

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

SCUOLA DI SCIENZE
Corso di Laurea in Matematica

Integrali di tipo Stieltjes

Tesi di Laurea in Analisi Matematica

Relatore:
Chiar.mo Prof.
Andrea Bonfiglioli

Presentata da:
Enrico Ciavatti

Anno Accademico 2025/2026

*Il matematico, viaggiando su la sua corrente di simboli, trafficando
apparentemente con verità puramente formali, può facilmente giungere a
risultati di somma importanza per la comprensione dell'universo fisico.*
Karl Pearson.

Introduzione

L'argomento affrontato in questa tesi riguarda gli integrali di tipo Stieltjes, i quali prendono il nome da colui che li studiò per primo, l'olandese Thomas Joannes Stieltjes (Zwolle, 29 dicembre 1856-Tolosa, 31 dicembre 1894), e comparvero per la prima volta nell'articolo scritto dal matematico olandese *Recherches sur les fractions continues* (1894); tali oggetti hanno vaste applicazioni: ad esempio in Teoria della Probabilità, essi permettono di operare allo stesso tempo con variabili aleatorie continue e con variabili aleatorie discrete, sintetizzando il tutto in un'unica notazione.

Vedremo nel corso di questo testo che gli integrali di tipo Stieltjes, a seconda del tipo di costruzione, possono essere suddivisi in varie tipologie, ognuna delle quali con le proprie strutture e i propri comportamenti peculiari: l'integrale di Stieltjes (che indicheremo semplicemente con S), l'integrale di Riemann-Stieltjes (RS), l'integrale di Darboux-Stieltjes (DS), e l'integrale di Lebesgue-Stieltjes (LS). Gli integrali di S, RS e DS vengono individuati per mezzo di quattro elementi, ossia due numeri reali $a < b$, una funzione limitata $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, detta funzione integranda, ed una funzione limitata $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, detta funzione integratrice, e si indicano con la notazione

$$\int_a^b f(x) d\alpha(x),$$

oppure con la notazione

$$\int_a^b f d\alpha.$$

In questo testo a volte verranno messe davanti all'integrale le sigle $S-$, $RS-$ o $DS-$ (esempio: $S - \int_a^b f d\alpha$) nei casi in cui potrebbero manifestarsi ambiguità fra i vari tipi di integrale. Il punto di partenza per costruire gli integrali di S, RS e DS è una partizione dell'intervallo $[a, b]$, vale a dire un sottoinsieme finito di $[a, b]$ del tipo

$$P = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}.$$

L'integrale di S e quello di RS sono accomunati dall'uso delle cosiddette somme di Riemann-Stieltjes, ossia, dato un insieme di punti $t_k \in [x_{k-1}, x_k]$, per $k = 1, \dots, n$, si pone

$$S(P, f, \alpha) = \sum_{k=1}^n f(t_k) \Delta\alpha_k,$$

dove $\Delta\alpha_k = \alpha(x_k) - \alpha(x_{k-1})$, per $k = 1, \dots, n$ (osserviamo che le somme $S(P, f, \alpha)$ dipendono anche dalla scelta dei punti $\{t_1, \dots, t_n\}$, ma questi ultimi, per alleggerire la notazione, verranno lasciati sottintesi). Diremo che la funzione f è Riemann-Stieltjes-integrabile su $[a, b]$ (e scriveremo $f \in RS(\alpha)$ su $[a, b]$) se esiste un numero reale A

(l'integrale di RS) per cui per ogni $\epsilon > 0$, esista una partizione P_ϵ di $[a, b]$ tale che per ogni partizione P di $[a, b]$ più fine di P_ϵ (ossia $P \supseteq P_\epsilon$), si abbia che

$$|S(P, f, \alpha) - A| < \epsilon.$$

Diremo invece che f è Stieltjes-integrabile su $[a, b]$ (e scriveremo $f \in S(\alpha)$ su $[a, b]$) se esiste un numero reale A (l'integrale di S) tale che per ogni $\epsilon > 0$, esista un $\delta_\epsilon > 0$ tale che per ogni partizione $P = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$ di $[a, b]$ per cui $\|P\| < \delta_\epsilon$ (dove $\|P\|$ è la *norma*, o il *calibro* di P , e si definisce come $\|P\| = \max\{x_k - x_{k-1} | k = 1, \dots, n\}$), si abbia che

$$|S(P, f, \alpha) - A| < \epsilon.$$

Si vedrà nel corso del primo e del secondo capitolo che la S-integrabilità implica sempre la RS-integrabilità, mentre non vale il viceversa (e questo costituisce un primo confronto fra i vari integrali studiati). L'integrale di DS, invece, viene definito quando la funzione integratrice α è crescente su $[a, b]$. Per costruirlo, si fa uso della somma di DS superiore, e quella di DS inferiore, definite rispettivamente come

$$U(P, f, \alpha) = \sum_{k=1}^n M_k(f) \Delta \alpha_k, \quad L(P, f, \alpha) = \sum_{k=1}^n m_k(f) \Delta \alpha_k,$$

dove $M_k(f) = \sup_{[x_{k-1}, x_k]} f$ e $m_k(f) = \inf_{[x_{k-1}, x_k]} f$, per ogni $k = 1, \dots, n$. Ebbene, diremo che f è Darboux-Stieltjes-integrabile su $[a, b]$ (e scriveremo $f \in DS(\alpha)$ su $[a, b]$) se, denotata con $\Omega_{[a, b]}$ la famiglia delle partizioni su $[a, b]$, vale che

$$\underline{I}(f, \alpha) := \sup_{P \in \Omega_{[a, b]}} L(P, f, \alpha) = \inf_{P \in \Omega_{[a, b]}} U(P, f, \alpha) =: \bar{I}(f, \alpha),$$

dove $\underline{I}$ e $\bar{I}$ sono detti rispettivamente integrale di Darboux-Stieltjes inferiore e superiore di f rispetto ad α su $[a, b]$. Il valore comune di $\underline{I}(f, \alpha)$ e di $\bar{I}(f, \alpha)$ viene chiamato integrale di Darboux-Stieltjes di f rispetto ad α su $[a, b]$. Un risultato che si vedrà nel corso del testo mostrerà che quando α è crescente, da una parte $RS(\alpha) = DS(\alpha)$ su $[a, b]$, e dall'altra che la DS-integrabilità è equivalente a richiedere il soddisfacimento della cosiddetta condizione di Riemann, vale a dire: per ogni $\epsilon > 0$, esiste una partizione P_ϵ di $[a, b]$ tale che per ogni partizione P di $[a, b]$ più fine di P_ϵ si abbia che

$$U(P, f, \alpha) - L(P, f, \alpha) < \epsilon.$$

Si avrà modo di vedere, in particolare, come questo risultato permetta poi di studiare la RS-integrabilità di una classe molto ampia di funzioni (integratrici), che sono le funzioni $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ a variazione limitata su $[a, b]$. Oltre alla definizione principale di funzione a variazione limitata (ossia, esiste un $M > 0$ tale che $\sum_{k=1}^n |\Delta \alpha_k| < M$ per ogni partizione $P = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$ di $[a, b]$), verrà utilizzata anche una seconda definizione equivalente, vale a dire α è a variazione limitata su $[a, b]$ se essa può essere scritta come differenza di funzioni crescenti su $[a, b]$. Questo permetterà di verificare la validità di molti risultati che valgono per RS quando la funzione integratrice è a variazione limitata, verificandoli per DS quando l'integratrice è crescente (vengono quindi in aiuto la linearità dell'integrale di RS rispetto alla funzione integratrice e la condizione di Riemann).

Per l'integrale di S con funzione integratrice a variazione limitata, verranno poi studiati anche risultati di passaggio al limite sotto il segno d'integrale (uno che coinvolge successioni di funzioni integrande, ed uno che coinvolge successioni di funzioni integratrici). Infine, verrà studiato l'integrale di Lebesgue-Stieltjes (LS). Per definirlo, si ricorre a strumenti di Teoria della Misura, in particolare si fa uso di due risultati fondamentali, ossia il *Primo Teorema di Estensione di Carathéodory* e il *Teorema di Estensione di Kolmogorov*. Essi permettono di definire, partendo da una funzione $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ monotona crescente e continua da destra, la cosiddetta misura di Lebesgue-Stieltjes associata ad α , μ_α , definita su un'opportuna σ -algebra M_α su $\mathbb{R}$ (si ottiene così uno spazio di misura $(\mathbb{R}, M_\alpha(\mathbb{R}), \mu_\alpha)$). Dato un elemento $E \in M_\alpha$, e data una funzione semplice $\varphi : E \rightarrow \mathbb{R}$ (ossia $\varphi = \sum_{j=1}^n c_j \chi_{(a_j, b_j]}$, dove per ogni $j = 1, \dots, n$, $c_j \geq 0$, gli intervalli $(a_j, b_j]$ sono sottoinsiemi disgiunti di E , e $\chi_{(a_j, b_j]}$ è la funzione caratteristica di $(a_j, b_j]$), si definisce l'integrale di LS di φ rispetto a μ_α su E come

$$\int_E \varphi d\mu_\alpha = \sum_{j=1}^n c_j (\alpha(b_j) - \alpha(a_j)).$$

Quando f è una funzione positiva e μ_α -misurabile su $\mathbb{R}$ e $E \in M_\alpha(\mathbb{R})$, si definisce l'integrale di LS di f rispetto a μ_α su E come

$$\int_E f d\mu_\alpha = \sup \left\{ \int_E \varphi d\mu_\alpha \mid \varphi \text{ funzione semplice su } E, \varphi \leq f \right\}.$$

Si vedrà poi subito dopo come si definisce l'integrale di LS per funzioni più generali. Il passo successivo è quello di definire l'integrale di una funzione $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ rispetto a misure con segno. Esse verranno costruite in questo testo a partire da funzioni $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ a variazione limitata e continue da destra; infatti, queste possono essere scritte come differenza di funzioni crescenti α_1 e α_2 crescenti su $[a, b]$ e continue da destra su $[a, b]$. Da α_1 e α_2 possono essere costruite due misure di Lebesgue-Stieltjes μ_{α_1} e μ_{α_2} su $[a, b]$, le quali permettono di definire l'integrale

$$\int_{[a, b]} f d\nu_\alpha := \int_{[a, b]} f d\mu_{\alpha_1} - \int_{[a, b]} f d\mu_{\alpha_2},$$

dove ν_α è la misura con segno definita come $\nu_\alpha := \mu_{\alpha_1} - \mu_{\alpha_2}$. Nel testo avremo modo di analizzare come l'integrale di LS si relaziona con gli integrali di S e di DS (quando α è crescente) e poi con gli integrali di S e RS (quando la α è a variazione limitata), e vedremo inoltre come i teoremi di passaggio al limite sotto il segno d'integrale (visti per l'integrale di S) possono essere riadattati nel senso di LS.

Indice

1	Confronto fra le varie definizioni	1
1.1	Concetti preliminari	1
1.2	Le definizioni secondo Riemann-Stieltjes e secondo Stieltjes	1
1.3	La definizione secondo Darboux-Stieltjes	4
2	Risultati principali	7
2.1	Risultati che valgono nel senso di Stieltjes	7
2.2	Risultati che valgono nel senso di RS ma non nel senso di S	11
2.3	Alcuni risultati per Darboux-Stieltjes	14
2.4	Condizioni necessarie per l'esistenza del DS-integrale	24
3	Ulteriori risultati	27
3.1	Funzioni a variazione limitata	27
3.2	Funzioni integratrici a variazione limitata	30
3.3	Teoremi di media integrale e loro conseguenze	35
3.4	Teoremi di continuità	41
3.5	Somme finite scritte come un integrale di Riemann-Stieltjes e formula della somma di Eulero	44
3.6	Passaggio al limite sotto il segno d'integrale	46
4	L'integrale di Lebesgue-Stieltjes	53
4.1	Concetti preliminari	53
4.2	Definizione dell'integrale di Lebesgue-Stieltjes	57
4.3	Confronto con l'integrale di Stieltjes	59
4.4	Confronto con l'integrale di Darboux-Stieltjes	63
4.5	Integrazione rispetto a misure con segno	65
4.6	Un controesempio interessante	69
5	Appendice sull'integrabilità delle funzioni continue	73
	Bibliografia	75

Capitolo 1

Confronto fra le varie definizioni

1.1 Concetti preliminari

Sia dato un intervallo $[a, b]$. Una partizione dell'intervallo $[a, b]$ è un sottoinsieme finito $P = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$ di $[a, b]$; talvolta useremo la notazione $\Omega_{[a,b]}$ per indicare la famiglia delle partizioni dell'intervallo $[a, b]$.

Diciamo che una partizione P' è più *fine* di P (o che è un *raffinamento* di P) se $P' \supseteq P$. Chiamiamo inoltre norma o *calibro* di P il numero

$$\|P\| = \max\{\Delta x_k = x_k - x_{k-1} : k = 1, 2, \dots, n\}.$$

Osserviamo che, se P' è più fine di P , allora $\|P'\| \leq \|P\|$.

Data una funzione $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, e data una partizione P di $[a, b]$, denotiamo con $\Delta\alpha_k$ la quantità $\Delta\alpha_k = \alpha(x_k) - \alpha(x_{k-1})$ per $1 \leq k \leq n$, cosicché

$$\sum_{k=1}^n \Delta\alpha_k = \sum_{k=1}^n (\alpha(x_k) - \alpha(x_{k-1})) = \alpha(b) - \alpha(a).$$

1.2 Le definizioni secondo Riemann-Stieltjes e secondo Stieltjes

In tutto questo capitolo, senza doverlo ridire, supponiamo che siano date due funzioni

$$f, \alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, \text{ limitate.}$$

Definizione 1.1 (Somme di Riemann-Stieltjes). *Sia*

$$P = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$$

una partizione di $[a, b]$ e, per ogni $k = 1, \dots, n$, sia t_k un punto fissato nel sottointervallo $[x_{k-1}, x_k]$. Una somma della forma

$$S(P, f, \alpha) = \sum_{k=1}^n f(t_k) \Delta\alpha_k$$

è detta una somma di Riemann-Stieltjes di f rispetto ad α . Avvertiamo che questa quantità dipende anche dall'insieme $T = \{t_1, \dots, t_n\}$, ma per non appesantire le notazioni non scriveremo $S(P, T, f, \alpha)$, sebbene quest'ultima sarebbe la notazione più corretta.

Siamo pronti per le due definizioni centrali della tesi.

Definizione 1.2 (RS-integrabilità). *Nelle notazioni precedenti, diremo che*

f è Riemann-Stieltjes-integrabile (RS-integrabile) rispetto ad α su $[a, b]$,

e scriveremo “ $f \in RS(\alpha)$ su $[a, b]$ ”, se esiste un numero reale A tale che per ogni $\epsilon > 0$, esista una partizione P_ϵ di $[a, b]$ per cui, data una qualunque partizione P di $[a, b]$ più fine di P_ϵ , e data una qualunque scelta dei punti t_k in $[x_{k-1}, x_k]$, si abbia $|S(P, f, \alpha) - A| < \epsilon$.

Se un tale $A \in \mathbb{R}$ esiste, esso è unico e viene detto “integrale di Riemann-Stieltjes” (di f rispetto ad α); se non c’è possibile ambiguità, si indica con

$$\int_a^b f(x) d\alpha(x), \quad \text{oppure con } \int_a^b f d\alpha.$$

Quando altri tipi di integrale interverranno in uno stesso contesto, potremo scrivere

$$RS\text{-} \int_a^b f(x) d\alpha(x), \quad \text{oppure } RS\text{-} \int_a^b f d\alpha.$$

Definizione 1.3 (S-integrabilità). *Nelle notazioni precedenti, diremo che*

f è Stieltjes-integrabile (S-integrabile) rispetto ad α su $[a, b]$,

e scriveremo “ $f \in S(\alpha)$ su $[a, b]$ ”, se esiste un numero reale A tale che per ogni $\epsilon > 0$, esista un $\delta_\epsilon > 0$ per cui, data una qualunque partizione P di $[a, b]$ tale che $\|P\| < \delta_\epsilon$, e data una qualunque scelta dei punti t_k in $[x_{k-1}, x_k]$, si abbia $|S(P, f, \alpha) - A| < \epsilon$.

Se un tale $A \in \mathbb{R}$ esiste, esso è unico e viene detto “integrale di Stieltjes” (di f rispetto ad α); se non c’è possibile ambiguità, si indica con

$$\int_a^b f(x) d\alpha(x), \quad \text{oppure con } \int_a^b f d\alpha.$$

Quando altri tipi di integrale interverranno in uno stesso contesto, potremo scrivere

$$S\text{-} \int_a^b f(x) d\alpha(x), \quad \text{oppure } S\text{-} \int_a^b f d\alpha.$$

Osserviamo che il valore dell’integrale nei due sensi precedenti (RS- oppure S-) dipende solo da f , α , a e b , e non dalla x (chiamata variabile d’integrazione), che di per sé non aggiunge nessuna informazione riguardo alla struttura dell’integrale (x è una cosiddetta variabile *muta*, e potrebbe essere sostituita con qualsiasi altro simbolo). In entrambi gli integrali appena definiti, la f viene chiamata funzione integranda, e la α funzione integratrice. Sorgono domande inevitabili:

Come sono relazionate queste due definizioni, e in cosa invece differiscono? Per rispondere (in parte) alla prima domanda, vedremo qui di seguito che (S) implica (RS), mentre per rispondere (in parte) alla seconda domanda, mostreremo sempre in questo paragrafo un esempio di funzione non S-integrabile, che poi vedremo essere invece RS-integrabile nel corso del secondo capitolo: questo mostrerà quindi che, mentre (S) implica (RS), *in generale non vale l’implicazione inversa*. In sintesi:

$$(S) \Rightarrow (RS).$$

Osservazione 1.4 ((S) implica (RS)). Mostriamo che (S) implica (RS). Siano date due funzioni $f, \alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ limitate, e supponiamo che $f \in S(\alpha)$ su $[a, b]$. Allora esiste un numero A tale che per ogni $\epsilon > 0$, esista un $\delta_\epsilon > 0$ per cui per ogni partizione P con $\|P\| < \delta_\epsilon$, si abbia $|S(P, f, \alpha) - A| < \epsilon$. Sia

$$n = \min\{m \in \mathbb{N} : m\delta_\epsilon > b - a\},$$

e consideriamo la partizione $P_\epsilon = \{a = x_0 < x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$, dove

$$\Delta x_k \equiv \frac{b - a}{n}, \quad \text{per } k = 1, \dots, n.$$

Allora $\|P_\epsilon\| < \delta_\epsilon$, e presa una qualunque partizione P più fine di P_ϵ , si ha che $\|P\| < \delta_\epsilon$, e dunque $|S(P, f, \alpha) - A| < \epsilon$, grazie alla definizione (S). Questo mostra che la S-integrabilità implica la RS-integrabilità, e abbiamo anche dimostrato che se l'integrale di Stieltjes esiste, allora esso coincide con l'integrale di Riemann-Stieltjes.

Qui di seguito mostreremo l'esistenza di funzioni f e α per cui non vale la definizione di $S(\alpha)$ -integrabilità per f .

Esempio 1.5. Sia $c \in (a, b)$, e sia dato un numero reale $R \neq 0$. Supponiamo che $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sia definita da

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in [a, c] \\ R & \text{se } x \in (c, b], \end{cases}$$

mentre $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ è definita da

$$\alpha(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in [a, c) \\ R & \text{se } x \in [c, b]. \end{cases}$$

Si noti che, se $R \geq 0$, sia α che f sono crescenti su $[a, b]$; questo fatto sarà rilevante quando parleremo di integrale di Darboux-Stieltjes. Si noti inoltre (e questo ci servirà per condizioni sufficienti di integrabilità nel senso di Riemann-Stieltjes) che:

per $x \rightarrow c^-$: f è continua da sinistra in c mentre α è discontinua da sinistra in c ;
per $x \rightarrow c^+$: f è discontinua da destra in c mentre α è continua da destra in c .

Osserviamo che $f \in S(\alpha)$ su $[a, c]$ e su $[c, b]$; infatti, per ogni partizione P' di $[a, c]$, abbiamo che $S(P', f, \alpha) = 0$, poiché f è nulla su $[a, c]$, mentre se P'' è una partizione di $[c, b]$, allora $S(P'', f, \alpha) = 0$, in quanto α è costante su $[c, b]$.

Dunque, gli integrali di Stieltjes $\int_a^c f d\alpha$ e $\int_c^b f d\alpha$ esistono e sono entrambi nulli. Verrebbe quindi da pensare che f sia $S(\alpha)$ -integrabile anche su $[a, b]$. Invece ora *mostriamo che $f \notin S(\alpha)$ su $[a, b]$ (mentre vedremo più avanti che $f \in RS(\alpha)$ su $[a, b]$; Teorema 2.8).*

Sia data una partizione $P = \{a = x_0 < x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$ di $[a, b]$. Se $c \in P$, allora esiste un j tale che $c = x_j$. Dunque

$$\begin{aligned} S(P, f, \alpha) &= \sum_{k=1}^n f(t_k) \Delta \alpha_k = \sum_{k=1}^j f(t_k) \Delta \alpha_k + \sum_{k=j+1}^n f(t_k) \Delta \alpha_k \\ &= S(P \cap [a, c], f, \alpha) + S(P \cap [c, b], f, \alpha) = 0 + 0 = 0. \end{aligned}$$

Se invece $c \notin P$, allora esiste un j per cui $x_j < c < x_{j+1}$; dunque, abbiamo che $S(P, f, \alpha) = f(t_{j+1})\Delta\alpha_{j+1}$ (prima di c la f è nulla, dopo c la α è costante). Se $t_{j+1} \leq c$, allora $f(t_{j+1})\Delta\alpha_{j+1} = 0$; se invece $t_{j+1} > c$, allora

$$f(t_{j+1})\Delta\alpha_{j+1} = f(t_{j+1})(\alpha(x_{j+1}) - \alpha(x_j)) = R(R - 0) = R^2.$$

Quindi $S(P, f, \alpha)$ fa 0 o R^2 a seconda della partizione P e della scelta dei punti t_k in $[x_{k-1}, x_k]$.

Terminiamo quindi facendo vedere che per ogni numero reale A esiste un $\epsilon > 0$ tale che per ogni $\delta > 0$, sia possibile trovare una partizione P di $[a, b]$ ed un insieme di punti t_k in $[x_{k-1}, x_k]$ per cui $\|P\| < \delta$ ma $|S(P, f, \alpha) - A| \geq \epsilon$. Questo mostrerà contemporaneamente che

$$f \notin S(\alpha) \text{ su } [a, b],$$

ed anche la seguente anomalia dell'integrale di Stieltjes:

$$\left(\exists S\text{-}\int_a^c f d\alpha \wedge \exists S\text{-}\int_c^b f d\alpha \right) \not\Rightarrow \exists S\text{-}\int_a^b f d\alpha.$$

Se $A = 0$, basta prendere una partizione P di $[a, b]$ tale che $c \notin P$, e con $\|P\| < \delta$ (si possono prendere due punti x, y con $a < x < c < y < b$ tali che $|x - y| < \delta$ e poi costruire una partizione di $[a, x]$ ed una partizione di $[y, b]$ entrambe di norma minore di δ , come fatto vedere nella dimostrazione che (S) implica (RS)) e poi scegliere i punti t_k in maniera tale che $S(P, f, \alpha) = R^2$, cosicché $|S(P, f, \alpha) - A| = R^2 \geq \epsilon$ per ogni $\epsilon \in (0, R^2]$.

Se invece $A \neq 0$, prendiamo una qualunque partizione P con $\|P\| < \delta$ e $c \in P$; allora $S(P, f, \alpha) = 0$, da cui $|S(P, f, \alpha) - A| = |A| \geq \epsilon$ per ogni $\epsilon \in (0, |A|]$.

1.3 La definizione secondo Darboux-Stieltjes

Definizione 1.6 (DS-integrabilità). Siano date due funzioni $f, \alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ e supponiamo che α sia monotona crescente, e f sia limitata.

Data una partizione $P = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$ di $[a, b]$, poniamo

$$U(P, f, \alpha) = \sum_{k=1}^n M_k(f)\Delta\alpha_k, \quad L(P, f, \alpha) = \sum_{k=1}^n m_k(f)\Delta\alpha_k,$$

dove M_k e m_k sono definiti come

$$M_k(f) = \sup\{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\},$$

$$m_k(f) = \inf\{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\}.$$

I numeri $U(P, f, \alpha)$ e $L(P, f, \alpha)$ sono detti rispettivamente somma di Darboux-Stieltjes superiore di f rispetto ad α e somma di Darboux-Stieltjes inferiore di f rispetto ad α . Definiamo:

$$\overline{\int_a^b f d\alpha} = \inf\{U(P, f, \alpha) : P \in \Omega_{[a,b]}\}$$

$$\underline{\int_a^b f d\alpha} = \sup\{L(P, f, \alpha) : P \in \Omega_{[a,b]}\}.$$

I due numeri appena definiti sono detti rispettivamente integrale di Darboux-Stieltjes superiore di f rispetto ad α e integrale di Darboux-Stieltjes inferiore di f rispetto ad α .

Se essi sono uguali, diremo che f è Darboux-Stieltjes-integrabile (DS-integrabile) rispetto ad α su $[a, b]$, e scriveremo “ $f \in DS(\alpha)$ su $[a, b]$ ”, denotando con

$$\int_a^b f(x) d\alpha(x), \quad \text{o con} \quad \int_a^b f d\alpha$$

il valore comune. Tale valore si chiama integrale di Darboux-Stieltjes di f rispetto ad α su $[a, b]$. Quando altri tipi di integrale interverranno in uno stesso contesto, per indicare il suddetto tipo di integrale potremo scrivere

$$DS\text{-}\int_a^b f(x) d\alpha(x), \quad \text{oppure} \quad DS\text{-}\int_a^b f d\alpha.$$

Talvolta, per indicare l'integrale superiore e quello inferiore, vengono utilizzate le notazioni $\bar{I}(f, \alpha)$ e $\underline{I}(f, \alpha)$. Nel corso del secondo capitolo, avremo modo di vedere che, nel caso in cui la funzione integratrice sia crescente, allora la Definizione 1.6 (che indicheremo con (DS)) e (RS) sono equivalenti, e che l'integrale di Riemann-Stieltjes e quello di Darboux-Stieltjes coincidono. In sintesi:

$$(S) \quad \begin{matrix} \Rightarrow \\ \nLeftarrow \end{matrix} \quad (RS) \quad \begin{matrix} \Rightarrow \\ \Leftarrow \end{matrix} \quad (DS).$$

Adesso, riprendiamo in considerazione l'Esempio 1.5, e facciamo vedere che nel caso in cui $R > 0$ abbiamo che $f \in DS(\alpha)$ su $[a, b]$.

Sia P una partizione di $[a, b]$. Se $c \in P$, allora $c = x_j$, e dunque, per $k = 1, \dots, j$, $M_k(f) = m_k(f) = 0$, mentre per $k = j+1, \dots, n$, $\Delta\alpha_k = 0$; pertanto

$$U(P, f, \alpha) = L(P, f, \alpha) = 0, \quad \text{ogniquale volta } c \in P.$$

Se invece $c \notin P$, allora $x_j < c < x_{j+1}$, e dunque $M_{j+1}(f) = R$, $m_{j+1}(f) = 0$, e $\Delta\alpha_{j+1} = R - 0 = R$, da cui

$$U(P, f, \alpha) = R^2 \text{ e } L(P, f, \alpha) = 0, \quad \text{ogniquale volta } c \notin P.$$

Da ciò si ottiene che

$$\begin{aligned} \sup_P L(P, f, \alpha) &= \sup\{0\} = 0; \\ \inf_P U(P, f, \alpha) &= \inf\{0, R^2\} = 0 \quad (\text{essendo } R > 0), \end{aligned}$$

e pertanto f è DS-integrabile rispetto ad α su $[a, b]$, e l'integrale di Darboux-Stieltjes di f rispetto ad α fa zero.

Osservazione 1.7. Questo semplicissimo esempio mostra che la definizione nel senso (DS) (discorso analogo si potrà fare per (RS)) risente fortemente della presenza di qualche partizione su cui le somme superiori/inferiori abbiamo un qualche buon comportamento, senza la pretesa (come invece accade nel senso (S)) che questo buon comportamento valga per tutte le partizioni con calibro piccolo. Questo rende—in un certo senso—le definizioni secondo (RS) e (DS) più “facili” da soddisfare, mentre quella secondo (S) è più onerosa. Questo motiva, euristicamente, l'esistenza di funzioni non integrabili nel senso (S) ma integrabili nei sensi (RS)/(DS).

Capitolo 2

Risultati principali

2.1 Risultati che valgono nel senso di Stieltjes

Nel seguito, se non diversamente specificato, $f, g, \alpha, \beta, \dots$ saranno sempre funzioni limitate sull'intervallo assegnato $[a, b]$.

Teorema 2.1 (Linearità rispetto alla integranda). *Se $f \in S(\alpha)$ e $g \in S(\alpha)$ su $[a, b]$, allora $cf + c'g \in S(\alpha)$ per ogni coppia di costanti c e c' , e vale che*

$$\int_a^b (cf + c'g) d\alpha = c \int_a^b f d\alpha + c' \int_a^b g d\alpha.$$

Dimostrazione. Se $c = c' = 0$, l'asserto è immediato.

Altrimenti, sia $h = cf + c'g$. Allora, per ogni partizione $P \in \Omega_{[a,b]}$, abbiamo che

$$\begin{aligned} S(P, h, \alpha) &= \sum_{k=1}^n h(t_k) \Delta\alpha_k = c \sum_{k=1}^n f(t_k) \Delta\alpha_k + c' \sum_{k=1}^n g(t_k) \Delta\alpha_k \\ &= cS(P, f, \alpha) + c'S(P, g, \alpha). \end{aligned}$$

Sia dato un $\epsilon > 0$. Poniamo allora

$$\eta = \frac{\epsilon}{|c| + |c'|}.$$

Abbiamo che $\eta > 0$, e possiamo quindi applicare la definizione (S); da una parte, esiste un $\delta'_\eta > 0$ tale che se $\|P\| < \delta'_\eta$, allora $|S(P, f, \alpha) - \int_a^b f d\alpha| < \eta$, mentre dall'altra esiste un $\delta''_\eta > 0$ tale che se $\|P\| < \delta''_\eta$, allora $|S(P, g, \alpha) - \int_a^b g d\alpha| < \eta$. Se poniamo $\delta_\eta = \min\{\delta'_\eta, \delta''_\eta\}$, e prendiamo una partizione P per cui $\|P\| < \delta_\eta$, allora abbiamo che

$$\begin{aligned} \left| S(P, h, \alpha) - \left(c \int_a^b f d\alpha + c' \int_a^b g d\alpha \right) \right| &< |c|\eta + |c'|\eta \\ &= (|c| + |c'|)\eta = \epsilon. \end{aligned}$$

Questo conclude la dimostrazione. □

Teorema 2.2 (Linearità rispetto alla integratrice). *Se $f \in S(\alpha)$ e $f \in S(\beta)$ su $[a, b]$, allora $f \in S(c\alpha + c'\beta)$ su $[a, b]$ per ogni coppia di costanti c e c' , e vale che*

$$\int_a^b f d(c\alpha + c'\beta) = c \int_a^b f d\alpha + c' \int_a^b f d\beta.$$

La dimostrazione è simile a quella del Teorema 2.1

Relativamente al prossimo teorema, abbiamo mostrato nel Capitolo 1 che la ipotesi dell'esistenza di $S\text{-}\int_a^b f \, d\alpha$ non è rimovibile!

Teorema 2.3 (Additività per l'S-integrale). *Siano date $f, \alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, e sia dato un $c \in \mathbb{R}$. Se i tre integrali seguenti*

$$\int_a^c f(x) \, d\alpha(x), \quad \int_c^b f(x) \, d\alpha(x), \quad \text{e} \quad \int_a^b f(x) \, d\alpha(x)$$

esistono nel senso di Stieltjes, allora vale la formula seguente:

$$\int_a^c f(x) \, d\alpha(x) + \int_c^b f(x) \, d\alpha(x) = \int_a^b f(x) \, d\alpha(x).$$

Si può dimostrare¹ che, nel caso in cui si abbia l'esistenza degli S-integrali $\int_a^b f \, d\alpha$ e $\int_a^c f \, d\alpha$, allora esiste anche il terzo S-integrale $\int_c^b f \, d\alpha$.

