

ALMA MATER STUDIORUM – UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

SCUOLA DI SCIENZE

Corso di Laurea in Matematica

Teorema spettrale per operatori compatti e autoaggiunti su spazi di Hilbert

Tesi di Laurea in Analisi Matematica

Relatore:
Chiar.ma Prof.ssa
Giovanna Citti

Presentata da:
Nicole Nucci

Anno Accademico 2025/2026

L'analisi è una sinfonia dell'infinito

~ D.Hilbert

Introduzione

Lo scopo di questa tesi è presentare la teoria spettrale per operatori compatti e autoaggiunti definiti su spazi di Hilbert, mostrando come la struttura di tali spazi permetta di estendere i concetti di diagonalizzazione tipici della dimensione finita.

Il primo capitolo è dedicato allo studio della struttura geometrica e topologica degli spazi di Hilbert. Si introduce il Teorema delle Proiezioni Ortogonali, fondamentale per scomporre lo spazio nella somma diretta di un sottospazio chiuso e del suo complemento ortogonale. Successivamente, sfruttando l'ipotesi di separabilità, si garantisce l'esistenza di un sistema ortonormale massimale numerabile. Attraverso il procedimento di ortonormalizzazione di Gram-Schmidt e la dimostrazione dell'identità di Bessel-Parseval, si forniscono gli strumenti analitici essenziali per la rappresentazione dei vettori tramite serie convergenti.

Il secondo capitolo affronta lo studio degli operatori lineari limitati. Si introduce inizialmente la nozione di convergenza debole, confrontandola con la convergenza in norma. Successivamente, si definiscono gli operatori compatti tramite la loro azione sugli insiemi limitati, analizzandone le proprietà algebriche e il comportamento al passaggio al limite, per poi presentare i risultati fondamentali della Teoria di Fredholm. Il capitolo si chiude con l'enunciato e la dimostrazione del Teorema di Schauder, il quale stabilisce la fondamentale equivalenza tra la compattezza di un operatore e quella del suo aggiunto.

Infine, nel terzo capitolo si sviluppa l'analisi spettrale. Dopo aver classificato lo spettro e dimostrato che per gli operatori autoaggiunti gli autovalori sono reali e gli autospazi ortogonali, si giunge al risultato centrale: il Teorema Spettrale (Hilbert-Schmidt). Sfruttando la compattezza e l'autoaggiunzione, si prova l'esistenza di una base hilbertiana di autovettori, la quale permette di diagonalizzare l'operatore rappresentandolo come combinazione lineare delle proiezioni ortogonali sui propri autospazi.

Indice

Introduzione	i
1 Nozioni Preliminari	1
1.1 Spazi di Hilbert: Prime proprietà	1
1.2 Operatori Lineari	8
2 Operatori compatti e Teoria di Fredholm	13
2.1 Operatori Compatti e proprietà	13
2.2 Teoria di Riesz-Fredholm	18
3 Analisi Spettrale e Teorema di Decomposizione	25
3.1 Spettro degli operatori limitati	25
3.2 Spettro degli operatori compatti	29
3.3 Operatori Autoaggiunti	32
3.4 Il Teorema Spettrale (Hilbert-Schmidt)	35
Bibliografia	39

Capitolo 1

Nozioni Preliminari

1.1 Spazi di Hilbert: Prime proprietà

In questo paragrafo introduciamo gli spazi di Hilbert e le loro proprietà fondamentali. Essi forniscono un ambiente in cui definire i funzionali lineari e, essendo dotati di prodotto scalare, permettono di introdurre l'operatore aggiunto.

Definizione 1.1.1. Uno spazio vettoriale complesso V si dice *normato* se e solo se esiste un'applicazione $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}$ tale che per ogni $v, w \in V$ e per ogni $\alpha \in \mathbb{C}$ valgono le seguenti:

- (i) $\|v\| \geq 0$;
- (ii) $\|v\| = 0$ se e solo se $v = 0$;
- (iii) $\|\alpha v\| = |\alpha| \|v\|$;
- (iv) $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$.

La funzione $\|\cdot\|$ è detta *norma*.

Definizione 1.1.2. Sia V uno spazio normato.

- (i) Una successione $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in V si dice *successione di Cauchy* se per ogni $\epsilon > 0$ esiste un intero $N \in \mathbb{N}$ tale che:

$$\|v_n - v_m\| \leq \epsilon \quad \forall n, m \geq N.$$

- (ii) Lo spazio V si dice *completo* se ogni successione di Cauchy in V converge ad un elemento dello spazio.

Definizione 1.1.3. Si definisce *spazio di Hilbert* ogni spazio vettoriale complesso H a prodotto scalare che risulti completo rispetto alla norma dedotta dal suo prodotto scalare.

Il legame analitico e algebrico tra il prodotto scalare e la norma indotta è stabilito formalmente dalle seguenti disuguaglianze fondamentali.

Teorema 1.1.4 (Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz). *In ogni spazio di Hilbert H vale la relazione:*

$$|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \|v\| \quad \forall u, v \in H.$$

L'uguaglianza sussiste se e solo se i vettori u e v sono linearmente dipendenti.

Proposizione 1.1.5 (Disuguaglianza triangolare o di Minkowski). *Per ogni coppia di vettori $u, v \in H$ si ha:*

$$\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|.$$

Oltre alle disuguaglianze appena viste, la struttura di uno spazio di Hilbert è rigidamente caratterizzata da due identità geometriche.

Proposizione 1.1.6 (Identità del parallelogramma). *Per ogni $u, v \in H$ vale l'identità:*

$$\|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2.$$

Proposizione 1.1.7 (Identità di polarizzazione). *In ogni spazio di Hilbert complesso H , per ogni $u, v \in H$ vale la seguente uguaglianza:*

$$\langle u, v \rangle = \frac{1}{4} \left(\|u + v\|^2 - \|u - v\|^2 + i\|u + iv\|^2 - i\|u - iv\|^2 \right).$$

Introduciamo ora il concetto di ortogonalità:

Definizione 1.1.8. Sia H uno spazio di Hilbert e $x, y \in H$. Diremo che x e y sono *ortogonali* e scriveremo $x \perp y$ se e solo se:

$$\langle x, y \rangle = 0.$$

Teorema 1.1.9. *Sia H uno spazio di Hilbert e $x, y \in H$ tali che $x \perp y$. Allora:*

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$$

Dimostrazione. Siano $x, y \in H$ tali che $\langle x, y \rangle = 0$. Per definizione di prodotto scalare abbiamo che anche $\langle y, x \rangle = 0$. Perciò possiamo dire che:

$$\|x + y\|^2 = \langle x + y, x + y \rangle = \langle x, x \rangle + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle + \langle y, y \rangle = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

□

Lemma 1.1.10. *Sia H uno spazio di Hilbert e $\mathcal{M} \subset H$ un suo sottospazio. Allora $\mathcal{M}$ è separabile.*

Proposizione 1.1.11. *Sia H uno spazio di Hilbert e $\mathcal{M}$ un suo sottospazio chiuso. Allora $\mathcal{M}$ è uno spazio di Hilbert separabile. Inoltre per ogni $x \in \mathcal{M}$:*

$$\|x\|_{\mathcal{M}} = \|x\|_H.$$

Dimostrazione. Poiché $\mathcal{M}$ è un sottospazio di H , allora $\mathcal{M}$ è separabile per il Lemma precedente.

Sia $x \in \mathcal{M}$. Definiamo

$$\|x\|_{\mathcal{M}} := \|x\|_H.$$

Per costruzione $\|\cdot\|_{\mathcal{M}}$ è una norma su $\mathcal{M}$. Proviamo che possiamo dedurre $\|\cdot\|_{\mathcal{M}}$ da un prodotto scalare e che $\mathcal{M}$ è completo rispetto a tale norma.

