

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI
BOLOGNA

SCUOLA DI SCIENZE

Corso di Laurea Magistrale in Matematica

SULLA GENESI
DELLA CONVERGENZA UNIFORME

Presentata da:
Emanuele Zani

Relatore:
Chiar.mo Prof.
Paolo Albano

II Appello di Laurea
Anno Accademico 2025/2026

Indice

Introduzione	2
1 Il teorema della continuità di Cauchy	5
1.1 L'analisi matematica all'inizio dell'Ottocento	5
1.2 Il prologo del Cours d'Analyse	8
1.3 Il Capitolo VI del Cours d'Analyse	15
1.4 Le criticità del teorema	27
2 Le eccezioni trovate da Abel grazie a Fourier	32
2.1 La propagazione del calore di Fourier	32
2.2 Le serie trigonometriche in Fourier	36
2.3 Il lavoro meticoloso di Abel	47
3 Le soluzioni di Seidel e Stokes	66
3.1 Le condizioni di Dirichlet	66
3.2 La convergenza arbitrariamente lenta di Seidel	68
3.3 La convergenza infinitamente lenta di Stokes	80
4 La sintesi portata da Weierstrass	91
4.1 Il ritorno di Cauchy sul teorema della continuità	91
4.2 La formalizzazione portata da Weierstrass	93
4.3 La convergenza uniforme riassunta da Hardy	101
Bibliografia	109

La storia dell'analisi matematica è spesso narrata come una progressione lineare verso il rigore, una marcia trionfale nella quale ogni concetto viene definito con precisione. Tuttavia, la realtà storica è ben più complessa, segnata da intuizioni audaci, errori illustri e lunghe dispute epistemologiche. Questa tesi si propone di indagare uno dei capitoli che ha segnato la matematica del diciannovesimo secolo: la genesi e la formalizzazione del concetto di convergenza uniforme.

Il punto di partenza dell'indagine è il celebre *Cours d'Analyse* di Augustin-Louis Cauchy, pubblicato nel 1821. In quest'opera, Cauchy tenta di porre l'analisi su basi solide, introducendo la definizione di limite e i primi criteri di convergenza di serie, sia numeriche sia di funzioni. Tuttavia, egli commette un errore quando dimostra il seguente risultato: “la somma di una serie infinita di funzioni continue è sempre una funzione continua”. Attraverso un'analisi testuale e storica, il primo capitolo esamina come l'intuizione di Cauchy, fondata su una visione geometrica degli infinitesimi, lo porti a trascurare il comportamento globale delle serie, confondendo la convergenza uniforme con quella puntuale, l'unica nota all'epoca.

Nel secondo capitolo, la tesi affronta la crisi di questo modello unico di convergenza. Attraverso le opere di Joseph Fourier, acquistano popolarità le serie trigonometriche, capaci di rappresentare funzioni discontinue come somma di funzioni continue. Emergono in questo modo i primi dubbi sulla validità del teorema di Cauchy, esplicitati in una famosa nota a piè di pagina in un lavoro di Niels Henrik Abel. Egli, ammiratore di tutta la produzione matematica di Cauchy, individua dei casi patologici in contrasto con il risultato prima citato, suggerendo che il teorema della continuità sia, in realtà, soggetto a eccezioni.

Nel terzo capitolo si descrive il percorso che porta alla “scoperta” della convergenza uniforme. Attraverso i contributi indipendenti di Philipp Ludwig von Seidel e George Stokes, si analizza come la comunità matematica comprenda che il problema non risiede tanto nella convergenza in sé, quanto nella sua “velocità”. Viene illustrato come la scoperta della convergenza “arbitrariamente o infinitamente lenta” presso i punti di discontinuità permetta di descrivere il concetto di irregolarità nel comportamento globale di una serie.

Nel quarto capitolo si analizza come Cauchy ritorni sul teorema della continuità, aggiornandolo, alla luce dei nuovi concetti di convergenza. Successivamente si descrive la sintesi teorica dovuta a Karl Weierstrass nei suoi anni di insegnamento a Berlino. Egli trasforma il concetto di convergenza uniforme in una definizione logica precisa. La tesi si conclude con la classificazione redatta da Hardy, nel 1918, delle varie forme di convergenza uniforme, dopo i lavori di Stokes, Seidel e Weierstrass.

1 Il teorema della continuità di Cauchy

1.1 L'analisi matematica all'inizio dell'Ottocento

All'indomani della Rivoluzione francese, il panorama europeo risulta radicalmente trasformato. La visione settecentesca della società è ribaltata e, parallelamente ad essa, è mutato il ruolo civile della matematica. Se nel Settecento un matematico di professione poteva vivere all'ombra delle accademie pienamente dedito ai suoi studi, libero da insegnamenti e sostenuto economicamente da mecenati e sovrani, ora questa figura è cambiata. Il fatto materiale che ha causato questa trasformazione è da rintracciare nella fondazione delle grandi scuole francesi, in particolare l'École Polytechnique e l'École Normale Supérieure, attive a partire dal 1794. La politica francese post-rivoluzionaria ha individuato nella fondazione di centri per la formazione di ingegneri e tecnici, destinati a ruoli militari o produttivi, uno strumento fondamentale per il rafforzamento della nazione. Tra gli insegnanti illustri chiamati a svolgere incarichi in queste scuole si ricordano Gaspard Monge, Adrien-Marie Legendre e il nobile Pierre-Simon Laplace. Seguendo l'impulso dato da queste due *Écoles*, negli anni successivi nascono altre scuole, dove viene stabilito che gli insegnamenti impartiti debbano essere fondati sulla matematica “pura” e “applicata”; in questo modo ai corsi di analisi matematica si alternano corsi di meccanica e geometria descrittiva, la nuova grande disciplina francese, nata per l'ovvio interesse strategico-militare. Con queste riforme politiche e sociali, la Francia riesce ad aggiudicarsi in tempi brevissimi l'egemonia nel campo della ricerca fisico-matematica. E non è affatto casuale che all'inizio dell'Ottocento i matematici più importanti si concentrino proprio nel territorio francese.

La nuova figura del matematico-professore sente il bisogno di sviluppare una nuova didattica matematica, che si possa fondare su un'organizzazione del sapere rigorosa e che sia in qualche modo condivisa dalla comunità scientifica. Inoltre, il dichiarato scopo “applicativo” della matematica, dovuto proprio alla natura delle scuole politecniche, fa sì che l'analisi, in questo momento storico, diventi centrale nelle questioni dei matematici. Questi due fatti con-

catenati ridanno nuovo slancio a una disciplina che nel corso degli anni aveva progressivamente perso centralità. Riportiamo infatti quale fosse il sentimento del tempo, che aleggiava intorno alla pratica matematica. Il clima era tutt'altro che ottimistico, si aveva come l'impressione che il più fosse già stato scoperto e che non rimanesse altro se non perfezionare qualche cosa rimasta ancora imprecisa. Lo testimoniano i resoconti scritti prima da Lagrange, in una lettera a D'Alembert nel settembre del 1781, e successivamente da J. B. Delambre, in un discorso letto all'Istituto di Francia nel 1810:

“Mi sembra anche che la miniera [della matematica] sia già veramente profonda e, a meno che qualcuno non scopra nuovi filoni, si renderà necessario prima o poi abbandonarla. Fisica e chimica offrono ora più brillanti ricchezze e più facile sfruttamento; inoltre l'inclinazione del nostro secolo sembra essere interamente in questa direzione e non è impossibile che il seggio di geometria all'Accademia diventerà un giorno ciò che è oggi la cattedra di arabo all'università.”¹

“Sarebbe difficile e avventato analizzare le chances che il futuro riserva allo sviluppo della matematica; in pressoché tutte le sue branche si è bloccati da difficoltà insormontabili; perfezionare i dettagli sembra essere la sola cosa che resta da fare. Tutte queste difficoltà sembrano annunciare che la potenza della nostra analisi è praticamente esaurita.”²

Questi due passi descrivono il pensiero scoraggiante che andava per la maggiore: molti dei principali studiosi sentivano di aver incontrato un muro

¹Lagrange, *Oeuvres*, Vol.13, p.368, citato in Bottazzini, *Il calcolo sublime* [3], p.55

²Delambre, *Rapport Historique sur le progres des science mathématiques*, 1810, citato in Bottazzini, *Il calcolo sublime* [3], p.55

insormontabile e per questo suggerivano ai loro stessi studenti di non tentare nemmeno di progredire. Tuttavia, come fortunatamente spesso accade, non tutti la pensano allo stesso modo: tra i dissidenti troviamo il matematico Nicolas de Condorcet (1743-1794), che fortemente ispirato dai lavori di geometria descrittiva proposti da Monge, sosteneva:

“Siamo lontani dall’aver esaurito le applicazioni dell’analisi alla geometria, e invece di credere che ci stiamo per avvicinare alla fine, al punto in cui queste scienze dovranno arrestarsi perché avranno raggiunto il limite delle forze del pensiero umano, dobbiamo piuttosto riconoscere di essere solo al primo passo di un immenso sviluppo. Le nuove applicazioni, indipendentemente dall’utilità che esse possono avere in sé, sono necessarie per il progresso dell’analisi in generale; esse danno luogo a questioni impensate e richiedono di creare nuovi metodi delle scienze più astratte. Ma queste sono dovute a necessità di carattere più elevato, la necessità di scoprire nuove verità o di conoscere meglio le leggi della natura.”³

La posizione di Condorcet si rivela lungimirante: l’Ottocento risulta caratterizzato da un eccezionale sviluppo della matematica. Condorcet ha inoltre il merito di aver individuato il motivo del progresso: l’applicazione della matematica nello studio dei problemi fisici. Già verso la fine del secolo precedente, molti studiosi si erano dedicati a risolvere problemi derivanti dal mondo naturale e uno degli interrogativi che più occupa il tempo degli scienziati è la formulazione di una teoria sulla propagazione del calore. Tra i tanti che si sono cimentati in questo studio, fra cui Laplace e Lavoisier, il lavoro che desta maggiore curiosità è quello del fisico-matematico Joseph Fourier, ricordato essenzialmente per l’approccio del tutto originale. Le ricerche di

³Kline, *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*, pp. 623-624, citato in Bottazzini, *Il calcolo sublime* [3], p.56

Fourier vengono riprese dai matematici successivi non tanto per lo studio della propagazione del calore in sé, quanto per gli strumenti analitici che esse introducono. Quelle che oggi chiamiamo serie di Fourier diventano infatti una fonte decisiva di problemi, discussioni e nuovi risultati, mettendo in crisi convinzioni allora ritenute naturali.

Nel caso preso in esame in questa tesi, l'opera di Fourier offre il primo passaggio, a livello temporale, verso la scoperta della convergenza uniforme. Gli storici della matematica, tuttavia, fanno risalire la “causa” al teorema della continuità, sviluppato da Cauchy nel *Cours d'Analyse*. Egli presenta una dimostrazione errata, dovuta esattamente alla mancata conoscenza della convergenza uniforme. Nel resto del capitolo riporteremo i passi del *Cours d'Analyse* che portano a questo risultato, analizzando il modo di fare matematica di Cauchy.

1.2 Il prologo del *Cours d'Analyse*

Augustin-Louis Cauchy (1789-1857) è uno dei primi brillanti studenti formati nelle aule delle nuove scuole francesi. Ne frequenta diverse, tra cui la prestigiosa *École Polytechnique*, di cui diventa professore nel 1815, all'età di 26 anni. Viene persuaso dai matematici Lagrange e Laplace a concentrare i propri studi verso la matematica pura e rielabora un corso di Analisi. Sempre dietro consiglio di colleghi illustri, tra cui Poisson e lo stesso Laplace, e “per agevolare lo studio dei suoi alunni”, nel 1821 si convince di raccogliere le proprie lezioni all'interno di un testo organico, intitolato *Cours d'Analyse de l'École Royale Polytechnique*. Il libro conosce una rapida espansione, consacrando la figura di Cauchy come messaggero della “nuova” matematica e il *Cours d'Analyse* ne diventa il manifesto. Il matematico, nell'introduzione, presenta lo scritto nella seguente maniera:

“Quanto ai metodi, ho cercato di dar loro tutto il rigore che si esige in geometria in modo da ricorrere mai ad argomenti tratti dalla generalità dell'algebra. Argomenti di questo tipo, benché ammessi assai comunemente soprattutto nel pas-

saggio dalle serie convergenti a quelle divergenti e dalle quantità reali alle espressioni immaginarie, non possono essere considerati, mi sembra, che come delle induzioni adatte a far talvolta presentare la verità, ma che poco s'accordano con l'esattezza tanto vantata delle scienze matematiche. Bisogna inoltre osservare che essi tendono a far attribuire alle formule algebriche un'estensione indefinita, mentre in realtà la maggior parte di queste formule sussiste unicamente sotto certe condizioni e per certi valori in esse contenute. Determinando queste condizioni e questi valori e fissando in modo preciso il senso delle notazioni di cui mi servo, faccio sparire ogni incertezza. (...)

È vero che, per mantenermi costantemente fedele a questi principi, mi sono visto costretto ad ammettere diverse proposizioni che sembreranno forse un po' dure a prima vista.”⁴

⁴Cauchy, *Cours d'Analyse* [4], Introduzione, pp.1-4

INTRODUCTION.

QUELQUES personnes, qui ont bien voulu guider mes premiers pas dans la carrière des sciences, et parmi lesquelles je citerai avec reconnaissance MM. *Laplace* et *Poisson*, ayant témoigné le désir de me voir publier le Cours d'analyse de l'École royale polytechnique, je me suis décidé à mettre ce Cours par écrit pour la plus grande utilité des élèves. J'en offre ici la première partie connue sous le nom d'*Analyse algébrique*, et dans laquelle je traite successivement des diverses espèces de fonc-

a

Figura 1: Introduzione Cours d'Analyse, p.1

tions réelles ou imaginaires, des séries convergentes ou divergentes, de la résolution des équations, et de la décomposition des fractions rationnelles. En parlant de la continuité des fonctions, je n'ai pu me dispenser de faire connaître les propriétés principales des quantités infiniment petites, propriétés qui servent de base au calcul infinitésimal. Enfin, dans les préliminaires et dans quelques notes placées à la fin du volume, j'ai présenté des développemens qui peuvent être utiles soit aux Professeurs et aux Éléves des Colléges royaux, soit à ceux qui veulent faire une étude spéciale de l'analyse.

Quant aux méthodes, j'ai cherché à leur donner toute la rigueur qu'on exige en géométrie, de manière à ne jamais recourir aux raisons tirées de la généralité de l'algèbre. Les raisons de cette espèce, quoique assez communément admises, sur-tout

Figura 2: Introduzione Cours d'Analyse, p.2

dans le passage des séries convergentes aux séries divergentes , et des quantités réelles aux expressions imaginaires, ne peuvent être considérées, ce me semble, que comme des inductions propres à faire pressentir quelquefois la vérité, mais qui s'accordent peu avec l'exactitude si vantée des sciences mathématiques. On doit même observer qu'elles tendent à faire attribuer aux formules algébriques une étendue indéfinie, tandis que, dans la réalité, la plupart de ces formules subsistent uniquement sous certaines conditions, et pour certaines valeurs des quantités qu'elles renferment. En déterminant ces conditions et ces valeurs, et en fixant d'une manière précise le sens des notations dont je me sers, je fais disparaître toute incertitude ; et alors les différentes formules ne présentent plus que des relations entre les quantités réelles, relations qu'il est toujours facile de vérifier

a

par la substitution des nombres aux quantités elles-mêmes. Il est vrai que, pour rester constamment fidèle à ces principes, je me suis vu forcé d'admettre plusieurs propositions qui paraîtront peut-être un peu dures au premier abord. Par exemple, j'énonce dans le chapitre VI, qu'une *série divergente n'a pas de somme*; dans le chapitre VII, qu'une *équation imaginaire est seulement la représentation symbolique de deux équations entre quantités réelles*; dans le chapitre IX, que, *si des constantes ou des variables comprises dans une fonction, après avoir été supposées réelles, deviennent imaginaires, la notation à l'aide de laquelle la fonction se trouvait exprimée, ne peut être conservée dans le calcul qu'en vertu d'une convention nouvelle propre à fixer le sens de cette notation dans la dernière hypothèse*; &c. Mais ceux qui liront mon ouvrage reconnaîtront,

Figura 4: Introduzione Cours d'Analyse, p.4

Tra le prime proposizioni “un po’ dure” riportate, si trova quella che afferma che una serie divergente non ha somma. Così come al rigore, Cauchy riserva molta importanza ai fondamenti: contrariamente a ciò che si era soliti fare, lui si oppone all’idea di basare l’esattezza dell’analisi su delle costruzioni algebriche senza preoccuparsi di questioni di convergenza. In questo suo modo di ragionare le serie infinite giocano un ruolo decisivo e il rigore nel trattarle deve essere massimo. Cauchy si giustifica in questo modo:

“Così, prima di effettuare la somma di una qualsiasi serie, ho dovuto esaminare in quali casi le serie possono essere sommate, o, in altri termini, quali sono le condizioni per la loro convergenza; e, a questo riguardo, ho stabilito delle regole generali che mi sembrano meritare qualche attenzione.”⁵

Cauchy ritiene di poter discutere di serie infinite e della loro convergenza solo dopo aver definito il concetto di limite, su cui si fondano le sue successive definizioni di funzione continua, convergenza di serie e somma, fino alle nozioni di derivata e integrale. La teoria dei limiti poggia sulla seguente definizione:

“Allorché i valori successivamente assunti da una stessa variabile si avvicinano indefinitamente a un valore fissato, sì da differirne alla fine tanto poco quanto si vorrà, quest’ultima quantità è chiamata il limite di tutte le altre.”⁶

Questo passaggio dell’opera è fondamentale, perché viene isolato il concetto di limite, che fino a quel momento era certamente chiaro nella testa dei matematici, ma mai era stato esplicitato e posto a fondamento del calcolo infinitesimale in un’opera così letta e divulgata. Precedentemente era sul termine infinitesimo che si reggeva il centro delle trattazioni di questi argomenti,

⁵Cauchy, *Cours d’Analyse* [4], Introduzione, p.5

⁶Cauchy, *Cours d’Analyse* [4], Preliminari, p.4, citato in Bottazzini, *Il calcolo sublime* [3], p.99

e Cauchy apporta questa decisiva modifica, reinterpretandone il significato attraverso il concetto di limite:

“allorché i successivi valori numerici di una stessa variabile decrescono indefinitamente in modo da diventare minori di ogni numero dato, questa variabile diventa quello che si chiama un infinitesimo o una quantità infinitesima. Una variabile di questo tipo ha zero per limite.”⁷

1.3 Il Capitolo VI del Cours d'Analyse

L'inizio del Capitolo I si apre con la definizione di funzione di una o più variabili reali e successivamente, nella seconda sezione del primo capitolo, mostra cosa intenda per continuità di una funzione:

“Allorché delle quantità variabili sono legate tra loro in modo tale che, dato il valore di una, si possa ricavare il valore di tutte le altre, [queste], espresse per mezzo della variabile indipendente, sono chiamate funzioni di questa variabile.”⁸

“Sia $f(x)$ una funzione della variabile x , e supponiamo che, per ogni valore intermedio di x entro due limiti dati, la funzione ammetta sempre un valore finito. Se, partendo da un valore di x compreso entro questi due limiti, si attribuisce alla variabile x un incremento infinitesimo α , la funzione stessa riceverà per incremento la differenza

$$f(x + \alpha) - f(x)$$

che dipenderà al tempo stesso dalla nuova variabile α e dal valore di x . Ciò posto, la funzione

⁷Cauchy, *Cours d'Analyse* [4], Preliminari, p.4

⁸Cauchy, *Cours d'Analyse* [4], Capitolo 1, p.19

$f(x)$ sarà, entro i due limiti assegnati alla variabile x , funzione continua di questa variabile se, per ogni valore di x compreso tra questi due limiti, il valore numerico della differenza

$$f(x + \alpha) - f(x)$$

decrecerà in maniera indefinita insieme a quello di α ”⁹

Cauchy aggiunge immediatamente una definizione di continuità in termini di infinitesimi ancora più esplicita:

“La funzione $f(x)$ resterà continua rispetto a x tra i due limiti dati, se, entro questi limiti, un incremento infinitesimo della variabile produce sempre un incremento infinitesimo della funzione stessa”¹⁰

Volendo adottare un linguaggio più moderno, Cauchy sta affermando che la differenza $|f(x + \alpha) - f(x)|$ deve tendere a zero, quando α tende a zero, affinché una funzione sia continua. La definizione, inoltre, è pienamente svincolata dalla sua esprimibilità; non deve possedere una certa forma e non è nemmeno necessario disegnarne il grafico per dedurre la continuità. Chiara ed esplicita la concezione secondo cui la continuità di una funzione non sia globale, ma vada studiata “entro due limiti dati”. Si deve notare come siano ammesse anche funzioni con punti di non derivabilità (sebbene Cauchy non lo espliciti mai, né porti esempi di funzioni continue e con punti angolosi), dal momento che resiste ancora la convinzione dogmatica che ogni funzione continua dovesse essere in qualche modo liscia e derivabile ovunque, se non in qualche punto particolare. Infatti, dietro a questa definizione si nasconde ancora il principio intuitivo (e visivo) secondo cui, se per disegnare il grafico

⁹Cauchy, *Cours d'Analyse* [4], Capitolo 1, p.34

¹⁰Cauchy, *Cours d'Analyse* [4], Capitolo 1, p.35

di una funzione non si solleva mai la penna dal foglio, allora la funzione deve essere continua.

Il Cours d'Analyse prosegue, nei capitoli successivi, in uno studio analitico dei valori singolari delle funzioni in alcuni casi particolari, che porta così il lettore a osservare i limiti per $x = \pm\infty$ e $x = 0$ e a individuare l'esistenza delle cosiddette forme indeterminate:

$$\frac{0}{0}, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad \infty - \infty, \quad 0 \cdot \infty, \quad 0^0, \quad \infty^0, \quad 1^\infty.$$

Cauchy dedica buona parte dei capitoli seguenti all'illustrazione di teoremi inerenti alla risoluzione di queste forme e non solo. Nel Capitolo VI, che tratta di serie convergenti e divergenti, vengono esposti quelli che con il tempo sono diventati i classici criteri di convergenza studiati oggi nei corsi d'analisi, dal criterio del rapporto al criterio della radice. Ma in questo capitolo, posto ancora prima di questi criteri, si trova un teorema, che ora sappiamo essere falso. La congettura erronea, parafrasata, può essere così enunciata: "la somma di una qualsiasi serie convergente di funzioni continue è a sua volta continua". Questo teorema, ribattezzato teorema della continuità, è il primo esposto nel Capitolo VI, nell'introduzione *Considerazioni generali sulle serie*. Il capitolo inizia con la descrizione delle serie:

"Si chiama serie una successione indefinita di quantità

$$u_0, u_1, u_2, u_3, \dots \quad (1.1)$$

che derivano le une dalle altre secondo una legge determinata. Queste quantità stesse sono i differenti termini della serie considerata. Sia

$$s_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_{n-1}$$

la somma dei primi n termini, dove n designa un numero intero qualunque. Se, per valori di n

tutti crescenti, la somma s_n si avvicina indefinitamente a un certo limite s , la serie sarà detta convergente, e il limite in questione si chiamerà somma della serie. Al contrario, se, mentre n cresce indefinitamente, la somma s_n non si avvicina ad alcun limite fisso, la serie sarà divergente e non avrà somma. Nell'uno e nell'altro caso, il termine che corrisponde all'indice n , cioè u_n , sarà ciò che si chiama il termine generale. Basta che si dia questo termine generale in funzione dell'indice n , affinché la serie sia completamente determinata.”¹¹

Appena dopo questa introduzione, Cauchy decide di portare come esempio di convergenza il caso che ritiene il più semplice: la serie geometrica. Essa ricorreva in maniera frequente nei lavori matematici e certamente era un buon primo esempio.

“Una delle serie più semplici è la progressione geometrica

$$1, x, x^2, x^3, \dots$$

la quale ha per termine generale x^n , vale a dire la potenza n della quantità x . Se di questa serie si sommano i primi n termini, si troverà

$$1 + x + x^2 + \dots + x^{n-1} = \frac{1}{1-x} - \frac{x^n}{1-x}$$

e, poiché per valori crescenti di n il valore numerico di $\frac{x^n}{1-x}$ converge verso il limite 0 o cresce oltre ogni limite, a seconda che si supponga il valore numerico di x inferiore o superiore all'unità, si concluderà che, nella prima ipotesi, la

¹¹Cauchy, *Cours d'Analyse* [4], Capitolo VI, p.123

progressione

$$1, x, x^2, x^3, \dots$$

è una serie convergente che ha per somma $\frac{1}{1-x}$, mentre nella seconda ipotesi la medesima progressione è una serie divergente che non ha più una somma.”¹²

Questo esempio è senz’altro interessante perché Cauchy ha in mente il valore assoluto, che egli chiama il valore numerico, senza però averlo mai definito. La sua introduzione, per come lo conosciamo oggi, arriverà circa 40 anni dopo con Weierstrass.