Dimostrazione. Sia dato un $\epsilon > 0$. Allora valgono i tre fatti seguenti:

Esiste un $\delta'_\epsilon > 0$ tale che per ogni $P' \in \Omega_{[a,c]}$ per cui $\|P'\| < \delta'_\epsilon$,

$$\left| S(P', f, \alpha) - \int_a^c f \, d\alpha \right| < \frac{\epsilon}{3}.$$

Esiste un $\delta''_\epsilon > 0$ tale che per ogni $P'' \in \Omega_{[c,b]}$ per cui $\|P''\| < \delta''_\epsilon$,

$$\left| S(P'', f, \alpha) - \int_c^b f \, d\alpha \right| < \frac{\epsilon}{3}.$$

Esiste un $\delta'''_\epsilon > 0$ tale che per ogni $P''' \in \Omega_{[a,b]}$ per cui $\|P'''\| < \delta'''_\epsilon$,

$$\left| S(P''', f, \alpha) - \int_a^b f \, d\alpha \right| < \frac{\epsilon}{3}.$$

Sia $\delta_\epsilon = \min\{\delta'_\epsilon, \delta''_\epsilon, \delta'''_\epsilon\}$, e sia $P \in \Omega_{[a,b]}$ tale che $\|P\| < \delta_\epsilon \leq \delta'''_\epsilon$. Sicuramente esiste un $i \in \{1, \dots, n\}$ tale che $x_{i-1} \leq c \leq x_i$. Scegliamo un insieme di punti $t_k \in [x_{k-1}, x_k]$ in modo tale che $t_i = c$. Poniamo $P' = (P \cap [a, c]) \cup \{c\}$ e $P'' = (P \cap [c, b]) \cup \{c\}$; allora $\|P'\| < \delta_\epsilon \leq \delta'_\epsilon$ e $\|P''\| < \delta_\epsilon \leq \delta''_\epsilon$. Osserviamo inoltre che

$$f(t_i)\Delta\alpha_i = f(t_i)(\alpha(c) - \alpha(x_{i-1})) + f(t_i)(\alpha(x_i) - \alpha(c)),$$

da cui $S(P, f, \alpha) = S(P', f, \alpha) + S(P'', f, \alpha)$. Si conclude perciò che

$$\begin{aligned} I &:= \left| \int_a^b f \, d\alpha - \left(\int_a^c f \, d\alpha + \int_c^b f \, d\alpha \right) \right| \\ &= \left| \int_a^b f \, d\alpha - S(P, f, \alpha) + \left(S(P', f, \alpha) - \int_a^c f \, d\alpha \right) + \left(S(P'', f, \alpha) - \int_c^b f \, d\alpha \right) \right| \\ &< \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon. \end{aligned}$$

Dunque, abbiamo dimostrato che la quantità I è strettamente minore di ϵ qualunque sia $\epsilon > 0$, e quindi è una quantità nulla. Questo conclude la dimostrazione. $\square$

¹La dimostrazione è analoga a quella a seguire, anzi pure più semplice.

Teorema 2.4 (Integrazione per parti). *Siano date $f, \alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, e supponiamo che $f \in S(\alpha)$ su $[a, b]$. Allora $\alpha \in S(f)$ su $[a, b]$, e si ha la formula seguente:*

$$\int_a^b f(x) d\alpha(x) + \int_a^b \alpha(x) df(x) = f(b)\alpha(b) - f(a)\alpha(a).$$

Questa formula vale anche per l'RS-integrale con ipotesi analoghe.

Dimostrazione. Per vedere perché il teorema è vero, facciamo come prima cosa il seguente ragionamento: data $P \in \Omega_{[a,b]}$, sia data la somma di Riemann-Stieltjes

$$S(P, \alpha, f) = \sum_{k=1}^n \alpha(t_k) \Delta f_k = \sum_{k=1}^n \alpha(t_k) f(x_k) - \sum_{k=1}^n \alpha(t_k) f(x_{k-1}).$$

Sia data la quantità $A = f(b)\alpha(b) - f(a)\alpha(a)$. Allora vale l'identità telescopica

$$A = \sum_{k=1}^n f(x_k) \alpha(x_k) - \sum_{k=1}^n f(x_{k-1}) \alpha(x_{k-1}).$$

Dunque, sottraendo a quest'ultima identità quella precedente, otteniamo che

$$A - S(P, \alpha, f) = \sum_{k=1}^n f(x_k) (\alpha(x_k) - \alpha(t_k)) + \sum_{k=1}^n f(x_{k-1}) (\alpha(t_k) - \alpha(x_{k-1})).$$

Le somme del secondo membro possono essere combinate in un'unica somma della forma $S(P', f, \alpha)$, dove P' è la partizione di $[a, b]$ ottenuta mettendo insieme i punti x_k con i punti t_k . Cioè, otteniamo

$$A - S(P, \alpha, f) = S(P', f, \alpha).$$

Osserviamo anche che, essendo $P' \supseteq P$, abbiamo che $\|P'\| \leq \|P\|$. Prendiamo ora un $\epsilon > 0$ scelto a piacere; allora esiste un $\delta_\epsilon > 0$ tale che per ogni partizione P di $[a, b]$ per cui $\|P\| < \delta_\epsilon$, $|S(P, f, \alpha) - \int_a^b f d\alpha| < \epsilon$. Quindi, se P' è la partizione di $[a, b]$ ottenuta mettendo insieme i punti x_k e i punti t_k , allora $\|P'\| < \delta_\epsilon$, e perciò

$$\left| A - S(P, \alpha, f) - \int_a^b f d\alpha \right| = \left| S(P', f, \alpha) - \int_a^b f d\alpha \right| < \epsilon.$$

Questo dimostra che $\int_a^b \alpha df$ esiste ed è uguale a $A - \int_a^b f d\alpha$. □

Teorema 2.5 (Integrazione per sostituzione). *Sia $f \in S(\alpha)$ su $[a, b]$, e sia $g : J := [c, d] \rightarrow [a, b]$ una funzione biettiva, strettamente crescente e continua. Siano $h, \beta : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ le funzioni composte definite come segue:*

$$h(x) = f(g(x)), \quad \beta(x) = \alpha(g(x)) \quad \text{se } x \in J.$$

Allora $h \in S(\beta)$ su J e si ha che $\int_a^b f d\alpha = \int_c^d h d\beta$; cioè,

$$\int_{g(c)}^{g(d)} f(t) d\alpha(t) = \int_c^d f(g(x)) d(\alpha(g(x))).$$

Dimostrazione. Supponiamo che g sia continua e strettamente crescente su J (questo implica che $c < d$). Allora g è una funzione biettiva ed ha un'inversa, g^{-1} , continua e strettamente crescente, definita su $[a, b]$. Perciò, ad ogni partizione

$$P = \{c = y_0 < y_1 < \dots < y_n = d\},$$

corrisponde una ed una sola partizione $Q = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$ di $[a, b]$, con $x_k = g(y_k)$. Si può scrivere

$$Q = g(P) \text{ e } P = g^{-1}(Q).$$

Adesso, sia dato un $\epsilon > 0$. Allora, per l'ipotesi che $f \in S(\alpha)$ su $[a, b]$, esiste un $\delta'_\epsilon > 0$ tale che per ogni partizione Q di $[a, b]$ per cui $\|Q\| < \delta'_\epsilon$ si ha

$$|S(Q, f, \alpha) - \int_a^b f d\alpha| < \epsilon.$$

Sfruttiamo ora l'ipotesi di continuità della g su $[c, d]$. Poiché g è continua su $[c, d]$, il quale è compatto, allora g è uniformemente continua su $[c, d]$; dunque, per δ'_ϵ , esiste un $\delta_\epsilon > 0$ tale che $|g(y) - g(y')| < \delta'_\epsilon$ per ogni $y, y' \in [c, d]$ per cui $|y - y'| < \delta_\epsilon$. In particolare, una qualunque partizione P di $[c, d]$ per la quale $\|P\| < \delta_\epsilon$ genera una partizione $Q = g(P)$, Q partizione di $[a, b]$, tale che $\|Q\| < \delta'_\epsilon$. Sia dunque data una partizione P di $[c, d]$ con $\|P\| < \delta_\epsilon$, $P = \{c = y_0 < y_1 < \dots < y_n = d\}$, e sia

$$Q = g(P) = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\} \in \Omega_{[a, b]},$$

dove $\|Q\| < \delta'_\epsilon$. Abbiamo che

$$S(P, h, \beta) = \sum_{k=1}^n h(u_k) \Delta\beta_k,$$

dove $u_k \in [y_{k-1}, y_k]$, e $\Delta\beta_k = \beta(y_k) - \beta(y_{k-1})$. Se poniamo $t_k = g(u_k)$, allora

$$\begin{aligned} S(P, h, \beta) &= \sum_{k=1}^n f(g(u_k))(\alpha(g(y_k)) - \alpha(g(y_{k-1}))) \\ &= \sum_{k=1}^n f(t_k)(\alpha(x_k) - \alpha(x_{k-1})) = S(Q, f, \alpha), \end{aligned}$$

poiché $t_k \in [x_{k-1}, x_k]$. Allora

$$\left| S(P, h, \beta) - \int_a^b f d\alpha \right| = \left| S(Q, f, \alpha) - \int_a^b f d\alpha \right| < \epsilon.$$

Un ragionamento simile si fa nel caso in cui g sia strettamente decrescente su J . In tal caso, abbiamo che $d < c$ e che ad ogni partizione $P = \{d = y_0 < y_1 < \dots < y_n = c\}$ corrisponde una ed una sola partizione Q di $[a, b]$, dove

$$Q = g(P) = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\} = \{x_k = g(y_{n-k})\}_{k=1, \dots, n}.$$

Questo conclude la prova. □

Teorema 2.6 (Monotonia per l'S-integrale). *Supponiamo che α sia crescente su $[a, b]$. Se $f \in S(\alpha)$, $g \in S(\alpha)$ su $[a, b]$, e $f(x) \leq g(x)$ per ogni $x \in [a, b]$, allora*

$$\int_a^b f(x) d\alpha(x) \leq \int_a^b g(x) d\alpha(x).$$

Dimostrazione. Sia data una partizione $P = \{a = x_0 < x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$ di $[a, b]$. Allora, poiché α è crescente su $[a, b]$, abbiamo che $\Delta\alpha_k \geq 0$ per ogni $k = 1, \dots, n$. Dunque,

$$S(P, f, \alpha) = \sum_{k=1}^n f(t_k) \Delta\alpha_k \leq \sum_{k=1}^n g(t_k) \Delta\alpha_k = S(P, g, \alpha).$$

Questo conclude la dimostrazione. $\square$

Si può dimostrare che tutti i risultati appena descritti valgono anche per l'integrale di Riemann-Stieltjes, e le dimostrazioni sono simili a quelle viste in questo paragrafo. *Tuttavia alcuni enunciati (si veda ad esempio il Teorema di Additività) valgono sotto ipotesi migliori nell'ambito del RS-integrale, come mostriamo nella prossima sezione.*

2.2 Risultati che valgono nel senso di RS ma non nel senso di S

Teorema 2.7 (Additività per l'RS-integrale). *Sia $c \in (a, b)$, e supponiamo che almeno due dei tre integrali seguenti:*

$$\int_a^c f(x) d\alpha(x), \int_c^b f(x) d\alpha(x), \text{ e } \int_a^b f(x) d\alpha(x)$$

esistano nel senso di Riemann-Stieltjes. Allora esiste anche il terzo integrale, e si ha che

$$\int_a^c f(x) d\alpha(x) + \int_c^b f(x) d\alpha(x) = \int_a^b f(x) d\alpha(x).$$

Dimostrazione. Sia P una partizione di $[a, b]$ tale che $c \in P$, e siano $P' = P \cap [a, c]$ e $P'' = P \cap [c, b]$. Allora abbiamo in particolare che $S(P, f, \alpha) = S(P', f, \alpha) + S(P'', f, \alpha)$. Supponiamo che esistano gli integrali $\int_a^c f(x) d\alpha(x)$ e $\int_c^b f(x) d\alpha(x)$. Allora, dato un $\epsilon > 0$, esiste una partizione P'_ϵ di $[a, c]$ tale che

$$\left| S(P', f, \alpha) - \int_a^c f(x) d\alpha(x) \right| < \frac{\epsilon}{2} \quad \text{quando} \quad P' \supseteq P'_\epsilon,$$

ed esiste una partizione P''_ϵ di $[c, b]$ tale che

$$\left| S(P'', f, \alpha) - \int_c^b f(x) d\alpha(x) \right| < \frac{\epsilon}{2} \quad \text{quando} \quad P'' \supseteq P''_\epsilon.$$

Allora $P_\epsilon = P'_\epsilon \cup P''_\epsilon$ è una partizione di $[a, b]$ tale che se P è più fine di P_ϵ , allora $P' \supseteq P'_\epsilon$ e $P'' \supseteq P''_\epsilon$. Da qui, se P è più fine di P_ϵ , allora si possono combinare i due risultati scritti poc'anzi per ottenere la disuguaglianza

$$\left| S(P, f, \alpha) - \left(\int_a^c f(x) d\alpha(x) + \int_c^b f(x) d\alpha(x) \right) \right| < \epsilon.$$

Questo dimostra che l'integrale $\int_a^b f(x) d\alpha(x)$ esiste ed è uguale a

$$\int_a^c f(x) d\alpha(x) + \int_c^b f(x) d\alpha(x).$$

Adesso, analizziamo il caso in cui esistano gli integrali $\int_a^b f(x) d\alpha(x)$ e $\int_a^c f(x) d\alpha(x)$ (l'ultimo caso sarà poi del tutto analogo). Allora, per ogni $\epsilon > 0$ esistono $P_\epsilon \in \Omega_{[a,b]}$ e $P'_\epsilon \in \Omega_{[a,c]}$ tali che

$$\left| S(P, f, \alpha) - \int_a^b f(x) d\alpha(x) \right| < \frac{\epsilon}{2}, \quad \forall P \in \Omega_{[a,b]}, \quad P \supseteq P_\epsilon,$$

e

$$\left| S(P', f, \alpha) - \int_a^c f(x) d\alpha(x) \right| < \frac{\epsilon}{2}, \quad \forall P' \in \Omega_{[a,c]}, \quad P' \supseteq P'_\epsilon.$$

Sia dunque $P''_\epsilon = (P_\epsilon \cap [c, b]) \cup \{c\}$; se $P'' \in \Omega_{[c,b]}$ è più fine di P''_ϵ , presa

$$\Omega_{[a,c]} \ni P' \supseteq (P_\epsilon \cap [a, c]) \cup P'_\epsilon \supseteq P''_\epsilon,$$

abbiamo che $P = P' \cup P'' \supseteq P_\epsilon$; quindi, osservando che $S(P'', f, \alpha) = S(P, f, \alpha) - S(P'', f, \alpha)$, si ottiene la maggiorazione finale per $|S(P'', f, \alpha) - A|$, dove

$$A = \int_a^b f(x) d\alpha(x) - \int_a^c f(x) d\alpha(x).$$

Questo conclude la prova. □

Questo teorema vale nel senso di Riemann-Stieltjes, ma non nel senso di Stieltjes; infatti, nell'Esempio 1.5, avevamo analizzato una situazione in cui gli integrali $\int_a^c f d\alpha$ e $\int_c^b f d\alpha$ esistevano nel senso di Stieltjes, ma non l'integrale $\int_a^b f d\alpha$. Quindi, almeno nel caso specifico dell'esistenza dei due soli S-integrali $\int_a^c f d\alpha$ e $\int_c^b f d\alpha$, non sempre è garantita l'esistenza anche del terzo, $\int_a^b f d\alpha$.

Teorema 2.8 (RS-integrale con integratrice costante a tratti. Caso base). *Sia dato un intervallo $[a, b]$, e sia $c \in (a, b)$. Consideriamo la funzione $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ (continua a tratti, con due tratti ed eventualmente un salto) definita come:*

$$\alpha(x) = \begin{cases} \alpha(a) & \text{se } x \in [a, c), \\ \alpha(c) & \text{se } x = c, \\ \alpha(b) & \text{se } x \in (c, b], \end{cases}$$

dove $\alpha(a)$, $\alpha(c)$ e $\alpha(b)$ sono valori arbitrari. Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ definita in maniera tale che almeno una delle due funzioni f o α sia continua da sinistra in c e almeno una delle due sia continua da destra in c . Allora $f \in RS(\alpha)$ su $[a, b]$ e si ha che

$$\int_a^b f d\alpha = f(c)(\alpha(c+) - \alpha(c-)).$$

Dimostrazione. Se $c \in P$, allora esiste un indice $i \in \{1, \dots, n-1\}$ tale che $x_i = c$. Abbiamo che la somma $S(P, f, \alpha)$ si riduce a due soli termini; nello specifico,

$$S(P, f, \alpha) = f(t_i)(\alpha(c) - \alpha(c-)) + f(t_{i+1})(\alpha(c+) - \alpha(c)),$$

dove $t_i \leq c \leq t_{i+1}$. Questa identità può essere scritta anche nel modo seguente:

$$\Delta = (f(t_i) - f(c))(\alpha(c) - \alpha(c-)) + (f(t_{i+1}) - f(c))(\alpha(c+) - \alpha(c)),$$

dove $\Delta = S(P, f, \alpha) - f(c)(\alpha(c+) - \alpha(c-))$. Da qui, abbiamo che

$$|\Delta| \leq |f(t_{i+1}) - f(c)|\alpha(c) - \alpha(c-)| + |f(t_{i+1}) - f(c)|\alpha(c+) - \alpha(c)|.$$

Se f è continua in c , allora per ogni $\epsilon > 0$ esiste un $\delta > 0$ tale che se $\|P\| < \delta$, allora

$$|f(t_i) - f(c)| < \epsilon \quad \text{e} \quad |f(t_{i+1}) - f(c)| < \epsilon.$$

In questo caso, si ottiene la disuguaglianza

$$|\Delta| \leq \epsilon|\alpha(c) - \alpha(c-)| + \epsilon|\alpha(c+) - \alpha(c)|.$$

Ma questa disuguaglianza vale a prescindere dalla continuità o meno della f in c . Ad esempio, se f è discontinua in c , sia da destra che da sinistra, allora $\alpha(c) = \alpha(c-)$ e $\alpha(c) = \alpha(c+)$ e si ottiene che $|\Delta| = 0$. D'altro canto, se f è continua in c da sinistra e discontinua in c da destra, dev'essere $\alpha(c) = \alpha(c+)$, da cui si ottiene che $|\Delta| \leq \epsilon|\alpha(c) - \alpha(c-)|$. Similmente, se f è continua in c da destra e discontinua in c da sinistra, allora $\alpha(c) = \alpha(c-)$ e $|\Delta| \leq \epsilon|\alpha(c+) - \alpha(c)|$. Da qui si evince che la disuguaglianza vale in ogni caso. Questo dimostra il teorema. $\square$

L'Esempio 1.5 mostra in maniera evidente come il teorema appena dimostrato valga nel senso di (RS) ma non nel senso di (S); infatti, in tale esempio, l'integranda è discontinua **solo** da destra nel punto c , mentre la funzione integratrice è discontinua **solo** da sinistra nel punto c , e tuttavia l'S-integrale $\int_a^b f d\alpha$ non esiste.

Come abbiamo già argomentato in maniera euristica, questo mostra ancora una volta che l'RS-integrale ha più chances di esistere dell'S-integrale e questo può portare (come nel teorema qui sopra) alla esistenza di risultati di RS-integrabilità più "duttibili" nel contesto (RS), risultati per così dire "invisibili" nel contesto (S).

Definizione 2.9. Una funzione $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ è detta una funzione a gradino se esiste una partizione

$$Q = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$$

tale che α sia costante su (x_{k-1}, x_k) per ogni $k = 1, \dots, n$. Il numero $\alpha(x_k+) - \alpha(x_k-)$ è detto il salto in x_k se $0 < k < n$. Il salto in a è dato da $\alpha(a+) - \alpha(a)$, mentre il salto in b è dato da $\alpha(b) - \alpha(b-)$.

Teorema 2.10 (RS-integrale con integratrice a gradino). Sia $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione a gradino con salti α_k in x_k , dove $Q = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$ è la partizione di $[a, b]$ formata dai punti di discontinuità di α . Sia data una funzione $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ tale che per ogni $k = 0, \dots, n$, f e α non siano né entrambe discontinue da destra in x_k , né entrambe discontinue da sinistra in x_k . Allora l'integrale RS- $\int_a^b f d\alpha$ esiste, e vale che

$$RS\text{-}\int_a^b f(x) d\alpha(x) = \sum_{k=0}^n f(x_k)\alpha_k.$$

Dimostrazione. La dimostrazione è abbastanza semplice e si fa per induzione sulla cardinalità della partizione Q . $\square$

2.3 Alcuni risultati per Darboux-Stieltjes

In questo paragrafo, anche quando non esplicitamente detto, sarà sempre sottinteso che la funzione α sia crescente nell'intervallo $[a, b]$. Partiamo con un'osservazione, che ci dà una proprietà di confronto fra la somma di Riemann-Stieltjes e le somme di Darboux-Stieltjes inferiore e superiore.

Osservazione 2.11. Sia $P = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$ una partizione dell'intervallo $[a, b]$. Allora, data una scelta dei punti $t_k \in [x_{k-1}, x_k]$, abbiamo sempre che

$$m_k(f) \leq f(t_k) \leq M_k(f),$$

da cui, poiché la funzione α è crescente,

$$m_k(f)\Delta\alpha_k \leq f(t_k)\Delta\alpha_k \leq M_k(f)\Delta\alpha_k,$$

e quindi

$$\sum_{k=1}^n m_k(f)\Delta\alpha_k \leq \sum_{k=1}^n f(t_k)\Delta\alpha_k \leq \sum_{k=1}^n M_k(f)\Delta\alpha_k,$$

cioè

$$L(P, f, \alpha) \leq S(P, f, \alpha) \leq U(P, f, \alpha).$$

Teorema 2.12. *Sia α crescente su $[a, b]$. Allora valgono i fatti seguenti.*

(i) *Se $P, Q \in \Omega_{[a,b]}$ e Q è più fine di P , abbiamo che*

$$L(Q, f, \alpha) \geq L(P, f, \alpha), \quad e \quad U(Q, f, \alpha) \leq U(P, f, \alpha).$$

(ii) *Date due partizioni $P_1, P_2 \in \Omega_{[a,b]}$, vale che*

$$L(P_1, f, \alpha) \leq U(P_2, f, \alpha).$$

Dimostrazione. (i) Dimostriamo la prima delle due disuguaglianze. È sufficiente supporre che Q contenga un punto in più rispetto a P (si ragiona poi per induzione sulla cardinalità di Q); sia dunque $Q = P \cup \{c\}$, dove $P = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$ e $c \notin P$. Allora esiste un $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ per cui $x_{i-1} < c < x_i$. Poniamo $w_1(f) = \inf_{[x_{i-1}, c]} f$ e $w_2 = \inf_{[c, x_i]} f$. È chiaro che $w_l(f) \geq m_i(f)$ per ogni $l = 1, 2$. Perciò,

$$\begin{aligned} & L(Q, f, \alpha) - L(P, f, \alpha) \\ &= w_1(f)(\alpha(c) - \alpha(x_{i-1})) + w_2(f)(\alpha(x_i) - \alpha(c)) - m_i(f)(\alpha(x_i) - \alpha(x_{i-1})) \\ &\geq m_i(f)(\alpha(c) - \alpha(x_{i-1})) + w_i(f)(\alpha(x_i) - \alpha(c)) - m_i(f)(\alpha(x_i) - \alpha(x_{i-1})) = 0. \end{aligned}$$

La seconda disuguaglianza si dimostra in maniera analoga.

(ii) Osserviamo dapprima che per ogni partizione $P = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$ di $[a, b]$, $L(P, f, \alpha) \leq U(P, f, \alpha)$. Infatti, $m_k(f) \leq M_k(f)$ e $\Delta\alpha_k \geq 0$ per ogni $k =$

$1, \dots, n$, e perciò $m_k(f)\Delta\alpha_k \leq M_k(f)\Delta\alpha_k$ per ogni $k = 1, \dots, n$. Per cui, sommando tutte le disequazioni per $k = 1, \dots, n$, otteniamo che

$$L(P, f, \alpha) = \sum_{k=1}^n m_k(f)\Delta\alpha_k \leq \sum_{k=1}^n M_k(f)\Delta\alpha_k = U(P, f, \alpha).$$

Alla luce di quanto appena osservato, per dimostrare l'asserto adesso basta considerare la partizione $Q = P_1 \cup P_2$. Allora $Q \supseteq P_1$ e $Q \supseteq P_2$, e si ha che

$$L(P_1, f, \alpha) \leq L(Q, f, \alpha) \leq U(Q, f, \alpha) \leq U(P_2, f, \alpha).$$

Questo conclude la prova. $\square$

Teorema 2.13. *Sia α una funzione crescente su $[a, b]$. Allora $\underline{I}(f, \alpha) \leq \bar{I}(f, \alpha)$.*

Dimostrazione. Sia dato un $\epsilon > 0$. Allora esiste una partizione Q di $[a, b]$ tale che $U(Q, f, \alpha) < \bar{I}(f, \alpha) + \epsilon$. Per il Teorema 2.12, ne consegue che $\bar{I}(f, \alpha) + \epsilon$ è un maggiorante delle somme inferiori $L(P, f, \alpha)$. Quindi, $\underline{I}(f, \alpha) \leq \bar{I}(f, \alpha) + \epsilon$, e poiché ϵ è arbitrario, questo comporta che $\underline{I}(f, \alpha) \leq \bar{I}(f, \alpha)$. $\square$

Adesso facciamo vedere alcune proprietà di cui godono gli integrali inferiori e quelli superiori, spesso non considerate nei corsi di base nemmeno nel caso di Riemann standard.

Teorema 2.14 (Additività degli integrali superiore e inferiore). *Sia α una funzione crescente su $[a, b]$ e sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ limitata. Sia infine $c \in (a, b)$.*

Allora valgono le seguenti identità:

$$\begin{aligned} \overline{\int_a^b} f \, d\alpha &= \overline{\int_a^c} f \, d\alpha + \overline{\int_c^b} f \, d\alpha, \\ \underline{\int_a^b} f \, d\alpha &= \underline{\int_a^c} f \, d\alpha + \underline{\int_c^b} f \, d\alpha. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Dimostrazione. Per vedere per quale motivo la prima identità è vera (in maniera analoga si dimostra la seconda), possiamo considerare, senza ledere la generalità, solo le partizioni di $[a, b]$ che contengono il punto c . Infatti, per ogni $P \in \Omega_{[a,b]}$, abbiamo che

$$\overline{\int_a^b} f \, d\alpha \leq U(P \cup \{c\}, f, \alpha) \leq U(P, f, \alpha).$$

Denotiamo quindi con $\Omega_{[a,b]}^{(c)}$ la famiglia delle partizioni di $[a, b]$ che contengono il punto c . Data $P \in \Omega_{[a,b]}^{(c)}$, poniamo $P' = P \cap [a, c]$ e $P'' = P \cap [c, b]$. È immediato osservare che

$$\inf_{P' \in \Omega_{[a,c]}} U(P', f, \alpha) = \inf_{P \in \Omega_{[a,b]}^{(c)}} U(P', f, \alpha),$$

e che

$$\inf_{P'' \in \Omega_{[c,b]}} U(P'', f, \alpha) = \inf_{P \in \Omega_{[a,b]}^{(c)}} U(P'', f, \alpha).$$

Osserviamo inoltre che, poiché per ogni $Q \in \Omega_{[a,b]}^{(c)}$,

$$\inf_{P' \in \Omega_{[a,c]}} U(P', f, \alpha) + \inf_{P'' \in \Omega_{[c,b]}} U(P'', f, \alpha) \leq U(Q', f, \alpha) + U(Q'', f, \alpha) = U(Q, f, \alpha),$$

passando all'estremo inferiore su $U(Q, f, \alpha)$ per $Q \in \Omega_{[a,b]}^{(c)}$, otteniamo che

$$\inf_{P' \in \Omega_{[a,c]}} U(P', f, \alpha) + \inf_{P'' \in \Omega_{[c,b]}} U(P'', f, \alpha) \leq \inf_{Q \in \Omega_{[a,b]}^{(c)}} U(Q, f, \alpha).$$

Si ottiene perciò che

$$\begin{aligned} \overline{\int_a^c} f \, d\alpha + \overline{\int_c^b} f \, d\alpha &= \inf_{P' \in \Omega_{[a,c]}} U(P', f, \alpha) + \inf_{P'' \in \Omega_{[c,b]}} U(P'', f, \alpha) \\ &= \inf_{P \in \Omega_{[a,b]}^{(c)}} U(P', f, \alpha) + \inf_{P \in \Omega_{[a,b]}^{(c)}} U(P'', f, \alpha) \leq \inf_{P \in \Omega_{[a,b]}^{(c)}} (U(P', f, \alpha) + U(P'', f, \alpha)) \\ &= \inf_{P \in \Omega_{[a,b]}^{(c)}} U(P, f, \alpha) = \overline{\int_a^b} f \, d\alpha. \end{aligned}$$

Quindi,

$$\overline{\int_a^c} f \, d\alpha + \overline{\int_c^b} f \, d\alpha \leq \overline{\int_a^b} f \, d\alpha.$$

D'altra parte,

$$\overline{\int_a^b} f \, d\alpha \leq U(P', f, \alpha) + U(P'', f, \alpha),$$

per ogni $P \in \Omega_{[a,b]}^{(c)}$. Per cui, passando due volte all'estremo inferiore per $P \in \Omega_{[a,b]}^{(c)}$, una volta su $U(P', f, \alpha)$ ed una volta su $U(P'', f, \alpha)$, si ottiene che

$$\overline{\int_a^b} f \, d\alpha \leq \overline{\int_a^c} f \, d\alpha + \overline{\int_c^b} f \, d\alpha.$$

Dunque, mettendo insieme le due disuguaglianze dimostrate si ottiene alla fine l'uguaglianza. $\square$

Proposizione 2.15 (Sub- o super-linearità). *Sia α una funzione crescente su $[a, b]$ e siano $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ limitate. Allora valgono le seguenti identità:*

$$\begin{aligned} \overline{\int_a^b} (f + g) \, d\alpha &\leq \overline{\int_a^b} f \, d\alpha + \overline{\int_a^b} g \, d\alpha, \\ \underline{\int_a^b} (f + g) \, d\alpha &\geq \underline{\int_a^b} f \, d\alpha + \underline{\int_a^b} g \, d\alpha. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Dimostrazione. Proviamo la prima proprietà (la seconda è analoga). Basta osservare che, se $P = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$ è una partizione dell'intervallo $[a, b]$, allora

$$\begin{aligned} U(P, f + g, \alpha) &= \sum_{k=1}^n M_k(f + g) \Delta\alpha_k \leq \sum_{k=1}^n (M_k(f) + M_k(g)) \Delta\alpha_k \\ &= U(P, f, \alpha) + U(P, g, \alpha). \end{aligned}$$

Infatti, abbiamo che

$$(f + g)(x) \leq \sup_{[x_{k-1}, x_k]} f + \sup_{[x_{k-1}, x_k]} g, \quad \forall x \in [x_{k-1}, x_k],$$

perciò, passando all'estremo superiore per $x \in [x_{k-1}, x_k]$, si ottiene che

$$\sup_{[x_{k-1}, x_k]} (f + g) \leq \sup_{[x_{k-1}, x_k]} f + \sup_{[x_{k-1}, x_k]} g.$$

Questo conclude la prova. $\square$

Definizione 2.16 (Condizione di Riemann). Diremo che una funzione limitata $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ soddisfa la condizione di Riemann rispetto alla funzione crescente α su $[a, b]$ se, per ogni $\epsilon > 0$, esiste una partizione P_ϵ di $[a, b]$ tale che, se P è più fine di P_ϵ , allora

$$0 \leq U(P, f, \alpha) - L(P, f, \alpha) < \epsilon.$$

In realtà, alla luce del Teorema 2.12 (che garantisce che, se P è più fine di P_ϵ , allora si ha $L(P_\epsilon, f, \alpha) \leq L(P, f, \alpha) \leq U(P, f, \alpha) \leq U(P_\epsilon, f, \alpha)$), tutto ciò è equivalente a richiedere che, per ogni $\epsilon > 0$, esiste una partizione P_ϵ di $[a, b]$ tale che

$$U(P_\epsilon, f, \alpha) - L(P_\epsilon, f, \alpha) < \epsilon.$$

Questa è totalmente analoga alla classica forma del Criterio di Riemann noto anche per l'integrale di Riemann standard.

