

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

Dipartimento di Fisica e Astronomia “Augusto Righi”
Corso di Laurea in Fisica

Termodinamica Relativistica

Relatore:
Prof. Alexandr Kamenchtchik

Presentata da:
Gabriele Introna

Anno Accademico 2025/2026

*“Entropy and optimism: the twin forces that
make the world go around.”*

— Neil Gaiman, *The Sandman: The Wake*

Sommario

La presente tesi indaga il tentativo di riformulare la termodinamica all'interno della relatività. Il primo capitolo è dedicato alla relatività ristretta: attraverso un'introduzione storica, viene messa in luce l'ambiguità che ancora oggi aleggia sul tema delle trasformazioni di Lorentz delle quantità termodinamiche. Vengono analizzate e confrontate le principali proposte (Planck-Einstein, Ott-Arzeliès, Landsberg), esponendone vantaggi e criticità, facendo infine cenno alla visione moderna. Nel secondo capitolo la trattazione viene estesa alla relatività generale. Le leggi della termodinamica vengono riformulate in presenza di gravità, con particolare attenzione ai concetti fondamentali e al principio zero, che nella sua versione relativistica assume la forma della legge di Tolman-Ehrenfest. Un breve paragrafo finale è dedicato ad alcune applicazioni astrofisiche e cosmologiche di questa legge.

Indice

1	La termodinamica nella relatività ristretta	3
1.1	Introduzione	3
1.2	La storia della termodinamica relativistica	3
1.3	Relatività e termodinamica: postulati e somiglianze	6
1.3.1	Le misure di temperatura	8
1.4	La proposta di Planck-Einstein	8
1.4.1	Ciclo di Carnot relativistico di PE	13
1.4.2	Il formalismo quadrivettoriale di PE	14
1.4.3	Motivazioni e supporto a PE	16
1.5	La proposta di Ott-Arzélies	19
1.5.1	Ciclo di Carnot relativistico di OA	21
1.5.2	Il formalismo quadrivettoriale di OA	22
1.5.3	Motivazioni e supporto a OA	22
1.6	La proposta di Landsberg	24
1.7	La visione moderna	25
1.7.1	La temperatura direzionale	27
1.7.2	Il formalismo di Israel-van Kampen-Nakamura	29
2	La termodinamica nella relatività generale	32
2.1	Introduzione	32
2.2	Cenni di meccanica relativistica	32
2.2.1	Le equazioni della meccanica relativistica	34
2.2.2	La pseudo-densità tensoriale di energia-impulso gravitazionale	37
2.2.3	La metrica di un sistema a simmetria sferica	38
2.3	I due principi nella relatività generale	39
2.3.1	Il primo principio	39
2.3.2	Il secondo principio	41
2.4	Il principio zero: La legge di Tolman-Ehrenfest	42
2.4.1	La legge di Tolman-Ehrenfest	43
2.4.2	La definizione di temperatura	45
2.5	Applicazioni	50

2.5.1	La legge di Klein	50
2.5.2	Applicazioni astrofisiche	50

Capitolo 1

La termodinamica nella relatività ristretta

1.1 Introduzione

Questo capitolo intende offrire inizialmente una presentazione storica del tema e successivamente alcuni confronti tra la termodinamica e la relatività, esponendo i principi base, le analogie e le differenze tra le due teorie. Dopo aver esaminato i modi possibili in cui effettuare una misura di temperatura a riposo, sarà messo in discussione lo stesso concetto di misura quando effettuata in moto. Quest'analisi verrà ripresa nel paragrafo conclusivo del capitolo. A seguire saranno affrontate le tre visioni storiche principali, argomentandone vantaggi e criticità. Per concludere si affermerà che la definizione di temperatura è ben posta solo per il sistema a riposo, trovando inoltre un formalismo che metterà in evidenza le discrepanze tra le tre derivazioni precedentemente analizzate e una giustificazione in tali termini.

1.2 La storia della termodinamica relativistica

Nel corso dello sviluppo della fisica moderna, poche teorie hanno avuto la solidità sperimentale della termodinamica.

La rivoluzione industriale nel XVIII secolo è stata possibile solo grazie all'introduzione delle macchine: il miglioramento e ottimizzazione delle stesse ha stimolato la nascita della termodinamica, e ciò che è stato applicato e osservato in maniera empirica è stato poi teorizzato dagli scienziati. Questa continua comunicazione tra i mondi teorico e sperimentale è forse l'aspetto più importante della termodinamica: non a caso il "Primo Principio" viene formulato grazie agli sforzi di James P. Joule, che attraverso numerosi esperimenti con il calorimetro a mulinello verifica l'equivalenza tra energia meccanica e calore.

Le quantità misurate dagli strumenti devono avere innanzitutto una definizione operativa, e successivamente si può dare un'interpretazione fisica: la temperatura è la grandezza misurata con il termometro. Questo strumento ha origini antichissime (il primo termoscopio, greco, risale al -III secolo, e anche Galilei ne costruì uno) e il concetto stesso di temperatura non è nato di certo con la rivoluzione industriale. La parola “temperatura” in latino significa “miscela”, “giusta proporzione”: si può temperare sia uno strumento musicale che una spada. Quest'origine etimologica è importante in quanto la nostra immagine intuitiva di temperatura è legata indissolubilmente al concetto di scambio, di flusso tra cose: nel caso dei termometri il “flusso” in questione è il calore. Questa concezione non è fisicamente appropriata (la teoria del “calorico” avanzata da Joule venne già respinta da Lavoisier), ma nasconde l'importante ambiguità che la temperatura porta con sé, cioè quella di grandezza che misura un certo equilibrio tra proporzioni ([Car19]). La possibilità stessa della misura è assiomatizzata dal “Principio Zero”, stabilito da Fowler nel 1931, che stabilisce che l'equilibrio termodinamico è una relazione di equivalenza. Attraverso il concetto di ciclo di Carnot, la temperatura empirica diventa indipendente dallo strumento di misura, e viene stabilita una temperatura assoluta.

La termodinamica è una teoria macroscopica: è valida quando viene applicata a sistemi con un numero di particelle dell'ordine del numero di Avogadro $N_A = 10^{23}$. Il modo in cui emerge da una teoria fondamentale, quella della meccanica, in maniera statistica è del tutto naturale: tra gli altri, Maxwell, Gibbs e Boltzmann, verso la fine del XX secolo hanno proseguito le scoperte della teoria cinetica dei gas, e formulato la meccanica statistica. Attraverso quest'ultima è possibile dare una definizione statistica alle grandezze macroscopiche, in particolare, attraverso l'equazione di Boltzmann, all'entropia, il cui limite inferiore è stabilito termodinamicamente dal “Secondo Principio”. Si ha quindi un'altra nozione di temperatura in ambito statistico.

Si può pensare alla temperatura anche in maniera slegata dai 3 concetti precedenti (operativo, assoluto e statistico): la radiazione di corpo nero, in particolare la legge di Wien, permette di associare la temperatura di un corpo nero (emittente e assorbitore perfetto) alla frequenza di emissione massima del suo spettro. Queste 4 definizioni di temperatura devono essere equivalenti, in quanto riferite allo stesso oggetto fisico.

Nel 1905 Einstein, con il celebre “Zur Elektrodynamik bewegter Körper” ([Ein05]) ha posto le basi per la relatività ristretta, una teoria che, nella concezione comune, il fisico tedesco ha sviluppato quasi autonomamente e senza intoppi. Infatti, superato l'apparente paradosso della relatività della simultaneità, l'adattamento di cinematica, dinamica e elettromagnetismo nell'ambito dello spazio-tempo quadri dimensionale è così semplice ed elegante da convincersi della validità dell'estensione della teoria a in tutti gli ambiti. Einstein era convinto che, vista la semplicità delle sue premesse, la termodinamica classica nell'ambito della sua applicabilità non verrà mai confutata. È naturale allora farsi una domanda: qual è la temperatura di un corpo in movimento?. Una risposta a questo quesito ancora non c'è. La storia della termodinamica relativistica infatti è ricca di controversie, e quale sia la sua formulazione più corretta è ancora oggetto di studio.

Tra i primi sostenitori della teoria della relatività vi è Max Planck, che conia il termine “teoria relativa”. Il fisico tedesco nel 1906 ha incaricato un suo studente dottorando, Kurt von Mosengeil, di studiare le proprietà di una cavità piena di radiazione in moto. Il talentuoso giovane è morto tragicamente in un incidente in montagna nello stesso anno, ma nel suo lavoro incompiuto è riuscito comunque a fornire una definizione naturale di temperatura ([Mos07]):

Secondo la definizione di temperatura, le temperature assolute di due corpi sono proporzionali alle quantità di calore perse o acquisite dai corpi quando, in un ciclo di Carnot reversibile, uno funge da sorgente di calore e l'altro da pozzo di calore. Ci atteniamo a questa definizione di temperatura anche quando abbiamo a che fare con corpi in movimento

Planck, con l'aiuto di Wilhelm Wiel, si è occupato di terminare i suoi sforzi pubblicando la sua tesi negli *Annalen der Physik*, e a partire dai risultati del suo studente ha ricavato le trasformazioni di Lorentz delle grandezze termodinamiche l'anno successivo. Lo stesso Einstein, nel 1908 ha ottenuto le stesse formule adoperando un ciclo di Carnot relativistico e imponendo la covarianza della prima legge: questa derivazione risultava più solida, perché applicabile a un sistema termodinamico qualsiasi, ma nascondeva uno snodo teorico che in futuro sarebbe stato oggetto di controversie. Infatti, in uno dei passaggi del ciclo di Carnot, è presente una forza (“forza di Planck”) necessaria a mantenere il sistema, che cede calore a uno dei due bagni termici (in moto), alla sua stessa velocità. Von Mosengeil, Planck e Einstein hanno concluso che l'entropia sia un'invariante di Lorentz, e che sia temperatura che calore diminuiscano in un corpo in moto (cioè sono massimi se misurati in quiete).

Durante gli anni '30 e '40 i maggiori libri sulla relatività sono concordi con i risultati sopra citati, tra gli altri sono riportati nei testi di Tolman, Moller, Pauli e von Laue. Quest'ultimo, quando negli anni '50 si riaccese l'interesse collettivo verso la relatività, ha pubblicato una nuova edizione del suo volume. Durante la revisione ha tenuto una lunga corrispondenza con Einstein, che nel 1952 ha commentato sorprendentemente il capitolo sulla termodinamica con una lettera di disapprovazione verso le trasformazioni ricavate da von Laue, proponendo un'alternativa: l'entropia rimane un'invariante di Lorentz, ma temperatura (e calore) aumentano in un corpo in moto. Analizzando il contenuto della lettera, si può notare come il risultato derivi dall'assunzione che la forza di Planck non compia lavoro, ovvero che non esista. Quando Von Laue gli fa notare quest'apparente svista, Einstein inizialmente ha respinto l'osservazione e confermato di essere nel giusto, ma un anno dopo ha elaborato forse l'ultima sua grande intuizione:

In effetti non c'è nessun metodo stringente per determinare se una concezione sia semplicemente ‘corretta’ e l'altra ‘falsa’. Si può solamente cercare di determinare la transizione nel modo più naturale possibile.

Queste lettere non furono rese pubbliche per molti anni, ma la storia dello sviluppo della disciplina sottolinea la loro lungimiranza.

Nel 1963 viene pubblicato il lavoro postumo di Heinrich Ott sulla termodinamica relativistica: rimosso il contributo della forza di Planck, ritenuta fisicamente ambigua, si giunge ai medesimi risultati che Einstein suggerì a von Laue. Arzeliès, contemporaneamente e indipendentemente, ha proposto una visione analoga, sostenuta da altri fisici dell'epoca. Landsberg invece sostiene che la temperatura (così come il calore) sia un invariante relativistico: nel 1966 obietta che il concetto di equilibrio termodinamico per i corpi in moto sia mal posto, e che quindi la temperatura si possa misurare solo nel sistema di riferimento proprio del corpo.

Fino ad oggi non si è trovata ancora una risposta univoca: gli argomenti, presi a sé stanti, sono consistenti, e non pare esistere un metodo assoluto per determinare quale siano le trasformazioni adatte. Infatti, per ogni tentativo di relativizzazione della termodinamica, è necessario aggiungere qualche postulato alla struttura della termodinamica classica. ([Bad23])

1.3 Relatività e termodinamica: postulati e somiglianze

- **Principio zero della termodinamica:**

Se due sistemi termodinamici sono in equilibrio termico con un terzo sistema (ovvero, sono separati da una parete permeabile al calore, ma non cambiano nel tempo), allora lo sono anche tra di loro.

Come precedentemente argomentato, questa nozione permette di stabilire che l'equilibrio termico è una relazione di equivalenza, e giustifica l'utilizzo dei termometri come misuratori della temperatura. Maxwell ne diede una prima definizione 40 anni prima di Fowler: *“Tutto il calore è dello stesso tipo”*.

- **Primo principio della termodinamica:**

$$dE = \delta Q - \delta W. \quad (1.1)$$

Non solo comporta il principio di conservazione dell'energia di un sistema isolato, ma anche la possibilità di distinguere tra due modi distinti di trasferire l'energia: il calore e il lavoro.

- **Secondo principio della termodinamica:**

$$dS = \left(\frac{\delta Q}{T} \right)_{rev} \geq \frac{\delta Q}{T}. \quad (1.2)$$

Per tutti i processi reversibili $\frac{\delta Q}{T}$ ha lo stesso valore massimo; inoltre, per ogni processo, l'entropia dell'universo aumenta sempre: $\Delta S_U \geq 0$.

- **Terzo principio della termodinamica:**

$$\Delta S_{T=0\text{K}} = 0 \quad (1.3)$$

Valida per un sistema composto da sostanze cristalline pure agli stati iniziale e finale. Questa legge ha un'interpretazione più naturale nell'ambito della meccanica statistica (a 0K corrisponde uno stato completamente ordinato).

- **Primo postulato della relatività ristretta:**

È impossibile misurare il moto transitorio non accelerato di un sistema nello spazio libero o attraverso qualsiasi mezzo che lo pervade (etere)

La conseguenza di questo postulato è che le leggi generali della fisica per descrivere dei fenomeni nello spazio libero debbano essere indipendenti dalla velocità del sistema di coordinate usato: *Le leggi della fisica sono le stesse per ciascun sistema di riferimento inerziale*

- **Secondo postulato della relatività ristretta:**

La velocità della luce nello spazio vuoto vuoto è la stessa per tutti gli osservatori

Da questo principio viene sviluppato il formalismo delle trasformazioni di Lorentz.

La teoria di Einstein ha aiutato a rinforzare il concetto di conservazione e localizzazione dell'energia attraverso la nota relazione massa-energia:

$$E = mc^2. \quad (1.4)$$

Questo valore può essere interpretato come il “punto zero” dell'energia, che non è contemplato dalla termodinamica classica (nel cui contesto si parla solo di variazioni della stessa), assunto da un corpo quando $m = m_0$, cioè la sua massa a riposo. Un “punto zero” per l'entropia è invece già fornito dalla terza legge: $S_{T=0\text{K}} = 0$ K è la scelta più conveniente.

È interessante analizzare i caratteri fenomenologici di ambo le teorie, paragonando i postulati che ne formano le fondamenta. Il primo postulato della relatività può essere interpretato come una generalizzazione dell'impossibilità di misurare il moto della Terra attraverso l'etere; parallelamente il secondo principio della termodinamica stabilisce l'impossibilità di costruire macchine a moto perpetuo del primo e secondo tipo. D'altro canto, il secondo postulato della relatività, formulato come risultato di misure della velocità della luce da sorgenti in moto, ha qualcosa in comune con la formulazione della prima legge della termodinamica come risultato di misure dell'equivalente meccanico del calore.

La relatività (ristretta) è riassumibile dalla frase: *“tutte le leggi naturali devono essere vincolate in maniera tale da essere covarianti rispetto alle trasformazioni di Lorentz”* (Einstein 1940, [Gio23]). Per questo motivo, si parla di essa come una “teoria di principi”: non dice direttamente nulla sulle proprietà di uno specifico sistema, ma ne

pone vincoli sulle forme, così come sulle leggi naturali. Inizialmente, non viene imposto nulla sulle leggi strutturali della natura, eccezion fatta per la loro Lorentz-covarianza: è solo stabilita la dipendenza formale su come le coordinate debbano partecipare alle leggi. L'introduzione delle regole che governino la conversione delle coordinate avviene solo una volta che si interpretano le stesse come righe e orologi: a quel punto si possono fare delle previsioni verificabili. Da un punto di vista formale, le righe e gli orologi sono essi stessi entità fisiche, che debbono quindi sottostare alle stesse leggi strutturali (e che quindi richiedono a loro volta delle coordinate per essere espresse): viene dato loro un ruolo privilegiato come oggetti indipendenti, legati alle coordinate della teoria. Questo è “*dal punto di vista della nostra esperienza*”, dice Einstein, “*meglio giustificato rispetto a ogni particolare legge strutturale, come ad esempio le leggi di Maxwell*”. (Einstein a Swann, 24 gennaio 1942, [Gio23]). Il fatto che la cinematica relativistica sia meglio giustificata rispetto a ogni altra legge di natura è fondamentale per capire le analogie che Einstein stesso fece tra termodinamica e relatività, affermando di essere stato guidato dalla prima nella ricerca di principi primi per porre vincoli alla fisica, evitando quindi un approccio “costruttivo”, ma fondamentale ([Gio23]). Per concludere:

In entrambe le teorie, si tratta di derivare deduttivamente le conseguenze da un principio formale generale (in termodinamica il postulato dell'impossibilità di un moto perpetuo), dove il principio formale si basa su fondamenti empirici

(Einstein ad Amiet, 17 dicembre 1947, [Gio23]).

1.3.1 Le misure di temperatura

Nella termodinamica classica ci sono 4 principali procedure che stabiliscono il concetto di temperatura. Dal punto di vista operativo esse definiscono la quantità stessa e sono state sviluppate, come visto nel cap. 1.1, in maniera tale da avere una concordanza le une rispetto alle altre. In ordine, sono: Termometro (temperatura empirica), Ciclo di Carnot (temperatura assoluta), Distribuzione statistica (temperatura statistica), Radiazione da corpo nero (temperatura radiativa). ([Chu23]) Al fine di enunciare le leggi della termodinamica per un osservatore in moto, è fondamentale capire come l'osservatore stesso possa eseguire misure sul sistema in studio. Nei prossimi paragrafi, si osserverà non solo che i vari approcci alla formulazione della termodinamica relativistica si basano sulle 4 procedure (“relativizzate”) diverse, ma anche su differenti interpretazioni della stessa.

1.4 La proposta di Planck-Einstein

Verrà fatto uso delle seguenti notazioni: v è la velocità del sistema, c è la velocità della luce nel vuoto, $\beta = \frac{v}{c}$, $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$, K è il sistema di riferimento del laboratorio, K^0 il sistema di riferimento solidale al corpo. In questo paragrafo verranno esplorate le

formulazioni di Planck e Einstein.

