

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

Dipartimento di Fisica e Astronomia “Augusto Righi”
Corso di Laurea in Fisica

**Sui Fondamenti della Meccanica
Quantistica: Teorie Locali di Variabili
Nascoste e Disuguaglianze di Bell**

Relatore:

Prof. Elisa Ercolessi

Presentata da:

Alida Castagnoli

Correlatore:

Prof. Francesco Minardi

Anno Accademico 2025/2026

*“How wonderful that we have
met with a paradox. Now we
have some hope of making
progress.”*

– Niels Bohr

Abstract

Si illustra il paradosso EPR in diverse formulazioni definendo le nozioni di realismo e località. Quindi, si procede introducendo le teorie di variabili nascoste locali stocastiche e deterministiche, presentandone le principali caratteristiche. Si propone un'analisi qualitativa dei teoremi di impossibilità proposti da von Neumann, Jauch e Piron, Gleason e del teorema di Kochen-Specker la cui analisi porta all'introduzione della nozione di realismo contestuale. Si propone quindi la formulazione originale delle disuguaglianze di Bell e la successiva riformulazione conosciuta come disuguaglianze CHSH. Attraverso il teorema di Arthur Fine si dimostra l'equivalenza delle due formulazioni e si caratterizzano ulteriormente le teorie a variabili nascoste locali. Viene proposto quindi il teorema di no-signaling che garantisce la compatibilità tra la non-località della Meccanica Quantistica e la Relatività Ristretta. Si procede poi analizzando alcuni esperimenti di rilevanza storica che hanno testato la violazione delle disuguaglianze di Bell, in particolare si presentano gli esperimenti di Freedman e Clauser (1972), Aspect et al. (1982) e Rowe et al. (2001).

Indice

Introduzione	5
1 Teorie locali di variabili nascoste	9
1.1 Paradosso EPR	9
1.1.1 Formulazione EPR	12
1.1.2 Formulazione con spin $1/2$	13
1.1.3 Formulazione con fotoni	15
1.2 Teorie locali di variabili nascoste	17
1.2.1 Teorie di variabili nascoste locali stocastiche	18
1.2.2 Teorie di variabili nascoste locali deterministiche	19
1.3 Teoremi di impossibilità	22
1.3.1 Teorema di von Neumann	22
1.3.2 Teorema di Jauch e Piron	23
1.3.3 Teorema di Gleason	25
1.4 Teorema di Kochen-Specker	28
2 Disuguaglianze di Bell	30
2.1 Disuguaglianze di Bell	30
2.1.1 Formulazione originale	30
2.1.2 Formulazione CHSH	36
2.1.3 Equivalenza delle formulazioni	40
2.2 Non-località e causalità	41
3 Realizzazione sperimentale delle disuguaglianze di Bell	44
3.1 Esperimento di Freedman e Clauser (1972)	44
3.2 Locality loophole	51
3.2.1 Esperimento di Aspect et al. (1982)	51
3.3 Detection loophole	55
3.3.1 Esperimento di Rowe et al. (2001)	55
Conclusioni	64

Appendici	66
A Formalismo e notazione	67
A.1 Formalismo operatoriale	67
A.2 Formalismo matrici densità	72
B Calcolo di alcuni valori di aspettazione quantistici	76
C Il teorema di Fine	78

Introduzione

Sin dalle prime fasi della sua formulazione, la Meccanica Quantistica non ha seguito uno sviluppo lineare né può essere ricondotta al contributo di un unico autore. La sua nascita è stata il risultato di un lungo processo teorico e sperimentale, sviluppatosi tra la fine del XIX e l'inizio del XX secolo, volto a descrivere fenomeni che risultavano essere incompatibili con il quadro della Fisica Classica, come ad esempio lo spettro della radiazione di corpo nero, l'effetto fotoelettrico e la struttura degli spettri atomici. In questo senso, quindi, nasce come teoria fenomenologica costruita per fornire una descrizione quantitativa di osservazioni sperimentali non spiegabili attraverso i modelli classici.

Tuttavia, fin dalle sue origini, la nuova teoria ha sollevato profonde questioni interpretative riguardanti il significato fisico dei suoi principi fondamentali. L'approccio prevalente è stato quello di sviluppare il formalismo quantistico – *fare* Meccanica Quantistica – e utilizzarlo come strumento predittivo, senza fornire un'interpretazione condivisa dei suoi concetti fondamentali.

La Meccanica Quantistica introduce infatti una descrizione della realtà fisica profondamente diversa rispetto alla Meccanica Classica. Consideriamo, ad esempio, una particella soggetta all'azione di un campo: nella descrizione classica la sua dinamica è determinata nel formalismo hamiltoniano dalla conoscenza della posizione e della quantità di moto, che definiscono lo stato del sistema in ogni istante e ne permettono l'evoluzione deterministica nel tempo. In ambito quantistico, invece, lo stato della particella è descritto da una funzione d'onda, che non rappresenta una traiettoria definita nello spazio delle configurazioni e – secondo l'interpretazione statistica di Born – il suo modulo quadro fornisce la densità di probabilità di ottenere un determinato valore della posizione in seguito a una misura effettuata a un dato istante.

L'indeterminazione delle previsioni quantistiche è stata argomento di interesse tra fisici e filosofi della scienza, orientando il dibattito sull'origine di tale peculiarità: è da interpretarsi come una caratteristica intrinseca della natura, è causata dall'incompletezza della teoria sviluppata oppure è da considerarsi un limite degli apparati sperimentali utilizzati? Nel corso dell'evoluzione della teoria quantistica si sono articolate diverse scuole di pensiero, le tre principali sono conosciute come *realista*, *ortodossa* e *agnostica*. Illustriamo le diverse posizioni attraverso un esempio [1]: supponiamo di misurare la

posizione della particella e di trovarla nel punto C . Dove si trovava la particella *prima* che venisse misurata?

1. Interpretazione **realista**: *la particella si trovava nel punto C* . Questa risposta sembra essere la più naturale, nonché quello che siamo abituati a considerare per teorie classiche. Tuttavia, questa posizione presenta conseguenze considerevoli: nel formalismo della Meccanica Quantistica si assume che la funzione d'onda sia in grado di descrivere completamente il sistema in esame, se si richiede che la posizione sia determinata in ogni istante, allora si è costretti a concludere che questa sia una teoria *incompleta*, in quanto è in grado di fornire solo previsioni probabilistiche. Questa posizione è stata sostenuta da diversi fisici tra cui Albert Einstein, Boris Podolsky e Nathan Rosen che formularono il celebre *paradosso EPR* [2] e Bernard d'Espagnat che affermò [3]

"La posizione della particella non è mai stata indeterminata, semplicemente era sconosciuta all'osservatore."

In questa ottica è quindi necessario introdurre ulteriori informazioni – denotate in letteratura *variabili nascoste* – in grado di specificare ulteriormente lo stato della particella che, insieme alla funzione d'onda, permettano di completare lo stato della sistema.

2. Interpretazione **ortodossa**: *la particella non era da nessuna parte, il processo di misura ha forzato la particella ad avere una posizione definita e localizzata*. Tale posizione è conosciuta anche come *Interpretazione di Copenhagen* e storicamente è quella che ha riscosso maggiore successo nella comunità dei fisici. Anche questa interpretazione non è priva di insidie in quanto attribuisce un ruolo fondamentale all'atto di misura, citando Max Jammer [4]

"Le osservazioni non solo disturbano quello che deve essere misurato, lo producono. ... Obblighiamo (la particella) ad assumere una posizione definita. ... Noi stessi produciamo il risultato della misura."

Il processo di misura assume quindi un carattere peculiare e rappresenta ancora oggi uno degli aspetti più dibattuti dei fondamenti della Meccanica Quantistica. Nonostante gli importanti progressi teorici, la sua interpretazione fisica non ha ancora trovato una formulazione universalmente condivisa.

3. Interpretazione **agnostica**: *non ha senso chiedersi quale fosse lo stato prima di una misura*. I sostenitori di questa corrente di pensiero ritengono che la domanda posta esuli dalle questioni di cui si deve occupare la Fisica, rientrando invece nell'ambito della Metafisica in quanto si dibatte su cose che per propria natura non possono

essere testate. A questo proposito Wolfgang Pauli in una lettera a Born, circa il dibattito Einstein-Born, affermò [5]

"Non ci si dovrebbe arrovellare sul problema se qualcosa, della quale non è possibile sapere nulla, esista comunque, così come non ci si dovrebbe arrovellare sull'antica questione di quanti angeli possano stare sulla punta di uno spillo."

Tutte e tre le posizioni risultano essere motivate da ragionevoli argomentazioni, seppure conducano a quadri interpretativi non conciliabili. Nel tentativo di preservare una descrizione realista, è stata proposta la *teoria dell'onda pilota di de Broglie-Bohm* [6], una teoria a variabili nascoste deterministica e non locale, capace di riprodurre le previsioni della Meccanica Quantistica. Sono stati prodotti anche numerosi tentativi teorici, noti come *teoremi di impossibilità* che hanno mostrato l'incompatibilità di alcune classi di teorie a variabili nascoste con le assunzioni fondamentali della teoria quantistica. Sono state inoltre sviluppate interpretazioni alternative, come la *teoria a molti mondi* di Hugh Everett III [7], che affronta il problema della misura eliminando il postulato del collasso della funzione d'onda. Tale interpretazione, tuttavia, solleva a sua volta importanti questioni concettuali, alcune delle quali sono state discusse criticamente anche da John Bell [8].

Il dibattito prese una direzione del tutto nuova quando nel 1964 lo stesso John Bell [9] attraverso una serie di disuguaglianze – poi denotate *disuguaglianze di Bell* – propose una soluzione in grado evidenziare una differenza *osservabile* tra le previsioni delle diverse interpretazioni: viene esclusa la posizione agnostica e si sposta sul piano sperimentale il confronto tra la posizione realista e ortodossa. In particolare si confrontano le previsioni della Meccanica Quantistica, compatibili con l'interpretazione ortodossa, e quelle delle teorie a variabili nascoste locali, che rientrano all'interno dell'interpretazione realista. Gli esperimenti successivi hanno mostrato che la natura viola le disuguaglianze di Bell, escludendo la possibilità di una descrizione basata su variabili nascoste locali. Si deve però puntualizzare che l'interpretazione realista non è del tutto esclusa: nulla vieta di considerare teorie non-locali, di cui la teoria di de Broglie-Bohm è una chiara istanza.

Il presente lavoro si propone di approfondire il problema delle variabili nascoste locali e il contributo di John Bell allo studio dei fondamenti della Meccanica Quantistica, analizzando la formulazione delle disuguaglianze di Bell e alcune delle loro più significative verifiche sperimentali, in particolare:

- *Capitolo 1: Teorie locali di variabili nascoste* – in questo primo capitolo si approfondisce la posizione realista illustrando il paradosso EPR in diverse formulazioni e definendo le nozioni di *realismo* e *località*. Quindi, si procede introducendo le teorie di variabili nascoste locali stocastiche e deterministiche, illustrandone le principali caratteristiche. Vengono quindi presentati qualitativamente i principali *teoremi di impossibilità* proposti da von Neumann, Jauch e Piron e Gleason e si conclude

il capitolo con l'analisi del *teorema di Kochen-Specker* che porta all'introduzione della nozione di *realismo contestuale*.

- *Capitolo 2: Disuguaglianze di Bell* – si illustra la formulazione originale delle disuguaglianze di Bell, proposta da John Bell e sviluppata considerando teorie a variabili nascoste deterministiche e la successiva riformulazione conosciuta come *disuguaglianze CHSH*, sviluppata da John Clauser, Michael Horne, Abner Shimony e Richard Holt considerando teorie locali a variabili nascoste stocastiche. Si illustra quindi il *teorema di Arthur Fine* che garantisce l'equivalenza delle due formulazioni e caratterizza ulteriormente le teorie a variabili nascoste. Si conclude il capitolo analizzando la compatibilità tra la non-località della Meccanica Quantistica e la Relatività Ristretta attraverso i risultati di G. C. Ghirardi, A. Rimini, T. Weber conosciuti come *teorema di no-signaling*.
- *Capitolo 3: Realizzazione sperimentale delle disuguaglianze di Bell* – in quest'ultimo capitolo si propone un'analisi di alcuni esperimenti di rilevanza storica che hanno testato la violazione delle disuguaglianze di Bell. Si presentano l'esperimento di Freedman e Clauser (1972), considerato essere il primo esperimento a verificare la violazione delle disuguaglianze di Bell, seguito poi dall'esperimento di Aspect et al. (1982), che rappresenta il primo tentativo di chiudere il *locality loophole* e si conclude illustrando l'esperimento di Rowe et al. (2001) che è stato il primo esperimento a chiudere il *detection loophole*.
- *Appendici* – in Appendice A vengono riportati il formalismo e la notazione utilizzati. In particolare, si presentano i postulati della Meccanica Quantistica e i principali risultati sia in formalismo operatoriale che nel formalismo delle matrici densità; in Appendice B sono riportati i calcoli di alcuni valori di aspettazione quantistici; in Appendice C si trova la dimostrazione del teorema di Arthur Fine.

Capitolo 1

Teorie locali di variabili nascoste

Il presente capitolo introdurrà il celebre *paradosso EPR*, il quale delinea le proprietà della realtà fisica attraverso le nozioni di *elemento di realtà*, *realismo* e *località* e mostra che la Meccanica Quantistica, pur essendo corretta nelle sue previsioni sperimentali, potrebbe non costituire una teoria *completa*. Storicamente, un contributo significativo alla questione è dato dalle *teorie a variabili nascoste*, il cui obiettivo è completare la descrizione quantistica aggiungendo parametri nascosti in grado di completare la descrizione dello stato. In particolare, si approfondirà la trattazione di teorie a variabili nascoste realistiche locali, distinguendo tra *deterministiche* e *stocastiche fattorizzabili*. Tali teorie sono state studiate da diversi autori con l'intento di determinarne i limiti – tentativi noti come *teoremi di impossibilità*. Si considereranno i principali contributi ad opera di von Neumann, Jauch e Piron e Gleason e infine si presenterà il teorema di Kocken-Specker che, indagando la *contestualità* delle misure quantistiche, porterà ad una inevitabile rivisitazione del concetto di *realismo*. Le nozioni di base e la notazione della Meccanica Quantistica sono state definite in Appendice A.

1.1 Paradosso EPR

Nel 1935 Einstein, Podolsky e Rosen pubblicarono un articolo [2] indagando quali fossero le caratteristiche che una teoria fisica deve possedere al fine di essere considerata tale. Evidenziano la distinzione tra *realtà oggettiva* che si vuole indagare e i *concetti fisici* propri della teoria che si utilizza per descrivere tale realtà. Emerge quindi spontaneamente la prima richiesta:

1. **COMPLETEZZA**

Ogni elemento della realtà fisica deve avere una controparte corrispondente all'interno della teoria fisica.

Risulta ora necessario caratterizzare tali elementi di realtà. Gli autori propongono un criterio sufficiente, basato su misurazioni ed esperimenti, che sintetizziamo nella seconda richiesta:

2. **REALISMO**

Se, senza perturbare il sistema, è possibile predire con probabilità unitaria – in modo indipendente dal contesto di misura – il valore di una quantità fisica, allora è possibile affermare che esista un *elemento di realtà* associato a tale quantità.

Emerge inoltre un'altra richiesta, non esplicitamente enunciata, che riguarda la relazione tra diversi elementi del sistema:

3. **LOCALITÀ**

Se due sistemi non interagiscono più, allora nessuna operazione eseguita su uno di essi può influenzare gli elementi di realtà dell'altro.

Avendo quindi delineato i tre principi fondamentali – completezza, realismo e località – l'obiettivo dell'argomento EPR è mostrare che essi non possono essere simultaneamente soddisfatti dalla Meccanica Quantistica. In particolare, verrà costruito un esperimento mentale in cui, assumendo validi il realismo e la località, la funzione d'onda non fornisce una descrizione completa dello stato fisico del sistema. Tale esperimento mentale si basa sul principio di indeterminazione di Heisenberg (A.1.2) secondo cui due osservabili incompatibili non sono misurabili simultaneamente.

Coerentemente con i postulati proposti nella sezione A.1, si assume che lo stato di un sistema quantistico sia completamente descritto dalla funzione d'onda ad esso associato $\psi(t, \mathbf{x})$. Caratterizziamo matematicamente gli elementi di realtà osservando che se si considera uno stato particolare ϕ , autostato di un'osservabile O ovvero tale che

$$\hat{O} \phi = o \phi$$

possiamo dire che la quantità fisica O avrà con certezza il valore o e quindi, in accordo con il *principio di realismo* postulato, esiste un *elemento di realtà* corrispondente alla quantità O .

Consideriamo due sistemi I, II ai quali è permesso interagire per un tempo $0 < t < T$ e dopo il quale si assume non abbiano più interazione alcuna. Supponiamo inoltre che lo stato dei singoli sistemi per $t < 0$ fosse noto, per cui è possibile calcolare l'evoluzione temporale del sistema I + II tramite l'equazione di Schrödinger. Sia quindi un'osservabile A del sistema I a cui è associato il set completo di autostati ortonormali $\{u_n(x_1)\}_{n \in \mathbb{N}}$ appartenenti agli autovalori $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Dopo l'evoluzione temporale lo stato complessivo del sistema è descritto da

$$\Psi_1(x_1, x_2) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \psi_n(x_2) u_n(x_1)$$

ove x_1 e x_2 rappresentano il set di variabili associate ai sistemi I e II, rispettivamente. Stiamo assumendo uno spettro discreto, ma la trattazione può essere facilmente estesa anche per uno spettro continuo o misto, per i quali si intenderà la condizione di ortonormalità in senso generalizzato e l'espansione verrà operata integrando sull'indice continuo.

Interpretiamo gli $\psi_n(x_2)$ come i coefficienti dell'espansione di Ψ in funzioni ortogonali $u_n(x_1)$, allora in seguito a una misurazione sul sistema I dell'osservabile A, che supponiamo produrre il valore a_k , avviene la *riduzione del pacchetto d'onda*. Dopo la misurazione si trova

$$\Psi'(x_1, x_2) = \psi_k(x_2) u_k(x_1)$$

Se la funzione $\psi_k(x_2)$ è un autostato di un'osservabile del sistema II, allora il valore di tale osservabile può essere previsto con certezza, senza che il sistema II venga direttamente perturbato. In accordo con il *criterio di realismo*, a tale quantità fisica deve quindi essere associato un *elemento di realtà*.

Osserviamo che è possibile proporre il medesimo ragionamento per una seconda osservabile B con base di autostati ortonormali $\{v_n(x_1)\}_{n \in \mathbb{N}}$ e i relativi autovalori $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$.

$$\Psi_2(x_1, x_2) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \phi_n(x_2) v_n(x_1)$$

ove gli $\phi_n(x_2)$ sono da interpretare come i nuovi coefficienti dell'espansione. Effettuando una misura sul sistema I di B, si trova il valore b_s ; conseguentemente, lo stato complessivo sarà

$$\Psi'(x_1, x_2) = \phi_s(x_2) v_s(x_1)$$

A seconda della scelta della misura effettuata sul sistema I, lo stato del sistema II viene descritto rispettivamente dalle funzioni $\psi_k(x_2)$ oppure $\phi_n(x_2)$, che in generale sono distinte e possono essere autostati di osservabili incompatibili. Tuttavia, per il *principio di località*, una misura effettuata sul sistema I non può influenzare in alcun modo lo stato fisico del sistema II, una volta che i due sistemi non interagiscono più. Ne consegue che lo stato del sistema II deve essere indipendente dalla scelta dell'osservabile misurata sul sistema I. Si giunge quindi a una contraddizione:

*La Meccanica Quantistica associa al sistema II stati diversi a seconda della misura effettuata sul sistema I, mentre il **principio di località** impone che tale stato sia*

univocamente definito e indipendente da tale scelta. Pertanto, se si accetta il **criterio di realismo**, si deve concludere che la funzione d'onda non fornisce una descrizione completa della realtà fisica.

In generale è possibile trovare $\psi_k(x_2)$ e $\phi_s(x_2)$ distinte, infatti se si sceglieranno due osservabili A e B tali che $[A, B] \neq 0$, per il Lemma A.1.3 si avrebbe che la decomposizione di Ψ in funzioni ortogonali non è unica e quindi i coefficienti $\psi_k(x_2)$ e $\phi_s(x_2)$ sarebbero necessariamente distinti, riflettendo la non esistenza di una base di autostati comuni per osservabili non commutanti.

Questo sarà il punto di partenza che, negli esempi successivi, permetterà di costruire degli operatori non commutanti A' e B' aventi come autostati $\psi_k(x_2)$ e $\phi_s(x_2)$ rispettivamente. In seguito verrà proposta la formulazione originale, conosciuta come paradosso EPR, e anche due formulazioni equivalenti proposte che utilizzano sistemi a spin 1/2 e sistemi di fotoni descritti nell'ambito dell'ottica quantistica.

1.1.1 Formulazione EPR

Supponiamo che i due sistemi sopra citati siano due particelle descritte dalla funzione d'onda complessiva non normalizzabile

$$\Psi(x_1, x_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{i}{\hbar}(x_1 - x_2 + x_0)p} dp$$

ove x_0 è una costante. Scegliamo ora come grandezze A e B le grandezze fisiche coniugate posizione e quantità di moto della prima particella, rappresentate dagli operatori autoaggiunti

$$\hat{Q}_1 = x_1 \quad \hat{P}_1 = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x_1}$$

In analogia con la trattazione precedente, possiamo identificare una base ortonormale per $\hat{P}_1$ con il seguente set di autofunzioni corrispondenti all'autovalore p

$$u_p(x_1) = e^{\frac{i}{\hbar}px_1}$$

Le autofunzioni considerate costituiscono una base ortonormale generalizzata pertanto l'espansione della funzione d'onda complessiva avrà la forma

$$\Psi(x_1, x_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{i}{\hbar}(x_2 - x_0)p} e^{\frac{i}{\hbar}px_1} dp \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_p(x_2) u_p(x_1) dp$$

Osserviamo che $\psi_p(x_2)$ è un'autofunzione dell'operatore quantità di moto della seconda particella $\hat{P}_2 = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x_2}$ con autovalore $-p$.

Consideriamo ora gli autostati dell'operatore posizione della prima particella $\hat{Q}_1 = x_1$, corrispondenti all'autovalore x

$$v_x(x_1) = \delta(x_1 - x)$$

In questo caso, l'espansione assume la forma

$$\begin{aligned}\Psi(x_1, x_2) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{i}{\hbar}(x-x_2+x_0)p} dp \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x_1 - x) dx \\ &= 2\pi\hbar \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x - x_2 + x_0) \delta(x_1 - x) dx \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_x(x_2) v_x(x_1) dx\end{aligned}$$

ove nel penultimo passaggio è stata sfruttata la rappresentazione integrale della delta di Dirac

$$\delta(a) = \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{i}{\hbar}ap} dp$$

Osserviamo che $\phi_x(x_2)$ è un'autofunzione dell'operatore posizione della seconda particella $\hat{Q}_2 = x_2$ con autovalore $x + x_0$.

Sono state quindi trovate due autofunzioni distinte

$$\psi_p(x_2) = e^{-\frac{i}{\hbar}(x_2-x_0)p} \quad \phi_x(x_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{i}{\hbar}(x-x_2+x_0)p} dp = 2\pi\hbar \delta(x - x_2 - x_0)$$

associate a operatori che rappresentano elementi di realtà incompatibili in quanto soddisfano le regole di commutazione canoniche

$$[\hat{Q}, \hat{P}] = i\hbar \hat{\mathbb{I}}$$

1.1.2 Formulazione con spin 1/2

Analizziamo l'esempio proposto da Bohm e Aharonov [13] nel quale si considerano due particelle di spin 1/2, per semplicità utilizziamo la notazione di Dirac. Il sistema complessivo possiede spin totale zero e pertanto è descritto dalla funzione d'onda di singoletto

$$|\Psi\rangle_{21} = \frac{|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle}{\sqrt{2}}$$

In questo caso possiamo identificare l'osservabile A come la componente z dello spin della prima particella

$$\hat{S}_{1,z} = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

i cui autostati corrispondenti agli autovalori $\pm\hbar/2$ sono rispettivamente i vettori

$$|\uparrow\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad |\downarrow\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Osserviamo quindi che lo stato $|\Psi\rangle$ è già espanso nella base ortonormale $\{|\uparrow\rangle_1, |\downarrow\rangle_1\}$ dell'operatore $\hat{S}_{1,z}$

$$|\Psi\rangle_{21} = \frac{|\uparrow\rangle_2|\downarrow\rangle_1 - |\downarrow\rangle_2|\uparrow\rangle_1}{\sqrt{2}}$$

e possiamo interpretare i coefficienti dell'espansione $\{\frac{|\uparrow\rangle_2}{\sqrt{2}}, -\frac{|\downarrow\rangle_2}{\sqrt{2}}\}$ come autostati dell'operatore $\hat{S}_{2,z}$ per la seconda particella appartenenti agli autovalori $\pm\hbar/2$.

Scegliamo ora come seconda osservabile B la componente x dello spin della prima particella

$$\hat{S}_{1,x} = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

i cui autostati appartenenti agli autovalori $\pm\hbar/2$ sono rispettivamente i vettori

$$|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad |-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

osserviamo che valgono le seguenti relazioni tra la base $\{|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle\}$ e $\{|+\rangle, |-\rangle\}$

$$\begin{aligned} |+\rangle &= \frac{|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle}{\sqrt{2}} & |-\rangle &= \frac{|\uparrow\rangle - |\downarrow\rangle}{\sqrt{2}} \\ |\uparrow\rangle &= |+\rangle + |-\rangle & |\downarrow\rangle &= |+\rangle - |-\rangle \end{aligned}$$

allora l'espansione di $|\Psi\rangle$ nella base ortonormale $\{|+\rangle_1, |-\rangle_1\}$ avrà la forma

$$|\Psi\rangle_{21} = \frac{|+\rangle_2|-\rangle_1 - |-\rangle_2|+\rangle_1}{\sqrt{2}}$$

e possiamo interpretare i nuovi coefficienti dell'espansione $\{\frac{|+\rangle_2}{\sqrt{2}}, -\frac{|-\rangle_2}{\sqrt{2}}\}$ come autostati dell'operatore $\hat{S}_{2,x}$ della seconda particella, appartenenti agli autovalori $\pm\hbar/2$.

Concludiamo osservando che partendo dallo stato di singoletto segue che, misurando la componente S_z dello spin della particella 1, è possibile prevedere con certezza il valore della stessa componente per la particella 2, e analogamente per la componente S_x . In

accordo con il *criterio di realismo*, entrambe queste quantità devono quindi essere considerate *elementi di realtà* per la particella 2. Tuttavia, le componenti dello spin lungo assi diversi sono rappresentate da operatori non commutanti

$$[\hat{S}_i, \hat{S}_j] = i\hbar \sum_{k=1}^3 \epsilon_{ijk} \hat{S}_k$$

e non possono quindi possedere simultaneamente valori definiti all'interno della Meccanica Quantistica.

1.1.3 Formulazione con fotoni

Consideriamo un sistema di due fotoni preparati in uno stato entangled di polarizzazione

$$|\Psi\rangle_{21} = \frac{|HV\rangle - |VH\rangle}{\sqrt{2}}$$

Scegliamo come prima osservabile la polarizzazione lineare lungo l'asse z del primo fotone

$$\hat{\Pi}_{1,z} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \hat{\sigma}_z$$

i cui autostati appartenenti agli autovalori ± 1 sono rispettivamente i vettori

$$|H\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad |V\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

osserviamo allora che lo stato $|\Psi\rangle$ risulta essere già decomposto nella base ortonormale $\{|H\rangle_1, |V\rangle_1\}$ dell'osservabile $\Pi_{1,z}$.

$$|\Psi\rangle_{21} = \frac{|H\rangle_2|V\rangle_1 - |V\rangle_2|H\rangle_1}{\sqrt{2}}$$

e possiamo interpretare i coefficienti dell'espansione $\{\frac{|H\rangle_2}{\sqrt{2}}, -\frac{|V\rangle_2}{\sqrt{2}}\}$ come autostati dell'operatore $\hat{\Pi}_{2,z}$ per il secondo fotone appartenenti agli autovalori ± 1 .