Teorema 2.17 (Criterio di Riemann per la DS/RS-integrabilità). Supponiamo che α sia crescente su $[a, b]$. Allora, data $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ limitata, le tre condizioni seguenti sono equivalenti:

- (i) $f \in RS(\alpha)$ su $[a, b]$;
- (ii) f soddisfa la condizione di Riemann rispetto ad α su $[a, b]$;
- (iii) $f \in DS(\alpha)$ su $[a, b]$.

Inoltre, quando una di queste è vera (ergo tutte e tre sono vere) si ha l'uguaglianza

$$RS\text{-}\int_a^b f \, d\alpha = DS\text{-}\int_a^b f \, d\alpha.$$

Dimostrazione. (i) $\implies$ (ii):

Se $\alpha(a) = \alpha(b)$, allora l'asserto è immediato. Studiamo allora il caso $\alpha(a) < \alpha(b)$; poiché $f \in RS(\alpha)$ su $[a, b]$ per ipotesi, allora fissato un $\epsilon > 0$ esiste una partizione P_ϵ di $[a, b]$ per cui, data una qualunque $P \in \Omega_{[a, b]}$, $P = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$ tale che $P \supseteq P_\epsilon$, fissate due scelte dei punti $t_k, t'_k \in [x_{k-1}, x_k]$ si abbia

$$\left| \sum_{k=1}^n f(t_k) \Delta \alpha_k - A \right| < \frac{\epsilon}{3} \quad \text{e} \quad \left| \sum_{k=1}^n f(t'_k) \Delta \alpha_k - A \right| < \frac{\epsilon}{3},$$

dove $A = \int_a^b f \, d\alpha$. Mettendo insieme le due disuguaglianze, si ottiene che

$$\left| \sum_{k=1}^n (f(t_k) - f(t'_k)) \Delta\alpha_k \right| < \frac{2}{3}\epsilon.$$

Dal momento che $M_k(f) - m_k(f) = \sup\{f(x) - f(y) | x, y \in [x_{k-1}, x_k]\}$, ne consegue che per ogni $h > 0$ si possono scegliere $t_k, t'_k \in [x_{k-1}, x_k]$ tali per cui

$$f(t_k) - f(t'_k) > M_k(f) - m_k(f) - h.$$

Scegliendo $h = \frac{\epsilon(\alpha(b) - \alpha(a))}{3}$, si può scrivere

$$\begin{aligned} U(P, f, \alpha) - L(P, f, \alpha) &= \sum_{k=1}^n (M_k(f) - m_k(f)) \Delta\alpha_k \\ &< \sum_{k=1}^n (f(t_k) - f(t'_k)) \Delta\alpha_k + h \sum_{k=1}^n \Delta\alpha_k < \epsilon. \end{aligned}$$

Questo dimostra che (i) implica (ii).

(ii) $\implies$ (iii):

Supponiamo adesso che valga la (ii). Fissato un $\epsilon > 0$, esiste $P_\epsilon \in \Omega_{[a,b]}$ tale che data una qualunque partizione P più fine di P_ϵ , si abbia che $U(P, f, \alpha) < L(P, f, \alpha) + \epsilon$. Quindi, per una siffatta partizione P , abbiamo che

$$\bar{I}(f, \alpha) \leq U(P, f, \alpha) < L(P, f, \alpha) + \epsilon \leq \underline{I}(f, \alpha) + \epsilon.$$

Cioè, $\bar{I}(f, \alpha) \leq \underline{I}(f, \alpha) + \epsilon$ per ogni $\epsilon > 0$, da cui $\bar{I}(f, \alpha) \leq \underline{I}(f, \alpha)$. Ma poiché per il Teorema 2.13 vale anche la disuguaglianza inversa, abbiamo che le due disuguaglianze messe assieme formano l'uguaglianza che volevamo dimostrare. Perciò, abbiamo dimostrato che (ii) implica (iii).

(iii) $\implies$ (i):

Poiché $f \in DS(\alpha)$ su $[a, b]$, abbiamo che $\bar{I}(f, \alpha) = \underline{I}(f, \alpha)$. Chiamiamo A il valore comune fra l'integrale superiore e quello inferiore. Quello che vogliamo far vedere è che $\int_a^b f \, d\alpha$ esiste anche nel senso di Riemann-Stieltjes ed è uguale ad A . Sia dato un $\epsilon > 0$; scegliamo allora una partizione P'_ϵ tale per cui $U(P, f, \alpha) < \bar{I}(f, \alpha) + \epsilon$ per ogni partizione P più fine di P'_ϵ . Sia data anche una partizione P''_ϵ tale che

$$L(P, f, \alpha) > \underline{I}(f, \alpha) - \epsilon,$$

per ogni partizione P più fine di P''_ϵ . Se $P_\epsilon = P'_\epsilon \cup P''_\epsilon$, possiamo scrivere

$$\underline{I}(f, \alpha) - \epsilon < L(P, f, \alpha) \leq S(P, f, \alpha) \leq U(P, f, \alpha) < \bar{I}(f, \alpha) + \epsilon,$$

per ogni partizione P più fine di P_ϵ . Ma, poiché $\underline{I}(f, \alpha) = \bar{I}(f, \alpha) = A$, questo significa che $|S(P, f, \alpha) - A| < \epsilon$ ogni volta che P è più fine di P_ϵ . Ciò dimostra che $\int_a^b f \, d\alpha$ esiste ed è uguale ad A , e questo porta a termine la dimostrazione. $\square$

Il teorema appena dimostrato ci dice quindi, com'era stato anticipato nel primo capitolo, che quando la funzione α è crescente, la $RS(\alpha)$ -integrabilità equivale alla $DS(\alpha)$ -integrabilità, e i due integrali coincidono; ci viene inoltre fornito un nuovo strumento (la condizione di Riemann), per studiare l'esistenza di $\int_a^b f \, d\alpha$.

Il Teorema 2.17 ci dà quindi la possibilità di studiare in maniera più agevole e flessibile $\int_a^b f \, d\alpha$, senza correre il rischio che quest'ultima scrittura generi ambiguità di qualche tipo (almeno nei contesti RS e DS; la ambiguità rimane nel caso di S-integrabilità, che potrebbe non sussistere).

Riprendendo l'Esempio 1.5, questo dimostra, grazie al Teorema 2.8, l'esistenza di funzioni che sono RS-integrabili ma non S-integrabili e mette in evidenza, quando $R > 0$, un primo semplice esempio di utilizzo pratico dell'equivalenza fra (RS) e (DS) quando α è crescente.

Osservazione 2.18. Nella classica teoria dell'integrale di Riemann, è ben noto che col Criterio di Riemann si prova in modo banale che le funzioni monotone sono Riemann integrabili. Quando α è crescente, la presenza di un Criterio di Riemann anche per l'integrale di tipo DS/RS farebbe pensare che ciò sia vero anche per tale integrale. Questo però non può sussistere: ad esempio, se $f = \alpha$ e se f è discontinua (ad esempio da destra) in un punto $c \in (a, b)$, allora vedremo che f non può essere in $RS(\alpha)$ (Teorema 2.26).

Infatti nell'integrale di Riemann (se f è crescente) si deve stimare

$$\sum_k (f(x_k) - f(x_{k-1}))(x_k - x_{k-1}),$$

e, se la scomposizione è scelta in modo che $|x_k - x_{k-1}| < \epsilon$, tale quantità si stima con

$$\epsilon \sum_k (f(x_k) - f(x_{k-1})) = \epsilon(f(b) - f(a)).$$

Nel caso di α crescente ma discontinua da qualche parte, la quantità analoga

$$\sum_k (f(x_k) - f(x_{k-1}))(\alpha(x_k) - \alpha(x_{k-1}))$$

è evidentemente meno facile da stimare e non è detto che $\alpha(x_k) - \alpha(x_{k-1})$ sia arbitrariamente piccolo grazie solo alla vicinanza di x_k e x_{k-1} .

Segue allora che

$$\left\{ \begin{array}{l} f \text{ crescente su } [a, b] \\ \alpha \text{ crescente su } [a, b] \end{array} \right. \quad \text{non implica} \quad f \in RS(\alpha).$$

Teorema 2.19 (Disuguaglianza Triangolare Integrale). *Sia α crescente su $[a, b]$. Se $f \in DS(\alpha)$ su $[a, b]$, allora $|f| \in DS(\alpha)$ su $[a, b]$ e si ha la seguente disuguaglianza:*

$$\left| \int_a^b f(x) \, d\alpha(x) \right| \leq \int_a^b |f(x)| \, d\alpha(x).$$

Dimostrazione. Partiamo dall'osservare che

$$M_k(f) - m_k(f) = \sup\{f(x) - f(x') | x, x' \in [a, b]\}.$$

Dunque, poiché vale sempre la disuguaglianza

$$\left| |f(x)| - |f(x')| \right| \leq |f(x) - f(x')|, \quad \forall x, x' \in [a, b],$$

ne consegue che

$$M_k(|f|) - m_k(|f|) \leq M_k(f) - m_k(f).$$

Moltiplicando per $\Delta\alpha_k$ i due membri in ciascuna disequazione per $k = 1, \dots, n$, e facendo poi la somma di tutte le disequazioni, si ottiene che

$$U(P, |f|, \alpha) - L(P, |f|, \alpha) \leq U(P, f, \alpha) - L(P, f, \alpha).$$

Per cui, applicando la condizione di Riemann, si ottiene che $|f| \in DS(\alpha)$ su $[a, b]$. Adesso, poiché il Teorema 2.6 vale anche nel senso di Riemann-Stieltjes, e poiché abbiamo dimostrato nel Teorema 2.17 che nel caso in cui α sia crescente, la RS-integrabilità coincide con la DS-integrabilità, abbiamo che, essendo $f, -f \leq |f|$,

$$\int_a^b f \, d\alpha \leq \int_a^b |f| \, d\alpha, \quad \text{e} \quad - \int_a^b f \, d\alpha = \int_a^b (-f) \, d\alpha \leq \int_a^b |f| \, d\alpha,$$

da cui

$$\left| \int_a^b f \, d\alpha \right| \leq \int_a^b |f| \, d\alpha.$$

Questo conclude la prova. □

Teorema 2.20. *Supponiamo che α sia crescente su $[a, b]$. Se $f \in DS(\alpha)$ su $[a, b]$, allora $f^2 \in DS(\alpha)$ su $[a, b]$.*

Dimostrazione. Se $f \equiv 0$ su $[a, b]$, la tesi segue immediatamente. Altrimenti, si osserva che $M_k(f^2) = [M_k(|f|)]^2$, e che $m_k(f^2) = [m_k(|f|)]^2$, da cui

$$\begin{aligned} M_k(f^2) - m_k(f^2) &= (M_k(|f|) + m_k(|f|))(M_k(|f|) - m_k(|f|)) \\ &\leq 2M(M_k(|f|) - m_k(|f|)), \end{aligned}$$

dove $M = \sup_{[a, b]} |f| + 1$. Applicando la condizione di Riemann per $\eta = \frac{\epsilon}{M}$, per $\epsilon > 0$ fissato, si ottiene alla fine quanto volevamo dimostrare. □

Teorema 2.21 (DS(α) è un'algebra di funzioni). *Sia α crescente su $[a, b]$.*

Se $f, g \in DS(\alpha)$ su $[a, b]$, allora $f \cdot g \in DS(\alpha)$ su $[a, b]$.

Dimostrazione. Si utilizza il Teorema 2.20, tenendo conto che vale l'identità

$$2f(x)g(x) = (f(x) + g(x))^2 - f(x)^2 - g(x)^2.$$

Questo conclude la prova. □

Definizione 2.22. *Si definisce funzione a gradino unitaria la funzione I definita come*

$$I(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 0 \\ 1 & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

Teorema 2.23. Sia $a < c < b$, e sia f una funzione limitata su $[a, b]$, e continua in c da destra. Se $\alpha(x) = I(x - c)$, allora

$$\int_a^b f \, d\alpha = f(c),$$

nel senso di Riemann-Stieltjes.

Dimostrazione. È una conseguenza diretta del Teorema 2.8, essendo $I(x - c)$ continua in c da sinistra. $\square$

Teorema 2.24. Sia $s_j \geq 0$ una successione a valori reali tale che la serie $\sum_{j \geq 1} s_j$ sia convergente, e sia $\{c_j\}_{j \geq 1}$ una successione di punti distinti in (a, b) . Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ limitata e tale che per ogni $j \geq 1$, f sia continua in c_j da destra. Se

$$\alpha(x) = \sum_{j=1}^{\infty} s_j I(x - c_j),$$

allora $f \in DS(\alpha)$ su $[a, b]$, e vale che

$$\int_a^b f \, d\alpha = \sum_{j=1}^{\infty} s_j f(c_j),$$

nel senso di Darboux-Stieltjes.

Dimostrazione. Dividremo la dimostrazione in tre parti: la (Parte 0), dove faremo vedere che la definizione della funzione α è ben posta, e che α è crescente su $[a, b]$, la (Parte 1), dove dimostreremo la $DS(\alpha)$ -integrabilità di f su $[a, b]$, e la (Parte 2), dove dimostreremo la formula scritta nell'enunciato.

(Parte 0) Come prima cosa, facciamo vedere che la funzione α è ben definita, ed è crescente su $[a, b]$. Fissiamo un $x \in [a, b]$. Innanzitutto osserviamo che, poiché i termini $s_j I(x - c_j)$ sono tutti positivi per $j \geq 1$, allora per ogni $n \in \mathbb{N}$ abbiamo che

$$\sum_{j=1}^n s_j I(x - c_j) \leq \sum_{j=1}^{n+1} s_j I(x - c_j) \leq \sum_{j=1}^{n+1} s_j \leq \sum_{j=1}^{\infty} s_j < +\infty.$$

Quindi, per ogni $x \in [a, b]$ la successione

$$\left(\sum_{j=1}^n s_j I(x - c_j) \right)_{n \in \mathbb{N}}$$

è crescente ed è limitata, e dunque la serie $\sum_{j=1}^{\infty} s_j I(x - c_j)$ converge; questo ci dice che la definizione di α su $[a, b]$ è ben posta. Siano ora dati due punti x_1 e x_2 di $[a, b]$, tali che $x_1 \leq x_2$. Allora $I(x_1 - c_j) \leq I(x_2 - c_j)$ per ogni $j \geq 1$ (poiché la funzione I è crescente su $[a, b]$), e dunque

$$\alpha(x_1) = \sum_{j=1}^{\infty} s_j I(x_1 - c_j) \leq \sum_{j=1}^{\infty} s_j I(x_2 - c_j) = \alpha(x_2).$$

Ciò significa che la funzione α è crescente su $[a, b]$.

(Parte 1) Poiché α è crescente su $[a, b]$, sarà sufficiente verificare che f soddisfi la condizione di Riemann rispetto ad α su $[a, b]$. Osserviamo innanzitutto che $\alpha(a) = 0$ e $\alpha(b) = \sum_{j=1}^{\infty} s_j$. Sia dato un $\epsilon > 0$, e poniamo

$$\eta = \eta(\epsilon) = \frac{\epsilon}{1 + 2M},$$

dove $M = \sup_{[a,b]} |f|$. Poiché $\sum_{j=1}^{\infty} s_j$ è convergente, allora esiste un $N_0 \geq 1$ tale che

$$\sum_{j=N+1}^{\infty} s_j < \eta, \quad \text{se } N \geq N_0.$$

Fissiamo dunque un $N \geq N_0$, e poniamo

$$\alpha_1(x) = \sum_{j=1}^N s_j I(x - c_j) \quad \text{e} \quad \alpha_2(x) = \sum_{j=N+1}^{\infty} s_j I(x - c_j),$$

dove α_1 e α_2 sono entrambe funzioni crescenti. Allora, per il Teorema 2.10, f è $RS(\alpha_1)$ -integrabile su $[a, b]$, e quindi per il Teorema 2.17, $f \in DS(\alpha_1)$ e viene soddisfatta la condizione di Riemann, e perciò esiste una partizione P_ϵ di $[a, b]$ tale che per ogni $P \supseteq P_\epsilon$, si abbia

$$U(P, f, \alpha_1) - L(P, f, \alpha_1) < \eta.$$

Osserviamo che possiamo mettere direttamente in evidenza la dipendenza di P_ϵ da ϵ , poiché η dipende da ϵ (η ed ϵ sono direttamente proporzionali). Fissiamo dunque una partizione $P = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$ di $[a, b]$, più fine di P_ϵ . Osservando che per ogni $k = 1, \dots, n$,

$$M_k(f) - m_k(f) = |M_k(f) - m_k(f)| \leq |M_k(f)| + |m_k(f)| \leq 2M,$$

abbiamo che

$$\begin{aligned} U(P, f, \alpha_2) - L(P, f, \alpha_2) &= \sum_{k=1}^n (M_k(f) - m_k(f)) \Delta \alpha_{2,k} \\ &\leq 2M \sum_{k=1}^n \Delta \alpha_{2,k} = 2M(\alpha_2(b) - \alpha_2(a)) = 2M \sum_{j=N+1}^{\infty} s_j \leq 2M\eta, \end{aligned}$$

da cui si ottiene infine che

$$\begin{aligned} U(P, f, \alpha) - L(P, f, \alpha) &= U(P, f, \alpha_1) - L(P, f, \alpha_1) + U(P, f, \alpha_2) - L(P, f, \alpha_2) < \eta + 2M\eta \\ &= (1 + 2M)\eta = \epsilon. \end{aligned}$$

Questo mostra che la f soddisfa la condizione di Riemann rispetto ad α su $[a, b]$, e perciò $f \in DS(\alpha)$ su $[a, b]$. Osserviamo che, mediante il percorrimeto di più possibili strade, come ad esempio l'applicazione del Teorema 2.2 sulle funzioni α_1 e α_2 (riadattato nel senso di (RS) e quindi, grazie al Teorema 2.17, anche nel senso di (DS)), e del

Teorema 2.10, oppure la riapplicazione di tutto il ragionamento fatto in questa (Parte 1) sulla funzione α_2 , con le successioni $\{c'_j = c_{N+j}\}_{j \geq 1}$ e $s'_j = s_{N+j}$, si ricava anche che $f \in DS(\alpha_2)$ su $[a, b]$.

(Parte 2) Se $f \equiv 0$ su $[a, b]$, l'asserto è immediato. Altrimenti, sia dato un $\epsilon > 0$, e questa volta poniamo

$$\eta = \frac{\epsilon}{2M},$$

dove $M = \sup_{[a,b]} |f|$. Allora esiste un $N_0 \geq 1$ tale che

$$\sum_{j=N+1}^{\infty} s_j < \eta \quad \text{se} \quad N \geq N_0.$$

Dunque, fissato un $N \geq N_0$, e definite α_1 e α_2 come nella (Parte 1), abbiamo che

$$\int_a^b f \, d\alpha_1 = \sum_{j=1}^N s_j f(c_j),$$

nel senso di (RS), grazie alla proprietà di linearità dell'integrale, e al Teorema 2.23. Grazie al Teorema 2.17, essendo α_1 crescente, quest'ultimo integrale può essere inteso anche nel senso di (DS). Osserviamo adesso che, per il Teorema 2.19, vale che

$$\left| \int_a^b f \, d\alpha_2 \right| \leq \int_a^b |f| \, d\alpha_2 \leq M \int_a^b d\alpha_2 = M(\alpha_2(b) - \alpha_2(a)) < M\eta.$$

Dunque,

$$\begin{aligned} & \left| \int_a^b f \, d\alpha - \sum_{j=1}^{\infty} s_j f(c_j) \right| \\ &= \left| \int_a^b f \, d\alpha_1 - \sum_{j=1}^N s_j f(c_j) + \int_a^b f \, d\alpha_2 - \sum_{j=N+1}^{\infty} s_j f(c_j) \right| \\ &\leq \left| \int_a^b f \, d\alpha_2 \right| + \left| \sum_{j=N+1}^{\infty} s_j f(c_j) \right| < M\eta + \sum_{j=N+1}^{\infty} s_j |f(c_j)| \\ &\leq M\eta + M \sum_{j=N+1}^{\infty} s_j < 2M\eta = \epsilon. \end{aligned}$$

Quindi, abbiamo dimostrato che per ogni $\epsilon > 0$,

$$\left| \int_a^b f \, d\alpha - \sum_{j=1}^{\infty} s_j f(c_j) \right| < \epsilon,$$

per cui si ottiene infine che

$$\int_a^b f \, d\alpha = \sum_{j=1}^{\infty} s_j f(c_j).$$

Questo conclude la prova. □

Osserviamo che grazie al Teorema 2.17, questo risultato vale anche nel senso di (RS). Questo risultato non vale tuttavia nel senso di Stieltjes:

Consideriamo il caso in cui $c_1 < c_2 < c_j$ per ogni $j \geq 3$, $s_1 \neq 0$, e la funzione $f(x)$ è nulla su $[a, c_1]$ e fa s_1 su $[c_1, c_2]$; allora, la f è RS-integrabile ma non S-integrabile rispetto ad α su $[a, c_2]$ (la verifica è del tutto simile a quella vista nell' Esempio 1.5, con l'unica differenza che adesso abbiamo la f discontinua in c_1 da sinistra, e la α discontinua in c_1 da destra).

Ora, poiché la f è $RS(\alpha)$ -integrabile su $[a, b]$ e su $[a, c_2]$, allora per il Teorema 2.7, essa è $RS(\alpha)$ -integrabile su $[c_2, b]$. Per alleggerire la notazione, poniamo $c = c_2$. Fissiamo un numero reale A , e poniamo $A' = A - \int_c^b f d\alpha$. Poiché $\int_a^c f d\alpha$ non può esistere nel senso di Stieltjes, allora per A' esiste un $\epsilon > 0$ tale che per ogni $\delta > 0$ esista una partizione P' (che lasciamo fissata) di $[a, c]$, tale che $\|P'\| < \delta$, ma $|S(P', f, \alpha) - A'| \geq \epsilon$. Per un tale $\epsilon > 0$, poiché f è $RS(\alpha)$ -integrabile su $[c, b]$, esiste una partizione P'' di $[c, b]$ tale che

$$\left| S(P'', f, \alpha) - \int_c^b f d\alpha \right| < \frac{\epsilon}{2},$$

se P'' è più fine di P''_ϵ . Sia dunque P una partizione di $[a, b]$ tale che $\|P\| < \delta$, $P \cap [a, c] = P'$, e $P'' = P \cap [c, b] \supseteq P''_\epsilon$. Allora abbiamo che

$$\begin{aligned} |S(P, f, \alpha) - A| &= \left| S(P', f, \alpha) - A' + S(P'', f, \alpha) - \int_c^b f d\alpha \right| \\ &\geq \left| S(P', f, \alpha) - A' \right| - \left| S(P'', f, \alpha) - \int_c^b f d\alpha \right| > \frac{\epsilon}{2}. \end{aligned}$$

Questo mostra chiaramente che la $S(\alpha)$ -integrazione di f su $[a, b]$ non può aver luogo.

Osservazione 2.25. Osserviamo che il Teorema 2.24 continua ad essere vero anche quando la f è continua in c da sinistra e la funzione integratrice è data da $J(x - c)$, dove $J(x) = 1 - I(-x)$ (la funzione J risulta quindi essere continua in 0 da destra), da cui il Teorema 2.24 continua ad essere valido anche quando la f è continua in c_j da sinistra per ogni $j \geq 1$, e la funzione integratrice è data da $\beta(x) = \sum_{j=1}^{\infty} s_j J(x - c_j)$.

2.4 Condizioni necessarie per l'esistenza del DS-integrale

Teorema 2.26. *Supponiamo che α sia crescente su $[a, b]$ e sia $a < c < b$. Supponiamo inoltre che sia α che f siano discontinue da destra in $x = c$.*

Allora l'integrale $\int_a^b f(x) d\alpha(x)$ non può esistere nel senso di Darboux-Stieltjes (o, equivalentemente, nel senso di Riemann-Stieltjes). Lo stesso vale anche nel caso in cui f e α sono discontinue da sinistra in c .

Dimostrazione. Dire che sia α che f sono discontinue da destra in $x = c$ significa che esiste $\epsilon > 0$ tale che per ogni $\delta > 0$ esistono valori x e y appartenenti all'intervallo aperto $(c, c + \delta)$ tali che

$$|f(x) - f(c)| \geq \epsilon \quad \text{e} \quad |\alpha(y) - \alpha(c)| \geq \epsilon.$$

Sia data una partizione P di $[a, b]$ tale che $x_{i-1} = c \in P$. Fissiamo un $\epsilon > 0$. Allora, per le ipotesi del teorema, possiamo scegliere un punto x_i della partizione P tale che $|f(x_i) - f(c)| \geq \sqrt{\epsilon}$, e $\Delta\alpha_i \geq \sqrt{\epsilon}$. Osserviamo quindi che

$$U(P, f, \alpha) - L(P, f, \alpha) = \sum_{k=1}^n (M_k(f) - m_k(f)) \Delta\alpha_k \geq (M_i(f) - m_i(f)) \Delta\alpha_i \geq \epsilon.$$

Perciò, la condizione di Riemann non può essere soddisfatta. Un ragionamento del tutto analogo si fa quando f, α sono entrambe discontinue in c da sinistra. $\square$

Il teorema che segue mostra condizioni sulla f e sulla α in cui (S) e (RS) sono equivalenti.

Teorema 2.27. *Sia f definita su $[a, b]$ (limitata) e sia α crescente e continua su $[a, b]$. Se $f \in RS(\alpha)$ su $[a, b]$, allora $f \in S(\alpha)$ su $[a, b]$, e i due integrali coincidono.*

Dimostrazione. Sia dato un $\epsilon > 0$. Poiché per ipotesi $f \in RS(\alpha)$, grazie alla condizione di Riemann, si ha che l'integrale di Darboux-Stieltjes superiore e quello inferiore coincidono. Dunque, posto $\int_a^b f d\alpha$ il loro valore comune (possiamo considerare questo integrale indifferentemente nel senso di (RS) o nel senso di (DS)), esiste una partizione $Q = \{a = y_0 < y_1 < \dots < y_m = b\}$ di $[a, b]$ tale che

$$\int_a^b f d\alpha + \frac{\epsilon}{2} > U(Q, f, \alpha);$$

inoltre, poiché α è continua su $[a, b]$, allora è anche uniformemente continua su $[a, b]$. Dunque, esiste un $\delta\epsilon > 0$ tale che

$$0 \leq |x - y| < \delta\epsilon \implies |\alpha(x) - \alpha(y)| < \frac{\epsilon}{2mM},$$

dove $M = \sup_{[a,b]} |f| + 1$. Sia $\|P\| < \delta\epsilon$ (così $\Delta\alpha_k < \frac{\epsilon}{2mM}$). Per semplicità di notazione, scriviamo:

$$M_k(P, f) = \sup\{f(x) | x \in [x_{k-1}, x_k]\} \quad \text{per } k = 1, \dots, n,$$

$$M_i(Q, f) = \sup\{f(x) | x \in [y_{i-1}, y_i]\} \quad \text{per } i = 1, \dots, m.$$

Chiamiamo ora $K = \{1, 2, \dots, n\}$ e, per ogni $i = 1, \dots, m$, chiamiamo

$$K^i = \{k \in K | [x_{k-1}, x_k] \subseteq [y_{i-1}, y_i]\}, \quad \text{per ogni } i = 1, \dots, m,$$

$$K^0 = \{k \in K | k \notin K^i, \text{ per ogni } i = 1, \dots, m\}.$$

Notiamo che per definizione $K^l \cap K^i = \emptyset$ per ogni $l, i = \{1, \dots, m\}$ con $l \neq i$.

Adesso osserviamo che la cardinalità di K^0 non può mai essere maggiore di m : infatti, se $K = \emptyset$, allora $|K| = 0$; altrimenti, da una parte abbiamo che per ogni $k \in K$ esiste almeno un $i = 1, \dots, m$ per cui $x_{k-1} < y_i$ (infatti, basta prendere $i = m$); restringiamo quindi la scelta a $k \in K^0$, e prendiamo i_k l'indice minimo in $\{1, \dots, m\}$ per cui vale $x_{k-1} < y_{i_k}$. Allora $y_{i_k-1} \leq x_{k-1} < y_{i_k}$, e poiché $[x_{k-1}, x_k]$ non può essere contenuto in $[y_{i_k-1}, y_{i_k}]$, abbiamo che $y_{i_k} < x_k$; dunque $x_{k-1} < y_{i_k} < x_k$.

D'altra parte, per ogni indice $i = 1, \dots, m$, può esistere al più un $k \in K$ (e quindi può esistere al più un $k \in K^0$) per cui $x_{k-1} < y_i < x_k$. Abbiamo dunque costruito una

funzione $K^0 \ni k \mapsto i_k \in \{1, \dots, m\}$ che è iniettiva, e pertanto $|K| \leq m$. Facendo quindi variare $k \in K$ in questi sottoinsiemi K^0 e K^i , la somma di Darboux-Stieltjes superiore rispetto a P diventa:

$$U(P, f, \alpha) = \sum_{k=1}^n M_k(P, f) \Delta \alpha_k = \sum_{k \in K^0} M_k(P, f) \Delta \alpha_k + \sum_{i=1}^m \sum_{k \in K^i} M_k(P, f) \Delta \alpha_k.$$

Notiamo però che per i $k \in K^0$ vale quanto segue:

$$\sum_{k \in K^0} M_k(P, f) \Delta \alpha_k < M \sum_{k \in K^0} \Delta \alpha_k < Mm \frac{\epsilon}{2Mm} = \frac{\epsilon}{2},$$

mentre per ogni $i = 1, \dots, m$ si ha (per definizione di $M_k(P, f)$ e $M_i(Q, f)$),

$$\sum_{k \in K^i} M_k(P, f) \Delta \alpha_k \leq \sum_{k \in K^i} M_i(Q, f) \Delta \alpha_k \leq M_i(Q, f) \Delta \alpha_i,$$

grazie alla somma telescopica e a come sono stati presi i $k \in K^i$. Combinando infine i passaggi appena mostrati, otteniamo:

$$\begin{aligned} U(P, f, \alpha) &= \sum_{k=1}^n M_k(P, f) \Delta \alpha_k \\ &= \sum_{k \in K^0} M_k(P, f) \Delta \alpha_k + \sum_{i=1}^m \sum_{k \in K^i} M_k(P, f) \Delta \alpha_k \\ &< \frac{\epsilon}{2} + \sum_{i=1}^m M_i(Q, f) \Delta \alpha_i = \frac{\epsilon}{2} + U(Q, f, \alpha), \end{aligned}$$

da cui segue

$$S(P, f, \alpha) \leq U(P, f, \alpha) \leq U(Q, f, \alpha) + \frac{\epsilon}{2} < \int_a^b f \, d\alpha + \epsilon.$$

La prova per mostrare $S(P, f, \alpha) > \int_a^b f \, d\alpha - \epsilon$ è del tutto analoga e, unita alla disuguaglianza sopra, mostra l'esistenza dell'integrale di Stieltjes ed il suo valore coincide con quello dell'integrale di Riemann-Stieltjes. Questo conclude la dimostrazione. $\square$

Capitolo 3

Ulteriori risultati

3.1 Funzioni a variazione limitata

Definizione 3.1. Sia f una funzione definita su $[a, b]$ a valori reali, e sia

$$P = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$$

una partizione di $[a, b]$. Ricordiamo la notazione (dove P è sottointesa)

$$\sum_{k=1}^n |\Delta f_k| = \sum_{k=1}^n |\alpha(x_k) - \alpha(x_{k-1})|.$$

Allora diciamo che la funzione f è a variazione limitata su $[a, b]$ se esiste un numero positivo M tale che

$$\sum_{k=1}^n |\Delta f_k| \leq M,$$

per ogni partizione P dell'intervallo $[a, b]$, con M indipendente da P .