Per ogni $x, y \in \mathcal{M}$, definiamo:

$$\langle x, y \rangle_{\mathcal{M}} = \langle x, y \rangle_H.$$

Per costruzione $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{M}}$ è un prodotto scalare su $\mathcal{M}$ da cui si deduce $\|\cdot\|_{\mathcal{M}}$. Infatti per ogni $x \in \mathcal{M}$ abbiamo che:

$$\sqrt{\langle x, x \rangle_{\mathcal{M}}} = \sqrt{\langle x, x \rangle_H} = \|x\|_H = \|x\|_{\mathcal{M}}.$$

Proviamo infine che $\mathcal{M}$ è completo rispetto alla norma $\|\cdot\|_{\mathcal{M}}$.

Sia $\{x_n\}$ una successione di $\mathcal{M}$ che risulti essere di Cauchy rispetto alla norma di $\mathcal{M}$. Poiché per ogni n , abbiamo che:

$$\|x_n\|_{\mathcal{M}} = \|x_n\|_H,$$

allora $\{x_n\}$ è una successione di Cauchy rispetto alla norma di H . Per la completezza di H , esiste $x \in H$, tale che $x_n \rightarrow x$.

Ma poiché $\mathcal{M}$ è chiuso, allora $x \in \mathcal{M}$. Cioè $\mathcal{M}$ è completo. □

Le nozioni di ortogonalità e di complemento ortogonale consentono di rappresentare lo spazio come somma diretta ortogonale di sottospazi.

Definizione 1.1.12. Sia H uno spazio di Hilbert e $\mathcal{M}$ un suo sottoinsieme. Si definisce *complemento ortogonale* di $\mathcal{M}$ l'insieme:

$$\mathcal{M}^\perp := \{x \in H : \langle x, y \rangle = 0, \text{ per ogni } y \in \mathcal{M}\}.$$

Osservazione 1.1.13. $\mathcal{M}^\perp$ è un sottospazio chiuso di H . Infatti, fissato $y \in H$ consideriamo l'applicazione continua e lineare: $F_y : H \rightarrow \mathbb{C}$ che ad ogni $x \mapsto \langle x, y \rangle$. Perciò $\mathcal{M}^\perp = \bigcap_{y \in \mathcal{M}} \ker F_y$ è intersezione di sottospazi chiusi, cioè un sottospazio chiuso.

Teorema 1.1.14 (Teorema delle Proiezioni Ortogonali). *Sia H uno spazio di Hilbert e $\mathcal{M}$ un suo sottospazio chiuso. Allora ogni $x \in H$ si scrive in maniera univoca $x = z + w$, ove $z \in \mathcal{M}$ e $w \in \mathcal{M}^\perp$. Cioè:*

$$H = \mathcal{M} \oplus \mathcal{M}^\perp.$$

Definizione 1.1.15. Sia H uno spazio di Hilbert e $\mathcal{M}$ un suo sottospazio chiuso. Per ogni $x \in H$, per il Teorema delle Proiezioni Ortogonali, esiste un unico $z \in \mathcal{M}$ ed un unico $w \in \mathcal{M}^\perp$ tali che $x = z + w$. Si definisce *proiettore su $\mathcal{M}$* l'operatore $P_{\mathcal{M}} : H \rightarrow \mathcal{M}$ e *proiettore su $\mathcal{M}^\perp$* l'operatore $P_{\mathcal{M}^\perp} : H \rightarrow \mathcal{M}^\perp$ tali che per ogni $x \in H$:

$$P_{\mathcal{M}}x = z,$$

$$P_{\mathcal{M}^\perp}x = w.$$

Sfruttando la decomposizione indotta dalle proiezioni ortogonali, possiamo generalizzare il concetto di base vettoriale e di sistemi ortonormali, definendo la somma diretta topologica di un'infinità numerabile di sottospazi.

Definizione 1.1.16. Un sottoinsieme finito o numerabile $\{e_1, e_2, \dots\}$ di uno spazio di Hilbert H è detto *ortonormale* se:

$$\langle e_h, e_k \rangle = \begin{cases} 0 & \text{se } h \neq k, \\ 1 & \text{se } h = k. \end{cases}$$

Un sistema ortonormale $\{e_k\}$ si dice *massimale* (o *base hilbertiana* di H) se preso $v \in H$ tale che per ogni k , $\langle e_k, v \rangle = 0$, allora $v = 0$. In modo equivalente, tale sistema costituisce una base hilbertiana se lo spazio vettoriale da esso generato è denso in H .

Teorema 1.1.17 (Esistenza della base hilbertiana). *Sia H uno spazio di Hilbert separabile di dimensione infinita. Allora H ammette un sistema ortonormale massimale numerabile (ovvero una base hilbertiana).*

Dimostrazione. L'esistenza di tale base è garantita dalla separabilità dello spazio H . Infatti, essendo H separabile, ammette un sottoinsieme numerabile e denso, denotiamolo con $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Poniamo $E_k := \text{span}\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$. La successione $(E_k)_{k \in \mathbb{N}}$ è non decrescente, formata da spazi a dimensione finita e tali che

$$\bigcup_{k=1}^{+\infty} E_k \quad \text{è denso in } H.$$

Dal sistema di generatori $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ è possibile estrarre un sistema di vettori linearmente indipendenti il cui sottospazio generato è ancora denso in H . Applicando a tale sistema il procedimento di ortonormalizzazione di Gram-Schmidt, costruiamo la base cercata: scegliamo un vettore unitario $e_1 \in E_1$. Se $E_2 \neq E_1$, allora esiste $e_2 \in E_2$ tale che $\{e_1, e_2\}$ è una base ortonormale di E_2 . Iterando la stessa costruzione, si ottiene un sistema ortonormale massimale numerabile per l'intero spazio H . $\square$

Osservazione 1.1.18. Tale proposizione risulta valida poiché stiamo supponendo che H sia separabile. In generale vale il fatto che H è separabile se e solo se ogni sistema ortonormale massimale è numerabile. Per quanto ci riguarda H sarà sempre separabile.

Definizione 1.1.19. Sia H uno spazio di Hilbert e sia $(H_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successione di suoi sottospazi chiusi. Si dice che H è *somma di Hilbert* dei sottospazi H_n e si scrive:

$$H = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} H_n,$$

se:

- (a) gli H_n sono mutualmente ortogonali, cioè $\langle u, v \rangle = 0$ per ogni $u \in H_m$, $v \in H_n$, con $m \neq n$;
- (b) lo spazio vettoriale $\text{span}\{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} H_n\}$ è denso in H .

Teorema 1.1.20. *Sia H la somma di Hilbert dei sottospazi chiusi $(H_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Assegnato $u \in H$, poniamo:*

$$u_n := P_{H_n} u$$

e

$$s_n := \sum_{k=1}^n u_k.$$

Allora, risulta:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = u \quad (1.1)$$

e

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \|u_k\|^2 = \|u\|^2 \quad (1.2)$$

(identità di Bessel-Parseval).

Alla dimostrazione del Teorema 1.1.20 premettiamo il seguente risultato.