Vogliamo ora costruire una seconda osservabile, $\Pi_{1,\theta}$, che sarà la polarizzazione lineare del primo fotone lungo un asse ruotato di un angolo θ rispetto a z. Cominciamo costruendoci i suoi autostati operando una rotazione $R(\theta)$ sulla base $\{|H\rangle, |V\rangle\}$

$$|\theta\rangle = |H\rangle \cos \theta + |V\rangle \sin \theta \quad |\theta_\perp\rangle = -|H\rangle \sin \theta + |V\rangle \cos \theta \quad (1.1)$$

rispettivamente corrispondenti agli autovalori ± 1 . Costruisco quindi i proiettori ortogonali a partire da tali stati

$$|\theta\rangle\langle\theta| = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos^2\theta & \cos\theta\sin\theta \\ \cos\theta\sin\theta & \sin^2\theta \end{pmatrix}$$

$$|\theta_\perp\rangle\langle\theta_\perp| = \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin^2\theta & -\sin\theta\cos\theta \\ -\sin\theta\cos\theta & \cos^2\theta \end{pmatrix}$$

Costruiamo quindi l'operatore $\hat{\Pi}_{1,\theta}$ mediante il teorema spettrale, si trova

$$\hat{\Pi}_{1,\theta} = |\theta\rangle\langle\theta| - |\theta_\perp\rangle\langle\theta_\perp| = \begin{pmatrix} \cos(2\theta) & \sin(2\theta) \\ \sin(2\theta) & -\cos(2\theta) \end{pmatrix} = \cos(2\theta) \hat{\sigma}_z + \sin(2\theta) \hat{\sigma}_x \quad (1.2)$$

Infine, vogliamo riscrivere lo stato $|\Psi\rangle$ nella base ortonormale $\{|\theta\rangle, |\theta_\perp\rangle\}$. Operiamo una rotazione $R(-\theta)$ sui vettori della base ruotata ottenendo

$$|H\rangle = |\theta\rangle \cos\theta - |\theta_\perp\rangle \sin\theta \quad |V\rangle = |\theta\rangle \sin\theta + |\theta_\perp\rangle \cos\theta$$

conseguentemente, lo stato decomposto nella base ruotata ha l'espressione

$$|\Psi\rangle_{21} = \frac{|\theta\rangle_2 |\theta_\perp\rangle_1 - |\theta_\perp\rangle_2 |\theta\rangle_1}{\sqrt{2}}$$

e possiamo interpretare i nuovi coefficienti dell'espansione $\{\frac{|\theta\rangle_2}{\sqrt{2}}, -\frac{|\theta_\perp\rangle_2}{\sqrt{2}}\}$ come autostati dell'operatore $\hat{\Pi}_{2,\theta}$ del secondo fotone, appartenenti agli autovalori ± 1 .

Il fatto di poter esprimere gli operatori di polarizzazione come combinazioni lineari delle matrici di Pauli

$$\hat{\Pi}_z = \hat{\sigma}_z$$

$$\hat{\Pi}_\theta = \cos(2\theta) \hat{\sigma}_z + \sin(2\theta) \hat{\sigma}_x$$

mostra che le polarizzazioni lungo assi diversi sono osservabili incompatibili in quanto vale

$$[\hat{\Pi}_z, \hat{\Pi}_\theta] = \sin(2\theta) [\hat{\sigma}_z, \hat{\sigma}_x] = 2i \sin(2\theta) \hat{\sigma}_y$$

Pertanto, lo stato entangled di polarizzazione $|\Psi\rangle_{21}$ per una coppia di fotoni ha la stessa struttura matematica dello stato di singoletto di due particelle di spin $1/2$.

– o –

Come nota conclusiva della sezione, si propone una riflessione sulla natura e sulla funzione delle tre formulazioni del paradosso EPR presentate.

La formulazione originale coinvolge le osservabili posizione e quantità di moto, caratterizzate da spettro continuo e da autofunzioni non normalizzabili. Essa riveste un ruolo storico fondamentale, in quanto costituisce la prima enunciazione del paradosso, ma presenta una descrizione matematica poco intuitiva ed è difficile da implementare sperimentalmente.

La seconda formulazione, proposta da Bohm, riformula il problema in termini di particelle di spin $1/2$, riducendo la descrizione a uno spazio di Hilbert bidimensionale. In questo caso, lo spettro delle osservabili è discreto e le autofunzioni sono normalizzabili, rendendo la struttura più maneggevole sia concettualmente che formalmente. La realizzazione sperimentale per la misura delle componenti di spin richiede tuttavia apparati specifici, come quello di Stern–Gerlach.

La terza formulazione, basata su fotoni entangled in polarizzazione, si mostra possedere una struttura matematica formalmente equivalente a quella dello spin $1/2$. Essa risulta tuttavia più accessibile dal punto di vista sperimentale, poiché la misura delle osservabili di polarizzazione richiede semplicemente l'uso di polarizzatori lineari.

Si conclude quindi che la natura del paradosso EPR non dipende dalle specifiche proprietà fisiche del sistema considerato, bensì dalla struttura della correlazione quantistica in sistemi entangled. Tuttavia, la scelta di una formulazione piuttosto che di un'altra, e quindi di un sistema fisico piuttosto che di un altro, può essere determinante nella traduzione del paradosso da costruzione teorica a scenario sperimentalmente testabile.

1.2 Teorie locali di variabili nascoste

Il paradosso EPR ha messo in luce una contraddizione che porta a scegliere tra le seguenti affermazioni mutualmente escludenti:

1. La Meccanica Quantistica è una teoria *completa* e la realtà fisica è incompatibile con i criteri di realismo e località.
2. La realtà fisica è compatibile con i criteri di realismo e località e la Meccanica Quantistica risulta essere *incompleta*.

Rimane quindi aperta la questione se, ed eventualmente come, la Meccanica Quantistica possa essere completata. Una possibilità [14] consiste nel postulare un'analogia con la Meccanica Statistica Classica, assumendo che la descrizione probabilistica della Meccanica Quantistica emerga come media su stati sottostanti più completi, definiti *senza*

dispersione. Tali stati si costruiscono partendo dallo stato quantomeccanico, aggiungendo ulteriori variabili non accessibili sperimentalmente – per questo definite *nascoste* – che permettano di ricostruire il realismo e la località. Questi tentativi sono compresi in una vasta gamma di teorie che prendono il nome di LRHVT – Local Realistic Hidden Variables Theories – e si possono classificare in due categorie: *deterministiche* e *stocastiche*. In generale queste teorie considerano variabili nascoste, che denoteremo con il simbolo λ , che variano in un range Λ e sono distribuite secondo una distribuzione di probabilità normalizzata

$$\int_{\Lambda} d\lambda \rho(\lambda) = 1$$

1.2.1 Teorie di variabili nascoste locali stocastiche

Queste teorie vogliono ricostruire la statistica di misura delle osservabili, in particolare consideriamo le grandezze fisiche $A(a, \lambda) = \pm 1$ e $B(b, \lambda) = \pm 1$ ove a e b sono i parametri di misura. Poichè siamo interessati a previsioni di tipo probabilistico, si considera un ensemble statistico del sistema studiato. Introduciamo la notazione per le probabilità di misura

$$\begin{aligned} P(A = +1|a, \lambda) &\equiv P^+(a, \lambda) & P(A = -1|a, \lambda) &\equiv P^-(a, \lambda) \\ P(B = +1|b, \lambda) &\equiv P^+(b, \lambda) & P(B = -1|b, \lambda) &\equiv P^-(b, \lambda) \end{aligned}$$

allora possiamo valutare le grandezze medie sull'ensemble come segue

$$\overline{A(a, \lambda)} = \sum_{A=\pm 1} A P(A|a, \lambda) = P^+(a, \lambda) - P^-(a, \lambda) \quad (1.3)$$

$$\overline{B(b, \lambda)} = \sum_{B=\pm 1} B P(B|b, \lambda) = P^+(b, \lambda) - P^-(b, \lambda) \quad (1.4)$$

che a differenza delle grandezze dicotomiche A e B possono assumere tutti i valori nel range $[-1, 1]$. In seguito saremo interessati a studiare la correlazione tra tali grandezze, cioè $\langle AB \rangle$, a questo scopo definiamo

$$\begin{aligned} E(a, b|\lambda) &= \sum_{AB} AB P(AB|a, b, \lambda) \\ &= \sum_{AB} AB P(A|a, \lambda) P(B|b, \lambda) \\ &= \sum_A A P(A|a, \lambda) \sum_B B P(B|b, \lambda) \\ &\equiv \overline{A(a, \lambda)} \overline{B(b, \lambda)} \end{aligned}$$

ove nel secondo passaggio è stata utilizzata l'ipotesi di località, formalizzata tramite la richiesta di *fattorizzabilità* delle probabilità:

$$P(AB|a, b, \lambda) = P(A|a, \lambda) P(B|b, \lambda)$$

Nel contesto delle teorie locali a variabili nascoste stocastiche la funzione di correlazione per le grandezze A e B avrà la forma

$$E(a, b) = \int d\lambda \rho(\lambda) \overline{A(a, \lambda)} \overline{B(b, \lambda)} \quad (1.5)$$

1.2.2 Teorie di variabili nascoste locali deterministiche

Un caso particolare delle teorie stocastiche è rappresentato da quelle deterministiche, strutturate in modo tale che la funzione d'onda del sistema, insieme alle variabili nascoste, determini in modo univoco il risultato della misura. Consideriamo ad esempio due osservabili $A(a, \lambda) = \pm 1$ e $B(b, \lambda) = \pm 1$, se poniamo

$$P(A|a, \lambda) = \delta_{A, A(a, \lambda)} \quad P(B|b, \lambda) = \delta_{B, B(b, \lambda)}$$

allora da (1.3) e (1.4) si ottiene

$$\overline{A(a, \lambda)} = A(a, \lambda) \quad \overline{B(b, \lambda)} = B(b, \lambda)$$

e conseguentemente la funzione di correlazione avrà la forma

$$P(a, b) = \int d\lambda \rho(\lambda) A(a, \lambda) B(b, \lambda) \quad (1.6)$$

Mostriamo ora come, tramite una teoria a variabili nascoste locali *deterministica*, sia possibile costruire un semplice modello in grado di ricostruire i risultati di una misura di spin su una particella di spin 1/2.

Modello a variabili nascoste per particella di spin 1/2 senza moto traslazionale

Vogliamo studiare un sistema descritto da uno spazio di Hilbert di dimensione due i cui stati sono rappresentati da spinori – vettori a due componenti complesse – che denoteremo ψ . Le osservabili sono rappresentate da operatori hermitiani autoaggiunti 2x2 e nel formalismo di Pauli

$$\hat{A} = \alpha \hat{\mathbb{I}} + \boldsymbol{\beta} \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}}$$

ove α è un numero reale, $\boldsymbol{\beta}$ un vettore reale a tre componenti e $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$ un vettore avente per componenti le matrici di Pauli. Per fissare le idee consideriamo una particella di spin 1/2 senza moto traslazionale. Calcoliamo lo spettro e gli autostati di spin lungo una

generica direzione $\mathbf{n}$ tale che $\beta = |\beta|\mathbf{n}$ e $|\mathbf{n}| = 1$. Osserviamo anche che l'operatore A è esprimibile come funzione di $\mathbf{n} \cdot \hat{\sigma}$, pertanto commuta con esso ed esiste una base ortonormale di autoket simultanei. Etichettiamo quindi tale base di autoket comuni $|\mathbf{n}, \pm 1\rangle$, allora il problema agli autovalori si scrive

$$\hat{A} |\mathbf{n}, \pm 1\rangle = (\alpha \hat{\mathbb{I}} + \beta \cdot \hat{\sigma}) |\mathbf{n}, \pm 1\rangle = |\mathbf{n}, \pm 1\rangle \alpha + (\mathbf{n} \cdot \hat{\sigma}) |\mathbf{n}, \pm 1\rangle |\beta| = |\mathbf{n}, \pm 1\rangle (\alpha \pm |\beta|)$$

ove nell'ultimo passaggio si è utilizzato il fatto che lo spettro dell'operatore $\mathbf{n} \cdot \hat{\sigma}$ è costituito dai valori $\{+1, -1\}$, fatto noto dalla teoria generale per sistemi a due stati [4]. Se si considera un generico stato normalizzato $|\Psi\rangle$, le probabilità di trovare uno degli autovalori di A come esito di una misura per un sistema a due stati sono completamente determinate dal valore di aspettazione

$$\langle \hat{A} \rangle = \langle \Psi | (\alpha \hat{\mathbb{I}} + \beta \cdot \hat{\sigma}) | \Psi \rangle$$

tramite la relazione

$$P(\pm 1) = \frac{1}{2} \left(1 \pm \frac{\langle \hat{A} \rangle - \alpha}{|\beta|} \right)$$

Vogliamo ora trattare questo sistema nell'ambito delle variabili nascoste, in questo caso possiamo scegliere come variabile nascosta un numero reale $\lambda \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ descritta da una distribuzione di probabilità uniforme

$$\rho(\lambda) = 1 \quad \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \rho(\lambda) d\lambda = 1$$

Mostriamo come sia possibile costruire una funzione dipendente da $\mathbf{n}$ e da λ che ci fornisca in modo completamente determinato l'esito di una misura dell'osservabile A , una volta scelta la direzione di osservazione $\mathbf{n}$.

$$A(\mathbf{n}, \lambda) = \alpha + |\beta| s(\mathbf{n}, \lambda) \quad \text{con} \quad s(\mathbf{n}, \lambda) \in \{\pm 1\}$$

Cominciamo osservando che effettuando una rotazione di coordinate possiamo ricondurci

$$|\Psi'\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

e denotiamo $\beta' = (\beta'_x, \beta'_y, \beta'_z)$ il vettore β nelle nuove componenti ruotate. In questo sistema di riferimento, il sistema si trova quindi in un autostato di $\hat{\sigma}_z$ e pertanto il valore di aspettazione quantistico dell'operatore $\beta \cdot \hat{\sigma}$ sarà orientato in direzione z

$$\langle \beta \cdot \hat{\sigma} \rangle = \langle \Psi' | \beta \cdot \hat{\sigma} | \Psi' \rangle = \beta'_x \langle \Psi' | \hat{\sigma}_x | \Psi' \rangle + \beta'_y \langle \Psi' | \hat{\sigma}_y | \Psi' \rangle + \beta'_z \langle \Psi' | \hat{\sigma}_z | \Psi' \rangle = \beta'_z$$

conseguentemente una misura dell'osservabile $\hat{A}$ fornirà il risultato $\alpha + \beta'_z$. In questo sistema di riferimento, al fine di riprodurre il valore di aspettazione quantistico, scegliamo

$$s(\mathbf{n}, \lambda) = \operatorname{sgn} \left(\lambda |\boldsymbol{\beta}| + \frac{|\beta'_z|}{2} \right) \operatorname{sgn}(X)$$

ove

$$X = \begin{cases} \beta'_z & \text{se } \beta'_z \neq 0 \\ \beta'_x & \text{se } \beta'_z = 0, \beta'_x \neq 0 \\ \beta'_y & \text{se } \beta'_z = \beta'_x = 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \operatorname{sgn}(X) = \begin{cases} +1 & \text{se } X \geq 0 \\ -1 & \text{se } X < 0 \end{cases}$$

allora possiamo affermare che la misura dell'operatore $\hat{A} = \alpha \hat{\mathbb{I}} + \boldsymbol{\beta} \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}}$ nello stato specificato da (ψ, λ) fornirà con certezza l'autovalore

$$\alpha + |\boldsymbol{\beta}| \operatorname{sgn} \left(\lambda |\boldsymbol{\beta}| + \frac{|\beta'_z|}{2} \right) \operatorname{sgn}(X)$$

Calcoliamo il valore di aspettazione dell'osservabile A nello stato quantomeccanico $|\Psi'\rangle$ effettuando la media sulla variabile λ

$$\begin{aligned} \langle \hat{A} \rangle &= \langle \alpha \hat{\mathbb{I}} + \boldsymbol{\beta} \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}} \rangle = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \rho(\lambda) \left[\alpha + |\boldsymbol{\beta}| \operatorname{sgn} \left(\lambda |\boldsymbol{\beta}| + \frac{|\beta'_z|}{2} \right) \operatorname{sgn}(X) \right] d\lambda \\ &= \alpha + |\boldsymbol{\beta}| \operatorname{sgn}(X) \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \operatorname{sgn} \left(\lambda |\boldsymbol{\beta}| + \frac{|\beta'_z|}{2} \right) d\lambda \\ &= \alpha + |\boldsymbol{\beta}| \operatorname{sgn}(X) \left[\int_{-\frac{1}{2}}^{-\frac{|\beta'_z|}{2|\boldsymbol{\beta}|}} (-1) d\lambda + \int_{-\frac{|\beta'_z|}{2|\boldsymbol{\beta}|}}^{\frac{1}{2}} (+1) d\lambda \right] \\ &= \alpha + |\boldsymbol{\beta}| \operatorname{sgn}(X) \left[- \left(\frac{|\beta'_z|}{2|\boldsymbol{\beta}|} + \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{|\beta'_z|}{2|\boldsymbol{\beta}|} \right) \right] \\ &= \alpha + |\boldsymbol{\beta}| \operatorname{sgn}(X) \frac{|\beta'_z|}{|\boldsymbol{\beta}|} \\ &= \alpha + \beta'_z \end{aligned}$$

coerente con la previsione quantomeccanica. É importante sottolineare che il modello proposto si limita a trattare un sistema a due stati isolato – trivialmente separabile – pertanto il *principio di località* è soddisfatto in modo banale. Anche il *principio di realismo* è soddisfatto, grazie alla specificazione dello stato mediante variabili nascoste: a

ogni osservabile è associato un valore determinato $A(\mathbf{n}, \lambda)$, fissato dalla variabile nascosta λ e quindi preesistente all'atto di misura. Una caratteristica fondamentale di questo modello, che non permette una generalizzazione a più dimensioni, è il fatto di riprodurre le previsioni quantistiche mediante un'assegnazione *contestuale* dei valori delle osservabili: il risultato della misura dipende esplicitamente sia dalla direzione di osservazione $\mathbf{n}$ sia dallo stato preparato tramite la scelta del sistema di riferimento in cui lo stato è diagonalizzato.

1.3 Teoremi di impossibilità

Il modello proposto nella sezione precedente è stato costruito *ad hoc* per riprodurre i valori di aspettazione e le probabilità quantistiche. Sorge quindi spontaneo domandarsi se sia possibile una sua generalizzazione identificando quali caratteristiche generali debbano possedere e quali vincoli debbano soddisfare le LRHVT al fine di produrre risultati compatibili con le previsioni della Meccanica Quantistica. I primi tentativi – non conclusivi – hanno approcciato il problema cercando di dare una caratterizzazione formale a queste teorie. Di questi tentativi, conosciuti come *teoremi di impossibilità*, si presentano in seguito quelli di von Neumann, di Jauch e Piron e di Gleason.

L'approccio principale degli autori consiste nell'indagare gli assiomi minimi richiesti per la formulazione della Meccanica Quantistica, entro cui si inserisce anche l'esame delle teorie a variabili nascoste. Nel seguito verranno analizzati questi risultati, con particolare attenzione al contenuto dei rispettivi teoremi e alle ipotesi che ne determinano la portata fisica, senza approfondire l'intera analisi e riformulazione dei fondamenti della teoria quantistica che tali lavori propongono.

1.3.1 Teorema di von Neumann

La prima prova di impossibilità che analizzeremo è quella di von Neumann, consultabile in forma integrale in [15]. L'assunzione principale che viene fatta – sintetizzabile come richiesta di *additività globale* – è la seguente

Ogni combinazione lineare di operatori hermitiani rappresenta un'osservabile e il valore di aspettazione di tale combinazione è la medesima combinazione dei valori di aspettazione delle singole osservabili.

$$\langle a\hat{A} + b\hat{B} \rangle = a \langle \hat{A} \rangle + b \langle \hat{B} \rangle \quad (1.7)$$

con $\hat{A}$ e $\hat{B}$ operatori hermitiani e a e b numeri reali.

Per definizione, gli stati senza dispersione godono della proprietà che su di essi il valore di aspettazione di una osservabile coincide con uno degli autovalori. Si può mostrare con

un controesempio come la richiesta sopra postulata non risulti soddisfatta. Consideriamo proprio l'esempio riportato nella sezione 1.2.2, è stato trovato che sebbene l'osservabile A sia esprimibile come combinazione lineare

$$\hat{A} = \alpha \hat{\mathbb{I}} + \boldsymbol{\beta} \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}}$$

gli autovalori

$$\alpha \pm |\boldsymbol{\beta}|$$

non risultano essere lineari in $\boldsymbol{\beta}$ e pertanto ne consegue che stati senza dispersione che soddisfino l'ipotesi di additività globale non possano esistere. Sebbene questo controesempio sia stato ottenuto considerando uno spazio di Hilbert di dimensione due, ha natura del tutto generale. Infatti, se lo spazio degli stati dovesse avere dimensione maggiore, è sempre possibile considerarne un sottospazio bidimensionale.

La critica mossa da John Bell a questa dimostrazione riguarda proprio la legittimità dell'estensione dell'ipotesi di *additività* anche a tutti gli stati, inclusi quelli che nella trattazione con variabili nascoste sono considerati senza dispersione. Infatti, nella Meccanica Quantistica standard la relazione (1.7) è sempre valida, indipendentemente dalla compatibilità degli operatori $\hat{A}$ e $\hat{B}$. Tuttavia, supponendo di considerare operatori non commutanti, l'estensione della linearità anche per stati senza dispersione significa assumere implicitamente che sia possibile assegnare valori coerenti anche a osservabili incompatibili, in quanto tali stati sono perfettamente determinati statisticamente. L'esistenza stessa di controesempi espliciti, come quello discusso nella sezione 1.2.2, mostra come tale estensione non sia giustificata.

Si conclude pertanto che il teorema di von Neumann non esclude in generale le teorie a variabili nascoste, ma soltanto quelle che soddisfano una condizione di *additività globale* dei valori assegnati anche per osservabili non commutanti. Tale ipotesi risulta però eccessivamente restrittiva e pertanto il teorema non è da considerarsi un risultato conclusivo nel dibattito.

1.3.2 Teorema di Jauch e Piron

Gli autori propongono una riformulazione del risultato di von Neumann studiando le proprietà della realtà fisica mediante una struttura logica. Come precedentemente anticipato, si analizzerà la prova di impossibilità proposta assumendo l'approccio standard alla Meccanica Quantistica, rimandando alla trattazione integrale in [16]. Al fine di costruire l'analogia con la struttura logica, si considerano solo le osservabili rappresentate da operatori di proiezione

$$\hat{P}^2 = \hat{P}$$

i quali possiedono autovalori 0 oppure 1, e il loro valore di aspettazione coincide con la probabilità che la misura restituisca l'esito 1.

Gli assiomi fondamentali di Jauch e Piron possono essere sintetizzati in

(A) *I valori di aspettazione per operatori di proiezione commutanti sono additivi*

$$[\hat{P}_1, \hat{P}_2] = 0 \quad \implies \quad \langle a\hat{P}_1 + b\hat{P}_2 \rangle = a\langle \hat{P}_1 \rangle + b\langle \hat{P}_2 \rangle \quad \text{con } a, b \in \mathbb{R}$$

(B) *Se per qualche stato vale che $\langle \hat{P}_1 \rangle = \langle \hat{P}_2 \rangle = 1$ allora per lo stesso stato vale anche*

$$\langle \hat{P}_1 \cap \hat{P}_2 \rangle = 1$$

Osserviamo quindi che il primo assioma è una riformulazione di quello proposto da von Neumann, fisicamente più ragionevole in quanto restringe le osservabili a operatori di proiezione e richiede che siano commutanti.

Il secondo assioma invece è costruito in analogia con le proprietà della logica classica, infatti è possibile interpretare i proiettori come delle proposizioni binarie che possono assumere solamente il valore vero o falso – corrispondente all’autovalore 1 o 0 rispettivamente. Conseguentemente possiamo interpretare il valore di aspettazione $\langle \hat{P}_1 \cap \hat{P}_2 \rangle$ come la proposizione logica $\hat{P}_1$ "e" $\hat{P}_2$ quindi se vale $\langle \hat{P}_1 \rangle = 1$ cioè " $\hat{P}_1$ è vero" si ottiene naturalmente il risultato postulato in (B).

Vediamo ora come questa costruzione permetta di escludere l’esistenza di stati senza dispersione. Si consideri un sottospazio bidimensionale dello spazio di Hilbert, allora possiamo scegliere come proiettori $\{\hat{\mathbb{I}}, \hat{P}_\alpha\}$ – escludendo quello triviale – con

$$\hat{P}_\alpha = \frac{1}{2}(\hat{\mathbb{I}} + \boldsymbol{\alpha} \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}})$$

ove $\boldsymbol{\alpha}$ è un versore e $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$ il vettore avente per componenti gli operatori di Pauli. Consideriamo ora i due proiettori commutanti, mutuamente ortogonali

$$\hat{P}_+ = \frac{1}{2}(\hat{\mathbb{I}} + \boldsymbol{\alpha} \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}}) \quad \hat{P}_- = \frac{1}{2}(\hat{\mathbb{I}} - \boldsymbol{\alpha} \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}})$$

allora per stati senza dispersione, possiamo applicare l’assioma (A)

$$\langle \hat{\mathbb{I}} \rangle = \langle \frac{1}{2}\hat{\mathbb{I}} + \frac{1}{2}\boldsymbol{\alpha} \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}} + \frac{1}{2}\hat{\mathbb{I}} - \frac{1}{2}\boldsymbol{\alpha} \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}} \rangle = \langle \hat{P}_+ + \hat{P}_- \rangle = \langle \hat{P}_+ \rangle + \langle \hat{P}_- \rangle = 1$$

Per definizione di stati senza dispersione, i valori di aspettazione dei proiettori dovranno coincidere con gli autovalori 0 oppure 1, pertanto dovrà essere

$$\begin{cases} \langle \hat{P}_+ \rangle = 1 \\ \langle \hat{P}_- \rangle = 0 \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} \langle \hat{P}_+ \rangle = 0 \\ \langle \hat{P}_- \rangle = 1 \end{cases}$$

Scegliamo due versori non collineari α e β e definiamo i corrispondenti proiettori

$$\hat{P}_\alpha = \frac{1}{2}(\hat{\mathbb{I}} \pm \alpha \cdot \hat{\sigma}) \quad \hat{P}_\beta = \frac{1}{2}(\hat{\mathbb{I}} \pm \beta \cdot \hat{\sigma})$$

ove il segno è scelto in modo tale che $\langle \hat{P}_\alpha \rangle = \langle \hat{P}_\beta \rangle = 1$, allora per l'assioma (B) dovrebbe essere

$$\langle \hat{P}_\alpha \cap \hat{P}_\beta \rangle = 1$$

ma questo è impossibile poiché essendo α e β non collineari, i sottospazi su cui proiettano $\hat{P}_\alpha$ e $\hat{P}_\beta$ risulteranno essere disgiunti, verificando

$$\hat{P}_\alpha \cap \hat{P}_\beta = 0 \quad \implies \quad \langle \hat{P}_\alpha \cap \hat{P}_\beta \rangle = 0$$

si trova quindi una contraddizione e ne consegue che gli stati senza dispersione non possono esistere.