Talvolta useremo anche le notazioni $\sum |\Delta f_k|$ e $\sum(P, f)$ per indicare la somma $\sum_{k=1}^n |\Delta f_k|$. Più in generale, per una generica partizione

$$Q = \{d = y_0 < y_1 < \dots < y_m = e\}$$

dell'intervallo $[d, e]$ e per g funzione definita su $[d, e]$, sarà d'uso in questo capitolo utilizzare la notazione più sintetica $\sum(Q, g)$ per indicare la somma $\sum_{l=1}^m |\Delta g_l|$.

Teorema 3.2. Se f è monotona su $[a, b]$, allora f è a variazione limitata su $[a, b]$.

Dimostrazione. Sia f crescente. Allora per ogni partizione P di $[a, b]$, abbiamo che $\Delta f_k \geq 0$, da cui

$$\sum_{k=1}^n |\Delta f_k| = \sum_{k=1}^n \Delta f_k = \sum_{k=1}^n (f(x_k) - f(x_{k-1})) = f(b) - f(a).$$

Questo conclude la dimostrazione. □

Teorema 3.3. Se f è continua su $[a, b]$ ed f' esiste ed è limitata su (a, b) , cioè esiste $A \in \mathbb{R}$ tale che $|f'(x)| \leq A$ per ogni $x \in (a, b)$, allora f è a variazione limitata su $[a, b]$.

Si noti che le ipotesi sono equivalenti a supporre che f è continua su $[a, b]$, derivabile su (a, b) e Lipschitziana su $[a, b]$.¹

Dimostrazione. Per il Teorema del Valor Medio di Lagrange, abbiamo che per ogni $k = 1, \dots, n$ esiste un $t_k \in (x_{k-1}, x_k)$ tale che

$$\Delta f_k = f(x_k) - f(x_{k-1}) = f'(t_k)(x_k - x_{k-1}).$$

Perciò,

$$\sum_{k=1}^n |\Delta f_k| = \sum_{k=1}^n |f'(t_k)| \Delta x_k \leq A \sum_{k=1}^n \Delta x_k = A(b - a).$$

Questo conclude la prova. □

Teorema 3.4. Se f è a variazione limitata su $[a, b]$, cioè esiste $M \in \mathbb{R}$ tale che $\sum |\Delta f_k| \leq M$ per ogni partizione di $[a, b]$, allora f è limitata su $[a, b]$. Infatti,

$$|f(x)| \leq |f(a)| + M, \quad \forall x \in [a, b].$$

Dimostrazione. Supponiamo che $x \in (a, b)$. Allora per M come sopra e per la partizione $P = \{a, x, b\}$ si ottiene che

$$|f(x) - f(a)| + |f(b) - f(x)| \leq M.$$

Ciò comporta che $|f(x) - f(a)| \leq M$ e quindi che $|f(x)| \leq |f(a)| + M$. La stessa disuguaglianza vale quando $x = a$ oppure $x = b$. □

Definizione 3.5. Sia data una funzione f a variazione limitata su $[a, b]$. Allora il numero

$$V_f(a, b) = \sup \left\{ \sum(P, f) \mid P \in \Omega_{[a, b]} \right\}$$

è detto la variazione totale di f sull'intervallo $[a, b]$.

Osserviamo che, poiché f è a variazione limitata su $[a, b]$, allora il numero $V_f = V_f(a, b)$ è finito; inoltre $V_f \geq 0$, ed è zero se e soltanto se f è costante su $[a, b]$. Quando ciò non genera ambiguità, per alleggerire la notazione useremo semplicemente V_f per indicare la variazione totale di f su $[a, b]$.

¹Sia f continua su $[a, b]$, derivabile su (a, b) e Lipschitziana su $[a, b]$ ossia $|f(x_1) - f(x_2)| \leq A|x_1 - x_2|$ per ogni $x_1, x_2 \in [a, b]$. Preso $x_0 \in (a, b)$ e h piccolo, segue allora

$$|f'(x_0)| = \left| \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \right| = \lim_{h \rightarrow 0} \left| \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \right| \leq A.$$

Viceversa, sia f continua su $[a, b]$, derivabile su (a, b) e tale che $|f'| \leq A$ su (a, b) ; allora per il Teorema del Valor Medio di Lagrange, per ogni $x_2 < x_1$ in $[a, b]$ esiste $c \in (x_2, x_1)$ tale che

$$|f(x_1) - f(x_2)| = |f'(c)(x_1 - x_2)| \leq A|x_1 - x_2|.$$

Teorema 3.6. *Siano f e g entrambe a variazione limitata su $[a, b]$. Allora anche la loro somma, la loro differenza e il loro prodotto sono a variazione limitata. Si ha inoltre che*

$$V_{f \pm g} \leq V_f + V_g \quad \text{e} \quad V_{f \cdot g} \leq AV_f + BV_g,$$

dove $A = \sup_{[a, b]} |g|$ e $B = \sup_{[a, b]} |f|$ (entrambi finiti; vedasi Teorema 3.4).

Dimostrazione. Facciamo vedere il risultato nel caso del prodotto. Sia $h(x) = f(x)g(x)$. Per ogni partizione P di $[a, b]$ abbiamo che

$$\begin{aligned} |\Delta h_k| &= |f(x_k)g(x_k) - f(x_{k-1})g(x_{k-1})| = |(f(x_k)g(x_k) - f(x_{k-1})g(x_k)) \\ &\quad + ((f(x_{k-1})g(x_k) - f(x_{k-1})g(x_{k-1})))| \leq A|\Delta f_k| + B|\Delta g_k|. \end{aligned}$$

Questo implica che h è a variazione limitata su $[a, b]$ e che $V_h \leq AV_f + BV_g$. La dimostrazione invece per la somma e la differenza sono più immediate. $\square$

Teorema 3.7 (Additività della variazione totale). *Sia f a variazione limitata su $[a, b]$, e sia $c \in (a, b)$. Allora f è a variazione limitata su $[a, c]$ e su $[c, b]$, e si ha*

$$V_f(a, b) = V_f(a, c) + V_f(c, b).$$

Dimostrazione. Facciamo prima vedere che f è a variazione limitata su $[a, c]$ e su $[c, b]$. Sia P' una partizione di $[a, c]$, e sia P'' una partizione di $[c, b]$. Allora $P = P' \cup P''$ è una partizione di $[a, b]$. Possiamo dunque scrivere, considerando le rispettive restrizioni della f sui sottointervalli in esame,

$$\sum(P', f) + \sum(P'', f) = \sum(P, f) \leq V_f(a, b) \quad (\star).$$

Questo mostra che ciascuna delle due somme $\sum(P', f)$ e $\sum(P'', f)$ è limitata da $V_f(a, b)$, da cui f è a variazione limitata su $[a, c]$ e su $[c, b]$. Da $(\star)$ si ottiene anche la disuguaglianza

$$V_f(a, c) + V_f(c, b) \leq V_f(a, b).$$

Per ottenere la disuguaglianza opposta, prendiamo una partizione

$$P = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$$

di $[a, b]$, e poniamo $Q = P \cup \{c\}$. Se $c \in [x_{k-1}, x_k]$, allora abbiamo che

$$|f(x_k) - f(x_{k-1})| \leq |f(x_k) - f(c)| + |f(c) - f(x_{k-1})|,$$

da cui $\sum(P, f) \leq \sum(Q, f)$. Poniamo $Q' = Q \cap [a, c]$ e $Q'' = Q \cap [c, b]$. Le corrispondenti somme di tutte queste partizioni sono legate dalla relazione

$$\sum(P, f) \leq \sum(Q, f) = \sum(Q', f) + \sum(Q'', f) \leq V_f(a, c) + V_f(c, b).$$

Perciò, $A := V_f(a, c) + V_f(c, b)$ è un maggiorante di tutte le somme $\sum(P, f)$. Poiché A non può essere più piccolo del minimo dei maggioranti, si deve avere

$$V_f(a, b) \leq V_f(a, c) + V_f(c, b),$$

e questo porta a termine la prova. $\square$

Osservazione 3.8. Da quanto osservato nella dimostrazione del Teorema 3.7, possiamo ricavare una proprietà delle somme $\sum(P, f)$, che è la seguente: se Q è una partizione di $[a, b]$ più fine di $P \in \Omega_{[a, b]}$, allora $\sum(Q, f) \geq \sum(P, f)$ (lo si è visto per $Q = P \cup \{c\}$, e dunque basta poi procedere per induzione sulla cardinalità di Q .)

Teorema 3.9. *Sia f a variazione limitata su $[a, b]$. Sia V definita su $[a, b]$ come segue: $V(x) := V_f(a, x)$ per $x \in (a, b]$, e $V(a) = 0$. Allora:*

- i) V è una funzione crescente su $[a, b]$;*
- ii) $V - f$ è una funzione crescente su $[a, b]$.*

Dimostrazione. Se $a < x < y \leq b$, possiamo scrivere $V_f(a, y) = V_f(a, x) + V_f(x, y)$. Questo implica che $V(y) - V(x) = V_f(x, y) \geq 0$. Quindi $V(x) \leq V(y)$, e dunque la proprietà (i) è verificata.

Per dimostrare la (ii), poniamo $D(x) = V(x) - f(x)$ se $x \in [a, b]$. Allora, se $a \leq x < y \leq b$, abbiamo che

$$D(y) - D(x) = V(y) - V(x) - (f(y) - f(x)) = V_f(x, y) - (f(y) - f(x)).$$

Dalla definizione di $V_f(x, y)$, abbiamo che

$$f(y) - f(x) \leq V_f(x, y).$$

Ciò implica che $D(y) - D(x) \geq 0$, e dunque vale la (ii). La dimostrazione è quindi conclusa. $\square$

Teorema 3.10 (Decomposizione di Jordan). *Sia f una funzione definita su $[a, b]$. Allora f è a variazione limitata se e solo se si può esprimere come differenza di funzioni crescenti su $[a, b]$. In tal caso si può ad esempio decomporre f come segue*

$$f = f_1 - f_2, \quad \text{ove} \quad f_1(x) = V_f(a, x), \quad f_2(x) = V_f(a, x) - f(x).$$

Dimostrazione. Se f è a variazione limitata, allora la possiamo scrivere come $f = V - D$, dove V è definita come nel Teorema 3.9, e $D = V - f$. Sia V che D sono funzioni crescenti su $[a, b]$. Il viceversa viene dal Teorema 3.2 e dal Teorema 3.6. $\square$

3.2 Funzioni integratrici a variazione limitata

Teorema 3.11. *Sia α una funzione a variazione limitata su $[a, b]$. Supponiamo che $V_\alpha(x)$ denoti la variazione totale di α su $[a, x]$ se $a < x \leq b$, e faccia zero se $x = a$. Sia f una funzione definita sull'intervallo $[a, b]$ e limitata su di esso.*

Se $f \in RS(\alpha)$ su $[a, b]$, allora $f \in RS(V_\alpha)$ su $[a, b]$.

Dimostrazione. Denotiamo V_α semplicemente con V nella dimostrazione. Se $V(b) = 0$, allora α è costante e l'asserto è immediato.

Altrimenti, supponiamo che $V(b) > 0$ e supponiamo anche che $|f(x)| \leq M$, con $M > 0$, per $x \in [a, b]$. Poiché V è anch'essa crescente, abbiamo solo bisogno di verificare che f soddisfi la condizione di Riemann rispetto a V su $[a, b]$, grazie al Teorema 2.17. Sia dato $\epsilon > 0$. Da una parte, poiché la funzione f è $RS(\alpha)$ -integrabile su $[a, b]$, esiste

una partizione Q_ϵ di $[a, b]$ tale che per ogni partizione $Q \supseteq Q_\epsilon$, e per ogni coppia di scelte $t_k, t'_k \in [x_{k-1}, x_k]$, si abbia

$$\left| \sum_{k=1}^n f(t_k) \Delta \alpha_k - \int_a^b f \, d\alpha \right| < \frac{\epsilon}{8}, \quad \text{e} \quad \left| \sum_{k=1}^n f(t'_k) \Delta \alpha_k - \int_a^b f \, d\alpha \right| < \frac{\epsilon}{8}.$$

Da qui, grazie alla disuguaglianza triangolare, otteniamo che

$$\left| \sum_{k=1}^n (f(t_k) - f(t'_k)) \Delta \alpha_k \right| < \frac{\epsilon}{4}. \quad (3.1)$$

Dall'altra parte, sfruttando le proprietà dell'estremo superiore, esiste una partizione Q'_ϵ di $[a, b]$ tale che

$$V(b) < \sum(Q'_\epsilon, \alpha) + \frac{\epsilon}{4M}.$$

Dalla Osservazione 3.8 segue che, se $\Omega_{[a,b]} \ni P \supseteq Q'_\epsilon$, allora

$$V(b) < \sum(P, \alpha) + \frac{\epsilon}{4M}. \quad (3.2)$$

Quindi, se $P_\epsilon = Q_\epsilon \cup Q'_\epsilon$, allora per ogni $\Omega_{[a,b]} \ni P \supseteq P_\epsilon$, valgono entrambe le disuguaglianze (3.1) e (3.2). Fissiamo dunque una partizione $P = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$ di $[a, b]$, più fine di P_ϵ . Osserviamo adesso che $\Delta V_k - |\Delta \alpha_k| \geq 0$, da cui si ottiene che

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n (M_k(f) - m_k(f))(\Delta V_k - |\Delta \alpha_k|) &\leq 2M \sum_{k=1}^n (\Delta V_k - |\Delta \alpha_k|) \\ &= 2M \left(V(b) - \sum_{k=1}^n |\Delta \alpha_k| \right) < \frac{\epsilon}{2}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Adesso facciamo quest'altro ragionamento: consideriamo l'insieme $A(P) = \{k | \Delta \alpha_k \geq 0\}$, e l'insieme $B(P) = \{k | \Delta \alpha_k < 0\}$, e poniamo

$$h = \frac{\epsilon}{4V(b)}.$$

Se $k \in A(P)$, scegliamo t_k, t'_k in maniera tale che

$$f(t_k) - f(t'_k) > M_k(f) - m_k(f) - h;$$

se invece $k \in B(P)$, scegliamo t_k, t'_k in maniera tale che

$$f(t'_k) - f(t_k) > M_k(f) - m_k(f) - h.$$

Allora

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n (M_k(f) - m_k(f)) |\Delta \alpha_k| &< \sum_{k \in A(P)} (f(t_k) - f(t'_k)) |\Delta \alpha_k| \\ &+ \sum_{k \in B(P)} (f(t'_k) - f(t_k)) |\Delta \alpha_k| + h \sum_{k=1}^n |\Delta \alpha_k| \\ &= \sum_{k=1}^n (f(t_k) - f(t'_k)) \Delta \alpha_k + h \sum_{k=1}^n |\Delta \alpha_k| \leq \frac{\epsilon}{4} + hV(b) = \frac{\epsilon}{4} + \frac{\epsilon}{4} = \frac{\epsilon}{2}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Concludiamo quindi che

$$\begin{aligned}
U(P, f, V) - L(P, f, V) &= \sum_{k=1}^n (M_k(f) - m_k(f)) \Delta V_k \\
&= \sum_{k=1}^n (M_k(f) - m_k(f)) (\Delta V_k - |\Delta \alpha_k|) + \sum_{k=1}^n (M_k(f) - m_k(f)) |\Delta \alpha_k| \\
&< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon \quad (\text{usando (3.3) e (3.4)}).
\end{aligned}$$

Questo conclude la dimostrazione. $\square$

Questo teorema ci fornisce un importante strumento per lo studio dell'integrale di Riemann-Stieltjes per funzioni a variazione limitata. Infatti, dal Teorema 3.10 sappiamo che ogni funzione α a variazione limitata su $[a, b]$ può essere scritta come differenza di funzioni crescenti: $\alpha = \alpha_1 - \alpha_2$, con α_1 e α_2 crescenti su $[a, b]$. Tuttavia, questa decomposizione in generale non sarà unica (basta sommare una costante sia ad α_1 che ad α_2), e –a priori– potrebbero esserci casi in cui esiste l'integrale $\int_a^b f d\alpha$ ma non esistono gli integrali $\int_a^b f d\alpha_1$ e $\int_a^b f d\alpha_2$.

Il Teorema 3.11 ci dice che, nel caso di $f \in RS(\alpha)$, esiste almeno una differenza $\alpha = \alpha_1 - \alpha_2$ per cui $f \in RS(\alpha_1)$ e $f \in RS(\alpha_2)$ su $[a, b]$, ossia quella dove α_1 è la variazione totale di α su $[a, b]$ da cui, grazie ai risultati visti nel secondo capitolo, abbiamo che $f \in RS(\alpha_1 - \alpha) = RS(\alpha_2)$ su $[a, b]$. Questo prova il seguente risultato:

Corollario 3.12. *Sia α una funzione a variazione limitata su $[a, b]$.*

Se $f \in RS(\alpha)$ su $[a, b]$, allora $f \in RS(\alpha_1)$ e $f \in RS(\alpha_2)$ ove $\alpha_1 - \alpha_2$ è la decomposizione di α ottenuta dalle funzioni crescenti $\alpha_1 = V_\alpha(x)$ e $\alpha_2 = V_\alpha(x) - \alpha$.

Viceversa (con le stesse notazioni), se $f \in RS(\alpha_1)$ e $f \in RS(\alpha_2)$ allora $f \in RS(\alpha)$.

In particolare, se $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione limitata che risulta RS-integrabile rispetto ad ogni funzione crescente su $[a, b]$, allora (e solo allora) f risulta RS-integrabile rispetto ad ogni funzione α a variazione limitata su $[a, b]$.

Da quest'ultima frase segue che la teoria dell'integrazione nel senso di Riemann-Stieltjes per funzioni integratrici a variazione limitata può beneficiare (grazie al Teorema 2.17) della condizione di Riemann.

Teorema 3.13 (RS-Integrabilità sui sottointervalli; α a variazione limitata).

Sia α una funzione a variazione limitata su $[a, b]$, e supponiamo che $f \in RS(\alpha)$ su $[a, b]$. Allora $f \in RS(\alpha)$ su ogni sottointervallo $[c, d]$ di $[a, b]$.

In particolare, se $f \in RS(\alpha)$ su $[a, b]$, allora vale la formula di additività qualunque sia $c \in (a, b)$ (e tutti i membri esistono):

$$\int_a^c f d\alpha + \int_c^b f d\alpha = \int_a^b f d\alpha.$$

Tutto questo è vero quando α è crescente: in tal caso, se $f \in RS(\alpha)$ (o, equivalentemente, $f \in DS(\alpha)$) allora $f \in RS(\alpha)$ su ogni sottointervallo $[c, d]$ di $[a, b]$ e vale la formula di additività.

Dimostrazione. Sia $V(x)$ la variazione totale di α su $[a, x]$ (nulla in $x = a$). Allora $\alpha = V - (V - \alpha)$, dove V e $V - \alpha$ sono entrambe crescenti su $[a, b]$, per il Teorema 3.9. Per il Teorema 3.11, $f \in RS(V)$ su $[a, b]$, e dunque $f \in RS(V - \alpha)$ su $[a, b]$. Perciò, se il teorema è vero per funzioni integratrici crescenti, allora ne consegue che $f \in RS(V)$ su $[c, d]$ e $f \in RS(V - \alpha)$ su $[c, d]$, cosicché $f \in RS(\alpha)$ su $[c, d]$. Quindi, è sufficiente dimostrare il teorema quando α è crescente su $[a, b]$.

Per il Teorema 2.7, basta dimostrare l'esistenza degli integrali $\int_a^c f d\alpha$ e $\int_a^d f d\alpha$. Essendo $c < d$ arbitrari, è sufficiente dimostrare l'esistenza dell'integrale $\int_a^c f d\alpha$ qualunque sia $c \in (a, b)$.

Se $P = \{a = y_0 < y_1 < \dots < y_m = x\}$ è una partizione di $[a, x]$, denotiamo con $\Delta(P, x)$ la differenza

$$\Delta(P, x) = U(P, f, \alpha) - L(P, f, \alpha)$$

della somma superiore e la somma inferiore associate all'intervallo $[a, x]$. Ricordiamo che pure $\Delta(P, x)$ rappresenta una somma, i cui termini sono dati da $(M_i(f) - m_i(f))\Delta\alpha_i$ per $i = 1, \dots, m$. Poiché $f \in RS(\alpha)$ su $[a, b]$, vale la condizione di Riemann. Dunque, preso un $\epsilon > 0$, esiste una partizione P_ϵ di $[a, b]$ tale che $\Delta(P, b) < \epsilon$ se P è più fine di P_ϵ . Possiamo assumere che $c \in P_\epsilon$, e considerare la partizione $P'_\epsilon = P_\epsilon \cap [a, c]$. Sia P' una partizione di $[a, c]$ più fine di P'_ϵ , e sia $P = P' \cup P_\epsilon$. Allora abbiamo che P è più fine di P_ϵ e che, per come è stata definita la partizione P , i termini della somma $\Delta(P', c)$ sono anche termini della somma $\Delta(P, b)$; dunque, poiché i termini di entrambe le somme sono tutti positivi, abbiamo che

$$\Delta(P', c) \leq \Delta(P, b) < \epsilon.$$

Cioè, se P' è più fine di P'_ϵ , allora $\Delta(P', c) < \epsilon$. Quindi la f soddisfa la condizione di Riemann su $[a, c]$ e l'integrale $\int_a^c f d\alpha$ esiste. $\square$

Il risultato appena visto vale per la RS/DS-integrabilità. Un quesito che potrebbe essere interessante porsi, alla luce anche dei Teoremi 2.3 e 2.7, è se esistano casi di funzioni limitate $f, \alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ tali che f sia $S(\alpha)$ -integrabile nell'intervallo $[a, b]$, ma non lo è in qualche sottointervallo $[c, d]$ di $[a, b]$.

Teorema 3.14 (Integrabilità rispetto a funzioni integrali). *Sia α una funzione crescente su $[a, b]$ (tutto l'asserto vale anche per α a variazione limitata).*

Supponiamo che $g \in RS(\alpha)$ cosicché, grazie al Teorema 3.13, è ben posta la funzione integrale (nulla in a)

$$G(x) = \int_a^x g(t) d\alpha(t), \quad x \in [a, b].$$

Sia infine $f \in RS(\alpha)$ (e quindi $f \cdot g \in RS(\alpha)$ poiché $RS(\alpha)$ è un'algebra di funzioni). Allora $f \in RS(G)$, e si ha che

$$\int_a^b f(x) g(x) d\alpha(x) = \int_a^b f(x) dG(x).$$

(Vedremo più avanti che G è a variazione limitata su $[a, b]$; Teorema 3.19.)

Ribaltando i ruoli di f e g si ha quindi quanto segue: date $f, g \in RS(\alpha)$ su $[a, b]$, si considerino le funzioni integrali (nulle in a) su $[a, b]$ definite da

$$F(x) = \int_a^x f(t) d\alpha(t) \quad e \quad G(x) = \int_a^x g(t) d\alpha(t).$$

Allora $f \in RS(G)$ e $g \in RS(F)$ su $[a, b]$, e si ha che

$$\int_a^b f(x)g(x) d\alpha(x) = \int_a^b f(x) dG(x) = \int_a^b g(x) dF(x).$$

Dimostrazione. Essendo α crescente, l'integrale $\int_a^b f \cdot g d\alpha$ esiste per il Teorema 2.21 (combinato con il Teorema 2.17). Per ogni partizione P di $[a, b]$, abbiamo che

$$S(P, f, G) = \sum_{k=1}^n f(t_k) \int_{x_{k-1}}^{x_k} g(t) d\alpha(t) = \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(t_k)g(t) d\alpha(t),$$

e (per additività, essendo α monotona)

$$\int_a^b f(x)g(x) d\alpha(x) = \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(t)g(t) d\alpha(t).$$

Perciò, se $M_g = \sup\{|g(x)| : x \in [a, b]\} + 1$, abbiamo che

$$\begin{aligned} \left| S(P, f, G) - \int_a^b f \cdot g d\alpha \right| &= \left| \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} (f(t_k) - f(t))g(t) d\alpha(t) \right| \\ &\leq M_g \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} |f(t_k) - f(t)| d\alpha(t) \leq M_g \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} (M_k(f) - m_k(f)) d\alpha(t) \\ &= M_g \cdot (U(P, f, \alpha) - L(P, f, \alpha)). \end{aligned}$$

Poiché $f \in RS(\alpha)$ su $[a, b]$, allora vale la condizione di Riemann e dunque, fissato un $\epsilon > 0$, per $\eta = \frac{\epsilon}{M_g} > 0$ esiste una partizione P_ϵ di $[a, b]$ tale che $|U(P, f, \alpha) - L(P, f, \alpha)| < \eta$ per ogni partizione P di $[a, b]$ più fine di P_ϵ . Ciò dimostra che $f \in RS(G)$ su $[a, b]$ e che $\int_a^b f \cdot g d\alpha = \int_a^b f dG$. In maniera del tutto analoga si dimostra che $g \in RS(F)$ su $[a, b]$ e che $\int_a^b f \cdot g d\alpha = \int_a^b g dF$. Questo conclude la prova. $\square$

Teorema 3.15 (RS-Integrabilità delle funz. continue; α a variazione limitata).

Se f è continua su $[a, b]$ ed α è a variazione limitata su $[a, b]$, allora $f \in RS(\alpha)$ su $[a, b]$.

Ciò è vero in particolare se α è crescente: in tal caso ogni funzione continua su $[a, b]$ è RS- e DS-integrabile rispetto ad α su $[a, b]$.

(Vedremo più avanti nel Teorema 3.36 che questo teorema vale anche per l'S-integrale.)

Dimostrazione. È sufficiente dimostrare il risultato per α crescente su $[a, b]$, con $\alpha(a) < \alpha(b)$. Poiché f è continua su $[a, b]$, il quale è compatto, allora essa è uniformemente continua su $[a, b]$. Quindi, dato un $\eta > 0$, esiste un $\delta_\eta > 0$ tale che $|f(x) - f(y)| < \eta$ per ogni coppia di punti $x, y \in [a, b]$ per cui $|x - y| < \delta_\eta$. Sia ora $\epsilon > 0$ e prendiamo

$$\eta(\epsilon) := \frac{\epsilon}{2(\alpha(b) - \alpha(a))}.$$

Se $\|P_\epsilon\| < \delta_{\eta(\epsilon)}$, allora per $P \supseteq P_\epsilon$ si ha che $M_k(f) - m_k(f) \leq \eta(\epsilon)$, poiché

$$M_k(f) - m_k(f) = \sup\{f(x) - f(y) \mid x, y \in [x_{k-1}, x_k]\}.$$

Moltiplicando la disuguaglianza per $\Delta\alpha_k$ e sommando per $k = 1, \dots, n$, si ottiene che

$$U(P, f, \alpha) - L(P, f, \alpha) \leq \eta(\epsilon) \sum_{k=1}^n \Delta\alpha_k = \frac{\epsilon}{2} < \epsilon,$$

e si deduce che viene soddisfatta la condizione di Riemann. Quindi, per il Teorema 2.17 $f \in RS(\alpha)$ su $[a, b]$. $\square$

Quando $\alpha(x) = x$, ricordando che il Teorema 2.4 vale anche nel senso di Riemann-Stieltjes, abbiamo il seguente risultato, che è un corollario del Teorema 3.15.

Teorema 3.16. *Ciascuna delle seguenti condizioni è sufficiente per l'esistenza dell'integrale di Riemann $\int_a^b f(x) dx$:*

- (a) f è continua su $[a, b]$;
- (b) f è a variazione limitata su $[a, b]$.

3.3 Teoremi di media integrale e loro conseguenze

Il teorema che segue prende il nome di *Primo Teorema del Valor Medio per Integrali di Riemann-Stieltjes*.

Teorema 3.17 (Primo Teorema del Valor Medio per l'RS-integrale). *Supponiamo che α sia una funzione crescente su $[a, b]$, e sia $f \in RS(\alpha)$ su $[a, b]$. Siano $M = \sup_{[a, b]} f$ e $m = \inf_{[a, b]} f$.*

Allora esiste un numero reale c , con $m \leq c \leq M$, tale che

$$\int_a^b f(x) d\alpha(x) = c \int_a^b d\alpha(x) = c(\alpha(b) - \alpha(a)).$$

In particolare, se f è continua su $[a, b]$, allora $c = f(x_0)$ per qualche $x_0 \in [a, b]$.

Dimostrazione. Se $\alpha(a) = \alpha(b)$, l'asserto è immediato. Altrimenti, abbiamo che $\alpha(a) < \alpha(b)$. Poiché la somma di Darboux-Stieltjes superiore e quella inferiore devono soddisfare le disuguaglianze

$$m(\alpha(b) - \alpha(a)) \leq L(P, f, \alpha) \leq U(P, f, \alpha) \leq M(\alpha(b) - \alpha(a)),$$

anche l'integrale $\int_a^b f d\alpha$ deve essere compreso fra gli stessi valori. Perciò, dividendo la catena di disuguaglianze per $\alpha(b) - \alpha(a)$, si ottiene che

$$m \leq c \leq M, \quad \text{dove} \quad c = \frac{\int_a^b f d\alpha}{\alpha(b) - \alpha(a)},$$

e basta quindi osservare che $\alpha(b) - \alpha(a) = \int_a^b d\alpha$. Quando f è continua su $[a, b]$, allora esiste almeno un $x_0 \in [a, b]$ tale che $f(x_0) = c$. Questo conclude la prova. $\square$

Il teorema che segue prende il nome di *Secondo Teorema del Valor Medio per Integrali di Riemann-Stieltjes*.

Teorema 3.18 (Secondo Teorema del Valor Medio per l'RS-integrale). *Sia α una funzione continua su $[a, b]$, e sia f crescente su $[a, b]$.*

Allora esiste un punto $x_0 \in [a, b]$ tale che

$$\int_a^b f(x) d\alpha(x) = f(a) \int_a^{x_0} d\alpha(x) + f(b) \int_{x_0}^b d\alpha(x).$$

Inoltre quest'ultima quantità vale

$$f(a)(\alpha(x_0) - \alpha(a)) + f(b)(\alpha(b) - \alpha(x_0)).$$

Dimostrazione. Per il Teorema 3.15, abbiamo che $\alpha \in RS(f)$ su $[a, b]$; dunque, riadattando il Teorema 2.4 nel senso di (RS), abbiamo che $f \in RS(\alpha)$ su $[a, b]$, e che

$$\int_a^b f(x) d\alpha(x) + \int_a^b \alpha(x) df(x) = f(b)\alpha(b) - f(a)\alpha(a).$$

Poiché α è continua (e f è crescente), per il Teorema 3.17 esiste un $x_0 \in [a, b]$ tale che

$$\int_a^b \alpha(x) df(x) = \alpha(x_0) \int_a^b df(x) = \alpha(x_0)(f(b) - f(a)).$$

Quindi,

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) d\alpha(x) &= f(b)\alpha(b) - f(a)\alpha(a) - \alpha(x_0)(f(b) - f(a)) \\ &= f(a)(\alpha(x_0) - \alpha(a)) + f(b)(\alpha(b) - \alpha(x_0)) \\ &= f(a) \int_a^{x_0} d\alpha(x) + f(b) \int_{x_0}^b d\alpha(x). \end{aligned}$$

Questo conclude la prova. □

Teorema 3.19 (Teorema Fondamentale del Calcolo RS-Integrale sulla derivata della funzione integrale). *Sia α una funzione a variazione limitata su $[a, b]$, e supponiamo che $f \in RS(\alpha)$ su $[a, b]$. Definiamo la funzione $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ come*

$$F(x) = \int_a^x f d\alpha, \quad \text{con la usuale convenzione } F(a) = 0.$$

Allora abbiamo che:

- (i) F è a variazione limitata su $[a, b]$.
- (ii) Ogni punto di continuità di α è anche punto di continuità di F .
- (iii) Se α è crescente su $[a, b]$, la derivata $F'(x)$ esiste in ciascun punto $x \in (a, b)$ dove esiste $\alpha'(x)$ e dove f è continua. Per tali x , abbiamo che $F'(x) = f(x)\alpha'(x)$.