“Secondo i principi stabiliti sopra, affinché la serie

$$u_0, \quad u_1, \quad u_2, \quad \dots, \quad u_n, \quad u_{n+1}, \dots$$

sia convergente, è necessario e sufficiente che valori crescenti di n facciano convergere indefinitamente la somma

$$s_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_{n-1}$$

verso un limite fisso s ; in altri termini, è necessario e sufficiente che, per valori infinitamente grandi del numero n , le somme

$$s_n, \quad s_{n+1}, \quad s_{n+2}, \dots$$

differiscano dal limite s , e di conseguenza tra di loro, per quantità infinitamente piccole. Le differenze tra la prima somma s_n e le successive sono rispettivamente determinate dalle equazioni:

¹²Cauchy, *Cours d'Analyse* [4], Capitolo VI, p.124

$$\begin{aligned}
s_{n+1} - s_n &= u_n, \\
s_{n+2} - s_n &= u_n + u_{n+1}, \\
s_{n+3} - s_n &= u_n + u_{n+1} + u_{n+2}, \\
&\dots
\end{aligned}$$

Dunque, affinché la serie (1.1) sia convergente, è prima di tutto necessario che il termine generale u_n decresca indefinitamente, quando n aumenta; ma questa condizione non è sufficiente, ed è anche necessario che, per valori crescenti di n , le somme delle differenze

$$\begin{aligned}
&u_n + u_{n+1}, \\
&u_n + u_{n+1} + u_{n+2}, \\
&\dots
\end{aligned}$$

che sarebbe come dire che, le somme delle quantità

$$u_n, \quad u_{n+1}, \quad u_{n+2},$$

prese, a partire dalla prima, in tal numero che si vorrà, finiscano per ottenere costantemente dei valori numerici inferiori a ogni limite assegnabile. *Reciprocamente*, quando queste diverse condizioni sono soddisfatte, la convergenza della serie è assicurata.”¹³

In queste ultime righe viene introdotto quello che oggi è noto come il criterio di Cauchy, teorema fondamentale non solo per le serie numeriche. L’avverbio “reciprocamente” riveste un ruolo chiave: in questo passaggio Cauchy esplicita senza alcun dubbio come la condizione sia necessaria e sufficiente.

¹³Cauchy, *Cours d'Analyse* [4], Capitolo VI, pp.125-126

E se Cauchy non mostra difficoltà nel provare la condizione necessaria analiticamente, allo stesso tempo per la condizione sufficiente rimanda il tutto a una questione geometrica-intuitiva basata sui concetti di continuità della retta reale e di infinitesimo, definito come qualcosa di “inferiore a ogni limite assegnabile”. Si è visto successivamente che, per dare una dimostrazione analitica e rigorosa della convergenza delle successioni che soddisfano il criterio di Cauchy, occorrerebbe la costruzione preliminare dei numeri reali. Ma per Cauchy, ai tempi, ciò non risultava problematico, dal momento che lui stesso, nelle prime pagine dell’opera dopo aver introdotto il concetto di limite, descrive i numeri reali come “limiti delle frazioni che ne forniscono valori sempre più approssimati”. Egli vedeva la retta reale come una linea intuitivamente continua e non sentiva il bisogno di descriverla tramite assiomi, come avrebbero fatto Dedekind o Cantor cinquant’anni dopo.

A questo punto, adottando il criterio appena esposto, dopo aver descritto il caso della serie geometrica quando si considera $|x| = 1$, Cauchy riporta altri studi di serie (che citiamo soltanto): il primo è la serie armonica, che egli mostra essere divergente; il secondo è la serie $\sum \frac{1}{n!}$ che, al contrario, converge. Si servirà di questa serie per definire il numero di Nepero e . L’esposizione di questi esempi fa da preambolo all’argomentazione dalla quale Cauchy deduce il teorema della continuità. Riportiamo ora l’intero passaggio:

“La serie

$$u_0, u_1, u_2, u_3, \dots$$

essendo supposta convergente, se si indica la sua somma con s , e con s_n la somma dei suoi primi n termini, si troverà

$$\begin{aligned} s &= u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_{n-1} + u_n + u_{n+1} + \dots \\ &= s_n + u_n + u_{n+1} + \dots \end{aligned}$$

Da quest’ultima equazione risulta che le quantità

$$u_n, u_{n+1}, u_{n+2}, \dots$$

formeranno una nuova serie convergente la cui somma sarà equivalente a $s - s_n$. Se si rappresenta questa stessa somma con r_n , si avrà

$$s = s_n + r_n$$

e r_n sarà ciò che si chiama il resto della serie (1.1) a partire dal n -esimo termine. Quando, contenendo i termini della serie (1.1) una medesima variabile x , questa serie è convergente, e i suoi differenti termini [sono] funzioni continue di x , nell'intorno di un valore particolare attribuito a questa variabile;

$$s_n, \quad r_n, \quad s$$

sono ancora tre funzioni della variabile x , di cui la prima è evidentemente continua rispetto a x nell'intorno del valore particolare di cui si tratta. Detto questo, consideriamo gli incrementi che ricevono queste tre funzioni quando aumentiamo x di una quantità infinitamente piccola α .

L'incremento di s_n sarà, per tutti i valori possibili di n , una quantità infinitamente piccola; e quello di r_n diventerà insensibile nello stesso tempo di r_n , se si attribuisce a n un valore molto considerevole. Di conseguenza, l'incremento della funzione s non potrà essere che una quantità infinitamente piccola. Da questa osservazione si deduce immediatamente il teorema seguente.

Teorema. *Quando i diversi termini della serie sono funzioni di una medesima variabile x , continue rispetto a questa variabile nell'intorno di un*

valore particolare per il quale la serie è convergente, la somma s della serie è anche, nell'intorno di questo valore particolare, funzione continua di x . ”¹⁴

¹⁴Cauchy, *Cours d'Analyse* [4], Capitolo VI, pp. 130-132

est convergente, la somme de cette série est représentée par

$$u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \&c. \dots$$

En vertu de cette convention, la valeur du nombre e se trouvera déterminée par l'équation

$$(6) \quad e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4} + \&c. \dots;$$

et, si l'on considère la progression géométrique

$$1, x, x^2, x^3, \&c. \dots,$$

on aura, pour des valeurs numériques de x inférieures à l'unité,

$$(7) \quad 1 + x + x^2 + x^3 + \&c. \dots = \frac{1}{1-x}.$$

La série

$$u_0, u_1, u_2, u_3, \&c. \dots$$

étant supposée convergente, si l'on désigne sa somme par s , et par s_n la somme de ses n premiers termes, on trouvera

$$\begin{aligned} s &= u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_{n-1} + u_n + u_{n+1} + \&c. \dots \\ &= s_n + u_n + u_{n+1} + \&c. \dots, \end{aligned}$$

et par suite

$$s - s_n = u_n + u_{n+1} + \&c. \dots$$

De cette dernière équation il résulte que les quantités

Figura 5: Inizio dimostrazione del teorema della continuità, *Cours d'Analyse*, p.130

$$u_n, u_{n+1}, u_{n+2}, \text{ \&c. . . . }$$

formeront une nouvelle série convergente dont la somme sera équivalente à $s - s_n$. Si l'on représente cette même somme par r_n , on aura

$$s = s_n + r_n;$$

et r_n sera ce qu'on appelle le *reste* de la série (1) à partir du n^{me} terme.

Lorsque, les termes de la série (1) renfermant une même variable x , cette série est convergente, et ses différens termes fonctions continues de x , dans le voisinage d'une valeur particulière attribuée à cette variable ;

$$s_n, r_n \text{ et } s$$

sont encore trois fonctions de la variable x , dont la première est évidemment continue par rapport à x dans le voisinage de la valeur particulière dont il s'agit. Cela posé, considérons les accroissemens que reçoivent ces trois fonctions, lorsqu'on fait croître x d'une quantité infiniment petite α . L'accroissement de s_n sera, pour toutes les valeurs possibles de n , une quantité infiniment petite; et celui de r_n deviendra insensible en même temps que r_n , si l'on attribue à n une valeur très-considérable. Par suite, l'accroissement de la fonction s ne pourra être qu'une quantité infiniment petite. De cette remarque on déduit immédiatement la proposition suivante.

1.^{er} THÉOREME. *Lorsque les différens termes de la série (1) sont des fonctions d'une même variable x ,*

I.

Figura 6: Conclusione dimostrazione del teorema della continuità e inizio dell'enunciato, *Cours d'Analyse*, p.131

continues par rapport à cette variable dans le voisinage d'une valeur particulière pour laquelle la série est convergente, la somme s de la série est aussi, dans le voisinage de cette valeur particulière, fonction continue de x .

En vertu de ce théorème, la somme de la série (2) devra rester fonction continue de la variable x , entre les limites $x = -1$, $x = 1$; ce qu'on peut vérifier à l'inspection de la valeur de s donnée par l'équation

$$s = \frac{1}{1-x}.$$

§. 2.^e Des Séries dont tous les termes sont positifs.

Lorsque la série

$$(1) \quad u_0, u_1, u_2, \dots, u_n, \text{ \&c. } \dots$$

a tous ses termes positifs, on peut ordinairement décider si elle est convergente ou divergente, à l'aide du théorème suivant.

1.^{er} THÉORÈME. *Cherchez la limite ou les limites vers lesquelles converge, tandis que n croît indéfiniment, l'expression $(u_n)^{\frac{1}{n}}$; et désignez par k la plus grande de ces limites, ou, en d'autres termes, la limite des plus grandes valeurs de l'expression dont il s'agit. La série (1) sera convergente, si l'on a $k < 1$, et divergente, si l'on a $k > 1$.*

DÉMONSTRATION. Supposons d'abord $k < 1$, et choisissons à volonté entre les deux nombres 1 et k un troisième nombre U , en sorte qu'on ait

1.4 Le criticità del teorema

Prima di illustrare i punti critici, è possibile supporre che Cauchy, nel momento in cui sviluppò il teorema, abbia tenuto in considerazione solo le serie di potenze. In quel caso, il teorema della continuità risulterebbe vero, tuttavia questo risultato viene enunciato per serie qualsiasi e utilizzato indistintamente sulle serie¹⁵. Oggi sappiamo, essendo il teorema falso in generale, che la dimostrazione deve essere incompleta. I motivi dell'errore sono diversi, ma certamente uno è dovuto al fatto che, ai tempi, si considerava la convergenza puntuale come l'unica possibile; né Cauchy né altri prima di lui sono stati in grado di superare questa concezione. A quanto ne sappiamo, nessuno era a conoscenza della convergenza uniforme. Il punto in cui la dimostrazione di Cauchy risulta incompleta è l'ultima parte: “consideriamo gli incrementi che ricevono queste tre funzioni quando aumentiamo x di una quantità infinitamente piccola α . L'incremento di s_n sarà, per tutti i valori possibili di n , una quantità infinitamente piccola; e quello di r_n diventerà insensibile nello stesso tempo di r_n , se si attribuisce a n un valore molto considerevole.” Cauchy dà per scontato che se il resto $r_n(x)$ va a zero, allora anche la sua variazione (l'incremento) debba andare a zero in modo controllato per ogni x . Invece, in assenza di convergenza uniforme, l'incremento del resto potrebbe rimanere “grande”, creando un salto nella funzione limite, anche se il resto stesso sta diventando piccolo punto per punto. In altre parole, si sta sostenendo che, se si sceglie un n abbastanza grande, il resto della serie diventa quasi zero contemporaneamente per ogni x nell'intervallo. E ciò non è vero in una serie che converge puntualmente ma non uniformemente: per quanto si scelga un n grande, ci sarà qualche valore di x , ad esempio molto vicino a un punto di salto, per il quale il resto r_n è ancora grande. Le possibili spiegazioni del fatto che ancora nessuno avesse pensato alla convergenza uniforme vanno ricercate in alcune consuetudini dell'epoca. Le serie di cui si studiava la convergenza erano perlopiù serie di potenze. Nel caso delle serie di potenze, la convergenza puntuale all'interno dell'intervallo

¹⁵Nello stesso Cours d'Analyse, esiste un intero capitolo dedicato alle serie di potenze (Capitolo IX), ma questo risultato viene esposto molto prima, all'inizio del Capitolo VI, dedicato a considerazioni generali sulle serie.

di convergenza si accompagna a una convergenza uniforme su ogni sottointervallo chiuso contenuto al suo interno. Un'altra spiegazione plausibile è l'uso sistematico di infinitesimi nella dimostrazione, che non permetteva di notare la reale dipendenza funzionale del valore molto grande di n cercato. Un ulteriore motivo è dato dall'automatismo, assolutamente naturale, di appoggiarsi alla visione geometrica del problema. Se si pensa ai grafici delle curve $y = s_n(x)$, al crescere di n , questi si avvicinano sempre di più a quello di $f(x)$, senza necessariamente coincidere per n grande. Piuttosto è vero che, fissato un particolare valore x dell'intervallo, per ogni $\epsilon > 0$, esiste un intero n (dipendente da x !) tale che $|s_n(x) - f(x)| < \epsilon$.

Consideriamo i seguenti esempi, proposti entrambi da Horatio Scott Carslaw nel libro *Introduction to the theory of Fourier series and integrals* del 1921.

Esempio 1.1. Consideriamo la serie $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$, dove:

$$u_n(x) = \frac{1}{(n-1)x+1} - \frac{1}{nx+1}, \quad x \geq 0$$

le cui somme parziali, siccome si tratta di una serie telescopica, sono

$$s_n(x) = 1 - \frac{1}{nx+1}.$$

Allora, abbiamo:

- $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x) = 1$ quando $x > 0$,
- $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x) = 0$ quando $x = 0$,

cioè la curva somma $f(x)$ coincide con la semiretta $y = 1$ quando $x > 0$, mentre nell'origine è $y = 0$. La funzione è così discontinua nell'origine, però le somme parziali s_n sono tutte funzioni continue per ogni n finito.

Esempio 1.2. Consideriamo la serie $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$, dove

$$u_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2} - \frac{(n-1)x}{1+(n-1)^2x^2}.$$

Come nell'esempio precedente, nel calcolo della somma parziale, abbiamo dei termini che si cancellano a vicenda e l'unico che resta è il termine al passo

n , ossia

$$s_n = \frac{nx}{1 + n^2x^2}.$$

Si ha perciò che $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x) = 0$ per ogni x . La somma della serie è continua; tuttavia, si può notare come i grafici delle curve $y = s_n(x)$ differiscano dalla curva della somma $y = f(x)$ in un intorno di 0. Infatti, cerchiamo i massimi e i minimi delle somme parziali. Gli zeri della derivata prima della somma parziale n -esima sono dati da

$$s'_n(x) = \frac{n(1 - n^2x^2)}{(1 + n^2x^2)^2} = 0.$$

Otteniamo il minimo $s_n\left(-\frac{1}{n}\right) = -\frac{1}{2}$ e il massimo $s_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2}$. Entrambi, al crescere di n , hanno l'ascissa che si “schiaccia” sull'origine, mentre i valori delle ordinate rimangono costanti e diversi da 0. Visto che $r_n = -s_n$, si ha che il resto non converge a zero uniformemente. Quindi, sottolinea Carslaw, se dovessimo unicamente ragionare da un punto di vista di forme delle curve $y = s_n(x)$, ci si dovrebbe aspettare di vedere la parte dell'asse y , compresa tra $-\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{2}$, apparire come porzione della curva $y = f(x)$, ma ciò non accade.

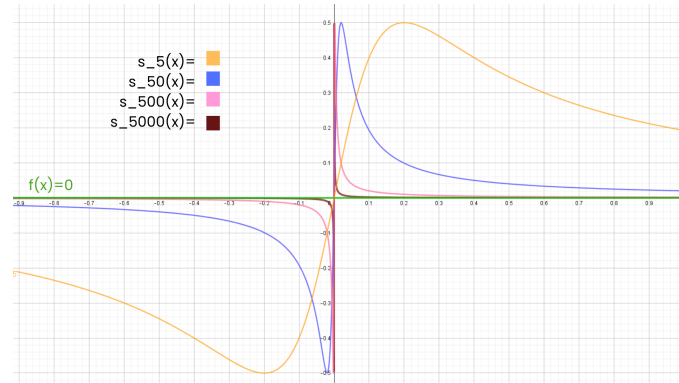


Figura 8: (Esempio 1.2). Nel grafico si vede il comportamento delle somme parziali rispettivamente quando $n = 5, n = 50, n = 500$ e $n = 5000$. Si vede come, al crescere di n , i due estremi delle somme parziali si concentrino sempre più vicino all'origine, mantenendo però altezza rispettivamente $1/2$ e $-1/2$. La successione converge puntualmente alla funzione nulla, ma non uniformemente.

Segnaliamo un ultimo problema derivante dalle operazioni con i doppi limiti. Supponiamo di considerare una serie convergente, la cui somma è la funzione $f(x)$ e le cui somme parziali sono $s_n(x)$. Ovviamente vale la relazione:

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x).$$

Supponiamo inoltre che, al tendere di x verso un x_0 , esista il limite di $f(x)$. Certamente vale che

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} [\lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x)].$$

Allo stesso modo, dalla definizione, abbiamo

$$f(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x_0).$$

Se come ipotesi assumiamo che le s_n siano tutte continue in x_0 , vale che

$$s_n(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} s_n(x).$$

Quindi, nel punto x_0 , si potrebbe pensare che sia vera l'uguaglianza:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} [\lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x)] = \lim_{n \rightarrow \infty} [\lim_{x \rightarrow x_0} s_n(x)] = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x_0) = f(x_0).$$

Ma ciò è corretto solo quando abbiamo l'ipotesi che sia possibile lo scambio del limite

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [\lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x)] = \lim_{n \rightarrow \infty} [\lim_{x \rightarrow x_0} s_n(x)].$$

Per chiarirlo vediamo un esempio:

Esempio 1.3. Consideriamo la serie $1 + \sum_{k=1}^{\infty} (x^k - x^{k-1})$; essa, al passo n ha come somma parziale $s_n = x^n$. Definiamo la somma della serie

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} x^n.$$

Consideriamo ora la funzione nell'intervallo $[0, 1]$ e vediamo cosa succede

scambiando rispettivamente l'ordine dei due limiti $n \rightarrow \infty$ e $x \rightarrow 1$. Si ha:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} [\lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x)] = 0 \neq 1 = \lim_{n \rightarrow \infty} [\lim_{x \rightarrow 1^-} s_n(x)].$$

Il primo a sollevare delle sottili, ma corrette, critiche a questo teorema è stato il giovane matematico norvegese Niels Abel, cinque anni dopo la pubblicazione del Cours d'Analyse, nel 1826. Nel capitolo seguente viene mostrato come Abel arrivi a formulare i suoi dubbi, servendosi di una serie trigonometrica introdotta da Fourier nella sua opera *Théorie analytique de la chaleur*.

2 Le eccezioni trovate da Abel grazie a Fourier

Prima di entrare nel vivo della storia legata alla nascita della convergenza uniforme, occorre fare un passo di lato per raccontare come si è sviluppato il lavoro di Fourier sulle serie trigonometriche. Queste serie sono le protagoniste del primo controesempio al teorema di Cauchy, apparso in una nota a piè di pagina in un lavoro di Abel del 1826. Le due sezioni successive, perciò, riguarderanno il processo dietro allo sviluppo delle serie trigonometriche e il loro utilizzo da parte di Fourier.

2.1 La propagazione del calore di Fourier

Come accennato nel primo capitolo, nei primi anni dell'Ottocento, insieme a tanti altri matematici, tra i quali Laplace, Lavoisier e Biot, Joseph Fourier (1768-1830) si dedica al tema della propagazione del calore. Il metodo di studio di Fourier è di natura prettamente analitica: una volta ricavati un certo numero di dati in maniera sperimentale, occorre tradurre in forma matematica le relazioni tra essi. Il punto di vista adottato da Fourier è espresso nella parte preliminare, che apre la sua *Théorie analytique de la chaleur*:

“Dopo un attento e prolungato studio sono giunto alla conclusione che, per determinare numericamente i vari movimenti del calore, è sufficiente sottomettere ogni sostanza a tre osservazioni fondamentali. Corpi diversi infatti non possiedono nella stessa misura la capacità di contenere calore, di riceverlo o trasmetterlo attraverso le loro superfici e neppure di condurlo all'interno della massa. Queste sono tre qualità specifiche che la nostra teoria individua chiaramente e ci permette di misurare.”¹⁶

¹⁶Fourier, *Théorie analytique de la chaleur* [6], Preliminari, p.16

La *Théorie Analytique* viene pubblicata per la prima volta nel 1822, quando Fourier è segretario dell'Accademia delle Scienze; l'opera, tuttavia, non è altro che un'estensione e completamento di una precedente memoria che Fourier presenta all'Istituto di Francia nel 1807, rimasta manoscritta e resa pubblica solo recentemente da Grattan-Guinness e Ravetz nel 1972.

“Ai tempi di Fourier, l'analisi matematica dei problemi fisici era largamente basata sulla costruzione di equazioni differenziali alle derivate parziali che rappresentavano i fenomeni da studiare insieme con le condizioni iniziali e al contorno. Fourier arricchì e modificò questa procedura in una quantità di modi che da allora in poi sono diventati importanti. In primo luogo, egli distinse fra due tipi di comportamento fisico: azione in un punto “interno” e azione sulla “superficie” del materiale considerato, e formulò per essi equazioni differenziali distinte. In secondo luogo, espresse queste equazioni in un sistema di coordinate appropriato alla simmetria geometrica e fisica del problema trattato (...). In terzo luogo, aggiunse alle equazioni relative ai punti interni e alla superficie l'esplicita richiesta di condizioni iniziali che dovevano permettere il calcolo delle costanti incognite e quindi dare una completa descrizione del fenomeno analizzato.”¹⁷

Nello sviluppo della teoria sulla propagazione del calore, Fourier arriva a utilizzare specifiche serie trigonometriche, ottenute attraverso un calcolo opportuno dei coefficienti (quelle che oggi noi chiamiamo serie di Fourier). Serie di questo tipo erano in qualche modo già conosciute nella comunità scientifica: si pensa che il primo modello fisico, analizzato anche con queste serie,

¹⁷Grattan-Guinness, *Joseph Fourier, 1768-1830* [7], p.7, citato in Bottazzini, *Il calcolo sublime* [3], p.59

sia stato il problema delle corde vibranti, per via di alcuni studi fatti da Daniel Bernoulli nel 1753. Tuttavia, per la maggior parte degli studiosi, questi oggetti rappresentavano poco più che delle curiosità. Si può affermare che è proprio grazie a Fourier se queste serie diventano centrali nelle discussioni matematiche.