Si conclude pertanto che viene esclusa la classe di teorie a variabili nascoste compatibili con una struttura booleana delle proprietà fisiche. Tuttavia, poiché le proprietà fisiche sono associate a procedure di misura concrete, non è garantito che la congiunzione logica "e" corrisponda a un'operazione fisicamente realizzabile. Inoltre, si osserva che questa classe di teorie è molto ristretta in quanto l'assioma (B) è verificato solamente per sistemi quantistici con caratteristiche particolari. Nel caso bidimensionale considerato, per uno stato generico, vale $\langle \hat{P}_\alpha \rangle = \langle \hat{P}_\beta \rangle = 1$ solamente se i due proiettori coincidono, cioè se $\alpha = \beta$. Infatti

$$\hat{P}_\alpha \cap \hat{P}_\beta = \hat{P}_\alpha = \hat{P}_\beta \quad \implies \quad \langle \hat{P}_\alpha \cap \hat{P}_\beta \rangle = \langle \hat{P}_\alpha \rangle = \langle \hat{P}_\beta \rangle = 1$$

Pertanto, analogamente al teorema di von Neumann, anche questa dimostrazione viene generalmente considerata non conclusiva.

1.3.3 Teorema di Gleason

A differenza dei teoremi di impossibilità discussi finora, il risultato di Gleason non nasce come tentativo di una confutazione diretta dei modelli a variabili nascoste bensì si interessa di stabilire quali assegnazioni di probabilità siano compatibili con il formalismo della Meccanica Quantistica. Il celebre teorema, formulato originariamente in [17], caratterizza infatti tutte le misure di probabilità definite sugli eventi quando lo spazio di Hilbert ha dimensione almeno tre, mostrando che ogni assegnazione coerente di probabilità definita *globalmente* deve necessariamente coincidere con quella fornita dalla regola di Born. Nel seguito presenteremo una versione meno generale del teorema di Gleason utilizzando, al posto di generici sottospazi chiusi, quelli generati dalle immagini di proiettori ortogonali.

Teorema 1.3.1. (Teorema di Gleason) Sia $\mathcal{H}$ uno spazio di Hilbert reale o complesso con $\dim \mathcal{H} \geq 3$ e $\mathcal{P}(\mathcal{H})$ lo spazio dei proiettori ortogonali. Se $\mu : \mathcal{P}(\mathcal{H}) \rightarrow [0, 1]$ è una misura probabilistica, allora esiste un unico operatore densità $\hat{\rho}$ tale che per ogni proiettore $\hat{P}$

$$\mu(\hat{P}) = \text{Tr}[\hat{\rho}\hat{P}]$$

La quantità $\mu(\hat{P})$ può quindi essere interpretata tramite la definizione (A.2.4) come la probabilità che la proprietà rappresentata dal proiettore $\hat{P}$ sia verificata, recuperando esattamente la regola di Born nel formalismo delle matrici densità.

Osserviamo che il teorema di Gleason sta quindi assumendo un principio di *globalità delle misure* molto forte: viene postulata l'esistenza di una misura definita per tutti i proiettori contemporaneamente, che sia additiva su ogni decomposizione ortogonale e non dipenda dalla base in cui i proiettori sono definiti. Questo è il punto di partenza della critica di Bell [14] che mostra come, sotto le ipotesi di globalità richieste dal teorema, un'interpretazione in termini di variabili nascoste è esclusa.

Consideriamo il proiettore P_Φ relativo allo stato Φ e la base ortonormale $\{|\phi_i\rangle\}$, allora per uno stato normalizzato ψ vale la seguente relazione

$$\sum_i \langle \hat{P}_{\phi_i} \rangle = \sum_i \langle \psi | \hat{P}_{\phi_i} | \psi \rangle = \langle \psi | \left(\sum_i \hat{P}_{\phi_i} \right) | \psi \rangle = \langle \psi | \mathbb{I} | \psi \rangle = 1 \quad (1.8)$$

allora possiamo concludere che per stati normalizzati

(A) Se Φ è uno stato tale che $\langle \hat{P}_\Phi \rangle = 1$ allora per ogni stato Ψ ortogonale deve valere $\langle \hat{P}_\Psi \rangle = 0$

(B) Dati Φ_1 e Φ_2 ortogonali tra loro e tali che $\langle \hat{P}_{\Phi_1} \rangle = \langle \hat{P}_{\Phi_2} \rangle = 0$ allora per una qualsiasi combinazione lineare $\psi = a\Phi_1 + b\Phi_2$ deve valere

$$\langle \hat{P}_\psi \rangle = 0$$

La prima ipotesi rispecchia il fatto che una coppia di vettori ortogonali può essere pensata come appartenente a un set completo, o in altre parole, può sempre essere completata per costituire una base ortonormale. Conseguentemente, tramite l'equazione (1.8), si vede che se uno dei proiettori ha valore di aspettazione pari a 1, ad esempio $\hat{P}_\Phi$, tutti gli altri devono necessariamente avere valore di aspettazione pari a 0, in particolare anche $\hat{P}_\Psi$.

La seconda ipotesi deriva dalla geometria dello spazio di Hilbert. I vettori ortogonali Φ_1 e Φ_2 generano un sottospazio bidimensionale dello spazio di Hilbert che possiamo denotare con $S = \text{span}\{\Phi_1, \Phi_2\}$. La condizione $\langle \hat{P}_{\Phi_1} \rangle = \langle \hat{P}_{\Phi_2} \rangle = 0$ implica che lo stato considerato appartiene al complemento ortogonale $S^\perp$.

Procediamo ora a mostrare come le ipotesi (A) e (B), insieme alla relazione (1.8) escludano l'esistenza di stati senza dispersione. L'argomentazione di Bell può essere riassunta nel seguente lemma.

Lemma 1.3.1. *Assumendo valide le ipotesi (A) e (B), se si scelgono due stati Ψ e Φ tali che*

$$\langle \hat{P}_\Psi \rangle = 1 \quad \langle \hat{P}_\Phi \rangle = 0$$

allora tali stati non potranno essere arbitrariamente vicini, infatti

$$|\Phi - \Psi| \geq \frac{1}{2}|\Psi|$$

Dimostrazione. Normalizziamo Ψ e prendiamo Ψ' normalizzato e ortogonale a Ψ , allora scriviamo

$$\Phi = \Psi + \epsilon \Psi' \quad \text{con } \epsilon \in \mathbb{R}$$

Consideriamo allora un terzo vettore Ψ'' ortogonale sia a Ψ che a Ψ' , richiesta legittima in quanto si sta considerando uno spazio di Hilbert avente dimensione superiore a tre, allora per (A) vale

$$\langle \hat{P}_{\Psi'} \rangle = 0 \quad \langle \hat{P}_{\Psi''} \rangle = 0$$

ma allora, prendendo $\eta = \Phi + \frac{\epsilon}{\gamma} \Psi''$ ed $\eta' = -\epsilon \Psi' + \epsilon \gamma \Psi''$ per (B) deve valere anche

$$\langle \hat{P}_\eta \rangle = 0 \quad \langle \hat{P}_{\eta'} \rangle = 0$$

osserviamo che η e η' sono tra loro ortogonali, quindi possiamo sommarli e applicare la relazione (B)

$$\eta + \eta' = \Psi + \epsilon \frac{\gamma + 1}{\gamma^2} \Psi'' \quad \langle P_{\eta + \eta'} \rangle = 0$$

Supponiamo ora per assurdo che $\epsilon \leq 1/2$, allora esistono dei γ reali tali che

$$\epsilon \frac{\gamma + 1}{\gamma^2} = \pm 1$$

ma poichè i vettori $\Psi \pm \Psi''$ sono mutuamente ortogonali e vale

$$\langle \hat{P}_{\Psi + \Psi''} \rangle = \langle \hat{P}_{\Psi - \Psi''} \rangle = 0$$

allora per (B) ogni vettore del piano da essi generato ha valore zero. Osserviamo che ψ appartiene a tale piano in quanto si può scrivere come

$$\Psi = \frac{1}{2}[(\Psi + \Psi'') + (\Psi - \Psi'')]$$

pertanto si conclude che $\langle \hat{P}_\Psi \rangle = 0$ il che contraddice l'ipotesi iniziale e pertanto $\epsilon > \frac{1}{2}$.

□

Consideriamo ora stati senza dispersione, allora a ciascun proiettore unidimensionale $\hat{P}$ deve essere assegnato un valore determinato, pari a 0 oppure 1. Applicando tale assegnazione, dalla relazione di completezza (1.8) si ottiene che, in ogni base ortonormale completa, esattamente uno dei proiettori deve assumere valore 1, mentre i rimanenti devono assumere valore 0.

D'altra parte, l'insieme dei proiettori unidimensionali varia in modo continuo al variare della direzione nello spazio di Hilbert e le basi complete possono quindi essere deformate mediante rotazioni arbitrariamente piccole. Ne segue che, se una tale assegnazione globale fosse possibile, dovrebbero esistere proiettori arbitrariamente vicini ai quali sono attribuiti valori distinti, rispettivamente 0 e 1. Ciò contraddice il lemma appena dimostrato, secondo cui due direzioni dello spazio di Hilbert – cioè due stati – i cui proiettori associati assumano valori distinti, non possono essere arbitrariamente vicine.

Bell osserva così che la contraddizione emerge dall'assunzione di una assegnazione *globale* di valori definiti a tutti i proiettori, tale da preservare simultaneamente le relazioni strutturali imposte dallo spazio di Hilbert, in particolare ortogonalità e completezza. Questa intuizione sarà successivamente formalizzata nel teorema di Kochen–Specker, discusso nel paragrafo seguente.

1.4 Teorema di Kochen-Specker

Il teorema di Kochen–Specker fornisce una formalizzazione esplicita dell'impossibilità di assegnare valori deterministici ai proiettori in modo coerente con la struttura additiva delle misure in dimensione $\dim \mathcal{H} \geq 3$, come già evidenziato da Bell nella sua critica al teorema di Gleason presentata nella sezione precedente. Questo risultato viene formulato in termini di *non contestualità*, mostrando che non esistono assegnazioni deterministiche $v : \mathcal{P}(\mathcal{H}) \rightarrow \{0, 1\}$ (A.2.6) compatibili con la struttura additiva sui contesti. La nozione di *contestualità* riguarda la possibile dipendenza del valore attribuito a un'osservabile dal contesto di misura. Si configurano dunque due ipotesi:

a) **Contestualità**: il risultato della misura può dipendere dal contesto, cioè

$$A \in C_1, \quad A_1 = \text{misura}(A|C_1) \qquad A \in C_2, \quad A_2 = \text{misura}(A|C_2)$$

$$A_1 \neq A_2$$

b) **Non contestualità**: il risultato della misura è indipendente dal contesto, cioè

$$A_1 = A_2$$

Secondo il *criterio di realismo* postulato da EPR, la realtà fisica dovrebbe avere natura non contestuale, tuttavia è stato dimostrato da Kochen e Specker il seguente teorema [18]

Teorema 1.4.1. (*Teorema di Kochen-Specker*) Sia $\mathcal{H}$ uno spazio di Hilbert complesso separabile con $\dim \mathcal{H} \geq 3$, e sia $\mathcal{P}(\mathcal{H})$ l'insieme dei proiettori ortogonali su $\mathcal{H}$ allora non esiste alcuna valutazione non contestuale $v : \mathcal{P}(\mathcal{H}) \rightarrow \{0, 1\}$.

Osserviamo che il modello a variabili nascoste costruito per la particella di spin $1/2$, pur riproducendo le previsioni statistiche della Meccanica Quantistica, non è in contraddizione con il teorema di Kochen–Specker. Il teorema, infatti, esclude l'esistenza di una assegnazione globale e non contestuale di valori ai proiettori. Il modello considerato non definisce una funzione globale $v(P)$ indipendente dal contesto, ma una famiglia di funzioni esplicitamente contestuali

$$v(P(\mathbf{n}) | C, \lambda) = s_C(\mathbf{n}, \lambda)$$

dove C denota il contesto di misura, cioè la scelta della base ortonormale $|\Psi'\rangle$ di autostati associata all'osservabile $\mathbf{n} \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}}$, e λ le variabili nascoste. In tal modo viene esplicitamente abbandonata la condizione di non contestualità globale richiesta dal teorema di Kochen–Specker, rendendolo quindi inapplicabile.

– o –

Una importante conseguenza di questo teorema è quindi che il principio di realismo nella forma proposta da EPR risulta un'assunzione troppo forte e non compatibile con la struttura della Meccanica Quantistica. In particolare, l'ipotesi che agli elementi di realtà corrispondano valori preesistenti indipendenti dal contesto di misura non è compatibile con gli spazi di Hilbert di dimensione $\dim \mathcal{H} \geq 3$. Risulta quindi necessario rivisitare l'ipotesi di realismo proposta da EPR, d'ora in avanti quando si citerà il principio di realismo si farà quindi riferimento a

2b. **REALISMO CONTESTUALE**

Se, senza perturbare il sistema, è possibile predire con probabilità unitaria il valore di una quantità fisica, allora è possibile affermare che esista un *elemento di realtà* associato a tale quantità, il cui valore può dipendere dal contesto di misura.

Capitolo 2

Disuguaglianze di Bell

Il presente capitolo è dedicato al contributo più significativo alla questione delle variabili nascoste locali – il *teorema di Bell* – che tramite la formulazione di disuguaglianze confronta direttamente le previsioni della Meccanica Quantistica Standard con quelle delle LRHVT. Si presenterà la formulazione originale proposta da John S. Bell nel 1964 e la successiva riformulazione ad opera di John F. Clauser, Michael A. Horne, Abner Shimony e Richard A. Holt del 1969, mostrandone l'equivalenza mediante il *teorema di Fine*. Questo contributo risulterà essere conclusivo in quanto permette di trasferire la questione, fino ad ora trattata da un punto di vista esclusivamente teorico, su un piano sperimentale confrontando direttamente i risultati delle due teorie. Si conclude analizzando la compatibilità tra la *non-località* quantistica e il principio di *causalità* della Relatività Ristretta, presentando il contributo di G. C. Ghirardi, A. Rimini, T. Weber, noto in letteratura come *teorema di no-signaling*.

2.1 Disuguaglianze di Bell

Con il termine *disuguaglianze di Bell* si intende un'ampia famiglia di disuguaglianze formulate in diversi contesti fisici. Esistono infatti forme molto generali applicabili anche a sistemi descritti da spazi di Hilbert di dimensione superiore a due, come ad esempio le *disuguaglianze di CGLMP* [19]. Tali estensioni riguardano inoltre differenti classi di stati entangled, come per esempio gli stati di Bell (B.1) e gli stati GHZ [20]. Nel seguito, tuttavia, ci limiteremo a presentare la formulazione originaria proposta da John Bell [9], considerando il caso di sistemi bidimensionali.

2.1.1 Formulazione originale

La prova di Bell si articola a partire dalla formulazione del paradosso EPR elaborata da Bohm e Aharonov, descritta nella sezione 1.1.2. Consideriamo quindi una coppia di

particelle di spin $1/2$ nello stato di singoletto di spin

$$|\psi_s\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle) \quad (2.1)$$

e immaginiamo di completare la descrizione dello stato con un insieme di parametri λ . Tale set potrebbe avere qualsiasi natura: potrebbe essere una singola variabile continua – come nell'esempio 1.2.2 – oppure una singola variabile discreta, un insieme di variabili o ancora un insieme di funzioni. Senza perdita di generalità, nel prosieguo considereremo λ come se fosse un singolo parametro continuo.

Supponiamo di effettuare la misura di due componenti dello spin lungo due direzioni generiche $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$, rappresentate rispettivamente dagli operatori autoaggiunti

$$\hat{A} = \hat{\boldsymbol{\sigma}}_1 \cdot \mathbf{a} \quad \hat{B} = \hat{\boldsymbol{\sigma}}_2 \cdot \mathbf{b}$$

ove con $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$ si intende il vettore avente per componenti le matrici di Pauli mentre con il pedice si indica la particella corrispondente. Presentiamo quindi le ipotesi fondamentali del teorema di Bell: l'ipotesi di *realismo*, esplicitata dalla descrizione mediante variabili nascoste e l'ipotesi di *località* sintetizzabili nell'affermazione

Il risultato di una misura di B sulla particella 2 non dipende dalla scelta della direzione di misura $\mathbf{a}$ della particella 1, analogamente una misura di A non dipende da $\mathbf{b}$

$$A(\mathbf{a}, \lambda) = \pm 1 \quad B(\mathbf{b}, \lambda) = \pm 1 \quad (2.2)$$

Calcoliamo quindi il valore di aspettazione quantistico

$$\langle \hat{A} \hat{B} \rangle = \langle (\hat{\boldsymbol{\sigma}}_1 \cdot \mathbf{a}) (\hat{\boldsymbol{\sigma}}_2 \cdot \mathbf{b}) \rangle = \sum_{i,j=1}^3 a_i b_j \langle \sigma_{1i} \sigma_{2j} \rangle = \sum_{i,j=1}^3 a_i b_j (-\delta_{ij}) = -\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \quad (2.3)$$

ove si è utilizzato il fatto che nello stato di singoletto (2.1) le componenti uguali di spin sono perfettamente anticorrelate (Lemma B.1).

Consideriamo ora un modello a variabili nascoste di tipo deterministico delineato nella sezione 1.2.2, allora supponendo che la variabile nascosta λ sia descritta da una distribuzione di probabilità $\rho(\lambda)$ tale il valore di aspettazione di $\hat{\boldsymbol{\sigma}}_1 \cdot \mathbf{a}$ e $\hat{\boldsymbol{\sigma}}_2 \cdot \mathbf{b}$

$$P(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \int d\lambda \rho(\lambda) A(\mathbf{a}, \lambda) B(\mathbf{b}, \lambda) \quad (2.4)$$

quello che si vuole mostrare è che il valore di aspettazione previsto dalla Meccanica Quantistica (2.3) è diverso da quello previsto dalle teorie realiste locali di variabili nascoste deterministiche (2.4). Cominciamo dimostrando il seguente

Teorema 2.1.1. (*Disuguaglianza di Bell*) I valori di aspettazione previsti dalle teorie di variabili nascoste locali soddisfano la disuguaglianza di Bell

$$|P(\mathbf{a}, \mathbf{b}) - P(\mathbf{a}, \mathbf{c})| \leq 1 + P(\mathbf{b}, \mathbf{c}) \quad (2.5)$$

Dimostrazione. Essendo $\rho(\lambda)$ una distribuzione di probabilità normalizzata

$$\int d\lambda \rho(\lambda) = 1$$

allora per le proprietà (2.2) di $A(\mathbf{a}, \lambda)$ e $B(\mathbf{b}, \lambda)$ e dalla relazione (2.4) risulta $P(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \geq -1$ con

$$P(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = -1 \quad \text{se} \quad \begin{cases} \mathbf{a} = \mathbf{b} \\ A(\mathbf{a}, \lambda) = A(\mathbf{b}, \lambda) = -\frac{1}{B(\mathbf{b}, \lambda)} = -B(\mathbf{b}, \lambda) \end{cases} \quad \text{q.d.}$$

In questa ipotesi – cioè supponendo perfetta anticorrelazione tra le particelle – la relazione (2.4) si riscrive

$$P(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = - \int d\lambda \rho(\lambda) A(\mathbf{a}, \lambda) A(\mathbf{b}, \lambda) \quad (2.6)$$

Se consideriamo ora un altro versore $\mathbf{c}$, allora

$$\begin{aligned} P(\mathbf{a}, \mathbf{b}) - P(\mathbf{a}, \mathbf{c}) &= - \int d\lambda \rho(\lambda) A(\mathbf{a}, \lambda) A(\mathbf{b}, \lambda) + \int d\lambda \rho(\lambda) A(\mathbf{a}, \lambda) A(\mathbf{c}, \lambda) \\ &= - \int d\lambda \rho(\lambda) A(\mathbf{a}, \lambda) A(\mathbf{b}, \lambda) + \int d\lambda \rho(\lambda) A(\mathbf{b}, \lambda) A(\mathbf{b}, \lambda) A(\mathbf{a}, \lambda) A(\mathbf{c}, \lambda) \\ &= \int d\lambda \rho(\lambda) A(\mathbf{a}, \lambda) A(\mathbf{b}, \lambda) [A(\mathbf{b}, \lambda) A(\mathbf{c}, \lambda) - 1] \end{aligned}$$

ove nel penultimo passaggio è stata sfruttata la relazione (2.4) per cui $A(\mathbf{b}, \lambda) A(\mathbf{b}, \lambda) = 1$, allora se valutiamo

$$\begin{aligned} |P(\mathbf{a}, \mathbf{b}) - P(\mathbf{a}, \mathbf{c})| &\leq \int d\lambda \rho(\lambda) |A(\mathbf{a}, \lambda) A(\mathbf{b}, \lambda) [A(\mathbf{b}, \lambda) A(\mathbf{c}, \lambda) - 1]| \\ &= \int d\lambda \rho(\lambda) [1 - A(\mathbf{b}, \lambda) A(\mathbf{c}, \lambda)] \\ &= 1 - \int d\lambda \rho(\lambda) A(\mathbf{b}, \lambda) A(\mathbf{c}, \lambda) \\ &= 1 + P(\mathbf{b}, \mathbf{c}) \end{aligned}$$

abbiamo ottenuto quindi la *disuguaglianza di Bell*: $|P(\mathbf{a}, \mathbf{b}) - P(\mathbf{a}, \mathbf{c})| \leq 1 + P(\mathbf{b}, \mathbf{c})$ □

Questo risultato ci permette di trarre conclusioni fisicamente rilevanti, sintetizzate dal seguente lemma:

Lemma 2.1.1. *Le previsioni delle teorie locali di variabili nascoste (2.4) non coincidono con quelle della Meccanica Quantistica (2.3).*

Dimostrazione. Distinguiamo due casi:

1. P costante

Il fatto che P sia costante significa che la funzione di correlazione non dipende dalle direzioni in cui si sceglie di effettuare la misura

$$P(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = k \quad \forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$$

con k numero reale. In particolare, abbiamo mostrato che scegliendo assi coincidenti

$$P(\mathbf{a}, \mathbf{a}) = -1$$

e quindi abbiamo determinato $k = -1$, che fisicamente implica anticorrelazione perfetta indipendentemente dalla scelta delle direzioni di misura. Tuttavia, questo fatto è in contraddizione con le predizioni quantistiche poiché nel caso di direzioni ortogonali il valore di aspettazione – che è proporzionale al prodotto scalare delle direzioni di misura – è identicamente nullo.

2. P non costante

Consideriamo ora il caso in cui P non sia costante e assumiamo sia in generale una funzione sufficientemente liscia – una richiesta ragionevole in quanto rappresenta una grandezza fisica. Allora se consideriamo $\mathbf{a}$ fissato, possiamo sviluppare attorno al punto di minimo $\mathbf{b} = \mathbf{c}$

$$P(\mathbf{a}, \mathbf{b}) - P(\mathbf{a}, \mathbf{c}) = \nabla_{\mathbf{x}} P(\mathbf{a}, \mathbf{c}) \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{c}) + o(|\mathbf{b} - \mathbf{c}|^2)$$

allora valutandone il valore assoluto

$$\begin{aligned} |P(\mathbf{a}, \mathbf{b}) - P(\mathbf{a}, \mathbf{c})| &\approx |\nabla_{\mathbf{x}} P(\mathbf{a}, \mathbf{c}) \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{c})| \leq |\nabla_{\mathbf{x}} P(\mathbf{a}, \mathbf{c})| |\mathbf{b} - \mathbf{c}| \\ \implies |P(\mathbf{a}, \mathbf{b}) - P(\mathbf{a}, \mathbf{c})| &= O(|\mathbf{b} - \mathbf{c}|) \quad \text{per} \quad \mathbf{b} \approx \mathbf{c} \end{aligned}$$

osserviamo quindi che il punto di minimo $\mathbf{b} = \mathbf{c}$ di $P(\mathbf{a}, \mathbf{c})$ non è stazionario. Infatti, utilizzando la disuguaglianza di Bell (2.5)

$$1 + P(\mathbf{b}, \mathbf{c}) \geq O(|\mathbf{b} - \mathbf{c}|)$$

si vede che $P(\mathbf{b}, \mathbf{c})$ è di ordine più che lineare in un intorno del punto di minimo $\mathbf{b} \approx \mathbf{c}$.

Consideriamo ora l'andamento del valore di aspettazione quantistico in un intorno del minimo $\theta = 0$

$$\begin{aligned}\langle \hat{B}\hat{C} \rangle &= -\cos \theta = -1 + \frac{\theta^2}{2} + o(\theta^4) \\ \Rightarrow \langle \hat{B}\hat{C} \rangle &= O(\theta^2) \quad \text{per} \quad \theta \approx 0\end{aligned}$$

osserviamo quindi che $\theta = 0$ è un minimo stazionario, in quanto in un suo intorno la funzione è di ordine quadratico.

Si conclude quindi che la previsione delle LHVT e quella quantomeccanica non possono essere uguali.

$$\langle \hat{B}\hat{C} \rangle = O(\theta^2) \neq P(\mathbf{b}, \mathbf{c}) = O(|\mathbf{b} - \mathbf{c}|)$$

□

Abbiamo dimostrato quindi che la previsione del valore di aspettazione quantistico non è riprodotta da teorie locali di variabili nascoste. Ora vogliamo mostrare che non è nemmeno possibile che le correlazioni quantistiche siano *arbitrariamente vicine* a quelle prodotte dalle LHVT. Osserviamo che testare l'approssimazione puntuamente non sarebbe informativo in quanto funzioni diverse possono coincidere in un insieme di punti isolati. Considereremo quindi le funzioni medie

$$\overline{P(\mathbf{a}, \mathbf{b})} \quad \overline{-\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}$$

interpretate come le medie – indipendenti – delle funzioni $P(\mathbf{a}', \mathbf{b}')$ e $-\mathbf{a}' \cdot \mathbf{b}'$ sui vettori $\mathbf{a}'$ e $\mathbf{b}'$ che formano piccoli angoli rispetto a $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$.

Teorema 2.1.2. *Per ogni scelta di $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$ tale che la differenza tra le medie sia limitata da ϵ :*

$$|\overline{P(\mathbf{a}, \mathbf{b})} - \overline{-\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}| \leq \epsilon \tag{2.7}$$

allora ϵ non può essere arbitrariamente piccolo.