Dimostrazione. È sufficiente supporre che α sia crescente su $[a, b]$. Se $x < y$, grazie al Teorema 3.17, abbiamo che

$$F(y) - F(x) = \int_x^y f d\alpha = c(\alpha(y) - \alpha(x)), \tag{3.5}$$

dove $\inf_{[x,y]} f \leq c \leq \sup_{[x,y]} f$. I punti (i) e (ii) sono ottenuti facilmente mediante questa identità.

Per quanto riguarda il punto (iii), facciamo vedere innanzitutto che $c \rightarrow f(x)$ per $y \rightarrow x$. Per vederlo, osserviamo in primo luogo che, poiché f è continua in x , allora $\lim_{y \rightarrow x} f(y) = f(x)$, ed in particolare il limite destro e quello sinistro devono coincidere; supponiamo che $y < x$ e consideriamo il limite sinistro, ossia $\lim_{y \rightarrow x-} f(y) = f(x)$. Per ogni $y \in [a, x)$, poniamo

$$m_y = \inf_{[y,x]} f(x) \quad \text{e} \quad M_y = \sup_{[y,x]} f(x).$$

Facciamo vedere che $\lim_{y \rightarrow x-} m_y = f(x)$. Fissato un $\epsilon > 0$, sia dato $\epsilon' \in (0, \epsilon)$. Poiché $\lim_{y \rightarrow x-} f(y) = f(x)$, per ϵ' esiste un numero $\delta_{\epsilon'} > 0$ tale che

$$|f(x) - f(y)| < \epsilon', \quad \forall y \in [a, x] : x - y < \delta_{\epsilon'}.$$

Fissato un $y \in [a, x)$ per cui $x - y < \delta_{\epsilon'}$, per ogni $z \in [y, x]$ abbiamo che $|f(x) - f(z)| < \epsilon'$, cioè

$$f(z) - \epsilon' < f(x) < f(z) + \epsilon', \quad \forall z \in [y, x].$$

Passando all'estremo inferiore per $z \in [y, x]$, si ottiene che $m_y - \epsilon' < f(x) \leq m_y + \epsilon'$. Da una parte abbiamo che $m_y - \epsilon < m_y - \epsilon'$, mentre dall'altra $m_y + \epsilon' < m_y + \epsilon$. Si ottiene cioè che $m_y - \epsilon < f(x) < m_y + \epsilon$, da cui $|f(x) - m_y| < \epsilon$. Dal momento che a quest'ultima maggiorazione siamo arrivati partendo dall'assunto che $x - y < \delta_{\epsilon'}$, allora si può concludere che $\lim_{y \rightarrow x-} m_y = f(x)$ (visto che $\delta_{\epsilon'}$ dipende da ϵ' , allora dipende anche da ϵ). In maniera analoga si fa vedere che $\lim_{y \rightarrow x-} M_y = f(x)$. Osservando quindi che $m_y \leq c \leq M_y$, per il Lemma dei Carabinieri si ottiene che $c \rightarrow f(x)$ per $y \rightarrow x-$. Analogamente si dimostra che $c \rightarrow f(x)$ per $y \rightarrow x+$. Adesso basta dividere l'identità (3.5) per $y - x$ e fare poi il passaggio al limite per $y \rightarrow x$ per ottenere la conclusione. $\square$

Teorema 3.20. *Siano f e g Riemann-integrabili su $[a, b]$, e definiamo le funzioni*

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt \quad \text{e} \quad G(x) = \int_a^x g(t) dt,$$

per $x \in [a, b]$. Allora F e G sono funzioni continue e a variazione limitata su $[a, b]$. Abbiamo inoltre che $f \in RS(G)$ e $g \in RS(F)$ su $[a, b]$, e che

$$\int_a^b f(x)g(x) dx = \int_a^b f(x) dG(x) = \int_a^b g(x) dF(x).$$

Dimostrazione. La parte (i) e la parte (ii) del Teorema 3.19 mostrano che F e G sono funzioni continue a variazione limitata su $[a, b]$. L'esistenza degli integrali e le due formule per $\int_a^b f(x)g(x) d\alpha(x)$ seguono prendendo $\alpha(x) = x$ nel Teorema 3.14. $\square$

Quando $\alpha(x) = x$, il Teorema 3.19 prende talvolta anche il nome di *Primo Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale*, e mette in evidenza il fatto che $F'(x) = f(x)$ in ogni punto di continuità di f . Il teorema che segue prende il nome di *Secondo Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale*.

Teorema 3.21. *Sia $f \in R$ su $[a, b]$, e supponiamo che esista g una funzione definita su $[a, b]$, derivabile su (a, b) , che sia una primitiva di f su (a, b) . Supponiamo inoltre che esistano i valori $g(a+)$ e $g(b-)$, e che soddisfino l'identità*

$$g(a) - g(a+) = g(b) - g(b-).$$

Allora si ha che

$$\int_a^b f(x) \, dx = \int_a^b g'(x) \, dx = g(b) - g(a).$$

Dimostrazione. Per ogni scomposizione di $[a', b']$ (intervallo compatto contenuto in (a, b)), si può scrivere

$$g(b') - g(a') = \sum_{k=1}^n (g(x_k) - g(x_{k-1})) = \sum_{k=1}^n g'(t_k) \Delta x_k = \sum_{k=1}^n f(t_k) \Delta x_k,$$

dove i t_k sono punti in (x_{k-1}, x_k) determinati dal Teorema del Valor Medio di Lagrange per la funzione g . Ma, dato un $\epsilon > 0$, la partizione può essere presa abbastanza fine da rendere vera la maggiorazione

$$\left| g(b') - g(a') - \int_{a'}^{b'} f(x) \, dx \right| = \left| \sum_{k=1}^n f(t_k) \Delta x_k - \int_{a'}^{b'} f(x) \, dx \right| < \epsilon,$$

e questo prova che

$$g(b') - g(a') = \int_{a'}^{b'} f(x) \, dx.$$

Si conclude la dimostrazione mandando a' ad $a+$ e b' a $b-$ e usando la continuità della funzione integrale:

$$g(b-) - g(a+) = \int_a^b f(x) \, dx.$$

Il primo membro uguaglia $g(b) - g(a)$ grazie alle ipotesi. □

Teorema 3.22 (Riduzione dell'RS-integrale ad un integrale di Riemann). *Sia $f \in R$ su $[a, b]$. Sia α derivabile su $[a, b]$, con funzione derivata α' che è Riemann-integrabile su $[a, b]$. Allora gli integrali*

$$RS\text{-}\int_a^b f(x) \, d\alpha(x) \quad e \quad \int_a^b f(x) \alpha'(x) \, dx$$

esistono entrambi e sono uguali.

Si osservi che, visto che α' è Riemann integrabile su $[a, b]$ (quindi limitata), possiamo concludere che α è Lipschitziana su $[a, b]$, ergo a variazione limitata. Questo teorema mostra che le funzioni Riemann integrabili sono anche in $RS(\alpha)$ per qualunque α nella classe (particolare) di funzioni a variazione limitata che risultano derivabili e con derivata Riemann integrabile.

Dimostrazione. Per il Teorema 3.21 abbiamo, per ogni $x \in [a, b]$:

$$\alpha(x) - \alpha(a) = \int_a^x \alpha'(t) \, dt.$$

Scegliendo $g = \alpha$ nel Teorema 3.20, si ottiene l'asserto. □

Mostriamo ora qui di seguito anche un risultato di riduzione ad un integrale di Riemann, che vale nel senso di Stieltjes.

Teorema 3.23 (Riduzione dell'S-integrale ad un integrale di Riemann). *Supponiamo che $f \in S(\alpha)$ su $[a, b]$, e supponiamo che α sia di classe C^1 su $[a, b]$. Allora l'integrale di Riemann $\int_a^b f(x)\alpha'(x) dx$ esiste, e vale che*

$$S\text{-}\int_a^b f(x) d\alpha(x) = \int_a^b f(x)\alpha'(x) dx.$$

Dimostrazione. Sia $g(x) = f(x)\alpha'(x)$, e consideriamo una somma di Riemann:

$$S(P, g) = \sum_{k=1}^n g(t_k)\Delta x_k = \sum_{k=1}^n f(t_k)\alpha'(t_k)\Delta x_k.$$

La stessa partizione P e la stessa scelta dei punti t_k possono essere usate per costruire la somma di Riemann-Stieltjes

$$S(P, f, \alpha) = \sum_{k=1}^n f(t_k)\Delta\alpha_k.$$

Per il Teorema del Valor Medio di Lagrange, possiamo scrivere

$$\Delta\alpha_k = \alpha'(v_k)\Delta x_k,$$

per certi $v_k \in (x_{k-1}, x_k)$. Quindi,

$$S(P, f, \alpha) - S(P, g) = \sum_{k=1}^n f(t_k)(\alpha'(v_k) - \alpha'(t_k))\Delta x_k.$$

Osserviamo che, poiché f è limitata per ipotesi, allora $|f| \leq M$ per un certo $M > 0$. Ora, poiché α' è continua su $[a, b]$, allora essa è uniformemente continua su $[a, b]$; perciò, dato un $\epsilon > 0$, esiste un $\delta'_\epsilon > 0$ tale che

$$|\alpha'(x) - \alpha'(y)| < \frac{\epsilon}{2M(\alpha(b) - \alpha(a))},$$

per ogni $x, y \in [a, b]$ per cui $|x - y| < \delta'_\epsilon$. Perciò, presa una partizione P di $[a, b]$ di norma inferiore a δ'_ϵ , abbiamo che

$$|\alpha'(v_k) - \alpha'(t_k)| < \frac{\epsilon}{2M(\alpha(b) - \alpha(a))}.$$

Quindi,

$$|S(P, f, \alpha) - S(P, g)| < \frac{\epsilon}{2}.$$

D'altra parte, poiché $f \in S(\alpha)$ su $[a, b]$ per ipotesi, allora esiste un $\delta''_\epsilon > 0$ tale che

$$\left| S(P, f, \alpha) - \int_a^b f d\alpha \right| < \frac{\epsilon}{2},$$

per ogni $P \in \Omega_{[a,b]}$ per cui $\|P\| < \delta''_\epsilon$. Sia dunque $\delta_\epsilon = \min\{\delta'_\epsilon, \delta''_\epsilon\}$; allora, presa una partizione P di $[a, b]$ tale che $\|P\| < \delta_\epsilon$, abbiamo che

$$\left| S(P, g) - \int_a^b f \, d\alpha \right| = \left| S(P, g) - S(P, f, \alpha) + S(P, f, \alpha) - \int_a^b f \, d\alpha \right| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Questo conclude la prova. $\square$

Osserviamo che il risultato appena esposto vale anche nel senso di Riemann-Stieltjes, come diretta conseguenza del Teorema 3.22.

Teorema 3.24. *Supponiamo che g sia di classe C^1 su $[c, d]$. Sia f continua su $g([c, d])$ e sia data la funzione F definita come*

$$F(x) = \int_{g(c)}^x f(t) \, dt, \quad \text{per } x \in g([c, d]).$$

Allora, per ogni $x \in [c, d]$, l'integrale $\int_c^x f(g(t))g'(t) \, dt$ esiste e vale $F(g(x))$. In particolare, si ha

$$\int_{g(c)}^{g(d)} f(x) \, dx = \int_c^d f(g(t))g'(t) \, dt.$$

Dimostrazione. Poiché sia g' che la funzione composta $f \circ g$ sono continue su $[c, d]$, l'integrale esiste. Definiamo G su $[c, d]$ come segue:

$$G(x) = \int_c^x f(g(t))g'(t) \, dt.$$

Facciamo vedere che $G(x) = F(g(x))$. Per il Teorema 3.19, abbiamo che $G'(x) = f(g(x))g'(x)$ e, per la regola della catena, la derivata di $F(g(x))$ è uguale anche a $f(g(x))g'(x)$, poiché $F'(x) = f(x)$. Quindi, $G(x) - F(g(x))$ è costante. Ma, quando $x = c$, abbiamo che $G(c) = 0$ e $F(g(c)) = 0$; in questo modo $G(x) - F(g(x))$ è costantemente nulla. Pertanto, $G(x) = F(g(x))$ per ogni $x \in [c, d]$. In particolare, quando $x = d$, si ottiene che $G(d) = F(g(d))$, e questo dimostra la seconda identità del teorema. $\square$

Teorema 3.25 (Secondo Teorema del Valor Medio per l'integrale di Riemann). *Sia g una funzione continua e supponiamo che f sia crescente su $[a, b]$. Siano A e B due numeri reali che soddisfano le disuguaglianze $A \leq f(a+)$ e $B \geq f(b-)$. Allora esiste un punto $x_0 \in [a, b]$ tale che*

$$(i) \quad \int_a^b f(x)g(x) \, dx = A \int_a^{x_0} g(x) \, dx + B \int_{x_0}^b g(x) \, dx.$$

In particolare, se $f(x) \geq 0$ per ogni $x \in [a, b]$, abbiamo che

$$(ii) \quad \int_a^b f(x)g(x) \, dx = B \int_{x_0}^b g(x) \, dx,$$

per un opportuno $x_0 \in [a, b]$.

Dimostrazione. Se $\alpha(x) = \int_a^x g(t) dt$, allora $\alpha' = g$, e si può applicare il Teorema 3.18, ottenendo che esiste $x_0 \in [a, b]$ tale che

$$\int_a^b f(x)g(x) dx = f(a) \int_a^{x_0} g(x) dx + f(b) \int_{x_0}^b g(x) dx.$$

Questo prova il punto (i) quando $A = f(a)$ e $B = f(b)$.

Adesso, se A e B sono due numeri reali tali che $A \leq f(a+)$ e $B \geq f(b-)$, possiamo ridefinire f in maniera tale che $f(a) = A$ e $f(b) = B$; la nuova f è ancora crescente su $[a, b]$, e l'integrale di Riemann rimane invariato, in quando la nuova f differisce dalla precedente soltanto per un numero finito di punti (ovviamente il punto x_0 dipenderà dalla scelta di A e B).

Scegliendo $A = 0$, il punto (ii) segue immediatamente dal punto (i). $\square$

3.4 Teoremi di continuità

Teorema 3.26 (Continuità per funzioni integrali 1). *Sia $f : Q \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua in ogni punto (x, y) del rettangolo*

$$Q = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, \quad c \leq y \leq d\}.$$

Supponiamo che α sia a variazione limitata su $[a, b]$, e sia F la funzione definita da

$$F(y) := \int_a^b f(x, y) d\alpha(x), \quad y \in [c, d].$$

Allora F è continua su $[c, d]$. In altre parole, se $y_0 \in [c, d]$, abbiamo che

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \int_a^b f(x, y) d\alpha(x) = \int_a^b \lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y) d\alpha(x) = \int_a^b f(x, y_0) d\alpha(x).$$

Dimostrazione. Il caso $\alpha(a) = \alpha(b)$ porta immediatamente al risultato. Supponiamo che α sia crescente su $[a, b]$, con $\alpha(a) < \alpha(b)$. Poiché Q è un insieme compatto, f è uniformemente continua su Q . Quindi, dato un $\epsilon > 0$, esiste un $\delta_\epsilon > 0$ tale che per ogni coppia di punti $z = (x, y)$ e $z' = (x', y')$ in Q per cui $|z - z'| < \delta_\epsilon$, si abbia

$$|f(x, y) - f(x', y')| < \eta = \frac{\epsilon}{\alpha(b) - \alpha(a)}.$$

Se $|y - y'| < \delta_\epsilon$, abbiamo che

$$|F(y) - F(y')| \leq \int_a^b |f(x, y) - f(x, y')| d\alpha(x) \leq \eta(\alpha(b) - \alpha(a)) = \epsilon.$$

Questo dimostra la continuità di F su $[c, d]$. $\square$

Teorema 3.27 (Continuità per funzioni integrali 2). *Se $f : Q \rightarrow \mathbb{R}$ è continua sul rettangolo $Q = [a, b] \times [c, d]$, e $g \in R$ su $[a, b]$, allora la funzione F definita da*

$$F(y) := \int_a^b g(x)f(x, y) dx,$$

è continua su $[c, d]$. Cioè, se $y_0 \in [c, d]$, allora

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \int_a^b g(x)f(x, y) dx = \int_a^b g(x)f(x, y_0) dx.$$

Dimostrazione. Se $G(x) = \int_a^x g(t) dt$, il Teorema 3.19 mostra che

$$F(y) = \int_a^b f(x, y) dG(x).$$

Basta adesso applicare il Teorema 3.26. □

Teorema 3.28 (Derivabilità per funzioni integrali). *Sia dato $Q = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$. Supponiamo che α sia a variazione limitata su $[a, b]$ e che, per ciascun $y \in [c, d]$ fissato, l'integrale*

$$F(y) = \int_a^b f(x, y) d\alpha(x)$$

esista nel senso di (RS). Se la derivata parziale D_2f è continua su Q , allora esiste la derivata $F'(y)$ per ogni $y \in (c, d)$, ed è data da

$$F'(y) = \int_a^b D_2f(x, y) d\alpha(x).$$

Dimostrazione. Se $y_0 \in (c, d)$ e $y \neq y_0$, allora abbiamo che

$$\frac{F(y) - F(y_0)}{y - y_0} = \int_a^b \frac{f(x, y) - f(x, y_0)}{y - y_0} d\alpha(x) = \int_a^b D_2f(x, \bar{y}) d\alpha(x),$$

dove $\bar{y} \in (\min\{y, y_0\}, \max\{y, y_0\})$. Poiché D_2f è continua su Q , si ottiene la tesi, ragionando come della dimostrazione del Teorema 3.26. □

Teorema 3.29 (Scambio dell'ordine d'integrazione per (RS)). *Sia dato $Q = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$. Supponiamo che α sia a variazione limitata su $[a, b]$, β sia a variazione limitata su $[c, d]$, e che f sia continua su Q . Se $(x, y) \in Q$, definiamo*

$$F(y) = \int_a^b f(x, y) d\alpha(x) \quad e \quad G(x) = \int_c^d f(x, y) d\beta(y).$$

Allora $F \in RS(\beta)$ su $[c, d]$, $G \in RS(\alpha)$ su $[a, b]$, e si ha che

$$\int_c^d F(y) d\beta(y) = \int_a^b G(x) d\alpha(x).$$

In altre parole, si può scambiare l'ordine d'integrazione come segue:

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) d\beta(y) \right) d\alpha(x) = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) d\alpha(x) \right) d\beta(y).$$

Dimostrazione. Per il Teorema 3.26, F è continua su $[c, d]$, e dunque $F \in RS(\beta)$ su $[c, d]$. In maniera simile, $G \in RS(\alpha)$ su $[a, b]$. Per dimostrare che i due integrali coincidono, sarà sufficiente considerare il caso in cui α sia crescente su $[a, b]$ e β sia crescente su $[c, d]$. Se $\alpha \equiv 0$ su $[a, b]$, oppure $\beta \equiv 0$ su $[c, d]$, l'asserto è immediato. Altrimenti, dato un $\epsilon > 0$, per l'uniforme continuità di f , esiste un $\delta_\epsilon > 0$ tale che per ogni coppia di punti $z = (x, y)$ e $z' = (x', y')$ in Q per cui $|z - z'| < \delta_\epsilon$, si abbia

$$|f(x, y) - f(x', y')| < \eta,$$

dove

$$\eta = \eta(\epsilon) = \frac{\epsilon}{(\beta(d) - \beta(c))(\alpha(b) - \alpha(a))}.$$

Suddividiamo adesso Q in n^2 rettangoli congruenti, suddividendo $[a, b]$ e $[c, d]$ in n parti della stessa lunghezza, con n scelto in maniera tale che

$$\frac{b-a}{n} < \frac{\delta_\epsilon}{\sqrt{2}} \quad \text{e} \quad \frac{d-c}{n} < \frac{\delta_\epsilon}{\sqrt{2}}.$$

Scrivendo

$$x_k = a + \frac{k(b-a)}{n} \quad \text{e} \quad y_k = c + \frac{k(d-c)}{n},$$

per $k = 0, 1, 2, \dots, n$, abbiamo che

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) d\beta(y) \right) d\alpha(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} \left(\int_{y_j}^{y_{j+1}} f(x, y) d\beta(y) \right) d\alpha(x).$$

Applicando il Teorema 3.17 due volte a destra dell'uguale, la doppia somma diventa

$$\sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} f(x'_k, y'_j) (\beta(y_{j+1}) - \beta(y_j)) (\alpha(x_{k+1}) - \alpha(x_k)),$$

dove (x'_k, y'_j) si trova nel rettangolo $Q_{k,j}$, che ha (x_k, y_j) e (x_{k+1}, y_{j+1}) come vertici opposti. In maniera simile, si trova che

$$\int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) d\alpha(x) \right) d\beta(y) = \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} f(x''_k, y''_j) (\beta(y_{j+1}) - \beta(y_j)) (\alpha(x_{k+1}) - \alpha(x_k)),$$

dove $(x''_k, y''_j) \in Q_{k,j}$. Ma $|f(x'_k, y'_j) - f(x''_k, y''_j)| < \eta$, e quindi

$$\begin{aligned} & \left| \int_a^b G(x) d\alpha(x) - \int_c^d F(y) d\beta(y) \right| \\ & < \epsilon \sum_{j=0}^{n-1} (\beta(y_{j+1}) - \beta(y_j)) \sum_{k=0}^{n-1} (\alpha(x_{k+1}) - \alpha(x_k)) \\ & = \eta (\beta(d) - \beta(c)) (\alpha(b) - \alpha(c)) = \epsilon. \end{aligned}$$

Poiché ϵ è arbitrario, si conclude che i due integrali sono uguali. $\square$

I Teoremi 3.29 e 3.14 danno il seguente risultato per l'integrale di Riemann:

Teorema 3.30 (Scambio dell'ordine d'integrazione per integrali di Riemann).
Sia f continua sul rettangolo $[a, b] \times [c, d]$. Se $g \in R$ su $[a, b]$ e $h \in R$ su $[c, d]$, allora

$$\int_a^b \left(\int_c^d g(x) h(y) f(x, y) dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b g(x) h(y) f(x, y) dx \right) dy.$$

Dimostrazione. Definite le funzioni $\alpha(x) = \int_a^x g(u) du$ e $\beta(y) = \int_c^y h(v) dv$, basta applicare i Teoremi 3.29 e 3.14. $\square$

3.5 Somme finite scritte come un integrale di Riemann-Stieltjes e formula della somma di Eulero

Definizione 3.31. Dato un numero reale x , definiamo la sua parte intera come

$$[x] = \max\{n \in \mathbb{Z} | n \leq x\}.$$

Facciamo un po' di osservazioni. Innanzitutto, dato un numero reale x , dalla definizione di $[x]$ si ricava subito che $[x] \leq x$, e che la disuguaglianza $[x] + 1 \leq x$ non può aver luogo, in quanto altrimenti si avrebbe che $[x] + 1 \leq [x]$ (perché $[x] + 1$ è un numero intero, e non può superare il massimo fra quelli maggiorati da x). Perciò, abbiamo sempre che

$$[x] \leq x < [x] + 1.$$

In particolare, se $x \in [n, n + 1)$ con n numero intero, allora $n \leq [x] \leq x < n + 1$, da cui $[x] = n$; si evince quindi che la parte intera è una funzione a gradino, che è continua da destra su tutta la retta reale, ed è discontinua da sinistra in corrispondenza di ciascun numero intero. Si ricava anche che se $x \leq y$, allora $x \in [n, n + 1)$ e $y \in [m, m + 1)$, con $n \leq m$ numeri interi, e perciò $[x] = n \leq m = [y]$, da cui $[x] \leq [y]$, e quindi la parte intera di un numero reale è una funzione monotona crescente.

Prendiamo adesso due numeri reali $a < b$, e supponiamo che esista un numero intero n tale che $a < n \leq b$; allora $[a] < n \leq [b]$, da cui $[a] + 1 \leq n \leq [b]$. Viceversa, se $[a] + 1 \leq n \leq [b]$ per qualche intero n , allora

$$a < [a] + 1 \leq n \leq [b] \leq b,$$

da cui $a < n \leq b$. Presi dunque due generici numeri reali $a < b$, possiamo usare la notazione $\sum_{a < n \leq b}$ per indicare la somma $\sum_{n=[a]+1}^{[b]}$, con la convenzione che $\sum_{\emptyset} = 0$.

Teorema 3.32 (Somme finite scritte come un integrale di Riemann-Stieltjes).

Ogni somma finita può essere scritta come un integrale di Riemann-Stieltjes. Infatti, data la somma $\sum_{k=1}^n a_k$, e data la funzione $f : [0, n] \rightarrow \mathbb{R}$ definita come

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = 0, \\ a_k & \text{se } k - 1 < x \leq k, \quad k = 1, \dots, n, \end{cases}$$

si può scrivere

$$\sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=1}^n f(k) = \int_0^n f(x) d[x].$$

Dimostrazione. Si applica il Teorema 2.10. Infatti, la f è continua da sinistra; quindi se poniamo $\alpha(x) = [x]$, allora la α è continua da destra, e data la partizione $Q = \{0, 1, \dots, n\}$ di $[0, n]$, abbiamo che $\alpha_0 = \alpha(0+) - \alpha(0) = 0$,

$$\alpha_k = \alpha(k+) - \alpha(k-) = k - (k - 1) = 1,$$

se $1 < k < n$, e $\alpha_n = \alpha(n) - \alpha(n-) = n - (n - 1) = 1$. Dunque,

$$\int_0^n f(x) d\alpha(x) = \sum_{k=0}^n f(k) \alpha_k = \sum_{k=1}^n a_k.$$

Questo conclude la dimostrazione. □

Il teorema che segue mostra quella che viene chiamata *formula della somma di Eulero*.

Teorema 3.33 (Formula della Somma di Eulero). *Se f è di classe C^1 su $[a, b]$, allora vale la formula*

$$\sum_{a < n \leq b} f(n) = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b f'(x) \{x\} dx + f(a)\{a\} - f(b)\{b\},$$

dove $\{x\} = x - [x]$. Quando a e b sono interi, la formula diventa

$$\sum_{n=a}^b f(n) = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b f'(x) \left(x - [x] - \frac{1}{2} \right) dx + \frac{f(a) + f(b)}{2}.$$

Dimostrazione. Per il Teorema 2.4 (riadattato nel senso di (RS)), abbiamo che

$$\int_a^b f(x) d(x - [x]) + \int_a^b (x - [x]) df(x) = f(b)(b - [b]) - f(a)(a - [a]).$$

Essendo f derivabile, allora f è continua, e in particolare è continua da sinistra e dunque, per il Teorema 2.10, abbiamo che

$$\int_a^b f(x) d[x] = \sum_{a < n \leq b} f(n).$$

Dal momento che $\{x\} = x - [x]$ è differenza di funzioni crescenti, allora $\{x\}$ è a variazione limitata; dunque, per il Teorema 3.16, $\{x\}$ è Riemann-integrabile su $[0, n]$. Adesso, poiché f' è per ipotesi continua, allora f' è Riemann-integrabile su $[0, n]$ e perciò per il Teorema 3.22 vale che

$$\int_a^b (x - [x]) df(x) = \int_a^b (x - [x]) f'(x) dx.$$

Mettendo insieme tutti i pezzi si ottiene quindi la prima formula. Per quanto riguarda la seconda formula, con a e b interi, basta osservare che

$$\sum_{n=a}^b f(n) = f(a) + \sum_{a < n \leq b} f(n),$$

e che

$$f(a) = \frac{f(a) + f(b)}{2} - \frac{1}{2} \int_a^b f'(x) dx.$$

Questo conclude la dimostrazione. □

Osservazione 3.34. Traendo ispirazione dai due risultati appena visti, si potrebbe pensare che grazie al Teorema 2.24 alcune serie numeriche siano esprimibili come un integrale di Darboux-Stieltjes. Vediamo qui di seguito che in effetti è così.

Sia data una successione numerica $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$ assolutamente convergente; prendiamo allora una successione $\{c_j\}_{j \geq 1} \subset (a, b)$ strettamente crescente, e tale che $\lim_{j \rightarrow \infty} c_j = b$. Scelto arbitrariamente un valore reale t , sia data la successione numerica $\{t_j\}_{j \geq 1} \subset$

$\{-1, 1, t\}$ definita come $t_j = 1$ se $a_j > 0$, $t_j = -1$ se $a_j < 0$, e $t_j = t$ se $a_j = 0$; consideriamo anche la successione $\{s_j = |a_j|\}_{j \geq 1}$. Allora la serie $\sum_{j=1}^{\infty} s_j$ è una serie a termini positivi, ed è convergente grazie all'ipotesi dell'assoluta convergenza della serie $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$. Inoltre, abbiamo che $s_j t_j = a_j$ per ogni $j \geq 1$. Data quindi la funzione $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ definita come

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in [a, c_1) \cup \{b\}, \\ t_j & \text{se } x \in [c_j, c_{j+1}), \quad j \geq 1, \end{cases}$$

la quale è continua da destra, e data la funzione integratrice

$$\alpha(x) = \sum_{j=1}^{\infty} s_j I(x - c_j),$$

dove I è la funzione a gradino unitaria data dalla Definizione 2.22, per il Teorema 2.24 abbiamo allora che

$$\int_a^b f \, d\alpha = \sum_{j=1}^{\infty} s_j f(c_j) = \sum_{j=1}^{\infty} s_j t_j = \sum_{j=1}^{\infty} a_j.$$

3.6 Passaggio al limite sotto il segno d'integrale

Il teorema che segue prende il nome di *Criterio di Cauchy*.

Teorema 3.35 (Criterio di Cauchy per l'S-integrale). *Siano date due funzioni $f, \alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, limitate. Allora le due condizioni seguenti sono equivalenti:*

(i) $f \in S(\alpha)$ su $[a, b]$.