L'entropia di un sistema è un invariante di Lorentz: per mostrare ciò si può scegliere una giustificazione basata sulla termodinamica (Planck) e una sulla meccanica statistica (Einstein). Per la prima, si pensi a un corpo portato da uno stato di riposo nel sistema K a un altro stato qualsiasi attraverso un processo adiabatico reversibile (abbastanza lento) in maniera tale che a seguito di questo, sia a riposo in un sistema K^0 . Durante il processo adiabatico l'entropia rimane costante: per K , $S_i = S_f$. Analogamente, il processo è reversibile anche per il sistema inerziale K^0 , perciò $S_i^0 = S_f^0$. Se per assurdo i valori, misurati all'inizio e alla fine, non fossero uguali per entrambi i sistemi, allora ad esempio si supponga $S_i^0 > S_i$. Ma allora, alla fine $S_f > S_f^0$ (è stato ipotizzato che l'entropia sia minima nel sistema proprio). Questo porta alla contraddizione che $S_f > S_f$, perciò devono essere uguali, ovvero in generale

$$S = S_0. \quad (1.5)$$

Se invece si vuole seguire l'approccio di Einstein, ci si basa sulla descrizione probabilistica dell'entropia: essa equivale al conteggio dei microstati di una particolare configurazione macroscopica, che deve essere equivalente in tutti i sistemi di riferimento inerziali.

Planck calcola l'entropia di una cavità di radiazione in moto nel sistema K a velocità costante. Basandosi sugli studi di von Monsengeil, si ha che $S = \frac{4aT^3V}{3}\gamma^4$ ([Mos07]). Per (1.5), questo deve eguagliarsi a $\frac{4aT_0^3V_0}{3}$. Essendo $V = V_0/\gamma$, si trova

$$T = \frac{T_0}{\gamma}. \quad (1.6)$$

Questa è la trasformazione di Planck-Einstein (PE) della temperatura ([Pla07]). Analogamente, essendo $dQ = TdS$ il calore scambiato reversibilmente, allora

$$Q = \frac{Q_0}{\gamma}, \quad (1.7)$$

che è la trasformazione di PE del calore.

Einstein adotta invece un approccio basato su un ciclo di Carnot relativistico, giungendo ai medesimi risultati (1.6), (1.7). Alla fine del seguente paragrafo sarà esposta una trattazione di tale ciclo come applicazione, ma prima è necessario ricavare le trasformazioni delle grandezze meccaniche in gioco.

Sulla base delle considerazioni appena fatte, nei decenni successivi alla formulazione della relatività ristretta è stato sviluppato un formalismo coerente con le trasformazioni di Lorentz di tutta la termodinamica. La relativizzazione della termodinamica consiste nel trattamento dei sistemi termodinamici in moto rispetto all'osservatore.

Si consideri un fluido in un volume variabile in uno stato di moto arbitrario. La quantità di moto del corpo a velocità $\mathbf{u}$ è

$$\mathbf{G} = m\mathbf{u} = \frac{E}{c^2}\mathbf{u}, \quad (1.8)$$

la cui densità è

$$\mathbf{g} = \frac{\mathbf{e}}{c^2}, \quad (1.9)$$

ove $\mathbf{e} = \frac{E}{V}\mathbf{u}$, il flusso di densità di energia. Prima di procedere con l'analisi delle variabili di stato, è necessario riprendere brevemente alcuni concetti di dinamica dei continui relativistica. Sia t_{ij} la matrice che descrive lo stress del sistema. Si consideri il corpo a riposo in K^0 e in moto in K lungo l'asse x , parallelo all'asse x^0 ("osservatori standard"). Le trasformazioni delle componenti della forza $\mathbf{F}$ che agisce su un cubetto infinitesimale del corpo e delle sue superfici A_i sono:

$$F_x = F_x^0, \quad F_y = F_y^0(1 - \beta^2)^{1/2}, \quad F_z = F_z^0(1 - \beta^2)^{1/2}, \quad (1.10)$$

$$A_x = A_x^0, \quad A_y = A_y^0(1 - \beta^2)^{1/2}, \quad A_z = A_z^0(1 - \beta^2)^{1/2}. \quad (1.11)$$

La matrice dello stress, per cui per definizione $t_{ij} = \frac{F_i}{A_j}$, ha quindi le componenti diagonali invarianti mentre le altre si comportano in generale in maniera non simmetrica in K , nonostante lo siano in K^0 (cioè in generale $t_{ij} \neq t_{ji}$ ma $t_{ij}^0 = t_{ji}^0$):

$$t_{ij} = \begin{pmatrix} t_{xx}^0 & \gamma t_{xy}^0 & \gamma t_{xz}^0 \\ t_{yx}^0 & t_{yy}^0 & t_{yz}^0 \\ \gamma t_{zx}^0 & t_{zy}^0 & t_{zz}^0 \end{pmatrix}. \quad (1.12)$$

In K , la densità di quantità di moto del corpo è composta da due contributi: il moto fisico del volume, e il flusso di densità dell'energia proveniente dal lavoro delle forze di stress. Quindi, essendo ρ la densità, si ha:

$$\mathbf{g} = (\rho u + \frac{t_{xx}u}{c^2}, \frac{t_{xy}u}{c^2}, \frac{t_{xz}u}{c^2}).$$

Allora, essendo V il volume,

$$\mathbf{G} = (\frac{E + t_{xx}V}{c^2}u, \frac{t_{xy}V}{c^2}u, \frac{t_{xz}V}{c^2}u). \quad (1.13)$$

Ora, poiché $F_i = \frac{d}{dt}G_i$, si ha da (1.13) che

$$F_x = \frac{dE}{dt} \frac{u}{c^2} + \frac{E}{c^2} \frac{du}{dt} + t_{xx} \frac{u}{c^2} \frac{dV}{dt} + \frac{t_{xx}V}{c^2} \frac{du}{dt},$$

ove è stato imposto il fatto che $t_{xx} = t_{xx}^0$ è costante.

La variazione dell'energia del corpo è dovuta a un contributo della forza F_x che produce l'accelerazione, e dal tasso al quale il lavoro è compiuto dalle forze di stress che agiscono sul volume decrescente (per via della contrazione). Quindi si ha:

$$\frac{dE}{dt} = F_x u - t_{xx} \frac{dV}{dt} = \frac{dE}{dt} \frac{u^2}{c^2} + \frac{Eu}{c^2} \frac{du}{dt} + t_{xx} \frac{u^2}{c^2} \frac{dV}{dt} + \frac{t_{xx}Vu}{c^2} \frac{du}{dt} - t_{xx} \frac{dV}{dt}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow (1 - \beta^2) \frac{d}{dt}(E + t_{xx}V) &= (E + t_{xx}V) \frac{u}{c^2} \frac{du}{dt} = (E + t_{xx}V) \frac{1}{2} \frac{d(\beta^2)}{dt} \\ \Rightarrow d(\ln(E + t_{xx}V)) &= \frac{1}{2(1 - \beta^2)} d(\beta^2)\end{aligned}$$

E, integrando da 0 a u , si ha

$$E + t_{xx}V = \frac{E^0 + t_{xx}^0 V^0}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \quad (1.14)$$

Nel nostro sistema termodinamico, orientato con l'asse x , lo stress (o meglio, le sue componenti diagonali t_{ii}) si riduce alla pressione idrostatica, assunta uguale a p su tutte le superfici. Da (1.12) si ha che la pressione è un'invariante di Lorentz:

$$p = p^0. \quad (1.15)$$

Si noti come allora, per un sistema termodinamico, a essere covariante non è più l'energia, ma l'entalpia $H = E + pV$ ([Tol34]):

$$H = \gamma H^0. \quad (1.16)$$

Sostituendo $t_{xx} = p$, si ha da (1.14) l'equazione della trasformazione dell'energia interna del sistema termodinamico:

$$E = \gamma(E^0 + \beta^2 p^0 V^0). \quad (1.17)$$

E la trasformazione della quantità di moto:

$$\mathbf{G} = \gamma(E^0 + p^0 V^0) \frac{\mathbf{u}}{c^2}. \quad (1.18)$$

Si noti anche che vale:

$$E^0 = \gamma(E - \mathbf{v} \cdot \mathbf{G}). \quad (1.19)$$

Ora, si consideri un fluido contenuto in un cilindro con l'asse lungo l'asse x , che attraversi una trasformazione reversibile per cui $p^0 \rightarrow p^0 + \Delta p^0$ e $V^0 \rightarrow V^0 + \Delta V^0$ ([Moe67]). Siano a e b le due facce del cilindro, di superfici A^0 , per cui $x_a^0 = 0$ e $x_b^0 = l^0 \rightarrow l^0 + \Delta l^0$, essendo b una parete mobile. In K , il cilindro si muove con velocità $\mathbf{u} = (v, 0, 0)$, mentre è fermo in K^0 . Se la trasformazione dura $t^0 = \tau^0$, il moto di a è descritto da un'equazione:

$$x_a^0 = \psi(t^0) = 0, \quad u_a^0 = \psi'(t^0) = 0, \quad (1.20)$$

mentre quello di b da

$$\begin{aligned}x_b^0 = \phi(t^0) &= \begin{cases} l^0 & t^0 \leq 0 \\ \phi(t^0) & 0 < t^0 < \tau^0 \\ l^0 + \Delta l^0 & t^0 \geq \tau^0 \end{cases} \\ u_b^0 = \phi'(t^0) &= \begin{cases} 0 & t^0 \leq 0 \\ \phi'(t^0) & 0 < t^0 < \tau^0, \\ 0 & t^0 \geq \tau^0 \end{cases} \end{aligned} \quad (1.21)$$

che deve essere infinitesimale, cioè τ^0 deve essere molto largo, affinché il processo sia reversibile. Si assuma che un bagno termico comovante con il cilindro gli fornisca reversibilmente del calore Q^0 attraverso vari stati di equilibrio, per cui a ogni istante

$$p_a^0(t^0) = p_b^0(t^0) = f(t^0) = \begin{cases} p^0 & t^0 \leq 0 \\ p^0 + \Delta p^0 & t^0 \geq \tau^0 \end{cases}. \quad (1.22)$$

Il lavoro meccanico compiuto dall'ambiente sul fluido è

$$W^0 = -A^0 \int_0^{\tau^0} p_b^0(t^0) u_b^0 dt^0. \quad (1.23)$$

Ora, in K valgono come sempre le seguenti:

$$dt_a = \gamma dt_a^0, \quad dt_b = \gamma(dt_b^0 + \frac{v}{c^2} \phi(t_b^0)' dt_b^0). \quad (1.24)$$

e, per l'addizione delle velocità

$$u_a = v, \quad u_b = \frac{v + \phi(t_b^0)'}{1 + \frac{v\phi(t_b^0)'}{c^2}}. \quad (1.25)$$

Inoltre la superficie $A = A^0$, essendo ortogonale alla direzione del moto. Imponendo l'invarianza scalare della pressione, si avranno

$$\begin{aligned} p_a(t_a) &= p_a^0(t_a^0) = f(t_a^0) \\ p_b(t_b) &= p_b^0(t_b^0) = f(t_b^0). \end{aligned} \quad (1.26)$$

Ma, per la relatività della simultaneità, se $t_a^0 = t_b^0 \Rightarrow t_a \neq t_b$, quindi in generale $p_a(t) \neq p_b(t)$. Da (1.24), ai tempi $t_a = t_b = 0$, corrispondono $t_a^0 = 0$ e $t_b^0 = -\frac{vl^0}{c^2}$. Mentre ai tempi $t_a = t_b = \tau = \gamma(\tau^0 + \frac{v}{c^2}(l^0 + \Delta l^0))$, corrispondono $t_a^0 = \tau_a^0 = \tau^0 + \frac{v}{c^2}(l^0 + \Delta l^0) > \tau^0$ e $t_b^0 = \tau^0$. Segue che

$$p_a(t) = p_b(t) = \begin{cases} p^0 & t \leq 0 \\ p^0 + \Delta p^0 & t \geq \tau \end{cases}. \quad (1.27)$$

Il lavoro compiuto dal muro a sul fluido durante l'intervallo $[0, \tau]$, da (1.20), (1.21), (1.24), (1.27) è

$$\begin{aligned} W_a &= - \int_0^\tau A p_a(t_a) u_a dt_a = -\gamma A^0 v \int_0^{\tau_a^0} f(t^0) dt^0 \\ W_a &= -\gamma A^0 v \int_0^{\tau^0} f(t^0) dt^0 - \gamma \beta^2 (p^0 + \Delta p^0) (V^0 + \Delta V^0). \end{aligned} \quad (1.28)$$

Analogamente, quello compiuto su b è

$$W_b = \int_0^\tau A p_b(t_b) u_b dt_b = \gamma A^0 \int_{-\frac{v t^0}{c^2}}^{\tau^0} f(t^0) (v + \phi(t^0)') dt^0,$$

$$W_b = \gamma A^0 v \int_0^{\tau^0} f(t^0) dt^0 + \gamma \beta^2 p^0 V^0 + \gamma \Delta A^0. \quad (1.29)$$

Manca infine il lavoro causato dalla perdita di quantità di moto $\Delta \mathbf{G}_p$ dovuta allo scambio di calore, ovvero il lavoro di Planck. Usando (1.18):

$$W_P = \Delta \mathbf{G}_p \cdot \mathbf{v} = \gamma \frac{\Delta Q^0}{c^2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v},$$

$$W_P = \gamma \beta^2 (\Delta E^0 + \Delta W^0). \quad (1.30)$$

Infine, definendo $\Delta(p^0 v^0) = (p^0 + \Delta p^0)(V^0 + \Delta V^0) - p^0 V^0$, e mettendo insieme (1.28), (1.29) (1.30) si ha il lavoro totale:

$$W = -\gamma (\beta^2 \Delta(p^0 V^0) + W^0 - \beta^2 (\Delta E^0 + \Delta W^0)). \quad (1.31)$$

Che non dipende dalla forma della pressione $f(t)$ negli stadi intermedi, la quale si semplifica per W_a e W_b . Pertanto, lo scambio di calore in K , da (1.17) e (1.31) è

$$Q = \Delta E + W = \frac{\Delta E^0 + W^0}{\gamma} = \frac{Q^0}{\gamma}, \quad (1.32)$$

come secondo l'equazione di Planck-Einstein. Per i ragionamenti fatti sull'entropia, risulterà anche immediatamente $T = \frac{T^0}{\gamma}$.

Imponendo la covarianza della prima legge della termodinamica è stata trovata la legge di PE per la trasformazione del calore, mentre imponendo quella della seconda si è trovata la trasformazione della temperatura.

1.4.1 Ciclo di Carnot relativistico di PE

Sia M il sistema ausiliario, mantenuto a pressione costante p , e U_0 e U due serbatoi di calore in moto relativo a velocità v ([Tol34]). Il processo è diviso in 4 fasi:

1. M è in quiete con U_0 e, assorbendone una quantità di calore Q_0 alla temperatura T_0 passa dallo stato 1 allo stato 2. Per il primo principio, $Q_0 = E_2 - E_1 + W_1$, ove E è l'energia interna, $W_1 = p(V_2 - V_1)$ è il lavoro compiuto dal sistema.
2. Si accelera adiabaticamente M finché non raggiunge la velocità v e si trova in quiete con U giungendo allo stato 3: $W_2 = E_3 - E_2$.

3. M è in quiete con U e, cedendone una quantità di calore Q alla temperatura T passa dallo stato 3 allo stato 4. Per il primo principio, $Q = E_4 - E_3 + W_3$. Qua, W_3 ha, oltre alla componente relativa alla compressione del volume, una componente necessaria a mantenere M alla stessa velocità v di U : il sistema cede energia, e quindi perde massa. Dal fatto che $dW = pdV - \mathbf{u}d\mathbf{G}$, per (1.18), $W_3 = p(V_4 - V_3) - \beta^2(E_4 - E_3 + p(V_4 - V_3))$. Questo lavoro è lo snodo teorico che ha interrogato i fisici nei decenni successivi, come già accennato nel paragrafo 1.2.
4. Si decelera adiabaticamente M finché non ritorna in quiete con U_0 giungendo allo stato 5: $W_4 = E_5 - E_4$.

Si ha quindi, essendo il ciclo di Carnot reversibile, $E_5 = E_1$ e quindi $Q_0 + Q = W_1 + W_2 + W_3 + W_4$. Inoltre, $W_2 = -W_4$ (variazione di energia cinetica), e, da (1.14), $E_4 + pV_4 = \gamma(E_1 + pV_1)$, $E_3 + pV_3 = \gamma(E_2 + pV_2)$, quindi $Q = (E_1 - E_2 + p(V_1 - V_2))\sqrt{1 - \beta^2} = -Q^0\sqrt{1 - \beta^2}$. Cioè è coerente con (1.7). Ovviamente poi, essendo un ciclo reversibile, $\frac{Q}{T} + \frac{Q^0}{T^0} = 0$, da cui (1.6).

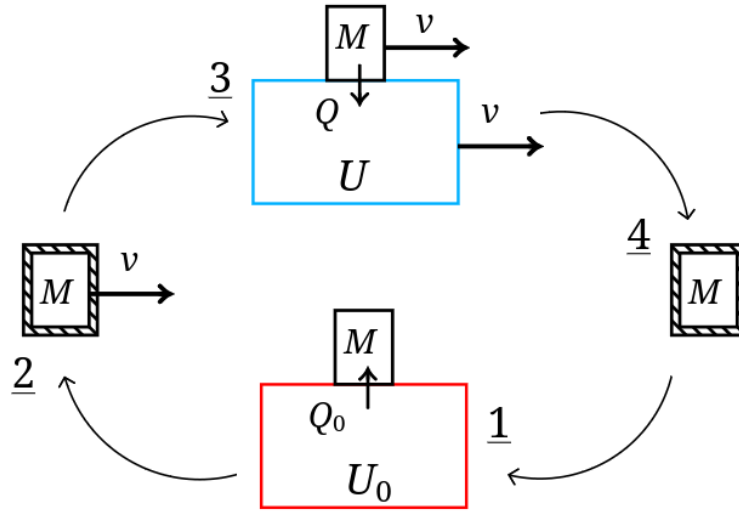


Figura 1.1: Ciclo di Carnot Relativistico in 4 fasi.

1.4.2 Il formalismo quadrivettoriale di PE

È possibile sviluppare, secondo questa formulazione, un formalismo 4-vettoriale della termodinamica. Sarà usata la segnatura $(+, -, -, -)$; gli indici greci vanno da 0 a 3 mentre quelli latini da 1 a 3, e vale la convenzione di Einstein sugli indici ripetuti, a meno che non sia esplicitamente espresso il contrario. Sarà imposto $c = 1$ quando verrà trattato tale formalismo.

La formulazione quadrivettoriale della prima legge, affinché la temperatura segua le trasformazioni di PE (1.6), è:

$$dS = \left(\frac{1}{T}\right)^\mu dP_\mu + p\left(\frac{1}{T}\right)^\mu dV_\mu, \quad (1.33)$$

ove P^μ è il quadrimpulso, la cui componente temporale è l'energia totale del sistema, e $V^\mu = v^\mu V_0$ è il quadrivettore associato al volume cinematico, con $v^\mu = (\gamma, \gamma \mathbf{v})$ la quadrirelatività. Allora, ([Ebe67])

$$\left(\frac{1}{T}\right)^\mu = v^\mu \frac{1}{T}. \quad (1.34)$$

In tal caso, la componente temporale di $\left(\frac{1}{T}\right)^\mu$ è evidentemente il reciproco della temperatura e si trasforma quindi come (1.6). Per ora, la formulazione della prima legge appare essere nient'altro che un adattamento formale, e resta ancora di difficile comprensione l'interpretazione delle componenti spaziali della neo-definita “quadritemperatura”. Più avanti, verrà contestualizzato questo risultato all'interno di un formalismo più generale che giustifichi le varie visioni.