Dimostrazione. Per continuità, scelti $\mathbf{a}'$ e $\mathbf{b}'$ sufficientemente vicini ad $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$, vale per ogni $\delta \geq 0$

$$|\overline{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}} - \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}| \leq \delta \tag{2.8}$$

e supponiamo per assurdo che per ogni $\epsilon \geq 0$ valga anche (2.7) allora per la disuguaglianza triangolare

$$\left| \overline{P(\mathbf{a}, \mathbf{b})} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \right| \leq \epsilon + \delta \quad (2.9)$$

ricordando la definizione di $P(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ data da (2.4) si ottiene

$$\overline{P(\mathbf{a}, \mathbf{b})} = \int d\lambda \rho(\lambda) \overline{A(\mathbf{a}, \lambda)} \overline{B(\mathbf{b}, \lambda)}$$

allora, ricordando le relazioni (2.2) e supponendo $\mathbf{a} = \mathbf{b}$

$$\left| \overline{P(\mathbf{b}, \mathbf{b})} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{b} \right| = \left| \int d\lambda \rho(\lambda) \overline{A(\mathbf{b}, \lambda)} \overline{B(\mathbf{b}, \lambda)} + 1 \right| = \left| \int d\lambda \rho(\lambda) \left[\overline{A(\mathbf{b}, \lambda)} \overline{B(\mathbf{b}, \lambda)} + 1 \right] \right|$$

dalla (2.9) si ottiene

$$\left| \int d\lambda \rho(\lambda) \left[\overline{A(\mathbf{b}, \lambda)} \overline{B(\mathbf{b}, \lambda)} + 1 \right] \right| \leq \epsilon + \delta \quad (2.10)$$

osserviamo ora che le quantità $\overline{A(\mathbf{a}, \lambda)}$ e $\overline{B(\mathbf{b}, \lambda)}$ soddisfano le relazioni

$$\overline{A(\mathbf{a}, \lambda)} \leq 1 \quad \overline{B(\mathbf{b}, \lambda)} \leq 1 \quad (2.11)$$

pertanto considerando un terzo versore $\mathbf{c}$

$$\begin{aligned} \overline{P(\mathbf{a}, \mathbf{b})} - \overline{P(\mathbf{a}, \mathbf{c})} &= \int d\lambda \rho(\lambda) \left[\overline{A(\mathbf{a}, \lambda)} \overline{B(\mathbf{b}, \lambda)} - \overline{A(\mathbf{a}, \lambda)} \overline{B(\mathbf{c}, \lambda)} \right] \\ &= \int d\lambda \rho(\lambda) \overline{A(\mathbf{a}, \lambda)} \overline{B(\mathbf{b}, \lambda)} \left[1 + \overline{A(\mathbf{b}, \lambda)} \overline{B(\mathbf{c}, \lambda)} \right] \\ &\quad - \int d\lambda \rho(\lambda) \overline{A(\mathbf{a}, \lambda)} \overline{B(\mathbf{c}, \lambda)} \left[1 + \overline{A(\mathbf{b}, \lambda)} \overline{B(\mathbf{b}, \lambda)} \right] \end{aligned}$$

dalle relazioni (2.9) e (2.11) si trova

$$\begin{aligned} \left| \overline{P(\mathbf{a}, \mathbf{b})} - \overline{P(\mathbf{a}, \mathbf{c})} \right| &\leq \int d\lambda \rho(\lambda) \left[1 + \overline{A(\mathbf{b}, \lambda)} \overline{B(\mathbf{c}, \lambda)} \right] + \int d\lambda \rho(\lambda) \left[1 + \overline{A(\mathbf{b}, \lambda)} \overline{B(\mathbf{b}, \lambda)} \right] \\ &= 1 + \overline{P(\mathbf{b}, \mathbf{c})} + \int d\lambda \rho(\lambda) \left[1 + \overline{A(\mathbf{b}, \lambda)} \overline{B(\mathbf{b}, \lambda)} \right] \\ &\leq 1 + \overline{P(\mathbf{b}, \mathbf{c})} + \epsilon + \delta \end{aligned}$$

allora utilizzando (2.9)

$$\begin{aligned} |\mathbf{a} \cdot \mathbf{c} - \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}| &= \left| \overline{P(\mathbf{a}, \mathbf{b})} - \overline{P(\mathbf{a}, \mathbf{b})} - \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} - \overline{P(\mathbf{a}, \mathbf{c})} + \overline{P(\mathbf{a}, \mathbf{c})} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} \right| \\ &\leq \left| \overline{P(\mathbf{a}, \mathbf{b})} - \overline{P(\mathbf{a}, \mathbf{c})} \right| + \left| \overline{P(\mathbf{a}, \mathbf{b})} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \right| + \left| \overline{P(\mathbf{a}, \mathbf{c})} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} \right| \\ &\leq 1 + \overline{P(\mathbf{b}, \mathbf{c})} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} - \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} + 3(\epsilon + \delta) \\ &\leq 1 + \left| \overline{P(\mathbf{b}, \mathbf{c})} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} \right| - \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} + 3(\epsilon + \delta) \\ &= 1 - \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} + 4(\epsilon + \delta) \end{aligned}$$

Siccome per ipotesi questa relazione deve valere per ogni $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$, scegliamo

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{c} = 0 \qquad \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

allora la relazione precedente diventa

$$4(\epsilon + \delta) \geq \sqrt{2} - 1 > 0$$

potendo scegliere arbitrariamente δ si conclude quindi che per δ piccolo ma finito, affinché valga la disuguaglianza, ϵ non può essere arbitrariamente piccolo. □

2.1.2 Formulazione CHSH

Il teorema di Bell ha quindi evidenziato una discrepanza tra le previsioni delle LRH-VT e quelle della Meccanica Quantistica, testabile tramite le disuguaglianze (2.5). Il problema si sposta quindi su un piano sperimentale, tuttavia l'assunzione che per impostazioni identiche di misura ci sia una anticorrelazione perfetta tra le particelle entangled, sperimentalmente non può essere garantita. In questo senso presentiamo una nuova formulazione, proposta da John F. Clauser, Michael A. Horne, Abner Shimony e Richard A. Holt [21].

Consideriamo un ensemble di coppie di particelle correlate in moto tali che ciascuna entri rispettivamente in un apparato di misura I oppure II. Supponiamo che all'interno dell'apparato la particella possa percorrere solo due canali che indicheremo con ± 1 . Scegliamo a e b come parametri sperimentali, l'esito della misura sarà rispettivamente $A(a) = \pm 1$ e $B(b) = \pm 1$. Ipotizziamo valga il principio di località e che la loro correlazione sia completamente quantificata da un set di variabili nascoste λ descritto dalla distribuzione normalizzata $\rho(\lambda)$. Allora le misure sono completamente specificate dalle funzioni deterministiche $A(a, \lambda)$ e $B(b, \lambda)$ e la funzione di correlazione è data da (2.4). Si osserva che a e b rappresentano dei parametri sperimentali che possono essere scelti come setting da entrambi gli apparati di misura.

Rilassiamo quindi l'ipotesi di perfetta correlazione richiedendo che valga invece

$$P(\mathbf{b}, \mathbf{b}') = 1 - \delta \qquad \text{con} \qquad 0 \leq \delta \leq 1 \qquad (2.12)$$

ove $\mathbf{b}$ e $\mathbf{b}'$ rappresentano due diversi setting dell'apparato sperimentale. Sperimentalmente sono rilevanti i casi in cui δ è molto piccolo: stiamo richiedendo che sia possibile trovare due configurazioni dell'apparato, non necessariamente identiche, per cui la correlazione è quasi perfetta. Se denotiamo con Γ lo spazio delle variabili nascoste λ , possiamo pensare di suddividere tale spazio in due regioni $\Gamma_{\pm} = \{\lambda \in \Gamma \mid A(b', \lambda) = \pm B(b, \lambda)\}$ e utilizzando la relazione (2.12) e la normalizzazione di $\rho(\lambda)$ si ottiene

$$\begin{aligned}
P(b, b') &= \int_{\Gamma} d\lambda \rho(\lambda) A(b, \lambda) B(b', \lambda) \\
&= \int_{\Gamma_+} d\lambda \rho(\lambda) B(b, \lambda) B(b', \lambda) + \int_{\Gamma_-} d\lambda \rho(\lambda) B(b, \lambda) B(b', \lambda) \\
&= \int_{\Gamma_+} d\lambda \rho(\lambda) - \int_{\Gamma_-} d\lambda \rho(\lambda) = 1 - \delta \\
&= \int_{\Gamma_+} d\lambda \rho(\lambda) + \int_{\Gamma_-} d\lambda \rho(\lambda) - \delta
\end{aligned}$$

e quindi

$$\int_{\Gamma_-} d\lambda \rho(\lambda) = \frac{\delta}{2} \quad (2.13)$$

Sotto queste ipotesi, seguendo un ragionamento analogo a quello proposto nella sezione 2.1.1 per ricavare le disuguaglianze di Bell (2.5)

$$\begin{aligned}
|P(a, b) - P(a, c)| &\leq \int_{\Gamma} d\lambda \rho(\lambda) |A(a, \lambda) B(b, \lambda) - A(a, \lambda) B(c, \lambda)| \\
&= \int_{\Gamma} d\lambda \rho(\lambda) |A(a, \lambda) B(b, \lambda)| [1 - B(b, \lambda) B(c, \lambda)] \\
&= 1 - \int_{\Gamma} d\lambda \rho(\lambda) B(b, \lambda) B(c, \lambda) \\
&= 1 - \int_{\Gamma} d\lambda \rho(\lambda) A(b', \lambda) B(c, \lambda) - 2 \int_{\Gamma_-} d\lambda \rho(\lambda) A(b', \lambda) B(c, \lambda)
\end{aligned}$$

ma da (2.13) vale

$$\begin{aligned}
\int_{\Gamma} d\lambda \rho(\lambda) B(b, \lambda) B(c, \lambda) &\geq P(b', c) - 2 \int_{\Gamma_-} d\lambda \rho(\lambda) |A(b', \lambda) B(c, \lambda)| \\
&= P(b', c) - \delta
\end{aligned}$$

e pertanto

$$\begin{aligned}
|P(a, b) - P(a, c)| &\leq 1 + \delta - P(b', c) \\
&= 2 - (1 - \delta) - P(b', c) \\
&= 2 - P(b, b') - P(b', c)
\end{aligned}$$

si ottiene quindi la generalizzazione delle disuguaglianze di Bell:

$$|P(a, b) - P(a, c)| + P(b, b') + P(b', c) \leq 2 \quad (2.14)$$

La disuguaglianza (2.14) è la formulazione originale CHSH e rappresenta una prima generalizzazione delle disuguaglianze di Bell. In seguito presenteremo una versione più moderna [22], ottenuta senza l'introduzione del parametro δ e sostituendo le previsioni deterministiche con previsioni di tipo stocastico.

Teorema 2.1.3. (*Disuguaglianza CHSH*) *Introduciamo la combinazione di probabilità congiunte*

$$\begin{aligned} E(a, b) &= P(A = +1, B = +1|a, b) + P(A = -1, B = -1|a, b) \\ &\quad - P(A = +1, B = -1|a, b) - P(A = -1, B = +1|a, b) \end{aligned}$$

allora nell'ambito delle teorie locali di variabili nascoste valgono le disuguaglianze CHSH

$$|E(a, b) \pm E(a, b')| + |E(a', b) \mp E(a', b')| \leq 2 \quad (2.15)$$

Dimostrazione. Richiamiamo l'espressione di $E(a, b)$ data da (1.5)

$$E(a, b) = \int d\lambda \rho(\lambda) \overline{A(a, \lambda)} \overline{B(b, \lambda)}$$

e osserviamo che da (1.3) e (1.4) risulta

$$\left| \overline{A(a, \lambda)} \right| \leq 1 \quad \left| \overline{B(b, \lambda)} \right| \leq 1 \quad (2.16)$$

allora sfruttando (2.16) si ha

$$\begin{aligned} |E(a, b) \pm E(a, b')| &= \left| \int d\lambda \rho(\lambda) \overline{A(a, \lambda)} [\overline{B(b, \lambda)} \pm \overline{B(b', \lambda)}] \right| \\ &\leq \int d\lambda \rho(\lambda) \left| \overline{B(b, \lambda)} \pm \overline{B(b', \lambda)} \right| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |E(a', b) \mp E(a', b')| &= \left| \int d\lambda \rho(\lambda) \overline{A(a', \lambda)} [\overline{B(b, \lambda)} \mp \overline{B(b', \lambda)}] \right| \\ &\leq \int d\lambda \rho(\lambda) \left| \overline{B(b, \lambda)} \mp \overline{B(b', \lambda)} \right| \end{aligned}$$

e anche

$$\left| \overline{B(b, \lambda)} \pm \overline{B(b', \lambda)} \right| + \left| \overline{B(b, \lambda)} \mp \overline{B(b', \lambda)} \right| \leq 2 \max \left\{ \left| \overline{B(b, \lambda)} \right|, \left| \overline{B(b', \lambda)} \right| \right\} = 2$$

utilizzando la condizione di normalizzazione di $\rho(\lambda)$ si conclude quindi

$$\begin{aligned} |E(a, b) \pm E(a, b')| + |E(a', b) \mp E(a', b')| \\ \leq \int d\lambda \rho(\lambda) \left[\left| \overline{B(b, \lambda)} \pm \overline{B(b', \lambda)} \right| + \left| \overline{B(b, \lambda)} \mp \overline{B(b', \lambda)} \right| \right] \\ \leq 2 \int d\lambda \rho(\lambda) = 2 \end{aligned}$$

abbiamo ottenuto due espressioni equivalenti della *disuguaglianza CHSH*:

$$|E(a, b) \pm E(a, b')| + |E(a', b) \mp E(a', b')| \leq 2$$

□

Osserviamo che tale predizione è in contraddizione con le previsioni della Meccanica Quantistica. Considerando la formulazione del paradosso EPR per particelle di spin 1/2 1.1.2 vale (2.3)

$$E(a, b) = -\cos(a - b)$$

allora scegliendo le direzioni

$$a = 0 \quad b = \frac{\pi}{4} \quad a' = \frac{\pi}{2} \quad b' = -\frac{\pi}{4}$$

si ottiene

$$\begin{aligned} E(a, b) = E(a, b') = E(a', b) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ E(a', b') = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

e quindi si massimizza il valore di aspettazione quantistico

$$|E(a, b) + E(a, b')| + |E(a', b) - E(a', b')| = 2\sqrt{2}$$

2.1.3 Equivalenza delle formulazioni

Approfondiamo quindi il confronto tra le due formulazioni, osserviamo che la disuguaglianza di Bell (2.5) è formulata in termini di osservabili dicotomiche

$$A(a, \lambda), B(b, \lambda) = \pm 1$$

che determinano univocamente l'esito di ciascuna misura per ogni valore della variabile nascosta λ . La funzione di correlazione assume quindi la forma (1.6)

$$P(a, b) = \int d\lambda \rho(\lambda) A(a, \lambda) B(b, \lambda).$$

e quindi rientra nell'ambito delle teorie a variabili nascoste locali *deterministiche*. La formulazione CHSH (2.15) introduce invece una descrizione più generale, nella quale le correlazioni sono espresse in termini di valori medi statistici

$$\overline{A(a, \lambda)}, \overline{B(b, \lambda)} \in [-1, 1]$$

e la funzione di correlazione viene scritta come (1.5)

$$E(a, b) = \int d\lambda \rho(\lambda) \overline{A(a, \lambda)} \overline{B(b, \lambda)}$$

e pertanto rientra all'interno delle teorie locali a variabili nascoste di tipo *stocastico*.

La distinzione tra modelli locali deterministici e stocastici di variabili nascoste è tuttavia apparente, mostriamolo presentando i risultati di Arthur Fine [23] riassunti nel seguente teorema, la cui dimostrazione è consultabile in Appendice C.

Teorema 2.1.4. (Teorema di Fine) *Le seguenti affermazioni riguardanti un esperimento sulle correlazioni quantistiche sono equivalenti:*

- (a) *Esiste un modello a variabili nascoste locali deterministico per l'esperimento*
- (b) *Esiste un modello a variabili nascoste locali stocastico fattorizzabile per l'esperimento*
- (c) *Esiste una distribuzione congiunta di probabilità per tutte le osservabili dell'esperimento le cui probabilità marginali riproducono le probabilità quantistiche*
- (d) *Esistono distribuzioni di probabilità ben definite per tutte le coppie e gruppi di tre osservabili, compatibili e non compatibili*

(e) Valgono le disuguaglianze di Bell

Osserviamo quindi che un sistema è descritto da un modello *deterministico* se e solo se può essere descritto tramite un modello *stocastico fattorizzabile*. Il passaggio da teorie a variabili nascoste deterministiche a quelle stocastiche fattorizzabili non aggiunge quindi nuove informazioni e pertanto non costituisce una generalizzazione in senso stretto. Conseguentemente, la trattazione stocastica proposta da CHSH è solo apparentemente più generale di quella deterministica di Bell e le due formulazioni sono da considerarsi fisicamente equivalenti.

Inoltre, l'equivalenza di tutte le proposizioni del teorema evidenzia il fulcro delle teorie locali a variabili nascoste: la validità delle disuguaglianze di Bell implica l'esistenza di una distribuzione di probabilità congiunta globale per tutte le osservabili dell'esperimento, incluse quelle incompatibili. Questo costituisce la principale differenza rispetto alla Meccanica Quantistica, nella quale osservabili incompatibili non possiedono, in generale, una distribuzione di probabilità congiunta ben definita.

2.2 Non-località e causalità

I risultati ottenuti mediante le disuguaglianze di Bell – confermati dalle evidenze sperimentali – mostrano esplicitamente che nessuna teoria locale a variabili nascoste è in grado di riprodurre le correlazioni previste dalla Meccanica Quantistica per sistemi entangled. Rimane quindi aperta una questione concettualmente fondamentale che riguarda la relazione tra la violazione del realismo locale e la possibilità di trasmettere informazione in modo superluminare. Storicamente sono stati sviluppati diversi schemi di comunicazione superluminale basati sul collasso istantaneo della funzione d'onda [24] e [25]. A questo proposito, presentiamo il contributo degli autori G. C. Ghirardi, A. Rimini e T. Weber [26] che esaminano e confutano i diversi tentativi e dimostrano il *teorema di no-signaling*, estinguendo il dibattito.

Consideriamo un sistema quantistico S composto da due sottosistemi U e V

$$S = U + V$$

sufficientemente separati nello spazio da escludere qualsiasi interazione causale diretta. In corrispondenza delle due regioni sono presenti due apparati di misura, indicati con A e B . Lo scopo è verificare se le proprietà fisiche osservabili nel sottosistema U , che interagisce con l'apparato A , possano dipendere dal fatto che venga effettuata oppure no una misura sul sottosistema separato V mediante l'apparato B . In seguito indicheremo

gli operatori omettendo il simbolo $\wedge$, al fine di non appesantire ulteriormente la notazione.

Assumiamo che l'intera dinamica del sistema complessivo – comprendente i sottosistemi quantistici, gli apparati sperimentali e le loro interazioni – sia completamente descritta dalla meccanica (A.2). In particolare, i processi di misura vengono modellizzati come interazioni unitarie tra sistema e apparato:

$$W(U - A) \in \mathcal{H}_U \otimes \mathcal{H}_A, \quad W(V - B) \in \mathcal{H}_V \otimes \mathcal{H}_B.$$

In questo contesto valgono le seguenti ipotesi:

- (1) Lo spazio del sistema complessivo è $\mathcal{H} = \mathcal{H}_U \otimes \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_V \otimes \mathcal{H}_B$
- (2) Lo stato iniziale del sistema S e degli apparati A e B è descritto da operatori statistici ben definiti:

$$\rho^0 = \rho_{UV}^0 \otimes \rho_A^0 \otimes \rho_B^0 \in \mathcal{H}$$

dove

$$\rho_{UV}^0 \in \mathcal{H}_{UV} \quad \rho_A^0 \in \mathcal{H}_A \quad \rho_B^0 \in \mathcal{H}_B$$

- (3) Le interazioni di misura sono rappresentate da operatori unitari locali. In particolare, la misura effettuata da A su U non coinvolge né il sottosistema V né l'apparato B , e analogamente per la misura effettuata da B su V , quindi

$$\mathcal{U}_{U-A} \otimes \mathcal{I}_{VB} \in \mathcal{H} \quad \mathcal{I}_{UA} \otimes \mathcal{U}_{V-B} \in \mathcal{H} \quad (2.17)$$

se non viene effettuata alcuna misura sul sottosistema V , lo stato finale del sistema è

$$\rho_A = \mathcal{U}_{U-A} \rho_{UV}^0 \otimes \rho_A^0 \otimes \rho_B^0 \mathcal{U}_{U-A}^\dagger$$

se invece la misura su U avviene dopo una misura sul sottosistema V , allora lo stato finale risulta

$$\rho_{BA} = \mathcal{U}_{U-A} \mathcal{U}_{V-B} \rho_{UV}^0 \otimes \rho_A^0 \otimes \rho_B^0 \mathcal{U}_{V-B}^\dagger \mathcal{U}_{U-A}^\dagger$$

Teorema 2.2.1. (Teorema no-signaling) *Sia $\mathcal{L}_A$ un'osservabile associata esclusivamente all'apparato di misura A , allora*

$$\langle \mathcal{L}_A \rangle_{BA} - \langle \mathcal{L}_A \rangle_0 = \langle \mathcal{L}_A \rangle_A - \langle \mathcal{L}_A \rangle_0$$

cioè la variazione del valore di aspettazione di qualunque osservabile locale dell'apparato A è indipendente dal fatto che venga effettuata – oppure no – una misura nel sistema spazialmente separato V .

Dimostrazione. Esplicitiamo il valore di aspettazione di $\mathcal{L}_A$ nei due casi in esame:

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{L}_A \rangle_{BA} &\equiv \text{Tr}[\mathcal{L}_A \rho_{BA}] \\ &= \text{Tr}[\mathcal{L}_A \mathcal{U}_{U-A} \mathcal{U}_{V-B} \rho_{UV}^0 \otimes \rho_A^0 \otimes \rho_B^0 \mathcal{U}_{V-B}^\dagger \mathcal{U}_{U-A}^\dagger] \\ &= \text{Tr}[\mathcal{U}_{V-B}^\dagger \mathcal{U}_{U-A}^\dagger \mathcal{L}_A \mathcal{U}_{U-A} \mathcal{U}_{V-B} \rho_{UV}^0 \otimes \rho_A^0 \otimes \rho_B^0]\end{aligned}$$

ove nell'ultimo passaggio si è utilizzata la proprietà di ciclicità $\text{Tr}[XYZ] = \text{Tr}[ZXY]$ della traccia. Inoltre, da (2.17) si ha

$$[\mathcal{U}_{U-A} \otimes \mathcal{I}_{VB}, \mathcal{I}_{UA} \otimes \mathcal{U}_{V-B}] = 0$$

e per ipotesi di osservabile in A vale anche $[\mathcal{L}_A, \mathcal{U}_{V-B}] = 0$, quindi

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{L}_A \rangle_{BA} &= \text{Tr}[\mathcal{U}_{U-A}^\dagger \mathcal{L}_A \mathcal{U}_{U-A} \mathcal{U}_{V-B}^\dagger \mathcal{U}_{V-B} \rho_{UV}^0 \otimes \rho_A^0 \otimes \rho_B^0] \\ &= \text{Tr}[\mathcal{U}_{U-A}^\dagger \mathcal{L}_A \mathcal{U}_{U-A} \rho_{UV}^0 \otimes \rho_A^0 \otimes \rho_B^0] \\ &= \text{Tr}[\mathcal{L}_A \mathcal{U}_{U-A} \rho_{UV}^0 \otimes \rho_A^0 \otimes \rho_B^0 \mathcal{U}_{U-A}^\dagger] \\ &\equiv \text{Tr}[\mathcal{L}_A \rho_A] \equiv \langle \mathcal{L}_A \rangle_A\end{aligned}$$

quindi se studiamo le variazioni del valore di aspettazione rispetto allo stato iniziale che chiamiamo $\langle \mathcal{L}_A \rangle_0 = \text{Tr}[\mathcal{L}_A \rho_0]$ si conclude

$$\langle \mathcal{L}_A \rangle_{BA} - \langle \mathcal{L}_A \rangle_0 = \langle \mathcal{L}_A \rangle_A - \langle \mathcal{L}_A \rangle_0$$

□

Il risultato ottenuto mostra in particolare che, anche in presenza di correlazioni quantistiche non-locali tra sistemi entangled, queste non possano essere sfruttate per trasmettere informazione a velocità superluminare. Infatti, sebbene una misura effettuata su V modifichi istantaneamente la descrizione dello stato complessivo del sistema, essa non altera i valori di aspettazione di alcuna osservabile locale dell'apparato A . Quindi un osservatore che abbia accesso esclusivamente al sottosistema $U + A$ non può stabilire, tramite misure locali, se nel sottosistema separato $V + B$ sia stata effettuata oppure no una misura.

Capitolo 3

Realizzazione sperimentale delle disuguaglianze di Bell

La formulazione delle disuguaglianze di Bell e successivamente la loro riformulazione proposta da Clauser, Horne, Shimony e Holt, ha reso possibile un confronto sperimentale quantitativo tra le previsioni delle teorie a variabili nascoste locali e quelle della Meccanica Quantistica. Tuttavia, i primi esperimenti si discostavano significativamente dalla configurazione ideale proposta da Bell e CHSH, principalmente a causa della limitata efficienza di rivelazione dei sistemi sperimentali. Per analizzare i dati era quindi necessario introdurre l'ipotesi aggiuntiva di *fair sampling*, secondo cui gli eventi rivelati costituiscono un campione rappresentativo dell'insieme totale degli eventi prodotti. Questa assunzione introduce il cosiddetto *detection loophole*. Un'ulteriore differenza rispetto allo scenario ideale riguarda l'implementazione sperimentale dell'ipotesi di località, la cui verifica richiede che le due misure siano effettuate in regioni spazialmente separate e in modo indipendente, dando origine al cosiddetto *locality loophole*. Solo nel 2015 furono realizzati i primi test di Bell privi di significativi loophole, pubblicati nell'arco di tre mesi da gruppi di ricerca indipendenti a Delft [27], Vienna [28] e Boulder [29].

Il capitolo è organizzato seguendo lo sviluppo storico e sperimentale dei test di Bell: dopo una discussione del primo esperimento di Freedman e Clauser del 1972, verranno analizzati i principali limiti sperimentali dei primi test, concentrandosi inizialmente sul *locality loophole*, con particolare riferimento all'esperimento di Aspect e collaboratori del 1982, e successivamente sul *detection loophole*, affrontato attraverso l'esperimento di Rowe e collaboratori del 2001.

3.1 Esperimento di Freedman e Clauser (1972)

L'esperimento di Freedman e Clauser [30] si interessa di misurare le correlazioni tra fotoni entangled in polarizzazione lineare, prodotti da una cascata atomica del tipo

$J = 0 \rightarrow J = 1 \rightarrow J = 0$. I fotoni, aventi direzioni opposte, entrano in due sistemi ottici simmetrici costituiti entrambi da due lenti, un filtro di lunghezza d'onda, un polarizzatore removibile in grado di ruotare, un rivelatore di singolo fotone e due canali per contare le coincidenze.

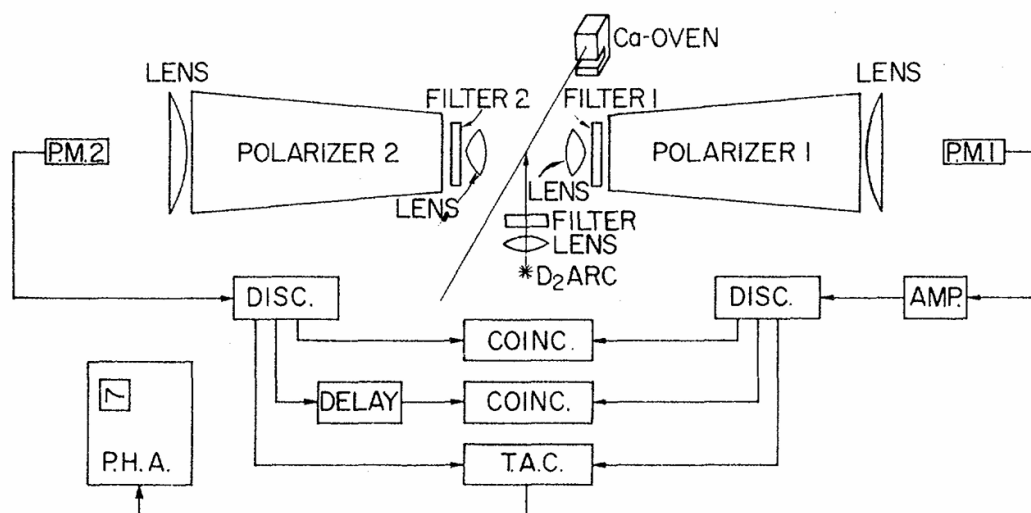


Figura 3.1: Schema dell'apparato sperimentale utilizzato da Freedman e Clauser.