Lemma 1.1.21. *Sia $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successione in H tale che:*

$$\langle v_m, v_n \rangle = 0 \quad \forall m \neq n \quad (1.3)$$

e

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \|v_k\|^2 < +\infty. \quad (1.4)$$

Posto

$$s_n := \sum_{k=1}^n v_k, \quad (1.5)$$

si ha che esiste in H il limite

$$s := \lim_{n \rightarrow +\infty} s_n$$

e, inoltre,

$$\|s\|^2 = \sum_{k=1}^{+\infty} \|v_k\|^2. \quad (1.6)$$

Dimostrazione. Osserviamo che per $m > n$ si ha (tenuto conto di (1.3) e dell'identità di Pitagora):

$$\|s_m - s_n\|^2 = \sum_{k=n+1}^m \|v_k\|^2 \rightarrow 0,$$

per $n, m \rightarrow +\infty$ in virtù di (1.4). Quindi, $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ è una successione di Cauchy, pertanto esiste in H il limite $s := \lim_{n \rightarrow +\infty} s_n$. D'altra parte, si ha:

$$\|s_n\|^2 = \sum_{k=1}^n \|v_k\|^2.$$

Per $n \rightarrow +\infty$ si ottiene la (1.6). □

Dimostrazione del Teorema 1.1.20. Poiché $u_n = P_{H_n}u$ è la proiezione ortogonale di u sul sottospazio chiuso H_n , per la definizione stessa di proiettore si ha che $(u - u_n)$ appartiene al complemento ortogonale $H_n^\perp$. Pertanto:

$$\langle u - u_n, v \rangle = 0 \quad \forall v \in H_n$$

e, in particolare (preso $v = u_n \in H_n$),

$$\langle u, u_n \rangle = \|u_n\|^2.$$

Sommando queste uguaglianze, otteniamo:

$$\langle u - u_n, v \rangle = 0 \quad \forall v \in H_n$$

Ma abbiamo anche:

$$\sum_{k=1}^n \|u_k\|^2 = \|s_n\|^2, \quad (1.7)$$

e quindi

$$\langle u, s_n \rangle = \|s_n\|^2.$$

Ne segue che $\|s_n\| \leq \|u\|$ (per la Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz) e perciò:

$$\sum_{k=1}^n \|u_k\|^2 \leq \|u\|^2.$$

Per il Lemma 1.1.21 esiste $s = \lim_{n \rightarrow +\infty} s_n$.

Proviamo che $s = u$ (cioè identifichiamo s). Sia:

$$F = \text{span} \left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} H_n \right).$$

Dimostriamo che

$$s = P_{\overline{F}}u. \quad (1.8)$$

Infatti,

$$\langle u - s_n, v \rangle = 0 \quad \forall v \in H_m, \quad m \leq n$$

Per $n \rightarrow +\infty$ otteniamo:

$$\langle u - s, v \rangle = 0 \quad \forall v \in H_m, \quad \forall m$$

e quindi

$$\langle u - s, v \rangle = 0 \quad \forall v \in F,$$

che implica

$$\langle u - s, v \rangle = 0 \quad \forall v \in \overline{F}.$$

D'altra parte, $s_n \in F \forall n$, e al limite $s \in \overline{F}$. Questo prova che $s = P_{\overline{F}}u$.

Per la proprietà (b) della definizione di Somma di Hilbert (Definizione 1.1.19), risulta $\overline{F} = H$ e quindi $s = u$.

Da (1.7) per $n \rightarrow +\infty$ otteniamo l'identità di Bessel-Parseval:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \|u_k\|^2 = \|u\|^2.$$

□

1.2 Operatori Lineari

Dopo aver definito la struttura dello spazio di Hilbert, passiamo allo studio delle applicazioni lineari che agiscono tra questi spazi.

Definizione 1.2.1. Siano H_1 e H_2 due spazi di Hilbert complessi. Un'applicazione $T : H_1 \rightarrow H_2$ si dice *operatore lineare* se per ogni $x, y \in H_1$ e per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ si ha:

$$T(\alpha x + \beta y) = \alpha T x + \beta T y.$$

Un operatore lineare T si dice *limitato* (o continuo) se esiste una costante $c \geq 0$ tale che:

$$\|Tx\|_{H_2} \leq c\|x\|_{H_1} \quad \forall x \in H_1.$$

Denoteremo lo spazio vettoriale di tutti gli operatori lineari e limitati da H_1 in H_2 con $\mathcal{L}(H_1, H_2)$. Nel caso in cui lo spazio di partenza e quello di arrivo coincidano, scriveremo semplicemente $\mathcal{L}(H)$.

Teorema 1.2.2. Siano H_1 e H_2 due spazi di Hilbert e sia $T : H_1 \rightarrow H_2$ un operatore lineare. Le seguenti affermazioni sono equivalenti:

- (i) T è un operatore limitato;
- (ii) T è continuo in 0;
- (iii) T è continuo.

Andiamo ora a definire sullo spazio vettoriale $\mathcal{L}(H_1, H_2)$ la seguente norma.

Definizione 1.2.3. Sia $T \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$. Si definisce *norma operatoriale* di T la quantità:

$$\|T\|_{\mathcal{L}(H_1, H_2)} := \sup_{\substack{x \in H_1 \\ x \neq 0}} \frac{\|Tx\|_{H_2}}{\|x\|_{H_1}}.$$

Equivalentemente, sfruttando la linearità dell'operatore, possiamo andare a definire la norma come:

$$\|T\|_{\mathcal{L}(H_1, H_2)} := \sup_{\substack{x \in H_1 \\ \|x\|_{H_1} \leq 1}} \|Tx\|_{H_2}.$$

Definizione 1.2.4. Sia H uno spazio di Hilbert complesso. Definiamo un'applicazione lineare e limitata $f : H \rightarrow \mathbb{C}$ come *funzionale lineare e continuo*. L'insieme di tutti i funzionali lineari e continui definiti su H costituisce uno spazio vettoriale denominato *spazio duale* di H , e si denota con il simbolo H^* . In simboli:

$$H^* := \mathcal{L}(H, \mathbb{C}).$$

Fissato un elemento $x \in H$, è possibile costruire in modo naturale un funzionale $\varphi_x : H \rightarrow \mathbb{C}$ definito per ogni $y \in H$ tramite il prodotto scalare:

$$\varphi_x(y) = \langle x, y \rangle.$$

Tale funzionale è lineare per le proprietà del prodotto scalare ed è continuo grazie alla Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz (Teorema 1.1.4). Il seguente risultato garantisce che tutti i funzionali appartenenti al duale si possano esprimere univocamente in questa forma.

Teorema 1.2.5 (Rappresentazione di Riesz). *Sia H uno spazio di Hilbert e sia $T : H \rightarrow \mathbb{C}$ un funzionale lineare e limitato. Allora esiste un unico vettore $u \in H$ tale che:*

$$T(x) = \langle u, x \rangle \quad \forall x \in H.$$

Inoltre, si ha l'uguaglianza delle norme: $\|T\| = \|u\|$.

Dimostrazione. Sia $M = \ker(T)$ il nucleo del funzionale. Poiché T è limitato (e quindi continuo), il sottospazio M è chiuso, in quanto controimmagine del singoletto chiuso $\{0\}$ tramite un'applicazione continua. Distinguiamo ora due casi possibili:

Se $M = H$, allora l'operatore è identicamente nullo ($T = 0$). In questo caso la tesi è banalmente verificata ponendo il vettore $u = 0$.

Se $M \neq H$, allora esiste un elemento $x_0 \in H \setminus M$. Dal momento che x_0 non appartiene a M , la sua proiezione ortogonale su M non coincide con il vettore stesso, ovvero $x_0 \neq P_M(x_0)$. Definiamo il vettore $y := x_0 - P_M(x_0)$. Per il Teorema di Proiezione Ortogonale 1.1.14, si ha che $y \in M^\perp$ con $y \neq 0$. Essendo

$y \neq 0$ e ortogonale a M , segue che $y \notin \ker(T)$, il che implica $T(y) \neq 0$. Pertanto, per ogni elemento $x \in H$, consideriamo la seguente scomposizione del vettore:

$$x = \left(x - \frac{T(x)}{T(y)}y \right) + \frac{T(x)}{T(y)}y.$$

Verifichiamo che il termine tra parentesi appartiene al nucleo di T . Infatti, sfruttando la linearità dell'operatore, si ha:

$$T \left(x - \frac{T(x)}{T(y)}y \right) = T(x) - \frac{T(x)}{T(y)}T(y) = T(x) - T(x) = 0.$$

Pertanto, vale l'inclusione $\left(x - \frac{T(x)}{T(y)}y \right) \in \ker(T)$.