Già dalla (1.33) si può vedere la natura scalare dell'entropia. Sarà ora espressa la seconda legge in forma quadridimensionale. Questo risultato per ora apparirà di poca importanza, ma verrà ripreso nel capitolo successivo per l'estensione della termodinamica alla relatività generale. Si consideri una piccola porzione di un fluido di volume δV , e sia ϕ la densità di entropia in quel punto: l'entropia totale del volumetto è $\phi\delta V$, quindi, per la seconda legge,

$$\frac{d}{dt}(\phi\delta V)\delta t \geq \frac{\delta Q}{T}, \quad (1.35)$$

associando la variazione del contenuto di entropia nel tempo δt con il calore δQ che fluisce attraverso l'elemento a temperatura T . Sviluppando la derivata temporale, si può scrivere:

$$\left(\frac{d\phi}{dt}\delta V + \phi\frac{d(\delta V)}{dt}\right)\delta t \geq \frac{\delta Q}{T}$$

che in termini delle derivate parziali, essendo $s = s(t, x, y, z)$, e $\delta V = \delta x\delta y\delta z$

$$\left(\frac{\partial\phi}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla\phi\right)\delta t\delta V + \left(\phi\nabla\mathbf{u}\right)\delta t\delta V \geq \frac{\delta Q}{T},$$

con $\mathbf{u}$ che è la velocità del fluido al punto considerato. Posso quindi scrivere nella forma semplificata:

$$\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\phi\frac{dx}{dt}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\phi\frac{dy}{dt}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\phi\frac{dz}{dt}\right) + \frac{\partial\phi}{\partial t}\right]\delta V\delta t \geq \frac{\delta Q}{T}. \quad (1.36)$$

Secondo la nostra segnatura, si ha, esprimendo le coordinate

$$x^0 = t, \quad x^1 = x, \quad x^2 = y, \quad x^3 = z, \quad (1.37)$$

che l'intervallo spazio-temporale invariante è

$$ds^2 = (dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2. \quad (1.38)$$

Ora, essendo $\frac{dx^\mu}{dx^0} = \frac{ds}{dx^0} \frac{dx^\mu}{ds} = \frac{1}{\gamma} \frac{dx^\mu}{ds}$, e $\delta V = \delta x \delta y \delta z$ si ha, da (1.36)

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(\phi \frac{1}{\gamma} \frac{dx^\mu}{ds} \right) \delta x^0 \delta x^1 \delta x^2 \delta x^3 \geq \frac{\delta Q}{T}. \quad (1.39)$$

Inoltre, in virtù dell'invarianza dell'entropia S (1.5), vale, per la contrazione del volume,

$$\phi = \frac{\phi_0}{\sqrt{1 - u^2}}. \quad (1.40)$$

Quindi si può scrivere $\phi \frac{1}{\gamma} = \phi_0$. Inoltre, sempre per (1.5), $\frac{\delta Q}{T} = \frac{\delta Q_0}{T_0}$. Introducendo il quadrivettore entropia

$$s^\mu = \phi_0 \frac{dx^\mu}{ds}, \quad (1.41)$$

si può scrivere la semplice equazione

$$\frac{\partial s^\mu}{\partial x^\mu} \delta x^0 \delta x^1 \delta x^2 \delta x^3 \geq \frac{\delta Q_0}{T_0}. \quad (1.42)$$

Ha la forma di un'equazione tensoriale di rango zero in coordinate rettangolari. La sua espressione in coordinate "curvilinee" permetterà nel prossimo capitolo di estendere la termodinamica alla relatività generale, ove la metrica non sarà più quella semplice di uno spazio-tempo piatto.

1.4.3 Motivazioni e supporto a PE

Mostreremo in questo paragrafo alcuni approcci alternativi che forniscono motivazioni a favore della proposta di Planck-Einstein.

Meccanica Statistica

La contestualizzazione della termodinamica come teoria emergente dalla meccanica statistica potrebbe indurre a pensare, al fine di poter relativizzare la prima, di costruire prima una meccanica statistica relativistica (analogamente, una teoria cinetica dei gas relativistica). In realtà, questo è un approccio solo apparentemente semplice, perché una sua completa formulazione risulta piuttosto complessa. Tuttavia, si possono usare alcuni

risultati noti per tentare di procedere in tal senso, cercando quelle quantità fisiche che costituiscano uno schema teorico che abbia autoconsistenza per le trasformazioni da un sistema di riferimento inerziale a un altro ([Pat66]).

Il numero di occupazione media n^0 per lo stato ϵ^0 di singola particella, nel sistema di riferimento proprio K^0 del sistema, è

$$n^0(\epsilon^0) = (\exp(\alpha^0 + \beta^0 \epsilon^0) + a)^{-1}, \quad (1.43)$$

ove $a = \pm 1$ a seconda della statistica delle particelle che compongono il sistema (Bose, Fermi). α^0 e β^0 sono determinati dai vincoli N^0 e E^0 fissati sul numero di particelle e sull'energia totale del sistema: in tal modo, l'entropia S^0 vale

$$\frac{S^0}{k} = \alpha^0 N^0 + \beta^0 E^0 + \beta^0 p^0 V^0, \quad (1.44)$$

ove k è la costante di Boltzmann, e $p^0 = \frac{1}{3} \frac{N^0}{V^0} < p^0 \frac{d\epsilon^0}{dp^0} >$ è la pressione cinetica del sistema. Per processi reversibili vale il primo principio della termodinamica, e quindi si ha che $\beta^0 = \frac{1}{kT^0}$ e che $\alpha^0 = \frac{-\mu^0}{kT^0}$. La velocità di deriva delle particelle, in K^0 , è nulla: $\mathbf{u}^0 = 0$, perché l'osservatore è solidale con i muri della scatola che contiene il sistema. Per K , a velocità v , quindi $u = v$: la distribuzione non è isotropa. Vincolo che in K la quantità di moto totale sia $\mathbf{G}$. Analogamente a quanto prima, ma avendo un vincolo in più (essendoci un'ulteriore quantità conservata) si trova il risultato:

$$n(\epsilon, \mathbf{G}) = (\exp(\alpha + \beta \epsilon + \boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{G}) + a)^{-1}. \quad (1.45)$$

È immediato vedere che, confrontando anche (1.45) con la prima legge, deve essere $\boldsymbol{\gamma} = \frac{-\mathbf{v}}{kT}$. Il termine $\mathbf{v} \cdot d\mathbf{G}$ rende la relazione covariante. Per l'ipotesi statistica, i numeri di occupazione medi n^0 e n , che misurano l'abbondanza relativa delle particelle negli stati ϵ^0 e ϵ , mediate su tempi t^0 e t , diventano le frazioni di particelle. Rappresentano quindi un'osservazione eseguita simultaneamente su tutto il sistema nel rispettivo sistema di riferimento: le due distribuzioni, riferendosi a singoli istanti, devono essere legate da una trasformazione di Lorentz. Ci si aspetta che la funzione di distribuzione che governa uno stato termodinamico sia un invariante relativistico:

$$n(\epsilon, \mathbf{G}) = n^0(\epsilon^0). \quad (1.46)$$

Infatti, per una singola particella, da (1.19), $\epsilon^0 = \gamma(\epsilon - \mathbf{v} \cdot \mathbf{G})$, quindi allo stesso stato corrisponde uno stesso numero di occupazione. Altrimenti sarei in grado di distinguere due sistemi in moto relativo. Pertanto:

$$\alpha = \alpha^0, \quad T = \frac{T^0}{\gamma}. \quad (1.47)$$

L'invarianza di α è strettamente legata all'invarianza del numero di particelle N . L'invarianza di dS porta alla trasformazione del calore (1.7).

Diamone un'interpretazione statistica. Si potrebbe pensare che il sistema, assorbendo dQ^0 , acquisisca un'inerzia dm^0 , che in K viene misurata come $dm = \gamma dm^0$ e quindi $(dQ)^* = \gamma dQ^0$. In realtà questo processo prevede una variazione di quantità di moto $d\mathbf{G} = \mathbf{v} dm$, come già visto. Associa la quantità $\mathbf{v} \cdot d\mathbf{G} = \gamma \beta^2 dQ^0$ al moto ordinato del sistema (dovuto al comovimento tra K e la scatola), e la quantità rimanente $dQ^0 \sqrt{1 - \beta^2}$ al moto disordinato. Solo il secondo termine, in K , è associabile a un moto di agitazione termica del sistema, cioè è da interpretarsi come il calore. In K inevitabilmente, una frazione β^2 dell'energia entra in forma ordinata: questa non contribuisce all'entropia del sistema, e quindi non è da interpretarsi propriamente come Q .

Variabili naturali

Richiedendo l'equivalenza dell'Hamiltoniana dinamica del sistema al potenziale termodinamico fondamentale (cioè E), si può giustificare la bontà del formalismo di PE, a discapito di quello di Ott ([Par19]).

La Lagrangiana di un sistema di massa m_0 in moto a velocità $\mathbf{v}$ è ([LL75]):

$$\mathcal{L}(m, \mathbf{v}) = -m_0 c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \quad (1.48)$$

Considerando il corpo in moto come sistema termodinamico, e essendo la lagrangiana indipendente dalla posizione, si ha che

$$\mathbf{G}(\mathbf{v}, m_0) = \nabla_{\mathbf{v}} \mathcal{L} = \gamma m_0 \mathbf{v}, \quad (1.49)$$

e che $\gamma = (1 + \frac{P^2}{m^2 c^2})^{-1/2}$. La trasformata di Legendre di $\mathcal{L}$ è l'Hamiltoniana

$$H(\mathbf{G}, m_0) = \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{v}} \mathcal{L} - \mathcal{L} = \sqrt{P^2 c^2 + m_0^2 c^4} = E(\mathbf{G}, m_0). \quad (1.50)$$

$\mathbf{G}$ è una variabile dinamica indipendente dello stato, mentre $\mathbf{v} = \nabla_{\mathbf{G}} H$ è dipendente. Impongo l'equivalenza tra $H(\mathbf{G}, m_0)$ (energia dinamica) e il potenziale termodinamico fondamentale, ovvero quello enunciato dal principio di conservazione dell'energia: come funzioni delle variabili di stato si avrà quindi

$$E(S, V, N, \mathbf{G}) = H(\mathbf{G}, m_0(S, V, N)). \quad (1.51)$$

Sia il corpo in moto all'equilibrio termico con l'ambiente, capace di scambiare con esso dQ e dW attraverso processi reversibili. Essendo m_0 un invariante relativistico, $m_0(S, V, N) = m_0(S^0, V^0, N^0)$, e valgono sempre $S = S^0$, $N = N^0$ e $V = V^0/\gamma$. In senso termodinamico, $(S, V, N, \mathbf{G})$ sono un insieme di variabili indipendenti. Ora, essendo

$$dE(S, V, N, \mathbf{G}) = TdS - pdV + \mu dN + \mathbf{v} d\mathbf{G},$$

posso scrivere, dal fatto che $\frac{\partial m_0}{\partial V} = \frac{\partial E}{\partial V} \frac{\partial m_0}{\partial E}$ e così via, e che, poiché da (1.50), $\frac{\partial m_0}{\partial E} = \frac{E}{m_0 c^4}$

$$dm_0(S, V, N) = (TdS - pdV + \mu dN) \frac{\partial m_0}{\partial E} = (TdS - pdV + \mu dN) \frac{E}{m_0 c^4}. \quad (1.52)$$

Essendo poi $dE^0 = dm_0 c^2 = T^0 dS^0 + \mu^0 dN^0 - p^0 dV^0$ (in K^0 , $\mathbf{G}^0 = 0$), e $\frac{E}{m_0 c^2} = \gamma$:

$$dE^0 = (TdS - pdV + \mu dN) \frac{E}{m_0 c^2} = T^0 dS + \mu^0 dN - p^0 \gamma dV,$$

e quindi

$$T = \frac{T^0}{\gamma}, \quad p = p^0, \quad \mu = \frac{\mu^0}{\gamma}. \quad (1.53)$$

Considerando $\mathbf{v}$ come variabile hamiltoniana, seguendo tutti i medesimi passaggi, si troverebbe la trasformazione di Ott della temperatura. Questo è errato nell'interpretazione dinamica di H , per cui la variabile coniugata alla posizione è $\mathbf{G}$: in tal modo, si giustifica, imponendo l'uguaglianza (1.51), la formulazione di PE.

1.5 La proposta di Ott-Arzélies

Ott contesta le precedenti trasformazioni ([H O63]), proponendo che l'equazione del moto dei corpi con massa variabile sia imperfetta, e richiedendo invece che dQ sia il calore scambiato adiabaticamente e reversibilmente dal corpo in moto senza eseguire lavoro. Per tale motivo, il lavoro di Planck (1.30) deve scomparire, e il lavoro totale di (1.31) diventerebbe:

$$W' = -\gamma \left(\beta^2 \Delta(p^0 V^0) + W^0 \right), \quad (1.54)$$

e lo scambio di calore in K

$$Q = \Delta E + W' = \gamma(\Delta E^0 + W^0) = \gamma Q^0, \quad (1.55)$$

che porta alla trasformazione del calore di OA. Sfruttando l'invarianza di S , si ha anche la trasformazione della temperatura di OA:

$$T = \gamma T^0. \quad (1.56)$$

Cioè un corpo in moto appare più caldo. Ora verranno fornite alcune considerazioni che motivino la scelta di non considerare la “forza di Planck” come una forza che esegua lavoro.

In un processo adiabatico, ove l'energia a riposo rimane costante, la 3-forza è interpretata come il vettore che soddisfi:

$$\dot{E} = \dot{W} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{u} = \dot{\mathbf{G}} \cdot \mathbf{u}. \quad (1.57)$$

Il fatto che

$$\dot{E} = \frac{d(m_0\gamma c^2)}{dt} = \frac{d(m_0\gamma \mathbf{u})}{dt} \mathbf{u} = \dot{W},$$

vale solo nel caso in cui $\dot{m}_0 = 0$. Una forza che soddisfa (1.57) è detta una “forza che conserva la massa a riposo” ([Req08]): nell’interpretazione meccanica solo essa può essere quindi associata a un vero lavoro, cioè a un aumento dell’energia. Lasciando variare m_0 per azione della forza, si vede che la discrepanza tra $\dot{E}$ e $\dot{W}$ è proprio $\dot{m}_0 c^2 \sqrt{1 - \beta^2}$: essendo $\dot{m}_0 c^2 = \dot{Q}_0$, allora è evidente che si hanno le trasformazioni di PE. È ormai evidente che l’interpretazione di $\mathbf{F}$ sia l’aspetto cruciale tra le due visioni. La forza associata alla massa a riposo sarebbe un termine

$$\mathbf{F}^{(h)} = \dot{m}_0 \gamma \mathbf{u}, \quad (1.58)$$

e quindi non una vera forza, bensì una “virtuale”.

Si considerino due corpi C_1 e C_2 a contatto e in quiete, tra cui viene scambiata una particella di massa dm^0 con $v = 0$, da C_1 a C_2 . Non possedendo quantità di moto, C_1 rimane a riposo e varia solo l’energia “inerziale” di $dE_1^0 = dm_1^0 c^2$. Per un osservatore in moto, a C_1 viene attribuita energia relativistica $\gamma dm^0 c^2$, e la potenza fornita sarebbe

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{v} = \gamma \dot{m}_1^0 v^2 = \frac{d}{dt}(\gamma m_1^0 c^2) - \frac{\dot{m}_1^0 c^2}{\gamma}$$

Il 1o termine è l’aumento dell’energia totale $\dot{E}_1$. Applicando la conservazione dell’energia, si ha

$$dE_1 = Fvdt + dm^0 c^2 \sqrt{1 - \beta^2}. \quad (1.59)$$

Quindi il secondo termine a destra è tutta l’energia fornita dalla massa dm^0 , che, se considerato come “quanto di calore” $\frac{dQ^0}{c^2}$ fornisce un calore $dQ = dQ^0 \sqrt{1 - \beta^2}$. Passando al limite classico, per cui $v \ll c$, vale che

$$dm^0 c^2 \sqrt{1 - \beta^2} \simeq dm^0 c^2 - \frac{1}{2} dm^0 v^2, \quad (1.60)$$

e che

$$E_1 = m_1^0 c^2 + \frac{1}{2} m_1^0 v^2 = m_1^0 c^2 + E_{kin}.$$

Il termine $dm^0 c^2$ contribuisce all’energia inerziale, e rimane quindi che l’aumento dell’energia puramente cinetica, da (1.59) e (1.60) è

$$dE_{kin} = Fvdt - \frac{1}{2} dm^0 v^2. \quad (1.61)$$

Ma quindi si capisce che il secondo termine non può rappresentare l’energia assorbita per convezione dalla massa dm^0 , perché questa dovrebbe muoversi con energia cinetica

negativa. La convinzione che $dm^0 c^2 \sqrt{1 - \beta^2}$ si tratti di energia fornita per convezione è alimentata dal fatto che nella fisica relativistica il termine dell'energia a riposo aggiunge a quella cinetica un termine positivo. In conclusione, nessuna potenza viene sviluppata dalla forza apparente, e il calore scambiato equivale alla variazione dell'energia anche per il sistema in moto: $dQ = \gamma dQ^0$ ([Arz65], [Gam65]).

1.5.1 Ciclo di Carnot relativistico di OA

Viene eseguita una critica del ciclo di Carnot relativistico, esposto in 1.4.1. Il sistema è composto dagli usuali due bagni termici U_0 e U comoventi e dal corpo M in grado di cambiare calore che esegue il processo ciclico in 4 fasi. Ora viene evidenziato nel processo la variazione della massa inerziale del corpo, che verrà utilizzata nelle considerazioni successive.

1. Il corpo M stazionario assorbe il calore dQ^0 da U_0 a temperatura T^0 . Se il lavoro non viene rilasciato ma immagazzinato in M , la sua massa m^0 aumenta di $dm^0 = \frac{dQ^0}{c^2}$
2. M viene accelerato adiabaticamente a velocità v , mentre T^0 e $m^0 + dm^0$ rimangono costanti. Aumenta l'energia cinetica, compensata da un lavoro compiuto sul sistema (e quindi assunto col segno negativo),

$$W_2 = -(m^0 + |dm^0|)c^2(\gamma - 1)$$

3. M cede il calore Q a U a temperatura costante, invertendo anche il precedente dm^0 .
4. M viene frenato adiabaticamente fino all'arresto, cessando così di funzionare e tornando allo stato iniziale. Il lavoro eseguito dal sistema è

$$W_4 = m^0 c^2(\gamma - 1)$$

Nella fase (3) la massa del sistema diminuisce. Quindi v è mantenuta costante, in virtù dell'equazione del moto $\frac{d}{dt}\mathbf{G} = \frac{d}{dt}(\gamma m^0 \mathbf{v}) = \mathbf{F}$, da una forza $\mathbf{F} = -|\dot{m}^0|\gamma \mathbf{v}$, che scompare nel sistema proprio di M . Ma, per le considerazioni fatte precedenti, questa non è una "forza che conserva la massa a riposo", e quindi non può essere associata a un vero lavoro: per questo motivo $W_3 = p(V_4 - V_3)$, e manca il contributo dovuto alla variazione di $\mathbf{G}$. Per l'osservatore immobile, $Q^0 + Q = W_1 + W_2 + W_3 + W_4$, e si trova che $Q = -Q^0\gamma$, seguendo considerazioni analoghe (ma con la sostanziale differenza sopra menzionata) eseguite in 1.4.1. Per la seconda legge

$$\frac{Q_2}{Q_1} = -\frac{T_2}{T_1} = -\gamma,$$

e perciò $T_2 = \gamma T_1$.

1.5.2 Il formalismo quadrivettoriale di OA

Analogamente a quanto fatto in 1.4.2, si può vedere che può essere costruito un formalismo 4-vettoriale della termodinamica, con delle modifiche rispetto a quanto fatto nel paragrafo citato.