La misurazione delle coincidenze consiste nella rivelazione congiunta di un fotone emerso dal polarizzatore 1 e di un fotone emerso dal polarizzatore 2, l'elettronica utilizzata permette di distinguere eventi distanti $\sim 1.5\text{ ns}$. Poiché lo stato intermedio della cascata ha un tempo di vita molto breve $\sim 5\text{ ns}$, è possibile selezionare una finestra di coincidenza molto ristretta, pari a 8.1 ns . Al fine di stimare ed escludere al meglio il rumore di fondo, nel secondo canale è aggiunto un *delay* $\sim 50\text{ ns}$ e il risultato di questo contatore è da considerarsi come offset. Il numero di coincidenze registrate dipende sia dall'intensità del fascio atomico sia dall'intensità della lampada al deuterio, utilizzata nella generazione delle coppie EPR. Durante una misura la lampada perde gradualmente intensità per cui anche il numero di coppie prodotte e conseguentemente il numero di coincidenze misurate, diminuisce lentamente nel tempo. Senza inserire i polarizzatori, si registrano $0.3 - 0.1$ coincidenze/s, mentre le coincidenze spurie sono molto meno frequenti, circa $0.01 - 0.002$ coincidenze/s. Poiché il tasso di coincidenze era basso, sono state effettuate acquisizioni lunghe, organizzate in cicli di 100 s , ognuno dei quali utilizza una diversa configurazione dei polarizzatori. L'intero set di misure richiese circa 200 ore di acquisizione.

Generazione dei fotoni entangled

Un fascio atomico di calcio viene prodotto facendo evaporare il calcio da un forno di tantalio – materiale scelto poiché resiste a temperature molto elevate e non reagisce con il calcio – e gli atomi escono dal forno per effusione formando un fascio ben definito. Viene quindi utilizzata una lampada al deuterio in grado di produrre uno spettro continuo nell’ultravioletto, filtrato tramite un filtro a interferenza a $2275 \text{ \AA}$ e focalizzato sul fascio di calcio prodotto. Gli atomi di calcio assorbono quindi il fotone per risonanza e avviene la transizione dallo stato fondamentale $4s^2\ ^1S_0$ allo stato eccitato $3d4p\ ^1P_1$. Da qui, circa il 7% degli atomi che non sono decaduti direttamente allo stato fondamentale finiscono nello stato $4p^2\ ^1S_0$, innescando un decadimento a catena. Gli atomi attraversano quindi lo stato intermedio $4p4s\ ^1P_1$ e tornano allo stato fondamentale $4s^2\ ^1S_0$, in seguito all’emissione di due fotoni $\gamma_1(5513 \text{ \AA})$ e $\gamma_2(4227 \text{ \AA})$, aventi direzioni opposte.

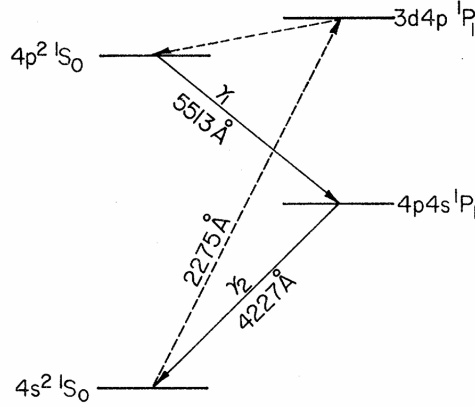


Figura 3.2: Livelli energetici del calcio interessati nella cascata radiativa. In particolare la linea tratteggiata indica la transizione causata dall’eccitazione, mentre la linea continua il processo di decadimento $4p^2\ ^1S_0 \rightarrow 4p4s\ ^1P_1 \rightarrow 4s^2\ ^1S_0$, con emissione dei due fotoni entangled γ_1 e γ_2 .

I due fotoni risultano essere entangled in polarizzazione infatti analizzando nel dettaglio il livello $4s4p\ ^1P_1$, questo risulta essere degenero. In assenza di effetto Zeeman ($\mathbf{B} = 0$) si ottiene la transizione di figura 3.3. Nel piano xy sono quindi possibili due transizioni e i fotoni possono avere gli stati di polarizzazione circolare

$$\sigma^+ : \quad \epsilon = \frac{\mathbf{x} + i\mathbf{y}}{\sqrt{2}} \quad (3.1)$$

$$\sigma^- : \quad \epsilon = -\frac{\mathbf{x} - i\mathbf{y}}{\sqrt{2}} \quad (3.2)$$

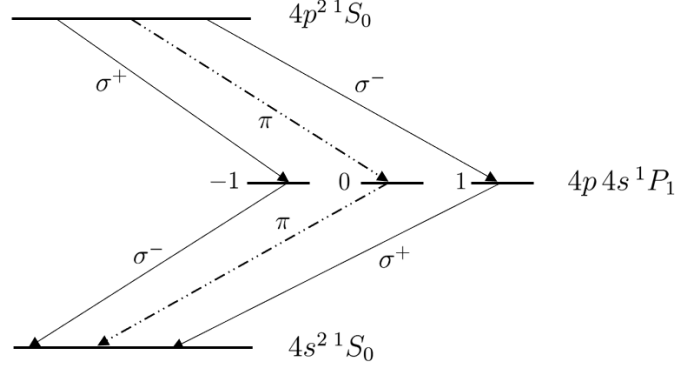


Figura 3.3: Transizione energetica in assenza di campo magnetico esterno. In particolare, le linee continue descrivono transizioni in cui i fotoni sono emessi con polarizzazione circolare nel piano xy , indicata con σ , mentre la linea tratteggiata indica la transizione che porta all'emissione di un fotone con polarizzazione lineare π lungo z .

non potendo distinguere le due transizioni, lo stato dei due fotoni emessi sarà

$$|\Psi\rangle = \frac{|\sigma^+\sigma^-\rangle + |\sigma^-\sigma^+\rangle}{\sqrt{2}}$$

In seguito, saranno effettuate misure di polarizzazione lineare, riscriviamo quindi lo stato in funzione della base $\{|H\rangle, |V\rangle\}$, utilizzando le relazioni (3.1) e (3.2)

$$\begin{aligned} |\sigma^+\sigma^-\rangle &= -\frac{1}{2}(|HH\rangle - i|HV\rangle + i|VH\rangle + |VV\rangle) \\ |\sigma^-\sigma^+\rangle &= -\frac{1}{2}(|HH\rangle + i|HV\rangle - i|VH\rangle + |VV\rangle) \end{aligned}$$

sommando i due contributi, i termini misti si cancellano e rimane lo stato

$$|\Psi\rangle = -\frac{|HH\rangle + |VV\rangle}{\sqrt{2}} \quad (3.3)$$

che a meno di un fattore di fase globale coincide con lo stato di Bell $|\Phi^+\rangle$.

Misura della violazione delle disuguaglianze di Bell

Al fine di testare le disuguaglianze di Bell nella formulazione CHSH (2.15) si associano all'analizzatore di polarizzazione le grandezze:

- Polarizzatore 1: $A(\alpha), A'(\alpha') \in \{0, 1\}$ con $\alpha \neq \alpha'$
- Polarizzatore 2: $B(\beta), B'(\beta') \in \{0, 1\}$ con $\beta \neq \beta'$

ove con α, α' e β, β' si intendono le direzioni dell'asse di polarizzazione del primo e del secondo polarizzatore, rispettivamente. Gli angoli sono scelti in modo tale che $\varphi = \beta - \alpha = \alpha' - \beta = \beta' - \alpha'$, come si può vedere dalla Figura 3.4.

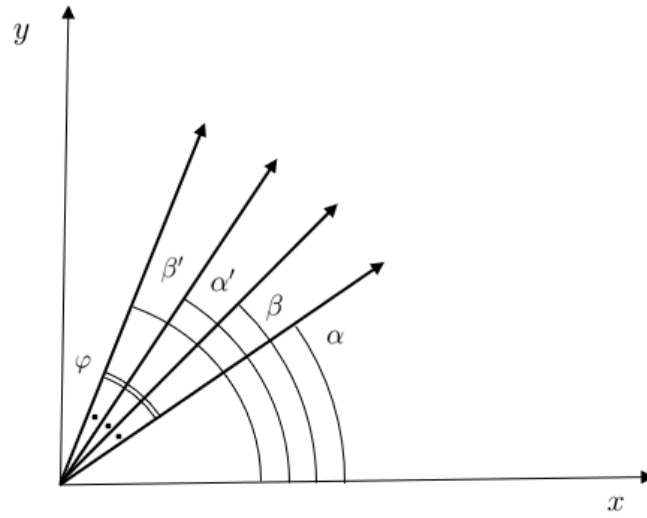


Figura 3.4: Rappresentazione degli assi dei polarizzatori nelle diverse configurazioni.

Durante l'esperimento sono state misurate le seguenti quantità:

- $R(\varphi)$ – tasso di coincidenze della rilevazione due fotoni con polarizzatori aventi assi che formano un angolo φ , cioè $R(\alpha, \beta), R(\alpha', \beta)$ e $R(\alpha', \beta')$
- $R_1(\alpha')$ – tasso di coincidenze con polarizzatore 2 rimosso
- $R_2(\beta')$ – tasso di coincidenze con polarizzatore 1 rimosso
- R_0 – tasso di coincidenze con entrambi i polarizzatori rimossi

Si utilizzano i rate di coincidenza in quanto, a differenza dei conteggi assoluti, sono indipendenti dalla durata dell'acquisizione. Inoltre, al fine di ridurre al minimo errori

sistematici – dovuti ad esempio all'intensità della sorgente o all'efficienza di rivelazione – i rate verranno normalizzati rispetto al rate senza polarizzatori. Definiamo quindi le grandezze

$$\begin{aligned}
E[AB] &= \frac{R(\alpha, \beta)}{R_0} = \frac{R(\varphi)}{R_0} \\
E[A'B] &= \frac{R(\alpha', \beta)}{R_0} = \frac{R(\varphi)}{R_0} \\
E[A'B'] &= \frac{R(\alpha', \beta')}{R_0} = \frac{R(\varphi)}{R_0} \\
E[A'] &= \frac{R_1(\alpha')}{R_0} \\
E[B] &= \frac{R_2(\beta)}{R_0} \\
E[AB'] &= \frac{R(\alpha, \beta')}{R_0} = \frac{R(3\varphi)}{R_0}
\end{aligned}$$

e costruiamo la combinazione

$$\begin{aligned}
\Delta\varphi &= E[AB] - E[AB'] + E[A'B] + E[A'B'] - E[A'] - E[B] \\
&= 3 \frac{R(\varphi)}{R_0} - \frac{R(3\varphi)}{R_0} - \frac{R_1(\alpha') + R_2(\beta)}{R_0}
\end{aligned} \tag{3.4}$$

allora, per un modello a variabili nascoste locali, vale la disuguaglianza

$$-1 \leq \Delta\varphi \leq 0 \tag{3.5}$$

che è equivalente alla formulazione CHSH infatti, se introduciamo le grandezze

$$\begin{aligned}
Q &= 2A - 1 & T &= 2B - 1 \\
Q' &= 2A' - 1 & T' &= 2B' - 1
\end{aligned}$$

allora $Q, Q', T, T' \in \{-1, 1\}$ e si ottiene

$$-2 \leq E[QT] - E[QT'] + E[Q'T] + E[Q'T'] \leq 2$$

Le previsioni quantomeccaniche prevedono una diversa correlazione tra queste quantità, infatti se consideriamo lo stato $|\Phi^+\rangle$ e associamo agli analizzatori di polarizzazione i proiettori $\hat{P}(\theta) = |\theta\rangle\langle\theta|$ con θ angolo dell'asse di polarizzazione, allora le osservabili del

sistema nelle diverse configurazioni dei polarizzatori sono date dalle espressioni (Lemma B.2)

$$E[AB] = E(\alpha, \beta) = \langle \Phi^+ | \hat{P}(\alpha) \otimes \hat{P}(\beta) | \Phi^+ \rangle = \frac{1}{2} \cos^2(\alpha - \beta) = \frac{1}{2} \cos^2 \varphi$$

$$E[A'] = E(\alpha') = \langle \Phi^+ | \hat{P}(\alpha') \otimes \hat{\mathbb{I}} | \Phi^+ \rangle = \frac{1}{2}$$

quindi considerando tutte le configurazioni si ottengono

$$E(\alpha, \beta) = E(\alpha', \beta) = E(\alpha', \beta') = \frac{1}{2} \cos^2 \varphi \quad E(\alpha, \beta') = \frac{1}{2} \cos^2 3\varphi \quad E(\alpha') = E(\beta) = \frac{1}{2}$$

La massima violazione delle disuguaglianze si trova per

$$\varphi_1 = \frac{\pi}{8} = 22.5^\circ \quad \text{con } \Delta\varphi_1 = 0.104 \pm 0.026 > 0$$

$$\varphi_2 = \frac{3\pi}{8} = 67.5^\circ \quad \text{con } \Delta\varphi_2 = -1.097 \pm 0.018 < -1$$

In particolare, la violazione non è limitata a specifiche scelte puntuali degli angoli dei polarizzatori, ma riflette la struttura funzionale della correlazione quantistica.

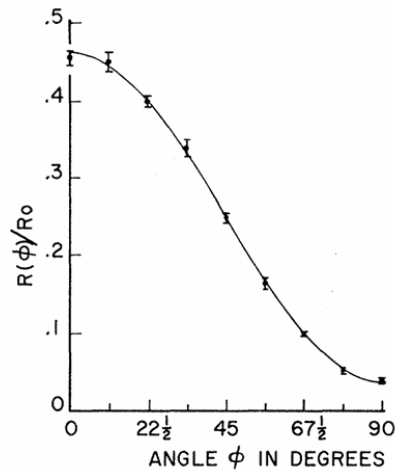


Figura 3.5: Tasso di coincidenza con angolo φ tra i polarizzatori, diviso per il tasso di coincidenza con entrambi i polarizzatori rimossi, riportato in funzione dell'angolo φ . La linea continua rappresenta la previsione della Meccanica Quantistica, la barra di errore è pari a 1 deviazione standard.

Abbiamo mostrato come, in tale formalismo, la quantità osservabile sperimentalmente sia una funzione della differenza degli angoli tra i polarizzatori

$$E(\alpha, \beta) = \frac{1}{2} \cos^2 \varphi$$

sperimentalmente, questa grandezza non viene misurata direttamente, ma viene ricostruita a partire dai conteggi di coincidenza, in particolare

$$E(\alpha, \beta) = \frac{R(\varphi)}{R_0}$$

Il confronto di tale previsione con i risultati sperimentali evidenzia un accordo positivo, come è evidente dalla Figura 3.5.

3.2 Locality loophole

I primi esperimenti realizzati, come anche quello di Freedman e Clauser, presentano il cosiddetto *locality loophole* cioè non garantiscono che la scelta delle osservabili da misurare e i conseguenti eventi di rivelazione per i singoli elementi della coppia EPR, siano eventi di tipo *space-like*.

Infatti, utilizzando una configurazione statica dei polarizzatori durante tutto il processo di misura, non è possibile escludere completamente la possibilità che le correlazioni osservate siano spiegabili mediante LRHVT che in qualche modo sfruttino le informazioni sulle impostazioni di misura già disponibili al momento dell'emissione. Il primo esperimento che storicamente ha chiuso il locality loophole è stato realizzato da Aspect et al. nel 1982 ed è approfondito nella sezione seguente.

3.2.1 Esperimento di Aspect et al. (1982)

L'esperimento realizzato da Alain Aspect et al. nel 1982 [31] è l'ultimo di un ciclo di tre esperimenti [31]-[33], volti a testare la violazione delle disuguaglianze di Bell studiando le correlazioni in polarizzazione lineare di coppie di fotoni entangled. Questo esperimento, a differenza dei precedenti tentativi, presenta un meccanismo in grado di automatizzare la scelta della direzione dell'asse del polarizzatore, costituendo quindi il primo tentativo di chiudere il *locality loophole*. L'apparato sperimentale si compone di una sorgente di coppie EPR, realizzata sfruttando la cascata radiativa del calcio $J = 0 \rightarrow J = 1 \rightarrow J = 0$, come presentato nella sezione 3.1. Ciascuno dei fotoni della coppia entra quindi in un sistema ottico composto da due polarizzatori preparati in configurazioni diverse – α, α' per i polarizzatori nel lato I e β, β' per i polarizzatori nel lato II – e uno *switch ottico* in grado di scegliere rapidamente (~ 10 ns) la configurazione del polarizzatore. I sistemi ottici I e II sono posti a una distanza pari a 6 m, quindi i fotoni prodotti impiegano un

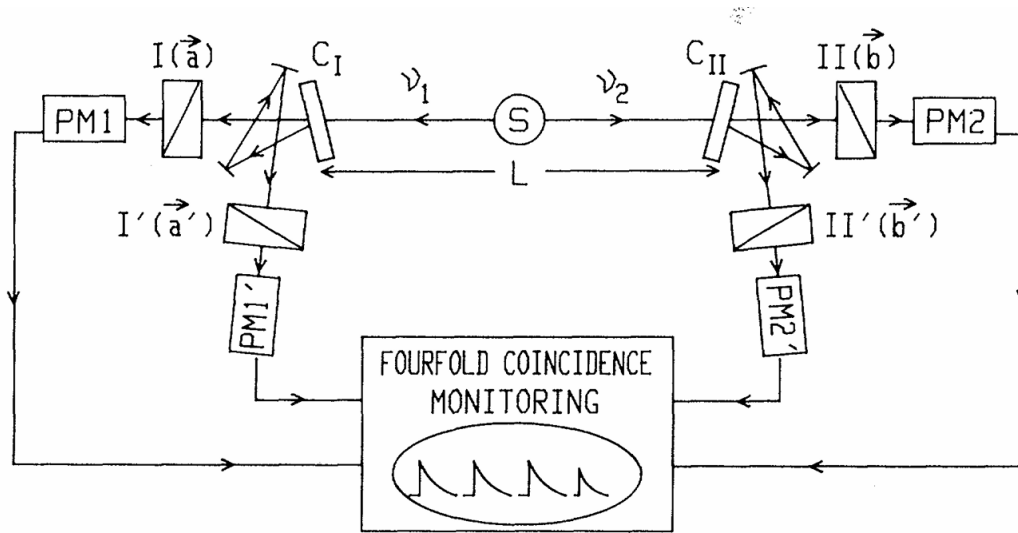


Figura 3.6: Schema dell'apparato sperimentale di Aspect et al. Ogni *switch ottico* (C_I, C_{II}) è seguito da due polarizzatori in due diverse configurazioni (I, I' e II, II'), ogni combinazione è equivalente ad un polarizzatore in grado di cambiare velocemente configurazione.

tempo $L/2c \sim 20$ ns ad arrivare ai polarizzatori, tempo molto maggiore sia del ritardo dello switch (~ 10 ns) che del tempo di vita media del livello intermedio del calcio (~ 5 ns) pertanto, la misura di un evento nel ramo I e l'eventuale cambio di orientazione del polarizzatore sul lato II sono eventi di tipo *space-like*.

Sebbene questo risulti essere il primo tentativo di chiudere il *locality loophole*, non può considerarsi conclusivo in quanto non si è in grado di garantire che gli switch presenti nei due rami siano non correlati – lo schema ideale in questo senso prevede l'introduzione di uno switch completo e randomizzato. Nell'esperimento realizzato, i due switch –oltre a non essere completi – non variano in modo completamente casuale, bensì quasi-periodico. Tuttavia, essi sono alimentati da diversi generatori settati a diverse frequenze e pertanto è ragionevole l'ipotesi che siano non correlati.

Switch ottico

Lo switch ottico sfrutta l'interazione acusto-ottica tra il fascio e un'onda stazionaria ad ultrasuoni prodotta in acqua, risultato dell'interferenza tra due onde acustiche che si propagano in direzioni opposte, generate da due trasduttori elettroacustici alimentati in fase a circa 25 MHz. Si crea quindi un reticolo di diffrazione periodico e al fine di avere la massima deviazione del fascio di fotoni incidente, si sceglie l'angolo di incidenza sul cristallo pari all'angolo di Bragg $\theta_B = 5 \cdot 10^{-3}$ rad, conseguentemente i fotoni possono essere trasmessi, oppure diffratti con un angolo pari a $2\theta_B$. Tuttavia, poiché il fascio

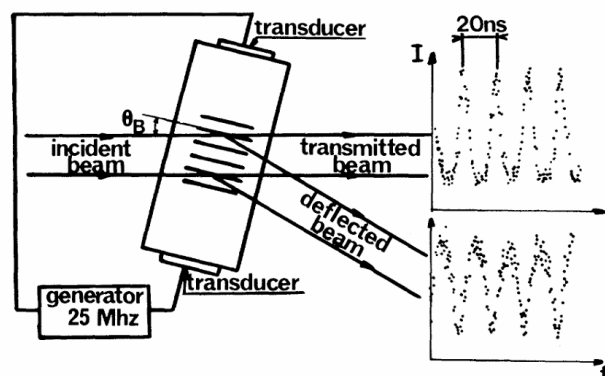


Figura 3.7: Schema del funzionamento dello *switch ottico*. La luce incidente viene commutata a una frequenza di circa 50 MHz mediante diffrazione all'angolo di Bragg su un'onda ultrasonica stazionaria. Le intensità del fascio trasmesso e di quello diffratto, in funzione del tempo, sono state misurate utilizzando la sorgente reale. La frazione di luce diretta verso gli altri ordini di diffrazione è trascurabile.

incidente presenta una divergenza finita, lo switch non è completo. Sono state misurate l'intensità del fascio trasmesso e diffratto in funzione del tempo e, come si può vedere in Figura 3.7, il fascio viene totalmente trasmesso in due momenti del periodo dell'onda acustica in corrispondenza dei nodi. Dopo un quarto del periodo, l'onda stazionaria raggiunge il massimo e la luce viene diffratta.

Conteggio coincidenze

Superati i polarizzatori, il fascio entra all'interno dei fotomoltiplicatori, in grado di rivelare un singolo fotone e produrre un impulso elettrico, mandato poi al contatore di coincidenze. L'elettronica del contatore si compone di quattro circuiti in grado di ri-

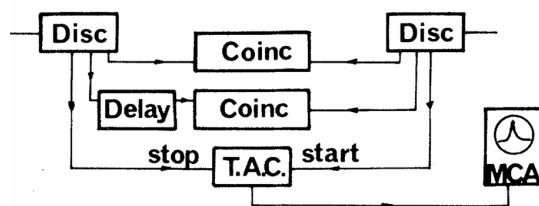


Figura 3.8: Schema del circuito di rivelazione. I segnali dei fotomoltiplicatori sono processati da discriminatori e poi inviati ai circuiti di coincidenza. Contemporaneamente un convertitore tempo-ampiezza (TAC) e un analizzatore multicanale (MCA) registrano lo spettro dei tempi delle coincidenze.

velare doppie coincidenze all'interno di una finestra di 18ns. Per stimare e correggere il rumore di fondo si contano le doppie coincidenze attraverso un canale soggetto a ritardo e si sottrae tale numero alle coincidenze trovate sul canale non ritardato. Contestualmente, vengono costruiti quattro spettri tempo-ritardo utilizzando un convertitore *time-to-amplitude* e un analizzatore multicanale, secondo uno schema presentato in Figura 3.8. In questo caso, il tasso di coincidenze è ottenuto dal segnale corrispondente al picco nello spettro tempo-ritardo.

Misura della violazione delle disuguaglianze di Bell

Anche in questo caso si è interessati a misurare i tassi di coincidenze con entrambi i polarizzatori inseriti, con un singolo polarizzatore rimosso per lato e con tutti i polarizzatori rimossi, in analogia con quanto presentato nella sezione 3.1. Quindi, la disuguaglianza in esame è della forma

$$-1 \leq \Delta\varphi \leq 0$$

e la massima violazione si ottiene per $\varphi = 22.5^\circ$.

Sono stati effettuati due cicli di misura, ciascuno dei quali della durata di 12000 s. In particolare, ogni 400 s è stata alternata la configurazione dei polarizzatori, per un totale di 4000 s con polarizzatori in posizione in una data configurazione di orientazioni, 4000 s con tutti i polarizzatori rimossi e 4000 s con un polarizzatore rimosso su ciascun lato. Al termine di ogni periodo di 400 s, i dati grezzi vengono memorizzati per l'elaborazione successiva con l'aiuto di un computer. Alla fine della misura, sono stati mediati i tassi di coincidenza corrispondenti alle stesse configurazioni dei polarizzatori per entrambi i set di dati: quello ottenuto con i circuiti di coincidenza e quello ottenuto con il convertitore tempo-ampiezza. I due metodi sono sempre risultati coerenti.

La media dei due cicli di misura ha portato al risultato

$$\Delta\varphi = 0.101 \pm 0.020$$

che viola la disuguaglianza $\Delta\varphi \leq 0$ per 5 deviazioni standard, mentre è compatibile con la previsione quantomeccanica che – per l'angolo solido di propagazione dei fotoni non trascurabile e per le efficienze di rivelazione non unitarie dell'esperimento – è stimato a $\Delta\varphi_{QM} = 0.112$.

Sebbene quindi non sia chiuso definitivamente il *locality loophole* a causa della non randomicità degli switch ottici, le misure hanno l'accuratezza necessaria a evidenziare eventuali discrepanze dalle previsioni quantistiche, discrepanze che non sono state rilevate né per l'angolo di massima violazione né per altre configurazioni dei polarizzatori, come si può evincere dalla Figura 3.9.

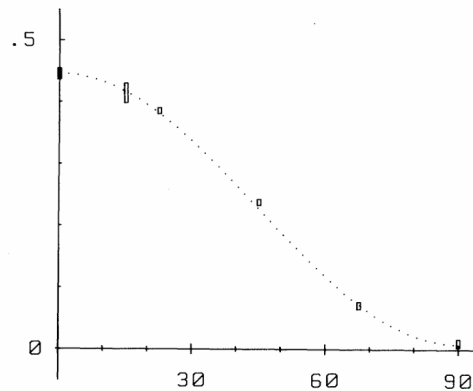


Figura 3.9: Tasso di coincidenze normalizzato $R(\varphi)/R_0$ in funzione dell'orientazione relativa dei polarizzatori φ . Le barre di errore corrispondono a 1 deviazione standard e la curva tratteggiata rappresenta la predizione quantistica $\frac{1}{2} \cos^2 \varphi$.

3.3 Detection loophole

Entrambi gli esperimenti presentati richiedono l'ipotesi aggiuntiva di *fair sampling*, poiché la limitata efficienza di rivelazione comporta che venga registrata soltanto una frazione degli eventi effettivamente prodotti. Presentano quindi il *detection loophole*: l'insieme dei dati analizzati potrebbe non essere rappresentativo dell'insieme totale degli eventi e non è possibile escludere l'esistenza di un modello a variabili nascoste locali in grado di “selezionare” in modo opportuno gli eventi rilevati, in modo tale che essi violino le disuguaglianze di Bell. Quindi, in linea di principio, si potrebbe supporre che la violazione sia conseguenza della mancata osservazione globale e non una conseguenza della natura delle correlazioni quantistiche. Un'analogia intuitiva può essere fornita considerando un dado truccato. Se fosse possibile osservare tutti i lanci senza omissioni, la distribuzione delle frequenze rivelerebbe chiaramente l'alterazione del dado. Tuttavia, se l'osservazione fosse soggetta a un meccanismo di selezione che registra solo alcuni esiti in modo non casuale, la statistica di misura risultante potrebbe apparire compatibile con un dado non truccato, mascherando così il comportamento effettivo del sistema.