Poiché il vettore y appartiene a $M^\perp$, il prodotto scalare tra l'elemento del nucleo appena ricavato e y deve essere nullo. Pertanto otteniamo:

$$\left\langle x - \frac{T(x)}{T(y)}y, y \right\rangle = 0 \implies \langle x, y \rangle - \frac{T(x)}{T(y)}\|y\|^2 = 0,$$

da cui:

$$\langle x, y \rangle = \frac{T(x)}{T(y)}\|y\|^2 \implies T(x) = \frac{T(y)}{\|y\|^2} \langle x, y \rangle.$$

Definiamo ora il vettore $u := \frac{T(y)}{\|y\|^2}y$. Sfruttando la linearità del prodotto scalare sulla prima componente, l'uguaglianza precedente diventa:

$$T(x) = \left\langle \frac{T(y)}{\|y\|^2}y, x \right\rangle = \langle u, x \rangle \quad \forall x \in H,$$

il che conclude la dimostrazione dell'esistenza del vettore di rappresentazione. Passiamo ora a dimostrarne l'unicità. Supponiamo che esistano due vettori $u, u' \in H$ che soddisfano la medesima proprietà per ogni $x \in H$, ovvero tali che $T(x) = \langle u, x \rangle$ e $T(x) = \langle u', x \rangle$. Applicando la linearità del prodotto scalare, per sottrazione si ottiene:

$$\langle u - u', x \rangle = 0 \quad \forall x \in H.$$

Scegliendo in particolare come vettore $x = u - u'$, si ricava:

$$\|u - u'\|^2 = 0 \implies u = u'$$

dimostrando così l'unicità. □

Come diretta conseguenza dell'esistenza e unicità garantite dal Teorema di Riesz, è possibile introdurre rigorosamente la definizione di operatore aggiunto.

Definizione 1.2.6. Siano H_1 e H_2 due spazi di Hilbert e sia $T \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$ un operatore lineare e continuo. Si definisce *operatore aggiunto* di T , e si denota con $T^* \in \mathcal{L}(H_2, H_1)$, l'operatore che soddisfa la seguente relazione:

$$\langle Tx, y \rangle_{H_2} = \langle x, T^*y \rangle_{H_1} \quad \forall x \in H_1, \forall y \in H_2.$$

Proposizione 1.2.7 (Proprietà dell'operatore aggiunto). *Siano H_1 e H_2 spazi di Hilbert e sia $T \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$. Allora l'operatore aggiunto $T^* \in \mathcal{L}(H_2, H_1)$ gode delle seguenti proprietà:*

(i)

$$\|T^*\|_{\mathcal{L}(H_2, H_1)} = \|T\|_{\mathcal{L}(H_1, H_2)};$$

(ii)

$$\ker(T) = (\text{Im}(T^*))^\perp \quad e \quad \ker(T^*) = (\text{Im}(T))^\perp;$$

(iii)

$$T^* \text{ suriettivo} \implies T \text{ iniettivo}; \quad T \text{ suriettivo} \implies T^* \text{ iniettivo}.$$

Introduciamo ora due proprietà delle forme bilineari, necessarie per poter enunciare il Teorema di Lax-Milgram il quale costituisce una generalizzazione del Teorema di Rappresentazione di Riesz

Definizione 1.2.8. Sia H uno spazio di Hilbert. Una forma bilineare $a : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ si dice:

(i) *continua* se esiste una costante c tale che:

$$|a\langle u, v \rangle| \leq c\|u\|\|v\| \quad \forall u, v \in H;$$

(ii) *coerciva* se esiste una costante $\alpha > 0$ tale che:

$$a\langle v, v \rangle \geq \alpha\|v\|^2 \quad \forall v \in H.$$

Teorema 1.2.9 (Lax-Milgram). *Supponiamo che $a\langle u, v \rangle$ sia una forma bilineare continua e coerciva su H . Allora, per ogni $\varphi \in H^*$, esiste un unico elemento $u \in H$ tale che:*

$$a\langle u, v \rangle = \varphi(v) \quad \forall v \in H.$$

Capitolo 2

Operatori compatti e Teoria di Fredholm

2.1 Operatori Compatti e proprietà

In questo paragrafo introduciamo la classe degli operatori compatti, che trasformano insiemi limitati in insiemi compatti. L'idea intuitiva è che questi operatori rappresentino, in un contesto infinito-dimensionale, una naturale generalizzazione delle matrici (operatori di rango finito). Essi giocano un ruolo cruciale poiché permettono di recuperare molte delle proprietà dell'analisi in dimensione finita.

Definizione 2.1.1. Siano H_1 e H_2 due spazi di Hilbert e sia $T : H_1 \rightarrow H_2$ un operatore lineare. Si dice che T è **compatto** (o completamente continuo) se per ogni sottoinsieme limitato $A \subset H_1$, l'immagine $T(A)$ è relativamente compatta in H_2 (ovvero la sua chiusura $\overline{T(A)}$ è compatta in H_2).

Equivalentemente: T è compatto se per ogni successione limitata $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in H_1 , è possibile estrarre una sottosuccessione $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ tale che la successione delle immagini $(Tx_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ converga in H_2 .

Osservazione 2.1.2. L'insieme di tutti gli operatori compatti da H_1 in H_2 , con H_1, H_2 spazi di Hilbert, si denota con $\mathcal{K}(H_1, H_2)$. Poiché la nostra trattazione si concentrerà su operatori da uno spazio in sé, scriveremo per semplicità $\mathcal{K}(H) = \mathcal{K}(H, H)$.

Analizziamo innanzitutto le proprietà strutturali dell'insieme degli operatori compatti, stabilendone la natura di sottospazio vettoriale chiuso rispetto alla topologia indotta dalla norma operatoriale.

Teorema 2.1.3. *L'insieme $\mathcal{K}(H)$ è un sottospazio lineare chiuso di $\mathcal{L}(H)$ rispetto alla topologia indotta dalla norma operatoriale.*

Dimostrazione. Chiaramente, ogni combinazione lineare di operatori compatti è a sua volta un operatore compatto. Sia $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successione di operatori compatti in $K(H)$ e sia T un operatore limitato tale che $\|T_n - T\| \rightarrow 0$. Dobbiamo mostrare che T è un operatore compatto. Ricordiamo che, poichè H è uno spazio completo, un sottoinsieme è compatto se e solo se è totalmente limitato (ovvero per ogni $\varepsilon > 0$, può essere ricoperto da un numero finito di palle di raggio ε). Fissiamo un intero n tale che $\|T_n - T\| < \frac{\varepsilon}{2}$. Poiché $T_n(B_{\mathcal{H}})$ ha chiusura compatta, esiste un ricoprimento finito di $T_n(B_{\mathcal{H}})$ mediante palle di raggio $\frac{\varepsilon}{2}$. Esiste quindi un insieme finito di indici I tale che, se f_i (con $i \in I$) sono i centri di tali palle, allora si ha:

$$T_n(B_{\mathcal{H}}) \subset \bigcup_{i \in I} B\left(f_i, \frac{\varepsilon}{2}\right).$$

Verifichiamo ora che le stesse palle, ma con raggio ε , ricoprono l'immagine di $T(B_{\mathcal{H}})$. Per ogni $x \in B_{\mathcal{H}}$, esiste un indice $i \in I$ tale che $\|T_n x - f_i\| < \frac{\varepsilon}{2}$. Dunque, usando la disuguaglianza triangolare otteniamo:

$$\|Tx - f_i\| \leq \|Tx - T_n x\| + \|T_n x - f_i\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Ne consegue che:

$$T(B_{\mathcal{H}}) \subset \bigcup_{i \in I} B(f_i, \varepsilon).$$

Avendo trovato un ricoprimento finito con palle di raggio ε per ogni $\varepsilon > 0$, concludiamo che l'operatore T è compatto. $\square$

La chiusura dello spazio $K(H)$ ci permette di caratterizzare gli operatori compatti come naturale estensione, ottenuta per passaggio al limite, degli operatori di rango finito.

