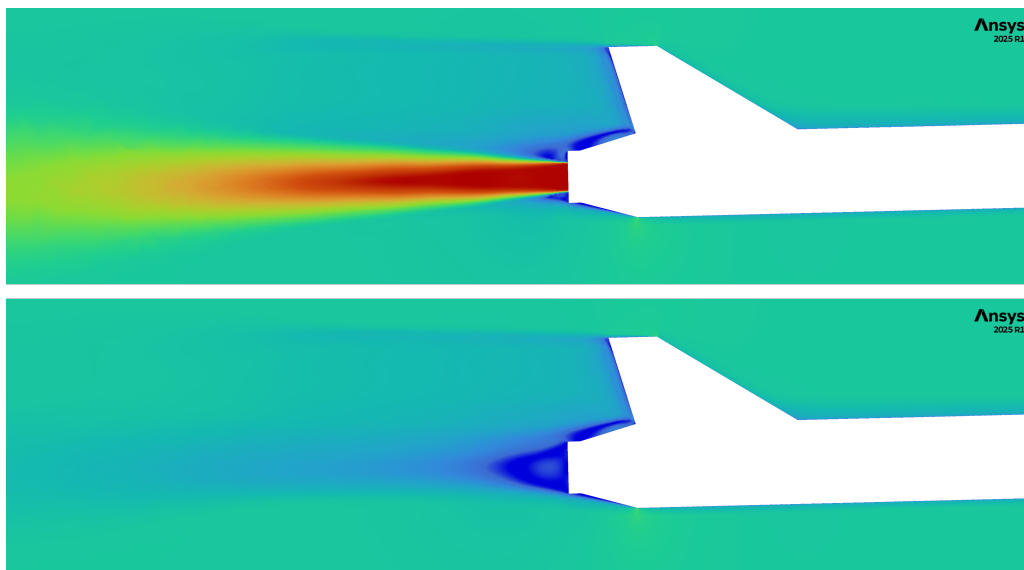


Figura 29: Contorno locale di $\|\mathbf{u}\|$: con il getto in alto, senza getto in basso.

11.2 Contorni della pressione

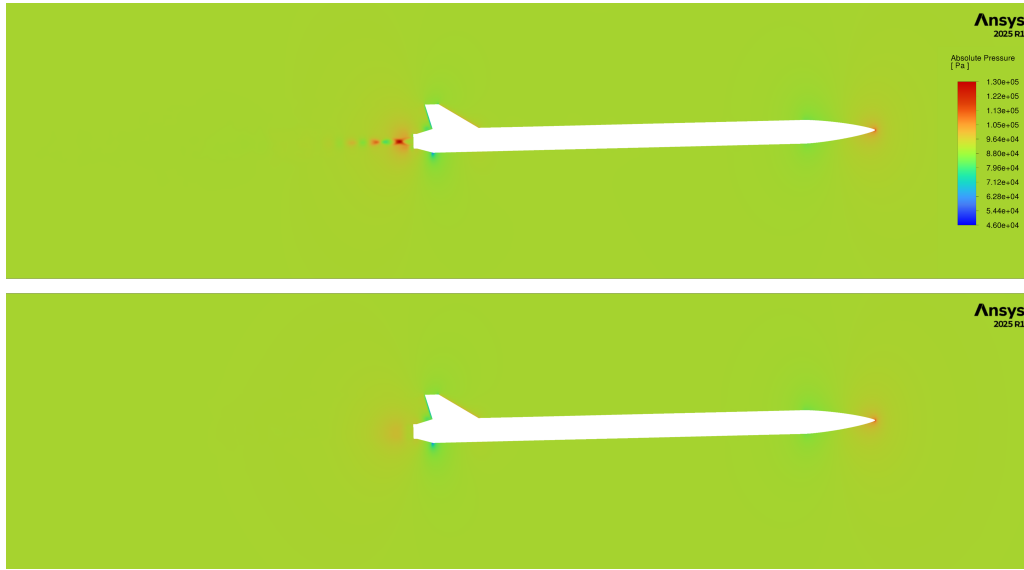


Figura 30: Contorno globale di p : con il getto in alto, senza getto in basso.