La formulazione quadrivettoriale della prima legge, affinché la temperatura segua le trasformazioni di OA (1.56), è

$$T^\mu dS = dP^\mu + p dV^\mu. \quad (1.62)$$

La modifica riguarda T : rispetto a (1.34), si ha

$$T^\mu = v^\mu T. \quad (1.63)$$

In tal caso, la componente temporale di T^μ è evidentemente il reciproco della temperatura e si trasforma quindi come (1.56).

In virtù dell'invarianza dell'entropia, la formulazione covariante della seconda legge segue esattamente gli stessi ragionamenti eseguiti in 1.4.2. In particolare,

$$dS \geq \beta^\mu dQ_\mu, \quad (1.64)$$

con $dQ^\mu = v^\mu dQ^0$, e $\beta^0(0) = T^0(0)^{-1}$ ma

$$\beta^0(v) = \gamma^2 T^0(v)^{-1}, \quad (1.65)$$

cioè la relazione tra β^0 e T^0 in un sistema di riferimento in moto è diversa da quella che si ha nel sistema a riposo, essendo entrambi 4-vettori.

1.5.3 Motivazioni e supporto a OA

Ripercorreremo in questo paragrafo un approccio alternativo che fornisce motivazioni a favore della proposta di Ott-Arzelì.

Meccanica Statistica

Si può riscrivere la distribuzione di Gibbs in forma covariante in forma quadrivettoriale seguendo i ragionamenti fatti in 1.4.3: la distribuzione w per lo stato P^μ nel sistema a quadrivelocità u^μ per N particelle, nell'elemento di volume dello spazio delle fasi $d^{3N}p d^{3N}q$ è ([M P19])

$$dw(P^\mu) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3N} N! Z} \exp\left(-\frac{1}{kT^0} u_\mu P^\mu\right) d^{3N}p d^{3N}q, \quad (1.66)$$

ove Z è la funzione di partizione che permette la normalizzazione. Si consideri la versione quantistica della distribuzione di Gibbs w_n :

$$w_n = \frac{1}{Z} \exp\left(-\frac{1}{kT^0} u_\mu P_n^\mu\right), \quad (1.67)$$

che è naturalmente normalizzata:

$$\sum_n w_n = 1. \quad (1.68)$$

Si assuma che il quadrimpulso P_n^μ dipenda solo da parametri termodinamici esterni $\lambda_1, \dots, \lambda_r$. Differenziando (1.56), si trova che

$$\sum_n dw_n = 0, \quad (1.69)$$

e imponendo

$$S = -k \sum_n w_n \ln w_n, \quad (1.70)$$

e differenziando ($dS = -k \sum_n (dw_n(1 + \ln w_n))$), essendo

$$u^\mu dw_n P_n^\mu = u^\mu d(w_n P_n^\mu) - u^\mu w_n dP_n^\mu,$$

si ottiene, da (1.69), (1.70) ,

$$u_\mu d\left(\sum_n w_n P_n^\mu\right) - u_\mu \sum_n w_n \left(\sum_{k=1}^r \frac{\partial P_n^\mu}{\partial \lambda_k} d\lambda_k\right) = T^0 dS. \quad (1.71)$$

È naturale interpretare

$$\langle P^\mu \rangle := \sum_n w_n P_n^\mu, \quad \langle dP^\mu \rangle := \sum_n w_n \left(\sum_{k=1}^r \frac{\partial P_n^\mu}{\partial \lambda_k} d\lambda_k\right) = \sum_n w_n dP_n^\mu.$$

Che, poiché $u_\mu dP^\mu = dE - \mathbf{u}d\mathbf{G}$ porta a:

$$dE = \frac{T^0}{\gamma} dS + \mathbf{u}(d\mathbf{G} - \langle d\mathbf{G} \rangle) + \langle dE \rangle. \quad (1.72)$$

In virtù di quanto considerato in questa sezione, in ogni sistema di riferimento vale che $dW = \langle dE \rangle$. Ma $T^0 dS = dQ^0$ e inoltre

$$\langle \mathbf{u}d\mathbf{G} \rangle = \gamma v^2 V dp. \quad (1.73)$$

Questo può essere giustificato in quanto la media della variazione della quantità di moto (e non la variazione della media della quantità di moto $d\langle \mathbf{G} \rangle$), durante il processo è

legata alla presenza di una forza che compie lavoro: per quanto visto precedentemente, da $\mathbf{u}d\mathbf{G} = \gamma\beta^2(dE^0 + p^0 dV^0 + V^0 dp^0)$, l'unico contributo effettivo è solo quello della variazione di pressione dp^0 , essendo gli altri due legati o allo scambio di calore (dE^0) o alla contrazione di Lorentz (dV^0) che non è legata a una vera forza. Una derivazione più formale del risultato (1.73) può essere trovata in Moller (si veda sempre [M P19]). Ma quindi, $\mathbf{u}(d\mathbf{G} - \langle d\mathbf{G} \rangle) = \gamma\beta^2 dQ^0$. Quindi si ottengono le trasformazioni di OA (1.55). Si noti che le trasformazioni di PE si ricavano se $dW' = \langle dE \rangle + \mathbf{u}(d\mathbf{G} - \langle d\mathbf{G} \rangle)$.

1.6 La proposta di Landsberg

Una terza proposta è stata avanzata da Landsberg, che ha suggerito che la temperatura sia un'invariante scalare ([Lan66], [PT 67]). La temperatura empirica è evidentemente invariante: osservando un termometro comovente con il corpo ne misuro la sua temperatura a riposo. Ciò che contesta Landsberg è che questa sia l'unica temperatura rilevante, e che nell'interpretazione di temperatura come grandezza che misura l'energia cinetica delle particelle, secondo Landsberg è stata erroneamente usata in passato la formula

$$\frac{1}{T} = \left(\frac{\partial S}{\partial E} \right)_{N,V}. \quad (1.74)$$

Questa espressione è incorretta in quanto la temperatura deve essere invariante. Affinché ciò avvenga, bisogna modificare l'espressione. Landsberg propone di utilizzare l'energia interna del corpo U , ovvero, per definizione, l'energia nel sistema di riferimento a riposo dello stesso, in cui la quantità di moto è nulla. Corrisponde anche alla massa invariante. In tal caso, si avrebbe che

$$\frac{1}{T} = \left(\frac{\partial S}{\partial U} \right)_{N,V}. \quad (1.75)$$

Un argomento a favore del rendere la temperatura un invariante relativistico è che, essendo legata alla velocità relativa tra le particelle, poiché quest'ultima è uguale in ogni sistema di riferimento (in valore assoluto), allora anche T deve esserlo. Secondo Landsberg inoltre questa definizione di T non creerebbe problemi riguardanti la direzione del flusso di calore. Si considerino in tal senso due corpi C_1 e C_2 all'equilibrio termodinamico che si muovono l'uno rispetto all'altro e con una parete a contatto. Nel sistema di riferimento di C_1 , $T_1 = T_0$ e $T_2 = T$. Se valessero le (1.6), allora $T_2 < T_1$: C_1 vedrebbe il calore muoversi verso C_2 . Al contrario, per C_2 varebbe che $T_1 < T_2$ e il calore fluirebbe verso C_1 ([LJ68]). Un analogo (ma inverso) ragionamento si potrebbe fare con le trasformazioni di Ott. Inizialmente Landsberg era arrivato alla conclusione che quindi, per l'invarianza dell'entropia, come per PE e Ott, il calore dovesse seguire la stessa trasformazione della temperatura, cioè essere invariante. Successivamente, decise di adottare come valide le trasformazioni di PE del calore. Si ottiene, in virtù dell'invarianza della temperatura,

una formulazione alternativa del secondo principio:

$$T\Delta S \geq \gamma Q. \quad (1.76)$$

In definitiva, si hanno le trasformazioni di Landsberg:

$$T = T^0, \quad (1.77)$$

$$Q = \frac{Q^0}{\gamma}. \quad (1.78)$$

1.7 La visione moderna

Nella sezione 1.2 è stato menzionato l'episodio in cui Einstein, nel 1952, durante la sua corrispondenza con von Laue, sembra arrendersi riguardo ad un'identificazione univoca della temperatura di un sistema in moto. Solo 12 anni dopo Marshall ripropose quella che, ad oggi, è la conclusione più condivisa riguardo alla trasformazione della temperatura, ovvero che sia ben definita solo nel sistema di riferimento proprio. In questo senso, le considerazioni di Landsberg fungono da punto di partenza per questi sviluppi. Ciò che Landsberg afferma è infatti che l'unica temperatura è quella “empirica”, che è evidentemente invariante: in tal senso, si sta leggendo, per eseguire una misura, il termometro comovente con il corpo; il concetto di temperatura “assoluta” perde così di significato. La temperatura è un concetto macroscopico, pertanto ha sempre a che fare con corpi estesi. Si possono recuperare le varie trasformazioni (1.6), (1.56) e (1.77) come casi particolari in cui il volume dentro al quale viene eseguita la misura di temperatura, è definito in maniera diversa.

Il volume è la sezione trasversale del tubo di universo U di un corpo a un tempo definito vista da un dato osservatore: se ω^μ è il vettore unitario di tipo tempo che definisce la direzione dello spazio tridimensionale istantaneo nello spazio quadridimensionale, allora ([PG25])

$$V_K(\omega^\mu) = \{x^\mu : \omega^\mu x_\mu = 0\} \cap U, \quad (1.79)$$

cioè l'intersezione del piano “a tempo fissato” con il tubo di universo. Sia V_{rest} il volume nel sistema di riferimento proprio del corpo stesso K_{rest} : si definisce il volume come ([Nak06])

$$V(\omega) = \frac{V_{rest}}{u^\mu \omega_\mu}, \quad (1.80)$$

con u^μ quadrivelocità del corpo. È quindi semplice estendere il “quadrivolume”:

$$V^\mu = \frac{\omega^\mu V_{rest}}{u^\nu \omega_\nu}. \quad (1.81)$$

Per brevità, verrà indicato:

$$k^\mu = \frac{\omega^\mu}{u^\nu \omega_\nu}. \quad (1.82)$$

Si può vedere come il volume così definito sia dipendente dal sistema di riferimento, identificato da ω^μ : è un concetto covariante.

Considero infatti il seguente paradosso: venga applicata a una sbarra di lunghezza L^0 , il cui asse coincide con l'asse delle x per l'osservatore K , una pressione su entrambe le estremità, che poi viene rilasciata allo stesso tempo. Un osservatore standard K , per via della relatività della simultaneità, osserva che un'estremità è stata rilasciata prima dell'altra: si aspetta quindi una forza per un breve intervallo di tempo nella direzione delle $-x$. Il che sembra assurdo: in K^0 , inerziale, non compare nessuna accelerazione, perché la pressione diventa 0 simultaneamente per i due estremi. Un'analisi del tensore energia impulso T_μ^ν prima e dopo il rilascio, sia per K^0 che per K ([Nak06]), evidenzia come l'energia impulso totale nei due sistemi siano quantità diverse. Infatti, il primo è il tensore energia impulso contenuto in V^0 , il secondo è quello contenuto in V , quantità che non sono legate da trasformazioni di Lorentz. Va quindi riformulato il concetto di volume come quantità covariante.

Siano K e K' osservatori standard. Un punto $x^\mu = (t, x, y, z)$ del sistema K è identico al punto $x'^\mu = (t', x', y', z')$ del sistema K' solo se le coordinate dei due sono legati da trasformazioni di Lorentz Λ_μ^μ , ove quest'ultima è la matrice di Lorentz che trasforma i punti da K' a K . Se mi riferisco a una quantità tensoriale T in un punto di K , questa sarà lo stesso evento T' di un punto di K' a patto che i due punti siano identici, secondo la definizione data sopra ([Gam67]). Definire un'identità tra grandezze misurate in vari sistemi è facile su base locale. Quando però ho una grandezza che dipende da due punti diversi di K , ad esempio x^μ e X^μ , come

$$A(x^\mu, X^\mu) = B(x^\mu) + C(X^\mu) = B(t, \mathbf{x}) + C(T, \mathbf{X}), \quad (1.83)$$

diventa più complicato definire l'identità della quantità A per K' . Si può dire che la quantità $A(x^\mu, X^\mu)$ per K sia la stessa di $A'(x'^\mu, X'^\mu)$ per K' se le coppie di coordinate sono legate da trasformazioni di Lorentz. È evidente che la trasformazione del volume (derivante dalla “contrazione delle lunghezze”) non ricada sotto questa definizione. Infatti, K , può, ad esempio, decidere di misurare A in maniera tale che $t = T$, ma questi due rimangono formalmente punti diversi. Cioè definire la lunghezza in un sistema di riferimento come la distanza tra le due estremità misurate allo stesso istante, non si traduce in un altro sistema di riferimento come un qualcosa misurato sempre simultaneamente (e anzi, non lo sarà mai, per la relatività della simultaneità). Di fatto, non ci si sta riferendo allo stesso set di eventi (ove “stesso” è inteso come secondo la definizione iniziale); tuttavia, si potrebbe discutere sul fatto che la “lunghezza” sia definita come la distanza tra gli “estremi” misurata simultaneamente: tutto si trasforma in un discorso di definizione. Le variabili termodinamiche sono quantità non locali: individuano una

classe preferita di iperpiani nello spaziotempo. Il volume, così come la lunghezza, è una quantità che dipende strettamente dall'osservatore, non è una qualche proprietà assoluta posseduta dall'oggetto. Posso decidere di definirlo misurando gli estremi dei segmenti allo stesso tempo fissato (contrazione delle lunghezze), oppure decidere di misurare lo stesso set di eventi in entrambi i sistemi, e quindi avere una grandezza Lorentz-covariante ([Roh66]).

1.7.1 La temperatura direzionale

Alla luce di queste considerazioni, si può vedere una conseguenza che questo tipo di trasformazioni portano con sé: le (1.6) e (1.56) di PE e OA infatti non rispettano la chiusura del gruppo di Lorentz ([HO22]). Questo effetto, più che evidenziare un errore nelle due (quattro), mostra come la temperatura, così come il volume, sia un concetto non locale e la cui definizione dipende dal sistema di riferimento scelto. Infatti, l'equivalenza fisica dei sistemi di riferimento inerziali implica una struttura di gruppo per le trasformazioni di Lorentz. Dati gli osservatori standard K^0 e K , in moto a velocità v rispetto ad esso, sia K' un s.d.r. inerziale in moto a velocità v' rispetto a K . Ma allora, secondo OA, $T = \gamma T^0$ e $T' = \gamma' T$, cioè vale $T' = \gamma \gamma' T^0$. Ma, per la struttura di gruppo, ci si aspetta anche che $T' = \gamma'' T^0$: questo implicherebbe che

$$\gamma'' = \gamma \gamma',$$

totalmente incompatibile con la nota:

$$\gamma'' = \gamma \gamma' (1 + \frac{v'v}{c^2}). \quad (1.84)$$

Questo risultato non è sorprendente: si può trovare che lo stesso vale se facessi le stesse

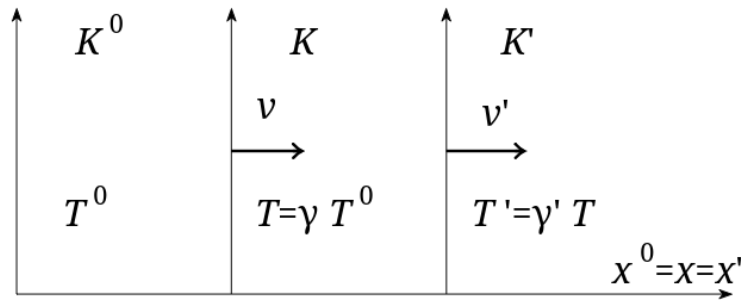


Figura 1.2: Temperatura per 3 sistemi di riferimento in moto secondo Ott-Arzelies

considerazioni con le trasformazioni della lunghezza. Il che non creerebbe alcuna contraddizione, visto che $L' \neq \gamma' L$, essendo L non la lunghezza a riposo, e quindi non

valendo l'usuale formula della contrazione. Da qui, ovviamente vale la stessa considerazione per il volume e così per le altre grandezze estensive come l'energia E . È evidente che quindi la “temperatura a riposo” T^0 giochi un ruolo fondamentale: questo può essere individuato come un punto a favore per innalzarla a grandezza che riveste un ruolo più importante rispetto a quella in moto, così come avviene per altre quantità come il tempo proprio o la lunghezza propria (infatti, non vale neanche che $t' = \gamma\gamma't^0$). (Lo stesso identico procedimento può essere ripetuto usando la trasformazione di PE). Si può però provare, svincolandosi dalle trasformazioni di PE e di OA, a trovare una definizione di temperatura che rispetti la chiusura del gruppo di Lorentz. Sia $f(v)$ una funzione che descriva la trasformazione delle temperatura in maniera tale che valga sempre, per K e K^0 osservatori standard,

$$T = \gamma f(v) T^0. \quad (1.85)$$

Ma allora, si impone, da (1.84):

$$\gamma\gamma' f(v)f(v') = \gamma'' f(v''). \quad (1.86)$$

Cercando una forma semplice per f , come ad esempio $f(v) = a + bv$, è facile vedere che

$$a^2 + b^2 v'v + ab(v + v') = (1 + \frac{v'v}{c^2})(a + b \frac{v + v'}{1 + \frac{v'v}{c^2}}),$$

e quindi $a = 1$, $b = \pm c^{-1}$, cioè

$$T = \gamma(1 \pm \beta) T^0. \quad (1.87)$$

Questo risultato è in realtà un caso particolare di una certa definizione di temperatura in movimento: la temperatura direzionale. Nel paragrafo 1.3.1 sono state elencate 4 possibili misure di temperatura, ma nelle derivazioni viste finora, solo le prime 3 (empirica, assoluta e statistica) sono state effettivamente esplorate (eccezion fatta per il caso di Planck). Tuttavia, la quarta risulta, a primo impatto, essere anche la più semplice da verificare sperimentalmente: le osservazioni astrofisiche forniscono una grande mole di dati riguardanti gli spettri dei corpi neri, che possono essere confrontate con la teoria. Infatti, per la legge di Wien, la distribuzione di Planck è massima per la lunghezza d'onda $\lambda = \lambda_{peak}$ per una temperatura T che soddisfi:

$$T = \frac{b}{\lambda_{peak}}, \quad (1.88)$$

ove $b = 2898 \text{ K}\mu\text{m}^{-1}$. Inoltre, una sorgente che si muove di velocità di intensità v e che forma un angolo θ con l'asse delle x dell'osservatore K^0 , segue l'effetto Doppler relativistico:

$$\lambda^0 = \gamma(1 + \beta \cos \theta) \lambda. \quad (1.89)$$

Cioè sembrerebbe di poter dire:

$$T^0 = \frac{T}{\gamma(1 + \beta \cos \theta)}. \quad (1.90)$$

Si potrebbe a quel punto parlare di “blueshift” e “redshift” anche per la temperatura, a seconda che la sorgente si stia avvicinando o allontanando dall’osservatore. Inizialmente questa temperatura, detta anche “anisotropa” per la sua dipendenza dalla direzione, fu criticata da molti autori poiché prevede che la radiazione cosmica di fondo (CMB) sia anisotropa. Questa proprietà in realtà è stata verificata sperimentalmente, supportando la tesi dell’indefinitezza della temperatura in moto. Infatti, la Terra si sta allontanando a 627 km s^{-1} dalla direzione di Hydra-Centauri rispetto al sistema di riferimento del Big Bang, rispetto al quale la CMB è isotropa: si osserva infatti un’anisotropia di dipolo ($\sim 3 \text{ mK}$) ([PW67]).