Definizione 2.1.4. Un operatore $T \in \mathcal{K}(H)$ si dice di *rango finito* se la sua immagine, indicata con $\text{Im}(T)$, ha dimensione finita.

È chiaro che ogni operatore di rango finito è compatto: infatti la sua immagine è contenuta in un sottospazio di dimensione finita, dove ogni insieme limitato è compatto. Da questa osservazione e dal Teorema precedente, si deduce immediatamente il seguente risultato:

Corollario 2.1.5. *Sia $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successione di operatori di rango finito e sia $T \in \mathcal{L}(H)$ un operatore tale che*

$$\|T_n - T\| \rightarrow 0 \quad \text{per } n \rightarrow \infty.$$

Allora T è un operatore compatto, ovvero $T \in \mathcal{K}(H)$.

Dimostrazione. Poiché ogni T_n è di rango finito, si ha che $T_n \in \mathcal{K}(H)$ per ogni n . Dato che la successione T_n converge a T nella norma degli operatori e poiché $\mathcal{K}(H)$ è un sottospazio chiuso di $\mathcal{L}(H)$ (come dimostrato nel Teorema 2.1.3), ne consegue che il limite T deve appartenere a $\mathcal{K}(H)$. $\square$

Oltre a formare un sottospazio chiuso, $\mathcal{K}(H)$ possiede una notevole stabilità rispetto alla composizione. La compattezza è infatti una condizione molto forte, che si mantiene inalterata anche quando l'operatore viene composto (a destra o a sinistra) con un qualsiasi operatore limitato.

Proposizione 2.1.6. *Siano T ed S due operatori lineari su uno spazio di Hilbert H . Se T è limitato e S è compatto [risp. T è compatto e S è limitato], allora la composizione $S \circ T$ è un operatore compatto.*

Dimostrazione. Per dimostrare che l'operatore composto è compatto, verifichiamo che l'immagine della palla unitaria B_H tramite l'operatore composto $S \circ T$ sia compatta in H , distinguendo i due casi:

Caso 1: S compatto e T limitato. L'insieme $T(B_H)$ è limitato poiché T è un operatore limitato. Essendo S compatto, esso trasforma insiemi limitati in insiemi compatti; di conseguenza, l'insieme $S(T(B_H))$ ha chiusura compatta.

Caso 2: T compatto e S limitato. Poiché T è compatto, l'insieme $K = \overline{T(B_H)}$ è compatto. L'operatore S , essendo limitato, è continuo e trasforma il compatto K nell'insieme compatto $S(K)$. Poiché $(S \circ T)(B_H)$ è contenuto in $S(K)$, esso è compatto.

In entrambi i casi, concludiamo che $S \circ T$ è un operatore compatto. $\square$

Introduciamo ora una proprietà fondamentale che lega la compattezza alla convergenza debole. Vedremo, in particolare, come gli operatori compatti siano in grado di trasformare la convergenza debole in convergenza forte. Questo risultato sarà lo strumento chiave per la dimostrazione del Teorema di Schauder.

Teorema 2.1.7. *Sia H uno spazio di Hilbert e sia $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successione debolmente convergente a x (in simboli $x_n \rightharpoonup x$). Sia $T \in \mathcal{K}(H)$ un operatore compatto. Allora la successione Tx_n converge fortemente a Tx in H , cioè:*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|Tx_n - Tx\| = 0. \quad (2.1)$$

Dimostrazione. Per provare 2.1, è sufficiente dimostrare che da ogni sottosuccessione $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ di $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ è possibile estrarre un'ulteriore sottosuccessione $(x_{n_{k_h}})_{h \in \mathbb{N}}$, tale che

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \|Tx_{n_{k_h}} - Tx\| = 0.$$

Sia $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ una sottosuccessione di $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Poiché per ipotesi $x_n \rightharpoonup x$, allora la successione è limitata in norma. Pertanto, esiste una costante $c > 0$ tale che $\|x_{n_k}\| \leq c$ per ogni k .

Essendo T un operatore compatto, da questa sottosuccessione limitata possiamo estrarre un'ulteriore sottosuccessione $(x_{n_{k_h}})_{h \in \mathbb{N}}$ tale che l'immagine converga fortemente, ovvero

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \|Tx_{n_{k_h}} - y\| = 0.$$

per qualche $y \in H$. Resta da provare che il limite $y = Tx$. Poiché T^* è l'aggiunto di T , si ha

$$\langle v, Tx_{n_{k_h}} - Tx \rangle = \langle T^*v, x_{n_{k_h}} - x \rangle \rightarrow 0$$

per ogni $v \in H$, ciò prova la convergenza debole

$$Tx_{n_{k_h}} \rightharpoonup Tx.$$

Per l'unicità del limite debole, deve necessariamente essere $y = Tx$, completando la dimostrazione. □

Siamo ora pronti a enunciare il Teorema di Schauder, che stabilisce l'invarianza della compattezza nel passaggio da un operatore al suo aggiunto.

Teorema 2.1.8 (Teorema di Schauder). *Sia H uno spazio di Hilbert e sia $T \in \mathcal{L}(H)$. L'operatore T è compatto se e solo se il suo aggiunto T^* è compatto.*

$$T \in \mathcal{K}(H) \iff T^* \in \mathcal{K}(H).$$

Dimostrazione. $(\Rightarrow)$ Supponiamo $T \in \mathcal{K}(H)$. Sia $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successione limitata in H . Poiché gli spazi di Hilbert sono riflessivi, esiste una sottosuccessione

$(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ debolmente convergente a un elemento $x \in H$. Per dimostrare la compattezza di T^* , dobbiamo mostrare che $(T^*x_{n_k})$ è fortemente convergente in H . In particolare proviamo che

$$T^*x_{n_k} \rightarrow T^*x \quad \text{fortemente in } H.$$

Sfruttando le proprietà dell'aggiunto e del prodotto scalare, osserviamo che

$$\|T^*x_{n_k} - T^*x\|^2 = \langle T^*x_{n_k} - T^*x, T^*(x_{n_k} - x) \rangle = \langle T(T^*x_{n_k}) - T(T^*x), x_{n_k} - x \rangle. \quad (2.2)$$

Ora, dato che T^* è lineare e continuo, si ha

$$T^*x_{n_k} \rightharpoonup T^*x \quad (2.3)$$

Essendo $T \in \mathcal{K}(H)$ e $T^* \in \mathcal{L}(H)$, per la Proposizione 2.1.6, si ha che la composizione $TT^* \in \mathcal{K}(H)$ e quindi, applicando il Teorema 2.1.7 all'operatore compatto TT^* , dalla (2.3) segue la convergenza forte

$$T(T^*x_{n_k}) \rightarrow T(T^*x).$$

Pertanto, tornando a (2.2) e applicando la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz:

$$\|T^*x_{n_k} - T^*x\|^2 \leq \|TT^*(x_{n_k} - x)\| \cdot \|x_{n_k} - x\|.$$

Osserviamo che il primo fattore a secondo membro tende a 0 per quanto appena dimostrato, mentre il secondo fattore è limitato, poiché la successione originale $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ era limitata. Allora l'intero prodotto tende a 0, provando così che $T^*x_{n_k} \rightarrow T^*x$ fortemente. Abbiamo quindi estratto una sottosuccessione convergente, pertanto possiamo concludere che $T^* \in \mathcal{K}(H)$.