Le sue ricerche in materia incominciano nei primi del 1800. Ne siamo a conoscenza grazie a una breve nota di Poisson, che descrive il primo approccio al problema della propagazione del calore tra corpi disgiunti da parte di Fourier. Lo studio è dedicato a un primo modello molto semplice, formato da soli due corpi di uguale massa e differenti temperature iniziali, che scambiano calore a distanza infinitamente piccola; questo modello viene poi esteso a n corpi. Fourier sembra essere in grado di risolvere questi problemi senza particolari difficoltà, sia quando gli n corpi sono disposti su una retta, sia quando sono disposti su una circonferenza; tuttavia non si interroga sul caso limite di far tendere n a infinito, al fine di ottenere la soluzione del corrispondente corpo continuo (in questo caso, una sbarra rettilinea o un anello). Fourier non sembra dunque interessato alla questione dei corpi continui, al punto da abbandonare del tutto la pratica. È soltanto un lavoro inviatogli da Biot nel 1805 a riaccendere in lui qualcosa. Questi aveva ottenuto alcuni risultati di natura sperimentale sulla propagazione del calore e aveva cercato di organizzarli in una teoria matematica. Ripercorrendo un'intuizione di Newton, secondo cui la perdita di calore di un corpo verso l'ambiente circostante è proporzionale alla differenza di temperatura tra essi, Biot introduce due nuovi coefficienti di conducibilità, uno relativo alla conduzione di calore interna al corpo e uno a quella dell'ambiente esterno. L'idea di Biot è circa la seguente: "Se prendo una sbarra e la riscaldo a una delle due estremità, ogni punto di essa riceve calore da ogni punto adiacente precedente e lo trasmette ai successivi adiacenti, perdendo intanto calore all'esterno". Biot sostiene che, in una situazione di equilibrio termico, il fenomeno si può rappresentare con un'equazione differenziale ordinaria del secondo ordine, ma quando la temperatura è variabile, tra l'interno e l'esterno vi è una differenza esprimibile con un'equazione alle derivate parziali. Il lavoro di Biot colpisce Fourier al punto da fargli riprendere i suoi lavori precedenti e da integrarli con que-

sti nuovi risultati. Contrariamente a Biot, che sosteneva di dover lavorare sui singoli punti della sbarra, Fourier ne considera una sezione trasversale di spessore dx , la cui temperatura è influenzata dalle sezioni ad essa adiacenti e dall'atmosfera in contatto con la superficie esterna della sezione. Sotto queste ipotesi, indicando con h e k rispettivamente i coefficienti di conducibilità esterna e interna, egli ottiene l'equazione omogenea della propagazione del calore, con v che rappresenta la temperatura e x la posizione sulla sbarra, con $x \in [0, \infty[$:

$$k \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - hv = 0,$$

la cui soluzione è:

$$v = M \cdot e^{-x\sqrt{h/k}} + N \cdot e^{x\sqrt{h/k}}$$

dove M e N sono costanti da ricavare. La natura fisica del problema (la propagazione del calore lungo una sbarra unidimensionale infinita, con una sorgente di calore posta in $x = 0$) impone che la temperatura v deve diventare infinitamente piccola al crescere di x e dunque Fourier ne deduce che $N = 0$. Per quanto riguarda M , se come condizione iniziale, nel punto $x = 0$, si sceglie $v = A$ con A valore noto, allora la soluzione diventa:

$$v = Ae^{-x\sqrt{h/k}}.$$

Ora il problema si sposta sulla questione (da Biot semplicemente posta, ma non realmente studiata) della variabilità della temperatura in dipendenza del tempo. Fourier deduce che:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = k \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}.$$

Questa è l'equazione che rappresenta il caso della sbarra infinita. Mentre per quanto riguarda la lamina bidimensionale, l'equazione della propagazione del calore risulta:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = k \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right),$$

e per un corpo solido:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = k \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right).$$

Questi risultati sono tutti presenti nel manoscritto di Fourier del 1807 e di seguito ne riportiamo la traduzione fatta da Grattan-Guinness:

“L’equazione generale della propagazione del calore nei corpi solidi è dunque la seguente:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{K}{CD} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) \quad (2.1)$$

dove v è una funzione delle coordinate x, y, z e del tempo t , K è la misura della conducibilità propria della sostanza di cui è formato il corpo, C è il calore specifico di questa sostanza e D la sua densità. Il senso proprio di questa equazione è che la funzione v deve soddisfare alla condizione generale che vi è espressa. Ma, indipendentemente da questa condizione generale per ogni caso, vi sono diverse altre condizioni particolari che dipendono dalla forma del corpo, dalla natura della superficie, dall’azione di una o più sorgenti di calore e da diverse altre circostanze che si possono presentare nei singoli casi.”¹⁸

2.2 Le serie trigonometriche in Fourier

Ora vogliamo cercare di capire il ruolo delle serie trigonometriche nei lavori di Fourier. Cercando di integrare l’equazione (2.1), che descrive la propagazione del calore nei corpi solidi, Fourier comincia a trattare il caso di una lamina rettangolare di lunghezza infinita. Fourier si interroga sul

¹⁸Grattan-Guinness, *Joseph Fourier, 1768-1830* [7], p.126, citato in Bottazzini, *Il calcolo sublime* [3], p.64

caso delle temperature stazionarie, ossia quando è presente una situazione di equilibrio termico ($\frac{\partial v}{\partial t} = 0$). Come condizioni al bordo, egli suppone che la temperatura sia 1 all'estremità iniziale della lamina e 0 sui due lati. Dunque passa a integrare l'equazione:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0.$$

Per farlo adotta il metodo della separazione delle variabili. Egli suppone che

$$v = \phi(x)\psi(y),$$

da cui, derivando e utilizzando l'equazione sopra, si ha

$$\phi''(x)\psi(y) + \phi(x)\psi''(y) = 0,$$

che equivale a dire

$$\frac{\phi''(x)}{\phi(x)} = -\frac{\psi''(y)}{\psi(y)}.$$

La memoria di Fourier continua:

“Si vede da qui che si può prendere per $\phi(x)$ una quantità della forma e^{mx} e per $\psi(y)$ la quantità $\cos(ny)$. Si supporrà dunque:

$$v = ae^{mx} \cos(ny),$$

e sostituendo nella proposta si avrà la condizione $m^2 = n^2$, che sarà sempre soddisfatta se si prende per valore di v la quantità $v = ae^{nx} \cos(ny)$, oppure $v = ae^{-nx} \cos(ny)$.”¹⁹

Dal momento che la prima condizione $v = ae^{nx} \cos(ny)$ deve essere scartata per motivi fisici relativi alla natura del problema, siccome v diverrebbe infinitamente grande al crescere di x , Fourier continua a sostenere:

¹⁹Grattan-Guinness, *Joseph Fourier, 1768-1830* [7], p.158 sg., citato in Bottazzini, *Il calcolo sublime* [3], p.65

“Si ridurrà dunque la soluzione precedente a
 $v = ae^{-nx} \cos(ny)$, essendo n un numero positivo
 qualunque e a una costante indeterminata. Si
 formerà ora la soluzione generale scrivendo:

$$v = a_1 e^{-n_1 x} \cos(n_1 y) + a_2 e^{-n_2 x} \cos(n_2 y) + \dots$$

»20

Nella soluzione ora appaiono una doppia infinità di costanti arbitrarie.

$$a_1, a_2, \dots a_k, \dots$$

$$n_1, n_2, \dots n_k, \dots$$

Per prima cosa, per determinare i coefficienti n_k , Fourier sfrutta la condizione iniziale che sui due lati della lamina la temperatura sia 0. Suppone di tagliare in due parti uguali la lamina longitudinalmente mediante l'asse x e richiede che la semiampiezza della lamina sia 1. In questo modo, per ogni valore di x , deve essere $v = 0$ quando $y = 1$ e quando $y = -1$. Ciò implica che le costanti $n_1, n_2, \dots n_k, \dots$ siano uguali ai valori in cui si annulla la funzione coseno. Più precisamente, i coefficienti (n_k) devono rispettivamente essere i multipli dispari di un quarto di circonferenza, cioè: $n_1 = \frac{\pi}{2}, n_2 = \frac{3\pi}{2}, n_3 = \frac{5\pi}{2} \dots$. Per quanto riguarda le costanti a_k , ora Fourier vuole sfruttare la condizione sull'estremità di partenza della lamina, cioè che $v = 1$ quando $x = 0$, qualunque sia y . Arriva così all'equazione:

$$1 = a_1 \cos\left(\frac{\pi}{2}y\right) + a_2 \cos\left(\frac{3\pi}{2}y\right) + a_3 \cos\left(\frac{5\pi}{2}y\right) + \dots$$

Ponendo $\frac{\pi}{2} \cdot y = u$, si può riscrivere:

$$1 = a_1 \cos(u) + a_2 \cos(3u) + a_3 \cos(5u) + \dots \quad (2.2)$$

con u compresa tra $-\frac{\pi}{2}$ e $\frac{\pi}{2}$.

²⁰Grattan-Guinness, *Joseph Fourier, 1768-1830* [7], p.158, citato in Bottazzini, *Il calcolo sublime* [3], p.65

Ora, per determinare definitivamente i coefficienti, Fourier considera la serie (2.2) e le sue derivate, ottenute derivando la serie termine a termine. Posto $u = 0$, ottiene le seguenti equazioni:

$$\begin{aligned} 1 &= a_1 + a_2 + a_3 + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \\ 0 &= a_1 + 3^2 a_2 + 5^2 a_3 + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} (2k-1)^2 a_k \\ 0 &= a_1 + 3^4 a_2 + 5^4 a_3 + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} (2k-1)^4 a_k \\ &\dots, \end{aligned}$$

Si viene a creare un sistema di infinite equazioni lineari in infinite incognite (i coefficienti a_k). Ecco come Fourier intende risolvere il sistema:

“L’indeterminata a_1 riceverà per esempio un valore per il caso di due incognite, un altro per il caso di tre incognite, e così di seguito per quattro ecc. Lo stesso accadrà per l’indeterminata a_2 , che riceverà tanti valori diversi quante saranno le volte in cui si sarà effettuata l’eliminazione. Ciascuna delle altre indeterminate è similmente suscettibile di un’infinità di valori diversi. Ora, il valore di una di queste incognite, nel caso in cui il loro numero è infinito, è il limite verso il quale tendono i valori differenti che essa assume attraverso eliminazioni successive.”²¹

In altre parole, occorre considerare le prime k equazioni in k incognite, dove k è un valore finito. Poi, per esempio, per determinare il valore del coefficiente a_1 , Fourier elimina, un passo alla volta, le incognite $a_2, \dots, a_k$, in modo da esplicitare un’equazione con solo l’incognita a_1 . Di fatto, il metodo da lui

²¹Grattan-Guinness, *Joseph Fourier, 1768-1830* [7], p.7, citato in Bottazzini, *Il calcolo sublime* [3], p.66

utilizzato coincide con l'eliminazione di Gauss, un procedimento già ampiamente conosciuto ma reso standard dal matematico tedesco proprio in quegli anni. Trovata così l'incognita a_1 , si continua nello stesso modo a ricavare i valori delle restanti $k - 1$ incognite. Per riprendere il caso infinito, Fourier effettua il passaggio al limite per k tendente a infinito, in modo da ottenere il corretto valore dei coefficienti. Utilizzando questo metodo, egli ottiene per il coefficiente a_1 l'espressione:

$$a_1 = \frac{3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 9 \dots}{2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 8 \dots}$$

che, come dimostrato da John Wallis nel 1655 per trovare un'approssimazione di π , risulta essere uguale a $\frac{4}{\pi}$. Vediamone un esempio pratico, supponendo di considerare solo le prime tre incognite a_1, a_2, a_3 , ossia prendendo $k = 3$. Sia il sistema di equazioni

$$\begin{cases} 1 = a_1 + a_2 + a_3 \\ 0 = a_1 + 3^2 a_2 + 5^2 a_3 \\ 0 = a_1 + 3^4 a_2 + 5^4 a_3 \end{cases}$$

Come anticipato prima, per esempio, proviamo a ricavare l'incognita a_1 effettuando adeguate eliminazioni di incognite, sommando e sottraendo multipli di righe tra di loro. Nel primo passo, per eliminare l'incognita a_3 dalla seconda e dalla terza equazione, le manipoliamo rispettivamente nel seguente modo:

$$R'_2 = R_2 - 5^2 \cdot R_1 \quad ; \quad R'_3 = R_3 - 5^4 \cdot R_1$$

al fine di ottenere il nuovo sistema:

$$\begin{cases} 1 = a_1 + a_2 + a_3 \\ -25 = -24a_1 - 16a_2 \\ -625 = -624a_1 - 544a_2 \end{cases}$$

Con lo stesso ragionamento, eliminiamo anche l'incognita a_2 dalla terza riga

nel seguente modo:

$$R'_3 = R_3 - \frac{544}{16} \cdot R_2$$

per ottenere il sistema finale

$$\begin{cases} 1 = a_1 + a_2 + a_3 \\ -25 = -24a_1 - 16a_2 \\ 225 = 192a_1 \end{cases}$$

da cui si ottiene il risultato di a_1

$$a_1 = \frac{225}{192} = \frac{3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6}$$

Ora, ritorniamo a quello che faceva Fourier. Dopo aver ottenuto il valore di a_1 , con procedura analoga calcola i valori dei successivi coefficienti, ottenendo le seguenti espressioni:

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{4}{\pi} \\ a_2 &= -\frac{4}{\pi} \cdot \frac{1}{3}, \\ a_3 &= \frac{4}{\pi} \cdot \frac{1}{5}, \\ a_4 &= -\frac{4}{\pi} \cdot \frac{1}{7} \\ &\dots \end{aligned}$$

Inserendo i valori all'interno dell'equazione, ottiene:

$$\frac{\pi}{4} = \cos u - \frac{1}{3} \cos 3u + \frac{1}{5} \cos 5u - \dots$$

Fourier, per commentare il risultato di questi calcoli, prova a dare una interpretazione geometrica e commenta:

“Siccome questi risultati sembrano discostarsi dalle ordinarie conseguenze del calcolo è necessario esaminarli con cura e interpretarli nel loro vero

significato. Si considererà l'equazione:

$$y = \cos u - \frac{1}{3} \cos 3u + \frac{1}{5} \cos 5u - \frac{1}{7} \cos 7u + \dots$$

come quella di una linea di cui u è l'ascissa e y l'ordinata. Si vede già dalle osservazioni precedenti che questa linea dovrà essere composta da parti separate $aa, bb, cc, dd, \dots$ di cui ciascuna parallela all'asse [delle ascisse] e uguale a una semicirconferenza. Queste parallele sono situate alternativamente al di sopra e al di sotto dell'asse a distanza 1 e sono unite dalle perpendicolari $ab, cb, cd, ed, \dots$ che fanno anch'esse parte della linea. Per farsi un'idea esatta della natura di questa linea, bisogna supporre che il numero dei termini della funzione

$$\cos u - \frac{1}{3} \cos 3u + \frac{1}{5} \cos 5u - \frac{1}{7} \cos 7u + \frac{1}{9} \cos 9u \dots$$

riceva in un primo tempo un valore determinato. In quest'ultimo caso, l'equazione:

$$y = \cos u - \frac{1}{3} \cos 3u + \frac{1}{5} \cos 5u - \frac{1}{7} \cos 7u + \frac{1}{9} \cos 9u \dots$$

appartiene a una linea curva che passa alternativamente al di sopra e al di sotto dell'asse, tagliandolo tutte le volte che l'ascissa u diventa uguale a $\pi/2, 3\pi/2, 5\pi/2, \dots$. Man mano che il numero dei termini m dell'equazione aumenta, tanto più la curva in questione tende a confondersi con la linea precedente, composta di rette parallele e rette perpendicolari, di modo che tale linea risulta proprio il limite delle curve che si descriverebbero

successivamente mediante le equazioni:

$$y = \cos u$$

$$y = \cos u - \frac{1}{3} \cos 3u$$

$$y = \cos u - \frac{1}{3} \cos 3u + \frac{1}{5} \cos 5u$$

$$y = \cos u - \frac{1}{3} \cos 3u + \frac{1}{5} \cos 5u - \frac{1}{7} \cos 7u + \frac{1}{9} \cos 9u$$

$\dots,$

»²²

Nelle sue note Fourier descrive soltanto, ma non disegna, un grafico esatto di come lui interpreta la serie trigonometrica. Ciò che egli presumibilmente intendeva è descritto nella Figura 9 posta di seguito. Nella Figura 10 sono invece rappresentati i grafici sovrapposti della funzione y , che rappresentano la serie trigonometrica quando possiede n termini.

²²Grattan-Guinness, *Joseph Fourier, 1768-1830* [7], p.158, citato in Bottazzini, *Il calcolo sublime* [3], p.67

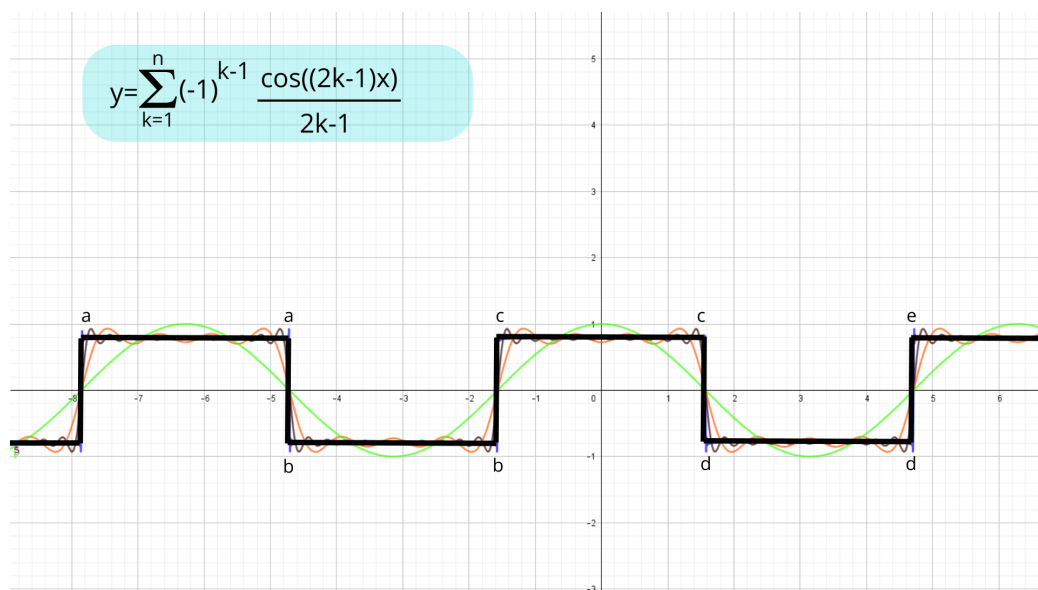


Figura 9: Grafico che aveva in mente Fourier

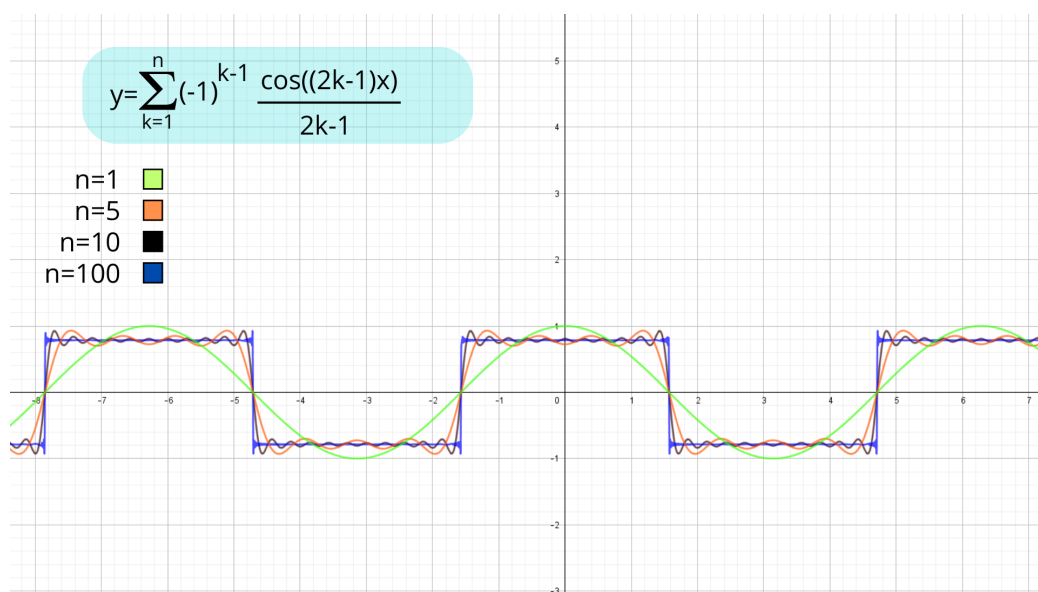


Figura 10: Grafico della serie trigonometrica al passo n

Dal punto di vista moderno, il grafico che Fourier aveva in mente non rappresenta una funzione. L'unico modo per renderla tale è immaginare la curva come discontinua, cioè non considerando i segmenti verticali $ab, bc, cd, de, \dots$, che invece Fourier ritiene espressamente parte integrante della curva. Qual è il motivo di ciò? Perché Fourier la ritiene ugualmente una funzione?

Nella sua idea, egli considera la y come funzione di u e di m , dove m indica il numero dei termini considerati nello sviluppo in serie. Dunque il grafico della figura è da intendersi come il limite, al crescere indefinito di m , di una successione di curve continue, ciascuna corrispondente a

$$y = \cos x - \frac{1}{3} \cos 3x + \dots (-1)^m \frac{1}{2m-1} \cos(2m-1)x$$

per ogni valore di m intero. Fourier conduce le stesse osservazioni in merito al grafico che descrive l'andamento della serie trigonometrica:

$$\sin x - \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{3} \sin 3x - \dots \quad (2.3)$$

che, grazie ai calcoli di Eulero, è risaputo essere uguale a $\frac{x}{2}$.

Fourier riconosce dei limiti alla forza di queste particolari serie; affinché una serie approssimi la funzione bisogna osservarla in un intervallo specifico. Fourier descrive una possibile difficoltà nel loro utilizzo nel seguente commento:

“In generale queste serie si presentano spontaneamente ed è facile formarle in diversi modi: il punto essenziale [corsivo nostro] è di distinguere i limiti entro i quali si deve prendere il valore della variabile. Per esempio, l'equazione (2.3) data da Eulero è valida soltanto se il valore di x è compreso tra $-\pi$ e π . Per tutti gli altri valori della x il secondo membro ha un valore determinato molto diverso da $x/2$. Si devono usare con molta cautela i procedimenti di calcolo che forniscono queste serie senza far conoscere i li-

miti oltre i quali l'equazione cessa di valere. In effetti, non essendo questi limiti gli stessi per le diverse equazioni, si potrebbe ottenere, mediante la combinazione di serie diverse, dei risultati del tutto sbagliati. È mediante questa osservazione che si spiegano conseguenze contraddittorie presenti nella combinazione di differenti serie di seni e coseni.”²³

Fourier in questo passaggio definisce anche il suo modo di trattare le serie infinite: siamo all'inizio del 1800 e non sono ancora disponibili criteri sufficienti a garantire la convergenza o meno di una serie. Dunque Fourier si ritrova costretto a calcolare direttamente la somma dei primi m termini, talvolta sfruttando trucchi di trigonometria elementare, talvolta le tecniche proprie del calcolo infinitesimale. Il calcolo della convergenza termina con l'analisi del limite per m tendente a infinito. Di particolare interesse è la cura con cui egli cerca di risolvere le questioni di convergenza delle serie infinite, fatto alquanto inedito per gli studiosi del suo tempo. Fourier, per sapere se la serie osservata converge, non ha altro modo che calcolare caso per caso la somma della serie.

²³Grattan-Guinness, *Joseph Fourier, 1768-1830* [7], p. 169, citato in Bottazzini, *Il calcolo sublime* [3], p.67

2.3 Il lavoro meticoloso di Abel

Dopo aver introdotto le serie trigonometriche e il significato attribuito loro da Fourier, possiamo ritornare sul percorso principale della storia della nascita della convergenza uniforme. Riprendiamo dall'opera di Abel, matematico norvegese, a cui diversi storici della matematica attribuiscono già l'utilizzo della convergenza uniforme, venendo quindi riconosciuto come l'effettivo "scopritore" di questo nuovo concetto.