(ii) Per ogni $\epsilon > 0$, esiste un $\delta_\epsilon > 0$ tale che, per ogni $P, Q \in \Omega_{[a, b]}$ per cui $\|P\|, \|Q\| < \delta_\epsilon$, si abbia

$$|S(P, f, \alpha) - S(Q, f, \alpha)| < \epsilon.$$

Dimostrazione. (i) $\implies$ (ii): Per ipotesi, dato un $\epsilon > 0$, esiste un $\delta_\epsilon > 0$ tale che per ogni $P \in \Omega_{[a, b]}$ il cui calibro è inferiore a δ_ϵ , si abbia

$$\left| S(P, f, \alpha) - \int_a^b f \, d\alpha \right| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Prese dunque due partizioni P e Q di $[a, b]$ tali che $\|P\|, \|Q\| < \delta_\epsilon$, abbiamo che

$$\begin{aligned} |S(P, f, \alpha) - S(Q, f, \alpha)| &= \left| S(P, f, \alpha) - \int_a^b f \, d\alpha + \int_a^b f \, d\alpha - S(Q, f, \alpha) \right| \\ &\leq \left| S(P, f, \alpha) - \int_a^b f \, d\alpha \right| + \left| \int_a^b f \, d\alpha - S(Q, f, \alpha) \right| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon. \end{aligned}$$

(ii) $\implies$ (i): Viceversa, supponiamo che valga la condizione (ii). Per ogni $n \geq 1$ definiamo la partizione

$$P_n = \left\{ x_k = a + k \cdot \frac{b-a}{n} \right\}_{k=0, \dots, n} \in \Omega_{[a, b]},$$

e scegliamo in maniera arbitraria i punti $t_k \in [x_{k-1}, x_k]$ per $k = 1, \dots, n$. Il nostro scopo è studiare la successione a valori reali

$$\left\{ s_n = S(P_n, f, \alpha) \right\}_{n \geq 1}.$$

Dato un $\epsilon > 0$, si può trovare un $\delta_\epsilon > 0$ per cui

$$|S(P, f, \alpha) - S(Q, f, \alpha)| < \frac{\epsilon}{2},$$

per ogni $P, Q \in \Omega_{[a,b]}$ con $\|P\|, \|Q\| < \delta_\epsilon$. Sia $n_0 = \min\{n \in \mathbb{N} \mid n\delta_\epsilon > b - a\}$. Allora per ogni $n \geq n_0$ si ha che $\|P_n\| < \delta_\epsilon$ da cui, se $m, n \geq n_0$, allora

$$|S(P_n, f, \alpha) - S(P_m, f, \alpha)| < \frac{\epsilon}{2}.$$

La successione s_n è dunque una successione di Cauchy a valori reali, e quindi ammette un limite; sia A tale limite:

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} S(P_n, f, \alpha).$$

Allora per $\epsilon > 0$ esiste un $n_1 \geq 1$ per cui $|s_n - A| < \frac{\epsilon}{2}$ se $n \geq n_1$. Facciamo vedere che tale limite A soddisfa la condizione di $S(\alpha)$ -integrabilità di f su $[a, b]$. Sia P una partizione di $[a, b]$ tale che $\|P\| < \delta_\epsilon$, e prendiamo un $n \geq \max\{n_0, n_1\}$. Allora abbiamo

$$\begin{aligned} |S(P, f, \alpha) - A| &= |S(P, f, \alpha) - S(P_n, f, \alpha) + S(P_n, f, \alpha) - A| \leq \\ &\leq |S(P, f, \alpha) - S(P_n, f, \alpha)| + |S(P_n, f, \alpha) - A| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon. \end{aligned}$$

Questo mostra che f è $S(\alpha)$ -integrabile su $[a, b]$, e l'integrale di Stieltjes è esattamente

$$\int_a^b f d\alpha = A = \lim_{n \rightarrow \infty} S(P_n, f, \alpha).$$

Questo conclude la dimostrazione. □

Teorema 3.36 (S-integrabilità per funzioni continue e α a variazione limitata). Sia f una funzione continua su $[a, b]$, e sia α una funzione a variazione limitata su $[a, b]$. Allora $f \in S(\alpha)$ su $[a, b]$.

Ciò è vero, in particolare, se α è crescente, e quindi in tal caso F è S -, RS -, DS -integrabile e i tre tipi di integrali coincidono.

Dimostrazione. Dimostriamo il teorema utilizzando il Criterio di Cauchy. Se $\alpha \equiv 0$ su $[a, b]$, l'asserto è immediato. Altrimenti, fissiamo un $\epsilon > 0$; poiché f è continua su $[a, b]$, allora f è uniformemente continua su $[a, b]$, e perciò esiste un $\delta_\epsilon > 0$ tale che

$$|f(x) - f(y)| < \frac{\epsilon}{2V_\alpha(a, b)},$$

per ogni $x, y \in [a, b]$ per cui $|x - y| < \delta_\epsilon$. Adesso, prendiamo due partizioni P_1, P_2 di $[a, b]$ dove P_2 è più fine di P_1 e $P_1 = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$. Allora per ogni $k = 1, \dots, n$, esistono $y_{k,0}, \dots, y_{k,r_k} \in Q$ tali che

$$x_{k-1} = y_{k,0} < \dots < y_{k,r_k} = x_k.$$

Dunque, scelto arbitrariamente un punto $t_k \in [x_{k-1}, x_k]$ e scelti arbitrariamente punti $t'_{k,i} \in [y_{k,i-1}, y_{k,i}]$ per ogni $i = 1, \dots, r_k$, abbiamo che

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^{r_k} f(t'_{k,i})(\alpha(y_{k,i}) - \alpha(y_{k,i-1})) - f(t_k)(x_k - x_{k-1}) \\ &= \sum_{i=1}^{r_k} f(t'_{k,i})(\alpha(y_{k,i}) - \alpha(y_{k,i-1})) - f(t_k) \sum_{i=1}^{r_k} (\alpha(y_{k,i}) - \alpha(y_{k,i-1})) \\ &= \sum_{i=1}^{r_k} (f(t'_{k,i}) - f(t_k))(\alpha(y_{k,i}) - \alpha(y_{k,i-1})). \end{aligned}$$

In particolare, se $\|P_1\| < \delta_\epsilon$, allora $\|P_2\| < \delta_\epsilon$ e $|t'_{k,i} - t_k| < \delta_\epsilon$ per ogni $k = 1, \dots, n$ e per ogni $i = 1, \dots, r_k$; per cui, si ha che

$$\begin{aligned} |S(P_2, f, \alpha) - S(P_1, f, \alpha)| &= \left| \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^{r_k} (f(t'_{k,i}) - f(t_k))(\alpha(y_{k,i}) - \alpha(y_{k,i-1})) \right| \\ &\leq \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^{r_k} |f(t'_{k,i}) - f(t_k)| \cdot |\alpha(y_{k,i}) - \alpha(y_{k,i-1})| \\ &< \frac{\epsilon}{2V_\alpha(a, b)} \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^{r_k} |\alpha(y_{k,i}) - \alpha(y_{k,i-1})| = \frac{\epsilon}{2V_\alpha(a, b)} \sum(P_2, \alpha) \\ &\leq \frac{\epsilon}{2V_\alpha(a, b)} V_\alpha(a, b) = \frac{\epsilon}{2}. \end{aligned}$$

Perciò, prese ad arbitrio due partizioni P, Q di $[a, b]$ il cui calibro è strettamente minore di δ_ϵ , osservando che $P \cup Q \supseteq P$ e che $P \cup Q \supseteq Q$, e quindi il calibro di $P \cup Q$ è anch'esso minore di δ_ϵ , abbiamo che

$$\begin{aligned} & |S(P, f, \alpha) - S(Q, f, \alpha)| \\ &= |S(P, f, \alpha) - S(P \cup Q, f, \alpha) + S(P \cup Q, f, \alpha) - S(Q, f, \alpha)| \\ &\leq |S(P, f, \alpha) - S(P \cup Q, f, \alpha)| + |S(P \cup Q, f, \alpha) - S(Q, f, \alpha)| \\ &< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon. \end{aligned}$$

Questo conclude la dimostrazione. □

Osserviamo che il risultato appena visto rende immediata la dimostrazione del Teorema 3.15, dal momento che $S(\alpha) \subset RS(\alpha)$ su $[a, b]$ per ogni funzione $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, come visto nel primo capitolo.

Osservazione 3.37. Se f è una funzione continua su $[a, b]$ e α è a variazione limitata su $[a, b]$, allora vale che

$$\left| \int_a^b f d\alpha \right| \leq \max_{[a, b]} |f| \cdot V_\alpha(a, b).$$

Infatti, per il Teorema 3.36, abbiamo che $f \in S(\alpha)$ su $[a, b]$ e quindi, dato un $\epsilon > 0$, esiste un $\delta_\epsilon > 0$ che rende vera la maggiorazione

$$\left| \int_a^b f d\alpha - S(P, f, \alpha) \right| < \epsilon,$$

per ogni partizione P dell'intervallo $[a, b]$, di calibro strettamente minore di δ_ϵ . Fissata una tale partizione $P = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$, avendo che $\sup_{[a,b]} |f| = \max_{[a,b]} |f|$ (perché f è continua su $[a, b]$, che è compatto), abbiamo che

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f \, d\alpha \right| &= \left| \int_a^b f \, d\alpha - S(P, f, \alpha) + S(P, f, \alpha) \right| \\ &\leq \left| \int_a^b f \, d\alpha - S(P, f, \alpha) \right| + \left| \sum_{k=1}^n f(t_k) \Delta\alpha_k \right| < \epsilon + \sum_{k=1}^n |f(t_k)| \Delta\alpha_k \\ &\leq \epsilon + \max_{[a,b]} |f| \sum (P, \alpha) \leq \epsilon + \max_{[a,b]} |f| \cdot V_\alpha(a, b). \end{aligned}$$

Abbiamo quindi ottenuto la maggiorazione

$$\left| \int_a^b f \, d\alpha \right| < \epsilon + \max_{[a,b]} |f| \cdot V_\alpha(a, b),$$

da cui, data l'arbitrarietà di $\epsilon > 0$ scelto, si ottiene alla fine quanto volevamo.

I due risultati di passaggio al limite sotto il segno d'integrale proposti qui di seguito valgono nel senso di (S).

Teorema 3.38 (Passaggio al limite per successioni di funzioni integrande). *Sia $\{f_j\}_{j \geq 1}$ una successione di funzioni continue su $[a, b]$ e sia α una funzione a variazione limitata su $[a, b]$. Se la successione $\{f_j\}_{j \geq 1}$ converge uniformemente su $[a, b]$, allora vale*

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \int_a^b f_j \, d\alpha = \int_a^b \lim_{j \rightarrow \infty} f_j \, d\alpha.$$

Dimostrazione. Dall'ipotesi della convergenza uniforme della successione $\{f_j\}_{j \geq 1}$, essendo le funzioni f_j continue per ipotesi, abbiamo che la funzione limite f è continua su $[a, b]$, e che

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \max_{[a,b]} |f_j - f| = \lim_{j \rightarrow \infty} \sup_{[a,b]} |f_j - f| = 0.$$

Inoltre, per il Teorema 3.36, esistono gli integrali

$$\int_a^b f_j \, d\alpha \quad (j \geq 1) \quad \text{e} \quad \int_a^b f \, d\alpha.$$

In particolare, abbiamo che

$$\int_a^b \lim_{j \rightarrow \infty} f_j \, d\alpha = \int_a^b f \, d\alpha.$$

Dobbiamo dunque dimostrare che

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \int_a^b f_j \, d\alpha = \int_a^b f \, d\alpha.$$

Grazie all'Osservazione 3.37, è sufficiente riconoscere che

$$\left| \int_a^b f_j \, d\alpha - \int_a^b f \, d\alpha \right| = \left| \int_a^b (f_j - f) \, d\alpha \right| \leq \max_{[a,b]} |f_j - f| \cdot V_\alpha(a, b) \rightarrow 0, \quad j \rightarrow \infty.$$

Questo conclude la prova. □

Teorema 3.39 (Passaggio al limite per successioni di funzioni integratrici). Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua, e sia $\{\alpha_j\}_{j \geq 1}$ una successione di funzioni a variazione limitata su $[a, b]$ tale che $\alpha_j(x)$ sia convergente per ogni $x \in [a, b]$, e tale che esista un numero $K > 0$ per cui

$$V_{\alpha_j}(a, b) \leq K, \quad \forall j \geq 1.$$

Allora

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) d\alpha_j(x) = \int_a^b f(x) d(\lim_{j \rightarrow \infty} \alpha_j)(x).$$

Dimostrazione. Sia α la funzione limite puntuale di $\{\alpha_j\}_{j \geq 1}$, vale a dire

$$\alpha(x) = \lim_{j \rightarrow \infty} \alpha_j(x), \quad \text{per ogni } x \in [a, b].$$

Data una qualunque partizione $P = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$ di $[a, b]$, abbiamo che

$$\sum_{k=1}^n |\alpha_j(x_k) - \alpha_j(x_{k-1})| \leq V_{\alpha_j}(a, b) \leq K.$$

Perciò, passando al limite per $j \rightarrow \infty$, si ottiene che

$$\sum_{k=1}^n |\alpha(x_k) - \alpha(x_{k-1})| \leq K.$$

Da qui si evince che anche la funzione limite puntuale α è a variazione limitata su $[a, b]$, e che soddisfa anch'essa la disuguaglianza

$$V_{\alpha}(a, b) \leq K.$$

Adesso, essendo la funzione f continua sul compatto $[a, b]$, allora essa è uniformemente continua su $[a, b]$; dunque, scelto un $\epsilon > 0$, si può trovare un $\delta_\epsilon > 0$ tale che

$$|f(x) - f(y)| < \frac{\epsilon}{3K},$$

per ogni $x, y \in [a, b]$ per cui $|x - y| < \delta_\epsilon$. Prendiamo quindi una partizione $P = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$ di $[a, b]$ tale che $\|P\| < \delta_\epsilon$, e consideriamo la seguente scomposizione:

$$\int_a^b f(x) d\alpha(x) = \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} (f(x) - f(x_{k-1})) d\alpha(x) + \sum_{k=1}^n f(x_{k-1}) \int_{x_{k-1}}^{x_k} d\alpha(x).$$

La scomposizione si può fare perché $f(x) - f(x_{k-1})$ è continua su $[x_{k-1}, x_k]$ e α è a variazione limitata su $[x_{k-1}, x_k]$, e dunque $f \in S(\alpha)$ su $[x_{k-1}, x_k]$. Inoltre, abbiamo anche la maggiorazione

$$\left| \int_{x_{k-1}}^{x_k} (f(x) - f(x_{k-1})) d\alpha(x) \right| \leq \max_{[x_{k-1}, x_k]} |f - f(x_{k-1})| \cdot V_{\alpha}(x_{k-1}, x_k),$$

dove

$$\max_{[x_{k-1}, x_k]} |f - f(x_{k-1})| = \max\{|f(x) - f(x_{k-1})|; x \in [x_{k-1}, x_k]\},$$

e abbiamo anche

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} d\alpha = \alpha(x_k) - \alpha(x_{k-1}).$$

Osserviamo anche che, poiché gli intervalli $[x_{k-1}, x_k]$ hanno ampiezza minore di δ_ϵ , allora per ogni $x \in [x_{k-1}, x_k]$ si ha che $|f(x) - f(x_{k-1})| < \frac{\epsilon}{3K}$; in particolare,

$$\max_{[x_{k-1}, x_k]} |f - f(x_{k-1})| < \frac{\epsilon}{3K}.$$

Si può quindi scrivere

$$\begin{aligned} & \left| \int_a^b f(x) d\alpha(x) - \sum_{k=1}^n f(x_{k-1}) \int_{x_{k-1}}^{x_k} d\alpha(x) \right| = \left| \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} (f(x) - f(x_{k-1})) d\alpha(x) \right| \\ & \leq \sum_{k=1}^n \left| \int_{x_{k-1}}^{x_k} (f(x) - f(x_{k-1})) d\alpha(x) \right| \leq \sum_{k=1}^n \max_{[x_{k-1}, x_k]} |f - f(x_{k-1})| \cdot V_\alpha(x_{k-1}, x_k) \\ & \leq \frac{\epsilon}{3K} \sum_{k=1}^n V_\alpha(x_{k-1}, x_k) = \frac{\epsilon}{3K} V_\alpha(a, b) \leq \frac{\epsilon}{3K} \cdot 3K = \frac{\epsilon}{3}. \end{aligned}$$

Per alleggerire la notazione, poniamo

$$I(P, f, \alpha) = \sum_{k=1}^n f(x_k) \int_{x_{k-1}}^{x_k} d\alpha = \sum_{k=1}^n f(x_k) (\alpha(x_k) - \alpha(x_{k-1})).$$

Definiamo adesso il numero

$$\eta = \frac{3K}{\epsilon} \cdot \left(\int_a^b f(x) d\alpha(x) - I(P, f, \alpha) \right).$$

Allora abbiamo che $|\eta| < K$, e che

$$\int_a^b f(x) d\alpha(x) = I(P, f, \alpha) + \frac{\epsilon\eta}{3K}.$$

In maniera analoga, per ogni $j \geq 1$ possiamo trovare un numero η_j con $|\eta_j| < K$, per cui vale

$$\int_a^b f(x) d\alpha(x) = I(P, f, \alpha_j) + \frac{\epsilon\eta_j}{3K}.$$

Vale il fatto seguente:

$$\begin{aligned} & |I(P, f, \alpha) - I(P, f, \alpha_j)| \\ & = \left| \sum_{k=1}^n (f(x_k) (\alpha(x_k) - \alpha(x_{k-1})) - (\alpha_j(x_k) - \alpha_j(x_{k-1}))) \right| \\ & = \left| \sum_{k=1}^n f(x_k) (\alpha(x_k) - \alpha_j(x_k) - (\alpha(x_{k-1}) - \alpha_j(x_{k-1}))) \right| \\ & \leq \sum_{k=1}^n |f(x_k)| (|\alpha(x_k) - \alpha_j(x_k)| + |\alpha(x_{k-1}) - \alpha_j(x_{k-1})|) \\ & \leq \max_{[a, b]} |f| \cdot \sum_{k=1}^n \left(|\alpha(x_k) - \alpha_j(x_k)| + |\alpha(x_{k-1}) - \alpha_j(x_{k-1})| \right) \longrightarrow 0, \quad j \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Quindi, esiste un $j_0 \geq 1$ tale che

$$|I(P, f, \alpha) - I(P, f, \alpha_j)| < \frac{\epsilon}{3}, \quad \forall j \geq j_0.$$

Ciò significa che per ogni $j \geq j_0$ si ha

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f(x) d\alpha_j(x) - \int_a^b f(x) d\alpha(x) \right| &= \left| I(P, f, \alpha_j) + \frac{\epsilon \eta_j}{3K} - I(P, f, \alpha) - \frac{\epsilon \eta}{3K} \right| \\ &\leq |I(P, f, \alpha_j) - I(P, f, \alpha)| + \left| \frac{\epsilon \eta_j}{3K} \right| + \left| \frac{\epsilon \eta}{3K} \right| < \frac{\epsilon}{3} + 2 \cdot \frac{\epsilon}{3K} \cdot K = \epsilon. \end{aligned}$$

Questo conclude la prova. □

Capitolo 4

L'integrale di Lebesgue-Stieltjes

4.1 Concetti preliminari

In questo paragrafo verrà messa brevemente in evidenza una parte degli strumenti e dei risultati di Teoria della Misura che costituiscono la struttura matematica su cui è basata la costruzione dell'integrale di Lebesgue-Stieltjes. Dal momento che esporre in maniera completa ed esaustiva tutti gli argomenti (e tutte le sfumature che emergono) richiederebbe un discorso molto lungo e complesso che non può essere esaurito in poche pagine, quello proposto qui di seguito rappresenta solo un riassunto molto conciso di alcuni dei concetti principali.

Consideriamo la seguente famiglia di sottoinsiemi di $\mathbb{R}$:

$$\mathcal{A}(\mathbb{R}) = \left\{ \bigcup_{j=1}^n (a_j, b_j] \right\},$$

con $a_j, b_j \in \overline{\mathbb{R}}$, dove adottiamo la convenzione che $(a, a] = \emptyset$. La famiglia $\mathcal{A}(\mathbb{R})$ forma quella che viene chiamata un'algebra di insiemi su $\mathbb{R}$ (cioè è una sottofamiglia $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R})$, dove $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ è l'insieme delle parti di $\mathbb{R}$, tale che: (1) $\emptyset \in \mathcal{A}$; (2) per ogni $A \in \mathcal{A}$, $A^c \in \mathcal{A}$; (3) per ogni $A, B \in \mathcal{A}$, $A \cup B \in \mathcal{A}$). La σ -algebra di Borel è la più piccola σ -algebra su $\mathbb{R}$ (una σ -algebra su $\mathbb{R}$ è un'algebra su $\mathbb{R}$ che è chiusa per unioni numerabili di insiemi) contenente $\mathcal{A}(\mathbb{R})$. Denoteremo con $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ la σ -algebra di Borel, e chiameremo boreliani i suoi elementi. Si può dimostrare che sono insiemi boreliani anche tutti gli intervalli del tipo (a, b) , $[a, b)$, $[a, b]$, $(-\infty, b)$, $(-\infty, b]$, $(a, +\infty)$ e $[a, +\infty)$, con $a, b \in \mathbb{R}$.

Definizione 4.1 (Misura esterna). Una funzione $\mu^* : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ è detta una misura esterna su $\mathbb{R}$ se valgono le seguenti proprietà:

- (1) $\mu^*(\emptyset) = 0$;
- (2) dati $A, B \subset \mathbb{R}$, con $A \subset B$, si ha $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$;
- (3) per ogni famiglia $\{A_j\}_{j \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R})$ di insiemi, si ha

$$\mu^* \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \right) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(A_j).$$

Definizione 4.2 (Misura). Una funzione $\mu : \mathcal{F} \longrightarrow \mathbb{R}$, dove $\mathcal{F}$ è una σ -algebra su $\mathbb{R}$, è detta una misura su $\mathbb{R}$ se valgono le seguenti proprietà:

- (1) $\mu(\emptyset) = 0$;
(2) data una famiglia $\{A_j\}_{j \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{F}$ di insiemi a due a due disgiunti, si ha

$$\mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j).$$

In particolare, $(\mathbb{R}, \mathcal{F}, \mu)$ prende il nome di spazio di misura, ed ogni insieme $A \in \mathcal{F}$ viene detto insieme μ -misurabile.

La proprietà (2) della Definizione 4.2 prende il nome di σ -additività.

Ogni misura su $\mathbb{R}$ gode delle seguenti proprietà:

Additività finita: per ogni famiglia $\{A_j\}_{j=1}^n \subset \mathcal{F}$ di insiemi a due a due disgiunti, si ha

$$\mu\left(\bigcup_{j=1}^n A_j\right) = \sum_{j=1}^n \mu(A_j).$$

Continuità dal basso: data una famiglia crescente $A_j \subset A_{j+1}$ di elementi di $\mathcal{F}$, si ha che

$$\mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \lim_{j \rightarrow \infty} \mu(A_j).$$

Continuità dall'alto: data una famiglia decrescente $A_j \supset A_{j+1}$ di elementi di $\mathcal{F}$, con $\mu(A_1) < +\infty$, si ha

$$\mu\left(\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \lim_{j \rightarrow \infty} \mu(A_j).$$

Una misura di Borel (altri autori la chiamano invece *misura di Radon*) su $\mathbb{R}$ è una misura $\mu : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \rightarrow [0, +\infty]$, tale che $\mu(A) < +\infty$ per ogni insieme compatto $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Si dimostra, grazie al Teorema di Heine-Borel, che un insieme boreliano limitato ha sempre misura di Borel finita.

Definizione 4.3 (Spazio di misura completo). Diremo che uno spazio di misura $(\mathbb{R}, \mathcal{F}, \mu)$ è completo, o che la σ -algebra $\mathcal{F}$ è completa, se vale quanto segue: dato $B \in \mathcal{F}$ per cui $\mu(B) = 0$, si ha $A \in \mathcal{F}$, per ogni $A \subseteq B$.

Definizione 4.4 (Pre-misura). Una funzione $\mu_{\mathcal{A}} : \mathcal{A} \rightarrow [0, +\infty]$, dove $\mathcal{A}$ è un'algebra su $\mathbb{R}$, è detta una pre-misura su $\mathbb{R}$ se valgono le proprietà:

- (1) $\mu_{\mathcal{A}}(\emptyset) = 0$;
(2) data una famiglia $\{A_j\}_{j \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ di insiemi a due a due disgiunti tali che $\bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j \in \mathcal{A}$, si ha σ -additività:

$$\mu_{\mathcal{A}}\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu_{\mathcal{A}}(A_j).$$

Adesso definiamo quello che prende il nome di *Criterio di Misurabilità alla Carathéodory*:

Definizione 4.5. Data una misura esterna $\mu^* : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \longrightarrow [0, +\infty]$, diciamo che un insieme $A \subseteq \mathbb{R}$ è μ^* -misurabile nel senso di Carathéodory se

$$\mu^*(E) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A^c \cap E), \quad \forall E \subseteq \mathbb{R}.$$

Enunciamo ora due importanti risultati della Teoria della Misura; quello che viene subito qui di seguito prende il nome di *Primo Teorema di Estensione di Carathéodory*, il successivo prende il nome di *Teorema di Estensione di Hahn-Kolmogorov*:

Teorema 4.6 (Primo Teorema di Estensione di Carathéodory). Sia data una misura esterna μ^* su $\mathbb{R}$, e sia $\text{Car}(\mathbb{R})$ la collezione degli insiemi μ^* -misurabili nel senso Carathéodory. Allora $\text{Car}(\mathbb{R})$ è una σ -algebra completa e, se μ è la restrizione di μ^* a $\text{Car}(\mathbb{R})$, allora μ è una misura e dunque $(\mathbb{R}, \text{Car}(\mathbb{R}), \mu)$ è uno spazio di misura completo.

Teorema 4.7 (Teorema di Estensione di Hahn-Kolmogorov). Sia data un'algebra di insiemi $\mathcal{A}$ su $\mathbb{R}$. Se $\mu_{\mathcal{A}}$ è una pre-misura su $\mathcal{A}$, allora $\mu_{\mathcal{A}}$ dà origine ad una misura esterna $\mu_{\mathcal{A}}^*$ su $\mathcal{P}(\mathbb{R})$, dalla quale si ottiene un'estensione di $\mu_{\mathcal{A}}$ ad una misura μ sulla σ -algebra completa $\text{Car}(\mathbb{R})$, con $\mathcal{A} \subset \text{Car}(\mathbb{R})$.

La dimostrazione del Teorema 4.7 è costruttiva, e consiste nel far vedere che la funzione $\mu_{\mathcal{A}}^*$ definita sugli elementi $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ come

$$\mu_{\mathcal{A}}^*(A) = \inf \left\{ \sum_j \mu_{\mathcal{A}}(A_j) \mid A \subseteq \bigcup_j A_j, A_j \in \mathcal{A} \right\}$$

è ben definita, rappresenta una misura esterna su $\mathbb{R}$, e soddisfa la tesi del teorema. Si dimostra inoltre che se μ è l'estensione di $\mu_{\mathcal{A}}$ ottenuta come nella dimostrazione del Teorema 4.7, e μ' è una qualunque altra estensione di $\mu_{\mathcal{A}}$ ad una σ -algebra $\mathcal{F} \supseteq \mathcal{A}$, allora μ e μ' devono coincidere su $\sigma(\mathcal{A})$, dove $\sigma(\mathcal{A})$ è la più piccola σ -algebra su $\mathbb{R}$ contenente l'algebra $\mathcal{A}$.

Adesso abbiamo tutti gli strumenti per poter costruire quello che è il concetto cardine dell'integrazione secondo Lebesgue-Stieltjes, ossia il concetto di misura di Lebesgue-Stieltjes associata ad una funzione $\alpha : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ monotona crescente e continua da destra. Partiamo con una definizione:

Definizione 4.8. Sia data una funzione $\alpha : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ monotona crescente e continua da destra. Allora, dati due numeri reali $a < b$, chiamiamo α -lunghezza dell'intervallo $(a, b]$ la seguente quantità:

$$|(a, b]|_{\alpha} = \alpha(b) - \alpha(a).$$

Si può dimostrare che se $A = \bigcup_{j=1}^n (a_j, b_j]$, dove gli intervalli $(a_j, b_j]$ sono a due a due disgiunti, allora è ben definita la funzione $\mu_{\mathcal{A}(\mathbb{R})} : \mathcal{A}(\mathbb{R}) \longrightarrow [0, +\infty]$ (dove $\mathcal{A}(\mathbb{R})$ è l'algebra di insiemi su $\mathbb{R}$ definita come all'inizio del paragrafo) data da:

$$\mu_{\mathcal{A}(\mathbb{R})}(A) = \sum_{j=1}^n |(a_j, b_j]|_{\alpha} = \sum_{j=1}^n (\alpha(b_j) - \alpha(a_j));$$

vale a dire, la definizione di $\mu_{\mathcal{A}(\mathbb{R})}$ non dipende dalla scomposizione dell'insieme A in intervalli disgiunti $(a_j, b_j]$ tali che $\bigcup_{j=1}^n (a_j, b_j] = A$.

Si dimostra che la funzione $\mu_{\mathcal{A}(\mathbb{R})}$ è una pre-misura sull'algebra $\mathcal{A}(\mathbb{R})$. Grazie ai Teoremi 4.6 e 4.7, la pre-misura $\mu_{\mathcal{A}(\mathbb{R})}$ può essere estesa ad una misura esterna μ_α^* su $\mathbb{R}$ e, denotata con $M_\alpha(\mathbb{R})$ la famiglia degli insiemi μ_α^* -misurabili alla Carathéodory, la restrizione μ_α di μ_α^* a $M_\alpha(\mathbb{R})$ dà luogo ad una misura su $\mathbb{R}$; si ottiene così uno spazio di misura completo $(\mathbb{R}, M_\alpha(\mathbb{R}), \mu_\alpha)$. Si ha inoltre che $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subset M_\alpha(\mathbb{R})$, dal momento che $\mathcal{A}(\mathbb{R}) \subset M_\alpha(\mathbb{R})$ e $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ è la più piccola σ -algebra su $\mathbb{R}$ contenente $\mathcal{A}(\mathbb{R})$; si osserva che la restrizione di μ_α a $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ è l'unica estensione possibile di $\mu_{\mathcal{A}(\mathbb{R})}$ a $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, e rappresenta una misura di Borel su $\mathbb{R}$. Ad esempio, μ_α diventa la misura di Lebesgue su $\mathbb{R}$, quando α è la funzione identità su $\mathbb{R}$.

Chiameremo $\mu_\alpha : M_\alpha(\mathbb{R}) \longrightarrow [0, +\infty]$ la misura di Lebesgue-Stieltjes associata ad α .

Vediamo adesso quali sono i motivi che stanno alla base dell'uso di funzioni monotone crescenti e continue da destra per ottenere misure di Borel su $\mathbb{R}$. Introduciamo la seguente nomenclatura, usata molto spesso nell'ambito della Teoria della Probabilità: una funzione definita sulla retta reale che è continua da destra e ammette limiti sinistri viene spesso chiamata anche funzione *càdlàg* (dal francese *continue à droite, limitée à gauche*, ossia “continua da destra e con limiti sinistri”); quindi le funzioni monotone crescenti continue da destra sono tutte e sole funzioni *càdlàg* monotone crescenti (dal momento che le funzioni monotone ammettono limiti sia destri che sinistri).

Il motivo per il quale sono così tanto importanti le funzioni monotone crescenti e continue da destra è una questione legata al concetto di funzione di distribuzione: data una misura di Borel su $\mathbb{R}$, $\mu : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$, chiamiamo funzione di distribuzione associata a μ la funzione $D_\mu : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definita come:

$$D_\mu(y) = \begin{cases} -\mu((y, 0]) & \text{se } y < 0 \\ 0 & \text{se } y = 0 \\ \mu((0, y]) & \text{se } y > 0. \end{cases}$$

Si dimostra che D_μ è una funzione monotona crescente, Borel-misurabile, *càdlàg* (ed ha quindi al più una quantità numerabile di punti di discontinuità); inoltre, D_μ è continua in un punto $x_0 \in \mathbb{R}$ se e soltanto se $\mu(\{x_0\}) = 0$. Infine, si vede che la misura di un intervallo della forma $(a, b]$ è sempre data da $\mu((a, b]) = D_\mu(b) - D_\mu(a)$.

Partendo da quest'ultimo fatto si dimostra che la misura di Lebesgue-Stieltjes associata a D_μ , vale a dire μ_{D_μ} , coincide su $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ con la misura μ . Viceversa, si prova che se $\alpha : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ è una funzione *càdlàg* monotona crescente, e μ_α è la sua misura di Lebesgue-Stieltjes associata, allora la funzione di distribuzione associata a μ_α deve soddisfare

$$D_{\mu_\alpha}(y) = \alpha(y) - \alpha(0), \quad \forall y \in \mathbb{R}.$$

Emerge dunque il fatto che le funzioni D_{μ_α} e α differiscono per una costante (ossia $\alpha(0)$), e coincidono solo quando $\alpha(0) = 0$. Si conclude quindi alla fine che esiste una corrispondenza biunivoca fra le misure di Borel su $\mathbb{R}$ e le funzioni monotone crescenti continue da destra e nulle nell'origine, e le funzioni di distribuzione rappresentano il filo che lega fra di loro questi due oggetti matematici (in realtà andrebbe dimostrato tutto nel dettaglio; qui è stata proposta solo una mappa orientativa dei punti cardine).