1.7.2 Il formalismo di Israel-van Kampen-Nakamura

Da quanto visto prima, si può generalizzare a tutte le variabili termodinamiche la nuova definizione di volume ([PG25]):

$$\begin{aligned} \mathcal{E}^\mu &:= k^\mu E_{rest} \\ \mathcal{Q}^\mu &:= k^\mu Q_{rest} \\ \mathcal{W}^\mu &:= k^\mu W_{rest} \\ \mathcal{T}^\mu &:= k^\mu T_{rest}. \end{aligned} \quad (1.91)$$

Da queste si ricavano tutte le varie proposte:

PE

Per PE, il volume è generato da una contrazione di Lorentz in K di un corpo con volume V_{rest} in K^0 : tutti i punti di questo volume sono simultanei in K , come osservato precedentemente, e quindi è considerabile un volume a riposo in K .

$$\omega^\mu = (1, \mathbf{0}), \quad u^\mu = (\gamma, \gamma \mathbf{u}), \quad (1.92)$$

e quindi $u^\mu \omega_\mu = \gamma$ e $k^\mu = (\gamma^{-1}, 0, 0, 0)$ e

$$V(K)_{PE}^\mu = (1, \mathbf{0}) \frac{V_{rest}}{\gamma}, \quad (1.93)$$

da cui $V(K)_{PE} = V_{rest}/\gamma$. Si hanno:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{PE} &:= \gamma^{-1} E_{rest} \\ \mathcal{Q}_{PE} &:= \gamma^{-1} Q_{rest} \\ \mathcal{W}_{PE} &:= \gamma^{-1} W_{rest} \\ \mathcal{T}_{PE} &:= \gamma^{-1} T_{rest}. \end{aligned} \quad (1.94)$$

Si noti che il lavoro $\mathcal{W}$ così mantiene la sua forma, essendo pdV in tutti i sistemi di riferimento, senza aggiungere il contributo dell'energia di volume.

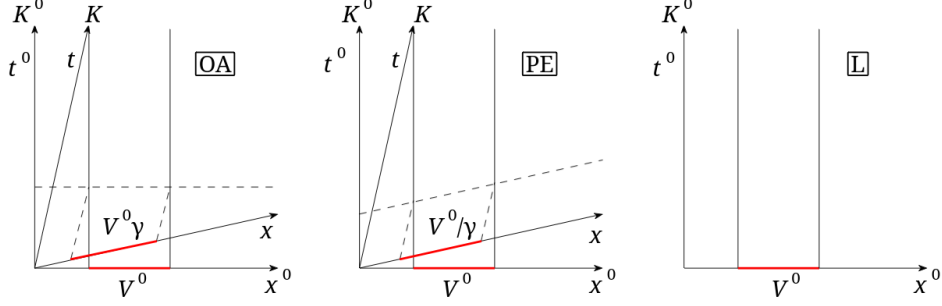


Figura 1.3: Trasformazioni del volume per PE, OA e L in un diagramma di Minkowski

OA

Per OA, il volume è l'insieme degli eventi che avvengono simultaneamente nel sistema di riferimento proprio K^0 : osservandolo da K si ha

$$\omega^\mu = (\gamma, \gamma \mathbf{u}), \quad u^\mu = (\gamma, \gamma \mathbf{u}), \quad (1.95)$$

e quindi $u^\mu \omega_\mu = 1$ e $k^\mu = (\gamma, \gamma \mathbf{u})$ e

$$V(K)_{OA}^\mu = (1, \mathbf{u}) \gamma V_{rest}, \quad (1.96)$$

da cui $V(K)_{OA} = V_{rest}$, come detto sopra. Si hanno:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{OA} &:= \gamma E_{rest} \\ \mathcal{Q}_{OA} &:= \gamma Q_{rest} \\ \mathcal{W}_{OA} &:= \gamma W_{rest} \\ \mathcal{T}_{OA} &:= \gamma T_{rest}. \end{aligned} \quad (1.97)$$

Landsberg

Per Landsberg è ovvio che, misurando sempre nel sistema proprio K , vale

$$\omega^\mu = (1, \mathbf{0}), \quad u^\mu = (1, \mathbf{0}), \quad (1.98)$$

e quindi $u^\mu \omega_\mu = 1$. In breve

$$V_L^\mu = (1, \mathbf{0}) V_{rest}, \quad (1.99)$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_L &:= E_{rest} \\
\mathcal{Q}_L &:= Q_{rest} \\
\mathcal{W}_L &:= W_{rest} \\
\mathcal{T}_L &:= T_{rest}.
\end{aligned}
\tag{1.100}$$

Capitolo 2

La termodinamica nella relatività generale

2.1 Introduzione

Nel capitolo 1 è stato affrontato il tema della formulazione della termodinamica in un framework di relatività ristretta. In tal modo, è stato possibile ricavare le trasformazioni delle leggi e delle quantità termodinamiche più rilevanti rispetto a un osservatore in moto rettilineo uniforme, evidenziando alcuni aspetti cruciali di ambo le teorie e mettendo in luce alcuni snodi teorici fondamentali. Nel presente capitolo, verrà sviluppata la termodinamica all'interno della relatività generale, generalizzando i precedenti risultati a un osservatore qualsiasi, e tenendo conto degli effetti della gravità.

Nella prima sezione sono fatti dei richiami di meccanica relativistica, al fine di possedere gli strumenti necessari a trattare un sistema termodinamico in maniera totalmente covariante.

Il primo e il secondo principio della termodinamica saranno invece trattati nella seconda sezione, generalizzando le equazioni trovate nel capitolo 1.

La terza sezione è dedicata alla legge di Tolman-Ehrenfest, il risultato più celebre della termodinamica relativistica generale, che descrive la trasformazione della temperatura in presenza di campi gravitazionali, ed è quindi considerabile come l'estensione del principio 0 alla relatività generale.

Infine, saranno esposte alcune applicazioni dei risultati appena trovati.

2.2 Cenni di meccanica relativistica

- **Principio di Relatività Generale**

Le leggi della fisica sono le stesse per ogni osservatore.

Un osservatore è un apparato fisico che si muove lungo traiettorie spazio-temporali:

le misure sono sempre locali. A ogni osservatore è associato un sistema di riferimento che copre determinate porzioni della varietà spazio-temporale.

- **Principio di Equivalenza**

Il moto in un campo gravitazionale uniforme è indistinguibile dalla caduta libera.
Questa è la riformulazione di Einstein del celebre postulato Galileiano $m_i = m_g$, cioè l'uguaglianza tra contenuto d'inerzia e carica gravitazionale.

- **Principio di Covarianza Generale**

Le leggi della fisica in un qualsiasi sistema di riferimento sono ottenute sostituendo, dalle leggi della Relatività Ristretta, alle quantità tensoriali del gruppo di Lorentz le corrispondenti quantità tensoriali della varietà spazio-temporale.

Fondamentalmente, più che essere un principio teorico, è un risultato dei due postulati precedenti e una regola di procedura. Ovvero, sostituire localmente alle derivate parziali le derivate covarianti:

$$\partial_\mu \rightarrow \nabla_\mu \quad (2.1)$$

Questo è possibile perché si assume di poter descrivere la metrica $g_{\mu\nu}$ localmente in forma di Minkowski $\eta_{\mu\nu}$, che ha la stessa segnatura di g (nella presente convenzione, come visto in 1.4.2, $(+, -, -, -)$).

Si userà la convenzione $c = 1$, come in 1.4.2.

Sia il tensore di Riemann:

$$R^\rho_{\sigma\mu\nu} = \partial_\mu \Gamma^\rho_{\nu\sigma} - \partial_\nu \Gamma^\rho_{\mu\sigma} + \Gamma^\rho_{\mu\lambda} \Gamma^\lambda_{\nu\sigma} - \Gamma^\rho_{\nu\lambda} \Gamma^\lambda_{\mu\sigma}. \quad (2.2)$$

Γ^α_μ rappresenta il simbolo di Christoffel.

Il tensore di Ricci è costruito così:

$$R^\beta_{\mu\beta\nu} = R_{\mu\nu}, \quad (2.3)$$

e la sua traccia

$$R = R^\mu_\mu, \quad (2.4)$$

è lo scalare di curvatura.

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu}, \quad (2.5)$$

è il tensore di Einstein, che quindi è costruito unicamente a partire dalla metrica $g_{\mu\nu}$.

I tre postulati, assieme all'analogia formale con le leggi dell'elettromagnetismo, permettono di formulare le equazioni di campo di Einstein:

$$G_{\mu\nu} = 8\pi G_N T_{\mu\nu}, \quad (2.6)$$

ove in questa formulazione è stato posto $\Lambda = 0$, cioè si trascura il contributo della costante cosmologica. Questa scelta è giustificata nel contesto di sistemi gravitanti di fluidi in equilibrio, come stelle o buchi neri, dove gli effetti di $\Lambda \sim 10^{-52} \text{m}^{-2}$ sono trascurabili rispetto alle scale di massa in considerazione.

La parte sinistra dell'equazione è quindi unicamente determinata dalla metrica della varietà: descrive la geometria dello spazio-tempo. Il termine di sorgente (a destra), oltre a costanti moltiplicative (G_N è la costante gravitazionale di Newton), è il tensore energia-impulso $T_{\mu\nu}$ già incontrato nel capitolo 1, e che verrà indagato più in profondità nel seguente paragrafo.

2.2.1 Le equazioni della meccanica relativistica

Sia definita una nuova quantità che tenga conto del contributo dello stress (1.12) e della quantità di moto (1.13):

$$p_{ij} = t_{ij} + g_i u_j, \quad (2.7)$$

che verrà chiamata “stress assoluto” (in contrasto con lo “stress relativo” t_{ij}). Nel sistema a riposo, $p_{ij}^0 = t_{ij}^0$. Il tensore energia-impulso è un tensore simmetrico $(2, 0)$ che descrive la condizione di un mezzo meccanico macroscopico in ogni punto dello spazio-tempo. Nel sistema di riferimento a riposo (con il punto in cui è definito), esso prende la forma:

$$T_0^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \rho_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_{xx}^0 & p_{xy}^0 & p_{xz}^0 \\ 0 & p_{yx}^0 & p_{yy}^0 & p_{yz}^0 \\ 0 & p_{zx}^0 & p_{zy}^0 & p_{zz}^0 \end{pmatrix}, \quad (2.8)$$

Si consideri ora un fluido perfetto, cioè un fluido isotropo nel proprio sistema di riferimento ([S72]). Quando il libero cammino medio tra le collisioni è molto piccolo rispetto alla scala di lunghezza tipica dell'osservatore, quest'approssimazione è ben giustificata (ad esempio, in idrodinamica, l'isotropia si perde quando la viscosità diventa un effetto dominante). Per un fluido perfetto, lo stress trasverso non è presente: gli elementi di matrice non diagonale di p_{ij} si annullano. In coordinate proprie vale (usando ora l'indice 0 in basso per tali quantità):

$$T_0^{\mu\nu} = \text{diag}(\rho_0, p_0, p_0, p_0), \quad (2.9)$$

ove p_0 è la pressione idrostatica propria e ρ_0 la densità propria del fluido perfetto.

Le trasformazioni delle coordinate della metrica $g_{\mu\nu}$ sono:

$$g_{\mu'\nu'} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial x^\nu}{\partial x^{\nu'}} g_{\mu\nu}. \quad (2.10)$$

Applicando la trasformazione

$$T_{\mu'\nu'} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial x^\nu}{\partial x^{\nu'}} T_{\mu\nu}, \quad (2.11)$$

assieme a (2.10), tenendo in considerazione che nel sistema di riferimento proprio $u_0^\mu = (1, 0, 0, 0)$, si trova l'espressione del tensore energia-impulso per un fluido perfetto:

$$T^{\mu\nu} = (\rho_0 + p_0)u^\mu u^\nu - g^{\mu\nu}p_0, \quad (2.12)$$

ove ρ_0 e p_0 sono la densità e la pressione propri del fluido, e u^μ è la quadrivelocità di ogni frazione di volume infinitesima dello stesso ([F09]).

Questo oggetto, attraverso un'unica legge di conservazione:

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0, \quad (2.13)$$

può riassumere l'equazione di continuità e le equazioni del moto/di Eulero:

$$\begin{cases} \frac{\partial g_i}{\partial x_i} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0, \\ \frac{\partial g_i}{\partial t} + \frac{\partial p_{ij}}{\partial x_j} = 0. \end{cases} \quad (2.14)$$

Ora, per l'identità di Bianchi è ben noto che:

$$\nabla_\nu G^{\mu\nu} = 0. \quad (2.15)$$

Quanto detto risulta coerente con il principio di covarianza, per cui:

$$\nabla_\nu T^{\mu\nu} = 0. \quad (2.16)$$

La derivata covariante di un tensore $(2, 0)$ può essere espressa nel seguente modo ([F80]):

$$\partial_\nu T^{\mu\nu} + \Gamma_{\alpha\nu}^\mu T^{\alpha\nu} + \Gamma_{\alpha\nu}^\nu T^{\mu\alpha} = 0. \quad (2.17)$$

Le grandezze fisiche possono essere, in generale, di due tipologie principali: esse o indicano l'intensità di una qualche condizione in un punto, o la quantità di qualcosa in un volume. Le prime sono descritte da un tensore, le seconde da una densità tensoriale ([Edd24]).

Una densità tensoriale è un oggetto che si trasforma come un campo tensoriale, ma a cui viene moltiplicato il valore assoluto del determinante della Jacobiana della trasformazione (elevato a qualche potenza w , detta "peso" della densità). Le sue componenti seguono quindi:

$$\mathfrak{T}_{\nu'_1 \dots \nu'_l}^{\mu'_1 \dots \mu'_k} = \mathfrak{T}_{\nu_1 \dots \nu_l}^{\mu_1 \dots \mu_k} \left| \frac{\partial x}{\partial x'} \right|^w \frac{\partial x'^{\mu'_1}}{\partial x^{\mu_1}} \cdots \frac{\partial x'^{\mu'_k}}{\partial x^{\mu_k}} \frac{\partial x^{\nu'_1}}{\partial x^{\nu_1}} \cdots \frac{\partial x^{\nu'_l}}{\partial x^{\nu_l}}. \quad (2.18)$$

Ora, sia il determinante della metrica:

$$g = |g_{\mu\nu}|. \quad (2.19)$$

Allora, g è una densità scalare di peso -2 . Infatti le trasformazioni delle coordinate della metrica sono date da (2.10), pertanto:

$$g(x^{\mu'}) = \left| \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^{\mu}} \right|^{-2} g(x^{\mu}). \quad (2.20)$$

L'elemento di volume dV associato alla n -forma

$$dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n,$$

permette di costruire l'invariante

$$\sqrt{-g} dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n. \quad (2.21)$$

Per cui $\int \sqrt{-g} dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n = \int \sqrt{-g} dV$ è un invariante. Se T è uno scalare, allora anche $\int T \sqrt{-g} dV$ lo è. In tal caso $T \sqrt{-g}$ è la densità scalare.

Si può naturalmente estendere questo concetto a un tensore qualsiasi:

$$\mathfrak{T}_{\mu}^{\nu} = T_{\mu}^{\nu} \sqrt{-g} \quad (2.22)$$

è la densità tensoriale energia-impulso. L'integrale di $\mathfrak{T}_{\mu}^{\nu} = T_{\mu}^{\nu} \sqrt{-g}$ non è un tensore, ma nel limite per cui l'integrale venga eseguito su una regione infinitesimale, la sua legge di trasformazione diventa analoga a quella di un tensore. L'equazione (2.17) può essere ora scritta nei 2 modi equivalenti ([Tol34]):

$$\partial_{\nu} \mathfrak{T}_{\mu}^{\nu} - \frac{1}{2} \mathfrak{T}^{\alpha\beta} \partial_{\mu} g_{\alpha\beta} = 0, \quad (2.23)$$

$$\partial_{\nu} \mathfrak{T}_{\mu}^{\nu} + \frac{1}{2} \mathfrak{T}_{\alpha\beta} \partial_{\mu} g^{\alpha\beta} = 0. \quad (2.24)$$

In coordinate proprie, $g_{\mu\nu}$ assume localmente la forma normale (nel nostro caso, di Minkowski), e pertanto $\frac{\partial g_0^{\alpha\beta}}{\partial x^{\mu}} = 0$, e $\frac{dx^{\mu}}{ds} = (1, 0, 0, 0)$. Questo porta alla conclusione che

$$\partial_{\mu} \frac{dt}{ds} = 0. \quad (2.25)$$

Tornando a (2.13), per $\mu = 1$ si ottiene

$$\frac{\partial p_0}{\partial x} + (\rho_0 + p_0) \frac{\partial}{\partial t} \frac{dx}{ds} = 0,$$

e, per le considerazioni precedenti, quindi questa è uguale a

$$\frac{\partial p_0}{\partial x} + (\rho_0 + p_0) \frac{du_x}{ds} = 0. \quad (2.26)$$

Equazioni analoghe si ottengono per $\mu = 2, 3$. Per $\mu = 4$ invece,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left((\rho_0 + p_0) \frac{dx}{ds} \frac{dt}{ds} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left((\rho_0 + p_0) \frac{dy}{ds} \frac{dt}{ds} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left((\rho_0 + p_0) \frac{dz}{ds} \frac{dt}{ds} \right) + \\ + \frac{\partial}{\partial t} \left((\rho_0 + p_0) \frac{dt}{ds} \frac{dt}{ds} \right) - \frac{\partial p_0}{\partial t} = 0. \end{aligned}$$

la quale può essere riscritta, in virtù di quanto visto prima, come

$$(\rho_0 + p_0) \nabla \mathbf{u} + \frac{\partial \rho_0}{\partial t} = 0,$$

e, moltiplicando per $\delta V_0 = \delta x_0 \delta y_0 \delta z_0$, si trova

$$\frac{d}{dt} (\rho_0 \delta V_0) = -p_0 \frac{d}{dt} (\delta V_0). \quad (2.27)$$

L'equazione (2.27) effettivamente verifica il requisito, analizzato nella sezione 1.5, per cui il tasso di variazione dell'energia è uguale al rateo al quale il lavoro sta venendo compiuto contro la pressione esterna: come in (1.57), $\dot{E} = \dot{W}$. Si ritrovano, coerentemente con il principio di covarianza generale, le leggi di conservazione dell'energia che governano il fluido perfetto nel sistema di riferimento proprio. I fluidi perfetti hanno la proprietà di comportarsi “adiabaticamente” nel sistema di riferimento proprio: il flusso di calore non contribuisce alla variazione di energia.

2.2.2 La pseudo-densità tensoriale di energia-impulso gravitazionale

Al fine di ottenere una legge di conservazione espressa come una quadridivergenza pura (cioè senza termini di sorgente a destra), è necessario introdurre la pseudo-densità tensoriale di energia-impulso gravitazionale $\mathfrak{t}_\mu^\nu$, che descrive il contributo del campo gravitazionale stesso. Si può definire la funzione lagrangiana come

$$\mathfrak{L} = \sqrt{-g} g^{\mu\nu} (\Gamma_\beta^{\mu\alpha} \Gamma_\alpha^{\nu\beta} - \Gamma_\alpha^{\mu\nu} \Gamma_\beta^{\alpha\beta}), \quad (2.28)$$

Questa espressione definisce $\mathfrak{L}$ in tutti i sistemi di coordinate, nonostante non sia una densità scalare (il termine successivo a $\sqrt{-g}$ non è un tensore). L'espressione esplicita di $\mathfrak{t}_\mu^\nu$ è:

$$\mathfrak{t}_\beta^\alpha = \frac{1}{16\pi G_N} \left(-\mathfrak{g}_\beta^{\mu\nu} \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \mathfrak{g}_\alpha^{\mu\nu}} + g_\beta^\alpha \mathfrak{L} \right). \quad (2.29)$$

Seguendo la procedura di ([Tol34] o [Edd24]) vale che:

$$\partial_\nu \mathfrak{t}_\mu^\nu = \frac{1}{2} \mathfrak{T}^{\alpha\beta} \partial_\mu g_{\alpha\beta}. \quad (2.30)$$

Questa relazione può essere ricavata esplicitamente a partire dal formalismo lagrangiano per il campo gravitazionale. Per gli scopi di questa tesi, la forma esplicita non è necessaria: è sufficiente la proprietà fondamentale (2.30). Sommando (2.24) e (2.30), i termini di sorgente si cancellano e si ottiene la legge di conservazione totale:

$$\partial_\nu(\mathfrak{T}_\mu^\nu + \mathfrak{t}_\mu^\nu) = 0. \quad (2.31)$$

Questa relazione, nonostante non sia un'equazione tensoriale, vale in tutti i sistemi di coordinate. Permette la conservazione dell'energia e della quantità di moto totali di un sistema isolato, come verrà approfondito nei seguenti paragrafi. Essa costituisce la base per la formulazione del Primo Principio della termodinamica in relatività generale.