Durante l'estate del 1826, Niels Henrik Abel (1802-1829) soggiorna a Parigi dove ha occasione di incontrare e fare la conoscenza dei principali matematici del tempo. In una famosa lettera al suo primo maestro d'infanzia Holmboe, ci offre un prezioso ritratto di come funzionasse quel mondo matematico:

“Cauchy è estremamente cattolico e bigotto, cosa ben strana per un matematico. D'altronde è l'unico che oggi giorno faccia della matematica pura. Poisson, Fourier, Ampère ecc. non si occupano d'altro che di magnetismo e di altre faccende di fisica. Laplace non scrive quasi più.(....) Ciascuno lavora per conto suo senza occuparsi di quello che fanno gli altri. Tutti vogliono insegnare e nessuno vuole imparare. L'egoismo più assoluto regna ovunque.”²⁴

In queste parole possiamo provare a spiegarci perché ci siano voluti almeno cinque anni per vedere un primo dubbio verso il teorema di Cauchy. Abel si considera a tutti gli effetti un accanito seguace del professor Cauchy, come lui stesso dichiara in un passo della stessa lettera:

“Cauchy è un matto e con lui non c'è niente da fare, benché sia in questo momento il matematico che sa come bisogna fare della matematica. I suoi lavori sono eccellenti, ma scrive in modo

²⁴Abel, *Mémorial publié à l'occasion du centenaire de sa naissance*, 1902, p.45, citato in Bottazzini, *Il calcolo sublime* [3], p.84-85

molto confuso. All'inizio non capivo quasi niente di quel che scrive, ora va meglio. Adesso sta pubblicando una serie di memorie dal titolo *Exercices des mathématique*. Io li compro e li leggo assiduamente. Ne sono apparsi nove fascicoli dall'inizio dell'anno.”²⁵

In questo elogio privato appare tutta l'ammirazione verso le opere di Cauchy. In particolare, più che dalle conoscenze matematiche, Abel è colpito dal suo intento nel voler fissare uno standard nell'analisi matematica. Mosso da tale ispirazione, Abel decide di compiere uno studio mirato per stabilire cosa i matematici avessero davvero dimostrato “rigorosamente”²⁶ nell'analisi di allora. A proposito scrive:

“Voglio dedicarmi con tutte le mie forze a fare un po' più di chiarezza nella prodigiosa oscurità che innegabilmente si trova oggi in analisi. [...] Essa manca a tal punto di un piano e di una struttura che è assolutamente stupefacente che possa essere studiata da tanta gente, e il peggio è che non è fatta per nulla con rigore. Non ci sono che pochissime proposizioni, nell'analisi superiore che siano dimostrate con indiscutibile rigore. Dappertutto si trova questa perfida²⁷ abitudine di estrapolare dal particolare al generale, ed è ben strano che con un simile metodo non

²⁵Abel, *Mémorial publié à l'occasion du centenaire de sa naissance*, 1902, p.45, citato in Bottazzini, *Il calcolo sublime* [3], pp.84-85

²⁶Per Cauchy, e successivamente adottato anche da Abel, il termine “rigorosamente” ha la stessa valenza di “deduttivamente”

²⁷Diversi matematici più moderni troverebbero questa definizione di Abel piuttosto arida. Ad esempio, Vladimir Arnold, uno dei principali matematici del Novecento, rivendica ancora una visione empirica della matematica, in contrapposizione alla visione che la vuole come una costruzione autonoma e puramente deduttiva. Da un punto di vista pedagogico, a suo avviso, la tendenza a separare la matematica dalla fisica e dalla geometria ha prodotto generazioni di studenti e docenti che hanno perso il senso concreto e visivo della matematica. (Arnold, *Sur l'éducation mathématique*, 1998)

si trovino malgrado tutto che pochi paradossi. È veramente interessante cercarne il motivo. A mio parere questo deriva dal fatto che le funzioni di cui l'analisi si è occupata finora possono, nella maggioranza dei casi, essere espresse per mezzo di potenze. Non appena ne intervengono altre, cosa che invero accade piuttosto raramente, allora le cose non tornano più e da conclusioni false derivano una serie di proposizioni scorrette, ad esse concatenate.(...) Finché si usa un metodo generale, la cosa va ancora bene; ma ho dovuto essere estremamente attento, perché una volta ammesse delle proposizioni senza dimostrazione rigorosa (vale a dire senza dimostrazione) esse si sono così fortemente radicate in me, che sono continuamente tentato di servirmene senza considerarle più da vicino.”²⁸

Tra le invettive più dure di Abel, troviamo quelle verso il calcolo di somme di serie. Abel riporta il modo di fare calcolo comune nell'analisi di allora. Il ragionamento era all'incirca il seguente: Sia

$$a_0 + a_1 + a_2 + \dots$$

una qualunque serie infinita. Il modo usuale per trovare la somma era cercare la somma della seguente serie associata

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots$$

e porre $x = 1$ nel risultato. La critica riguarda il fatto di poter applicare questo metodo senza delle vere ipotesi. Infatti supponiamo di essere in grado

²⁸Abel, *Mémorial publié à l'occasion du centenaire de sa naissance*, 1902, p.23, citato in Bottazzini, *Il calcolo sublime* [3], p.86

di dimostrare che

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots$$

converga esattamente a una somma $\phi(x)$ per tutti i valori di x inferiori a 1. Non è detto che, sostituendo 1 al posto di x , si ottenga la somma desiderata. Abel riporta questo esempio:

Consideriamo il seguente sviluppo, valido per tutti i valori compresi tra $(-\pi, \pi)$:

$$\frac{x}{2} = \sin(x) - \frac{1}{2}\sin(2x) + \frac{1}{3}\sin(3x) - \dots$$

Secondo il ragionamento del tempo, si potrebbe concludere che la formula varrebbe anche per $x = \pi$, ma ciò è falso. Infatti significherebbe che

$$\frac{\pi}{2} = \sin(\pi) - \frac{1}{2}\sin(2\pi) + \frac{1}{3}\sin(3\pi) - \dots = 0$$

e ciò è un assurdo.

I riferimenti all'opera di Fourier sono una peculiarità della critica di Abel (riporta esattamente lo sviluppo in serie di Fourier di $\frac{x}{2}$). Questo non è certamente un caso: gli storici della matematica riferiscono che, durante un soggiorno a Berlino, Abel ha avuto la possibilità di studiare alcune opere di Fourier, tra cui la *Théorie analytique de la chaleur*, pubblicata nel 1822. Questo libro infatti contiene molti esempi, utili a suo tempo a Fourier per discutere la propagazione del calore, mentre ad Abel necessari per esporre i suoi controesempi al modo di pensare e dimostrare i risultati dell'analisi di allora.

In questa fase di rielaborazione e con gli esempi di Fourier, Abel espone per la prima volta un sospetto sul teorema della continuità del Capitolo VI del Cours d'Analyse. Tuttavia, prima di esaminare il dubbio posto da Abel, è bene riportare i passaggi antecedenti del paragrafo, dove si può intuire che egli non volesse in alcun modo criticare l'autorità di Cauchy, bensì delineare il dominio in cui quel teorema avesse pieno valore. Se ne deduce che Abel vedeva le serie di Fourier come casi patologici, fuori dalla competenza di quel teorema. Il centro di questo pensiero si trova nella memoria *Untersuchungen*

über die Reihe $1 + \frac{m}{1}x + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2}x^2 + \dots$, pubblicata sul *Crelle's Journal*²⁹ nel 1826³⁰.

La parte della memoria che ci interessa riportare, comincia esattamente da un attestato di stima che Abel rivolge all'opera di Cauchy:

“Stabiliamo dapprima alcuni teoremi necessari sulle serie. L'eccellente opera di M. Cauchy, *Cours d'analyse de l'école polytechnique*, che deve essere letta da ogni analista che ami il rigore nelle ricerche matematiche, ci servirà da guida.”³¹

Qui viene ribadita l'influenza di Cauchy sul modo di Abel di intendere le serie. Dopo aver riportato definizioni e teoremi presi dal Cours d'Analyse, la memoria di Abel si sofferma sulla questione della continuità della somma e vengono riportati tre teoremi, tutti dimostrati, che restituiscono il teorema della continuità di Cauchy nel dominio delle serie di potenze. La citazione seguente riporta la traduzione letterale di questa sezione:

“ **Teorema III.**³² Designando con

$$t_0, t_1, t_2, \dots, t_n, \dots$$

una serie di quantità qualunque, se

$$p_m = t_0 + t_1 + t_2 + \dots + t_m$$

è sempre minore di una quantità determinata δ ,

²⁹Il nome originale della rivista sarebbe *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, ma viene comunemente chiamata *Crelle's Journal* per via del nome del fondatore August Leopold Crelle.

³⁰Le pagine di riferimento utilizzate in questa tesi provengono da *Oeuvres complètes de Niels Henrik Abel*, un'opera pubblicata da L. Sylow e S. Lie nel 1881, che racchiude tutti i lavori principali di Abel. In fondo a questo capitolo sono riportate le scansioni originali delle pagine del libro a cui si sta facendo riferimento.

³¹Abel, *Oeuvres complètes de Niels Henrik Abel*[1], 1881, p.221

³²Lemma di Abel.

si avrà

$$r = \varepsilon_0 t_0 + \varepsilon_1 t_1 + \varepsilon_2 t_2 + \cdots + \varepsilon_m t_m < \delta \varepsilon_0$$

dove $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2 \dots$ sono delle quantità positive decrescenti.

Dimostrazione. In effetti, si ha:

$$t_0 = p_0, \quad t_1 = p_1 - p_0, \quad t_2 = p_2 - p_1, \quad \text{etc.}$$

dunque

$$r = \varepsilon_0 p_0 + \varepsilon_1 (p_1 - p_0) + \varepsilon_2 (p_2 - p_1) + \cdots + \varepsilon_m (p_m - p_{m-1}),$$

ovvero

$$r = p_0(\varepsilon_0 - \varepsilon_1) + p_1(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) + \cdots + p_m \varepsilon_m.$$

Poiché le differenze $\varepsilon_0 - \varepsilon_1, \varepsilon_1 - \varepsilon_2 \dots$ sono positive, la quantità r sarà evidentemente minore di $\delta \varepsilon_0$.³³

Il Teorema III rappresenta il nucleo tecnico della memoria di Abel, noto nella letteratura matematica moderna come Lemma di Abel o tecnica di sommazione per parti. L'importanza di questo risultato risiede nella sua utilità come strumento di maggiorazione, usato da Abel per dimostrare diversi teoremi successivi. Egli intuisce che, per controllare il comportamento di una serie infinita non è sufficiente studiarne i singoli termini, ma occorre dominare analiticamente quello che accade nei suoi resti, ossia nelle code della serie. Attraverso la manipolazione algebrica che scompone il prodotto di due successioni sfruttando le differenze successive, prima $(p_n - p_{n-1})$ e poi $(\varepsilon_n - \varepsilon_{n+1})$, Abel mostra che è possibile intrappolare la somma sotto una soglia prefissata $\delta \varepsilon_0$. Questo lemma viene utilizzato da Abel per dimostra-

³³Abel, *Œuvres complètes de Niels Henrik Abel* [1], 1881, p.222

re il successivo Teorema IV, dopo aver riportato la definizione di funzione continua, ripresa proprio da Cauchy.

“ **Definizione:** Una funzione fx sarà detta *funzione continua* di x tra i limiti $x = a$ e $x = b$, se per un valore qualunque di x compreso tra questi limiti, la quantità $f(x - \beta)$, per valori sempre decrescenti di β , si avvicina indefinitamente al limite fx .

Teorema IV³⁴ *Se la serie*

$$f\alpha = v_0 + v_1\alpha + v_2\alpha^2 + \cdots + v_m\alpha^m + \cdots$$

*è convergente per un certo valore δ di α , essa sarà anche convergente per ogni valore minore di δ ; e, per valori sempre decrescenti di β , la funzione $f(\alpha - \beta)$ si avvicinerà indefinitamente al limite $f\alpha$, supponendo che α sia uguale o inferiore a δ .*³⁵

Dimostrazione. Siano

$$\begin{aligned} v_0 + v_1\alpha + v_2\alpha^2 + \cdots + v_{m-1}\alpha^{m-1} &= \phi\alpha, \\ v_m\alpha^m + v_{m+1}\alpha^{m+1} + \cdots &= \psi\alpha. \end{aligned}$$

Si avrà

$$\psi\alpha = \left(\frac{\alpha}{\delta}\right)^m v_m\delta^m + \left(\frac{\alpha}{\delta}\right)^{m+1} v_{m+1}\delta^{m+1} + \cdots;$$

dunque, per il teorema III, si avrà $\psi\alpha < \left(\frac{\alpha}{\delta}\right)^m \rho$,

³⁴Teorema di Abel sulla continuità delle serie di potenze.

³⁵Qui δ indica un valore positivo in corrispondenza del quale la serie converge; il teorema garantisce quindi la convergenza per i valori di α interni in tale intervallo.

dove ρ designa la più grande delle quantità

$$\begin{aligned} &v_m \delta^m, \\ &v_m \delta^m + v_{m+1} \delta^{m+1}, \\ &v_m \delta^m + v_{m+1} \delta^{m+1} + v_{m+2} \delta^{m+2}, \dots \end{aligned}$$

Si potrà dunque, per ogni valore di α uguale o inferiore a δ , prendere m abbastanza grande affinché si abbia

$$\psi\alpha = \omega^{36}.$$

Ora $f\alpha = \phi\alpha + \psi\alpha$, dunque

$$f\alpha - f(\alpha - \beta) = \phi\alpha - \phi(\alpha - \beta) + \omega.$$

Inoltre, essendo $\phi\alpha$ una funzione intera [polinomio] di α , si può prendere β abbastanza piccolo affinché

$$\phi\alpha - \phi(\alpha - \beta) = \omega;$$

dunque si ha allo stesso modo

$$f\alpha - f(\alpha - \beta) = \omega,$$

che era ciò che bisognava dimostrare.”³⁷

Con il Teorema IV, Abel formula quello che la storia della matematica enuncia come il Teorema di Abel sulla continuità delle serie di potenze. Più precisamente, egli applica il lemma precedentemente dimostrato alle serie di potenze, ottenendo come risultato che la continuità della funzione somma si preserva non solo all'interno del disco di convergenza δ , ma si estende fino alla sua frontiera ($\alpha = \delta$), a patto che in quel punto estremo vi sia convergenza.

³⁶In questo caso, la notazione ottocentesca utilizzava il termine ω per indicare un infinitesimo. In notazione moderna diremmo che $\lim_{m \rightarrow \infty} \psi\alpha = 0$.

³⁷Abel, *Œuvres complètes de Niels Henrik Abel* [1], 1881, p.223

È significativo notare come Abel controlli il resto della serie $\psi\alpha$ tramite la disuguaglianza

$$\psi\alpha < \left(\frac{\alpha}{\delta}\right)^m \rho.$$

Dal momento che il membro di destra è massimo quando $\alpha = \delta$, Abel sta trovando una maggiorazione del resto che vale uniformemente per tutti i punti di un qualsiasi intervallo propriamente incluso. Tuttavia, egli non usa mai la parola uniforme, ma tratta solo di quantità ω minore di ogni valore assegnabile per ogni $\alpha < \delta$, riprendendo pari pari la definizione di infinitesimo di Cauchy. Questo teorema svolge una duplice funzione nella strategia di Abel: da un lato, rassicura sul fatto che lo strumento matematico più utilizzato in quel secolo, ossia lo sviluppo in serie di potenze, non riserva sorprese nel passaggio al limite. Dall'altro, serve per dimostrare il successivo Teorema V, che non è altro che la versione aggiornata del teorema sulla continuità della somma di funzioni continue di Cauchy.

“ **Teorema V**³⁸ *Sia*

$$v_0 + v_1\delta + v_2\delta^2 + \dots$$

una serie convergente, nella quale $v_0, v_1, v_2 \dots$ sono funzioni continue di una stessa quantità variabile x tra i limiti $x = a$ e $x = b$, la serie

$$fx = v_0 + v_1\alpha + v_2\alpha^2 + \dots$$

dove $\alpha < \delta$, sarà convergente e funzione continua di x tra i medesimi limiti.

Dimostrazione. È già stato dimostrato che la serie fx è convergente. Si può dimostrare come

³⁸Questo è di fatto l'aggiustamento del teorema della continuità di Cauchy. Qui Abel utilizza una serie di potenze e ne definisce il dominio, apportando così un restringimento alle ipotesi prese all'interno del Cours d'Analyse.

segue che la funzione fx è continua. Sia

$$\begin{aligned} v_0 + v_1\alpha + \cdots + v_{m-1}\alpha^{m-1} &= \phi x \\ v_m\alpha^m + v_{m+1}\alpha^{m+1} + \cdots &= \psi x \end{aligned}$$

si avrà

$$fx = \phi x + \psi x.$$

Ora

$$\psi x = v_m\delta^m \left(\frac{\alpha}{\delta}\right)^m + v_{m+1}\delta^{m+1} \left(\frac{\alpha}{\delta}\right)^{m+1} + \cdots;$$

dunque, designando con θx la più grande delle quantità $v_m\delta^m, v_m\delta^m + v_{m+1}\delta^{m+1}$, etc., si avrà in virtù del Teorema III:

$$\psi x < \left(\frac{\alpha}{\delta}\right)^m \theta x.$$

Ne consegue che si può prendere m abbastanza grande affinché si abbia $\psi x = \omega$, e che di conseguenza si abbia anche

$$fx = \phi x + \omega,$$

dove ω è minore di ogni quantità assegnabile. Si ha allo stesso modo

$$f(x - \beta) = \phi(x - \beta) + \omega,$$

dunque

$$fx - f(x - \beta) = \phi x - \phi(x - \beta) + \omega.$$

Ora, dalla forma di ϕx [essendo somma finita di funzioni continue] è chiaro che si può prendere β

abbastanza piccolo affinché si abbia

$$\phi x - \phi(x - \beta) = \omega,$$

da cui si trae

$$fx - f(x - \beta) = \omega.$$

Dunque la funzione fx è continua*.”³⁹

Prima di commentare questo teorema, ci soffermiamo sull’asterisco che Abel aggiunge all’ultima parola della dimostrazione. L’asterisco funge da rimando a una nota a piè di pagina, passata alla storia poiché al suo interno si trova quella perplessità, accennata all’inizio, riguardo alla continuità della somma di certe serie. Riportiamo per intero la nota scritta da Abel nella memoria.

“Nell’opera citata di M. Cauchy si trova il teorema seguente: “Quando i differenti termini della serie sono delle funzioni di una stessa variabile, continue rispetto a questa variabile nell’intorno di un valore particolare per il quale la serie è convergente, la somma s della serie è anche, nell’intorno di questo valore particolare, funzione continua della variabile”. Ma mi sembra che questo teorema ammetta delle eccezioni. Per esempio la serie

$$\sin x - \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{3} \sin 3x - \dots$$

è discontinua per ogni valore $(2m + 1)\pi$ di x , essendo m un numero intero. Vi sono, come si sa, molte serie di questa specie.”⁴⁰

³⁹Abel, *Œuvres complètes de Niels Henrik Abel* [1], 1881, pp.223-224

⁴⁰Abel, *Œuvres complètes de Niels Henrik Abel* [1], 1881, pp.225-226

La nota non viene approfondita oltre. In queste poche e caute righe sono raccolti i dubbi che il giovane Abel si pone verso le serie trigonometriche introdotte da Fourier. Infatti la memoria di Abel non possiede come scopo quello di evidenziare dove il teorema di Cauchy fallisce, bensì trovarne i giusti limiti di efficacia. Il giovane matematico, con il teorema V, mostra come il teorema di Cauchy sia giusto finché la serie di partenza sia una serie di potenze. Ed esiste una zona grigia, dove confluiscono quelle serie, ad esempio quelle trigonometriche, che lui interpreta come delle eccezioni. Dunque, all'interno del Teorema V, Abel si limita a formalizzare e a ridimostrare il celebre risultato che Cauchy aveva enunciato nel 1821 nel suo *Cours d'Analyse*. Mentre nella nota, egli evidenzia la mancata universalità del teorema, esponendo il controesempio della serie trigonometrica di Fourier:

$$\sin x - \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{3} \sin 3x - \dots$$

Questa serie, pur essendo composta da termini continui e ovunque convergenti, genera nei punti $(2m+1)\pi$ una discontinuità evidente. Chiamando queste anomalie “eccezioni”, egli suggerisce che l'errore di Cauchy non risiede nella sua logica deduttiva, ma nell'incompletezza dello studio effettuato; come accennato nel primo capitolo, è probabile che Cauchy, mentre redigeva il teorema, non avesse tenuto in considerazione serie diverse dalle serie di potenze. Abel dimostra perciò che la convergenza puntuale descritta da Cauchy basta a garantire la continuità nel caso da lui considerato, mentre fallisce nel dominio delle serie trigonometriche introdotte da Fourier. Neppure Abel, tuttavia, riesce a comprendere il vero motivo per cui queste serie sfuggano alla logica del risultato di Cauchy, limitandosi a suggerire che vi sia qualcosa di difettoso in esse.

È pertanto doveroso sottolineare come anche nella dimostrazione del teorema V sia presente lo stesso tipo di errore in cui è caduto Cauchy. Quando Abel designa con θx la più grande quantità tra

$$v_m \delta^m, \quad v_m \delta^m + v_{m+1} \delta^{m+1}, \quad \text{etc},$$

nessuna ipotesi ci garantisce che il $\sup \theta x$ sia finito. Abel, da buon seguace di Cauchy, vede ancora nella convergenza puntuale l'unica possibilità e non percepisce la differente velocità di convergenza delle serie patologiche. Del resto, come ammesso all'inizio della citazione, per quanto riguarda le conoscenze sulle serie, Abel utilizza il Cours d'Analyse come guida teorica, condividendone le definizioni di convergenza e continuità. Simile l'utilizzo di infinitesimo nelle dimostrazioni. E certamente in ciò si può rintracciare il motivo per cui neppure Abel sia riuscito a percepire la presenza della convergenza uniforme. Ciononostante, ribellandosi a questa teoria, diversi matematici decidono di far risalire comunque la prima comparsa della convergenza uniforme proprio in questi teoremi di Abel. Eppure, riportando il pensiero dello storico e filosofo Imre Lakatos, chi lo afferma sarebbe totalmente fuori strada. Nell'Appendice I del libro *Dimostrazioni e confutazioni*, Lakatos cita un resoconto fatto da Bourbaki su Cauchy e Abel a proposito della convergenza uniforme:

“A tutta prima [Cauchy] non si accorse della differenza fra convergenza semplice e convergenza uniforme, e credette di poter dimostrare che ogni serie convergente di funzioni continue ha come somma una funzione continua. L'errore fu quasi immediatamente svelato da Abel, il quale dimostrò al tempo stesso che ogni serie intera è continua all'interno del suo intervallo di convergenza, con il ragionamento, divenuto poi classico, che utilizza essenzialmente, in questo caso particolare, l'idea di convergenza uniforme. Restava solo da mettere in rilievo quest'ultima in forma generale, e ciò fu fatto indipendentemente da Stokes e Seidel nel 1847-1848 e da Cauchy stesso nel 1853.”⁴¹

⁴¹Lakatos, *Dimostrazioni e Confutazioni* [9], Appendice I, 1976, p.178

Lakatos critica questa affermazione di Bourbaki, sostenendo come i teoremi di Abel non sfruttano mai l'ipotesi di convergenza uniforme. La "fortuna" di Abel consiste nel fatto che, nel caso di serie di potenze, la convergenza è uniforme su ogni intervallo chiuso contenuto all'interno dell'intervallo di convergenza. Sarebbe perciò sbagliato, come ricorda sempre Lakatos, pensare che Abel abbia quindi risolto il problema, piuttosto è corretto supporre che sia stato lui il primo a evidenziarlo, presentando come prova le serie trigonometriche.

Seguono le scansioni delle pagine relative a questi tre teoremi e la nota, presenti nella memoria di Abel.

qu'on suppose l'existence de l'équation ci-dessus, il reste encore à chercher la valeur de $(1+x)^m$, car cette expression a en général une infinité de valeurs différentes, tandis que la série $1 + mx + \dots$ n'en a qu'une seule.

Le but de ce mémoire est d'essayer de remplir une lacune par la solution complète du problème suivant:

"Trouver la somme de la série

$$1 + \frac{m}{1}x + \frac{m(m-1)}{1.2}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}x^3 + \dots$$

"pour toutes les valeurs réelles ou imaginaires de x et de m pour lesquelles la série est convergente."

2.

Nous allons d'abord établir quelques théorèmes nécessaires sur les séries. L'excellent ouvrage de M. *Cauchy* "Cours d'analyse de l'école polytechnique", qui doit être lu par tout analyste qui aime la rigueur dans les recherches mathématiques, nous servira de guide.

Définition. Une série quelconque

$$v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_m + \dots$$

sera dite convergente, si pour des valeurs toujours croissantes de m , la somme $v_0 + v_1 + \dots + v_m$ s'approche indéfiniment d'une certaine limite. Cette limite s'appellera *la somme de la série*. Dans le cas contraire la série sera dite divergente, et elle n'a pas de somme. D'après cette définition, pour qu'une série soit convergente, il est nécessaire et il suffit que pour des valeurs toujours croissantes de m , la somme $v_m + v_{m+1} + \dots + v_{m+n}$ s'approche indéfiniment de zéro, quelle que soit la valeur de n .

Donc, dans une série convergente quelconque, le terme général v_m s'approchera indéfiniment de zéro*).

Théorème I. Si en désignant par $\varrho_0, \varrho_1, \varrho_2 \dots$ une série de quantités positives, le quotient $\frac{\varrho_{m+1}}{\varrho_m}$, pour des valeurs toujours croissantes de m , s'approche indéfiniment d'une limite α plus grande que 1, la série

*) Pour abréger, on représentera dans ce mémoire par ω une quantité qui peut être plus petite que toute quantité donnée.

Figura 11: Elogio di Abel al Cours d'Analyse di Cauchy, *Œuvres complètes de Niels Henrik Abel*, 1881, p.221

$$\varepsilon_0 \varrho_0 + \varepsilon_1 \varrho_1 + \varepsilon_2 \varrho_2 + \dots + \varepsilon_m \varrho_m + \dots,$$

où ε_m est une quantité qui pour des valeurs toujours croissantes de m ne s'approche pas indéfiniment de zéro, sera nécessairement divergente.