4.2 Definizione dell'integrale di Lebesgue-Stieltjes

Definizione 4.9 (Funzione semplice). Dato lo spazio di misura $(\mathbb{R}, \mathcal{F}, \mu)$, e dato un insieme μ -misurabile D , una funzione $\varphi : D \longrightarrow [0, +\infty]$ è detta una funzione semplice se è della forma

$$\varphi(x) = \sum_{j=1}^n c_j \chi_{A_j}(x),$$

dove $c_j \geq 0$ per ogni j , gli A_j sono sottoinsiemi di D , μ -misurabili e a due a due disgiunti, e χ_{A_j} è la funzione caratteristica dell'insieme A_j , vale a dire $\chi_{A_j}(x) = 1$ quando $x \in A_j$, e $\chi_{A_j}(x) = 0$ quando $x \notin A_j$.

Definizione 4.10. Sia dato uno spazio di misura $(\mathbb{R}, \mathcal{F}, \mu)$, e sia data una funzione $f : D \longrightarrow [-\infty, +\infty]$, dove $D \in \mathcal{F}$. Allora diremo che f è una funzione μ -misurabile se vale una delle seguenti condizioni equivalenti:

- (1) $f^{-1}((-\infty, y)) \in \mathcal{F}, \quad \forall y \in \mathbb{R}.$
- (2) $f^{-1}((-\infty, y]) \in \mathcal{F}, \quad \forall y \in \mathbb{R}.$
- (3) $f^{-1}((y, +\infty)) \in \mathcal{F}, \quad \forall y \in \mathbb{R}.$
- (4) $f^{-1}([y, +\infty)) \in \mathcal{F}, \quad \forall y \in \mathbb{R}.$
- (5) $f^{-1}(A) \in \mathcal{F}, \quad \forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}).$

Le funzioni semplici sono sempre μ -misurabili. Inoltre, data una successione $\{f_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ di funzioni μ -misurabili, allora sono μ -misurabili anche le funzioni

$$\sup_{j \in \mathbb{N}} f_j, \quad \inf_{j \in \mathbb{N}} f_j, \quad \limsup_{j \rightarrow \infty} f_j, \quad \liminf_{j \rightarrow \infty} f_j,$$

e, se esiste, anche $\lim_{j \rightarrow \infty} f_j$. Quando $\mathcal{F} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$, parleremo di funzioni Borel misurabili. Sono sempre Borel misurabili le funzioni continue da un intervallo a valori reali.

Definizione 4.11 (Integrale di Lebesgue-Stieltjes per funzioni semplici). Sia data una funzione $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ monotona crescente e continua da destra. Consideriamo lo spazio di misura $(\mathbb{R}, M_\alpha(\mathbb{R}), \mu_\alpha)$. Dato un insieme μ_α -misurabile E , ossia $E \in M_\alpha(\mathbb{R})$, e data la funzione semplice $\varphi : E \rightarrow [0, +\infty]$ definita come

$$\varphi(x) = \sum_{j=1}^n c_j \chi_{(a_j, b_j]}(x),$$

dove $c_j \geq 0$ e gli intervalli $(a_j, b_j]$ sono (sottoinsiemi di E) a due a due disgiunti, definiamo l'integrale di Lebesgue-Stieltjes di φ rispetto a μ_α su E nel modo seguente:

$$\int_E \varphi d\mu_\alpha = \sum_{j=1}^n c_j \mu_\alpha((a_j, b_j]) = \sum_{j=1}^n c_j (\alpha(b_j) - \alpha(a_j)).$$

Definizione 4.12 (Integrale di Lebesgue-Stieltjes). Supponiamo di trovarci nelle ipotesi della definizione precedente, e sia data una funzione $f : E \longrightarrow [-\infty, +\infty]$ che sia μ_α -misurabile.

(1) Se f assume valori in $[0, +\infty]$, definiamo l'integrale di Lebesgue-Stieltjes di f rispetto a μ_α su E come segue:

$$\int_E f d\mu_\alpha = \sup \left\{ \int_E \varphi d\mu_\alpha \mid \varphi \text{ funzione semplice su } E, \varphi \leq f \right\}.$$

Quando l'estremo superiore è finito, diciamo che f è μ_α -integrabile, mentre se è $+\infty$, diciamo che f è μ_α -integrabile in senso esteso, ponendo

$$\int_E f \, d\mu_\alpha = +\infty.$$

(2) Se invece f assume valori in $\overline{\mathbb{R}}$, definiamo la parte positiva di f come $f^+ = \max\{0, f\}$ e la sua parte negativa come $f^- = \max\{0, -f\}$. Allora si ha che $f = f^+ - f^-$ e $|f| = f^+ + f^-$. Poniamo

$$I_+(f) = \int_E f^+ \, d\mu_\alpha \quad e \quad I_-(f) = \int_E f^- \, d\mu_\alpha,$$

nel senso del punto (1). Se $I_+(f)$ e $I_-(f)$ sono entrambi finiti, diciamo che f è μ_α -integrabile su E e definiamo

$$\int_E f \, d\mu_\alpha = \int_E f^+ \, d\mu_\alpha - \int_E f^- \, d\mu_\alpha.$$

Allora in questo caso anche $|f|$ è μ_α -integrabile su E e risulta che

$$\int_E |f| \, d\mu_\alpha = \int_E f^+ \, d\mu_\alpha + \int_E f^- \, d\mu_\alpha.$$

Se $I_+(f) = +\infty$ e $I_-(f) < +\infty$, scriviamo

$$\int_E f \, d\mu_\alpha = +\infty;$$

se invece $I_+(f) < +\infty$ e $I_-(f) = +\infty$, scriviamo

$$\int_E f \, d\mu_\alpha = -\infty.$$

Infine, se f^+ ed f^- sono entrambe μ_α -integrabili in senso esteso, diciamo che $\int_E f \, d\mu_\alpha$ non è definito. In ogni caso, è sempre definito $\int_E |f| \, d\mu_\alpha = +\infty$.

Per brevità, a volte useremo la sigla (LS) (che incorpora le due definizioni precedenti) per indicare l'integrazione e l'integrabilità nel senso di Lebesgue-Stieltjes.

Teorema 4.13 (Linearità, monotonia e disuguaglianza triangolare). *Siano date due funzioni $f, g : E \rightarrow \mathbb{R}$, μ_α -integrabili e definite sull'insieme μ_α -misurabile E . Allora valgono le seguenti proprietà:*

(1) *Linearità: per ogni coppia di costanti $c, c' \in \mathbb{R}$,*

$$\int_E (cf(x) + c'g(x)) \, d\mu_\alpha = c \int_E f \, d\mu_\alpha + c' \int_E g \, d\mu_\alpha;$$

(2) *Monotonia: se $f(x) \leq g(x)$ quasi dappertutto (vale a dire che l'insieme dei punti $x \in E$ per cui $f(x) > g(x)$ ha misura μ_α -nulla), allora*

$$\int_E f \, d\mu_\alpha \leq \int_E g \, d\mu_\alpha;$$

(3) *Disuguaglianza triangolare integrale:*

$$\left| \int_E f \, d\mu_\alpha \right| \leq \int_E |f| \, d\mu_\alpha.$$

Osserviamo che se $|f|$ è μ_α -integrabile su E , allora (avendo che $|f|^+ = |f|$ e $|f|^- = 0$), si ha che

$$+\infty > \int_E |f| d\mu_\alpha = I_+(|f|) = I_+(f) + I_-(f) \geq 0,$$

per cui anche le due quantità $I_+(f)$ e $I_-(f)$ devono essere finite, e quindi f è μ_α -integrabile su E .

Definizione 4.14. *Sia f sia una funzione definita su un insieme μ_α -misurabile A . Supponiamo che f sia misurabile non negativa, oppure sia a segno qualunque e μ_α -integrabile. Dato $B \subseteq A$ che sia μ_α -misurabile, poniamo*

$$\int_B f d\mu_\alpha := \int_A f \chi_B d\mu_\alpha.$$

Il risultato che segue prende il nome di *Teorema di Convergenza Dominata*.

Teorema 4.15 (Teorema di Convergenza Dominata). *Sia data una successione $\{f_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ di funzioni μ_α -misurabili, definite su un insieme μ_α -misurabile E , convergente puntualmente ad una funzione $f : E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$. Supponiamo che esista una funzione g μ_α -integrabile tale che $|f_j| \leq g$, per ogni $j \in \mathbb{N}$. Allora f è μ_α -integrabile sull'insieme E e vale che*

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \int_E f_j d\mu_\alpha = \int_E \lim_{j \rightarrow \infty} f_j d\mu_\alpha = \int_E f d\mu_\alpha.$$

Si ha inoltre che

$$\int_E |f_j - f| d\mu_\alpha \rightarrow 0, \quad j \rightarrow \infty.$$

La dimostrazione del Teorema 4.15 è ben nota dal corso di Analisi Matematica 2.

4.3 Confronto con l'integrale di Stieltjes

Consideriamo una funzione $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua, e sia $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione monotona crescente e continua da destra. Allora f è μ_α -integrabile su $[a, b]$. Infatti, $|f|$ è continua su $[a, b]$, e pertanto possiede massimo e minimo su $[a, b]$ per il Teorema di Weierstrass; in particolare

$$|f| \leq K = \sup_{[a, b]} |f|,$$

e dunque, dalla monotonia dell'integrale di Lebesgue-Stieltjes si ottiene che

$$\int_{[a, b]} |f| d\mu_\alpha \leq K \int_{[a, b]} 1 d\mu_\alpha = K \cdot \mu_\alpha([a, b]);$$

ne consegue quindi che f è μ_α -integrabile su $[a, b]$, dal momento che μ_α è una misura di Borel sui boreliani (e nelle nostre convenzioni le misure di Borel sono finite sui compatti).

Adesso enunceremo e dimostreremo due risultati che descrivono, sotto determinate condizioni, un'approssimazione dell'integrale di Lebesgue-Stieltjes per mezzo delle somme di Riemann-Stieltjes. Il primo è un risultato il cui enunciato e la cui dimostrazione sono dati a titolo "informale" e spiegheremo, subito dopo la dimostrazione, quali aspetti non sono stati affrontati col giusto formalismo mettendo quindi in evidenza la problematica che sta alla base del teorema in questione. Il secondo risultato aggiusta i problemi del primo, esponendo in maniera più rigorosa e matematicamente consistente il concetto di approssimazione mediante le somme di Riemann-Stieltjes.

Teorema 4.16 (Enunciato informale). *Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua, e sia $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione crescente e continua da destra. Consideriamo le partizioni $P \in \Omega_{[a,b]}$ e la nostra usuale notazione $S(P, f, \alpha)$. Allora vale il seguente risultato:*

$$S(P, f, \alpha) \longrightarrow \int_{[a,b]} f \, d\mu_\alpha, \quad \text{quando} \quad \|P\| \rightarrow 0.$$

Dimostrazione. (Quella che proporremo qui di seguito è una dimostrazione informale, e verrà corretta nel Teorema 4.17). Come prima cosa facciamo vedere che se il limite esiste, allora esso non dipende dalla scelta dei punti intermedi $t_k \in [x_{k-1}, x_k]$, data la partizione $P = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$ di $[a, b]$. Consideriamo quindi due scelte di punti intermedi $t_k, t'_k \in [x_{k-1}, x_k]$, e poniamo:

$$S(P, f, \alpha) = \sum_{k=1}^n f(t_k) \Delta \alpha_k, \quad \text{e} \quad S'(P, f, \alpha) = \sum_{k=1}^n f(t'_k) \Delta \alpha_k.$$

Mostriamo che $|S(P, f, \alpha) - S'(P, f, \alpha)| \rightarrow 0$ per $\|P\| \rightarrow 0$. Abbiamo che

$$\begin{aligned} |S(P, f, \alpha) - S'(P, f, \alpha)| &= \left| \sum_{k=1}^n (f(t_k) - f(t'_k)) \Delta \alpha_k \right| \\ &\leq \sum_{k=1}^n |f(t_k) - f(t'_k)| \Delta \alpha_k. \end{aligned}$$

Osserviamo che

$$|f(t_k) - f(t'_k)| \leq S_k(f) := \sup_{y, y' \in [x_{k-1}, x_k]} |f(y) - f(y')| = \max_{y, y' \in [x_{k-1}, x_k]} |f(y) - f(y')|.$$

Dal momento che f è continua su $[a, b]$, allora f è anche uniformemente continua su $[a, b]$, e perciò per ogni $k = 1, \dots, n$, $S_k(f) \rightarrow 0$ per $\|P\| \rightarrow 0$. Abbiamo dunque che

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n |f(t_k) - f(t'_k)| \Delta \alpha_k &\leq \sum_{k=1}^n S_k(f) \Delta \alpha_k \leq \max_{1 \leq k \leq n} S_k(f) \cdot \sum_{k=1}^n \Delta \alpha_k \\ &= \max_{1 \leq k \leq n} S_k(f) \cdot (\alpha(b) - \alpha(a)) \rightarrow 0, \quad \text{se} \quad \|P\| \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Adesso proviamo l'esistenza del limite. Data la partizione

$$P = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\} \text{ di } [a, b],$$

poiché f è continua nell'intervallo compatto $[x_{k-1}, x_k]$ per ogni $k = 1, \dots, n$, allora su di esso f ammette un punto di minimo; sia quindi $s_k \in [x_{k-1}, x_k]$ una scelta di un punto di minimo per f . Consideriamo la funzione semplice f_n definita come

$$f_n = \sum_{k=1}^n f(s_k) \chi_{(x_{k-1}, x_k]}.$$

Facciamo vedere che $f_n \rightarrow f$ puntualmente per $n \rightarrow \infty$, se $\|P\| \rightarrow 0$. Abbiamo anzitutto che

$$\int_{[a,b]} f_n \, d\mu_\alpha = \sum_{k=1}^n f(s_k) \cdot \int_{[a,b]} \chi_{(x_{k-1}, x_k]} \, d\mu_\alpha = \sum_{k=1}^n f(s_k) \Delta \alpha_k.$$

Per l'uniforme continuità di f su $[x_{k-1}, x_k]$, abbiamo che, per ogni $x \in [a, b]$ preso l'intervallo $[x_{k-1}, x_k]$ contenente x , si ha

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \max_{y, y' \in [x_{k-1}, x_k]} |f(y) - f(y')| \rightarrow 0, \quad \|P\| \rightarrow 0.$$

Si conclude perciò che $f_n \rightarrow f$ per $n \rightarrow \infty$, quando $\|P\| \rightarrow 0$. Osservando adesso che $f_n \leq f$, e che f è μ_α -integrabile per quanto osservato all'inizio del paragrafo, possiamo applicare il Teorema 4.15 e concludere quindi che, per $\|P\| \rightarrow 0$,

$$\sum_{k=1}^n f(s_k) \Delta \alpha_k = \int_{[a,b]} f_n d\mu_\alpha \rightarrow \int_{[a,b]} f d\mu_\alpha.$$

Questo conclude la prova informale. $\square$

Quali sono le criticità che stanno alla base di questo risultato? Innanzitutto, osserviamo che la successione di funzioni f_n definita come nella dimostrazione del Teorema 4.16 in realtà non è una vera successione di funzioni, in quanto non dipende propriamente da $n \in \mathbb{N}$; infatti, tale successione dipende in maniera principale dalla partizione $P \in \Omega_{[a,b]}$, la quale divide l'intervallo $[a, b]$ in un certo numero n di sottointervalli, ma tale numero n è proprio dovuto alla scelta della partizione P ; si tratta quindi di una successione mal posta. Perde quindi di significato, in particolare, parlare di convergenza puntuale di f_n alla funzione f .

Inoltre, non solo per f_n c'è anche una dipendenza dai punti intermedi $t_k \in [x_{k-1}, x_k]$, ma tali punti sono stati scelti in maniera tale da portare le somme di Riemann-Stieltjes a convergere (grazie alla Convergenza Dominata) verso l'integrale di Lebesgue-Stieltjes; non è detto però che utilizzando un'altra scelta di punti intermedi si sarebbe avuto lo stesso risultato.

Infine, c'è il problema riguardo al significato del concetto di limite per $\|P\| \rightarrow 0$, dal momento che si tratta in realtà di un limite informale, poiché le partizioni non sono funzioni del calibro, e quindi si ha l'ambiguità del significato della scrittura $\|P\| \rightarrow 0$.

Il risultato che segue ora rappresenta una versione perfezionata di quello precedente, facendo uso di un esaustivo rigore matematico.

Teorema 4.17 (LS-, S-, RS-, DS-integrale per funzioni continue). *Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua, e sia $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione monotona crescente e continua da destra. Poniamo*

$$I = \int_{[a,b]} f d\mu_\alpha.$$

Allora per ogni $\epsilon > 0$, esiste un $\delta_\epsilon > 0$ tale che per ogni partizione P di $[a, b]$ per cui $\|P\| < \delta_\epsilon$ e per ogni scelta dei punti intermedi $t_k \in [x_{k-1}, x_k]$, si abbia che

$$|S(P, f, \alpha) - I| < \epsilon.$$

Equivalentemente, si ha l'identità

$$\int_{[a,b]} f d\mu_\alpha = S\text{-}\int_a^b f d\alpha. \quad (4.1)$$

In realtà l'integrale di Stieltjes è anche un RS-integrale ed anche un DS-integrale, in forza dei Teoremi 2.17, 3.15, 3.36.

Dimostrazione. Quando $\alpha \equiv 0$ su $[a, b]$, l'asserto diventa immediato. Altrimenti, sia dato un $\epsilon > 0$, e poniamo

$$\eta = \frac{\epsilon}{\alpha(b) - \alpha(a)}.$$

Poiché f è continua sul compatto $[a, b]$, allora f è uniformemente continua su $[a, b]$; perciò esiste un $\delta_\epsilon > 0$ (possiamo mettere direttamente in evidenza la dipendenza da ϵ , in quanto η ed ϵ sono direttamente proporzionali) tale che, data una partizione $P = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$ di $[a, b]$ di calibro strettamente minore di δ_ϵ , si abbia

$$|f(y) - f(y')| < \eta, \quad \forall y, y' \in [x_{k-1}, x_k], \quad \forall k = 1, \dots, n.$$

Fissiamo quindi una tale partizione P . Allora, dal momento che una funzione continua su un compatto ammette sempre su di esso un punto di massimo ed uno di minimo, per ogni $k = 1, \dots, n$ si ha che $M_k(f) - m_k(f) < \eta$. Consideriamo le funzioni semplici f_1 e f_2 definite come

$$f_1 = \sum_{k=1}^n m_k(f) \chi_{(x_{k-1}, x_k]}, \quad \text{e} \quad f_2 = \sum_{k=1}^n M_k(f) \chi_{(x_{k-1}, x_k]}.$$

Abbiamo che

$$I_1 := \int_{[a,b]} f_1 d\mu_\alpha = \sum_{k=1}^n m_k(f) (\alpha(x_k) - \alpha(x_{k-1})) = \sum_{k=1}^n m_k(f) \Delta\alpha_k = L(P, f, \alpha),$$

e che

$$I_2 := \int_{[a,b]} f_2 d\mu_\alpha = \sum_{k=1}^n M_k(f) (\alpha(x_k) - \alpha(x_{k-1})) = \sum_{k=1}^n M_k(f) \Delta\alpha_k = U(P, f, \alpha).$$

Per le proprietà delle somme di Darboux-Stieltjes inferiori e superiori viste nel secondo capitolo, e per la monotonia dell'integrale di Lebesgue-Stieltjes vista nel Teorema 4.13, valgono i due fatti seguenti:

$$I_1 \leq S(P, f, \alpha) \leq I_2, \quad \text{e} \quad I_1 \leq I = \int_{[a,b]} f d\mu_\alpha \leq I_2,$$

dove $S(P, f, \alpha)$ è una qualunque somma di Riemann-Stieltjes di f rispetto ad α .

Ne consegue quindi che

$$\begin{aligned} |S(P, f, \alpha) - I| &\leq I_2 - I_1 = \sum_{k=1}^n (M_k(f) - m_k(f)) \Delta\alpha_k \\ &< \eta \sum_{k=1}^n \Delta\alpha_k = \eta(\alpha(b) - \alpha(a)) = \epsilon. \end{aligned}$$

Facciamo infine un po' di considerazioni. Sappiamo dal Teorema 3.36 che quando una funzione $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ è continua, ed $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ è a variazione limitata, allora $f \in S(\alpha)$ su $[a, b]$. Dunque, se f e α soddisfano le ipotesi del Teorema 4.17, allora f è $S(\alpha)$ -integrabile su $[a, b]$. Osserviamo adesso che ciò che di fatto dice la tesi del

Teorema 4.17 è che l'integrale di Lebesgue-Stieltjes $I = \int_{[a,b]} f \, d\mu_\alpha$ soddisfa la condizione di integrabilità nel senso di Stieltjes data dalla Definizione 1.3; ciò significa che i due integrali, quello dato nel senso di (S) e quello dato nel senso di (LS), devono coincidere. In altre parole, quando ci troviamo nelle ipotesi del Teorema 4.17, se $\int_a^b f \, d\alpha$ è l'integrale di Stieltjes di f rispetto ad α , allora

$$\int_a^b f \, d\alpha = \int_{[a,b]} f \, d\mu_\alpha.$$

Questo conclude la dimostrazione. $\square$

4.4 Confronto con l'integrale di Darboux-Stieltjes

Teorema 4.18. *Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione limitata e Borel-misurabile, e sia $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione monotona crescente e continua da destra.*

Se esiste l'integrale $\int_a^b f \, d\alpha$ nel senso di Darboux-Stieltjes (o, equivalentemente, nel senso RS), allora esso coincide con l'integrale di Lebesgue-Stieltjes di f rispetto a μ_α calcolato su $[a, b]$; vale a dire

$$DS\text{-}\int_a^b f \, d\alpha = \int_{[a,b]} f \, d\mu_\alpha.$$

Dimostrazione. Verifichiamo innanzitutto che f sia μ_α -integrabile su $[a, b]$. Dal momento che f è limitata su $[a, b]$, allora esistono $t < T$ reali tali che $t \leq f \leq T$ su $[a, b]$. Per il Teorema 4.13, si ha allora che

$$t \cdot \mu_\alpha([a, b]) = \int_{[a,b]} t \, d\mu_\alpha \leq \int_{[a,b]} f \, d\mu_\alpha \leq \int_{[a,b]} T \, d\mu_\alpha = T \cdot \mu_\alpha([a, b]).$$

Poiché $t, T \in \mathbb{R}$ e $\mu_\alpha([a, b]) < +\infty$, i due prodotti $t \cdot \mu_\alpha([a, b])$ e $T \cdot \mu_\alpha([a, b])$ devono essere entrambi finiti, e questo dimostra la μ_α -integrabilità di f su $[a, b]$.

Adesso, presa una partizione $P = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$ di $[a, b]$, siano date le funzioni semplici $f_1, f_2 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ definite come

$$f_1 = \sum_{k=1}^n m_k(f) \chi_{(x_{k-1}, x_k]}, \quad \text{e} \quad f_2 = \sum_{k=1}^n M_k(f) \chi_{(x_{k-1}, x_k]}.$$

Allora, come già visto nella dimostrazione del Teorema 4.17, abbiamo che

$$\int_{[a,b]} f_1 \, d\mu_\alpha = L(P, f, \alpha), \quad \text{e} \quad \int_{[a,b]} f_2 \, d\mu_\alpha = U(P, f, \alpha).$$

Tenendo conto delle due uguaglianze scritte sopra, per la monotonia dell'integrale di Lebesgue-Stieltjes abbiamo da una parte che

$$L(P, f, \alpha) \leq \int_{[a,b]} f \, d\mu_\alpha,$$

per cui, passando all'estremo superiore su $L(P, f, \alpha)$ per $P \in \Omega_{[a,b]}$, si ottiene che

$$\underline{I}(f, \alpha) \leq \int_{[a,b]} f \, d\mu_\alpha.$$

In maniera analoga, abbiamo che

$$\int_{[a,b]} f \, d\mu_\alpha \leq U(P, f, \alpha),$$

per cui, passando all'estremo inferiore su $U(P, f, \alpha)$ per $P \in \Omega_{[a,b]}$, si ottiene

$$\int_{[a,b]} f \, d\mu_\alpha \leq \bar{I}(f, \alpha).$$

Si ottiene quindi

$$\underline{I}(f, \alpha) \leq \int_{[a,b]} f \, d\mu_\alpha \leq \bar{I}(f, \alpha).$$

Ma dal momento che, per ipotesi, $f \in DS(\alpha)$, allora le due quantità $\underline{I}(f, \alpha)$ e $\bar{I}(f, \alpha)$ devono coincidere, e sono entrambe uguali a $\int_a^b f \, d\alpha$. Si conclude perciò che

$$\text{DS-} \int_a^b f \, d\alpha = \int_{[a,b]} f \, d\mu_\alpha.$$

La dimostrazione è così giunta al termine. $\square$

Facciamo vedere adesso un esempio di funzione che non è $DS(\alpha)$ -integrabile su $[a, b]$, ma che è μ_α -integrabile su $[a, b]$, mostrando quindi che *l'integrazione nel senso di (LS) espande il concetto di integrazione nel senso di (DS) e non è ad esso equivalente*.

Sia $c \in (a, b)$, e siano date le due funzioni $f, \alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ definite come

$$f(x) = \alpha(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in [a, c) \\ 1 & \text{se } x \in [c, b]. \end{cases}$$

Dal momento che f e α sono entrambe discontinue in c da sinistra allora, per il Teorema 2.24, f non può essere $DS(\alpha)$ -integrabile su $[a, b]$. Facciamo adesso vedere che f è invece μ_α -integrabile su $[a, b]$. Osservando che $f = 1 \cdot \chi_{[c,b]}$, allora vale che

$$\int_{[a,b]} f \, d\mu_\alpha = \int_{[a,b]} 1 \cdot \chi_{[c,b]} \, d\mu_\alpha = \mu_\alpha([c, b]).$$

Per l'additività finita delle misure, abbiamo che $\mu_\alpha([c, b]) = \mu_\alpha(\{c\}) + \mu_\alpha((c, b])$. Osservando che (tutti i seguenti insiemi avendo μ_α -misura finita)

$$\{c\} = \bigcap_{j \in \mathbb{N}} \left(c - \frac{1}{j}, c \right],$$

per la continuità dal basso si ha che

$$\mu_\alpha(\{c\}) = \lim_{j \rightarrow +\infty} \mu_\alpha \left(\left(c - \frac{1}{j}, c \right] \right) = \lim_{j \rightarrow +\infty} \left(\alpha(c) - \alpha \left(c - \frac{1}{j} \right) \right) = \alpha(c) - \alpha(c-).$$

Si ottiene pertanto che

$$\begin{aligned}\mu_\alpha(\{c\}) + \mu_\alpha((c, b]) &= (\alpha(c) - \alpha(c-)) + (\alpha(b) - \alpha(c)) = \\ &= \alpha(b) - \alpha(c-) = 1 - 0 = 1,\end{aligned}$$

da cui si conclude che

$$\int_{[a,b]} f \, d\mu_\alpha = 1.$$

4.5 Integrazione rispetto a misure con segno

Supponiamo di avere una funzione $\alpha : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ a variazione limitata e continua da destra su $[a, b]$. Sia data la funzione $V : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ definita come

$$V(x) = \begin{cases} V_\alpha(a, x) & \text{se } x \in (a, b] \\ 0 & \text{se } x = a. \end{cases}$$

Facciamo vedere che anche la funzione V è continua da destra su $[a, b]$.

Sia $c \in [a, b)$, e fissiamo un $\epsilon > 0$. Poiché α è continua in c da destra, allora esiste un $\delta'_\epsilon > 0$ tale che $|\alpha(x) - \alpha(c)| < \frac{\epsilon}{2}$ per ogni $x \in (c, b)$ tale che $x - c < \delta'_\epsilon$. Per lo stesso ϵ , esiste una partizione $Q = \{c = y_0 < y_1 < \dots < y_m = b\}$ di $[c, b]$ tale che

$$V_\alpha(c, b) - \frac{\epsilon}{2} < \sum(Q, \alpha).$$

Sia $\delta_\epsilon = \min\{\delta'_\epsilon, y_1 - c\}$, e fissiamo un $x' \in (c, b)$ tale che $x' - c < \delta_\epsilon$. Consideriamo la partizione

$$\Omega_{[c,b]} \ni P = \{c = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\} = Q \cup \{x'\}.$$

Allora $P \supset Q$, e $x_1 = x'$. Adesso, dal momento che $|x_1 - x_0| = x' - c < \delta_\epsilon < \delta'_\epsilon$, allora abbiamo che $|\Delta\alpha_1| = |\alpha(x_1) - \alpha(x_0)| < \frac{\epsilon}{2}$. Abbiamo perciò che

$$\begin{aligned}V(c, b) - \frac{\epsilon}{2} &< \sum(Q, \alpha) \leq \sum(P, \alpha) = |\Delta\alpha_1| + \sum_{k=2}^n |\Delta\alpha_k| \\ &< \frac{\epsilon}{2} + \sum_{k=2}^n |\Delta\alpha_k| \leq \frac{\epsilon}{2} + V_\alpha(x_1, c).\end{aligned}$$

In altre parole,

$$V_\alpha(c, b) - \frac{\epsilon}{2} < \frac{\epsilon}{2} + V_\alpha(x_1, b),$$

da cui

$$V_\alpha(c, b) - V_\alpha(x_1, b) < \epsilon.$$

Basta infine osservare (adottando la convenzione che $V_\alpha(a, a) = 0$, per il caso $c = a$) che

$$\begin{aligned}V_\alpha(c, b) - V_\alpha(x_1, b) &= V_\alpha(c, x_1) + V_\alpha(x_1, b) - V_\alpha(x_1, b) \\ &= V_\alpha(a, c) + V_\alpha(c, x_1) - V_\alpha(a, c) = V_\alpha(a, x_1) - V_\alpha(a, c) \\ &= V(x_1) - V(c) = V(x') - V(c).\end{aligned}$$

In definitiva, abbiamo provato che scegliendo un $x' \in (c, b)$ per cui $x' - c < \delta_\epsilon$, si ha che $V(x') - V(c) < \epsilon$; vale a dire, V è continua in c da destra e poiché c è stato preso come un punto arbitrario di $[a, b]$, si conclude che anche la funzione $V(x)$ è continua da destra su $[a, b]$.

Adesso, poiché sia α che V sono funzioni continue da destra, anche la loro differenza $V - \alpha$ lo è, e dal momento che sappiamo dal terzo capitolo che V e $V - \alpha$ sono entrambe funzioni crescenti su $[a, b]$, allora α può essere scritta come differenza di funzioni crescenti continue da destra, vale a dire $\alpha = \alpha_1 - \alpha_2$, dove $\alpha_1 = V$ e $\alpha_2 = V - \alpha$.

D'ora in avanti, per evitare di appesantire troppo la lettura del testo, sarà sempre sottointeso che la funzione α sia a variazione limitata e continua da destra su $[a, b]$, e $\alpha = \alpha_1 - \alpha_2$ sia la scomposizione data da $\alpha_1 = V$ e $\alpha_2 = V - \alpha$.

Definizione 4.19 (Misura con segno). Sia $\mathcal{F}$ una σ -algebra su $\mathbb{R}$. Una funzione $\nu : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$ è detta una misura con segno su $\mathbb{R}$ se:

- (1) ν assume al più uno fra i due valori $+\infty$ e $-\infty$;
- (2) $\nu(\emptyset) = 0$;
- (3) se $\{A_j\}_{j \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{F}$ è una famiglia di insiemi a due a due disgiunti, allora

$$\nu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \sum_{j=1}^n \nu(A_j).$$

D'ora in avanti parleremo di misure positive quando ci riferiremo a misure date dalla Definizione 4.2.

Esempio 4.20. Sia $\mathcal{F}$ una σ -algebra su $\mathbb{R}$.