($\Leftarrow$) Viceversa, assumiamo $T^* \in \mathcal{K}(H)$. Applicando la prima parte della dimostrazione precedente all'operatore T^* , otteniamo che il suo aggiunto $(T^*)^*$ è un operatore compatto. Resta da mostrare che $(T^*)^* = T$. Applicando due volte la definizione di operatore aggiunto otteniamo per ogni $x, y \in H$:

$$\langle x, T^{**}y \rangle = \langle T^*x, y \rangle = \overline{\langle y, T^*x \rangle} = \overline{\langle Ty, x \rangle} = \langle x, Ty \rangle.$$

Poiché l'uguaglianza $\langle x, T^{**}y \rangle = \langle x, Ty \rangle$ vale per ogni x , ne segue che $T^{**}y = Ty$ per ogni y , e dunque $T^{**} = T$. Avendo provato che T^{**} è compatto e che $T^{**} = T$, concludiamo che $T \in \mathcal{K}(H)$. $\square$

2.2 Teoria di Riesz-Fredholm

Dopo aver analizzato le proprietà degli operatori compatti, ci concentriamo sullo studio degli operatori della forma $I - T$, dove T è compatto. Questa classe di operatori è fondamentale perché, pur operando in dimensione infinita, conserva molte delle proprietà strutturali dei sistemi lineari finiti (come la relazione tra iniettività e suriettività). Questa teoria, nota come Teoria di Riesz-Fredholm, costituisce il cuore dell'analisi spettrale.

Iniziamo richiamando alcune nozioni geometriche preliminari.

Definizione 2.2.1. Sia V uno spazio vettoriale e sia W un suo sottospazio vettoriale. Si definisce *codimensione* di W in V la dimensione dello spazio quoziente V/W :

$$\text{codim}_V(W) := \dim(V/W)$$

Osservazione 2.2.2. Negli spazi di Hilbert la codimensione di un suo sottospazio chiuso S coincide con la dimensione del suo complemento ortogonale $S^\perp$. Questa seconda formulazione permette di collegare la codimensione dell'immagine di un operatore T alla dimensione del nucleo del suo aggiunto T^* , tramite la relazione fondamentale $\text{Im}(T)^\perp = \ker(T^*)$.

Il seguente Lemma di Riesz è uno strumento tecnico essenziale: esso garantisce l'esistenza di vettori unitari la cui distanza da un sottospazio chiuso proprio è arbitrariamente vicina a 1.

Lemma 2.2.3 (Lemma di Riesz). *Sia H uno spazio di Hilbert (o più in generale uno spazio normato) e sia $M \subset H$ un sottospazio vettoriale chiuso tale che $M \neq H$. Allora:*

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists u \in H \text{ tale che } \|u\| = 1 \text{ e } \text{dist}(u, M) \geq 1 - \varepsilon.$$

Dimostrazione. Sia $v \in H$ con $v \notin M$. Dato che M è chiuso, allora

$$d = \text{dist}(v, M) > 0.$$

Consideriamo $m_0 \in M$ tale che

$$d \leq \|v - m_0\| \leq \frac{d}{1 - \varepsilon}.$$

Allora, il vettore

$$u = \frac{v - m_0}{\|v - m_0\|}$$

soddisfa le proprietà richieste. Infatti, per ogni $m \in M$, abbiamo:

$$\|u-m\| = \left\| \frac{v-m_0}{\|v-m_0\|} - m \right\| = \frac{1}{\|v-m_0\|} \|v - \underbrace{(m_0 + \|v-m_0\|m)}_{\in M}\| \geq \frac{d}{\|v-m_0\|} \geq 1-\varepsilon.$$

□

Una conseguenza cruciale del Lemma di Riesz riguarda la caratterizzazione topologica della dimensione infinita: in tale contesto, la palla unitaria non è mai compatta. Questa limitazione strutturale motiva lo studio degli operatori compatti, i quali permettono di recuperare la compattezza a livello delle immagini.

Teorema 2.2.4 (Riesz). *Sia H uno spazio vettoriale normato la cui palla unitaria chiusa B_H è compatta. Allora H ha dimensione finita.*

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che H abbia dimensione infinita. Allora esiste una successione $(H_n)_{n \in \mathbb{N}}$ di sottospazi di H di dimensione finita tali che $H_{n-1} \subset H_n$ e $H_{n-1} \neq H_n$. Per il Lemma di Riesz esiste una successione $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ con $u_n \in H_n$ tale che $\|u_n\| = 1$ e $\text{dist}(u_n, H_{n-1}) \geq 1/2$. In particolare, $\|u_n - u_m\| \geq 1/2$ per $m < n$. Pertanto, la successione $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ non ammette alcuna sottosuccessione convergente, il che contraddice l'ipotesi che B_H sia compatta. □

Prima di enunciare l'Alternativa di Fredholm, è necessario stabilire una relazione precisa tra l'immagine di un operatore e il nucleo del suo aggiunto.

Teorema 2.2.5 (Teorema dell'Immagine Chiusa). *Siano H_1 e H_2 due spazi di Hilbert e sia $T : H_1 \rightarrow H_2$ un operatore lineare e continuo. Siano $T^* : H_2 \rightarrow H_1$ il suo aggiunto, $\ker(T)$ il suo nucleo e $\text{Im}(T)$ la sua immagine.*

Le seguenti affermazioni sono equivalenti:

- (a) *L'immagine $\text{Im}(T)$ è un sottospazio chiuso di H_2 .*
- (b) *L'immagine dell'aggiunto $\text{Im}(T^*)$ è un sottospazio chiuso di H_1 .*
- (c) *L'immagine di T coincide con il complemento ortogonale del nucleo del suo aggiunto:*

$$\text{Im}(T) = \ker(T^*)^\perp$$

- (d) *L'immagine dell'aggiunto coincide con il complemento ortogonale del nucleo di T :*

$$\text{Im}(T^*) = \ker(T)^\perp$$

Gli operatori che soddisfano queste proprietà di finitezza del nucleo e chiusura dell'immagine prendono il nome di operatori di Fredholm

Definizione 2.2.6 (Operatore di Fredholm). Siano E ed F due spazi di Hilbert. Un operatore lineare e continuo $T : E \rightarrow F$ è detto *operatore di Fredholm* se soddisfa due condizioni:

1. Il suo nucleo ha dimensione finita: $\dim \ker(T) < \infty$.
2. La sua immagine $\text{Im}(T)$ è un sottospazio chiuso e ha codimensione finita in F : $\text{codim}(\text{Im}(T)) < \infty$.

Siamo ora pronti a presentare il risultato centrale di questo capitolo: l'Alternativa di Fredholm per operatori compatti. Questo teorema costituisce il pilastro su cui si fonda la teoria spettrale degli operatori compatti, in quanto assicura che l'operatore $I - T$ conservi la stessa struttura di risolubilità del caso finito-dimensionale.

Teorema 2.2.7 (Alternativa di Fredholm). *Sia H uno spazio di Hilbert e sia $T \in \mathcal{K}(H)$ un operatore compatto. Allora, per l'operatore $I - T$ valgono le seguenti proprietà:*

- (a) $\ker(I - T)$ ha dimensione finita;
- (b) $\text{Im}(I - T)$ è chiuso e, più precisamente,

$$\text{Im}(I - T) = \ker(I - T^*)^\perp;$$

- (c) $\ker(I - T) = \{0\}$ se e solo se $\text{Im}(I - T) = H$ (cioè $I - T$ è iniettivo se e solo se è suriettivo);
- (d) $\dim \ker(I - T) = \dim \ker(I - T^*)$.

Osservazione 2.2.8. Il teorema dell'alternativa di Fredholm riguarda la risolubilità dell'equazione $u - Tu = f$. Infatti stabilisce che si verifica sempre una delle seguenti alternative:

- L'equazione omogenea $u - Tu = 0$ ha solo la soluzione nulla. In tal caso, per ogni $f \in H$ l'equazione $u - Tu = f$ ammette un'unica soluzione.