Nella sezione successiva verrà presentato l'esperimento di David A. Rowe e collaboratori, realizzato nel 2001, che ha rappresentato il primo test di Bell in grado di chiudere il detection loophole grazie all'elevata efficienza di rivelazione ottenuta operando con ioni intrappolati.

3.3.1 Esperimento di Rowe et al. (2001)

Gli autori Rowe et al. [34] misurano la violazione delle disuguaglianze di Bell utilizzando un sistema di ioni di berillio intrappolati. A differenza degli esperimenti ottici descritti

nelle sezioni precedenti, questo sistema presenta un'elevata efficienza di rivelazione, grazie alla possibilità di effettuare una misura dello stato interno dei singoli ioni tramite fluorescenza.

Preparazione delle coppie EPR

Nell'esperimento realizzato [35] vengono utilizzati due ioni ${}^9\text{Be}^+$ intrappolati in una trappola di Paul lineare. In generale questi tipi di trappole confinano gli ioni utilizzando campi elettrici. Poichè il potenziale di campi elettostatici in assenza di cariche non possiede un minimo, è necessario impiegare campi elettrici oscillanti molto rapidamente: in questo caso i campi oscillanti interagendo con gli ioni carichi danno origine ad un potenziale efficace avente, in prima approssimazione, struttura armonica. In questo contesto quindi l'interazione degli ioni con il potenziale efficace e il contributo di repulsione Coulombiana degli stessi, danno origine a moti collettivi. Il moto a frequenza più bassa corrisponde all'oscillazione del centro di massa, senza variare la distanza tra gli ioni e, in generale, la frequenza armonica di tale moto è molto minore di quella dei campi elettrici applicati. Trattandosi di un sistema quantistico, l'oscillatore è quantizzato e i quanti energetici sono chiamati *fononi*. Se volessimo considerare lo stato di uno ione, dovremmo quindi tenere conto dei suoi gradi di libertà interni e il contributo dato dal moto collettivo. Nell'esperimento si utilizzano due ioni ${}^9\text{Be}^+$ e si sceglie di operare tra

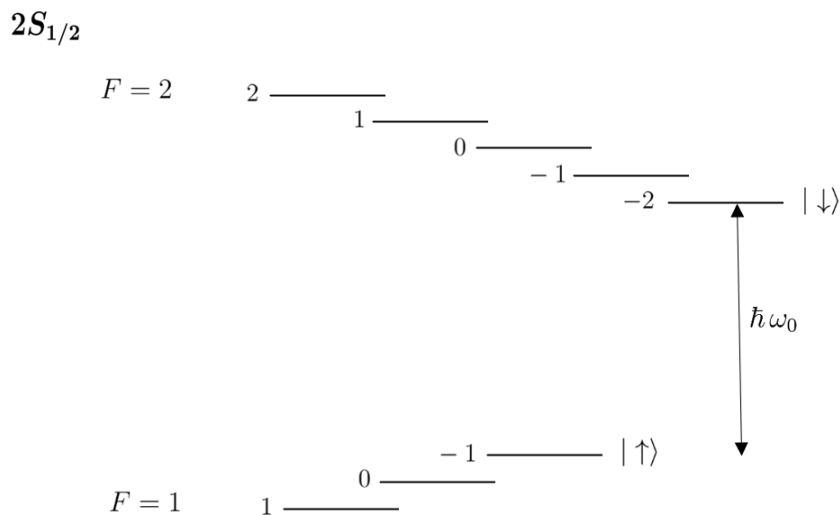


Figura 3.10: Struttura iperfine del livello $2S_{1/2}$ dello ione ${}^9\text{Be}^+$. Si evidenziano gli stati accoppiati $|\downarrow\rangle \equiv |F=2, m_F=-2\rangle$ e $|\uparrow\rangle \equiv |F=1, m_F=-1\rangle$ aventi gap energetico $\hbar\omega_0 \sim \hbar 1.5 \text{ GHz}$.

due stati della struttura iperfine del livello $2S_{1/2}$

$$|\downarrow\rangle \equiv |F=2, m_F=-2\rangle \quad |\uparrow\rangle \equiv |F=1, m_F=-1\rangle$$

come schematizzato in Figura 3.10. Pertanto, lo stato di un singolo ione comprensivo del contributo del moto collettivo, sarà della forma

$$|\downarrow\rangle|n\rangle \quad |\uparrow\rangle|n\rangle$$

Per accoppiare i due livelli della struttura iperfine si sceglie di operare una transizione di Raman a due fotoni, schematizzata in Figura 3.11. In seguito alla transizione di Raman

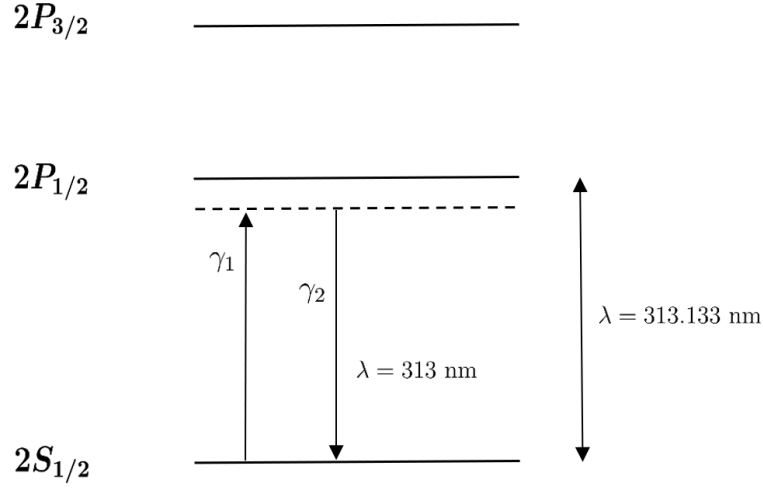


Figura 3.11: Schematizzazione della transizione di Raman $|2S_{1/2}, \downarrow\rangle \rightarrow |2P_{1/2}\rangle_{\text{virt}} \rightarrow |2S_{1/2}, \uparrow\rangle$ nella struttura fine dello ione ${}^9\text{Be}^+$. Si utilizzano due fotoni detunati di $\Delta \sim 2\pi \times 80$ GHz verso il rosso rispetto allo stato eccitato $2P_{1/2}$, aventi una differenza in frequenza circa pari a ω_0 .

i due livelli vengono accoppiati con una frequenza di Rabi pari a $\Omega_{\text{Rabi}} \approx 2\pi \times 1.6$ Hz. La peculiarità di queste transizioni consiste nel poter modificare anche lo stato collettivo infatti, utilizzando fotoni aventi frequenze leggermente diverse da quella di risonanza ω_0 , è possibile operare

$$\begin{aligned} |\downarrow\rangle|n\rangle &\xrightarrow{\text{blue sideband}} |\uparrow\rangle|n+1\rangle \\ |\downarrow\rangle|n\rangle &\xrightarrow{\text{carrier}} |\uparrow\rangle|n\rangle \\ |\downarrow\rangle|n\rangle &\xrightarrow{\text{red sideband}} |\uparrow\rangle|n-1\rangle \end{aligned}$$

ove $\omega_B = \omega_0 + \nu$, $\omega_C = \omega_0$ e $\omega_R = \omega_0 - \nu$, rispettivamente.

Per realizzare la coppia EPR si considerano quindi due ioni intrappolati nella Paul trap, preparati nello stato $|\downarrow\downarrow\rangle$ e raffreddati in modo tale da portarli nello stato fondamentale del moto collettivo $|0\rangle$. Viene quindi realizzato lo schema di entanglement proposto da Mølmer e Sørensen [36], schematizzato nella Figura 3.12. I due ioni, inizialmente nello stato $|\downarrow\downarrow\rangle|0\rangle$ vengono illuminati da un campo di Raman avente frequenze quasi nella blue sideband ($\omega = \omega_0 + \nu - \delta$) e quasi nella red sideband ($\omega = \omega_0 - \nu + \delta$). Lo stato

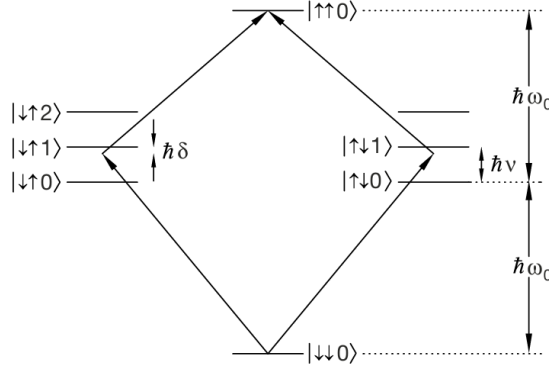


Figura 3.12: Schema di entanglement per due particelle. Ogni ione è preparato nello stato di spin $|\downarrow\rangle$ e il moto collettivo della coppia è preparato nello stato fondamentale $|0\rangle$. Nell'esperimento realizzato ciascuna freccia continua rappresenta in realtà una transizione di Raman a due fotoni, pertanto complessivamente l'intero processo consiste in una transizione a quattro fotoni.

iniziale viene quindi accoppiato con gli stati virtuali

$$\frac{|\downarrow\uparrow\rangle|1\rangle_{\text{virt}} + |\uparrow\downarrow\rangle|1\rangle_{\text{virt}}}{\sqrt{2}}$$

che durante l'evoluzione coerente non vengono popolati in modo significativo a causa del detuning (δ) e, dopo un tempo opportunamente scelto, il sistema evolverà nello stato entangled

$$\frac{|\downarrow\downarrow\rangle - i|\uparrow\uparrow\rangle}{\sqrt{2}}|0\rangle$$

ove la fase relativa dipende dalla durata dell'interazione, dal detuning rispetto alle sideband e dalla fase relativa dei campi Raman applicati. In particolare, scegliendo una differenza di fase dei campi Raman pari a $\Delta\phi = \pi$, è possibile modificare la fase relativa fino a ottenere lo stato di Bell $|\Phi^-\rangle$.

Rivelazione dello stato degli ioni

Al fine di misurare lo stato del singolo ione, $|\uparrow\rangle$ oppure $|\downarrow\rangle$, si utilizza la tecnica della fluorescenza, cioè si illumina lo ione con un laser avente frequenza risonante con uno dei due stati. In particolare nell'esperimento gli ioni vengono sondati illuminandoli con un fascio laser a polarizzazione circolare, accordato sulla transizione ciclica

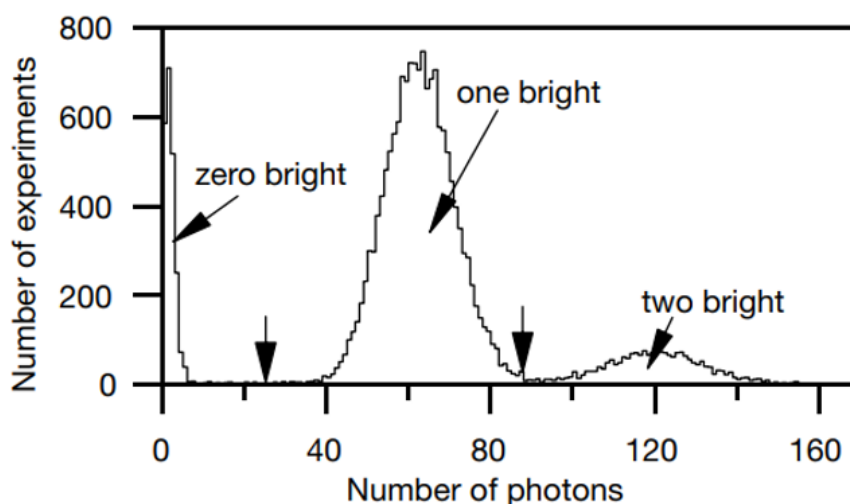
$$2S_{1/2}(F = 2, m_F = -2) \longleftrightarrow 2P_{3/2}(F = 3, m_F = -3)$$

Quindi, ogni ione nello stato $|\downarrow\rangle$ – *luminoso* – diseccitandosi fluoresce intensamente. In media, su un periodo di rivelazione di $400\ \mu\text{s}$ vengono contati ~ 64 fotoni emessi. Al contrario, uno ione nello stato $|\uparrow\rangle$ – *buio* – rimane praticamente oscuro.

Osserviamo che al fine di misurare le disuguaglianze di Bell è sufficiente sapere se gli stati dei due ioni sono diversi e non è necessario distinguere tra $|\downarrow\rangle|\uparrow\rangle$ e $|\uparrow\rangle|\downarrow\rangle$. Pertanto per un sistema di due ioni possono verificarsi le seguenti combinazioni:

1. $|\uparrow\rangle|\uparrow\rangle$: 0 ioni si illuminano
2. $|\downarrow\rangle|\uparrow\rangle$ e $|\uparrow\rangle|\downarrow\rangle$: 1 ione si illumina
3. $|\downarrow\rangle|\downarrow\rangle$: 2 ioni si illuminano

I risultati dei conteggi sono riportati in Figura 3.13.



(a)

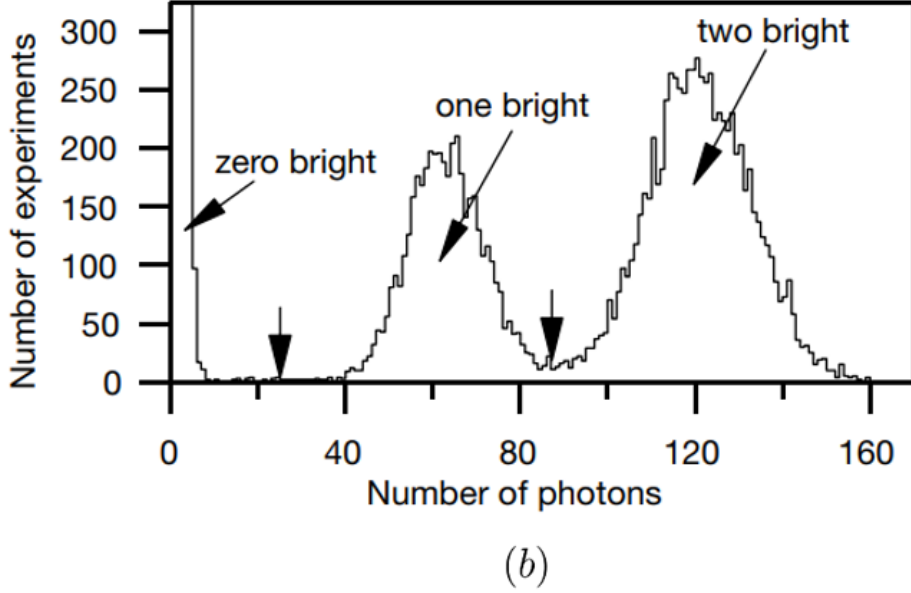


Figura 3.13: Istogrammi delle rivelazioni di 20000 esperimenti. Viene acceso il laser di rivelazione per 1 ms, quindi una misura completa impiega un tempo complessivo di circa 20 s. Le frecce verticali indicano la posizione del taglio effettuato tra i picchi di 0, 1 e 2 ioni luminosi. Questi tagli sono operati in modo tale da avere uguali frazioni delle distribuzioni da entrambi i lati del taglio. In particolare sono stati scelti i valori di taglio: 25 conteggi tra 0 e 1 ioni illuminati e 86 conteggi tra 1 e 2 ioni illuminati.

(a) Istogramma di anticorrelazione, ottenuto utilizzando $\phi_1 = \phi_2 = 3\pi/8$. In questa configurazione si ottengono $N_0 \simeq 2200$, $N_1 \simeq 15500$ e $N_2 \simeq 2300$. (b) Istogramma di correlazione, ottenuto utilizzando $\phi_1 = 3\pi/8$ e $\phi_2 = -\pi/8$. In questa configurazione si ottengono $N_0 \simeq 7700$, $N_1 \simeq 4400$ e $N_2 \simeq 7900$. Il picco di 0 ioni luminosi si estende fino a 2551.

Misura della violazione delle disuguaglianze di Bell

Cominciamo costruendo la funzione di correlazione classica. Denotiamo con ϕ_1, ϕ_2 le possibili configurazioni in cui vengono misurati gli ioni uno e due, allora

$$E(\phi_1, \phi_2) = \frac{N_{\text{uguali}}(\phi_1, \phi_2) - N_{\text{diversi}}(\phi_1, \phi_2)}{N_{\text{uguali}} + N_{\text{diversi}}} \quad (3.6)$$

ove con N_{uguali} e N_{diversi} si intendono il numero di volte in cui i due ioni si trovano nello stesso stato oppure i stati diversi, rispettivamente. Osserviamo che la funzione di

correlazione può assumere i seguenti valori

$$E(\phi_1, \phi_2) = \begin{cases} 1 & \text{correlazione perfetta } (N_{\text{diversi}} = 0) \\ 0 & \text{nessuna correlazione } (N_{\text{uguali}} = N_{\text{diversi}}) \\ -1 & \text{anticorrelazione perfetta } (N_{\text{uguali}} = 0) \end{cases}$$

Quindi se costruiamo la quantità

$$B(\alpha_1, \delta_1, \beta_2, \gamma_2) = |E(\delta_1, \gamma_2) - E(\alpha_1, \gamma_2)| + |E(\delta_1, \beta_2) - E(\alpha_1, \beta_2)|$$

con α_1, δ_1 specifici valori di ϕ_1 e β_2, γ_2 specifici valori di ϕ_2 , essa soddisferà la disuguaglianza CHSH (2.15)

$$B(\alpha_1, \delta_1, \beta_2, \gamma_2) \leq 2 \quad (3.7)$$

Per effettuare le misure nelle diverse configurazioni, una volta preparati gli ioni nello stato di Bell $|\Phi^-\rangle$, questi vengono illuminati da campi di Raman per breve durata (~ 400 ns). Dopo questo processo lo stato del singolo ione si trasforma come segue

$$|\downarrow\rangle_j \longrightarrow \frac{|\downarrow\rangle_j - ie^{i\phi_j}|\uparrow\rangle_j}{\sqrt{2}} \quad |\uparrow\rangle_j \longrightarrow \frac{|\uparrow\rangle_j - ie^{-i\phi_j}|\downarrow\rangle_j}{\sqrt{2}}$$

dove ϕ_j è la differenza di fase tra i due fasci di Raman calcolata nella posizione dello ione j . Tale fase permette di selezionare le due configurazioni di misura necessarie per costruire le osservabili $E(\phi_1, \phi_2)$. In questo esperimento è possibile modificarla tramite due modalità: muovendo uno ione lungo l'asse della trappola si ottiene una variazione della sua fase pari a $\Delta\mathbf{k} \cdot \Delta\mathbf{x}_j$, mentre modificando la fase relativa dei due fasci di Raman entrambi gli ioni acquisiscono una fase ϕ_s . Complessivamente quindi la fase sullo ione j -esimo è composta da due contributi

$$\phi_j = \phi_s + \Delta\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}_j$$

Sperimentalmente non è possibile impostare direttamente e in modo indipendente le configurazioni ϕ_1 e ϕ_2 per i singoli ioni, in quanto il campo di Raman agisce su entrambi contemporaneamente. Tuttavia, è possibile modificare le due configurazioni controllando la *fase differenziale* $\Delta\phi$ e la *fase totale* ϕ_{tot} definite come

$$\Delta\phi \equiv \phi_1 - \phi_2 = \Delta\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) \quad \phi_{tot} = \phi_1 + \phi_2 = 2\phi_s$$

e, come abbiamo visto, la fase differenziale dipende dall'intensità della trappola, mentre la fase totale è controllabile modificando la differenza di fase dei fasci di Raman.

Per stabilire quali ϕ_1 e ϕ_2 utilizzare, calcoliamo la previsione quantomeccanica. Partendo dallo stato $|\Phi^-\rangle$ in seguito al processo appena descritto, i due ioni si troveranno nello stato

$$\begin{aligned} |\Psi\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \frac{|\downarrow\rangle_1 - ie^{i\phi_1}|\uparrow\rangle_1}{\sqrt{2}} \frac{|\downarrow\rangle_2 - ie^{i\phi_2}|\uparrow\rangle_2}{\sqrt{2}} - \frac{|\uparrow\rangle_1 - ie^{-i\phi_1}|\downarrow\rangle_1}{\sqrt{2}} \frac{|\uparrow\rangle_2 - ie^{-i\phi_2}|\downarrow\rangle_2}{\sqrt{2}} \right\} \\ &= -\frac{1}{2\sqrt{2}} \left\{ (1 + e^{i(\phi_1+\phi_2)}) (|\uparrow\uparrow\rangle - e^{-i(\phi_1+\phi_2)}|\downarrow\downarrow\rangle) \right. \\ &\quad \left. - i(1 - e^{i(\phi_1+\phi_2)}) (e^{-i\phi_2}|\uparrow\downarrow\rangle + e^{-i\phi_1}|\downarrow\uparrow\rangle) \right\} \end{aligned}$$

Costruiamo gli operatori di misura per N_{uguali} e N_{diversi} come segue

$$\begin{aligned} \hat{N}_{\text{uguali}} &= N_{\text{tot}} (|\uparrow\uparrow\rangle\langle\uparrow\uparrow| + |\downarrow\downarrow\rangle\langle\downarrow\downarrow|) \\ \hat{N}_{\text{diversi}} &= N_{\text{tot}} (|\uparrow\downarrow\rangle\langle\uparrow\downarrow| + |\downarrow\uparrow\rangle\langle\downarrow\uparrow|) \end{aligned}$$

allora in questo caso

$$\begin{aligned} E(\phi_1, \phi_2) &= \frac{\langle \hat{N}_{\text{uguali}} \rangle - \langle \hat{N}_{\text{diversi}} \rangle}{N_{\text{tot}}} = \frac{\langle \Psi | \hat{N}_{\text{uguali}} | \Psi \rangle - \langle \Psi | \hat{N}_{\text{diversi}} | \Psi \rangle}{N_{\text{tot}}} \\ &= \frac{1}{8} \left\{ 2|1 + e^{i(\phi_1+\phi_2)}|^2 - |1 - e^{i(\phi_1+\phi_2)}|^2 (|e^{-i\phi_1}|^2 + |e^{-i\phi_2}|^2) \right\} \\ &= \frac{1}{4} \left\{ (1 + e^{i(\phi_1+\phi_2)})(1 + e^{-i(\phi_1+\phi_2)}) - (1 - e^{i(\phi_1+\phi_2)})(1 - e^{-i(\phi_1+\phi_2)}) \right\} \\ &= \frac{1}{4} \left\{ 2 + e^{i(\phi_1+\phi_2)} + e^{-i(\phi_1+\phi_2)} - 2 + e^{i(\phi_1+\phi_2)} + e^{-i(\phi_1+\phi_2)} \right\} \\ &= \cos(\phi_1 + \phi_2) \end{aligned}$$

Quindi la disuguaglianza (3.7) è massimamente violata per la scelta di angoli

$$\alpha_1 = -\frac{\pi}{8} \quad \delta_1 = \frac{3\pi}{8} \quad \beta_2 = -\frac{\pi}{8} \quad \gamma_2 = \frac{3\pi}{8}$$

per cui si ottiene

$$B_{QM} \left(-\frac{\pi}{8}, \frac{3\pi}{8}, -\frac{\pi}{8}, \frac{3\pi}{8} \right) = 2\sqrt{2}$$

La funzione di correlazione è stata misurata sperimentalmente utilizzando le configurazioni di angoli riportate in Tabella 3.14. Come presentato nella sottosezione precedente, operativamente vengono misurati gli stati degli ioni mediante i conteggi di fluorescenza.

Table 1 The four sets of phase angles used for the Bell's experiment

Experiment input	ϕ_1	ϕ_2	$\Delta\phi$	ϕ_{tot}
$\alpha_1\beta_2$	$-\pi/8$	$-\pi/8$	0	$-\pi/4$
$\alpha_1\gamma_2$	$-\pi/8$	$3\pi/8$	$-\pi/2$	$+\pi/4$
$\delta_1\beta_2$	$3\pi/8$	$-\pi/8$	$+\pi/2$	$+\pi/4$
$\delta_1\gamma_2$	$3\pi/8$	$3\pi/8$	0	$+3\pi/4$

Figura 3.14: Tabella con le quattro configurazioni misurate nell'esperimento.

La funzione di correlazione viene quindi calcolata sperimentalmente come

$$E(\phi_1, \phi_2) = \frac{(N_2 + N_0) - N_1}{N_{\text{tot}}} \quad (3.8)$$

ove il $N_{\text{tot}} = 20000$ è il numero di ripetizioni della misura in ciascuna delle quattro configurazioni di angoli, mentre N_0, N_1 e N_2 indicano il numero di ioni luminosi.

Table 2 Correlation values and resulting Bell's signals for five experimental runs

Run number	$q(\alpha_1, \beta_2)$	$q(\alpha_1, \gamma_2)$	$q(\delta_1, \beta_2)$	$q(\delta_1, \gamma_2)$	$B(\alpha_1, \delta_1, \beta_2, \gamma_2)$
1	0.541	0.539	0.569	-0.573	2.222
2	0.575	0.570	0.530	-0.600	2.275
3	0.551	0.634	0.590	-0.487	2.262
4	0.575	0.561	0.559	-0.551	2.246
5	0.541	0.596	0.537	-0.571	2.245

Figura 3.15: Tabella con i risultati del calcolo della funzione di correlazione nelle quattro configurazioni di angoli presentati in Tabella 3.14. Nell'ultima colonna è riportato il valore calcolato della grandezza $B(\alpha_1, \delta_1, \beta_2, \gamma_2)$, mediante la formula (3.8).

Mediando i risultati ottenuti, il risultato dell'esperimento risulta essere

$$B\left(-\frac{\pi}{8}, \frac{3\pi}{8}, -\frac{\pi}{8}, \frac{3\pi}{8}\right) = 2.25 \pm 0.03$$

che evidenzia una violazione della disuguaglianza CHSH per oltre 8 deviazioni standard.

Conclusioni

Concludiamo ricapitolando e commentando i risultati trovati. Siamo partiti domandandoci quali fossero le caratteristiche che una teoria fisica deve possedere affinché possa definirsi tale ed è stata analizzata la proposta avanzata da Einstein, Podolski e Rosen nel contesto del paradosso EPR: il *criterio di realtà* proposto suggerisce che le grandezze fisiche possano possedere valori definiti indipendentemente dal processo di misura, mentre il *criterio di località* assume che gli eventi fisici in una regione dello spazio-tempo non possano essere influenzati istantaneamente da eventi spazialmente separati. Tuttavia, abbiamo mostrato attraverso il *teorema di Kochen-Specker* che, per spazi di Hilbert di dimensione almeno tre, non è possibile attribuire valori globali e non contestuali a tutti gli osservabili quantistici. In altre parole, l'insieme delle osservabili che si sceglie di misurare, influenza l'esito stesso della misura. Questo fatto è incompatibile con il criterio di realismo proposto da EPR, che deve pertanto essere modificato per tenere conto della *contestualità* quantistica.

A questo punto rimane quindi da domandarsi se sia possibile costruire teorie alternative alla Meccanica Quantistica, in grado di preservare realismo contestuale e località. Si sviluppano le cosiddette *Teorie Locali a Variabili Nascoste*, aventi lo scopo di fornire una descrizione completa della realtà fisica. Tuttavia, il contributo di John Bell alla questione, spostando il dibattito sul piano sperimentale, ha evidenziato una differenza quantificabile tra le previsioni delle LHVT e della Meccanica Quantistica: le previsioni delle prime soddisfano le *disuguaglianze di Bell*, mentre il formalismo quantistico ne prevede la violazione. Sperimentalmente è stata verificata, con sempre maggiore accuratezza, la violazione delle disuguaglianze di Bell e la compatibilità con le previsioni quantistiche.