- (1) Le misure positive $\mu : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$ sono misure con segno.
- (2) Date due misure positive $\mu_1, \mu_2 : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$, di cui almeno una finita (ossia, che assume valori in $[0, +\infty)$, e questo equivale a dire che la misura è limitata, dal momento che $\mathbb{R} \in \mathcal{F}$ e la misura assumerà in $\mathbb{R}$ un valore $M \in [0, +\infty)$), allora la loro differenza $\nu = \mu_1 - \mu_2$, data da $\nu(E) = \mu_1(E) - \mu_2(E)$ per ogni $E \in \mathcal{F}$, è una misura con segno.
- (3) Se ν è una misura con segno, allora lo è anche $a\nu$ per ogni $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. In particolare, se ν è una misura con segno, allora lo è anche $-\nu$, dove $(-\nu)(E) = -\nu(E)$ per ogni $E \in \mathcal{F}$.

Sia data ora una funzione limitata $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, e sia $\alpha = \alpha_1 - \alpha_2$. Per il Teorema 3.7, per ogni $x \in [a, b]$ abbiamo che $V_\alpha(a, b) = V_\alpha(a, x) + V_\alpha(x, b)$, e quindi $V_\alpha(a, x) = V_\alpha(a, b) - V_\alpha(x, b) \leq V_\alpha(a, b)$ per ogni $x \in [a, b]$; perciò, $V(x) \leq V_\alpha(a, b)$ per ogni $x \in [a, b]$, e dunque la funzione V è limitata su $[a, b]$.

Dal momento che, per il Teorema 3.4, α è limitata su $[a, b]$, allora anche la funzione $V - \alpha$ deve esserlo. Perciò le funzioni α_1 e α_2 sono entrambe limitate su $[a, b]$ e quindi (essendo altresì crescenti e continue da destra) esse generano due misure positive μ_{α_1} e μ_{α_2} su $[a, b]$, entrambe finite; per cui, possiamo definire la seguente misura con segno:

$$\nu_\alpha = \mu_{\alpha_1} - \mu_{\alpha_2}.$$

Supponiamo adesso che f sia tale che esistano entrambi gli integrali di Lebesgue-Stieltjes (possibilmente anche in senso esteso), $\int_{[a,b]} f d\mu_{\alpha_1}$ e $\int_{[a,b]} f d\mu_{\alpha_2}$. Se almeno uno dei due integrali è finito, oppure gli integrali esistono entrambi in senso esteso e sono di segno

opposto (vale a dire, uno di essi fa $+\infty$ e l'altro fa $-\infty$), allora si può definire l'integrale di Lebesgue-Stieltjes di f rispetto a ν_α su $[a, b]$ come segue:

$$\int_{[a,b]} f d\nu_\alpha = \int_{[a,b]} f d\mu_{\alpha_1} - \int_{[a,b]} f d\mu_{\alpha_2}.$$

Se il numero $\int_{[a,b]} f d\nu_\alpha$ è finito, diremo che f è ν_α -integrabile su $[a, b]$, altrimenti diremo che f è ν_α -integrabile in senso esteso su $[a, b]$.

D'ora in avanti useremo la sigla (LS) per indicare anche la definizione appena vista, oltre a quelle viste nel secondo paragrafo.

Esempio 4.21. Sia α a variazione limitata e continua da destra su $[a, b]$. Sia data una funzione $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ limitata, e sia $\alpha = \alpha_1 - \alpha_2 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$.

Consideriamo il caso in cui f sia continua. Dal Teorema 3.36, sappiamo che esistono gli integrali

$$\int_a^b f d\alpha, \int_a^b f d\alpha_1 \text{ e } \int_a^b f d\alpha_2,$$

nel senso di Stieltjes. Gli ultimi due integrali, per il Teorema 4.17, coincidono con gli integrali di Lebesgue-Stieltjes $\int_{[a,b]} f d\mu_{\alpha_1}$ e $\int_{[a,b]} f d\mu_{\alpha_2}$; possiamo quindi concludere che f è ν_α -integrabile su $[a, b]$, e si ha

$$\int_a^b f d\alpha = \int_a^b f d\alpha_1 - \int_a^b f d\alpha_2 = \int_{[a,b]} f d\mu_{\alpha_1} - \int_{[a,b]} f d\mu_{\alpha_2} = \int_{[a,b]} f d\nu_\alpha. \quad (4.2)$$

Quando invece f è Borel-misurabile, ed esiste l'integrale $\int_a^b f d\alpha$ nel senso di Riemann-Stieltjes allora, per il Teorema 3.11, esistono gli integrali $\int_a^b f d\alpha_1$ e $\int_a^b f d\alpha_2$ nel senso di DS/RS, i quali, grazie al Teorema 4.18, coincidono con gli integrali di Lebesgue-Stieltjes $\int_{[a,b]} f d\mu_{\alpha_1}$ e $\int_{[a,b]} f d\mu_{\alpha_2}$, e perciò vale una catena di uguaglianze analoga a (4.2), da cui

$$\int_a^b f d\alpha = \int_{[a,b]} f d\nu_\alpha.$$

Abbiamo quindi dimostrato quanto segue.

Teorema 4.22. *Sia α a variazione limitata e continua da destra su $[a, b]$. Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ Borel-misurabile e tale che esiste l'integrale $\int_a^b f d\alpha$ nel senso di Riemann-Stieltjes (cioè è vero, ad esempio, se f è continua).*

Allora f è ν_α -integrabile su $[a, b]$, ove ν_α è la misura con segno associata ad α nel modo descritto più sopra (ossia $\nu_\alpha = \mu_{\alpha_1} - \mu_{\alpha_2}$ ove μ_{α_i} sono le misure di Borel associate alle funzioni crescenti e continue da destra $\alpha_1 = V_\alpha$ e $\alpha_2 = V_\alpha - \alpha$) e si ha uguaglianza tra gli integrali seguenti

$$RS\text{-}\int_a^b f d\alpha = \int_{[a,b]} f d\nu_\alpha.$$

Adesso consideriamo i due teoremi di passaggio al limite sotto il segno d'integrale visti nel sesto paragrafo del terzo capitolo, ossia i Teoremi 3.38 e 3.39, e vediamo come possono essere riadattati nel senso di (LS). Gli integrali rispetto ad una funzione integratrice adesso saranno sempre intesi nel senso di (S).

Partiamo dal Teorema 3.38. Tale teorema diceva che presa una successione di funzioni continue $\{f_j\}_{j \geq 1}$ che converge uniformemente a f su $[a, b]$, e presa una funzione $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ a variazione limitata su $[a, b]$, allora vale che

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \int_a^b f_j d\alpha = \int_a^b \lim_{j \rightarrow \infty} f d\alpha = \int_a^b f d\alpha.$$

Aggiungiamo l'ipotesi che α sia continua da destra su $[a, b]$. Abbiamo allora, da quanto osservato nell'Esempio 4.21, che

$$\int_a^b f_j d\alpha = \int_{[a, b]} f_j d\nu_\alpha \quad (j \geq 1), \quad \text{e} \quad \int_a^b f d\alpha = \int_a^b f d\nu_\alpha.$$

Possiamo perciò concludere che vale la convergenza

$$\int_{[a, b]} f_j d\nu_\alpha \rightarrow \int_{[a, b]} f d\nu_\alpha, \quad j \rightarrow \infty. \quad (4.3)$$

La convergenza (4.3) può essere dimostrata ragionando anche in quest'altro modo: dal momento che $f_j \rightarrow f$ uniformemente su $[a, b]$, allora per $\epsilon = 1$ esiste un $j_0 \geq 1$ tale che (utilizzando la notazione $\|h\|_\infty = \sup_{[a, b]} |h|$, per $h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$), si abbia $\|f_j - f\|_\infty < 1$ per ogni $j \geq j_0$. Poiché

$$\|f_j\|_\infty \leq \|f_j - f\|_\infty + \|f\|_\infty < 1 + \|f\|_\infty, \quad \forall j \geq j_0,$$

ponendo

$$M := \max\{\|f_1\|_\infty, \dots, \|f_{j_0-1}\|_\infty, \|f\|_\infty + 1\},$$

si ha che $|f_j| \leq \|f_j\|_\infty \leq M$ su $[a, b]$ per ogni $j \leq 1$. Dunque, posta g la funzione $g \equiv M$ su $[a, b]$, abbiamo allora che

$$\int_{[a, b]} g d\mu_{\alpha_i} = M \cdot \mu_{\alpha_i}([a, b]) < +\infty, \quad \forall i = 1, 2,$$

e quindi g è μ_{α_i} -integrabile su $[a, b]$ per ogni $i = 1, 2$. Ricordando che la convergenza uniforme implica la convergenza puntuale, possiamo applicare dunque la Convergenza Dominata (avendo che $|f_j| \leq g$ su $[a, b]$ per ogni $j \geq 1$) e dire che

$$\int_{[a, b]} f_j d\mu_{\alpha_1} \rightarrow \int_{[a, b]} f d\mu_{\alpha_1}, \quad j \rightarrow \infty,$$

e che

$$\int_{[a, b]} f_j d\mu_{\alpha_2} \rightarrow \int_{[a, b]} f d\mu_{\alpha_2}, \quad j \rightarrow \infty.$$

Perciò,

$$\int_{[a, b]} f_j d\mu_{\alpha_1} - \int_{[a, b]} f_j d\mu_{\alpha_2} \rightarrow \int_{[a, b]} f d\mu_{\alpha_1} - \int_{[a, b]} f d\mu_{\alpha_2}, \quad j \rightarrow \infty,$$

da cui la convergenza come in (4.3).

Per quel che riguarda il Teorema 3.39, esso stabiliva che data una funzione continua $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, e data una successione $\{\alpha_j\}_{j \geq 1}$ di funzioni a variazione limitata su $[a, b]$ tale che $\alpha_j(x)$ converga per ogni $x \in [a, b]$, e tale che esista un numero reale $K > 0$ per cui $V_{\alpha_j}(a, b) \leq K$ per ogni $j \geq 1$, allora si ha la convergenza

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) d\alpha_j(x) = \int_a^b f d(\lim_{j \rightarrow \infty} \alpha_j)(x),$$

e all'inizio della dimostrazione si era visto che la successione di funzioni α_j tende puntualmente su $[a, b]$ ad una funzione $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, anch'essa a variazione limitata su $[a, b]$. Aggiungiamo l'ipotesi che le funzioni α_j siano tutte continue da destra su $[a, b]$ per ogni $j \geq 1$, e che anche α lo sia.

Allora, per quanto visto nell'Esempio 4.21, abbiamo che

$$\int_a^b f d\alpha_j = \int_{[a,b]} f d\nu_{\alpha_j} \quad (j \geq 1), \quad \text{e} \quad \int_a^b f d\alpha = \int_{[a,b]} f d\nu_{\alpha};$$

si conclude perciò che

$$\int_{[a,b]} f d\nu_{\alpha_j} \rightarrow \int_{[a,b]} f d\nu_{\alpha}, \quad j \rightarrow \infty.$$

Ricordiamo che questa convergenza è data assumendo l'ipotesi che f sia continua su $[a, b]$. Interessante potrebbe essere scoprire se, imponendo eventualmente alcune ulteriori condizioni sulle funzioni α_j per $j \geq 1$ e su α , tale convergenza possa essere estesa a tutte le funzioni f Borel-misurabili. In tal caso si avrebbe una convergenza $\nu_{\alpha_j} \rightarrow \nu_{\alpha}$ in senso debole.

4.6 Un controesempio interessante

Terminiamo il paragrafo studiando una funzione continua β non a variazione limitata, che però può essere utilizzata come funzione integratrice per calcolare integrali di Stieltjes quando la funzione integranda è a variazione limitata. Faremo poi vedere che tale funzione β non può generare una misura con segno, fornendo quindi un controesempio che mostra che da funzioni più generali di quelle a variazione limitata non sempre è possibile costruire un'integrazione secondo Lebesgue-Stieltjes.

Prendiamo dunque in considerazione la seguente funzione $\beta : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$:

$$\beta(x) = \begin{cases} x \sin \frac{\pi}{2x} & \text{se } x \in (0, 1] \\ 0 & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

Dal momento che la funzione $\sin$ ammette sempre valori compresi fra -1 e 1 , abbiamo che $\lim_{x \rightarrow 0} \beta(x) = 0$, e perciò la funzione β è continua su $[0, 1]$.

Ora mostriamo che β non è a variazione limitata.

A tal fine, Sia dato adesso un $k \in \mathbb{N}$, e calcoliamo il valore di $\beta(\frac{1}{k})$. Si vede abbastanza facilmente che, se k è pari, allora $\beta(\frac{1}{k}) = 0$; se invece k è dispari della forma $k = 4l + 1$, con $l \in \mathbb{N}$, allora $\beta(\frac{1}{k}) = \frac{1}{k}$; infine, se k è dispari della forma $k = 4l + 3$, con $l \in \mathbb{N}$,

allora $\beta(\frac{1}{k}) = -\frac{1}{k}$. Fatta questa osservazione, fissiamo adesso un numero $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, e consideriamo le due partizioni

$$P_n = \left\{0, \frac{1}{2n}, \frac{1}{2n-1}, \dots, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1\right\} \in \Omega_{[0,1]},$$

e

$$P'_n = \left\{x_k = \frac{1}{2n-k}\right\}_{k=0, \dots, 2n-2} = P_n \setminus \{0, 1\} \in \Omega_{[\frac{1}{2n}, \frac{1}{2}]}.$$

Allora, per ogni $k = 1, \dots, 2n-2$, si ha che $\beta(x_k) = 0$ quando k è pari, e $\beta(x_k) = \pm \frac{1}{2n-k}$ quando k è dispari. Si ottiene così, ponendo $\Delta\beta_k = \beta(x_k) - \beta(x_{k-1})$ per $k = 1, 2, \dots, 2n-2$,

$$\begin{aligned} \sum(P'_n, \beta) &= \sum_{k=1}^{2n-2} |\Delta\beta_k| = \sum_{l=1}^{n-1} (|\Delta\beta_{2l-1}| + |\Delta\beta_{2l}|) \\ &= \sum_{l=1}^{n-1} (|\beta(x_{2l-1}) - \beta(x_{2l-2})| + |\beta(x_{2l}) - \beta(x_{2l-1})|) = \sum_{l=1}^{n-1} \frac{2}{2n - (2l-1)} \\ &= \sum_{l=1}^{n-1} \frac{2}{2(n-l)+1} = \sum_{l'=1}^{n-1} \frac{2}{2l'+1} > \sum_{l'=1}^{n-1} \frac{2}{2l'+2} = \sum_{l'=1}^{n-1} \frac{1}{l'+1} \\ &= \sum_{l''=1}^n \frac{1}{l''} - 1 \longrightarrow +\infty, \quad \text{per } n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Dal momento che $\sum(P_n, \beta) > \sum(P'_n, \beta)$, si conclude che la funzione β non può essere a variazione limitata su $[0, 1]$.

Fissiamo adesso una funzione $g : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ a variazione limitata su $[0, 1]$. Poiché la funzione β è continua su $[0, 1]$, allora, per il Teorema 3.36, $\beta \in S(g)$ su $[0, 1]$, e quindi per il Teorema 2.4, $g \in S(\beta)$ su $[0, 1]$; quindi esiste l'integrale $\int_0^1 g d\beta$ nel senso di Stieltjes; da qui segue che esiste anche l'RS-integrale. Ora facciamo vedere che la funzione β non può generare una misura con segno.

Possiamo osservare che, dal momento che la funzione β non è a variazione limitata su $[0, 1]$, allora essa non può essere scritta come differenza di funzioni β_1 e β_2 monotone crescenti, con $\beta = \beta_1 - \beta_2$, e pertanto non è possibile ottenere una misura con segno del tipo $\nu_\beta = \mu_{\beta_1} - \mu_{\beta_2}$ (ma questo non toglie che si possa ottenere una misura con segno in un altro modo). La faccenda può essere vista anche da quest'altra prospettiva: sia $c \in (0, 1)$; facciamo vedere che la funzione β è a variazione limitata su $[c, 1]$. Innanzitutto, poiché β è continua su $[0, 1]$, allora lo è anche su $[c, 1]$; inoltre, per ogni $x \in [c, 1]$,

$$|\beta'(x)| = \left| \sin\left(\frac{\pi}{2x}\right) - \frac{\pi}{2x} \cos\left(\frac{\pi}{2x}\right) \right| \leq 1 + \frac{\pi}{2c};$$

quindi β' è limitata su $[c, 1]$ (e quindi in particolare lo è su $(c, 1)$) e perciò, per il Teorema 3.3, β è a variazione limitata su $[c, 1]$. Chiamata β_c la restrizione di β a $[c, 1]$, possiamo dunque scrivere β_c come differenza di funzioni crescenti $\beta_c = \beta_{c,1} - \beta_{c,2}$, dove $\beta_{c,1}$ e $\beta_{c,2}$ sono costruite come nella dimostrazione del Teorema 3.10.

Può in particolare essere costruita una misura con segno del tipo

$$\nu_{\beta_c} = \mu_{\beta_{c,1}} - \mu_{\beta_{c,2}}.$$

Poiché per ogni sottointervallo $(a, b] \subset [c, 1]$ si ha che

$$\mu_{\beta_{c,i}}((a, b]) = \beta_{c,i}(b) - \beta_{c,i}(a) \text{ per ogni } i = 1, 2,$$

allora segue immediatamente che

$$\nu_{\beta_c}((a, b]) = \beta_c(b) - \beta_c(a) = \beta(b) - \beta(a), \quad \forall 0 < c < a < b \leq 1. \quad (4.4)$$

Osserviamo anche che $\beta_c = \beta_d$ su $[d, 1]$ quando $0 < c < d < 1$.

Si potrebbe, alla luce di tutto questo, pensare che allora le misure con segno ν_{β_c} su $[c, 1]$, facendo variare c in $(0, 1)$, possano essere estese in maniera naturale ad una misura con segno ν_β su $[0, 1]$ che mantenga la struttura delle misure con segno ν_{β_c} , e quindi in particolare tale che $\nu_\beta((a, b]) = \beta(b) - \beta(a)$ per ogni sottointervallo $(a, b] \subset [0, 1]$ con $0 < a < b \leq 1$. Vediamo qui di seguito che un'estensione come questa non può aver luogo. Supponiamo per assurdo che si possa avere un tale tipo di estensione. Allora da una parte, definiti gli insiemi

$$A_j = \left(\frac{1}{4j+1}, \frac{1}{4j} \right], \quad \forall j \geq 1,$$

per la σ -additività si avrebbe che

$$\begin{aligned} \nu_\beta \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \right) &= \sum_{j=1}^{\infty} \nu_\beta(A_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \left(\beta \left(\frac{1}{4j} \right) - \beta \left(\frac{1}{4j+1} \right) \right) \\ &= - \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{4j+1} = -\infty. \end{aligned}$$

Dall'altra parte, definiti gli insiemi

$$B_j = \left(\frac{1}{4j+3}, \frac{1}{4j+2} \right], \quad \forall j \geq 1,$$

sempre per la σ -additività si avrebbe

$$\begin{aligned} \nu_\beta \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j \right) &= \sum_{j=1}^{\infty} \nu_\beta(B_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \left(\beta \left(\frac{1}{4j+2} \right) - \beta \left(\frac{1}{4j+3} \right) \right) \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{4j+3} = +\infty. \end{aligned}$$

Ciò significa che ν_β assumerebbe entrambi i valori $+\infty$ e $-\infty$, andando a contraddire il punto (1) della Definizione 4.19.

Più in generale, ci chiediamo se può esistere una misura con segno ν , definita sui Boreliani di $[0, 1]$, tale che

$$(\diamond): \quad \int_0^1 f \, d\beta = \int_{[0,1]} f \, d\nu, \quad \text{per ogni } f \text{ continua e a variazione limitata su } [0, 1].$$

(L'ipotesi che f è a variazione limitata garantisce l'esistenza dell'S-integrale; l'ulteriore ipotesi di continuità di f è una ipotesi minimale da richiedere, tenendo conto dei teoremi di Rappresentazione di tipo Riesz, se si vuole una rappresentazione efficiente del funzionale $f \mapsto \int_{[0,1]} f d\nu$.)

Sia $(a, b]$ contenuto in $[0, 1]$ con $0 < a < b \leq 1$. Si può certamente costruire una successione (f_n) di funzioni di classe C^∞ in $[0, 1]$, a valori in $[0, 1]$, tali che $f_n = 1$ su $[a + 1/n, b]$, $f_n \equiv 0$ su $[0, a]$ e su $[b + 1/n, 1]$ (se $b = 1$ quest'ultima richiesta viene omessa). Il limite puntuale di f_n è ovviamente uguale a

$$f(x) := \begin{cases} 0 & \text{se } 0 \leq x \leq a, \\ 1 & \text{se } a < x \leq b \\ 0, & \text{se } b < x \leq 1, \end{cases}$$

ove la terza informazione va omessa se $b = 1$. Per tali f_n deve valere ($\diamond$):

$$S\text{-} \int_0^1 f_n d\beta = \int_{[0,1]} f_n d\nu, \quad \text{per } n \text{ grande.}$$

Dal Teorema della Convergenza Dominata (che vale certamente perché, per fatti di Teoria della Misura, le misure finite con segno sono la differenza di due misure positive finite), il secondo membro tende a

$$\int_{[0,1]} \chi_{(a,b]} d\nu = \nu((a, b]).$$

Avendo supposto $0 < a$, esiste certamente $c > 0$ tale che $(a, b] \subseteq [c, 1]$. Ma allora (tutti gli integrali qui sotto essendo nel senso di Stieltjes, e quindi anche nel senso RS)

$$\int_0^1 f_n d\beta = \int_c^1 f_n d\beta = \int_c^1 f_n d\beta_c = \int_{[c,1]} f_n d\nu_{\beta_c} =: I_n.$$

Nell'ultima identità si è applicato il Teorema 4.22 su $[c, 1]$. Un'altra applicazione del Teorema della Convergenza Dominata per misure finite con segno garantisce che I_n converge a $\nu_{\beta_c}((a, b])$. Ma allora

$$\nu((a, b]) = \nu_{\beta_c}((a, b]) \stackrel{(4.4)}{=} \beta(b) - \beta(a).$$

Questo però porterebbe a far assumere a ν sia il valore $+\infty$ che il valore $-\infty$, ripetendo un argomento come quello fatto poc'anzi. Questo mostra che

non può esistere una misura con segno ν , definita sui Boreliani di $[0, 1]$, tale che valga ($\diamond$), ossia tale da rappresentare l'integrale $S\text{-} \int_0^1 f d\beta$, per ogni f continua e a variazione limitata su $[0, 1]$.

Capitolo 5

Appendice sull'integrabilità delle funzioni continue

In quest'ultimo breve capitolo cercheremo di approfondire ulteriormente (rispetto a quanto è stato fatto nel terzo capitolo) la questione dell'integrabilità per funzioni continue. Avevamo visto nel corso del terzo capitolo (Teorema 3.15) che quando sono date due funzioni f e α definite sull'intervallo $[a, b]$, dove f è continua su $[a, b]$ e α è a variazione limitata su $[a, b]$, allora $f \in RS(\alpha)$ su $[a, b]$ (in particolare, se α è crescente su $[a, b]$, allora $f \in DS(\alpha)$ su $[a, b]$, e questo lo si era visto nella dimostrazione del Teorema 3.15). In realtà, sempre nel corso del terzo capitolo, si era successivamente dimostrato qualcosa in più, ossia che vale anche $f \in S(\alpha)$ su $[a, b]$ (Teorema 3.36).

Adesso il nostro scopo è vedere se esistono casi più generali in cui la funzione f è sempre continua, ma, per una qualche funzione α su $[a, b]$, $f \notin RS(\alpha)$ su $[a, b]$. Vieni da sé che in questo caso avremmo da una parte che $f \notin S(\alpha)$ su $[a, b]$ (infatti $S(\alpha) \subset RS(\alpha)$; Osservazione 1.4), e dall'altra che α non può essere a variazione limitata su $[a, b]$. Questo dimostra che *non è vero che le funzioni continue sono RS-integrabili rispetto a tutte le funzioni limitate α* .

Analizziamo il caso seguente: sia data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} \sin\left(\frac{\pi}{2x}\right) & \text{se } x \in (0, 1], \\ 0 & \text{se } x = 0. \end{cases} \quad (5.1)$$

Osserviamo che per ogni $j \geq 1$ si ha che

$$f\left(\frac{1}{j}\right) = 0 \text{ se } j \text{ è pari, mentre } f\left(\frac{1}{j}\right) = \pm \frac{1}{\sqrt{j}} \text{ se } j \text{ è dispari.}$$

Inoltre, poiché $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$, abbiamo che f è continua su $[0, 1]$.

Adesso, per ogni $n \geq 2$, consideriamo la scomposizione di $[0, 1]$ definita da

$$P_n = \left\{ 0, \frac{1}{2n}, \frac{1}{2n-1}, \dots, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1 \right\}.$$

Consideriamo la seguente funzione, sempre definita sull'intervallo $[0, 1]$:

$$\alpha(x) = \begin{cases} f\left(\frac{1}{j}\right) & \text{se } x \in \left(\frac{1}{j+1}, \frac{1}{j}\right] \text{ (per qualche } j \geq 1), \\ 0 & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

Facciamo vedere che $f \notin RS(\alpha)$ su $[0, 1]$.

Per dimostrarlo, dobbiamo far vedere che, per ogni $A \in \mathbb{R}$, esiste un $\epsilon > 0$ tale che per ogni partizione P' di $[0, 1]$ esistono una partizione $P = \{0 = x_0 < x_1 < \dots < x_n = 1\}$ di $[0, 1]$ più fine di P' , ed una scelta di punti intermedi $t_k \in [x_{k-1}, x_k]$ per P tali per cui $|S(P, f, \alpha) - A| \geq \epsilon$.

D'ora in avanti, data una partizione $Q = \{0 = y_0 < y_1 < \dots < y_m = 1\}$ di $[0, 1]$, per la somma di Riemann-Stieltjes $S(Q, f, \alpha)$ considereremo sempre come punti intermedi i punti “destri” $t_k = y_k$, per ogni $k = 1, \dots, m$ (cioè d'ora in poi verrà sempre sempre sottintesa la scelta di punti intermedi di questo tipo).

Sia data innanzitutto la partizione P_n (con $n \geq 2$). Da un calcolo diretto, abbiamo

$$\begin{aligned}
S(P_n, f, \alpha) &= S(P_n, f, f) \\
&= f(1) \left(\alpha(1) - \alpha\left(\frac{1}{2}\right) \right) + f\left(\frac{1}{2}\right) \left(\alpha\left(\frac{1}{2}\right) - \alpha\left(\frac{1}{3}\right) \right) \\
&+ f\left(\frac{1}{3}\right) \left(\alpha\left(\frac{1}{3}\right) - \alpha\left(\frac{1}{4}\right) \right) + f\left(\frac{1}{4}\right) \left(\alpha\left(\frac{1}{4}\right) - \alpha\left(\frac{1}{5}\right) \right) + f\left(\frac{1}{5}\right) \left(\alpha\left(\frac{1}{5}\right) - \alpha\left(\frac{1}{6}\right) \right) \\
&+ \dots + f\left(\frac{1}{2n-1}\right) \left(\alpha\left(\frac{1}{2n-1}\right) - \alpha\left(\frac{1}{2n}\right) \right) + f\left(\frac{1}{2n}\right) \left(\alpha\left(\frac{1}{2n}\right) - \alpha(0) \right) = \\
&= f(1) \left(\alpha(1) - \alpha\left(\frac{1}{2}\right) \right) + f\left(\frac{1}{3}\right) \left(\alpha\left(\frac{1}{3}\right) - \alpha\left(\frac{1}{4}\right) \right) + f\left(\frac{1}{5}\right) \left(\alpha\left(\frac{1}{5}\right) - \alpha\left(\frac{1}{6}\right) \right) \\
&+ \dots + f\left(\frac{1}{2n-1}\right) \left(\alpha\left(\frac{1}{2n-1}\right) - \alpha\left(\frac{1}{2n}\right) \right) \\
&= f(1)\alpha(1) + f\left(\frac{1}{3}\right)\alpha\left(\frac{1}{3}\right) + f\left(\frac{1}{5}\right)\alpha\left(\frac{1}{5}\right) + \dots + f\left(\frac{1}{2n-1}\right)\alpha\left(\frac{1}{2n-1}\right) \\
&= 1 + \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 + \left(-\frac{1}{\sqrt{7}}\right)^2 + \dots + \left((-1)^{n+1} \frac{1}{\sqrt{2n-1}}\right)^2 \\
&= 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \dots + \frac{1}{2n-1}.
\end{aligned}$$

Ovviamente si ha $S(P_n, f, \alpha) \rightarrow +\infty$ per $n \rightarrow \infty$ e tale successione è crescente.

Fissiamo adesso un $A \in \mathbb{R}$. Allora, esiste un $n_1 \in \mathbb{N}$ tale che $S(P_n, f, \alpha) > A$ per ogni $n \geq n_1$; supponiamo che n_1 sia il primo indice con tale proprietà e poniamo

$$\epsilon := S(P_{n_1}, f, \alpha) - A.$$

Prendiamo adesso una qualunque partizione $P' \in \Omega_{[0,1]}$. Sia $y = \min\{P' \setminus \{0\}\}$, e sia $n' \in \mathbb{N}$ il primo indice per cui si abbia

$$\frac{1}{2n'} < y.$$

Allora non è difficile convincersi che, per ogni $n \geq n'$, si ha

$$S(P_n \cup P', f, \alpha) = S(P_n, f, \alpha). \quad (\diamond)$$

Infatti basta osservare che la funzione α è costante sugli intervalli del tipo $\left(\frac{1}{j+1}, \frac{1}{j}\right]$, per ogni $j \geq 1$. Ma allora, se $n = \max\{n', n_1\}$, prendendo $P = P_n \cup P'$ (che è più fine di P'), abbiamo quanto segue (si ricordi della crescita della successione $S(P_n, f, \alpha)$)

$$|S(P, f, \alpha) - A| = |S(P_n \cup P', f, \alpha) - A| \stackrel{(\diamond)}{=} |S(P_n, f, \alpha) - A| \geq S(P_{n_1}, f, \alpha) - A = \epsilon.$$

Questo mostra chiaramente che f non può essere $RS(\alpha)$ -integrabile su $[0, 1]$.

Bibliografia

- [1] Tom M. Apostol: *Mathematical Analysis*, Pearson College Div, 1 Jan. 1974.
- [2] W. Rudin: *Principles of Mathematical Analysis* Third edition. McGraw-Hill Book Co, 1976.
- [3] S. Kumaresan, *Signed Measures, Theorems of Hahn, Jordan and Radon-Nikodym*, Università di Hydebarad.
- [4] B. Pini: *Primo Corso di Analisi Matematica*, CLUEB 1971.
- [5] B. Pini: *Secondo Corso di Analisi Matematica Parte I*, CLUEB 1972.
- [6] A. Zaanen *An Introduction to the Theory of Integration*, North-Holland Publishing Company-Amsterdam, 1958.
- [7] R. R. Reitano: *Foundation of Quantitative Finance: 1. Measure Spaces and Measurable Functions*, Brandeis International Business School, Waltham (2017)
- [8] R. R. Reitano: *Foundation of Quantitative Finance: 3. The Integrals of Lebesgue and (Riemann-)Stieltjes*, Brandeis International Business School, Waltham (2017)
- [9] R. R. Reitano: *Foundation of Quantitative Finance: 5. General Measure and Integration Theory*, Brandeis International Business School, Waltham (2018)
- [10] M. Carter, B. van Brunt: *The Lebesgue-Stieltjes Integral. A Practical Introduction*, Springer-Verlag, New York, 2000
- [11] R. L. Wheeden, A. Zygmund: *Measure and Integral. An Introduction to Real Analysis*, CRC press: Boca Raton, 2015.
- [12] F. Riesz: *Les opérations fractionnelles linéaires*, Annales de l' École Normale Supérieure, 1914.
- [13] T. J. Stieltjes: *Sur les fractions continues*, Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse, 1894.
- [14] K.A.Ross: *Another approach to Riemann-Stieltjes Integrals*, Amer. Math. Monthly 87 (8) (1980) 660-662.
- [15] <https://websites.math.leidenuniv.nl/stieltjes/life.php>