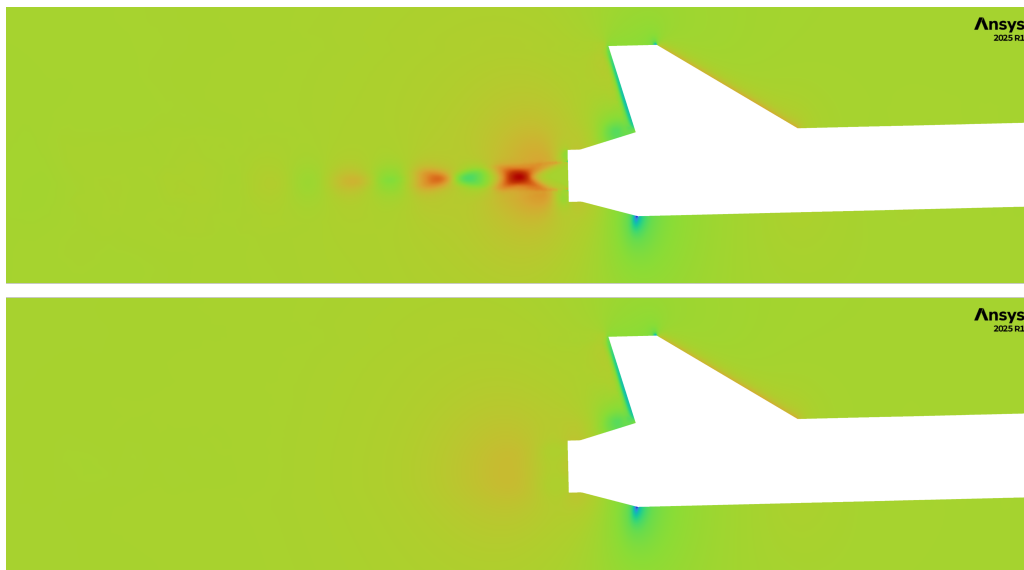


Figura 31: Contorno locale di p : con il getto in alto, senza getto in basso.

Nel caso con il getto si osserva, oltre alla minore pressione in prossimità della base, una struttura a lobi lungo il getto, riconducibile alla formazione dei cosiddetti diamanti di Mach. Essa è dovuta al fatto che il getto esce a una pressione inferiore a quella ambiente e viene quindi compresso dal fluido circostante. Questa compressione, però, non si arresta non appena viene raggiunta la pressione esterna, poiché l'inerzia del moto convergente continua a spingere il fluido verso l'interno. Si genera così una sovrappressione, che provoca una successiva riespansione. Anche quest'ultima supera la condizione di equilibrio, producendo una nuova sottopressione. Ne risulta quindi un adattamento non monotono del getto alla pressione ambiente, ma oscillatorio, che si smorza progressivamente procedendo verso valle [16].

12 Appendice B: Controlli numerici delle simulazioni

12.1 Verifica di qualità delle mesh.

Tabella 7: Parametri di qualità delle mesh.

Sim.	Skw	OQ
e_1	0.52	0.48
e_2	0.52	0.48
e_3	0.59	0.41
m_2	0.56	0.44
m_3	0.57	0.43
m_4	0.51	0.49
m_5	0.52	0.48

12.2 Verifica di stazionarietà statistica del regime

12.2.1 Verifica di indipendenza dalla posizione della finestra

Tabella 8: Errori relativi sulla posizione della finestra.

Sim.	$\varepsilon_{\overline{C}_L}$ [%]		$\varepsilon_{\overline{C}_D}$ [%]		$\varepsilon_{\overline{C}_M}$ [%]	
	g	ng	g	ng	g	ng
e_1	$1.3 \cdot 10^{-3}$	$4.9 \cdot 10^{-3}$	$1.7 \cdot 10^{-2}$	$5.8 \cdot 10^{-3}$	$1.9 \cdot 10^{-3}$	$3.9 \cdot 10^{-3}$
e_2	$1.5 \cdot 10^{-2}$	$1.5 \cdot 10^{-4}$	$4.5 \cdot 10^{-3}$	$1.7 \cdot 10^{-4}$	$2.0 \cdot 10^{-2}$	$7.4 \cdot 10^{-2}$
e_3	$2.4 \cdot 10^{-2}$	$4.0 \cdot 10^{-3}$	$6.6 \cdot 10^{-3}$	$4.6 \cdot 10^{-3}$	$2.9 \cdot 10^{-2}$	$5.2 \cdot 10^{-3}$
m_2	$2.0 \cdot 10^{-2}$	$7.9 \cdot 10^{-3}$	$2.8 \cdot 10^{-3}$	$1.1 \cdot 10^{-2}$	$2.6 \cdot 10^{-2}$	$5.3 \cdot 10^{-3}$
m_3	$8.3 \cdot 10^{-3}$	$8.1 \cdot 10^{-3}$	$3.0 \cdot 10^{-3}$	$8.5 \cdot 10^{-3}$	$1.0 \cdot 10^{-2}$	$1.6 \cdot 10^{-2}$
m_4	$9.9 \cdot 10^{-2}$	$5.2 \cdot 10^{-2}$	$1.9 \cdot 10^{-2}$	$1.6 \cdot 10^{-2}$	$8.5 \cdot 10^{-2}$	$8.9 \cdot 10^{-2}$
m_5	$3.3 \cdot 10^{-2}$	$3.4 \cdot 10^{-2}$	$7.3 \cdot 10^{-3}$	$1.2 \cdot 10^{-2}$	$5.8 \cdot 10^{-2}$	$5.8 \cdot 10^{-2}$