2.2.3 La metrica di un sistema a simmetria sferica

La soluzione generale più semplice per le equazioni di campo di Einstein è la soluzione per una sorgente statica a simmetria sferica. Ipotizzando che le proprietà della sorgente si riflettano sulla metrica che essa genera, si usano le isometrie sopra citate. Devono infatti esistere un vettore di Killing di tipo tempo $\xi_t = \frac{\partial}{\partial t}$, e tre vettori di Killing di tipo spazio che rispettino:

$$[\xi^{(i)}, \xi^{(j)}] = \epsilon_{ijk} \xi^{(k)}, \quad (2.32)$$

cioè le relazioni di commutazione di $SO(3)$: ho 3 ulteriori $\xi_{\theta_i} = \frac{d}{d\theta_i}$. Inoltre, questi devono essere conservati nel tempo (cioè commutare con ξ_t). In tal caso, si ha in generale che la soluzione può essere posta nella forma:

$$ds^2 = e^\nu dt^2 - e^\mu (dr^2 + r^2 d\Omega^2), \quad (2.33)$$

ove $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi$, e $\mu = \mu(r)$, $\nu = \nu(r)$. Attraverso quest'espressione possono essere usate le coordinate polari su sfere a tempo costante, cioè una varietà a simmetria sferica può essere foliata in sfere S^2 . Questo risultato era già garantito dal teorema di Frobenius applicato ai vettori di Killing (2.32) ([F80]).

In forma matriciale la metrica assume l'espressione diagonale:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} e^{\nu(r)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -e^{\mu(r)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -e^{\mu(r)} r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -e^{\mu(r)} r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}. \quad (2.34)$$

In particolare, il fattore di redshift gravitazionale è

$$\sqrt{g_{00}} = e^{\nu/2}. \quad (2.35)$$

Mentre il determinante risulta essere:

$$g = -e^{3\mu(r)+\nu(r)} r^4 \sin^2 \theta. \quad (2.36)$$

In coordinate cartesiane, essendo $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$, invece:

$$ds^2 = e^\nu dt^2 - e^\mu(dx^2 + dy^2 + dz^2), \quad (2.37)$$

e quindi

$$g = -e^{3\mu(r)+\nu(r)}. \quad (2.38)$$

Si può anche notare come, coerentemente con (2.20), essendo lo Jacobiano del cambio di coordinate cartesiane-polari $J = (r^2 \sin \theta)^{-1}$, la relazione tra (2.38) e (2.36) fosse già nota.

2.3 I due princìpi nella relatività generale

La seguente sezione indaga come variano le leggi della termodinamica in presenza di un campo gravitazionale. L'obbiettivo è enunciare i 2 princìpi in maniera totalmente covariante. Relativizzare in uno spazio-tempo curvo la termodinamica comporta riconsiderazioni radicali sulla struttura della teoria stessa. Per quanto riguarda il primo principio, in realtà la fisica è quasi inalterata, come sarà esposto nei paragrafi seguenti facendo uso e sviluppando i risultati trovati in 2.2. Il secondo principio (così come il principio 0, che sarà analizzato a fondo nel capitolo 2.4), invece subisce forti modifiche concettuali.

2.3.1 Il primo principio

L'equazione (1.1) riassume dentro di sé due importanti princìpi: la conservazione dell'energia e la distinzione tra lavoro e calore. Infatti, eguagliando la variazione di energia con ciò che viene trasferito attraverso la sua superficie soddisfa il primo requisito, e dividendo le due tipologie di trasferimento soddisfa il secondo.

Attraverso i princìpi della meccanica relativistica esposti in 2.2, sfruttando solo le equazioni di campo (2.6), si è giunti all'espressione (2.31). Quest'equazione riassume già il primo principio in forma covariante.

Siano $x^1 = x$, $x^2 = y$, $x^3 = z$ le coordinate di tipo-spazio e $x^0 = t$ la coordinata di tipo tempo. Moltiplicando (2.31) per $dV = dxdydz$, e integrando a tempo fissato (cioè sull'iperpiano definito da $t = cost$), si ottiene l'uguaglianza:

$$\int dV \frac{\partial}{\partial t}(\mathfrak{T}_\mu^0 + \mathfrak{t}_\mu^0) = - \int dV \left(\frac{\partial}{\partial x}(\mathfrak{T}_\mu^1 + \mathfrak{t}_\mu^1) + \frac{\partial}{\partial y}(\mathfrak{T}_\mu^2 + \mathfrak{t}_\mu^2) + \frac{\partial}{\partial z}(\mathfrak{T}_\mu^3 + \mathfrak{t}_\mu^3) \right). \quad (2.39)$$

Ora, siano le regioni di integrazione tali per cui i limiti d'integrazione siano costanti x a x' , y a y' e z a z' . Si può quindi riscrivere, in virtù del teorema di Gauss-Green:

$$\frac{d}{dt} \int dV (\mathfrak{T}_\mu^0 + \mathfrak{t}_\mu^0) = - \int dydz [\mathfrak{T}_\mu^1 + \mathfrak{t}_\mu^1]_{x'}^{x'} - \int dzdx [\mathfrak{T}_\mu^2 + \mathfrak{t}_\mu^2]_{y'}^{y'} - \int dxdy [\mathfrak{T}_\mu^3 + \mathfrak{t}_\mu^3]_{z'}^{z'}. \quad (2.40)$$

Scegliendo i limiti di integrazione come quelli che determinano la regione fisica del sistema (cioè l'effettiva superficie), allora è chiaro il perché della forma in cui è stata messa quest'equazione: è sufficiente conoscere il valore di $\mathfrak{T}_\mu^\nu$ e $\mathfrak{t}_\mu^\nu$ ai bordi.

Ora, la (2.40) ricorda la (1.1) in maniera più esplicita: il tasso a cui varia l'integrale di volume della quantità $\mathfrak{T}_\mu^4 + \mathfrak{t}_\mu^4$ eguaglia il flusso delle varie quantità $\mathfrak{T}_\mu^i + \mathfrak{t}_\mu^i$. Per verificare più direttamente la compatibilità tra le due si consideri il caso limite nello spazio-tempo di Minkowski (che, localmente, è sempre attuabile). Allora, $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ e quindi $\sqrt{-g} = 1$, cioè $\mathfrak{T}_\mu^\nu = T_\mu^\nu$. Inoltre, $\mathfrak{t}_\mu^\nu = 0$. L'espressione (2.31) si riduce evidentemente a (2.13), e (2.40) a

$$\frac{d}{dt} \int dV(T_\mu^0) = - \int dydz[T_\mu^1]_x^{x'} - \int dzdx[T_\mu^2]_y^{y'} - \int dxdy[T_\mu^3]_z^{z'}. \quad (2.41)$$

A questo risultato, noto già nella relatività ristretta, consegue la conservazione dell'energia T_0^0 e dell'impulso T_i^0 . In relatività generale, i principi continuano a valere se si definisce

$$J_\mu = \int dV(\mathfrak{T}_\mu^0 + \mathfrak{t}_\mu^0), \quad (2.42)$$

con $\mu = 1, 2, 3$ le componenti della quantità di moto della regione e $\mu = 0$ l'energia della stessa.

In questa interpretazione, le quattro $\mathfrak{T}_\mu^0$ diventano le densità di energia e quantità di moto, e le $\mathfrak{t}_\mu^0$, le densità di energia potenziale gravitazionale e quantità di moto. La somma delle energie "proprie" dei singoli elementi del fluido non è necessariamente conservata in presenza di un campo gravitazionale, perché è come se anche a quest'ultimo debba essere associata una certa forma di densità di energia, come è stato appena dimostrato. J_μ , pur non essendo un tensore, definita come in (2.42), è valida in tutti i sistemi di coordinate.

Per un sistema isolato, lontano dalla sorgente della metrica $g_{\mu\nu}$, la regione spaziale considerata può essere considerata immersa in uno spazio-tempo piatto. Ma allora, i valori che l'integrando assume ai bordi sono costanti e si ha:

$$\frac{d}{dt} J_\mu = 0. \quad (2.43)$$

Ecco che la conservazione è resa più esplicita.

Si consideri ora un sistema Σ che, al tempo iniziale t' , è in un dato stato statico, cioè tale per cui non ci siano cambiamenti rispetto a t , e si permetta che il sistema subisca una variazione fino al tempo t'' in cui ritorna statico. Se si ipotizza che l'ambiente non venga coinvolto da questa trasformazione, non ci possono essere trasferimenti di energia o impulso tra Σ e ciò che lo circonda. Le quantità $\mathfrak{T}_\mu^i + \mathfrak{t}_\mu^i$ dipendono solo dalla metrica, come si può facilmente vedere da (2.6), (2.22) e (2.29). Quindi, non dipendendo da t , rimangono costanti nell'intervallo $[t', t'']$. Essendo, a $t = t'$, il lato destro di (2.40) uguale

a 0, allora anche il lato sinistro lo sarà, e, rimanendo costante nel tempo, rimarrà tale durante tutto il processo. Dipendendo $\mathfrak{T}_\mu^\nu$ e $\mathfrak{t}_\mu^\nu$ solo da $g_{\mu\nu}$ o sue derivate prime e seconde, la condizione di non coinvolgere l'ambiente e di transire da uno stato stazionario a un altro, è che:

$$\delta(g_{\mu\nu}) = \delta(\partial_\alpha g_{\mu\nu}) = \delta(\partial_{\alpha\beta}^2 g_{\mu\nu}) = 0. \quad (2.44)$$

Questa è una condizione sufficiente affinché il sistema e l'ambiente non interagiscono quando avviene un cambiamento di stato interno a Σ .

Non resta che vedere come, in relatività generale, venga reso conto della distinzione tra lavoro e calore. Prima di poter fare ciò, è necessario affrontare la relativizzazione del secondo principio.

2.3.2 Il secondo principio

Il modo più semplice e diretto di riformulare il secondo principio della termodinamica nella relatività generale, è esprimere (1.42) in maniera covariante nel seguente modo:

$$\partial_\mu \mathfrak{s}^\mu \delta t \delta x \delta y \delta z \geq \frac{\delta Q_0}{T_0}, \quad (2.45)$$

dove è stata definita la densità tensoriale di entropia, da (1.41), come:

$$\mathfrak{s}^\mu = s^\mu \sqrt{-g}. \quad (2.46)$$

Posso riscriverla, dalla proprietà che $\nabla_\mu(A^\mu)\sqrt{-g} = \partial_\mu \mathfrak{A}^\mu$ ([Tol34]), in questo modo:

$$\nabla_\mu s^\mu \sqrt{-g} \delta t \delta x \delta y \delta z \geq \frac{\delta Q_0}{T_0}, \quad (2.47)$$

L'espressione (2.45) soddisfa il principio di covarianza. Infatti: $\nabla_\mu s^\mu$ è scalare, così come il volume invariante $\sqrt{-g} \delta t \delta x \delta y \delta z$ (si veda (2.21)) e $\frac{\delta Q_0}{T_0}$. Vale anche ovviamente il principio di equivalenza (per uno spazio-tempo piatto, $\sqrt{-g} = 1$ e quindi (2.45) si riduce a (1.42)). La formulazione appena vista è un postulato, non è stata trovata attraverso teoremi o risultati noti, ma ne è stata ipotizzata una forma che sia la più consistente possibile con la fisica classica e relativistica.

Alcune proprietà fondamentali del 2o principio “classico” sono preservate. Innanzitutto, i processi reversibili rimangono il limite di processi irreversibili attraverso la disuguaglianza $\geq$: l’“=” è ancora interpretabile come occorrente nei casi reversibili. Inoltre, questa proprietà si riflette sulla freccia del tempo: δt entra nell'equazione in maniera lineare. Pertanto, la validità di (2.47) dipende dal segno di δt : l'entropia (interpretata macroscopicamente, come nella fisica classica), rimane un indicatore della caratteristica unidimensionale del tempo.

In 2.31, è stata studiata la condizione per un cambiamento reversibile in un sistema statico che passa da uno stato a un altro in un intervallo $[t', t'']$ senza modificare l'ambiente

circostante. Ponendoci nella stessa situazione vista precedentemente, si può integrare l'espressione (2.47), espressa nel sistema di riferimento in cui il fluido ha velocità nulla ($\frac{dx^i}{ds} = 0$, $i = 1, 2, 3$), in tale intervallo e su tutto il volume fisico del fluido. La parte destra dell'equazione darà un risultato nullo, perché il flusso netto di calore totale è 0: è stato imposto che l'ambiente non subisca variazioni di energia (ovvero, il sistema è isolato).

$$\int_{t'}^{t''} \int_{V(\Sigma)} \frac{\partial \mathfrak{s}^0}{\partial t} \delta t \delta x \delta y \delta z \geq 0 \quad (2.48)$$

Quest'equazione porta alla conclusione che, l'entropia totale del fluido

$$S = \int_{V(\Sigma)} \mathfrak{s}^0 dx dy dz, \quad (2.49)$$

aumenta o rimane costante quando il sistema passa da uno stato statico a un altro: da (2.48)

$$S(t'') \geq S(t'). \quad (2.50)$$

All'equilibrio infatti, l'entropia è massimizzata. Ho quindi una seconda condizione, oltre alla (2.44):

$$\delta S = 0. \quad (2.51)$$

Si osservi infine che l'equazione (1.42) deriva dalla (2.45), e non viceversa. Da un punto di vista strettamente teorico infatti, è necessario postulare quest'ultima, e la prima ne è solo un caso particolare (spazio-tempo piatto). Cioè, questo risultato è più generale e quindi può essere effettivamente considerato come il secondo principio della termodinamica relativistica ([Tol28]).

Nella prossima sezione, sarà analizzato il principio zero della termodinamica relativistica attraverso la legge di Tolman, a partire da considerazioni sull'equilibrio termodinamico in presenza di campi gravitazionali.

2.4 Il principio zero: La legge di Tolman-Ehrenfest

In fisica classica, il principio zero della termodinamica implica che in un sistema all'equilibrio termico, la temperatura è uguale per ogni punto dello stesso (1.3). Ciò permette di eseguire una misura (locale) in un punto qualsiasi, a cui si associa una temperatura $T_{cl,0}$, ed estendere il risultato a tutti gli altri punti $\mathbf{x}$ dello stesso:

$$T_{cl}(\mathbf{x}) = T_{cl,0}. \quad (2.52)$$

In relatività generale, questa relazione non è più valida: per un osservatore, la temperatura di un corpo all'equilibrio immerso in un campo gravitazionale subisce delle variazioni punto per punto. Questo effetto è spiegato dalla legge di Tolman-Ehrenfest.

2.4.1 La legge di Tolman-Ehrenfest

La legge di Tolman-Ehrenfest afferma che in uno spaziotempo munito di un vettore di Killing $\xi_t = \partial_t$ di tipo tempo in una regione Σ , cioè statico, vale:

$$T_0 \sqrt{g_{00}} = \text{cost.} \quad (2.53)$$

su tutto Σ . T_0 è la temperatura locale, $g_{00} = \xi_\mu \xi^\mu$ è il fattore di redshift gravitazionale. La dimostrazione di quest'equazione si basa su 4 assunzioni principali ([Xia24]):

1. Si sta considerando un fluido perfetto, descritto da (2.12).
2. Le quantità misurate localmente da un osservatore stazionario seguono le ordinarie relazioni termodinamiche. In particolare, la (1.1):

$$d\phi_0 = \frac{d\rho_0}{T_0} - \frac{\mu_0 dn_0}{T_0}, \quad (2.54)$$

(ove $\mu_0 \neq 0$ è il potenziale chimico e n_0 è la densità numerica di particelle), e l'equazione di continuità

$$\nabla_\mu n^\mu = 0, \quad (2.55)$$

cioè la conservazione della corrente di numero di particelle $n^\mu = n_0 \frac{dx^\mu}{ds}$. Questa scelta è conseguenza del principio di equivalenza.

3. Le particelle del fluido seguono un'equazione di stato del tipo

$$p_0 = p_0(\rho_0) \quad (2.56)$$

Inoltre, data la coppia (ρ_0, p_0) , non può essere univocamente determinata la coppia (T_0, n_0) . Questa scelta è ben motivata dalla conoscenza delle tipiche equazioni di stato che governano le particelle.

4. All'equilibrio, l'entropia S_0 in Σ è massimizzata da n_0 , fissati gli altri parametri. Questo perché, come visto in 2.3.2, la condizione per l'equilibrio termodinamico statico è data da (2.51).

Le equazioni di Eulero (o del moto), come visto precedentemente, sono contenute in (2.17). Proiettando il quadrivettore a sinistra dell'equazione lungo la quadrirelatività u_ν e imponendo l'equazione di continuità (2.55), si ottengono le equazioni di Eulero relativistiche ([Lan87]):

$$(\rho_0 + p_0) u^\mu \nabla_\mu u^\nu = (g^{\mu\nu} - u^\nu u^\mu) \nabla_\mu p_0. \quad (2.57)$$

Nel caso in cui la metrica statica sia data da (2.34), (2.37), e imponendo la velocità del fluido $\frac{dx^i}{ds} = 0$, si ottengono:

$$\frac{dp_0}{dr} = -\frac{\rho_0 + p_0}{2} \frac{d\nu}{dr}. \quad (2.58)$$

Ora, l'entropia è data da (2.49), mentre il numero totale di particelle in $V(\Sigma)$ da:

$$N = \int_{V(\Sigma)} \mathbf{n}^0 dx dy dz, \quad (2.59)$$

essendo $\mathbf{n}^\mu = n^\mu \sqrt{-g}$. Si massimizza l'entropia imponendo N come vincolo, trovando le equazioni di Eulero-Langrange di

$$L = \mathfrak{s}^0 + \lambda \mathbf{n}^0 \quad (2.60)$$

con $S' = \int_{V(\Sigma)} L dx dy dz$. Imponendo $\frac{\partial L}{\partial n_0} = 0$,

$$\frac{\partial \phi_0}{\partial n_0} + \lambda = 0 \quad (2.61)$$

cioè

$$\mu_0 = \lambda T_0. \quad (2.62)$$

Applicando (2.54) su un volume V , si ottiene

$$d(\phi_0 V) = \frac{d(\rho_0 V)}{T_0} - \frac{\mu_0 d(n_0 V)}{T_0} + p_0 dV,$$

eseguendo i differenziali, e semplificando i termini di (2.54), si salvano solo i termini con dV e quindi risulta:

$$p_0 = T_0 \phi_0 + \mu_0 n_0 - \rho_0,$$

che è la relazione di Gibbs-Duhem. Differenziando quest'espressione, e facendo uso di (2.62), si ottiene

$$dp_0 = (p_0 + \rho_0) \frac{dT_0}{T_0}. \quad (2.63)$$

Confrontando (2.63) e (2.58), si ottiene

$$T_0(r) e^{\frac{1}{2}\nu(r)} = \text{cost.}, \quad (2.64)$$

che, da (2.35), è la legge di Tolman (2.53) in un campo statico a simmetria sferica.