Siamo quindi costretti ad accettare che la richiesta simultanea di località e realismo sia incompatibile con la struttura della realtà fisica. Questo risultato evidenzia una caratteristica peculiare e apparentemente controintuitiva della Natura. Sorge quindi spontaneo domandarsi se tale incompatibilità debba essere interpretata come un limite intrinseco della realtà fisica oppure, piuttosto, come un limite dei concetti di *stato fisico* e *realtà fisica* con cui tradizionalmente la descriviamo [37]. L'idea è che tali concetti, ereditati dalla Fisica Classica e strettamente legati all'attribuzione di valori numerici

ben definiti alle grandezze osservabili, risultino troppo restrittivi per descrivere i sistemi quantistici. Una possibile via d'uscita consiste allora nell'*estendere* il concetto stesso di realtà fisica, riconoscendo che il *formalismo matematico* della Meccanica Quantistica non rappresenta soltanto uno strumento di calcolo delle probabilità di misura, ma possa essere interpretato come la descrizione diretta di proprietà fisiche. Questa interpretazione appare ragionevole se si considera che il formalismo quantistico possiede un contenuto fisico molto più ricco di quanto suggeriscano i soli risultati delle misure. Consideriamo, ad esempio, il *principio di sovrapposizione*: in ottica classica è uno dei principali limiti per un'interpretazione fisica diretta, tuttavia, è responsabile delle principali caratteristiche dei sistemi quantistici. Infatti, se con l'aggettivo "fisico" intendiamo ciò che corrisponde a fenomeni effettivamente esistenti e documentati – nel dominio quantistico e in alcuni casi anche a livello macroscopico – allora possiamo affermare che il principio di sovrapposizione sia completamente fisico, nonostante la sua apparenza puramente formale.

Consideriamo l'*indistinguibilità* dei sistemi quantistici, implementata richiedendo simmetria o antisimmetria della funzione d'onda sotto la permutazione dei componenti del sistema. Un'importante conseguenza per sistemi di bosoni identici, ad esempio, è il fenomeno della *condensazione di Bose-Einstein*, mentre per sistemi di fermioni identici descrive il fatto che uno stato possa essere occupato da un solo sistema e ha dirette conseguenze nell'organizzazione stessa della materia. Osserviamo che in questo senso la funzione d'onda copre tutte le proprietà che possono essere attribuite al sistema e potremmo quasi permetterci di affermare che la *distinguibilità* dei sistemi a livello classico rifletta la nostra ignoranza riguardo ad essi, non permettendoci di conoscerne tutte le reali proprietà.

Riccollegandoci ai risultati presentati nel presente lavoro, un'altra caratteristica dei sistemi quantistici direttamente collegata alle proprietà formali della funzione d'onda è proprio la *non-separabilità*. Operativamente, questa proprietà caratterizza gli stati entangled, la cui manipolazione ha aperto la strada allo sviluppo delle tecnologie quantistiche e dell'informazione quantistica ad esempio attraverso i protocolli di *Quantum Key Distribution* [38] e teletrasporto quantistico [39]. Oltre alle applicazioni tecnologiche, le correlazioni quantistiche costituiscono oggi anche uno strumento per indagare la struttura fondamentale della Natura. In particolare, esperimenti con particelle entangled vengono impiegati nella fisica delle alte energie per studiare nuove forme di correlazione quantistica e testare i limiti del Modello Standard, anche nell'ambito delle attività sperimentali del CERN. Qui, l'analisi delle correlazioni quantistiche prodotte nei decadimenti di particelle elementari come il quark top, viene utilizzata per sviluppare nuovi test della struttura quantistica del Modello Standard e cercare eventuali deviazioni che potrebbero indicare nuova fisica [40].

Ritornando alla questione iniziale, circa le caratteristiche che una teoria fisica deve possedere, osserviamo che allargando la prospettiva, considerando quindi la *non-*

separabilità come un *fatto* della Fisica Quantistica – analogamente al principio di relatività per le teorie di campo classico – allora la teoria quantistica risulterebbe perfettamente adatta a descriverla e non sarebbe necessario aggiungere principi esterni alla teoria, come ad esempio la richiesta di località di Einstein, per completarne la descrizione.

Potremmo quindi pensare che il problema irrisolto del significato fisico dei concetti della teoria quantistica, possa trovare soluzione all'interno del formalismo matematico della stessa, al prezzo di sacrificare l'intuizione classica. Questa soluzione sarebbe un ulteriore esempio di una situazione storica in cui un problema considerato privo di soluzione all'interno di un quadro concettuale troppo ristretto può invece trovarne una ampliando il significato dei concetti coinvolti.

Appendice A

Formalismo e notazione

Questa sezione è dedicata all'introduzione del formalismo e della notazione di cui verrà fatto largo uso in seguito. Verrà presentato brevemente il formalismo operatoriale seguendo [10] e il collegamento con la formulazione ondulatoria della Meccanica Quantistica. Successivamente si introdurrà il formalismo delle matrici densità [11] e si introdurrà la nozione di misura.

A.1 Formalismo operatoriale

Una teoria fisica, affinché possa ritenersi quantitativa, necessita di identificare una corrispondenza tra la realtà fisica da indagare e il formalismo matematico che ne permette la descrizione. Nel caso della Meccanica Quantistica si postula:

1. *Gli stati di un sistema isolato sono rappresentati da vettori nello spazio di Hilbert complesso, ovvero di uno spazio vettoriale complesso dotato di un prodotto scalare*

$$stato \longleftrightarrow z \in \mathcal{H}$$

Nel seguito adotteremo la notazione di Dirac, allora un vettore dello spazio di Hilbert sarà indicato mediante un *ket*, mentre il suo aggiunto hermitiano sarà rappresentato dal corrispondente *bra*

$$|\Psi\rangle \text{ ket} \qquad \langle\Psi| \text{ bra}$$

In tale formalismo, dati due stati $|\Phi\rangle$ e $|\Psi\rangle$ si definiscono il prodotto interno e il prodotto esterno come

$$\langle\Phi|\Psi\rangle \text{ interno} \qquad |\Psi\rangle\langle\Phi| \text{ esterno}$$

osserviamo che in generale il prodotto interno è un numero complesso, mentre il prodotto esterno definisce un operatore sullo spazio di Hilbert. Lavorando con spazi di Hilbert è naturale considerare *basi hilbertiane*, che possono essere etichettate da indici discreti

oppure da variabili continue. Queste due possibilità non esauriscono tutte le casistiche possibili, ma saranno quelle che utilizzeremo in seguito e di cui approfondiremo la trattazione.

Base discreta Sia $\{|n\rangle\}$ una base ortonormale discreta. Le condizioni di ortonormalità e completezza sono

$$\langle n|m\rangle = \delta_{nm} \quad \sum_n |n\rangle\langle n| = \mathbb{I} \quad (\text{A.1})$$

dove δ_{nm} denota la delta di Kronecker.

Base continua Sia $\{|x\rangle\}$ una base ortonormale continua. In questo caso le relazioni di ortonormalità e completezza assumono la forma

$$\langle x|x'\rangle = \delta(x - x') \quad \int dx |x\rangle\langle x| = \mathbb{I} \quad (\text{A.2})$$

dove $\delta(x - x')$ è la distribuzione delta di Dirac.

Introduciamo ora una classe di operatori nello spazio di Hilbert, molto importanti in Meccanica Quantistica:

Definizione A.1.1. (*Operatore hermitiano*) Sia $\hat{A}$ un operatore lineare definito su uno spazio di Hilbert. Si definisce aggiunto di $\hat{A}$ l'operatore $\hat{A}^\dagger$ tale che

$$\langle \Phi|\hat{A}\Psi\rangle = \langle \hat{A}^\dagger\Phi|\Psi\rangle$$

per ogni coppia di stati $|\Phi\rangle$ e $|\Psi\rangle$ appartenenti al dominio dell'operatore, allora $\hat{A}$ si dice hermitiano se $\hat{A} = \hat{A}^\dagger$.

Teorema A.1.1. Un operatore hermitiano si dice autoaggiunto se ammette una base ortonormale completa di autovettori, cioè se vale il teorema spettrale:

$$\hat{A}|a\rangle = |a\rangle a$$

ove $a \in \mathbb{R}$ sono autovalori reali e $\{|a\rangle\}$ è l'insieme degli autoket di $\hat{A}$, che formano una base ortonormale nello spazio di Hilbert.

L'importanza di tali operatori risiede, nel seguente postulato:

2. Le osservabili del sistema sono rappresentate da operatori lineari autoaggiunti

$$\text{osservabile} \longleftrightarrow \hat{A} \text{ autoaggiunto}$$

e il valore medio su uno stato $|\Psi\rangle$ è dato da

$$\langle \hat{A} \rangle = \langle \Psi | \hat{A} | \Psi \rangle \quad (\text{A.3})$$

Vogliamo caratterizzare l'evoluzione temporale di un sistema isolato, introduciamo l'operatore Hamiltoniano di un sistema isolato $\hat{H}$, allora

3. *L'evoluzione temporale di un sistema isolato è descritta dall'equazione di Schrödinger*

$$\frac{d}{dt} |\Psi(t)\rangle = \hat{H} |\Psi(t)\rangle \quad \text{con } |\Psi(0)\rangle = |\Psi_0\rangle \quad (\text{A.4})$$

o equivalentemente introducendo l'operatore di evoluzione $\hat{U}(t, s) = e^{\frac{i}{\hbar} \hat{H}(t-s)}$

$$|\Psi(t)\rangle = \hat{U}(t, 0) |\Psi(0)\rangle \quad (\text{A.5})$$

In generale lo spazio di Hilbert può avere infinite basi hilbertiane, in questo senso è utile presentare la nozione di rappresentazione:

Definizione A.1.2. (*Rappresentazione*) Una rappresentazione dello spazio di Hilbert è la scelta di una base ortonormale completa di stati.

Come anticipato, in seguito considereremo solamente basi discrete $\{|n\rangle\}$ oppure continue $\{|x\rangle\}$, allora dato uno stato $|\Psi\rangle$, le sue componenti nella rappresentazione scelta sono definite come

$$\psi_n = \langle n | \Psi \rangle \quad \text{oppure} \quad \psi(x) = \langle x | \Psi \rangle$$

Analogamente, un operatore $\hat{A}$ è rappresentato dai suoi elementi di matrice nella base scelta:

$$A_{nm} = \langle n | \hat{A} | m \rangle \quad \text{oppure} \quad A(x, x') = \langle x | \hat{A} | x' \rangle$$

Un'importante rappresentazione è quella di *Schrödinger* che permette di ricostruire il formalismo della meccanica ondulatoria. In questo caso si sceglie $\{|\mathbf{x}\rangle\}$ base di autoket dell'operatore posizione $\hat{\mathbf{q}}$, allora preso un ket di stato $|\Psi\rangle$ si ottiene la funzione d'onda del sistema nello spazio delle configurazioni

$$\langle \mathbf{x} | \Psi \rangle = \psi(\mathbf{x}) \quad (\text{A.6})$$

se si considerano due stati normalizzabili dello spazio di Hilbert $|\Psi\rangle$ e $|\Phi\rangle$ e le loro rispettive funzioni d'onda definite tramite (A.6), allora utilizzando la relazione di completezza

(A.2) il loro prodotto interno può essere espresso nella rappresentazione di Schrödinger come

$$\langle \Phi | \Psi \rangle = \langle \Phi | \hat{\mathbb{I}} | \Psi \rangle = \int dx \langle \Phi | x \rangle \langle x | \Psi \rangle = \int dx \phi^*(x) \psi(x)$$

In particolare, la condizione di normalizzazione e ortonormalità degli stati (A.2) si traduce nelle condizioni

$$\langle \Psi | \Psi \rangle = \int dx |\psi(x)|^2 = 1$$

e per due stati ortogonali

$$\langle \Phi | \Psi \rangle = 0$$

Analogamente, si possono trovare anche le espressioni degli operatori posizione e momento angolare del sistema

$$\langle \mathbf{x} | \hat{\mathbf{q}} = \mathbf{x} \langle \mathbf{x} | \quad \langle \mathbf{x} | \hat{\mathbf{p}} = -i\hbar \nabla \langle \mathbf{x} |$$

e tali operatori agiscono sulle funzioni d'onda come segue

$$(\hat{\mathbf{q}}\psi)(\mathbf{x}) = \mathbf{x} \psi(\mathbf{x}) \quad (\hat{\mathbf{p}}\psi)(\mathbf{x}) = -i\hbar \nabla \psi(\mathbf{x})$$

in questa rappresentazione l'operatore Hamiltoniano assume quindi la forma

$$\langle \mathbf{x} | \hat{H} = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + U(\mathbf{x}) \right] \langle \mathbf{x} |$$

e si ottiene l'equazione di Schrödinger nella formulazione originale

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(t, \mathbf{x}) = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + U(\mathbf{x}) \right] \psi(t, \mathbf{x}) \quad (\text{A.7})$$

Osserviamo quindi che la rappresentazione di Schrödinger permette di esplicitare il legame tra il formalismo operatoriale e la descrizione ondulatoria della Meccanica Quantistica. Nella formulazione ondulatoria è possibile trattare le funzioni d'onda normalizzate in senso probabilistico in quanto modulo quadro assume il significato di densità di probabilità di localizzazione nello spazio delle configurazioni. Questo fatto permette di valutare i valori medi delle osservabili e le incertezze ad essi associate in termini di valori di aspettazione e deviazioni standard, come è evidente da (A.3). In questo senso, è necessario formalizzare la proprietà di *compatibilità* tra osservabili.

Definizione A.1.3. (*Commutatore*) Siano $\hat{A}$ e $\hat{B}$ due operatori lineari definiti su uno spazio di Hilbert. Si definisce il loro commutatore come

$$[\hat{A}, \hat{B}] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}.$$

Due operatori si dicono commutanti se il loro commutatore è nullo:

$$[\hat{A}, \hat{B}] = 0$$

La commutatività degli operatori è strettamente legata alla compatibilità delle osservabili associate, vale infatti

Teorema A.1.2. (*Principio di indeterminazione*) Siano $\hat{A}$ e $\hat{B}$ due operatori autoaggiunti. Definite le incertezze come

$$\Delta A = [\langle \hat{A}^2 \rangle - \langle \hat{A} \rangle^2]^{1/2} \quad \Delta B = [\langle \hat{B}^2 \rangle - \langle \hat{B} \rangle^2]^{1/2}$$

vale la disuguaglianza:

$$\Delta A \Delta B \geq \frac{1}{2} |\langle [\hat{A}, \hat{B}] \rangle|$$

All'interno del formalismo operatoriale questo fatto è espresso dal seguente teorema.

Teorema A.1.3. Siano $\hat{A}$ e $\hat{B}$ operatori autoaggiunti commutanti

$$[\hat{A}, \hat{B}] = 0$$

allora esiste una base completa di autoket simultanei per entrambi gli operatori. In altri termini, è possibile trovare una base $\{|a, b\rangle\}$ tale che

$$\hat{A}|a, b\rangle = |a, b\rangle a \quad \hat{B}|a, b\rangle = |a, b\rangle b$$

Quindi è possibile affermare che due operatori autoaggiunti commutanti sono associati a osservabili compatibili, cioè misurabili simultaneamente.

In seguito saremo interessati a considerare sistemi composti da diversi elementi, formalizziamo quindi gli stati composti con il seguente postulato

4. Se consideriamo n sistemi, ciascuno dei quali è descritto da vettori $|\psi\rangle_i$ in uno spazio di Hilbert complesso $\mathcal{H}_i$, allora lo stato del sistema complessivo sarà

$$\mathcal{H}_{tot} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2 \otimes \cdots \otimes \mathcal{H}_n$$

Definizione A.1.4. (*Stato separabile*) Si considerino n sistemi, diremo che lo stato complessivo è separabile se è possibile scrivere

$$|\Psi\rangle = |\psi\rangle_1 \otimes |\psi\rangle_2 \otimes \cdots \otimes |\psi\rangle_n \in \mathcal{H}_{tot}$$

Definizione A.1.5. (*Stato entangled*) Si considerino n sistemi, diremo che lo stato complessivo è entangled se non è separabile.

In altre parole, uno stato è entangled quando non è possibile attribuire uno stato quantistico indipendente a ciascun sottosistema.

Rimane da formalizzare la nozione di *misura*, che introdurremo direttamente nel formalismo delle matrici densità [12], oggetto della sezione seguente.

A.2 Formalismo matrici densità

Cominciamo definendo cosa si intenderà in seguito con *operatore densità* o equivalentemente *matrice densità*. Nel seguito ci limiteremo a considerare stati quantistici descritti da matrici densità *pure*. Per semplicità espositiva, d'ora in avanti l'aggettivo *puro* verrà omesso e sarà da intendersi implicitamente.

Definizione A.2.1. (*Matrice densità*) Sia $|\Psi\rangle \in \mathcal{H}$, definiamo proiettore $\hat{P}_\Psi$ o equivalentemente matrice densità $\hat{\rho}_\Psi$, l'operatore

$$\hat{\rho}_\Psi = |\Psi\rangle\langle\Psi| \quad (\text{A.8})$$

Lemma A.2.1. Una matrice densità definita come in (A.2.1) possiede le proprietà:

1. *Limitatezza*: $\|\hat{\rho}\| = 1$
2. *Autoaggiunzione*: $\hat{\rho} = \hat{\rho}^\dagger$, $\exists$ base ortonormale
3. *Positività*: $\forall |\Phi\rangle, \langle\Phi|\hat{\rho}|\Phi\rangle \geq 0$
4. *Traccia unitaria*: $\text{Tr } \hat{\rho} = 1$
5. *Idempotenza*: $\hat{\rho}^2 = \hat{\rho}$

Definizione A.2.2. ($\hat{P}_1 \cap \hat{P}_2$) Dati due proiettori $\hat{P}_1$ e $\hat{P}_2$ si definisce la loro intersezione $\hat{P}_1 \cap \hat{P}_2$ come il proiettore sullo spazio

$$\text{Im}(\hat{P}_1) \cap \text{Im}(\hat{P}_2)$$

ove $\text{Im}(\hat{P}) = \{\hat{P}|\Phi\rangle : |\Phi\rangle \in \mathcal{H}\}$, cioè il sottospazio chiuso su cui $\hat{P}$ proietta.

Teorema A.2.1. Sia $\mathcal{H}$ uno spazio di Hilbert, allora ad ogni vettore $|\Psi\rangle \in \mathcal{H}$ corrisponde una matrice densità $\hat{\rho} = |\Psi\rangle\langle\Psi|$ e viceversa.

Si possono quindi riformulare i postulati precedenti in termini di matrici densità:

1. *STATI*: Lo stato di un sistema isolato è completamente descritto da una matrice densità ρ
2. *OSSERVABILI*: Le osservabili fisiche sono descritte da operatori autoaggiunti il cui valore medio nello stato ρ è dato dalla regola di Born

$$\langle\hat{A}\rangle = \text{Tr}[\hat{\rho}\hat{A}] \quad (\text{A.9})$$

3. *EVOLUZIONE*: Un sistema fisico isolato evolve nel tempo con trasformazioni unitarie del tipo

$$\hat{\rho}(t) = \hat{U}(t, 0) \hat{\rho}(0) \hat{U}^\dagger(t, 0) \quad (\text{A.10})$$

4. *STATI COMPOSTI*: Si considerino n sistemi fisici, il sistema complessivo è descritto dallo spazio di Hilbert

$$\mathcal{H}_{\text{tot}} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2 \otimes \cdots \otimes \mathcal{H}_n$$

Lo stato complessivo è descritto dalla matrice densità costruita a partire dallo stato composto $|\Psi\rangle$

$$\hat{\rho}_{\text{tot}} = |\Psi\rangle\langle\Psi|$$

e diremo che $\hat{\rho}_{\text{tot}}$ è

- separabile: se $\hat{\rho}_{\text{tot}} = \hat{\rho}_1 \otimes \hat{\rho}_2 \otimes \cdots \otimes \hat{\rho}_n$
- entangled: se $\hat{\rho}_{\text{tot}}$ non è separabile

Concludiamo questa sezione introduttiva caratterizzando i processi di misura, in particolare saremo interessati a misure proiettive.

Definizione A.2.3. (Projector Valued Measurement) Si definisce misura proiettiva, in breve PVM, l'insieme di proiettori $\{\hat{P}_m\}$ aventi le proprietà:

1. *Ortogonalità*: $\hat{P}_i \hat{P}_j = \delta_{ij} \hat{P}_i$
2. *Completezza*: $\sum_i \hat{P}_i = \mathbb{I}$
3. *Idempotenza*: $\hat{P}_i^2 = \hat{P}_i$
4. *Autoaggiunzione*: $\hat{P}_i = \hat{P}_i^\dagger$, $\exists$ base ortonormale

Enunciamo quindi l'ultimo postulato, riguardante le misure ortogonali.

5. *MISURA*: Una misura ortogonale in Meccanica Quantistica è descritta da un proiettore ortogonale $\hat{P}_m$ ed è distruttiva e probabilistica:
- **Distruttiva**: dopo la misurazione lo stato del sistema è collassato su un autostato, in particolare è avvenuta la proiezione dello stato generico su un autospazio.

$$|\Psi\rangle = \sum_i |\psi_i\rangle c_i \quad \longrightarrow \quad |\Psi'\rangle = \frac{\hat{P}_m |\Psi\rangle}{\sqrt{\langle\Psi|\hat{P}_m|\Psi\rangle}} = \frac{|\psi_m\rangle c_m}{|c_m|}$$

$$\hat{\rho}_m = |\Psi'\rangle\langle\Psi'| = \frac{|\psi_m\rangle\langle\psi_m|}{|c_m|^2} \quad (\text{A.11})$$

- **Probabilistica:** la probabilità che dopo la misura di un'osservabile si ottenga il collasso su un determinato autostato $|\psi_m\rangle$, ottenendo il corrispettivo autovalore a_m , è data da

$$p(a_m) = \langle \Psi | \hat{P}_m | \Psi \rangle = |c_m|^2 = \text{Tr}[\hat{\rho} \hat{P}_m] \quad (\text{A.12})$$

Definizione A.2.4. (Misura di probabilità) Sia $\mathcal{H}$ uno spazio di Hilbert e sia $\mathcal{P}(\mathcal{H})$ l'insieme dei proiettori ortogonali su $\mathcal{H}$. Una misura di probabilità è una funzione

$$\mu : \mathcal{P}(\mathcal{H}) \longrightarrow [0, 1]$$

tale che soddisfi le proprietà:

1. Normalizzazione: $\mu(\hat{\mathbb{I}}) = 1$, dove $\hat{\mathbb{I}}$ è il proiettore identità;
2. Additività: per ogni famiglia finita o numerabile di proiettori ortogonali $\{\hat{P}_i\}$, vale

$$\mu\left(\sum_i \hat{P}_i\right) = \sum_i \mu(\hat{P}_i).$$

e la quantità $\mu(\hat{P})$ rappresenta la probabilità associata all'evento quantistico descritto dal proiettore $\hat{P}$.

Definizione A.2.5. (Contesto di misura) Sia $\mathcal{H}$ uno spazio di Hilbert. Un contesto di misura è una famiglia di proiettori ortogonali

$$C = \{\hat{P}_i\}_{i \in I} \subset \mathcal{P}(\mathcal{H})$$

tale che costituisca una misura proiettiva completa su $\mathcal{H}$, ovvero soddisfi:

$$\sum_{i \in I} \hat{P}_i = \mathbb{I}.$$

e l'insieme degli indici I può essere finito o numerabile.

Ciascun contesto rappresenta quindi un insieme di osservabili compatibili. Osserviamo che una stessa osservabile A può appartenere a contesti distinti:

$$A \in C_1, \quad A \in C_2, \quad C_1 \neq C_2,$$

poiché può risultare compatibile con differenti famiglie massimali di osservabili commutanti, non reciprocamente commutanti.