12.2.2 Verifica di assenza di trend lento

Tabella 9: Errori relativi sul trend lento.

Sim.	$\varepsilon_{C_{L_t}}$ [%]		$\varepsilon_{C_{D_t}}$ [%]		$\varepsilon_{C_{M_t}}$ [%]	
	g	ng	g	ng	g	ng
e_1	$2.1 \cdot 10^{-4}$	$8.5 \cdot 10^{-5}$	$2.1 \cdot 10^{-4}$	$5.5 \cdot 10^{-5}$	$3.7 \cdot 10^{-4}$	$2.5 \cdot 10^{-5}$
e_2	$2.7 \cdot 10^{-4}$	$3.9 \cdot 10^{-5}$	$7.5 \cdot 10^{-5}$	$3.1 \cdot 10^{-5}$	$6.0 \cdot 10^{-4}$	$3.1 \cdot 10^{-4}$
e_3	$1.2 \cdot 10^{-3}$	$5.6 \cdot 10^{-4}$	$4.6 \cdot 10^{-4}$	$6.0 \cdot 10^{-4}$	$3.0 \cdot 10^{-3}$	$2.2 \cdot 10^{-3}$
m_2	$5.7 \cdot 10^{-4}$	$9.1 \cdot 10^{-5}$	$3.9 \cdot 10^{-4}$	$1.2 \cdot 10^{-4}$	$8.7 \cdot 10^{-4}$	$1.8 \cdot 10^{-4}$
m_3	$5.0 \cdot 10^{-4}$	$4.2 \cdot 10^{-3}$	$4.6 \cdot 10^{-4}$	$4.4 \cdot 10^{-3}$	$2.7 \cdot 10^{-3}$	$1.4 \cdot 10^{-2}$
m_4	$1.8 \cdot 10^{-2}$	$5.6 \cdot 10^{-4}$	$2.4 \cdot 10^{-4}$	$6.1 \cdot 10^{-3}$	$2.5 \cdot 10^{-2}$	$1.1 \cdot 10^{-2}$
m_5	$1.5 \cdot 10^{-2}$	$1.1 \cdot 10^{-2}$	$2.8 \cdot 10^{-3}$	$3.0 \cdot 10^{-3}$	$2.0 \cdot 10^{-2}$	$7.7 \cdot 10^{-3}$

12.3 Verifica di convergenza dell'equazione di continuità

Tabella 10: Errori relativi sullo sbilanciamento di massa.

Sim.	$\varepsilon_m [\%]$	
	g	ng
e_1	$3.9 \cdot 10^{-3}$	$1.5 \cdot 10^{-4}$
e_2	$1.1 \cdot 10^{-4}$	$1.7 \cdot 10^{-4}$
e_3	$2.3 \cdot 10^{-4}$	$1.0 \cdot 10^{-4}$
m_2	$1.8 \cdot 10^{-3}$	$6.8 \cdot 10^{-5}$
m_3	$2.0 \cdot 10^{-3}$	$4.9 \cdot 10^{-5}$
m_4	$2.0 \cdot 10^{-3}$	$4.6 \cdot 10^{-5}$
m_5	$2.0 \cdot 10^{-3}$	$1.2 \cdot 10^{-4}$

12.4 Verifica di validità di y_1^+

Tabella 11: Valori massimi di y_1^+ e del contributo normale alla base.