- L'equazione omogenea $u - Tu = 0$ ammette n soluzioni linearmente indipendenti. In questo caso, l'equazione non omogenea $u - Tu = f$ è risolvibile se e solo se f soddisfa n condizioni di ortogonalità, ovvero:

$$f \in \ker(I - T^*)^\perp$$

Osservazione 2.2.9. La proprietà (c) generalizza un fatto ben noto in algebra lineare: per una matrice quadrata, l'iniettività equivale alla suriettività (e quindi all'invertibilità). In dimensione infinita questo è falso per operatori generici, ma l'alternativa di Fredholm ci assicura che rimane vero per operatori della forma $I - T$ con T compatto.

Dimostrazione. La dimostrazione si articola nei seguenti punti.

(a) Sia $E_1 = \ker(I - T)$. Per dimostrare che $\dim(E_1) < \infty$, è sufficiente mostrare che la palla $B_{E_1} = \{u \in E_1 \mid \|u\| \leq 1\}$ unitaria e chiusa sia compatta, per poi applicare il Teorema di Riesz (Teorema 2.2.4).

Per ogni $u \in E_1$, si ha che $(I - T)u = 0$ per definizione, da cui $u = Tu$. Pertanto, l'intera palla unitaria B_{E_1} coincide con la sua immagine tramite T :

$$B_{E_1} = T(B_{E_1}).$$

Poiché T è un operatore compatto e B_{E_1} è un insieme limitato allora la sua immagine $T(B_{E_1})$ ha chiusura compatta. Essendo E_1 anche un insieme chiuso, B_{E_1} risulta essere compatto. Per il Teorema di Riesz, questo implica che lo spazio E_1 ha dimensione finita.

(b) Sia $f_n \in \operatorname{Im}(I - T)$ una successione tale che $f_n \rightarrow f$ in H . Dobbiamo mostrare che $f \in \operatorname{Im}(I - T)$. Per definizione esiste $u_n \in H$ tale che $f_n = u_n - Tu_n$. Fissiamo $d_n = \operatorname{dist}(u_n, \ker(I - T))$. Poiché $\ker(I - T)$ ha dimensione finita per il punto precedente, allora esiste $v_n \in \ker(I - T)$ tale che $d_n = \|u_n - v_n\|$. Possiamo riscrivere f_n come:

$$f_n = (u_n - v_n) - T(u_n - v_n) \quad (2.4)$$

Ora dimostriamo che $\|u_n - v_n\|$ è limitata. Supponiamo per assurdo che non lo sia. Allora esisterebbe una sottosuccessione tale che $\|u_n - v_n\| \rightarrow \infty$. Poniamo $w_n = (u_n - v_n)/\|u_n - v_n\|$, sappiamo da (2.4) che $w_{n_k} - Tw_{n_k} \rightarrow 0$. Scegliamo una sua sottosuccessione (che continueremo a chiamare w_{n_k} per

semplicità) e assumiamo che $Tw_{n_k} \rightarrow z$. Allora $w_{n_k} \rightarrow z$ e $z \in \ker(I - T)$, pertanto $\text{dist}(w_{n_k}, \ker(I - T)) \rightarrow 0$. Tuttavia, per costruzione:

$$\text{dist}(w_n, \ker(I - T)) = \frac{\text{dist}(u_n, \ker(I - T))}{\|u_n - v_n\|} = 1$$

(Poichè $v_n \in \ker(I - T)$). Ottenendo così una contraddizione. Allora $\|u_n - v_n\|$ è limitata e, dato che T è un operatore compatto, possiamo estrarre una sottosuccessione tale che $T(u_{n_k} - v_{n_k})$ converga ad un limite ℓ . Da (2.4) segue che $u_{n_k} - v_{n_k} \rightarrow f + \ell$. Poniamo $g = f + \ell$, allora $g - Tg = f$ ovvero $f \in \text{Im}(I - T)$, da cui si può concludere che $\text{Im}(I - T)$ è chiusa. Perciò ora possiamo applicare il Teorema 2.2.5 deducendo che

$$\text{Im}(I - T) = \ker(I - T^*)^\perp, \quad \text{Im}(I - T^*) = \ker(I - T)^\perp.$$

(c)($\Rightarrow$) Supponiamo per assurdo che $E_1 = \text{Im}(I - T) \neq H$. Allora E_1 è uno spazio di Hilbert e $T(E_1) \subset E_1$. Quindi $T|_{E_1} \in \mathcal{K}(E_1)$ e $E_2 = (I - T)(E_1)$ è un sottospazio chiuso di E_1 . Inoltre, $E_2 \neq E_1$. Ora, costruiamo una catena di sottospazi chiusi strettamente decrescente ponendo $E_0 = E$ e $E_{n+1} = (I - T)(E_n)$ per $n \geq 0$. Usando il Lemma di Riesz, possiamo costruire una successione $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tale che $u_n \in E_n$, $\|u_n\| = 1$ e $\text{dist}(u_n, E_{n+1}) \geq 1/2$. Ottenendo

$$Tu_n - Tu_m = -(u_n - Tu_n) + (u_m - Tu_m) + (u_n - u_m).$$

Essendo $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successione limitata e T un operatore compatto, la successione delle immagini $T(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deve ammettere una sottosuccessione convergente, allora deve essere una successione di Cauchy.

Mostriamo ora che $T(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ non è di Cauchy. Siano $n > m$ allora $E_{n+1} \subset E_n \subset E_{m+1} \subset E_m$ da cui

$$-(u_n - Tu_n) + (u_m - Tu_m) + u_n \in E_{m+1}$$

Pertanto $\|Tu_n - Tu_m\| \geq \text{dist}(u_m, E_{m+1}) \geq 1/2$. Ciò è impossibile, poichè T è un operatore compatto. Quindi $\text{Im}(I - T) = E$.

($\Leftarrow$) Supponiamo $\text{Im}(I - T) = H$. Poiché T compatto, anche il suo aggiunto T^* è compatto. Dal Teorema dell'Immagine Chiusa e dal punto (b) otteniamo:

$$\ker(I - T^*) = \text{Im}(I - T)^\perp = H^\perp = \{0\}.$$

Questo significa che l'operatore $(I - T^*)$ è iniettivo. Poichè T^* compatto, possiamo applicare l'implicazione $(\Rightarrow)$ appena dimostrata all'operatore T^* da cui si ottiene che se

$$(I - T^*) \text{ iniettivo} \implies (I - T^*) \text{ suriettivo.}$$

Dunque, $\text{Im}(I - T^*) = H^*$. Infine, applicando la seguente relazione $\ker(I - T) = \text{Im}(I - T^*)^\perp$ possiamo concludere che:

$$\ker(I - T) = (H^*)^\perp = \{0\}.$$

Ciò mostra che $(I - T)$ è iniettivo.

(d) Poniamo $d = \dim \ker(I - T)$ e $d^* = \dim \ker(I - T^*)$. Vogliamo dimostrare che $d^* \leq d$. Supponiamo per assurdo che $d < d^*$. Poiché $\ker(I - T)$ ha dimensione finita, allora ammette un complemento in H . Pertanto, esiste una proiezione P continua da H a $\ker(I - T)$. Inoltre $\text{Im}(I - T) = \ker(I - T^*)^\perp$ ha codimensione d^* , dunque ha un complemento (in H), che denoteremo con F , di dimensione d^* . Dal momento che $d < d^*$, possiamo costruire una mappa lineare $\Lambda : \ker(I - T) \rightarrow F$ che sia iniettiva ma non suriettiva. Definiamo $S = T + \Lambda \circ P$. Inoltre si ha che $\Lambda \circ P$ ha rango finito, quindi è compatto. Pertanto S è compatto perché somma di operatori compatti. Affermiamo che $\ker(I - S) = 0$. Infatti, se

$$0 = u - Su = (u - Tu) - (\Lambda \circ Pu),$$

allora

$$u - Tu = 0 \quad \text{e} \quad \Lambda \circ Pu = 0,$$

ovvero, $u \in \ker(I - T)$ e $\Lambda u = 0$. Pertanto, $u = 0$.