Si può però facilmente generalizzare nel caso di un campo statico qualsiasi il cui elemento di linea è dato da ([Tol30]):

$$ds^2 = g_{00} dt^2 + g_{ij} dx^i dx^j, \quad g_{ij} < 0 \text{ per } i = j. \quad (2.65)$$

In tal caso, la legge diventa (2.53), e quindi in generale

$$T_0(\mathbf{x}) \sqrt{g_{00}(\mathbf{x})} = \text{cost.} \quad (2.66)$$

in ogni punto di Σ .

Prima di procedere con la discussione dei risultati appena trovati, si osserva cosa succede quando si considera, invece che un fluido materiale, un gas di radiazione.

La legge di Tolman-Ehrenfest per un gas di radiazione

Nel caso particolare della radiazione da corpo nero, valgono le relazioni di Stefan-Boltzmann:

$$\begin{aligned}\mu_{BB} &= 0, \\ \rho_{BB} &= 3p_{BB}, \\ \rho_{BB} &= aT_{BB}^4, \\ p_{BB} &= \frac{1}{3}aT_{BB}^4.\end{aligned}\tag{2.67}$$

Sostituendo (2.67) in (2.58), si ha (2.64).

Pertanto, un termometro consistente in un gas di radiazione, subisce anch'esso l'influenza del campo gravitazionale. In tal caso, valgono anche le altre seguenti relazioni:

$$p_{BB}(g_{00})^2 = \text{cost.},\tag{2.68}$$

$$\rho_{BB}(g_{00})^2 = \text{cost.}\tag{2.69}$$

L'argomento di Maxwell

Già nel 1868 Maxwell studiò l'equilibrio termico di una colonna di gas soggetta al campo gravitazionale terrestre, ovviamente privo del formalismo della relatività generale, ma basandosi sulla concezione Newtoniana di gravità e sulla termodinamica classica ([C68], [C02]). Osservò che, a causa del secondo principio della termodinamica, due colonne di sostanze diverse, le cui basi siano collegate attraverso una lastra perfettamente conduttiva, dovessero avere la stessa temperatura a ogni altezza. In altre parole, il gradiente termico instaurato non deve dipendere dal tipo di sostanza. Infatti, qualora non fosse così, si potrebbe trasferire calore da una colonna a un'altra alla stessa altezza e convertirlo poi in lavoro in un ciclo che viola esplicitamente il principio di Clausius, essendo un moto perpetuo. La conclusione di Maxwell fu che la temperatura è uniforme: la teoria cinetica dei gas, nella sua formulazione non relativistica, non prevede l'influenza della gravità nella distribuzione delle particelle. Questo argomento, come visto prima, nell'ambito della relatività generale è errato. Tuttavia, non solo permette di eseguire delle considerazioni sulla legge di Tolman-Ehrenfest: esso è infatti applicabile a tutte le altre forze non gravitazionali. Ad esempio, se la colonna fosse immersa in un campo elettrico, invece che in uno gravitazionale, non si creerebbe un gradiente termico (Si veda [San19]).

2.4.2 La definizione di temperatura

Dalla derivazione appena vista della legge di Tolman-Ehrenfest, è evidente che la definizione di temperatura utilizzata sia la

$$\frac{1}{T} = \frac{dS}{dE}\tag{2.70}$$

In particolare, qua T, S, E , sono dipendenti dalla posizione $\mathbf{x}$. È naturale chiedersi quindi quale osservatore misuri queste quantità termodinamiche.

La legge (2.53) permette di comparare misure di temperature eseguite in posizioni diverse di una varietà spazio-temporale. Si può definire quindi come “Temperatura locale” T_l , la quantità $T_0(\mathbf{x})$ che compare nella legge di Tolman, cioè quella misurata da un termometro nel punto $\mathbf{x}$. Sia invece definita la “Temperatura globale” T_g , la quantità $T_0(\mathbf{x})\sqrt{g_{00}(\mathbf{x})}$ ([Chu25]). La legge di Tolman-Ehrenfest non fornisce direttamente una definizione di temperatura: come per il caso della termodinamica nella relatività ristretta, bisogna scegliere l’interpretazione più naturale, cioè definire T come T_l o come T_g .

Temperatura Locale

Scegliere T_l comporta una radicale modifica alle leggi della termodinamica.

Il principio 0 viene violato: l’equilibrio termico non è più una proprietà transitiva. Infatti, si immaginino 3 sistemi X, Y e Z immersi in un campo gravitazionale. Sia X posto all’altezza h_X , per cui si ha $T_{0,X}$, e Z all’altezza h_Z , per cui si ha $T_{0,Z}$. Ora, sia Y , lungo almeno $|h_Z - h_X|$, in equilibrio termico con entrambi contemporaneamente. Questo non implica che X e Z siano in equilibrio termico tra di loro: infatti $T_{0,X} = \sqrt{\frac{g_{00}(h_Z)}{g_{00}(h_X)}} T_{0,Z} \neq T_{0,Z}$. Infatti, lungo Y si è generato naturalmente un gradiente di temperatura locale in virtù del solo campo gravitazionale. Se T_l fosse la “vera” temperatura, ci sarebbe un flusso di calore all’interno di un corpo all’equilibrio.

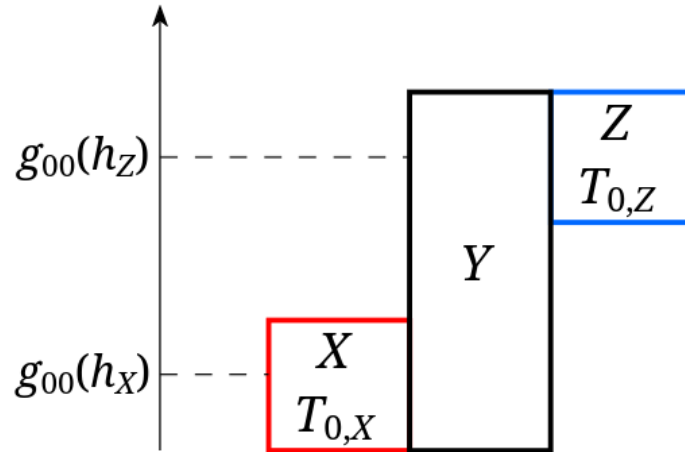


Figura 2.1: 3 sistemi all’equilibrio in un campo gravitazionale. X non è in equilibrio con Z nonostante entrambi lo siano individualmente con Y .

Il primo principio invece non subisce modifiche: (1.1) rimane sempre vero localmente

(attraverso (2.31)) ([Chu25]).

È violata la formulazione di Clausius del secondo principio:

“Il calore non può mai passare da un corpo più freddo a uno più caldo senza che avvenga contemporaneamente qualche altro cambiamento”.

Pertanto, è impossibile avere un frigorifero che non sia alimentato da lavoro. T_l invece fa sì che un corpo più freddo possa cedere calore a un corpo più caldo solo in virtù della differenza di gravità tra i due. Siano infatti, come prima, X il corpo a $T_{0,X}$ e h_X , e Z a $T_{0,Z} > T_{0,X}$ e h_Z . Qualora il gradiente di $\sqrt{g_{00}}$ sia più intenso di quello di T_0 , il principio viene violato. Infatti, se $T_{0,X}\sqrt{g_{00}(h_X)} > T_{0,Z}\sqrt{g_{00}(h_Z)}$ il calore passerebbe da X a Z .

La formulazione di Kelvin:

“È impossibile realizzare un ciclo termodinamico il cui unico risultato sia la conversione di tutto il calore assorbito da una sorgente omogenea in lavoro”

invece rimane valida. Si consideri una colonna di gas verticale, ovvero per cui g_{00} vari lungo la stessa. Si connettano gli estremi superiore e inferiore attraverso un filo conduttore, similmente a quanto visto nell'esempio di Maxwell. Si potrebbe pensare che, in virtù della differenza di T_l tra base e sommità, il filo possa condurre calore dall'alto in basso e generare un moto perpetuo. Ma, in virtù dell'universalità della gravità, non c'è modo affinché il filo stesso sia in equilibrio: subisce anch'esso l'effetto Tolman e pertanto si genera un gradiente termico al suo interno. Non può quindi agire da conduttore perché, interpretando T_l come temperatura, non riesce a trasmettere il calore dal basso verso l'alto. In conclusione, T_l è una scelta che, pur “salvando” il moto perpetuo, costringe a riscrivere totalmente una nuova termodinamica.

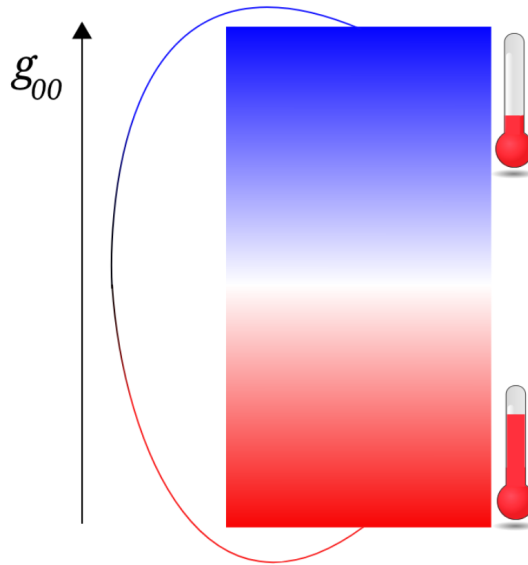


Figura 2.2: Colonna di gas in un campo gravitazionale. Anche il cavo subisce un gradiente termico, pertanto non può condurre calore.

Temperatura Globale

La scelta di T_g per definire la temperatura invece lascia invariata la termodinamica, al costo di renderla inaccessibile all'osservatore locale. Infatti, evidentemente il principio 0 così come la formulazione di Clausius del secondo principio rimangono validi. All'equilibrio, $T_g(\mathbf{x}) = \text{cost.}$, pertanto, perde di significato confrontare i valori di termometri posti in luoghi diversi di un sistema. Questi, a contatto con X e Z (negli esempi del paragrafo precedente), forniscono valori diversi, ma $T_X = T_Z$. In conclusione, X e Z sono all'equilibrio termico se lo sono con Y , e rimane impossibile trasferire calore da un corpo più "freddo" a uno più "caldo" (dove ora la disuguaglianza di temperatura va interpretata su T_g).

Si consideri un sottile tubo di ghiaccio a 0°C e 1atm , posto inizialmente in "orizzontale" (ovvero, a $g_{00,o} = \text{cost.}$), che venga capovolto in verticale. Scegliendo T_l , la temperatura della base del tubo sarebbe minore della cima. Secondo la termodinamica classica la variazione del campo gravitazionale non ha alcuna influenza sul cambiamento di fase del sistema. Pertanto, è da escludere che il ghiaccio inizi a sciogliersi alla base, che si trova a $g_{00,b} < g_{00,o}$: bisognerebbe creare una nuova formula per il punto di fusione del ghiaccio dipendente esplicitamente da g_{00} , e di conseguenza anche cambiare tutto ciò che sappiamo sulla termodinamica.

T_g , al contrario, ha il grande vantaggio di lasciare la termodinamica immutata, anche se un osservatore locale non può applicare le leggi usuali "lontano" dal punto in cui si trova. Per costruire un termometro, infatti, è necessario fare riferimento a dei "punti fissi termometrici", ovvero corpi preparati attraverso una specifica procedura tale per cui un termoscopio in contatto con il corpo riproduce lo stesso stato termoscopico (come il punto di fusione dell'acqua). Attraverso questi, è possibile creare una scala termometrica che sia valida universalmente.

Si consideri l'esempio appena visto del tubo di ghiaccio, e si immagini di ripetere l'esperimento mentale con un cilindro pieno di acqua a 100°C alla stessa altezza, che inizialmente aveva il ghiaccio, e poi è stato ruotato nello stesso identico modo. A questo punto, un osservatore alla base, A , costruisca un termometro tarandolo attraverso i due punti fissi. Lo stesso farà un osservatore in cima B . A questo punto si hanno due termometri. Però, questi perdono di significato non localmente: se i due osservatori si scambiano termometri, questi non sono più validi. Infatti, se B dà il suo termometro ad A , questo, misurando la temperatura della base del tubo di ghiaccio, vedrebbe che l'altezza della colonna di mercurio è sopra lo 0. La temperatura della colonna di acqua bollente subirebbe un effetto analogo. Da questo, A dovrebbe concludere che il ghiaccio non fonde a 0°C e che l'acqua non bolle a 100°C ? No, semplicemente che le leggi termodinamiche che sono valide in B , non sono accessibili a lui, perché ogni misura di temperatura deve essere locale.

Il limite Newtoniano

Il motivo per cui la presenza di un gradiente di temperatura non è mai stato un ostacolo nello sviluppo della termodinamica classica è che esso, sulla superficie terrestre, è totalmente trascurabile. Fuori dalla superficie terrestre, vale la soluzione radiale di Schwarzschild di (2.6). In tal caso $T_{\mu\nu} = 0$, e la metrica, data da (2.65), in coordinate sferiche ammette una soluzione del tipo ([S04]):

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{R_S}{r} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{1 - \frac{R_S}{r}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}, \quad (2.71)$$

ove $R_S = 2G_N M$ è il raggio di Schwarzschild. Pertanto, $g_{00} = 1 - \frac{R_S}{r}$. (2.64) diventa, derivando entrambi i lati dell'equazione:

$$\frac{dT_0}{dr} \sqrt{1 - \frac{R_S}{r}} + T_0 \frac{d\sqrt{1 - \frac{R_S}{r}}}{dr} = 0.$$

Nel limite Newtoniano di campo debole, il sistema si trova a $r \gg R_S$, e quindi, al primo ordine, $\sqrt{1 - \frac{R_S}{r}} \simeq 1 - \frac{R_S}{2r}$. Si applichi questa approssimazione a (2.64): essendo l'accelerazione di gravità $g = -\frac{G_N M}{r^2} = -\frac{R_S}{2r^2}$, si ha la legge di Tolman in approssimazione di campo debole per un campo a simmetria sferica:

$$\frac{d \ln T_0}{dr} = -g. \quad (2.72)$$

Per un campo statico qualsiasi, naturalmente vale:

$$\frac{\nabla T_0}{T_0} = -\mathbf{g}. \quad (2.73)$$

In prossimità del suolo terrestre, applicando il limite Newtoniano (ricordando che $R_{S,T} \simeq 1\text{cm} \ll R_T \simeq 6 \cdot 10^8\text{cm}$), sapendo che $g = 9.81\text{ms}^{-2}$, vale:

$$\frac{d \ln T_0}{dr} \simeq 10^{-18}\text{cm}^{-1}. \quad (2.74)$$

Questo risultato conferma quanto detto in precedenza: la termodinamica classica si è potuta sviluppare senza tenere conto degli effetti gravitazionali.

2.5 Applicazioni

2.5.1 La legge di Klein

Direttamente dalla legge di Tolman è possibile ricavare un'altra importante relazione per i fluidi all'equilibrio in un campo gravitazionale a simmetria sferica: la legge di Klein ([Kle49]). Infatti, l'uguaglianza (2.62) suggerisce come, se vale (2.64), allora anche:

$$\mu_0(r)e^{\frac{1}{2}\nu(r)} = \text{cost.} \quad (2.75)$$

Cioè, il potenziale chimico μ subisce un effetto analogo alla temperatura T_0 . Questo effetto venne già individuato da Tolman e da Klein, senza però che si accorgessero che l'originale dimostrazione del primo dell'omonima legge prevedeva che $\mu = 0$ (radiazione). La dimostrazione qua fatta, invece, è più generale e permette di tenere in considerazione anche il caso $\mu \neq 0$. In realtà, questa legge è comunque ristretta a una classe di corpi: i fluidi perfetti. Infatti, in generale, il rapporto $\frac{\mu}{T}$ non è costante (si pensi ad esempio a un gas di van der Waals).

Nel limite newtoniano, come già visto nel paragrafo precedente, $\sqrt{g_{00}} \simeq 1 + \phi$, dove ϕ è il potenziale gravitazionale (negativo). Sviluppando al primo ordine, la legge di Klein (2.75) diventa:

$$\mu_0(\mathbf{x})(1 + \phi(\mathbf{x})) \simeq \text{cost.} \quad (2.76)$$

Per una particella di massa m , quindi:

$$\mu_0(\mathbf{x}) + m\phi(\mathbf{x}) \simeq \text{cost.} \quad (2.77)$$

Infatti, μ_0 presente nella legge di Klein è il potenziale chimico relativistico, il quale tiene anche conto dell'energia inerziale m : è uguale a quello classico μ_{cl} a meno di questa costante. Pertanto, trascurando il termine $\mu_{cl}\phi$ (di secondo ordine), vale:

$$(m + \mu_{cl})(1 + \phi) \simeq m + \mu_{cl} + m\phi \simeq \text{cost.}$$

Questa appena vista è esattamente la legge di Gibbs classica, valida per l'equilibrio di un fluido in un campo gravitazionale:

$$\mu_{cl} + mgz = \text{cost.} \quad (2.78)$$

Pertanto, la legge di Klein (2.75) è la generalizzazione relativistica della (2.78): anche qui, il limite Newtoniano coincide con i fatti sperimentalmente osservati per campi gravitazionali deboli.

2.5.2 Applicazioni astrofisiche

Verranno fatti dei cenni sulle possibili applicazioni che la formulazione relativistica della termodinamica ha in vari ambiti dell'astrofisica e della cosmologia. Questo paragrafo finale non ha la pretesa di essere esaustivo, ma solo di mostrare l'applicabilità della teoria.

Stelle di Neutroni

Le stelle di neutroni sono tra gli oggetti più estremi del nostro Universo. Sono il nucleo residuo del collasso di supernove di tipo II, originate da stelle con massa compresa tra le 8 e le 25 masse solari. La loro densità può raggiungere valori di $10^{14-15} \text{ g cm}^{-3}$, superando quella del nucleo atomico: a densità superiori, la stella collassa in un buco nero ([CO17]). Le stelle di neutroni, per questo motivo, sono altamente degeneri, ma la fisica dell'interno di queste stelle è ancora un ampio campo di studi. In queste condizioni, il campo gravitazionale è così intenso che il fattore di redshift $\sqrt{g_{00}}$ varia significativamente tra l'interno e la superficie della stella: la temperatura locale è molto più elevata nelle regioni più interne.

Nel 1939, Oppenheimer e Volkoff ([J R39]) calcolarono che la massa massima di una stella di neutroni composta da un gas ideale di neutroni completamente degeneri (e quindi a temperatura zero, senza pressione termica e senza forze nucleari) fosse di circa $0.7 M_{\odot}$. Questo valore, ottenuto per un'equazione di stato estremamente semplificata, è ben al di sotto delle masse osservate oggi, che possono superare le $2 M_{\odot}$. Con equazioni di stato più complete, che includono le forze nucleari repulsive, il limite di Oppenheimer-Volkoff si attesta tra 2.5 e $3 M_{\odot}$. Per le proto-stelle di neutroni, oggetti estremamente caldi che si formano subito dopo il collasso del nucleo di una supernova, la pressione termica gioca un ruolo cruciale. Infatti, in questo ambito, Roupas ([Rou15]) ha studiato l'equilibrio termico di un gas ideale auto-gravitante in relatività generale, tenendo conto esplicitamente dell'effetto Tolman-Ehrenfest, ma trascurando le forze nucleari. Risulta che nel limite di basse temperature si recupera il classico limite di Oppenheimer-Volkoff, mentre ad alte temperature, la sola pressione termica (più intensa rispetto al caso classico a causa dell'effetto di Tolman-Ehrenfest), può sostenere masse paragonabili a quelle osservate. Il risultato principale che Roupas trova è un limite superiore di massa di $2.43 M_{\odot}$, ottenuto a una temperatura di Tolman di $1.4 \times 10^{13} \text{ K}$ (sovrastimata, perché sono trascurate le forze nucleari) e un raggio di 15.2 km . Il calcolo mostra che, anche trascurando le forze nucleari, la pressione termica può sostenere una stella di $2 M_{\odot}$ a temperature dell'ordine di 10^{12} K , compatibili con quelle delle proto-stelle di neutroni calde.