Théorème II. Si dans une série de quantités positives $\varrho_0 + \varrho_1 + \varrho_2 + \dots + \varrho_m + \dots$ le quotient $\frac{\varrho_{m+1}}{\varrho_m}$, pour des valeurs toujours croissantes de m , s'approche indéfiniment d'une limite α plus petite que 1, la série

$$\varepsilon_0 \varrho_0 + \varepsilon_1 \varrho_1 + \varepsilon_2 \varrho_2 + \dots + \varepsilon_m \varrho_m + \dots,$$

où $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2$ etc. sont des quantités qui ne surpassent pas l'unité, sera nécessairement convergente.

En effet, d'après la supposition, on peut toujours prendre m assez grand pour que $\varrho_{m+1} < \alpha \varrho_m$, $\varrho_{m+2} < \alpha \varrho_{m+1}$, $\dots$ $\varrho_{m+n} < \alpha \varrho_{m+n-1}$. Il suit de là que $\varrho_{m+k} < \alpha^k \varrho_m$ et par suite

$$\varrho_m + \varrho_{m+1} + \dots + \varrho_{m+n} < \varrho_m (1 + \alpha + \alpha^2 + \dots + \alpha^n) < \frac{\varrho_m}{1 - \alpha},$$

done, à plus forte raison

$$\varepsilon_m \varrho_m + \varepsilon_{m+1} \varrho_{m+1} + \dots + \varepsilon_{m+n} \varrho_{m+n} < \frac{\varrho_m}{1 - \alpha}.$$

Or, puisque $\varrho_{m+k} < \alpha^k \varrho_m$ et $\alpha < 1$, il est clair que ϱ_m et par conséquent la somme

$$\varepsilon_m \varrho_m + \varepsilon_{m+1} \varrho_{m+1} + \dots + \varepsilon_{m+n} \varrho_{m+n}$$

aura zéro pour limite. La série ci-dessus est donc convergente.

Théorème III. En désignant par $t_0, t_1, t_2, \dots, t_m, \dots$ une série de quantités quelconques, si $p_m = t_0 + t_1 + t_2 + \dots + t_m$ est toujours moindre qu'une quantité déterminée δ , on aura

$$r = \varepsilon_0 t_0 + \varepsilon_1 t_1 + \varepsilon_2 t_2 + \dots + \varepsilon_m t_m < \delta \varepsilon_0,$$

où $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots$ sont des quantités positives décroissantes.

En effet, on a ●

$$t_0 = p_0, \quad t_1 = p_1 - p_0, \quad t_2 = p_2 - p_1 \quad \text{etc.}$$

done

$$r = \varepsilon_0 p_0 + \varepsilon_1 (p_1 - p_0) + \varepsilon_2 (p_2 - p_1) + \dots + \varepsilon_m (p_m - p_{m-1}),$$

ou bien

$$r = p_0 (\varepsilon_0 - \varepsilon_1) + p_1 (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) + \dots + p_{m-1} (\varepsilon_{m-1} - \varepsilon_m) + p_m \varepsilon_m.$$

Figura 12: Prima parte del Lemma di Abel, Œuvres complètes de Niels Henrik Abel, 1881, p.222

Or les différences $\varepsilon_0 - \varepsilon_1$, $\varepsilon_1 - \varepsilon_2$, $\dots$ étant positives, la quantité r sera évidemment moindre que $\delta\varepsilon_0$.

Définition. Une fonction fx sera dite *fonction continue* de x entre les limites $x=a$ et $x=b$, si pour une valeur quelconque de x comprise entre ces limites, la quantité $f(x-\beta)$, pour des valeurs toujours décroissantes de β , s'approche indéfiniment de la limite fx .

Théorème IV. Si la série

$$f\alpha = v_0 + v_1\alpha + v_2\alpha^2 + \dots + v_m\alpha^m + \dots$$

est convergente pour une certaine valeur δ de α , elle sera aussi convergente pour toute valeur moindre que δ , et, pour des valeurs toujours décroissantes de β , la fonction $f(\alpha-\beta)$ s'approchera indéfiniment de la limite $f\alpha$, en supposant que α soit égal ou inférieur à δ .

Soit

$$\begin{aligned} v_0 + v_1\alpha + \dots + v_{m-1}\alpha^{m-1} &= \varphi\alpha, \\ v_m\alpha^m + v_{m+1}\alpha^{m+1} + \dots &= \psi\alpha, \end{aligned}$$

on aura

$$\psi\alpha = \left(\frac{\alpha}{\delta}\right)^m v_m\delta^m + \left(\frac{\alpha}{\delta}\right)^{m+1} v_{m+1}\delta^{m+1} + \dots;$$

donc, d'après le théorème III, $\psi\alpha < \left(\frac{\alpha}{\delta}\right)^m p$, p désignant la plus grande des quantités $v_m\delta^m$, $v_m\delta^m + v_{m+1}\delta^{m+1}$, $v_m\delta^m + v_{m+1}\delta^{m+1} + v_{m+2}\delta^{m+2}$ etc. On pourra donc pour toute valeur de α , égale ou inférieure à δ , prendre m assez grand pour qu'on ait

$$\psi\alpha = \omega.$$

Or $f\alpha = \varphi\alpha + \psi\alpha$, donc $f\alpha - f(\alpha-\beta) = \varphi\alpha - \varphi(\alpha-\beta) + \omega$.

De plus, $\varphi\alpha$ étant une fonction entière de α , on peut prendre β assez petit pour que

$$\varphi\alpha - \varphi(\alpha-\beta) = \omega;$$

donc on a de même

$$f\alpha - f(\alpha-\beta) = \omega,$$

ce qu'il fallait démontrer.

Théorème V. Soit

$$v_0 + v_1\delta + v_2\delta^2 + \dots$$

une série convergente, dans laquelle v_0 , v_1 , $v_2 \dots$ sont des fonctions conti-

Figura 13: Conclusione Lemma di Abel, definizione di funzione continua, Teorema di Abel e prima parte del Teorema V, Œuvres complètes de Niels Henrik Abel, 1881, p.223

nues d'une même quantité variable x entre les limites $x=a$ et $x=b$, la série

$$fx = v_0 + v_1\alpha + v_2\alpha^2 + \dots,$$

où $\alpha < \delta$, sera convergente et fonction continue de x entre les mêmes limites.

Il est déjà démontré que la série fx est convergente. On peut démontrer comme il suit, que la fonction fx est continue.

Soit

$$v_0 + v_1\alpha + \dots + v_{m-1}\alpha^{m-1} = \varphi x,$$

$$v_m\alpha^m + v_{m+1}\alpha^{m+1} + \dots = \psi x,$$

on aura

$$fx = \varphi x + \psi x.$$

Or

$$\psi x = \left(\frac{\alpha}{\delta}\right)^m v_m \delta^m + \left(\frac{\alpha}{\delta}\right)^{m+1} v_{m+1} \delta^{m+1} + \left(\frac{\alpha}{\delta}\right)^{m+2} v_{m+2} \delta^{m+2} + \dots;$$

donc en désignant par θx la plus grande des quantités $v_m \delta^m$, $v_m \delta^m + v_{m+1} \delta^{m+1}$, $v_m \delta^m + v_{m+1} \delta^{m+1} + v_{m+2} \delta^{m+2}$ etc., on aura en vertu du théorème III:

$$\psi x < \left(\frac{\alpha}{\delta}\right)^m \theta x.$$

Il s'ensuit qu'on peut prendre m assez grand pour qu'on ait $\psi x = \omega$, et que par conséquent on ait aussi

$$fx = \varphi x + \omega,$$

où ω est moindre que toute quantité assignable.

On a de même

$$f(x-\beta) = \varphi(x-\beta) + \omega,$$

donc

$$fx - f(x-\beta) = \varphi x - \varphi(x-\beta) + \omega.$$

Or d'après la forme de φx il est clair qu'on peut prendre β assez petit pour qu'on ait

$$\varphi x - \varphi(x-\beta) = \omega,$$

d'où l'on tire

$$fx - f(x-\beta) = \omega.$$

Donc la fonction fx est continue*).

*) Dans l'ouvrage cité de M. *Cauchy* on trouve (p. 131) le théorème suivant: "Lorsque les différens termes de la série, $u_0 + u_1 + u_2 + \dots$ sont des fonctions d'une

Figura 14: Conclusione Teorema V e inizio nota a piè di pagina di Abel sul teorema di Cauchy, Œuvres complètes de Niels Henrik Abel, 1881, p.224

Théorème VI. Lorsqu'on désigne par $\varrho_0, \varrho_1, \varrho_2$ etc. $\varrho'_0, \varrho'_1, \varrho'_2$ etc. les valeurs numériques des membres respectifs des deux séries convergentes

$$\begin{aligned} v_0 + v_1 + v_2 + \dots &= p, \\ v'_0 + v'_1 + v'_2 + \dots &= p', \end{aligned}$$

si les séries

$$\begin{aligned} \varrho_0 + \varrho_1 + \varrho_2 + \dots \\ \varrho'_0 + \varrho'_1 + \varrho'_2 + \dots \end{aligned}$$

sont de même convergentes, la série $r_0 + r_1 + r_2 + \dots$, dont le terme général est,

$$r_m = v_0 v'_m + v_1 v'_{m-1} + v_2 v'_{m-2} + \dots + v_m v'_0,$$

sera de même convergente, et aura pour somme

$$(v_0 + v_1 + v_2 + \dots)(v'_0 + v'_1 + v'_2 + \dots).$$

Démonstration. En faisant,

$$\begin{aligned} p_m &= v_0 + v_1 + \dots + v_m, \\ p'_m &= v'_0 + v'_1 + \dots + v'_m, \end{aligned}$$

on voit aisément que

$$\begin{aligned} \text{(a) } r_0 + r_1 + r_2 + \dots + r_{2m} &= p_m p'_m + [p_0 v'_{2m} + p_1 v'_{2m-1} + \dots + p_{m-1} v'_{m+1} (=t) \\ &\quad + p'_0 v_{2m} + p'_1 v_{2m-1} + \dots + p'_{m-1} v_{m+1} (=t')]. \end{aligned}$$

Soit

$$\begin{aligned} \varrho_0 + \varrho_1 + \varrho_2 + \dots &= u, \\ \varrho'_0 + \varrho'_1 + \varrho'_2 + \dots &= u', \end{aligned}$$

il est clair que, sans égard au signe, on aura,

$$\begin{aligned} t &< u(\varrho'_{2m} + \varrho'_{2m-1} + \dots + \varrho'_{m+1}) \\ t' &< u'(\varrho_{2m} + \varrho_{2m-1} + \dots + \varrho_{m+1}). \end{aligned}$$

"même variable x , continues par rapport à cette variable dans le voisinage d'une valeur particulière pour laquelle la série est convergente, la somme s de la série est aussi, dans le voisinage de cette valeur particulière, fonction continue de x ." Mais il me semble que ce théorème admet des exceptions. Par exemple la série

$$\sin x - \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{3} \sin 3x - \dots$$

est discontinue pour toute valeur $(2m+1)\pi$ de x , m étant un nombre entier. Il y a, comme on sait, beaucoup de séries de cette espèce.

Figura 15: Conclusione nota a piè di pagina sul teorema di Cauchy, Œuvres complètes de Niels Henrik Abel, 1881, p.225

3 Le soluzioni di Seidel e Stokes

In questo capitolo si espone la “scoperta” della convergenza uniforme. La maggior parte degli storici della matematica concordano nel rintracciare la sua prima reale apparizione in una nota di Seidel, scritta nel 1848, dove viene esposto il motivo del perché alcune serie, come quelle trigonometriche, sfuggono al teorema di Cauchy. Nello stesso periodo, in maniera completamente autonoma e seguendo un'altra via, arriva alla stessa conclusione anche il matematico britannico Stokes. Prima occorre però accennare al contributo di Dirichlet, anche lui interessato alla questione delle serie di Fourier.

3.1 Le condizioni di Dirichlet

Dopo le eccezioni trovate da Abel al teorema di Cauchy, per i matematici resta ancora da capire perché le serie trigonometriche risultano effettivamente delle eccezioni. La nota di Abel evidenzia solo il problema, ma non lo affronta in alcun modo. Cos'hanno di così particolare queste serie? Le serie introdotte da Fourier diventano rapidamente oggetto di studio da parte dei più importanti personaggi della comunità scientifica di allora, a partire da Laplace e Lagrange, fino ad arrivare a Poisson e allo stesso Cauchy. Ma quello che viene ritenuto il primo contributo realmente significativo nella conoscenza di queste serie arriva da Peter Gustav Lejeune Dirichlet; a lui va il merito di aver trovato quali ipotesi debbano soddisfare le funzioni affinché le rispettive serie di Fourier approssimino correttamente le funzioni stesse. Fourier era convinto che qualsiasi funzione, in un intervallo specifico, potesse essere descritta attraverso una particolare serie trigonometrica ottenuta con il suo metodo. A causa di questa convinzione, Fourier non si è realmente posto il problema della convergenza. Ma cosa garantisce che una serie infinita ottenuta in questo modo converga in ogni punto della funzione che dovrebbe descrivere? Dirichlet parte da questo interrogativo per trovare quali devono essere le condizioni sufficienti perché una serie di Fourier converga alla sua funzione.

Dirichlet espone le condizioni di convergenza da lui trovate, all'interno di una memoria dal titolo *Sulla convergenza delle serie trigonometriche che servo-*

no a rappresentare una funzione arbitraria tra limiti dati⁴². Questo articolo viene pubblicato nel 1829 sul prestigioso *Crelle's Journal*, lo stesso dove, qualche anno prima, era stata pubblicata la nota a piè di pagina di Abel. È interessante notare come Dirichlet strutturi il suo ragionamento. Egli esordisce mostrando la negazione della presunta convergenza a priori delle serie di Fourier. Espone l'esempio di una funzione ovunque discontinua, la cosiddetta funzione di Dirichlet, definita come segue:

$$f(x) = \begin{cases} c & \text{se } x \text{ è razionale,} \\ d & \text{se } x \text{ è irrazionale.} \end{cases}$$

dove c e d sono due costanti distinte.

Questo esempio mostra che esistono funzioni che, apparentemente, non possono essere rappresentate tramite serie di Fourier, siccome una tale funzione discontinua non può essere integrata secondo gli integrali definiti da Cauchy e utilizzati già da Fourier⁴³.

La formulazione delle condizioni viene presentata esplicitamente solo verso la fine della memoria. Dirichlet arriva a stabilire che, se una funzione è limitata, presenta solo un numero finito di discontinuità di prima specie e un numero finito di punti di massimo e di minimo locali nell'intervallo di integrazione, allora la rispettiva serie di Fourier converge alla funzione di origine. Nella pratica Dirichlet dimostra che la convergenza della serie di Fourier è garantita, a patto di lavorare con funzioni regolari a tratti.

⁴²Il nome originale dell'opera sarebbe *Sur la convergence des séries trigonométriques qui servent à représenter une fonction arbitraire entre des limites données*.

⁴³La funzione di Dirichlet non può essere integrata finché si prende in esame il concetto di integrale di allora, quello definito da Cauchy. Infatti in ogni sottointervallo, per quanto piccolo, la funzione oscillerebbe infinitamente tra c e d e non sarebbe continua. Tuttavia, usando l'integrale di Lebesgue, questa funzione risulta integrabile, la sua serie di Fourier esiste ed è la serie identicamente uguale a d .

3.2 La convergenza arbitrariamente lenta di Seidel

Il contributo di Dirichlet è stato importante perché garantisce delle prime condizioni che devono soddisfare le funzioni, per non incontrare problemi di convergenza quando si costruisce la rispettiva serie di Fourier. A partire da questi studi, si sono concentrati sull'argomento della convergenza altri matematici, tra cui il suo allievo Philipp Ludwig von Seidel (1821-1896). È proprio in una sua nota, apparsa nel 1848, sulla rivista tedesca *Abhandlungen der Mathematisch-Physikalischen Klasse der Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften* che si trova la prima spiegazione del motivo dietro le eccezioni di Abel al teorema di Cauchy. Molti storici fanno risalire a questo scritto la prima comparsa della convergenza uniforme analizzata in maniera “consapevole”. Il titolo dello scritto, nella sua traduzione italiana, è: *Nota su una proprietà delle serie che rappresentano funzioni discontinue*. In esso, si discute il risultato di Cauchy apparso nel *Cours d'Analyse* e il caso in cui la funzione presenta dei punti di salto. La nota⁴⁴ incomincia nel seguente modo:

“Si trova nel *Cours d'Analyse* di Cauchy, al paragrafo 1 del capitolo VI, una proposizione che enuncia che la somma di una serie convergente i cui singoli termini sono funzioni di una grandezza x , continue nell'intorno di un valore dato di x , è sempre al tempo stesso una funzione continua della stessa grandezza in quella regione. Da ciò risulterebbe che le serie del tipo sopra considerato non sono più adatte a rappresentare ancora funzioni discontinue nell'intorno di punti in cui i valori fanno un salto; in altri termini: che le discontinuità non possono mai essere rappresentate da un aggregato di grandezze continue, quando ci si aiuta con la forma dell'infinito; tan-

⁴⁴Il commento a questa nota è un resoconto presente nel libro *Cauchy, Abel, Seidel, Stokes e la convergenza uniforme*[2] di Gilbert Arsac, pubblicato nel 2013.

to che quest'ultimo, che costituisce un passaggio dal dominio dei razionali a quello degli irrazionali, non riesce in modo analogo a gettare un ponte tra grandezze continue e discontinue. Infatti, la convergenza di una serie cesserebbe, e quindi la forma scelta perderebbe il suo significato, laddove inizia la discontinuità.”⁴⁵

Fin dalle prime righe, Seidel richiama la dimostrazione di Cauchy e pone l'attenzione sul problema legato alla descrizione di funzioni in prossimità di “salti”. È bene sottolineare che le funzioni discontinue tenute in considerazione da Seidel sono funzioni con discontinuità unicamente di prima specie. La nota di Seidel continua, riportando il fatto che Dirichlet, suo professore in alcune lezioni tenute a Berlino tra il 1840-41, ha dimostrato che anche funzioni con discontinuità possono essere riscritte come somma infinita di funzioni continue.

“Al tempo stesso, la Proposizione è in contraddizione con quella dimostrata da Dirichlet, la quale afferma che, per esempio, le serie di Fourier sono sempre convergenti anche se le si costringe a rappresentare funzioni discontinue; la discontinuità è precisamente introdotta dalla forma di queste serie i cui termini individuali sono tuttavia funzioni continue, per il fatto che questi impongono la periodicità che è propria delle funzioni trigonometriche a tutte quelle che si vogliono così rappresentare, e parimenti rendono brutalmente discontinue quelle che da sole non si piegano a questa legge. Non si ha bisogno di seguire da sé il cammino complicato della dimostrazione di Dirichlet per convincersi che la generalità della

⁴⁵Seidel, *Note über eine Eigenschaft der Reihen, welche discontinuirliche Functionen darstellen* [13], 1848, p.381

proposizione di cui si tratta ha delle restrizioni: anche gli integrali abituali che hanno valori discontinui, come ad esempio il ben noto integrale di Dirichlet:

$$\int_0^\infty \frac{\sin(xa)}{a} da$$

possono anch'essi costituirne degli esempi; poiché per semplice frazionamento dell'intervallo infinito in un numero infinito di intervalli finiti, si può trasformare questo integrale in una serie i cui singoli termini sono integrali, per i quali si dimostra facilmente che dipendono in modo continuo da x , e che questa serie converge necessariamente sempre, perché la sua somma è sempre uguale a uno dei tre valori possibili per l'integrale totale.”⁴⁶

Seidel evidenzia che le serie di Fourier forniscono una famiglia di controesempi alla proposta di Cauchy. A questo proposito, Seidel propone un nuovo esempio, diventato molto noto nel tempo, basato sul fatto che la funzione:

$$F(x) = \int_0^\infty \frac{\sin(xa)}{a} da$$

non sia continua nel punto 0. Infatti, si ha:

$$\begin{cases} F(x) = \frac{\pi}{2}, & x > 0 \\ F(x) = -\frac{\pi}{2}, & x < 0 \\ F(x) = 0, & x = 0. \end{cases}$$

Seidel, anziché scomodare i ragionamenti di Dirichlet, mostra come sia possibile ottenere un controesempio, semplicemente frazionando l'intervallo di integrazione $[0, \infty[$ in infiniti intervalli finiti (ad esempio $[0, \pi]$, $[\pi, 2\pi]$, $[2\pi, 3\pi] \dots$). In questo modo, l'integrale improprio si trasforma in una serie numerica

⁴⁶Seidel, *Note über eine Eigenschaft der Reihen, welche discontinuirliche Functionen darstellen* [13], 1848, p.382

infinita di integrali definiti:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{\sin(xa)}{a} da.$$

I singoli termini di questa serie sono integrali definiti su intervalli limitati. Poiché la funzione integranda è regolare, ogni singolo termine della serie dipende in modo continuo da x . Sappiamo che la serie converge sempre, perché l'integrale totale esiste ed è finito per ogni x . Tuttavia, la somma totale della serie salta “brutalmente” da $-\frac{\pi}{2}$ a 0 a $\frac{\pi}{2}$ a seconda del valore di x . Si tratta di un perfetto controesempio al teorema di Cauchy.

“Partendo dalla certezza raggiunta che la Proposizione non è valida in generale, e che per dimostrarla occorre ancora far apparire un’ipotesi nascosta, se si sottopone questa dimostrazione a un’analisi più precisa, allora non è difficile scoprire questa ipotesi nascosta⁴⁷; si può allora inversamente concludere che essa può non essere soddisfatta da serie che rappresentano funzioni discontinue, per il fatto che solo in questo modo può essere salvato l’accordo delle conclusioni altrimenti vere con ciò che è dimostrato da un altro lato. In questo modo si ottiene una proposizione che si applica a questa classe di serie e che può essere espressa nel modo seguente:

Teorema: *Data una serie convergente che rappresenta una funzione discontinua di una grandezza x , i cui termini presi uno ad uno sono funzioni continue, allora nell’immediato intorno del punto in cui la funzione ha un salto, si devono*

⁴⁷Per via di questa frase, che sintetizza il metodo di dimostrazione proposto nel suo libro *Dimostrazioni e confutazioni* [9], Lakatos ritiene che sia stato proprio Seidel l’inventore di tale metodo.

poter trovare valori di x per i quali la serie converge lentamente quanto si vuole.

Lo scopo della presente redazione è dimostrare questa proprietà che, a mia conoscenza, non è stata ancora da nessuna parte esplicitamente scoperta. Come conseguenza di questa proprietà, questo metodo di rappresentazione delle funzioni non continue perderebbe il suo interesse se si trattasse, tramite la serie, di valutare numericamente i valori della funzione nella regione in cui essa salta, un caso tuttavia che si presenterà molto raramente nelle applicazioni, dove il caso contrario è più frequente.”⁴⁸

Dopo aver proposto il controesempio, Seidel spiega che, poiché il teorema è confutato, deve esistere un’ipotesi nascosta che non viene soddisfatta quando la somma della serie non è continua. Enuncia quindi il teorema, che può essere riassunto nel linguaggio matematico contemporaneo sotto la forma: “Se la somma di una serie semplicemente convergente di funzioni continue non è continua in un punto, allora non vi è convergenza uniforme locale in quel punto, cioè non esiste alcun intorno di quel punto in cui vi sia convergenza uniforme”. Tuttavia, Seidel non introduce l’espressione “convergenza uniforme”, e traduce quella che oggi è la non-convergenza uniforme locale in un punto con l’espressione: “nelle immediate vicinanze, si devono poter trovare valori di x per i quali la serie converge tanto *lentamente* quanto si vuole”. Ed è proprio questa l’ipotesi nascosta: la convergenza infinitamente lenta nei punti di salto. Seidel ha capito che la discontinuità della somma è un comportamento patologico della convergenza stessa nelle vicinanze del salto. E nelle ultime righe di questa citazione, aggiunge un’osservazione di carattere applicativo: se qualcuno volesse usare una serie di Fourier per calcolare numericamente il valore della funzione vicino al salto, questo metodo

⁴⁸Seidel, *Note über eine Eigenschaft der Reihen, welche discontinuirliche Functionen darstellen* [13], 1848, pp.383-384

“perderebbe il suo interesse”, perché a causa della convergenza arbitrariamente lenta, occorrono un numero estremamente elevato di calcoli anche solo per ottenere poche cifre decimali esatte vicino al punto di discontinuità. Tuttavia Seidel rassicura i matematici che raramente nelle applicazioni ci si trova in questa situazione.