Definizione A.2.6. (*Valutazione non contestuale*) Sia $\mathcal{H}$ uno spazio di Hilbert complesso separabile con $\dim \mathcal{H} \geq 3$, e sia $\mathcal{P}(\mathcal{H})$ l'insieme dei proiettori ortogonali su $\mathcal{H}$. Si consideri una funzione

$$v : \mathcal{P}(\mathcal{H}) \rightarrow \{0, 1\}$$

Si dice che v è una valutazione non contestuale se soddisfa le seguenti proprietà:

1. *Determinismo*: per ogni $\hat{P} \in \mathcal{P}(\mathcal{H})$,

$$v(\hat{P}) \in \{0, 1\}$$

2. *Normalizzazione sui contesti*: per ogni contesto $C = \{\hat{P}_i\}$,

$$\sum_{\hat{P}_i \in C} v(\hat{P}_i) = 1$$

3. *Non contestualità*: per ogni proiettore $\hat{P}$ e per ogni coppia di contesti C_1, C_2 tali che $\hat{P} \in C_1 \cap C_2$, il valore assegnato a $\hat{P}$ è indipendente dal contesto, cioè

$$v_{C_1}(\hat{P}) = v_{C_2}(\hat{P})$$

Appendice B

Calcolo di alcuni valori di aspettazione quantistici

Ricordiamo che le matrici di Pauli agiscono sulla base computazionale $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ come segue

$$\begin{aligned}\hat{\sigma}_x|0\rangle &= |1\rangle & \hat{\sigma}_y|0\rangle &= i|1\rangle & \hat{\sigma}_z|0\rangle &= |0\rangle \\ \hat{\sigma}_x|1\rangle &= |0\rangle & \hat{\sigma}_y|1\rangle &= -i|0\rangle & \hat{\sigma}_z|1\rangle &= -|1\rangle\end{aligned}$$

e che la base di Bell si compone dei vettori di stato

$$|\Phi^\pm\rangle = \frac{|00\rangle \pm |11\rangle}{\sqrt{2}} \quad |\Psi^\pm\rangle = \frac{|01\rangle \pm |10\rangle}{\sqrt{2}} \quad (\text{B.1})$$

Lemma B.1. *Vale la seguente relazione*

$$\langle \Psi^- | \hat{\sigma}_i \hat{\sigma}_j | \Psi^- \rangle = -\delta_{ij} \quad (\text{B.2})$$

Dimostrazione.

$$\begin{aligned}\langle \hat{\sigma}_x \otimes \hat{\sigma}_x \rangle &= (\langle \Psi^- | \hat{\sigma}_x \otimes \hat{\sigma}_x | \Psi^- \rangle = \left(\frac{\langle 10 | - \langle 01 |}{\sqrt{2}} \right) | \Psi^- \rangle = -\langle \Psi^- | \Psi^- \rangle = -1 \\ \langle \hat{\sigma}_y \otimes \hat{\sigma}_y \rangle &= (\langle \Psi^- | \hat{\sigma}_y \otimes \hat{\sigma}_y | \Psi^- \rangle = \left(\frac{(-i)(i) \langle 10 | - (-i)(i) \langle 01 |}{\sqrt{2}} \right) | \Psi^- \rangle = -\langle \Psi^- | \Psi^- \rangle = -1 \\ \langle \hat{\sigma}_z \otimes \hat{\sigma}_z \rangle &= (\langle \Psi^- | \hat{\sigma}_z \otimes \hat{\sigma}_z | \Psi^- \rangle = \left(\frac{-\langle 01 | + \langle 10 |}{\sqrt{2}} \right) | \Psi^- \rangle = -\langle \Psi^- | \Psi^- \rangle = -1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle \hat{\sigma}_x \otimes \hat{\sigma}_y \rangle &= (\langle \Psi^- | \hat{\sigma}_x \otimes \hat{\sigma}_y | \Psi^- \rangle = \left(\frac{i \langle 01 | + i \langle 10 |}{\sqrt{2}} \right) | \Psi^- \rangle = i \langle \Psi^+ | \Psi^- \rangle = 0 = \langle \sigma_y \otimes \hat{\sigma}_x \rangle \\
\langle \hat{\sigma}_x \otimes \hat{\sigma}_z \rangle &= (\langle \Psi^- | \hat{\sigma}_x \otimes \hat{\sigma}_z | \Psi^- \rangle = \left(\frac{\langle 00 | + \langle 11 |}{\sqrt{2}} \right) | \Psi^- \rangle = \langle \Phi^+ | \Psi^- \rangle = 0 = \langle \sigma_z \otimes \hat{\sigma}_x \rangle \\
\langle \hat{\sigma}_y \otimes \hat{\sigma}_z \rangle &= (\langle \Psi^- | \hat{\sigma}_y \otimes \hat{\sigma}_z | \Psi^- \rangle = \left(\frac{-i \langle 00 | + i \langle 11 |}{\sqrt{2}} \right) | \Psi^- \rangle = -i \langle \Phi^+ | \Psi^- \rangle = 0 = \langle \sigma_y \otimes \hat{\sigma}_x \rangle
\end{aligned}$$

□

Lemma B.2. *Dato un sistema nello stato $|\Phi^+\rangle$, il valore di aspettazione quantistico delle osservabili AB e A' , associate agli operatori*

$$\begin{aligned}
\hat{P}(\alpha) \otimes \hat{P}(\beta) &= (|\alpha\rangle\langle\alpha|) \otimes (|\beta\rangle\langle\beta|) \\
\hat{P}(\alpha') \otimes \hat{\mathbb{I}} &= (|\alpha'\rangle\langle\alpha'|) \otimes \hat{\mathbb{I}}
\end{aligned}$$

risulta essere

$$\langle AB \rangle = \frac{1}{2} \cos^2(\alpha - \beta) \qquad \langle A' \rangle = \frac{1}{2}$$

Dimostrazione. Calcoliamo i valori di aspettazione ricordando le relazioni

$$|\Phi^+\rangle = \frac{|00\rangle + |11\rangle}{\sqrt{2}} \qquad |\theta\rangle = |0\rangle \cos \theta + |1\rangle \sin \theta$$

allora

$$\begin{aligned}
P(\alpha, \beta) &= \langle \Phi^+ | \hat{P}(\alpha) \otimes \hat{P}(\beta) | \Phi^+ \rangle = \langle \Phi^+ | (|\alpha\rangle\langle\alpha| \otimes |\beta\rangle\langle\beta|) | \Phi^+ \rangle = \langle \Phi^+ | \alpha\beta \rangle \langle \alpha\beta | \Phi^+ \rangle \\
&= |\langle \alpha\beta | \Phi^+ \rangle|^2 = \frac{1}{2} (\langle \alpha|0\rangle\langle\beta|0\rangle + \langle \alpha|1\rangle\langle\beta|1\rangle)^2 = \frac{1}{2} (\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta)^2 \\
&= \frac{1}{2} \cos^2(\alpha - \beta)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P(\alpha') &= \langle \Phi^+ | \hat{P}(\alpha') \otimes \hat{\mathbb{I}} | \Phi^+ \rangle = \langle \Phi^+ | (|\alpha'\rangle\langle\alpha'| \otimes \hat{\mathbb{I}}) | \Phi^+ \rangle \\
&= \frac{\langle 0|0\rangle\langle\alpha'| + \langle 1|1\rangle\langle\alpha'|}{\sqrt{2}} \frac{\langle \alpha'|0\rangle|0\rangle + \langle \alpha'|1\rangle|1\rangle}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2} (|\langle \alpha'|0\rangle|^2 + |\langle \alpha'|1\rangle|^2) \\
&= \frac{1}{2} (\cos^2 \alpha' + \sin^2 \alpha') = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

□

Appendice C

Il teorema di Fine

Dimostriamo il Teorema di Fine (2.1.4)

Dimostrazione. (a) $\implies$ (c)

Consideriamo un modello di variabili nascoste deterministiche che predica l'esito di quattro misure dicotomiche

$$A(\lambda), A'(\lambda), B(\lambda), B'(\lambda) \in \{+1, -1\}$$

e le relative probabilità

$$P(S) = \int d\lambda \rho(\lambda) \tilde{S}(\lambda) \tag{C.1}$$

$$P(ST) = \int d\lambda \rho(\lambda) \tilde{S}(\lambda) \tilde{T}(\lambda) \tag{C.2}$$

con la convenzione che

$$\begin{cases} \tilde{S}(\lambda) = 1 & \text{se } S(\lambda) = 1 \\ \tilde{S}(\lambda) = 0 & \text{se } S(\lambda) = -1 \end{cases} \tag{C.3}$$

e S può rappresentare tutte le quattro osservabili e i loro complementari che indicheremo con $\bar{S}(\lambda)$ tali che

$$S(\lambda) = \pm 1 \quad \implies \quad \bar{S}(\lambda) = \mp 1$$

convenzionalmente tratteremo i complementari sostituendo $\tilde{S}(\lambda)$ con $1 - \tilde{S}(\lambda)$ in (C.1)

$$P(\bar{S}) = \int d\lambda \rho(\lambda) [1 - \tilde{S}(\lambda)]$$

e si ottengono (C.3). Una convenzione analoga vale anche per $T(ST)$ e $T(\overline{ST})$.

Si vuole mostrare che esiste una distribuzione di probabilità congiunta $P(AA'BB')$ le cui probabilità marginali riproducano le probabilità dell'esperimento

$$P(AA'BB') = \int d\lambda \rho(\lambda) \tilde{A}(\lambda) \tilde{A}'(\lambda) \tilde{B}(\lambda) \tilde{B}'(\lambda)$$

allora da (C.2) si trova che le probabilità marginali sono

$$\begin{aligned} P(AB) &= P(AA'BB') + P(A\overline{A'}BB') + P(AA'B\overline{B'}) + P(A\overline{A'}B\overline{B'}) \\ &= \int d\lambda \rho(\lambda) \left[\tilde{A}(\lambda) \tilde{A}'(\lambda) \tilde{B}(\lambda) \tilde{B}'(\lambda) + \tilde{A}(\lambda) (1 - \tilde{A}'(\lambda)) \tilde{B}(\lambda) \tilde{B}'(\lambda) \right. \\ &\quad \left. + \tilde{A}(\lambda) \tilde{A}'(\lambda) \tilde{B}(\lambda) (1 - \tilde{B}'(\lambda)) + \tilde{A}(\lambda) (1 - \tilde{A}'(\lambda)) \tilde{B}(\lambda) (1 - \tilde{B}'(\lambda)) \right] \\ &= \int d\lambda \rho(\lambda) \tilde{A}(\lambda) \tilde{B}(\lambda) \left[\tilde{A}'(\lambda) \tilde{B}'(\lambda) + (1 - \tilde{A}'(\lambda)) \tilde{B}'(\lambda) \right. \\ &\quad \left. + \tilde{A}'(\lambda) (1 - \tilde{B}'(\lambda)) + (1 - \tilde{A}'(\lambda)) (1 - \tilde{B}'(\lambda)) \right] \\ &= \int d\lambda \rho(\lambda) \tilde{A}(\lambda) \tilde{B}(\lambda) \left[\tilde{B}'(\lambda) + (1 - \tilde{B}'(\lambda)) \right] \\ &= \int d\lambda \rho(\lambda) \tilde{A}(\lambda) \tilde{B}(\lambda) \end{aligned}$$

(c) $\implies$ (a)

Supponiamo ora di avere la distribuzione di probabilità congiunta $P(AA'BB')$ tale che le sue probabilità marginali coincidano con le probabilità sperimentali (C.1) e (C.2), allora definiamo il modello deterministico a variabili nascoste come segue

$$\Lambda = \{\lambda = (a_1, a_2, a_3, a_4) \mid a_i = \pm 1\}$$

introduciamo le funzioni di correlazione

$$A(\lambda) = a_1 \quad A'(\lambda) = a_2 \quad B(\lambda) = a_3 \quad B'(\lambda) = a_4$$

allora se definiamo la densità di probabilità delle variabili nascoste

$$\rho(\lambda) = \rho(a_1, a_2, a_3, a_4) = P(A_1 A'_2 B_3 B'_4)$$

ove si intenderà

$$\begin{cases} S_i = S & \text{se } a_i = +1 \\ S_i = \overline{S} & \text{se } a_i = -1 \end{cases}$$

ed è facile verificare che la densità di probabilità è normalizzata:

$$\begin{aligned}
\int d\lambda \rho(\lambda) &= \sum_{a_1=\pm 1} \sum_{a_2=\pm 1} \sum_{a_3=\pm 1} \sum_{a_4=\pm 1} \rho(a_1, a_2, a_3, a_4) \\
&= \sum_{a_1=\pm 1} \sum_{a_2=\pm 1} \sum_{a_3=\pm 1} \sum_{a_4=\pm 1} P(A_1 A'_2 B_3 B'_4) \\
&= P(\Omega) = 1
\end{aligned}$$

ove Ω è lo spazio campionario completo, ottenuto sommando su tutte le possibili configurazioni $(a_1, a_2, a_3, a_4) \in \{\pm 1\}^4$.

(c) $\implies$ (d)

Supponiamo esista la distribuzione congiunta $P(AA'BB')$, allora esisterebbe una probabilità congiunta per le osservabili A, B, B' tale che

$$P(ABB') = \int d\lambda \rho(\lambda) \tilde{A}(\lambda) \tilde{B}(\lambda) \tilde{B}'(\lambda)$$

che restituisce come probabilità marginali

$$P(A) \quad P(B) \quad P(B') \quad P(AB) \quad P(AB') \quad P(BB')$$

si può applicare un ragionamento analogo anche per le tre osservabili A', B, B' , ottenendo

$$P(A') \quad P(B) \quad P(B') \quad P(A'B) \quad P(A'B') \quad P(BB')$$

e supponendo B, B' osservabili non compatibili, in entrambe le configurazioni si ottiene la probabilità congiunta

$$P(BB') = \int d\lambda \rho(\lambda) \tilde{B}(\lambda) \tilde{B}'(\lambda)$$

(d) $\implies$ (c)

Partendo dalle distribuzioni di probabilità per le tre osservabili $P(ABB')$ e $P(A'BB')$ e per le due osservabili incompatibili $P(BB')$ si può costruire la probabilità congiunta

$$P(AA'BB') = \frac{P(ABB') P(A'BB')}{P(BB')}$$

con $P(AA'BB') = 0$ se $P(BB') = 0$.

Verifichiamo che sia normalizzata:

$$\begin{aligned}
\sum_{a,a',b,b'=\pm 1} P(AA'BB') &= \sum_{a,a',b,b'=\pm 1} \frac{P(ABB') P(A'BB')}{P(BB')} \\
&= \sum_{b,b'=\pm 1} \frac{1}{P(BB')} \left(\sum_{a=\pm 1} P(ABB') \right) \left(\sum_{a'=\pm 1} P(A'BB') \right) \\
&= \sum_{b,b'=\pm 1} \frac{P(BB') P(BB')}{P(BB')} \\
&= \sum_{b,b'=\pm 1} P(BB') \\
&= 1
\end{aligned}$$

Verifichiamo ora che restituisca le corrette probabilità marginali:

$$\begin{aligned}
\sum_{a',b'=\pm 1} P(AA'BB') &= \sum_{a',b'=\pm 1} \frac{P(ABB') P(A'BB')}{P(BB')} \\
&= \sum_{b'=\pm 1} \frac{P(ABB')}{P(BB')} \left(\sum_{a'=\pm 1} P(A'BB') \right) \\
&= \sum_{b'=\pm 1} \frac{P(ABB') P(BB')}{P(BB')} \\
&= \sum_{b'=\pm 1} P(ABB') \\
&= P(AB)
\end{aligned}$$

analogamente si ottengono

$$\begin{aligned}
\sum_{a,b'=\pm 1} P(AA'BB') &= P(A'B) & \sum_{a',b=\pm 1} P(AA'BB') &= P(AB') \\
\sum_{a,b=\pm 1} P(AA'BB') &= P(A'B')
\end{aligned}$$

quindi

$$\begin{aligned}
\sum_{a,a'=\pm 1} P(AA'BB') &= \sum_{a,a'=\pm 1} \frac{P(ABB') P(A'BB')}{P(BB')} \\
&= \frac{1}{P(BB')} \sum_{a=\pm 1} P(ABB') \sum_{a'=\pm 1} P(A'BB') \\
&= \frac{P(BB') P(BB')}{P(BB')} \\
&= P(BB')
\end{aligned}$$

(d) $\implies$ (e)

Mostriamo come le probabilità congiunte per osservabili non compatibili possano essere adoperate per restringere le probabilità di un esperimento di correlazione.

$$\begin{aligned}
P(ABB') &= P(AA'BB') + P(A\bar{A}'BB') \\
&\leq P(A'B) + P(\bar{A}'B') = P(A'B) + P(B') - P(A'B') \quad (C.4)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P(\bar{A}BB') &= P(\bar{A}A'BB') + P(\bar{A}\bar{A}'BB') \\
&\leq P(A'B') + P(\bar{A}'B) = P(A'B') + P(B) - P(A'B) \quad (C.5)
\end{aligned}$$

allora

$$\begin{aligned}
0 &\leq P(\bar{A}\bar{B}\bar{B}') = P(A) - P(AB) - P(AB') + P(ABB') \\
0 &\leq P(\bar{A}\bar{B}B') \\
&= 1 - P(A) - P(B) - P(B') + P(AB) + P(AB') + P(\bar{A}BB')
\end{aligned}$$

allora utilizzando la disuguaglianza (C.4) per $P(ABB')$ e (C.5) per $P(\bar{A}BB')$ si ha

$$-1 \leq P(AB) + P(AB') + P(A'B') - P(A'B) - P(A) - P(B) \leq 0 \quad (C.6)$$

quella ottenuta è una delle otto possibili disuguaglianze di Bell: tre di esse si ricavano analogamente sostituendo A con A' oppure B con B' oppure sostituendo entrambi contemporaneamente, infine le altre quattro si ottengono considerando le osservabili complementari. Osserviamo inoltre che le disuguaglianze in (C.6) sono equivalenti alla formulazione CHSH (2.15), infatti se poniamo

$$P(S) = \frac{\langle S \rangle + 1}{2} \quad P(TS) = \frac{\langle ST \rangle + \langle S \rangle + \langle T \rangle + 1}{4}$$

allora possiamo riscrivere (C.6) come

$$-2 \leq \langle AB \rangle + \langle AB' \rangle + \langle A'B' \rangle - \langle A'B \rangle \leq 2$$

(e) $\implies$ (d)

L'idea della dimostrazione consiste nel mostrare che le disuguaglianze di Bell (C.6) garantiscono l'esistenza di una scelta coerente delle probabilità congiunte per osservabili incompatibili. In particolare, benché la quantità $P(BB')$ non sia direttamente osservabile, le disuguaglianze impongono vincoli sufficienti affinché essa possa essere definita senza violare la positività e la normalizzazione delle probabilità.

La probabilità congiunta $P(BB')$ non è fissata sperimentalmente, poiché B e B' sono incompatibili. Introduciamo quindi un parametro libero

$$P(BB') = \beta,$$

che dovrà essere scelto in modo da rendere tutte le probabilità costruite non negative. Le probabilità marginali impongono diversi vincoli superiori su β . Ad esempio, dalla positività di

$$P(B\overline{B}') = P(B) - \beta$$

segue

$$\beta \leq P(B),$$

mentre dalla positività di

$$P(AB\overline{B}') = P(AB) - P(ABB')$$

si ottengono ulteriori restrizioni. Scegliamo quindi β come un valore che soddisfi simultaneamente tutti i vincoli superiori richiesti dalla positività delle probabilità. Una scelta possibile è la seguente:

$$\beta = \min\{P(B), P(B'), P(AB) + P(B') - P(AB'), P(AB') + P(B) - P(AB), \\ P(A'B) + P(B') - P(A'B'), P(A'B') + P(B) - P(A'B)\}$$

e definiamo il resto della distribuzione tramite

$$\begin{aligned} P(B\overline{B}') &= P(B) - \beta \\ P(\overline{B}B') &= P(B') - \beta \\ P(\overline{B}\overline{B}') &= 1 - P(B) - P(B') + \beta \end{aligned}$$

Una volta fissato $\beta = P(BB')$, occorre assegnare una probabilità alla tripla intersezione

$$P(ABB') = \alpha.$$

Anche α non è determinata sperimentalmente, ma deve soddisfare una serie di vincoli di positività derivanti dalle probabilità marginali. Consideriamo quindi

$$\alpha = \min\{\beta, \beta - [P(A) + P(B) + P(B') - P(AB') - P(AB) - 1], P(AB), P(AB')\}$$

$$\alpha' = \min\{\beta, \beta - [P(A') + P(B) + P(B') - P(A'B') - P(A'B) - 1], P(A'B), P(A'B')\}$$

allora la validità delle disuguaglianze di Bell garantisce $\alpha, \alpha' \geq 0$, inoltre

$$0 \leq \alpha \leq \beta \leq 1 \quad 0 \leq \alpha' \leq \beta \leq 1$$

e completiamo la distribuzione come segue

$$\begin{aligned} P(AB\overline{B}') &= P(AB) - \alpha \\ P(A\overline{B}B') &= P(AB') - \alpha \\ P(A\overline{B}\overline{B}') &= P(A) - P(AB) - P(AB') + \alpha \\ P(\overline{A}BB') &= \beta - \alpha \\ P(\overline{A}\overline{B}B') &= P(B') - P(AB') - (\beta - \alpha) \\ P(\overline{A}\overline{B}\overline{B}') &= 1 - P(A) - P(B) - P(B') + P(AB) + P(AB') + (\beta - \alpha). \end{aligned}$$

analogamente si definisce $P(A'BB')$ sostituendo A', α' al posto di A, α . Osserviamo le probabilità sono non negative e compatibili con le probabilità marginali assegnate. Questo fatto deriva dalle disuguaglianze di Bell per β, α e α' infatti vale

$$P(ABB') + P(\overline{A}BB') = P(A'BB') + P(\overline{A'}BB') = \beta,$$

Le distribuzioni costruite risultano quindi compatibili tra loro e riproducono le stesse probabilità marginali osservabili. In particolare, esse definiscono una probabilità congiunta coerente anche per le osservabili incompatibili B e B' .

(a) $\implies$ (b)

Mostriamo ora che ogni modello deterministico può essere interpretato come un modello stocastico fattorizzabile.

Consideriamo ora un modello stocastico fattorizzabile, sostituendo le relazioni (C.1) e (C.2) con

$$P(S) = \int d\lambda \rho(\lambda) P(S, \lambda) \quad (C.7)$$

$$P(ST) = \int d\lambda \rho(\lambda) P(ST, \lambda) \quad (C.8)$$

con la condizione di fattorizzabilità

$$P(ST, \lambda) = P(S, \lambda)P(T, \lambda) \quad (C.9)$$

in queste relazioni S può essere uno delle quattro osservabili e analogamente T una coppia qualunque di osservabili compatibili, inclusi i rispettivi complementari.

Convenzionalmente

$$\begin{aligned} P(\bar{S}, \lambda) &= 1 - P(S, \lambda) \\ P(\bar{S}T, \lambda) &= P(T, \lambda) - P(ST, \lambda) \\ P(S\bar{T}, \lambda) &= P(S, \lambda) - P(ST, \lambda) \end{aligned}$$

allora è evidente che ogni modello deterministico sia un modello stocastico fattorizzabile in quanto è sufficiente identificare le probabilità condizionate con le funzioni deterministiche

$$P(S, \lambda) = \tilde{S}(\lambda) \in \{0, 1\}$$

esplicitamente

$$\begin{aligned} P(S, \lambda) &= 1 & \text{se} & & S(\lambda) &= 1 \\ P(S, \lambda) &= 0 & \text{se} & & S(\lambda) &= -1 \end{aligned}$$

allora se si utilizza la condizione (C.9), le condizioni (C.1) e (C.2) implicano direttamente (C.7) e (C.8) e relazioni analoghe si trovano per $P(TS)$.

(b) $\implies$ (a)

Sfruttiamo il risultato ottenuto da CHSH per sistemi stocastici fattorizzabili (2.15). Questa risulta essere una delle disuguaglianze di Bell e per $(a) \iff (c)$ la loro validità implica che esista un modello in grado di riprodurre le probabilità per un modello deterministico (C.1) e (C.2). Un altro modo per mostrarlo è considerare direttamente

$$P(AA'BB') = \int d\lambda \rho(\lambda) P(A, \lambda) P(A', \lambda) P(B, \lambda) P(B', \lambda)$$

che definisce una distribuzione di probabilità che produce le probabilità dell'esperimento come marginali.

□

Bibliografia

- [1] David J. Griffiths *Introduction to Quantum Mechanics*, 3rd ed., Cambridge University Press (2018).
- [2] A. Einstein, B. Podolsky, N. Rosen *Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality Be Considered Complete?*, Physical Review **47**, pp. 777–780 (1935).
- [3] Bernard d’Espagnat *The Quantum Theory and Reality*, Scientific American, Nov., **241**, p. 165 (1979).
- [4] Max Jammer *The Philosophy of Quantum Mechanics*, Wiley New York (1974) p. 151.
- [5] Albert Einstein, Max Born, Hedwig Born *The Born-Einstein Letters: Correspondence Between Albert Einstein and Max and Hedwig Born from 1916–1955, with Commentaries by Max Born.*, english ed., Walker and Company New York (1971) p. 223.
- [6] David Bohm *A Suggested Interpretation of the Quantum Theory in Terms of "Hidden" Variables. I*, Physical Review, **85**, pp. 166-179 (1952).
- [7] Hugh Everett III *Relative State Formulation of Quantum Mechanics*, Review of Modern Physics, **29** (3), pp. 454-462 (1957).
- [8] John S. Bell *The measurement theory of Everett and Broglie’s pilot wave*, CERN-TH-1599 (1976).
- [9] J. S. Bell, *On the Einstein Podolsky Rosen Paradox*, Physics Physique Fizika **1**(3), pp. 195-200 (1964).
- [10] P. A. M. Dirac *The Principles of Quantum Mechanics*, 2nd ed., Oxford University Press (1934).
- [11] Michael A. Nielsen, Isaac L. Chuang *Quantum Computation and Quantum Information*, 7th ed., Cambridge University Press (2010).

- [12] John Preskill *Lecture Notes for Ph219/CS219*, California Institute of Technology, Chapter 3 (Measurement and Evolution).
- [13] D. Bohm, Y. Aharonov *Discussion of Experimental Proof for the Paradox of Einstein, Rosen, and Podolsky*, Physical Review **108**, pp. 1070–1076 (1957).
- [14] J. S. Bell *On The Problem of Hidden Variables in Quantum Mechanics*, Reviews of Modern Physics **38**, pp. 447–452 (1966).
- [15] J. von Neumann *Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik*, Princeton University Press, English translation (1955).
- [16] J. M. Jauch, C. Piron *Can Hidden Variables be Excluded in Quantum Mechanics?*, Helvetica Physica Acta **36**, pp. 827–837 (1963).
- [17] A. M. Gleason *Measures on the Closed Subspaces of a Hilbert Space*, Journal of Mathematics and Mechanics **6**, pp. 885–893 (1957).
- [18] S. Kochen, E. Specker *The Problem of Hidden Variables in Quantum Mechanics*, Journal of Mathematics and Mechanics **17**, pp. 59–87 (1967).
- [19] Daniel Collins, Nicolas Gisin, Noah Linden, Serge Massar and Sandu Popescu *Bell Inequalities for Arbitrarily High-Dimensional Systems*, Physical Review Letters **88**, pp. 400-404 (2002).
- [20] Daniel M. Greenberger, Michael A. Horne, and Anton Zeilinger *Going beyond Bell's theorem in Bell's Theorem, Quantum Theory and Conception of the Universe*, edited by M. Kafatos (Kluwer Academic, Dordrecht, The Netherlands) **58**, pp. 73-76 (1989).
- [21] John F. Clauser, Michael A. Horne, Abner Shimony, Richard A. Holt *Proposed Experiment to Test Local Hidden-Variable Theories*, Physical Review **23**(15), pp. 880-884 (1969).
- [22] John S. Bell *Bertlmann's Socks and the Nature of Reality*, CERN Report TH.2926-CERN, Geneva (1980).
- [23] Arthur Fine *Hidden Variables, Joint Probability, and the Bell Inequalities*, Physical Review **48**(5), pp. 291-295 (1982).
- [24] N. Herbert *FLASH – A superluminal communicator based upon a new kind of quantum measurement*, Foundations of Physics, **12**(12), pp. 1171-1179 (1982).
- [25] F. Selleri, *Dynamical Systems and Microphysics*, Springer Vienna, Chapter *Einstein Locality and the Quantum Mechanical Long-Distance Effects*, pp. 393-412 (1980).

- [26] G. C. Ghirardi, A. Rimini, T. Weber *A General Argument against Superluminal Transmission through the Quantum Mechanical Measurement Process*, Lettere al Nuovo Cimento **27**(10), pp. 293-298 (1982).
- [27] Hensen, B., Bernien, H., Dréau, A. E., et al. *Loophole-free Bell inequality violation using electron spins separated by 1.3 kilometres*, Nature **526**, pp. 682–686 (2015).
- [28] Giustina, M., Versteegh, M. A. M., Wengerowsky, S., et al. *Significant-Loophole-Free Test of Bell’s Theorem with Entangled Photons*, Physical Review Letters **115**(25), 250401 (2015).
- [29] Shalm, L. K., Meyer-Scott, E., Christensen, B. G., et al. *Strong Loophole-Free Test of Local Realism*, Physical Review Letters **115**, 250402 (2015).
- [30] Stuart J. Freedman, John F. Clauser, *Experimental Test of Local Hidden-Variable Theories*, Physical Review Letters **28**(14), pp. 938-941 (1972).
- [31] Alain Aspect, Jean Dalibard, Gerard Roger, *Experimental Test of Bell’s Inequalities Using Time-Varying Analyzers*, Physical Review Letters **49**(25), pp. 1804-1807 (1982).
- [32] Alain Aspect, Philippe Grangier, Gerard Roger, *Experimental Tests of Realistic Local Theories via Bell’s Theorem*, Physical Review Letters **47**(7), pp. 460-463 (1981).
- [33] Alain Aspect, Philippe Grangier, Gerard Roger, *Experimental Realization of Einstein-Podolski-Rosen-Bohm Gedankenexperiment: A New Violation of Bell’s Inequalities*, Physical Review Letters **49**(2), pp. 91-94 (1982).
- [34] M. A. Rowe, D. Kielpinski, V. Meyer, C. A. Sackett, W. M. Itano, C. Monroe and D. J. Wineland *Experimental violation of a Bell’s inequality with efficient detection*, Nature **409**, pp. 791-794 (2001).
- [35] C. A. Sackett, D. Kielpinski, B. E. King, C. Langer, V. Meyer, C. J. Myatt, M. Rowe, Q. A. Turchette, W. M. Itano, D. J. Wineland and C. Monroe *Experimental entanglement of four particles*, Nature **404**, pp. 256–259 (2000).
- [36] K.Mølmer, A. Sørensen *Multiparticle entanglement of hot trapped ions*, Physical Review Letters **82**, pp. 1835-1838 (1999).
- [37] Michel Paty *Are quantum systems physical objects with physical properties?*, European Journal of Physics, **20**, pp. 373-388 (1999).
- [38] Artur K. Ekert *Quantum cryptography based on Bell’s theorem*, Physical Review Letters **67**, p. 661 (1991).

- [39] Charles H. Bennett, Gilles Brassard, Claude Crépeau, Richard Jozsa, Asher Peres, and William K. Wootters *Teleporting an unknown quantum state via dual classical and Einstein-Podolsky-Rosen channels*, Physical Review Letters **70**, pp. 1895 (1993).
- [40] ATLAS Collaboration *Observation of quantum entanglement in top-quark pairs at the ATLAS detector*, Nature, **633**, pp. 542-547 (2024).