CMB

Un'applicazione della legge di Tolman-Ehrenfest riguarda il fondo cosmico a microonde (CMB).

La cosmologia moderna si basa sul Principio Cosmologico, secondo il quale l'universo, osservato su scale sufficientemente grandi (maggiori di $\sim 100 \text{ Mpc}$), appare omogeneo e isotropo. Questa è una “traduzione” in termini geometrici del Principio Copernicano, secondo il quale noi non siamo osservatori preferenziali, e delle osservazioni astronomiche, che suggeriscono un'isotropia su grande scala. Il modello che descrive un tale universo è

la metrica FLRW (Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker). Un'analisi approfondita su questo argomento è fuori dallo scopo di questa tesi. Basti sapere che, per un universo spazialmente piatto (con parametro di curvatura spaziale $k = 0$), la metrica può assumere la forma:

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t) (dx^2 + dy^2 + dz^2), \quad (2.79)$$

ove $a(t)$ è il fattore di scala, che descrive l'espansione dell'universo, legato al fattore di redshift z dalla nota relazione

$$a(t) = \frac{1}{1+z}. \quad (2.80)$$

Una trasformazione conforme a una metrica $g_{\mu\nu}$ permette di conservare gli angoli tra due vettori (in relatività, essa preserva la struttura causale e i coni luce $ds^2 = 0$). La metrica FLRW non è propriamente statica, cioè non ammette vettori di Killing di tipo tempo, ma è conformemente statica: può essere riscritta come la metrica di Minkowski (statica) moltiplicata per un fattore conforme $\Omega = a(\eta)$, dove η è il tempo conforme definito dall'intervallo $dt = a(\eta)d\eta$:

$$ds^2 = a^2(\eta) (d\eta^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2). \quad (2.81)$$

La legge di Tolman-Ehrenfest si adatta facilmente a un riscaldamento conforme. Se si applica una tale trasformazione $\tilde{g}_{\mu\nu}(x^\alpha) = \Omega^2(x^\alpha)g_{\mu\nu}(x^\alpha)$, il nuovo fattore di redshift è $\tilde{g}_{00} = \Omega^2 g_{00}$. Pertanto, affinché la legge di Tolman-Ehrenfest (2.53) sia valida anche nella metrica riscalata, la temperatura deve trasformarsi come:

$$\tilde{T}(x^\alpha) = \frac{T(x^\alpha)}{\Omega(x^\alpha)}. \quad (2.82)$$

La costante è la stessa, come richiesto dall'equilibrio termodinamico ([Val23]).

La volta celeste è permeata da una radiazione di fondo il cui spettro risulta essere quello di un corpo nero alla temperatura di 2.7K. Esso è il fondo cosmico a microonde (CMB), il residuo fossile più antico dell'Universo primordiale. Questi fotoni risalgono infatti all'epoca della "ricombinazione", ovvero quando, circa 380000 anni dopo il Big Bang (ovvero, a un redshift $z = 1100$), l'Universo è diventato da opaco a trasparente alla radiazione. Questo perché prima di allora, i fotoni e gli elettroni liberi si trovavano in un ambiente così denso da generare fenomeni di scattering continui che non permettevano la creazione della materia stabile. Quando, per l'espansione dello spazio-tempo, i fotoni hanno potuto viaggiare "liberi" senza diffondere (e gli elettroni hanno iniziato a legarsi con i protoni per formare i primi atomi di idrogeno), sono arrivati fino a noi: è la superficie di ultimo scattering. La temperatura stimata all'era di questo disaccoppiamento tra materia e radiazione è di circa ~ 3000 K. Come si concilia questo valore con l'osservazione dello spettro da parte delle nostre antenne?

Applicando la relazione (2.82) al CMB in un Universo descritto da (2.81) ($\Omega = a(t)$), si

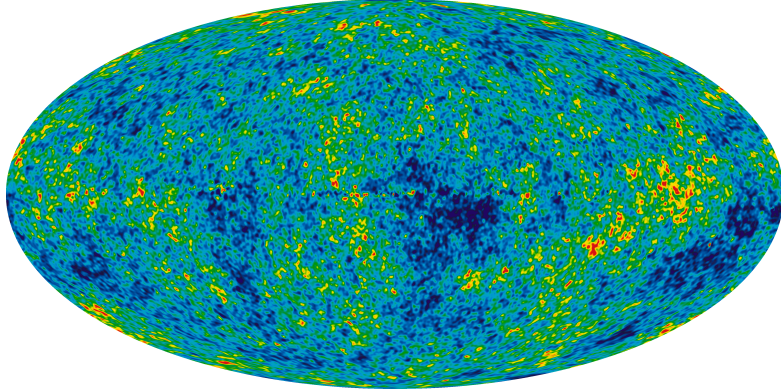


Figura 2.3: Mappa delle anisotropie della temperatura del fondo cosmico a microonde (CMB). La temperatura media è di 2.7 K, mentre le oscillazioni sono di $\sim 100 \mu\text{K}$. Crediti: NASA / WMAP Science Team.

ottiene:

$$T(t) = \frac{T_0}{a(t)}, \quad (2.83)$$

ove T_0 è la temperatura all'istante in cui $a(t_0) = 1$ (per un osservatore sulla Terra, “oggi”).

Fisicamente, questo risultato è dovuto all'espansione della lunghezza d'onda dei fotoni secondo $\lambda \propto a(t)$ (redshift), e affinché lo spettro di Planck rimanga della stessa forma, la temperatura deve seguire la stessa legge di scala. La relazione $T(t) \propto 1/a(t)$ spiega il raffreddamento del fondo cosmico da migliaia di Kelvin nell'universo primordiale ai 2.7 K osservati: all'epoca della ricombinazione, $a(t_{rec}) \simeq 1/1100$, e (2.83) è coerente con i 3000 K stimati.

L'equilibrio termodinamico in un modello cosmologico omogeneo non statico

In questo paragrafo finale saranno effettivamente applicati i risultati visti in questo capitolo, analizzando le condizioni di reversibilità in un universo omogeneo non statico. È sempre preso di riferimento il modello FLRW (2.79), qua espresso in coordinate sferiche:

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t) (dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (2.84)$$

Si ipotizza che esso sia riempito da un fluido perfetto descritto da (2.12) ([S72]): questa è una buona approssimazione, in quanto si è postulata l'omogeneità spaziale. Come al solito, per un osservatore locale a riposo con il fluido cosmico, $\frac{dx^i}{ds} = 0$, mentre $\frac{dx^0}{ds} = 1$. Questo fa sì che il tensore energia-impulso assuma la forma diagonale $T^\mu_\nu = \text{diag}(\rho_0, -p_0, -p_0, -p_0)$.

Si consideri l'equazione (2.23), che, come visto nel paragrafo 2.3.1, svolge la funzione di

primo principio della termodinamica in relatività generale. Per $\mu = 1$, sostituendo la forma di T_ν^μ nell'equazione, si trova

$$-\partial_r(p_0\sqrt{-g}) + \frac{1}{2}p_0\sqrt{-g} \sum_\mu (g^{\mu\mu} \partial_r g_{\mu\mu}) = 0,$$

che può essere semplificata, sapendo che g_{00} è costante spazialmente, in:

$$\sqrt{-g} \partial_r p_0 = 0.$$

Dal momento che risultati analoghi si trovano per $\mu = 2, 3$, si ha che:

$$\partial_r p_0 = \partial_\theta p_0 = \partial_\phi p_0 = 0. \quad (2.85)$$

Cioè, la pressione è indipendente dalla posizione, a causa della proprietà di omogeneità. Per $\mu = 4$, invece:

$$\partial_t(\rho_0\sqrt{-g}) + \frac{1}{2}p_0\sqrt{-g} \sum_i (g^{ii} \partial_t g_{ii}) = 0,$$

Vale che $g^{ii} \partial_t g_{ii} = 6\dot{a}/a = (2/a^3) \partial_t(a^3)$ ([Tol34]). Inoltre, essendo, da (2.84), $\sqrt{-g} = a^3(t)r^2 \sin \theta$ ([S72]), la relazione precedente si semplifica in:

$$\frac{d}{dt}(\rho_0 \delta V_0) + p_0 \frac{d}{dt}(\delta V_0) = 0, \quad (2.86)$$

sapendo che il volume proprio dell'elemento è dato ovviamente da

$$\delta V_0 = a^3(t)r^2 \sin \theta \delta r \delta \theta \delta \phi. \quad (2.87)$$

La forma dell'equazione è analoga a (2.27): l'aumento di energia è dovuto solo alla variazione di lavoro W , perciò il “fluido cosmico” non dissipa né assorbe calore, e $\delta Q_0 = 0$. Questo risultato permette di notare subito che la seconda legge (2.47) per un osservatore stazionario con il fluido cosmico, assume la forma:

$$\frac{d}{dt}(\phi_0 \delta V_0) \geq 0. \quad (2.88)$$

Si può ora procedere allo studio delle condizioni per la reversibilità in un universo non statico. Al fine di analizzarle, vanno quindi tenute in considerazione le possibili cause di irreversibilità di ogni volumetto del fluido, cioè quelle per cui la disuguaglianza è strettamente positiva. Innanzitutto, nessun aumento di entropia può essere dovuto a flussi di calore irreversibili (per quanto visto prima, infatti, $\delta Q_0 = 0$), ad attriti tra il fluido e le pareti del contenitore (che è assente) o a gradienti di pressione tra l'interno e la superficie (per l'omogeneità). Pertanto, le uniche cause scatenanti potrebbero essere dovute a fattori interni. Quindi, per studiare trasformazioni reversibili, si considerano

due casi limite di equazioni di stato: la polvere (pressione nulla, $p = 0$) e la radiazione di corpo nero ($p = \rho/3$). Entrambi, infatti, si evolvono adiabaticamente. Poichè il volume $\delta V_0 \propto a^3(t)$, allora si ottiene, inserendo questa relazione in (2.88), l'equazione di continuità cosmologica:

$$\dot{\rho}_0(t) + 3 \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} (\rho_0(t) + p_0(t)) = 0. \quad (2.89)$$

Infine, si ottengono quindi le note relazioni:

$$\rho_{dust} \propto a(t)^{-3}, \quad (2.90)$$

e

$$\rho_{BB} \propto a(t)^{-4}. \quad (2.91)$$

Bibliografia

- [C68] Maxwell J. C. «On the dynamical theory of gases». The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science 35.235 (1868). 10.1080/14786446808639951.
- [C02] Maxwell J. C. *Theory of Heat*. Text-books of Science. Longmans, Green e Company, 1902, pp. xiv, 348.
- [Ein05] Albert Einstein. «Zur Elektrodynamik bewegter Körper. (German) [On the electrodynamics of moving bodies]». Annalen der Physik 322.10 (1905), pp. 891–921. <http://dx.doi.org/10.1002/andp.19053221004>.
- [Mos07] K. von Mosengeil. «Theorie der stationären Strahlung in einem gleichförmig bewegten Hohlraum». Ann. der Physik 327 (1907). https://de.wikisource.org/wiki/Theorie_der_station%C3%A4ren_Strahlung.
- [Pla07] Max Planck. «Zur dynamik bewegten korpers». Sitzungsberichte der Königlich-Preussischen Akademie der Wissenschaften 29 (1907), pp. 542–570. <https://www.archive.org/details/sitzungsbericht396klasgoog>.
- [Edd24] Arthur Stanley Eddington. *The Mathematical Theory of Relativity*. Cambridge University Press, 1924.
- [Tol28] Richard C. Tolman. «Further Remarks on the Second Law of Thermodynamics in General Relativity». Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America 14.9 (1928). <https://www.jstor.org/stable/85254>.
- [Tol30] Ehrenfest P. Tolman R.C. «Temperature Equilibrium in a Static Gravitational Field». Physical Review 36 (1930).
- [Tol34] R.C. Tolman. *Relativity, Thermodynamics and Cosmology*. Oxford Press, 1934.
- [J R39] G. M. Volkoff J. R. Oppenheimer. «On Massive Neutron Cores». Physical Review 55.4 (1939). 10.1103/PhysRev.55.374.
- [Kle49] Oskar Klein. «On the Thermodynamical Equilibrium of Fluids in Gravitational Fields». Reviews of Modern Physics 21.3 (1949). 10.1103/RevModPhys.21.531.

- [H O63] von H. Ott. «Lorentz-Transformation der Wiirme und der Temperatur». *Zeitschrift für Physik* 175 (1963). <https://doi.org/10.1007/BF01375397>.
- [Arz65] H. Arzeliès. «Transformation relativiste de la température et de quelques autres grandeurs thermodynamiques». *Il Nuovo Cimento* 35.3 (1965), pp. 792–804.
- [Gam65] A. Gamba. «Relativistic Transformation of Thermodynamical Quantities (Beware of Jacobians!)» *Il Nuovo Cimento* 37.4 (1965). 10.1007/BF02783385.
- [Lan66] P. T. Landsberg. «Special relativistic thermodynamics». *Proceedings of the Physical Society* 89.4 (1966), p. 1007. 10.1088/0370-1328/89/4/324.
- [Pat66] R.K. Pathria. «Lorentz transformation of thermodynamic quantities». *Proc. Phys. Soc.* 88 (1966). 10.1088/0370-1328/88/4/301.
- [Roh66] F. Rohrlich. «True and Apparent Transformations, Classical Electrons, and Relativistic Thermodynamics». *Il Nuovo Cimento B* 65.1 (1966), pp. 76–83.
- [Ebe67] J. H. Eberly. «Temperature Transformations, a Practical Choice». *Il Nuovo Cimento B* 68.1 (1967). 10.1007/BF02712451.
- [Gam67] A. Gamba. «Quantities in Different Reference Systems According to Relativity». *Am. J. Phys.* 7 35 (1967), pp. 83–89. <https://doi.org/10.1119/1.1973974>.
- [Moe67] Charles Moeller. «Relativistic Thermodynamics: A Strange Incident in the History of Physics.» *Munksgaard*. 1967. <https://api.semanticscholar.org/CorpusID:119051434>.
- [PT 67] K.A. Johns P.T. Landsberg. «A Relativistic Generalization of Thermodynamics». *Il Nuovo Cimento B* 52.1 (1967), pp. 28–44.
- [PW67] P. J. E. Peebles e David T. Wilkinson. «The Primeval Fireball». *Scientific American* 216.6 (1967), pp. 28–37. ISSN: 00368733, 19467087. <http://www.jstor.org/stable/24926025>.
- [LJ68] P. T. Landsberg e K. A. Johns. «The Problem of Moving Thermometers». *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences* 306.1487 (1968), pp. 477–486. ISSN: 00804630. <http://www.jstor.org/stable/2416076>.
- [S72] Weinberg S. *Gravitation And Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity*. John Wiley e Sons, inc, 1972.
- [LL75] L. D. Landau e E. M. Lifshitz. *The Classical Theory of Fields*. 4th. Vol. 2. Course of Theoretical Physics. Oxford: Pergamon Press, 1975. ISBN: 0-08-018176-7.

- [F80] Schutz B. F. *Geometrical Methods of Mathematical Physics*. Cambridge: Cambridge University Press, 1980. ISBN: 978-0521298872.
- [Lan87] Lifshitz E. M. Landau L. D. *Fluid Mechanics*. 2nd. Vol. 6. Oxford: Pergamon Press, 1987.
- [S04] Carroll S. *Lecture Notes on General Relativity*. 2004. <https://arxiv.org/abs/gr-qc/9712019>.
- [Nak06] T. K. Nakamura. «Relativistic Energy-Momentum of a Body with a Finite Volume». *Space Sci. Rev.* 122 (2006), pp. 271–278. <https://doi.org/10.1007/s11214-006-8186->.
- [Req08] Manfred Requardt. *Thermodynamics meets Special Relativity – or what is real in Physics?* 2008. 0801.2639. <https://arxiv.org/abs/0801.2639>.
- [F09] Schutz B. F. *A First Course in General Relativity*. 2nd. Cambridge University Press, 2009. ISBN: 978-0521887052.
- [Rou15] Zacharias Roupas. «Thermal mass limit of neutron cores». *Physical Review D* 91.2 (2015). 10.1103/PhysRevD.91.023001. <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.91.023001>.
- [CO17] Bradley W. Carroll e Dale A. Ostlie. *An Introduction to Modern Astrophysics*. 2nd. Cambridge: Cambridge University Press, 2017. ISBN: 978-1-108-42216-1.
- [Car19] Bruno Carazza. «Le parole della fisica: Temperatura». *Giornale di Fisica* 15.3 (2019), pp. 317–329. 10.1393/gdf/i2019-10344-2.
- [M P19] J. Tosiek M. Przanowski. «Notes on thermodynamics in special relativity». *Physica Scripta* (2019). <http://arxiv.org/abs/1010.5701v1>.
- [Par19] A.S. Parvan. «Lorentz transformations of the thermodynamic quantities». *Annals of Physics* (2019). 10.1016/j.aop.2019.01.003.
- [San19] Visser M. Santiago J. «Tolman temperature gradients in a gravitational field». *European Journal of Physics* 40 (2019). 10.1088/1361-6404/aaff1c.
- [HO22] José A. Heras e María G. Osorno. «A note on the relativistic temperature». *The European Physical Journal Plus* 137.4 (apr. 2022). ISSN: 2190-5444. 10.1140/epjp/s13360-022-02653-3. <http://dx.doi.org/10.1140/epjp/s13360-022-02653-3>.
- [Bad23] Massimiliano Badino. «La Strana Storia della Termodinamica Relativistica». *Giornale di Astronomia* (2023). <https://doi.org/10.19272/201608804003>.
- [Gio23] Marco Giovanelli. «Einstein’s Relativity/Thermodynamics Analogy: Some Evidence from His Later Years» (2023). Manoscritto. Dipartimento di Filosofia e Scienze dell’Educazione, Università di Torino. <https://marco-giovanelli.com/wp-content/uploads/2023/11/EinsteinRelativityThermo-1.pdf>.

- [Val23] Robert Vanderwee Valerio Faraoni. «Tolman-Ehrenfest’s criterion of thermal equilibrium extended to conformally static spacetimes». *Physical Review D* 107.6 (2023). 10.1103/PhysRevD.107.064072.
- [Xia24] Gao Sijie Xia Minghao. «General proof of the Tolman law». *The European Physical Journal Plus* 139 (2024). 10.1140/epjp/s13360-024-05329-2.
- [Chu25] Callender C. Chua E. Y. S. «The Toll of the Tolman Effect: On the Status of Classical Temperature in General Relativity». *The British Journal for the Philosophy of Science* (2025). Accepted for publication, preprint of 14 July 2025. 10.1086/737156.
- [PG25] G Ares de Parga e T L Gill. «Relativistic Transformations of Thermodynamics, Relativistic Statistical Mechanics and Einstein’s Dual Theory». *Journal of Physics: Conference Series* 2987.1 (2025), p. 012005. 10.1088/1742-6596/2987/1/012005. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/2987/1/012005>.