Di seguito si propone una ricostruzione moderna del teorema e della sua dimostrazione, che non cerca di tener conto della terminologia e del modo di procedere di Seidel. Introduciamo il seguente concetto:

Definizione 3.1. *Sia $f_n(x)$ una successione di funzioni semplicemente convergenti a $f(x)$. Definiamo $\nu(\varepsilon, x)$ il più piccolo intero tale che per ogni $n \geq \nu(\varepsilon, x)$ si abbia $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.*

Questa definizione ci permette di tradurre la convergenza arbitrariamente lenta nelle immediate vicinanze di un dato punto x_0 con l'espressione:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \nu(\varepsilon, x) = \infty.$$

Il seguente teorema riassume il pensiero di Seidel:

Teorema 3.2. *Sia f_n una successione di funzioni puntualmente convergenti a f in un intorno $]a, b[$ di un valore x_0 . Supponiamo che le f_n siano continue in x_0 ma che f non lo sia, cioè non vi è convergenza uniforme locale. Se la discontinuità di f è di prima specie, allora, per ε abbastanza piccolo,*

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \nu(\varepsilon, x) = \infty.$$

Prima di procedere con la dimostrazione, consideriamo un caso particolare. Sia $f(x) = 0$ per $0 \leq x < 1$ e $f(1) = 1$. Mostriamo che, per ogni ε abbastanza piccolo, vale

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \nu(\varepsilon, x) = \infty.$$

Supponiamo per semplicità che $f_n(1) = 1$. Per ogni intero n , poiché f_n è continua e $f_n(1) = 1$, esiste un valore η_n tale che, per ogni $x \in]1 - \eta_n, 1[$, si

ha:

$$f_n(x) > \frac{1}{2}.$$

Dato che in quell'intervallo vale $f(x) = 0$, abbiamo:

$$|f_n(x) - f(x)| = f_n(x) > \frac{1}{2}.$$

Di conseguenza, per ogni $x \in]1 - \eta_n, 1[$, l'indice richiesto per far scendere l'errore sotto $\frac{1}{2}$ deve superare n . Si sottolinea che l'intervallo dove si considera la x dipende da n . Questo prova che $\nu(\varepsilon, x) > n$, con n intero qualsiasi, dunque

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \nu(\varepsilon, x) = \infty.$$

Dimostrazione del Teorema 3.2. Supponiamo ad esempio che $f(x_0^-) < f(x_0)$ (tutte le altre possibili casistiche possono essere trattate in modo analogo). Siano l, l' tali che:

$$f(x_0^-) < l < l' < f(x_0).$$

Per la definizione di limite sinistro, esiste un punto $x_1 < x_0$ tale che

$$f(x) < l, \quad \forall x \in]x_1, x_0[.$$

Visto che $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x_0) = f(x_0)$, esiste un intero N tale che

$$l' < f_n(x_0), \quad \forall n \geq N.$$

Per la continuità di ciascuna delle f_n in x_0 , esiste $\eta_n > 0$ tale che

$$l' < f_n(x), \quad \forall x \in]x_0 - \eta_n, x_0].$$

Diminuendo eventualmente η_n , possiamo sempre supporre che $x_0 - \eta_n > x_1$. Allora, per ogni $n \geq N$ e per ogni $x \in]x_0 - \eta_n, x_0[$, si verifica che:

$$f(x) < l < l' < f_n(x)$$

da cui ricaviamo la disuguaglianza:

$$f_n(x) - f(x) > l' - l.$$

Ponendo $\varepsilon = l' - l$, la differenza $|f_n(x) - f(x)|$ risulta perciò maggiore di ε per quell'indice n . Di conseguenza, per ogni $x \in]x_0 - \eta_n, x_0[$ si ha $\nu(\varepsilon, x) > n$, e otteniamo la tesi. $\square$

L'effettiva dimostrazione di Seidel si sviluppa in diverse pagine. Ne vediamo una breve sintesi al solo fine di discutere del suo ragionamento.

Seidel considera una serie di funzioni continue in un intorno fissato di x che converge puntualmente alla somma $F(x)$. Siano $S_n(x)$ le somme dei primi n termini e $R_n(x)$ il rispettivo resto, allora si può scrivere:

$$F(x) = S_n(x) + R_n(x).$$

Seidel definisce le variazioni

$$\Delta F = F(x + \varepsilon) - F(x) \quad \Delta S_n = S_n(x + \varepsilon) - S_n(x),$$

ricavando l'uguaglianza:

$$\Delta F = \Delta S_n + R_n(x + \varepsilon) - R_n(x).$$

Poiché non è dimostrato che $R_n(x)$ è una funzione continua, non si può ridurre lo scarto $R_n(x + \varepsilon) - R_n(x)$ se non riducendo ciascuna di queste grandezze separatamente. Perciò, per la continuità di $F(x)$, devono essere soddisfatte contemporaneamente le tre condizioni:

$$|\Delta S_n| < \tau, \quad |R_n(x + \varepsilon)| < \sigma', \quad |R_n(x)| < \sigma'', \quad (3.1)$$

dove τ, σ', σ'' sono tre costanti positive arbitrariamente piccole. La prima condizione è facilmente verificabile per via della continuità di $S_n(x)$ in un intorno di x ; Seidel definisce l'intervallo $[0, \eta]$ dove η rappresenta il valore

massimo di ε tale che si verifichi la prima disuguaglianza.

Successivamente, per studiare il comportamento dei resti, definisce $\sigma = \min(\sigma', \sigma'')$ e $\nu(\varepsilon)$ il più piccolo intero tale che:

$$\forall n \geq \nu(\varepsilon), \quad |R_n(x)| < \sigma, |R_n(x + \varepsilon)| < \sigma$$

Osserviamo che tali condizioni si possono sempre verificare per l'ipotesi della convergenza puntuale della serie. A questo punto, per Seidel possono presentarsi due scenari: il primo si ha quando $\nu(\varepsilon)$ raggiunge un valore massimo nell'intervallo $[0, \eta]$. Il secondo si presenta se $\nu(\varepsilon)$ tende all'infinito, quando ε tende a 0⁴⁹.

Quando si verifica il primo caso, tutte le tre condizioni (3.1) sono soddisfatte e la continuità della $F(x)$ nell'intervallo $[x, x + \eta]$ è garantita. In questo passaggio Seidel dimostra che, per σ fissato e incremento variabile, esiste un $\nu(\varepsilon)$ maggiore di tutti gli altri, il che è effettivamente la condizione di convergenza uniforme locale⁵⁰.

Per il secondo scenario, Seidel considera un caso particolare. Suppone la possibilità che $\nu(\varepsilon)$ sia descritto dalla funzione

$$\nu(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon}.$$

In questa circostanza, per qualunque N arbitrariamente grande scelto per vincolare il resto nel punto x tale che $|R_N(x)| < \sigma$, esisterà sempre un valore di ε sufficientemente piccolo tale per cui $\nu(\varepsilon) > N$, comportando la violazione della condizione $|R_N(x + \varepsilon)| < \sigma$. Ciò comporta che nulla più garantisce che

⁴⁹Da un punto di vista puramente logico, il secondo caso non è l'esatta negazione del primo caso. La corretta negazione sarebbe semplicemente “ ν non è limitato nell'intervallo”. Dire che non è limitato non implica che tenda all'infinito quando l'incremento tende a zero. Tuttavia, l'imprecisione di Seidel non inficia il suo risultato grazie alla “limitazione” delle funzioni dell'epoca. Infatti, egli considerava funzioni che ammettono al più discontinuità di prima specie; si può dimostrare che se la somma f ha una discontinuità di prima specie in x_0 , allora per ε abbastanza piccolo, l'indice di convergenza $\nu(\varepsilon, x)$ tende effettivamente all'infinito quando $x \rightarrow x_0$.

⁵⁰Seidel termina il ragionamento con le parole “in questo primo caso, la proposizione di Cauchy si realizza”, ribadendo che, sotto queste ipotesi, la dimostrazione di Cauchy è corretta.

ΔF converga a zero. Seidel deduce da questo esempio che la continuità della funzione somma $F(x)$ cessa di valere se la convergenza della serie diventa *arbitrariamente lenta* nell'intorno del punto.

Per via di questo esempio, si potrebbe affermare che il secondo scenario rappresenta la prima formalizzazione storica di una non-convergenza uniforme locale, in cui si riscontra la perdita di un controllo uniforme sui resti della serie nell'intorno $[x, x + \eta]$. Da questa dimostrazione si vede come Seidel abbia colto i due punti essenziali da prendere in considerazione, assenti nella trattazione di Cauchy: la possibile dipendenza dall'incremento ε del numero ν e il fatto che sia necessario fissare un intorno opportuno prima di utilizzare la continuità della somma parziale S_n corrispondente. Prima di aggiungere ulteriori commenti, consideriamo il lavoro di Stokes, pubblicato pochi mesi prima di quello di Seidel.

N o t e
über eine
E i g e n s c h a f t d e r R e i h e n ,
welche
discontinuirliche Functionen darstellen.

Man findet in *Cauchy's Cours d'Analyse algébrique* Cap. 6, §. 1. einen Lehrsatz, welcher ausspricht, dass die Summe einer convergirenden Reihe, deren einzelne Glieder Functionen einer Grösse x , und zwar continuirliche in der Nähe eines bestimmten Werthes von x sind, immer gleichfalls in dieser Gegend eine stetige Function derselben Grösse sei. Hieraus würde folgen, dass Reihen der vorausgesetzten Art nicht geeignet sind, *discontinuirliche* Functionen in der Nähe der Stellen, wo ihre Werthe springen, noch darzustellen; — mit andern Worten: dass durch ein Aggregat stetiger Grössen discontinuirliche auch dann nie repräsentirt werden können, wenn man die Form des Unendlichen zu Hilfe nimmt; so dass das Letztere nicht, wie es einen Uebergang vom Rationalen zum Irrationalen bildet, so auch eine Brücke zwischen stetigen und nicht stetigen Grössen zu schlagen vermöchte. Denn die Convergenz der Reihe würde aufhören, also die gewählte Form ihren Sinn verlieren, wo die Discontinuität beginnt.

Abhandlungen d. II. Cl. d. k. Ak. d. Wiss. V. Bd. II. Abth.

49

Figura 16: Introduzione della nota di Seidel, con riferimento al Cours d'Analyse, *Note über eine Eigenschaft der Reihen, welche discontinuirliche Functionen darstellen*, p.381

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x \alpha}{\alpha} d\alpha$$

können Beispiele davon abgehen; denn man kann dieses, durch bloße Zerlegung des unendlichen Intervalles, in welchem es zu nehmen ist, in eine unendliche Anzahl endlicher, verwandeln in eine Reihe, deren einzelne Glieder Integrale sind, von denen man fast *à vue* beweist, dass sie stetig von x abhängen, und welche Reihe nothwendig stets convergirt, weil ihre Summe immer einem der drei möglichen Werthe des ganzen Integrales gleich ist.

Wenn man, ausgehend von der so erlangten Gewissheit, dass der Satz nicht allgemein gelten kann, also seinem Beweise noch irgend eine versteckte Voraussetzung zu Grunde liegen muss, denselben einer genauern Analyse unterwirft, so ist es auch nicht schwer, die verborgne Hypothese zu entdecken; man kann dann rückwärts schliessen, dass diese bei Reihen, welche discontinuirliche Functionen darstellen, nicht erfüllt sein darf, indem nur so die Uebereinstimmung der *übrigens* richtigen Schlussfolge mit dem, was andererseits bewiesen ist, gerettet werden kann. Auf solche Art erhält man einen Satz, welcher sich auf diese Klasse von Reihen bezieht, und so ausgesprochen werden kann:

Theorem.

Hat man eine convergirende Reihe, welche eine discontinuirliche Function einer Grösse x darstellt, von der ihre einzelnen Glieder continuirliche Functionen sind, so muss man in der unmittelbaren Umgebung der Stelle, wo die Function springt, Werthe von x angeben können, für welche die Reihe beliebig langsam convergirt.

49*

Figura 17: Enunciato del Teorema di Seidel, *Note über eine Eigenschaft der Reihen, welche discontinuirliche Functionen darstellen*, p.383

3.3 La convergenza infinitamente lenta di Stokes

Mentre la dimostrazione di Seidel cercava di completare la dimostrazione di Cauchy del Cours d'Analyse, pochi mesi prima della pubblicazione della nota del matematico tedesco, nel dicembre del 1847, George Gabriel Stokes (1819-1903) presentava alla Cambridge Philosophical Society un lavoro dal titolo *On the Critical Values of the Sums of Periodic Series*. L'intero articolo offre uno studio molto generale delle serie di Fourier, in vista delle possibili applicazioni alla fisica. All'inizio dell'opera, Stokes precisa che esistono due metodi per lo studio delle serie di Fourier. Il primo metodo, quando si vuole studiare una serie trigonometrica, consiste nel moltiplicare i termini per le potenze successive di una quantità g minore di 1, per poi considerare la serie iniziale come "limite" di questa nuova serie quando g tende a 1 da sinistra. Il secondo metodo consiste nel calcolare le somme parziali. Stokes utilizza il primo metodo, che gli sembra più naturale per le applicazioni alla fisica, ma nota che questo metodo pone un problema di "inversione dei limiti". Infatti, consideriamo una serie u_n e la serie $g^n u_n$; l'idea del metodo è di utilizzare l'uguaglianza:

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \lim_{g \rightarrow 1^-} \sum_{n=1}^{\infty} g^n u_n,$$

vale a dire, più esplicitamente:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\lim_{g \rightarrow 1^-} g^n u_n \right) = \lim_{g \rightarrow 1^-} \left(\sum_{n=1}^{\infty} g^n u_n \right)$$

Ora, anche supponendo che tutti i limiti esistano, resta da verificare se essi siano uguali. Stokes dedica a questo problema di inversione dei limiti la sezione III, indipendente dal resto dell'articolo. È l'inizio di questa sezione, intitolata *Sulla discontinuità delle somme di serie infinite, e dei valori degli integrali presi tra limiti infiniti.*, che ci interessa riportare.

“Sia

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots \quad (66)$$

una serie infinita convergente, di somma U . Sia

$$v_1 + v_2 + \cdots + v_n + \cdots \quad (67)$$

un'altra serie infinita il cui termine generale v_n è una funzione della variabile positiva h , e diventa uguale a u_n quando h tende a 0. Supponiamo che per un valore sufficientemente piccolo di h e per tutti i valori inferiori la serie (67) sia convergente, e abbia per somma V . Si potrebbe credere a prima vista che il limite di V per $h = 0$ debba necessariamente essere uguale a U . Tuttavia, questo non è vero. Infatti, denotiamo con $f(n, h)$ la somma di n termini della serie (67): allora il limite di V è il limite di $f(n, h)$ quando n per primo diventa infinito e poi h tende a zero, mentre U è il limite di $f(n, h)$ quando h per primo tende a zero e successivamente n diventa infinito. Ogni volta che una funzione discontinua è sviluppata in serie periodica come la (15) o la (30)⁵¹, abbiamo un esempio di ciò. Ma è facile costruire due serie, che non hanno nulla a che fare con le serie periodiche, per le quali si verifica lo stesso fenomeno. A tal fine, è sufficiente prendere per $f(n, h) - U_n$ (U_n essendo la somma dei primi n termini della (66)) una quantità che ha

⁵¹Nello scritto originale, la serie (15) corrisponde alla serie

$$A_1 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) + A_2 \sin\left(\frac{2\pi x}{a}\right) + \cdots + A_n \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) + \cdots,$$

mentre la serie (30) corrisponde a

$$B_0 + \sum B_n \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right)$$

valori limite diversi a seconda dell'ordine in cui n e h dovrebbero assumere i loro valori limite, e che ha come differenza finita una quantità che si annulla quando n tende all'infinito, sia che h sia una quantità positiva sufficientemente piccola o che sia effettivamente zero. Per esempio, sia:

$$f(n, h) - U_n = \frac{2nh}{nh + 1} \quad (68)$$

che si annulla quando $n = 0$ ⁵². Allora:

$$\Delta[f(n, h) - U_n] = v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{2h}{(nh + 1)(nh + h + 1)}.$$

Supponiamo

$$U_n = 1 - \frac{1}{n + 1}$$

in modo che

$$u_n = \Delta U_{n-1} = \frac{1}{n(n + 1)},$$

da cui si ricavano le serie:

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n + 1)} + \cdots \quad (69)$$

$$\frac{1 + 3h}{2(1 + h)} + \cdots + \frac{h(h + 2)n^2 + h(4 - h)n + 1 - h}{n(n + 1)[(n - 1)h + 1](nh + 1)} + \cdots \quad (70)$$

che sono entrambe convergenti, e i cui termini generali diventano gli stessi quando h tende a 0. E tuttavia la prima ha per somma 1, mentre la somma della seconda è uguale a 3. Se il numeratore della frazione al membro destro della (68)

⁵²Il testo originale riporta $n = 0$, ma probabilmente si voleva intendere $h = 0$, come suggerisce anche Arsac.

fosse stato pnh invece di $2nh$, la somma della serie (70) sarebbe stata $p + 1$, e di conseguenza il limite a cui tende la somma quando h tende a zero sarebbe stato $p + 1$. Così, possiamo formare quante serie vogliamo come la (67) aventi quantità differenti come limiti delle loro somme quando h tende a zero, e aventi tuttavia tutte il loro termine generale che diventa uguale a u_n quando h tende a zero. Questo è altrettanto vero sia che la serie (66) sia convergente o divergente, supponendo naturalmente che le serie come la (67) siano sempre convergenti per tutti i valori positivi di h , per quanto piccoli.”⁵³

Nella citazione precedente, Stokes descrive il suo approccio al problema dell’inversione dei limiti in una quantità $V_n(h)$ che dipende da due variabili. Stokes propone un metodo per generare controesempi a partire da una successione convergente $U_n \rightarrow U$. L’idea consiste nell’introdurre una funzione $K(n, h)$, corrispondente alla differenza $V_n(h) - U_n$, che sia infinitesima per $h \rightarrow 0^+$ a ogni indice n fissato, ma il cui limite per $n \rightarrow \infty$ preservi una dipendenza da h , tale da alterare il valore limite finale quando $h \rightarrow 0^+$. In questo modo, nella successione di funzioni $V_n(h) = U_n + K(n, h)$ non si possono scambiare i limiti. Il resto dell’articolo continua:

“È importante, per gli obiettivi perseguiti nel presente articolo, trovare una condizione precisa che permetta di determinare in quali casi si possa sostituire il limite (67) con il limite (66). In effetti, dal seguente teorema risulta che questa sostituzione può essere effettuata in un gran numero di casi.

Teorema: *Il limite di V non può mai differire da U , a meno che la convergenza della serie (67)*

⁵³Stokes, *On critical values of the sums of periodic series* [11], 1847, pp.279-280

non diventi infinitamente lenta quando h tende a 0.

La convergenza della serie qui si dice che diventi infinitamente lenta se, denotando con n il numero di termini che si devono sommare per rendere la somma dei termini trascurati numericamente inferiore a una quantità data ε che può essere piccola a piacere, n cresce oltre ogni limite quando h decresce al di sotto di ogni limite.

Dimostrazione. Se la convergenza non diventa infinitamente lenta, è possibile trovare un numero n_1 abbastanza grande affinché, per il valore di h dal quale iniziamo e per tutti i valori inferiori e maggiori di zero, la somma dei termini trascurati sia numericamente inferiore a ε . Ora, il limite della somma dei primi n_1 termini della (67) quando h tende a zero è la somma dei primi n_1 termini della (66). Dunque, se ε' denota il valore numerico della somma dei termini oltre n_1 della serie (66), U e il limite di V non possono differire di una quantità così grande come $\varepsilon + \varepsilon'$. Ma ε e ε' possono essere resi più piccoli di qualsiasi quantità assegnabile, e quindi, U è uguale al limite di V .⁵⁴

Prima di riprodurre la dimostrazione, cerchiamo di interpretare cosa intenda Stokes con convergenza infinitamente lenta. Arsac ipotizza che Stokes scelga implicitamente l'intero n come il minimo intero per cui $|V(h) - V_n(h)| < \varepsilon$ valga per ogni indice successivo a partire da n ; denotiamo tale valore con $n(\varepsilon, h)$ proprio per esplicitarne la duplice dipendenza. Nonostante Stokes parli di una “quantità data ε , che può essere piccola a piacere”, sembra appropriato formalizzare la convergenza infinitamente lenta usando un quantificatore

⁵⁴Stokes, *On critical values of the sums of periodic series* [11], 1847, p.281

esistenziale:

$$\exists \varepsilon > 0 : \lim_{h \rightarrow 0^+} n(\varepsilon, h) = \infty.$$

Questa nozione di convergenza infinitamente lenta è definita allo stesso modo della nozione di convergenza arbitrariamente lenta di Seidel.

Si propone ora la dimostrazione in notazione moderna, elencando le ipotesi poste da Stokes all'inizio della sezione. Sono date:

1. Una successione U_n convergente verso un limite U .
2. Una successione di funzioni $V_n(h)$ convergente puntualmente verso una funzione $V(h)$ su $]0, a]$.
3. Per ogni n , $\lim_{h \rightarrow 0^+} V_n(h) = U_n$.

Si vuole mostrare che $\lim_{h \rightarrow 0^+} V(h) = U$, cioè:

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \left[\lim_{n \rightarrow \infty} V_n(h) \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\lim_{h \rightarrow 0^+} V_n(h) \right].$$

Il ragionamento di Stokes parte dalla disuguaglianza fondamentale:

$$|V(h) - U| \leq |V(h) - V_n(h)| + |V_n(h) - U_n| + |U_n - U|.$$

Supponiamo che sull'intervallo $]0, a]$ non vi sia convergenza infinitamente lenta. Sia ε dato, esiste n_1 tale che si abbia:

$$|V(h) - V_{n_1}(h)| = \left| \sum_{k=n_1+1}^{\infty} v_k(h) \right| < \varepsilon \quad (\text{ipotesi 2}).$$

Sia $\varepsilon' = |U_{n_1} - U|$ (ipotesi 1), si ha dunque:

$$|V(h) - U| \leq \varepsilon + |V_{n_1}(h) - U_{n_1}| + \varepsilon'.$$

Passando al limite quando h tende a 0^+ , sapendo che $\lim_{h \rightarrow 0^+} V_{n_1}(h) = U_{n_1}$ (ipotesi 3), si ottiene:

$$\left| \lim_{h \rightarrow 0^+} V(h) - U \right| \leq \varepsilon + \varepsilon'.$$

Ora, si possono rendere ε e ε' piccoli a piacere, quindi $\lim_{h \rightarrow 0^+} V(h) = U$.

Di seguito proponiamo un'analisi della dimostrazione, con lo scopo di capire in che modo Stokes si sia avvicinato alla definizione di convergenza uniforme. È importante notare che, affinché l'indice n possa tendere all'infinito quando la variabile h si avvicina a 0, è necessario considerare n come funzione di h . Questo passaggio evidenzia come Stokes, al pari di Seidel, avesse colto la dipendenza di questo indice dalla variabile indipendente. La convergenza infinitamente lenta, individuata da Stokes, è il principale ostacolo all'inversione dei limiti; la sua negazione è a priori più debole della convergenza uniforme. Infatti, denotando con a "il valore di h dal quale iniziamo", l'enunciato di Stokes di convergenza non infinitamente lenta può essere formalizzato come:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_1, \forall h \in (0, a] \implies |V(h) - V_{n_1}(h)| < \varepsilon.$$

Al contrario, la moderna definizione di convergenza uniforme si esprime come:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_1, \forall h \in (0, a], \forall n > n_1 \implies |V(h) - V_n(h)| < \varepsilon.$$

Le due definizioni risultano differenti dal punto di vista logico.

Consideriamo uno scenario ipotetico, che chiarisce la differenza tra i due enunciati. Supponiamo di voler migliorare l'approssimazione

$$| \lim_{h \rightarrow 0^+} V(h) - U |.$$

Per far ciò, occorre ridurre la somma $\varepsilon + \varepsilon'$. Per rimpicciolire ε' (cioè per far avvicinare la somma parziale U_{n_1} al valore totale U), diventa necessario aumentare il numero di termini, passando da n_1 a un nuovo indice più grande, che chiamiamo n_2 . Tuttavia, cambiando l'indice a $n_2 > n_1$, cosa garantisce che $|V(h) - V_{n_2}(h)|$ rimanga ancora più piccolo di ε ? Nel caso di convergenza uniforme il resto rimane confinato sotto la soglia per ogni h e la dimostrazione funziona. Se invece la convergenza non fosse uniforme, potrebbero esistere dei valori di h , arbitrariamente prossimi a 0, in cui, aumentando l'indice da n_1 a n_2 , il resto $|V(h) - V_{n_2}(h)|$ tornerebbe a "gonfiarsi" e superare ε .