Sim.	$y_{1\max}^+$		$\eta_{F_b} [\%]$	
	g	ng	g	ng
e_1	194	194	100	100
e_2	193	193	100	100
e_3	197	196	100	100
m_2	193	193	100	100
m_3	194	194	100	100
m_4	194	194	100	100
m_5	194	194	100	100

Riferimenti bibliografici

- [1] John David Anderson, John Wendt, et al. *Computational fluid dynamics*. Springer, 1995.
- [2] ANSYS, Inc. Customer center | innovation space.
- [3] ANSYS, Inc. Lecture 7: Turbulence modeling — introduction to ansys fluent (release 15.0). PDF lecture slides, 2014.
- [4] ANSYS, Inc. Tidbits: Turbulence — lesson 8: Hydraulic diameter. PDF training note, 2024.
- [5] ANSYS, Inc. Ansys help center, 2025.
- [6] Guido Buresti. *Elements of fluid dynamics*. World Scientific Publishing Company, 2012.
- [7] David A Caughey. Introduction to aircraft stability and control course notes for m&ae 5070. *Sibley School of Mechanical & Aerospace Engineering Cornell University*, 2011.
- [8] Marco Ceze and Krzysztof Fidkowski. Pseudo-transient continuation, solution update methods, and cfl strategies for dg discretizations of the rans-sa equations. In *21st AIAA computational fluid dynamics conference*, 2013.
- [9] CFD Theories. Cfd theories - computational fluid dynamics: Theories and best practices.
- [10] Apsley David. Turbulent boundary layers – chapter 7: Heat transfer. 2020.
- [11] Lars Davidson et al. Fluid mechanics, turbulent flow and turbulence modeling. *Chalmers University of Technology, Goteborg, Sweden (Nov 2011)*, 2015.
- [12] Carlos Demoraes et al. Transonic flight test of a rocket-powered model to determine propulsive jet influence on the configuration drag. Technical report, 1954.
- [13] Gerald W Englert, Donald J Vargo, and Robert W Cubbison. Effect of jet-nozzle-expansion ratio on drag. 1954.
- [14] IdealSimulations. Idealsimulations - custom simulation solutions for the industry.
- [15] M ISO. Standard atmosphere, iso 2533: 1975, 1975.
- [16] Manish Mehta, Anita Sengupta, Nilton O Renno, JW Norman, and DS Gulick. Underexpanded supersonic plume surface interactions: Applications for spacecraft landings on planetary bodies. In *58th JANNAF Interagency Propulsion Committee Conference/32nd Subcommittee Exhaust Plume and Signatures*, 2011.
- [17] Florian R Menter. Best practice: scale-resolving simulations in ansys cfd. *ANSYS Germany GmbH*, 2012.
- [18] ADOS Moraes, P Lage, G Cunha, and LFLR da Silva. Analysis of the non-orthogonality correction of finite volume discretization on unstructured meshes. 2013.
- [19] Shia-Hui Peng and Lars Davidson. On a subgrid-scale heat flux model for large eddy simulation of turbulent thermal flow. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 2002.

- [20] Ugo Piomelli. Large-eddy simulation: achievements and challenges. *Progress in aerospace sciences*, 1999.
- [21] Renzo Piva. Dispense – capitolo 2: Dinamica dei corpi deformabili. conservazione della quantità di moto. *Lecture slides*, 2020.
- [22] Renzo Piva. Dispense – capitolo 3: Termodinamica dei continui. conservazione dell’energia. produzione di entropia. *Lecture slides*, 2020.
- [23] Renzo Piva. Fluidodinamica – cinematica dei corpi deformabili. conservazione della massa. *Lecture slides*, 2020.
- [24] Stephen B Pope. Turbulent flows. *Measurement Science and Technology*, 2001.
- [25] Sheryll Goecke Powers. Influence of base modifications on in-flight base drag in the presence of jet exhaust for mach numbers from 0.7 to 1.5. Technical report, 1988.
- [26] RocketReviews.com. Rocketreviews.com, 2026. Accessed: 2026-03-07.
- [27] Hermann Schlichting. *Boundary layer theory*, Mc Graw Hill. 1979.
- [28] Hermann Schlichting and Klaus Gersten. *Boundary-layer theory*. springer, 2016.
- [29] SimScale GmbH. Simscale: Simulation software | engineering ai in the cloud.
- [30] George P Sutton, Oscar Biblarz, and James H Morehart. *Rocket propulsion elements*. John Wiley & Sons, 2026.
- [31] Henk Kaarle Versteeg. *An introduction to computational fluid dynamics the finite volume method*, 2/E. Pearson Education India, 2007.
- [32] Anouk Zandbergen, Tycho van Noorden, and Alexander Heinlein. Improving pseudo-time stepping convergence for cfd simulations with neural networks. *Computers & Mathematics with Applications*, 2025.