Si può quindi dare credito a Stokes di aver introdotto la convergenza uniforme? Arsac è un sostenitore del sì poiché, nella sua argomentazione, il passaggio “è possibile trovare un numero n_1 abbastanza grande” sembra indicare che, se un valore n_1 è adatto, lo sono anche quelli più grandi. Inoltre, quando fa notare che “ ε e ε' possono essere resi più piccoli di qualsiasi quantità assegnabile”, egli suppone abbastanza manifestamente che si possa sostituire n_1 con un numero più grande, senza incappare in difetti di convergenza. Questa interpretazione, condivisa dalla maggior parte degli storici della matematica, fa di Stokes un co-scopritore della convergenza uniforme insieme a Seidel.

may be treated just as the integral (59); and it may be shewn that in the same circumstances we may replace the limits $-a$, and a by $-\infty$, $+\infty$ respectively. If we suppose $\chi(\beta)$ and $\sigma(\beta)$ known, we may find as before the values of x for which $f(x)$, $f'(x)$... are discontinuous, and the quantities by which those functions are suddenly increased. We may also find the direct developement of $f'(x)$, $f''(x)$... in two integrals of the form (65); and we may if we please clear the integrals (65) of the part which renders $f(x)$, $f'(x)$... discontinuous.

37. In the developement of $f(x)$ in an integral of the form (50) or (59), or in two integrals of the form (65), it has hitherto been supposed that $f(x)$ is not infinite. It may be observed however that it is allowable to suppose $f(x)$ to become infinite any finite number of times, provided $\int f(x) dx$ be essentially convergent about the values of x which render $f(x)$ infinite. This may be shewn just as in the case of series. Hence, the formulæ such as (55) which give the developement of $f^\mu(x)$ are true even when $f^\mu(x)$ is infinite, $f^{\mu-1}(x)$ being finite.

SECTION III.

On the discontinuity of the sums of infinite series, and of the values of integrals taken between infinite limits.

38. LET

$$u_1 + u_2 \dots + u_n + \dots \dots \dots (66),$$

be a convergent infinite series having U for its sum. Let

$$v_1 + v_2 \dots + v_n + \dots \dots \dots (67),$$

be another infinite series of which the general term v_n is a function of the positive variable h , and becomes equal to u_n when h vanishes. Suppose that for a sufficiently small value of h and all inferior values the series (67) is convergent, and has V for its sum. It might at first sight be supposed that the limit of V for $h=0$ was necessarily equal to U . This however is not true. For let the sum to n terms of the series (67) be denoted by $f(n, h)$: then the limit of V is the limit of $f(n, h)$ when n first becomes infinite and then h vanishes, whereas U is the limit of $f(n, h)$ when h first vanishes

and then n becomes infinite, and these limits may be different. Whenever a discontinuous function is developed in a periodic series like (15) or (30) we have an instance of this; but it is easy to form two series, having nothing to do with periodic series, in which the same happens. For this purpose it is only requisite to take for $f(n, h) - U_n$, (U_n being the sum of the first n terms of (66),) a quantity which has different limiting values according to the order in which n and h are supposed to assume their limiting values, and which has for its finite difference a quantity which vanishes when n becomes infinite, whether h be a positive quantity sufficiently small or be actually zero.

For example, let

$$f(n, h) - U_n = \frac{2nh}{nh + 1} \dots \dots \dots (68),$$

which vanishes when $n = 0$. Then

$$\Delta \{f(n, h) - U_n\} = v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{2h}{(nh + 1)(nh + h + 1)}.$$

Assume

$$U_n = 1 - \frac{1}{n+1}, \text{ so that } u_n = \Delta U_{n-1} = \frac{1}{n(n+1)},$$

and we get the series

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} \dots + \frac{1}{n(n+1)} + \dots \dots \dots (69),$$

$$\frac{1+5h}{2(1+h)} \dots + \frac{h(h+2)n^2 + h(4-h)n + 1 - h}{n(n+1)\{(n-1)h+1\}(nh+1)} + \dots \dots \dots (70),$$

which are both convergent, and of which the general terms become the same when h vanishes. Yet the sum of the first is 1, whereas the sum of the second is 3.

If the numerator of the fraction on the right-hand side of (68) had been pnh instead of $2nh$, the sum of the series (70) would have been $p+1$, and therefore the limit to which the sum approaches when h vanishes would have been $p+1$. Hence we can form as many series as we please like (67) having different quantities for the limits of their sums when h vanishes, and yet all having their n^{th} terms becoming equal to u_n when h vanishes. This is equally true whether the series (66) be convergent or divergent, the series like (67) of course being always supposed to be convergent for all positive values of h however small.

39. It is important for the purposes of the present paper to have a ready mode of ascertaining in what cases we may replace the limit of (67) by (66). Now it follows from the following theorem that this substitution may at once be made in an extensive class of cases.

THEOREM. The limit of V can never differ from U unless the convergency of the series (67) becomes infinitely slow when h vanishes.

The convergency of the series is here said to become infinitely slow when, if n be the number of terms which must be taken in order to render the sum of the neglected terms numerically less than a given quantity ϵ which may be as small as we please, n increases beyond all limit as h decreases beyond all limit.

DEMONSTRATION. If the convergency do not become infinitely slow, it will be possible to find a number n_1 so great that for the value of h we begin with and for all inferior values greater than zero the sum of the neglected terms shall be numerically less than ϵ . Now the limit of the sum of the first n_1 terms of (67), when h vanishes is the sum of the first n_1 terms of (66). Hence if ϵ' be the numerical value of the sum of the terms after the n_1^{th} of the series (66), U and the limit of V cannot differ by a quantity so great as $\epsilon + \epsilon'$. But ϵ and ϵ' may be made smaller than any assignable quantities, and therefore U is equal to the limit of V .

COR. 1. If the series (66) is essentially convergent, and if, either from the very beginning, or after a certain term whose rank does not depend upon h , the terms of (67) are numerically less than the corresponding terms of (66), the limit of V is equal to U .

For in this case the series (67) is more rapidly convergent than (66), and therefore its convergency remains finite.

COR. 2. If the series (66) is essentially convergent, and if the terms of (67) are derived from those of (66) by multiplying them by the ascending powers of a quantity g which is less than 1, and which becomes 1 in the limit, the limit of V is equal to U .

It may be observed that when the convergency of (67) does not become infinitely slow when h vanishes there is no occasion to prove the convergency of (66), since it follows from that of (67). In fact, let V_n be the sum of the first n terms of (67), U_n the same for (66), V_0 the value of V for $h = 0$. Then by hypothesis

4 La sintesi portata da Weierstrass

In questo capitolo conclusivo si descrive l'introduzione della convergenza uniforme nella sua forma attuale. Se i contributi indipendenti di Seidel e Stokes nel 1848 hanno il merito di individuare la convergenza “arbitrariamente o infinitamente lenta”, la definitiva sistematizzazione formale della convergenza uniforme si deve alle opere di Karl Weierstrass (1815-1897). Prima di esporre il contributo di Weierstrass, consideriamo uno degli ultimi lavori della carriera di Cauchy che, nel 1853, probabilmente alla luce delle nuove conoscenze matematiche emerse, decide di aggiornare il teorema del Capitolo VI del suo *Cours d'Analyse*.

4.1 Il ritorno di Cauchy sul teorema della continuità

Il dibattito dell'Ottocento sulla convergenza delle serie di funzioni si concentra a lungo sul tentativo di correggere il teorema della continuità di Cauchy. I lavori indipendenti di Seidel e Stokes del 1848, attraverso la definizione della convergenza “arbitrariamente o infinitamente lenta”, pongono di fatto le basi per superare la convergenza punto per punto “alla Cauchy”, che appare non essere più la sola possibile. In merito a ciò, è proprio lo stesso Cauchy che decide di ritornare sul suo risultato in una nota pubblicata nel 1853 sui *Comptes Rendus* dell'Accademia di Parigi, intitolata *Note sur les séries convergentes dont les termes sont des fonctions continues*. Per prima cosa osserva che il teorema resta verificato per serie di potenze intere crescenti di una variabile, ma che per altre serie richiede delle “restrizioni”, portando come esempio lo stesso menzionato a suo tempo da Abel nel 1826⁵⁵. Il cuore del ragionamento di Cauchy nel 1853 si basa sullo studio del resto della serie attraverso l'uso di due indici. Definita la somma parziale $s_n(x)$ e fissato un

⁵⁵Cauchy, in merito a questo teorema, afferma: “*É facile vedere come deve essere modificato l'enunciato del teorema, perché non si presenti più alcuna eccezione*”(Cauchy, *Note sur les séries convergentes* [5], 1853, p.31). Tuttavia, nonostante Cauchy riporti esattamente la parola “eccezione” di Abel, non cita mai il matematico norvegese nella nota del 1853, così come non riferisce nemmeno dei risultati sulle differenti velocità di convergenza di Seidel e di Stokes.

secondo indice $n' > n$, la differenza può essere scritta come:

$$s_{n'}(x) - s_n(x) = u_n(x) + u_{n+1}(x) + \cdots + u_{n'-1}(x).$$

Quando n' cresce all'infinito, questa differenza si avvicina sempre di più al resto n -esimo della serie, ovvero a $r_n(x)$:

$$\lim_{n' \rightarrow \infty} (s_{n'}(x) - s_n(x)) = r_n(x).$$

Egli intuisce che, se si sceglie un indice n abbastanza grande, $|s_{n'}(x) - s_n(x)|$ diventa più piccolo di qualsiasi quantità a piacere, e questo può accadere contemporaneamente per tutti i valori di x compresi tra i limiti stabiliti. Questa nuova ipotesi, unita al fatto che i singoli termini della serie sono funzioni continue, garantisce che anche la funzione somma $s(x)$ sia continua. La novità introdotta da Cauchy consiste nel legare questa convergenza non più al singolo punto x , ma a tutto l'intervallo considerato, dando vita a una convergenza “uniforme”, espressione che, tuttavia, lui non adotta mai. Cauchy conclude così la sua nota con il nuovo enunciato del teorema:

“Teorema: Se i termini della serie $\sum u_n$ sono delle funzioni della variabile reale x , continue rispetto a questa variabile entro limiti dati, se inoltre la somma

$$u_n + u_{n+1} + \cdots + u_{n'-1} = s_{n'} - s_n$$

diventa *sempre* infinitesima per valori infinitamente grandi dei numeri interi n e $n' > n$, la serie sarà convergente e la somma s della serie sarà, entro i limiti dati, funzione continua della variabile x .”⁵⁶

⁵⁶Cauchy, *Note sur les séries convergentes dont les termes sont des fonctions continues* [5], 1853, p. 33

Se traduciamo questo teorema nel linguaggio logico moderno, eliminando il concetto di infinitesimo a lui tanto caro, otteniamo l'attuale definizione di una successione di funzioni che soddisfa la condizione di *Cauchy uniforme* su un intervallo I :

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ tale che } \forall n, n' > N, \forall x \in I \\ \implies |s_{n'}(x) - s_n(x)| < \varepsilon. \end{aligned}$$

In questa formula l'ordine dei simboli è fondamentale: l'indice fissato N dipende solo dall'errore ε e non risente del punto x , che compare infatti solo alla fine della frase ($\forall x \in I$). Rispetto al testo del 1821, la parola “sempre” viene precisata e riferita a tutto l'intervallo I . Questo segna il passaggio decisivo da una proprietà che vale punto per punto a una proprietà globale.

4.2 La formalizzazione portata da Weierstrass

Se Cauchy intuisce la necessità di una convergenza globale, la sistemazione definitiva della convergenza uniforme è opera di Karl Weierstrass (1815-1897). Sembrerebbe che, in realtà, il matematico tedesco avesse già colto la natura delle differenti velocità di convergenze fin dal 1841 nel suo saggio giovanile *Zur Theorie der Potenzreihen*, anticipando di qualche anno gli articoli di Seidel e Stokes, sebbene tali riflessioni siano rimaste inedite fino al 1894, anno di pubblicazione della raccolta *Mathematische Werke*. È molto probabile che Weierstrass abbia sviluppato tali ragionamenti sulle serie infinite a partire dai “difficili” corsi dedicati alle funzioni ellittiche, tenuti dal suo professore Christoph Gudermann all'Accademia di Münster. I primi lavori matematici di Weierstrass incominciano esattamente da un'analisi del *Theorie der Modular-Functionen*, uno scritto che il suo maestro Gudermann aveva iniziato a pubblicare sul *Crelle's Journal* a partire dal 1838. Questo lavoro, che ha come argomento la convergenza di serie infinite legate a funzioni ellittiche di Jacobi⁵⁷, presenta al suo interno diverse formulazioni di veloci-

⁵⁷Queste funzioni sono estensioni doppiamente periodiche delle normali funzioni trigonometriche, scoperte intorno al 1830 da Abel e Jacobi tramite l'inversione degli integrali ellittici. Servono principalmente a risolvere equazioni differenziali non lineari nella fisica classica, come il moto del pendolo, e a studiare alcune proprietà geometriche delle curve

tà di convergenza, anche se queste non vengono mai definite esplicitamente. Gudermann, a seconda del caso preso in esame, adotta senza spiegazione termini come “convergenza veloce”, “convergenza debole” e “convergenza lenta”. Tuttavia, queste distinzioni non sono supportate da definizioni matematiche e servono solo a fini pratici di calcolo. È bene ritenere che Gudermann non avesse in mente il concetto di convergenza uniforme, ma piuttosto si riferisse solo alla velocità dei diversi casi di convergenza punto per punto. Questo ambiente stimola comunque Weierstrass a cercare un modo più rigoroso per descrivere il comportamento delle serie. Nel saggio del 1841 di Weierstrass, *Zur Theorie der Potenzreihen*, che tratta del teorema delle serie doppie per le serie di potenze a più variabili, compare per la prima volta il termine *gleichmässig convergent* (uniformemente convergente):

“Siano date infinite serie di potenze ordinarie in una certa successione:

$$F_0(x_1, x_2, \dots, x_n), F_1(x_1, x_2, \dots, x_n), F_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots$$

e supponiamo che in un dato intorno G di $(0, 0, \dots, 0)$ non solo ogni singola serie di questa successione converga in modo incondizionato e uniforme (*gleichmässig*), ma che lo faccia anche la loro somma. Se indichiamo i coefficienti di $x_1^{v_1} x_2^{v_2} \dots x_n^{v_n}$ in $F_\mu(x_1, x_2, \dots, x_n)$ con $A_{v_1, v_2, \dots, v_n}^{(\mu)}$ e poniamo

$$\sum_{(\mu)} A_{v_1, v_2, \dots, v_n}^{(\mu)} = A_{v_1, v_2, \dots, v_n},$$

si può dimostrare che $A_{v_1, v_2, \dots, v_n}$ è finito e che l'equazione

$$\sum_{\mu=0}^{\infty} F_\mu(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{(v)} A_{v_1, v_2, \dots, v_n} x_1^{v_1} x_2^{v_2} \dots x_n^{v_n}$$

algebriche.

vale per ogni $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ del suddetto intorno.”⁵⁸

Questo brano farebbe pensare che Weierstrass avesse già capito tutto nel 1841, anticipando Seidel e Stokes. Tuttavia, alcuni studi recenti sollevano dei legittimi dubbi. Tra questi, troviamo quelli di Klaus Viertel, che in un articolo⁵⁹ del 2021, fa notare un fatto alquanto particolare: a distanza di poche pagine, per dimostrare un teorema quasi identico, Weierstrass usa il termine *gleichförmig convergent* invece di *gleichmässig*, utilizzato precedentemente, pur riferendosi allo stesso concetto. L’autore interpreta questa stranezza nel seguente modo:

“Tuttavia, sulla base degli appunti delle lezioni qui discussi, la prima traccia del termine *gleichmässig* è stata rinvenuta in un corso di lezioni sulle funzioni ellittiche del 1870/71, mentre il termine *gleichförmig* è apparso per la prima volta in un corso sulle funzioni analitiche del 1880/81. Questi indizi suggeriscono fortemente che l’articolo del 1841 sia stato significativamente rivisto in termini di terminologia matematica e notazione, il che rende altamente discutibile la datazione della prima comparsa della convergenza uniforme nel 1841. Ciò non implica che a quel tempo Weierstrass non utilizzasse un concetto di convergenza uniforme; tuttavia, la terminologia e la notazione relative alla convergenza uniforme in (*Weierstrass, 1841*) furono introdotte anni dopo nei suoi corsi di lezioni. Tuttavia, l’entità delle correzioni e delle revisioni effettuate per

⁵⁸Weierstrass, *Zur Theorie der Potenzreihen* [14], 1841, pp. 70-71

⁵⁹Il nome dell’articolo è *The development of the concept of uniform convergence in Karl Weierstrass’s lectures and publications between 1861 and 1866* [12].

la pubblicazione nelle Werke [Opere Complete] è sconosciuta.”⁶⁰

Per questa ragione, è difficile ammettere che Weierstrass fosse già pienamente conscio della convergenza uniforme nel 1841. Quel che è certo è che la prima traccia verificabile risale al 1861, anno in cui Weierstrass utilizza il suo concetto di convergenza *im gleichen Grade* (convergenza alla stessa velocità) in un corso di lezioni al *Gewerbeinstitut* (Istituto Tecnico) di Berlino, dove insegna a partire dal 1856. Solamente con la sua nomina a professore ordinario presso l’Università di Berlino, avvenuta nel 1864, i risultati delle sue ricerche diventano sempre più noti, anche al di fuori di Berlino e della stessa Germania. Gli appunti dei suoi studenti sono stati i fattori determinanti di questo sviluppo. Durante la sua attività didattica presso l’Università di Berlino, egli non pubblica i concetti fondamentali del suo approccio all’analisi, per cui la risorsa più rilevante per indagare la storia “weierstrassiana” della convergenza uniforme è costituita dagli appunti degli studenti delle sue lezioni.⁶¹

Nonostante la conoscenza del lavoro di Weierstrass sulla convergenza uniforme sia piuttosto incompleta durante il periodo all’Istituto Tecnico, è all’interno delle dispense⁶² redatte nel 1861 da Hermann Amandus Schwarz, uno dei più brillanti allievi di Weierstrass all’Istituto e suo successore a Berlino, che si rintraccia la prima occorrenza formale della convergenza “alla stessa velocità”. In questi appunti, tale nozione di convergenza viene introdotta per spiegare quando è possibile derivare o integrare una serie termine a termine:

“Una funzione è spesso composta da infinite altre funzioni. Per esempio, una funzione può essere rappresentata da una somma o da un prodotto

⁶⁰Viertel, *Archive for History of Exact Sciences* [12], 2021, Vol.75, p. 460

⁶¹All’interno degli appunti, il livello di autenticità del pensiero di Weierstrass non è del tutto definibile; a partire dal 1862, Weierstrass era costretto a tenere le proprie lezioni da seduto a causa di forti vertigini che gli impediscono di stare in piedi, mentre uno studente trascriveva alla lavagna sotto sua dettatura. Spesso negli appunti dei suoi allievi sono presenti alterazioni ed altri tipi di errori, che probabilmente si sono verificati sia durante la stesura scritta, che nel processo stesso di dettatura.

⁶²Questi appunti derivano dalle lezioni di *Differentialrechnung* (Calcolo Differenziale), corso tenuto da Weierstrass al *Gewerbeinstitut* nel 1861

di infiniti termini. Indagheremo ora come una siffatta funzione, espressa da una serie infinita, possa essere derivata; poiché la conclusione che le regole precedentemente sviluppate si applichino direttamente a una somma di infiniti termini non è rigorosa e spesso si rivela persino errata. Sia data una serie i cui singoli termini sono funzioni continue di una singola variabile, e si assuma che

$$\phi_0(x) + \phi_1(x) + \phi_2(x) + \phi_3(x) + \dots$$

sia convergente per tutti i valori di x compresi tra due limiti dati; allora, dobbiamo innanzitutto esaminare in quali circostanze la serie rappresenta una funzione continua di x . Solo in tal caso, una serie

$$s = t_0 + t_1 + t_2 + t_3 + \dots$$

si definisce convergente se la differenza tra l'intera serie e la somma dei primi n termini, $s - s_n$, può essere resa piccola a piacere all'aumentare di n , ovvero se la somma

$$t_n + t_{n+1} + t_{n+2} + t_{n+3} + \dots + t_{n+r},$$

dove r è un numero positivo arbitrario, può essere resa più piccola di qualsiasi quantità data all'aumentare di n , in modo tale che lo stesso n debba essere scelto per tutti i valori di x , e la proprietà si conservi se n viene sostituito da $n + m$, dove m è un numero arbitrario [?]⁶³. Ciò dimostra che si intende quel tipo di convergenza

⁶³In questo passaggio è incerto cosa sia scritto negli appunti di Schwarz.

che da allora è stata chiamata *convergenza alla stessa velocità*⁶⁴.”⁶⁵

Tradotta nel linguaggio contemporaneo dei simboli logici, la definizione di Schwarz per un intervallo I diventa:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0 \text{ tale che } \forall n \geq N, \forall r \in \mathbb{N}, \forall x \in I \\ \implies |s_{n+r}(x) - s_{n-1}(x)| < \varepsilon$$

Il legame con la convergenza definita da Cauchy nel 1853 è evidente, ma Weierstrass fa un passo avanti decisivo verso la precisione moderna. Sostituisce il vago concetto di infinitesimo con una “quantità data” (che diventerà il numero ε) e chiarisce meglio l’uniformità dicendo che “lo stesso n deve essere scelto per tutti i valori di x ”. Inoltre, dal punto di vista degli indici, Weierstrass preferisce fissare un valore n e far variare l’indice superiore mediante l’incremento di un parametro intero $r \in \mathbb{N}$. Osserviamo che entrambi i matematici, Weierstrass e Cauchy, calcolano ancora l’errore confrontando tra loro le somme parziali della serie, senza fare un riferimento diretto alla funzione somma $s(x)$ nella forma $|s(x) - s_n(x)| < \varepsilon$.

Negli anni successivi, specialmente dopo essere diventato professore ordinario all’Università di Berlino nel 1864, nelle sue lezioni Weierstrass cambia più volte i termini che si riferiscono al concetto di “uniformità”, come dimostrano i quaderni dei suoi studenti. Possiamo dividere questo percorso in tre periodi: fino al 1870, l’espressione da lui utilizzata è *Im gleichen Grade* (alla stessa velocità), che di fatto, è analoga alla condizione di uniformità di Cauchy del 1853. In questo periodo nessuno distingue ancora tra la condizione di Cauchy uniforme e la convergenza uniforme vera e propria e negli appunti degli studenti si trovano ben quattro combinazioni diverse per dire la stessa cosa:

⁶⁴Questa frase finale è stata probabilmente aggiunta dallo stesso Schwarz. Presubilmente, Schwarz conosceva questo concetto da un altro corso di lezioni tenuto sempre da Weierstrass al Gewerbeinstitut, tuttavia non è noto a quando questa nozione possa risalire all’interno delle opere di Weierstrass.

⁶⁵Schwarz, *Einleitung in die Theorie der analytischen Functionen: nach Vorlesungen von K. Weierstrass*. [10], 1861, p.64.

si controlla la differenza semplice o il suo modulo, e lo si fa per un solo indice o definitivamente per tutti gli indici successivi.

Successivamente il 1870, compare il termine *gleichmäßig* (della stessa misura), quando Weierstrass introduce nuovi teoremi sulle serie a variabili complesse. Da questo momento in poi, il simbolo del modulo entra stabilmente nella definizione e si inizia a calcolare l'errore direttamente tramite il resto della serie rispetto alla funzione limite. Si può affermare che la definizione formale di convergenza uniforme per come la conosciamo oggi ha avuto origine in questi anni, ossia:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N, \forall x \in [a, b] \implies |s(x) - s_n(x)| < \varepsilon.$$

Il termine *gleichmäßig* è quello che tuttora viene utilizzato nei manuali tedeschi di matematica per riferirsi alla convergenza uniforme.

L'ultimo periodo coincide con l'introduzione del termine *gleichförmig* (della stessa forma); questa parola viene introdotta nei corsi di funzioni analitiche a partire dal 1880. Anche se alcuni storici pensano che Weierstrass usasse i due termini per scopi diversi (uno per i numeri reali e uno per i numeri complessi), l'analisi dei testi fa capire che per lui i due vocaboli sono semplici sinonimi. Il modo in cui Weierstrass definisce la convergenza cambia spesso in base al teorema che deve dimostrare.

Differentiation unendlicher Reihen.

Es kommt häufig vor, dass eine Funktion aus unendlich vielen anderen zusammengesetzt ist, so kann sich eine Funktion z.B. als eine Summe oder ein Produkt von unendlich vielen Gliedern darstellen lassen. Es soll nun untersucht werden, wie sich eine solche durch eine unendliche Reihe dargestellte Funktion differenzieren lässt; denn der Schluss, dass die früher entwickelten Regeln ohne weiteres auch für eine Summe aus unendlich vielen Gliedern gelten, ist nicht streng und häufig sogar unrichtig.

Es sei nun eine Reihe gegeben, deren einzelne Glieder stetige Funktionen einer veränderlichen Grösse seien und es sei angenommen,

$$\rho_0(x) + \rho_1(x) + \rho_2(x) + \rho_3(x) + \dots \quad \text{in infinitum}$$

dass dieselbe convergent sei für alle zwischen zwei gegebenen Grenzen liegende Werthe von x , so ist zunächst zu untersuchen, unter welchen Umständen diese Reihe eine continuirliche Funktion von x darstellt. Eine Reihe $s = t_0 + t_1 + t_2 + t_3 + \dots$ in inf. heisst überhaupt dann convergent, wenn sie so beschaffen ist, dass die Differenz der ganzen Summe Reihe und der Summe der n ersten Glieder $s - s_n$ durch Vergrößerung von n so klein gemacht werden kann, als man immer will, oder wenn die Summe von r auf das n te Glied folgenden Gliedern $t_n + t_{n+1} + t_{n+2} + t_{n+3} + \dots + t_{n+r}$ wo r eine ganz beliebige positive Zahl bedeutet, durch Vergrößerung von n kleiner als jede nur annehmbare Grösse gemacht werden kann, und zwar so, dass für alle Werthe x dasselbe n zu nehmen ist, wobei die Eigenschaft auch erhalten bleibt, wenn statt n $n+m$ gesetzt wird, wo m beliebig + Zahl.

Der Sinn zeigt, dass diejenige Art der Convergenz gemeint ist, welche bisher mit dem Namen "Convergenz im gleichen Grade" bezeichnet wird.

Soll also $f(x) = \rho_0(x) + \rho_1(x) + \rho_2(x) + \rho_3(x) + \dots$ in inf. für

Figura 21: Dispensa di Schwarz del corso *Differentialrechnung* tenuto da Weierstrass nel 1861. A fine pagina, sottolineata dallo stesso Schwarz, appare per la prima volta in una pubblicazione il termine *Convergenz Im gleichen Grade*, che indica una convergenza "alla stessa velocità", *Vorlesungsmitschrift von K. Weierstrass: Differentialrechnung*, p.64.

4.3 La convergenza uniforme riassunta da Hardy

Si può trovare una classificazione estremamente dettagliata delle diverse forme di convergenza uniforme in un saggio dell'inizio del Novecento composto da Godfrey Harold Hardy (1877-1947). In questo scritto del 1918, intitolato *Sir George Stokes and the Concept of Uniform Convergence*, Hardy ordina in modo sistematico i concetti sviluppati nel secolo precedente, traducendo le varie idee di convergenza presentate da Seidel, Stokes e Weierstrass in uno schema basato sulla diversa posizione dei simboli logici. Seguendo l'impianto di Hardy, prendiamo una serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$$

con termini continui su un intervallo chiuso e limitato $[a, b]$. Supponiamo che la serie sia convergente in ogni punto e indichiamo la somma con $s(x)$. Studiamo il comportamento della serie usando la funzione resto r_n , definita nel modo usuale come:

$$r_n(x) = s(x) - s_n(x).$$

Hardy divide le forme di convergenza in tre gruppi principali, a seconda di come viene controllato il resto $r_n(x)$.

Nel primo gruppo, che definisce con la lettera A , la condizione richiesta deve valere definitivamente, cioè per tutti gli indici n a partire da un certo punto in poi ($n \geq n_0$). A questo gruppo appartengono le seguenti definizioni:

-A1: (*Convergenza uniforme in un intervallo.*) Questa è la definizione classica attribuita a Weierstrass. L'indice di partenza n_0 dipende solo dall'errore ε e non ha alcun legame con il punto x :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0(\varepsilon), \forall x \in [a, b] \implies |r_n(x)| \leq \varepsilon.$$

-A2: (*Convergenza uniforme nell'intorno di un punto.*) Questa formula concentra il controllo vicino a un punto specifico ξ . Hardy interpreta questa definizione con quella presentata da Seidel. L'ampiezza dell'intorno δ viene

scelta per prima e dipende solo dalla posizione di ξ ; l'indice n_0 viene calcolato dopo, in base a ξ e a ε :

$$\begin{aligned} &\forall \xi \in [a, b], \exists \delta(\xi) > 0 : \forall \varepsilon > 0, \exists n_0(\xi, \varepsilon) \in \mathbb{N} : \\ &\forall n \geq n_0(\xi, \varepsilon), \forall x \in [\xi - \delta(\xi), \xi + \delta(\xi)] \cap [a, b] \implies |r_n(x)| \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

-A3: (*Convergenza uniforme in un punto*). Rispetto al caso precedente, l'ordine dei parametri cambia: l'ampiezza dell'intorno δ non è fissa, ma si restringe se si richiede un errore ε più piccolo. Il controllo definitivo dell'errore vale all'interno di un intervallo locale che dipende contemporaneamente da entrambe le variabili:

$$\begin{aligned} &\forall \xi \in [a, b], \forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\xi, \varepsilon) > 0, \exists n_0(\xi, \varepsilon) \in \mathbb{N} : \\ &\forall n \geq n_0(\xi, \varepsilon), \forall x \in [\xi - \delta(\xi, \varepsilon), \xi + \delta(\xi, \varepsilon)] \cap [a, b] \implies |r_n(x)| \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Un elemento originale della classificazione di Hardy è l'introduzione del secondo gruppo, chiamato B , in cui non si chiede più che la proprietà valga per ogni n successivo a n_0 . Si richiede solo che esista un numero infinito di indici, anche isolati, per cui la disuguaglianza è vera. In pratica, basta trovare un singolo valore di n_0 grande a piacere (cioè superiore a una soglia minima N) che faccia scendere l'errore sotto la quantità richiesta.

-B1: (*Convergenza quasi-uniforme in un intervallo*). L'indice utile n_0 vale contemporaneamente per tutti i punti del dominio $[a, b]$ e dipende sia dall'errore ε sia dalla soglia minima N :

$$\begin{aligned} &\forall \varepsilon > 0, \forall N \in \mathbb{N}, \exists n_0(\varepsilon, N) > N : \\ &\forall x \in [a, b] \implies |r_{n_0}(x)| \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

-B2: (*Convergenza quasi-uniforme nell'intorno di un punto*). Questa formula, per Hardy, traduce l'idea usata da Stokes nel 1848 per spiegare il comportamento delle serie di Fourier vicino ai punti di salto. L'intorno δ dipende solo dal punto ξ , mentre l'indice n_0 è influenzato da tutti i parametri

messi insieme:

$$\begin{aligned} & \forall \xi \in [a, b], \exists \delta(\xi) > 0 : \forall \varepsilon > 0, \forall N \in \mathbb{N}, \exists n_0(\xi, \varepsilon, N) > N : \\ & \forall x \in [\xi - \delta(\xi), \xi + \delta(\xi)] \cap [a, b] \implies |r_{n_0}(x)| \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

-B3: (*Convergenza quasi-uniforme in un punto*). È la versione locale del caso precedente. L'intorno δ perde ogni rigidità e si adatta continuamente in base all'errore ε e alla soglia N :

$$\begin{aligned} & \forall \xi \in [a, b], \forall \varepsilon > 0, \forall N \in \mathbb{N}, \exists \delta(\xi, \varepsilon, N) > 0, \exists n_0(\xi, \varepsilon, N) > N : \\ & \forall x \in [\xi - \delta(\xi, \varepsilon, N), \xi + \delta(\xi, \varepsilon, N)] \cap [a, b] \implies |r_{n_0}(x)| \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Hardy decide di distinguere un ultimo gruppo C , dove vengono formalizzati i risultati ottenuti da Cesare Arzelà tra il 1883 e il 1900 nello studio delle condizioni necessarie e sufficienti per integrare una serie termine a termine.

-C: (*Convergenza quasi-uniforme per intervalli*). In questa formulazione, l'intervallo totale $[a, b]$ viene suddiviso in un numero finito ν di sottointervalli I_r , che variano a seconda di ε e N . Ad ogni sottointervallo viene associato un proprio indice n_r , che funziona per tutti i punti di quel sottointervallo e che supera la soglia minima N :

$$\begin{aligned} & \forall \varepsilon > 0, \forall N \in \mathbb{N}, \exists \nu(\varepsilon, N) \in \mathbb{N}, \exists \{I_1, I_2, \dots, I_\nu\} \text{ sottointervalli di } [a, b] \\ & \text{ tali che } \bigcup_{r=1}^{\nu} I_r = [a, b], \quad \exists \{n_1, n_2, \dots, n_\nu\} \subset \mathbb{N} \text{ con } n_r > N \ (r = 1, \dots, \nu) : \\ & \forall r \in \{1, \dots, \nu\}, \forall x \in I_r \implies |r_{n_r}(x)| \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

La formalizzazione della convergenza uniforme ha permesso di risolvere parte dei grandi problemi che hanno afflitto i matematici nell'Ottocento. Oltre a legittimare lo scambio tra limiti, come dimostrato da Stokes, la convergenza uniforme si rivela la condizione sufficiente per garantire l'integrazione secondo Riemann termine a termine di una serie di funzioni:

$$\int_a^b \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x) dx.$$

La convergenza uniforme si rivela utile anche nella derivazione delle serie. Infatti, se le funzioni f_n sono derivabili con derivate continue, la serie delle f_n converge in almeno un punto dell'intervallo in esame e la serie delle derivate converge uniformemente, allora vale:

$$\frac{d}{dx} \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dx} f_n(x).$$

Prima della “scoperta” della convergenza uniforme, le somme infinite sembravano dare risultati incerti. Alcuni modificavano le serie in modo da ridursi a serie di potenze (pratica contestata da Abel); altri, come Fourier, consideravano le somme parziali delle serie calcolando termine a termine e cercando di dedurre un comportamento al limite. L'introduzione della convergenza uniforme ha sicuramente cambiato il modo di fare certi calcoli, permettendo di operare sulle serie con la stessa disinvoltura riservata ai polinomi.

I shall write the series in the form

$$\sum_1^{\infty} u_n(x);$$

and I shall suppose, for simplicity, that every term of the series is continuous, and the series convergent, for every x of the interval $a \leq x \leq b$. I shall denote the sum of the series by $s(x)$; and I shall write

$$s_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x), \quad s(x) = s_n(x) + r_n(x).$$

The fundamental inequality in all my definitions will be of the type

$$|r_n(x)| \leq \epsilon \dots \dots \dots (A).$$

I shall refer to this inequality simply as (A).

When we define uniform convergence, in one sense or another, we have to choose various numbers in a definite logical order, those which are chosen later being, in general, functions of those which are chosen before. I shall write each number in a form in which all the arguments of which it is a function appear explicitly: thus $n_0(\xi, \epsilon)$ is a function of ξ and ϵ , $n_0(\epsilon)$ one of ϵ alone.

It will sometimes happen that one of the later numbers depends upon several earlier numbers *already connected by functional relations*, so that it is really a function of a selection of these numbers only. Thus δ may have been determined as a function of ϵ ; and n_0 may have to be determined as a function of ξ , ϵ , and δ , so that it is in reality a function of ξ and ϵ only. I shall express this by writing

$$n_0 = n_0(\xi, \epsilon, \delta) = n_0(\xi, \epsilon);$$

and I shall use a similar notation in other cases of the same kind.

3. The first three senses of uniform convergence are as follows.

A 1: Uniform convergence throughout an interval. *The series is said to be uniformly convergent throughout the interval (a, b) if to every positive ϵ corresponds an $n_0(\epsilon)$ such that (A) is true for $n \geq n_0(\epsilon)$ and $a \leq x \leq b$.*

This is the ordinary or 'classical', and most important, sense, the sense in which uniform convergence is defined in every treatise on the theory of series.

A 2: Uniform convergence in the neighbourhood of a point. *The series is said to be uniformly convergent in the neighbourhood of the point ξ of the interval (a, b) if an interval $(\xi - \delta(\xi), \xi + \delta(\xi))^*$ can be found throughout which it is uniformly convergent; that is to say if a positive $\delta(\xi)$ exists such that (A) is true for every positive ϵ , for $n \geq n_0(\xi, \delta, \epsilon) = n_0(\xi, \epsilon)$, and for $\xi - \delta(\xi) \leq x \leq \xi + \delta(\xi)$.*

* A trivial change is of course required in the definition if $\xi = a$ or $\xi = b$. The same point naturally arises in the later definitions.

Figura 22: Definizione di Hardy delle convergenze A1 e A2, *Sir George Stokes and the concept of uniform convergence* [8], p.150

A3: Uniform convergence at a point. *The series is said to be uniformly convergent at the point $x=\xi$ (or for $x=\xi$) if to every positive ϵ correspond a positive $\delta(\xi, \epsilon)$ and an $n_0(\xi, \epsilon, \delta)=n_0(\xi, \epsilon)$ such that (A) is true for $n \geq n_0(\xi, \epsilon)$ and for $\xi - \delta(\xi, \epsilon) \leq x \leq \xi + \delta(\xi, \epsilon)$.*

4. Before proceeding further it will be well to make a few remarks concerning these definitions and their relations to one another.

The idea of uniform convergence in the neighbourhood of a particular point (Definition **A2**) is substantially that defined by Seidel in 1848*. It is clear, however, that definitions **A1** and **A2** were both familiar to Weierstrass as early as 1841 or 1842†. It is obvious that a series uniformly convergent throughout an interval is uniformly convergent in the neighbourhood of every point of the interval. The converse theorem is important and by no means obvious, and was first proved by Weierstrass‡ in a memoir published in 1880. This theorem would now be proved by a simple application of the ‘Heine-Borel Theorem’, and is a particular case of a theorem which will be referred to in a moment.

Definition **A3** appears first, in the form in which I state it, in a paper of W. H. Young published in 1903§; but the idea is present in an earlier paper of Osgood||. The essential difference between definitions **A2** and **A3** is that in the latter δ is chosen after ϵ and is a function of ξ and ϵ , while in the former it is chosen before ϵ and is a function of ξ alone. In each case n_0 is a function of two independent variables, ξ and ϵ . It is plain that uniform convergence in the neighbourhood of ξ involves uniform convergence at ξ , and at (and indeed in the neighbourhood of) all points sufficiently near to ξ . But uniform convergence at ξ does not involve uniform convergence in the neighbourhood of ξ .

It is important, however, to observe that *uniform convergence at every point of an interval involves uniform convergence throughout the interval.* This important theorem is proved very simply by

* ‘Note über eine Eigenschaft der Reihen, welche discontinuirliche Functionen darstellen’, *Münchener Abhandlungen*, vol. 7, 1848, pp. 381–394. This memoir has been reprinted in Ostwald’s *Klassiker der exakten Wissenschaften*, no. 116. The reference there given to vol. 5, 1847, is incorrect.

† For detailed references bearing on this and similar historical points, see Pringsheim’s article already quoted.

‡ See the memoir ‘Zur Functionenlehre’ (*Abhandlungen aus der Functionenlehre*, pp. 69–104 (pp. 71–72)).

§ ‘On non-uniform convergence and term-by-term integration of series’, *Proc. London Math. Soc.*, ser. 2, vol. 1, pp. 89–102.

|| ‘Non-uniform convergence and the integration of series’, *American Journal of Math.*, vol. 19, 1897, pp. 155–190. See Prof. Young’s remarks on this point at the beginning of his later paper ‘On uniform and non-uniform convergence of a series of continuous functions and the distinction of right and left’, *Proc. London Math. Soc.*, ser. 2, vol. 6, 1907, pp. 29–51.

Figura 23: Definizione di Hardy della convergenza A3, *Sir George Stokes and the concept of uniform convergence* [8], p.151

Young, in his paper already quoted, by means of the Heine-Borel Theorem*; and it plainly includes, as a particular case, Weierstrass's theorem referred to above.

5. It seems to me that the definition given by Stokes is not any one of **A 1**, **A 2**, **A 3**; and that, if we are to understand him rightly, we must consider another parallel group of definitions. These definitions differ from those given above in that (A) is supposed to be satisfied, not for *all* sufficiently large values of n , but only for *an infinity* of values.

B 1: Quasi-uniform convergence throughout an interval.

The series is said to be quasi-uniformly convergent throughout (a, b) if to every positive ϵ and every N corresponds an $n_0(\epsilon, N)$ greater than N and such that (A) is true for $n = n_0(\epsilon, N)$ and $a \leq x \leq b$.

B 2: Quasi-uniform convergence in the neighbourhood of a point. The series is said to be quasi-uniformly convergent in the neighbourhood of ξ if an interval $(\xi - \delta(\xi), \xi + \delta(\xi))$ can be found throughout which it is quasi-uniformly convergent; i.e., if a positive $\delta(\xi)$ exists such that (A) is true for every positive ϵ , every N , an $n_0(\xi, \delta, \epsilon, N) = n_0(\xi, \epsilon, N)$ greater than N , and $\xi - \delta(\xi) \leq x \leq \xi + \delta(\xi)$.

B 3: Quasi-uniform convergence at a point. The series is said to be quasi-uniformly convergent for $x = \xi$ if to every positive ϵ and every N correspond a positive $\delta(\xi, \epsilon, N)$ and an

$$n_0(\xi, \epsilon, \delta, N) = n_0(\xi, \epsilon, N),$$

greater than N , such that (A) is true for $n = n_0(\xi, \epsilon, N)$ and for $\xi - \delta(\xi, \epsilon, N) \leq x \leq \xi + \delta(\xi, \epsilon, N)$.

Definition **B 1** is to be attributed to Dini or to Darboux†. Another form of it has been given by Hobson‡. As Arzelà and Hobson§ have pointed out, a series is quasi-uniformly convergent throughout an interval if, and only if, it can be made uniformly convergent by an appropriate bracketing of its terms.

Definition **B 2** is for us at the moment of peculiar interest, for (as I shall show in a moment) it is really *this* definition that is given by Stokes.

Definition **B 3** is also of great interest, both in itself and in

* Choose ϵ and determine $\delta(\xi, \epsilon)$ and $n_0(\xi, \epsilon)$, as in definition **A 3**, for every ξ of the interval. Every point of (a, b) is included in an interval $(\xi - \delta, \xi + \delta)$. By the Heine-Borel Theorem, every point of (a, b) is included in one or other of a finite sub-set of these intervals. If $N(\epsilon)$ is the largest of the n_0 's corresponding to each of the intervals of this finite sub-set, then (A) is true for $n \geq N$ and $a \leq x \leq b$.

This is the essence of the proof, though, like all proofs of the same character, it requires a somewhat more careful statement if all appearance of dependence upon Zermelo's *Auswahlprinzip* is to be avoided.

† See Pringsheim, l. c.

‡ 'On modes of convergence of an infinite series of functions of a real variable', *Proc. London Math. Soc.*, ser. 2, vol. 1, 1903, pp. 373-387. Hobson (following Dini) uses the expression 'simply uniformly'.

§ L. c., p. 375.

Figura 24: Definizione di Hardy del gruppo B, *Sir George Stokes and the concept of uniform convergence* [8], p.152

the condition **B 1** but a condition first formulated by Arzelà*, viz.:

C: Quasi-uniform convergence by intervals (*convergenza uniforme a tratti*). The series is said to be quasi-uniformly convergent by intervals if to every positive ϵ and every N correspond a division of (a, b) into a finite number $\nu(\epsilon, N)$ of intervals $\delta_r(\epsilon, N)$, and a corresponding number of numbers $n_r(\epsilon, N)$, all greater than N , and such that (A) is true for $n = n_r$ ($r = 1, 2, \dots, \nu$) and all values of x which belong to δ_r .

The deduction of Arzelà's criterion from **B 3**, in the manner sketched above, was first made by Hobson†.

There is one further point which seems worth noticing here, although it is not directly connected with Stokes's memoir. Dini‡ proved that if $u_n(x) \geq 0$ for all values of n and x , and $s(x)$ is continuous throughout (a, b) , then the series is uniformly convergent throughout (a, b) . This theorem is now almost intuitive. For it is obvious that, for series of positive terms, quasi-uniform convergence in any one of the senses **B 1**, **B 2**, or **B 3** involves uniform convergence in the corresponding sense **A 1**, **A 2**, or **A 3**. If then $s(x)$ is continuous throughout (a, b) it is continuous for every ξ of (a, b) ; and therefore the series is quasi-uniformly convergent for every ξ ; and therefore uniformly convergent for every ξ ; and therefore uniformly convergent throughout (a, b) .

7. Let us now consider Stokes's definitions and proofs in the light of the preceding discussion.

It is clear, in the first place, that Stokes has in his mind some phenomenon characteristic of a small, but fixed, neighbourhood of a point.

'Let $u_1 + u_2 + \dots$ (66)', he says§, 'be a convergent infinite series having U for its sum. Let $v_1 + v_2 + \dots$ (67) be another infinite series of which the general term v_n is a function of the positive variable h and becomes equal to u_n when h vanishes. Suppose that for a sufficiently small value of h and all inferior values the series (67) is convergent, and has V for its sum. It might at first sight be supposed that the limit of V for $h = 0$ was necessarily equal to U . This however is not true....

THEOREM. The limit of V can never differ from U unless the convergency of the series (67) becomes infinitely slow when h vanishes.

* 'Sulle serie di funzioni', *Memorie di Bologna*, ser. 5, vol. 8, 1900, pp. 131-186, 701-744.

† *L. c.*, pp. 380-382.

‡ *L. c.* (German edition), pp. 148-149. See also Bromwich, *Infinite series*, p. 125 (Ex. 3).

§ p. 279.

Figura 25: Definizione di Hardy del gruppo c, *Sir George Stokes and the concept of uniform convergence* [8], p.154

Riferimenti bibliografici

- [1] Niels Henrik Abel. *Recherches sur la série* $1 + \frac{m}{1}x + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2}x^2 + \dots$, volume 1. 1826. Ristampato in: *Œuvres complètes de Niels Henrik Abel*, Édition Sylow Ludwig and Lie Sophus, Tome 1, Christiania, 1881, pp.219-250.
- [2] Gilbert Arsac. *Cauchy, Abel, Seidel, Stokes et la convergence uniforme. De la difficulté historique du raisonnement sur les limites*. Hermann, Paris, 2013.
- [3] Umberto Bottazzini. *Il calcolo sublime: una storia dell'analisi matematica da Euler a Weierstrass*. Boringhieri, Torino, 1981.
- [4] Augustin-Louis Cauchy. *Cours d'Analyse de l'École Royale Polytechnique*. Debure, Paris, 1821.
- [5] Augustin-Louis Cauchy. *Note sur les séries convergentes dont les termes sont des fonctions continues d'une variable réelle ou imaginaire, entre des limites données*, volume 36. 1853.
- [6] Joseph Fourier. *Théorie analytique de la chaleur*. Firmin Didot, Paris, 1822.
- [7] Ivor Grattan-Guinness and Jerome R Ravetz. *Joseph Fourier, 1768–1830: A Survey of His Life and Work, Based on a Critical Edition of His Monograph on the Propagation of Heat*. MIT Press, Cambridge, MA, 1972.
- [8] Godfrey Harold Hardy. *Sir George Stokes and the concept of uniform convergence*, volume 19. 1918.
- [9] Imre Lakatos. *Dimostrazioni e confutazioni: la logica della scoperta matematica*. Feltrinelli, Milano, 1979. Edizione italiana a cura di Giulio Giorello.

- [10] Hermann Amandus Schwarz. *Einleitung in die Theorie der analytischen Functionen: nach Vorlesungen von K. Weierstrass*. 1861. Dispensa manoscritta delle lezioni di K. Weierstrass.
- [11] George Gabriel Stokes. *On the critical values of the sums of periodic series*, volume 8. 1847.
- [12] Klaus Viertel. *The development of the concept of uniform convergence in Karl Weierstrass's lectures and publications between 1861 and 1866*, volume 75. Springer, 2021.
- [13] Philipp Ludwig von Seidel. *Note über die Convergenz oder Divergenz der unendlichen Reihen, welche nach den Potenzen einer veränderlichen Grösse fortschreiten*, volume 5. 1848.
- [14] Karl Weierstrass. *Mathematische Werke*, volume 1. Mayer & Müller, Berlin, 1894.