Applicando (c) ad S otteniamo che $\text{Im}(I - T) = H$. Questo è assurdo, poiché esiste un qualche $f \in F$ con $f \notin \text{Im}(\Lambda)$, e quindi l'equazione $u - Su = f$ non ha soluzione.

Dunque abbiamo mostrato che $d^* \leq d$. Poiché T è compatto, anche il suo aggiunto T^* è compatto. Possiamo applicare il risultato appena dimostrato a T^* , ottenendo:

$$\dim \ker(I - T^{**}) \leq \dim \ker(I - T^*) \leq \dim \ker(I - T).$$

Ma $\ker(I - T^{**}) \supset \ker(I - T)$ da cui $d = d^*$. □

Concludiamo il capitolo applicando l'Alternativa di Fredholm allo studio dello spettro degli operatori compatti. Sostituendo T con $\frac{1}{\lambda}T$, si ottiene immediatamente il seguente risultato che caratterizza lo spettro non nullo.

Corollario 2.2.10 (Alternativa di Fredholm per $\lambda \neq 0$). *Sia H uno spazio di Hilbert, $T \in \mathcal{K}(H)$ e $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Allora vale una delle seguenti alternative:*

1. *L'operatore $(T - \lambda I)$ è invertibile su H (quindi per ogni $y \in H$ l'equazione $(T - \lambda I)x = y$ ha una ed una sola soluzione).*
2. *Il nucleo $\ker(T - \lambda I) \neq \{0\}$. In questo caso, l'equazione $(T - \lambda I)x = y$ è risolvibile se e solo se y è ortogonale al nucleo dell'operatore aggiunto $(T^* - \lambda I)$, ovvero:*

$$y \in \ker(T^* - \lambda I)^\perp$$

Dimostrazione. La dimostrazione si ottiene riconducendo il problema al caso dell'Alternativa di Fredholm per l'operatore $I - K$. Sia $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Possiamo riscrivere l'operatore $T - \lambda I$ raccogliendo il fattore $-\lambda$:

$$T - \lambda I = -\lambda \left(I - \frac{1}{\lambda} T \right).$$

Ponendo $K = \frac{1}{\lambda} T$, osserviamo che K è ancora un operatore compatto. Pertanto, l'equazione originale $(T - \lambda I)x = y$ è equivalente all'equazione $(I - K)x = -y/\lambda$. Applicando l'Alternativa di Fredholm all'operatore $I - K$, sappiamo che se il nucleo è banale, l'operatore è invertibile; questo implica immediatamente che se $\ker(T - \lambda I) = \{0\}$, allora l'operatore $T - \lambda I$ è una biezion continua su H .

Viceversa, se il nucleo non è banale, la risolubilità dell'equazione è subordinata all'ortogonalità del termine noto rispetto al nucleo dell'aggiunto $(I - K)^*$. Osservando che

$$(I - K)^* = I - \frac{1}{\bar{\lambda}} T^* = -\frac{1}{\bar{\lambda}} (\bar{\lambda} I - T^*),$$

si deduce che $\ker(I - K^*) = \ker(T^* - \bar{\lambda} I)$. Di conseguenza, l'equazione ammette soluzione se e solo se y appartiene al complemento ortogonale di $\ker(T^* - \bar{\lambda} I)$, completando così la dimostrazione. $\square$

Capitolo 3

Analisi Spettrale e Teorema di Decomposizione

3.1 Spettro degli operatori limitati

Nei capitoli precedenti abbiamo introdotto lo studio degli operatori lineari e limitati tra spazi di Hilbert. In questa sezione, iniziamo ad addentrarci in uno degli strumenti analitici più potenti per la comprensione di tali operatori: la teoria spettrale. Mentre in dimensione finita lo studio di un operatore si riduce essenzialmente alla ricerca dei suoi autovalori, in dimensione infinita la situazione risulta più articolata e l'insieme dei valori "singolari" (lo spettro) si arricchisce, suddividendosi in diverse componenti. Procediamo definendo rigorosamente tali concetti per un generico operatore limitato.

Definizione 3.1.1. Sia H uno spazio di Hilbert, $T \in \mathcal{L}(H)$, $x \in H$ e λ un numero complesso:

- (i) Se $x \neq 0$ e $Tx = \lambda x$ allora x si dice *autovettore* di T relativo all'*autovalore* λ . L'insieme degli *autovalori non nulli* di T che denoteremo con $\sigma_p(T)$ è detto *spettro puntuale* di T . Sia $\lambda \in \sigma_p(T)$, chiameremo *autospatio relativo a λ* il sottospazio: $\mathcal{M}_\lambda = \{x \in H : Tx = \lambda x\}$ e *molteplicità dell'autovalore λ* la dimensione del sottospazio $\mathcal{M}_\lambda$;
- (ii) Se λ non è un autovalore e se $\text{Im}(T - \lambda I)$ non è denso, allora diremo che λ appartiene allo *spettro residuo* di T e scriveremo $\lambda \in \sigma_r(T)$;
- (iii) Se λ non è autovalore ma $\text{Im}(T - \lambda I)$ è denso allora diremo che λ appartiene allo *spettro continuo* di T e scriveremo $\lambda \in \sigma_c(T)$.

Definizione 3.1.2. Sia H uno spazio di Hilbert e $T \in \mathcal{L}(H)$. Allora diremo che un numero complesso λ appartiene all'*insieme risolvente* di T e scriveremo $\lambda \in \rho(T)$ se e solo se l'operatore $(T - \lambda I)$ è biiettivo con inverso limitato, denotandolo con $R_\lambda(T)$, il quale è definito come risolvente di T in λ . Se $\lambda \notin \rho(T)$ allora diremo che λ appartiene allo spettro di T e scriveremo $\lambda \in \sigma(T)$.

Proposizione 3.1.3. Sia H uno spazio di Hilbert, $T \in \mathcal{L}(H)$ e λ un autovalore non nullo di T . Allora $\mathcal{M}_\lambda$ è un sottospazio chiuso di H .

Dimostrazione. Sia $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successione di elementi di $\mathcal{M}_\lambda$, tale che $x_n \rightarrow x$ in H . Proviamo che $x \in \mathcal{M}_\lambda$. Se $Tx = 0$, allora $x \in \mathcal{M}_\lambda$. Se $Tx \neq 0$ proviamo che $Tx = \lambda x$. Per linearità risulta:

$$\lambda x_n \rightarrow \lambda x$$

e poiché T è continuo allora

$$Tx_n \rightarrow Tx.$$

Essendo $Tx_n = \lambda x_n$ per ogni n , per l'unicità del limite si può concludere che:

$$Tx = \lambda x,$$

ovvero $x \in \mathcal{M}_\lambda$. □

Ora, spostiamo la nostra attenzione alla costruzione esplicita dell'operatore risolvente. In stretta analogia con lo sviluppo in serie geometrica reale, è possibile dimostrare che per valori di λ sufficientemente grandi, l'operatore $(T - \lambda I)$ risulta invertibile. L'inverso è dato proprio dalla *serie di Neumann*, un risultato che formalizziamo nel seguente lemma.

Lemma 3.1.4 (Sviluppo in serie di Neumann). Sia H uno spazio di Hilbert e $T \in \mathcal{L}(H)$. Sia $\lambda \in \mathbb{C}$ tale che $|\lambda| > \|T\|$. Allora $\lambda \in \rho(T)$ e vale il seguente sviluppo in serie, denominato *Sviluppo in serie di Neumann*, per l'operatore risolvente:

$$R_\lambda(T) = -\frac{1}{\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{T}{\lambda} \right)^n.$$

Inoltre vale la seguente stima:

$$\|R_\lambda(T)\| \leq \frac{1}{|\lambda| - \|T\|}.$$

Dimostrazione. Valutiamo:

$$\left\| \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{T^k}{\lambda^k} \right\| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} \left\| \frac{T^k}{\lambda^k} \right\| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{\|T\|^k}{|\lambda|^k}.$$

Poiché per ipotesi $|\lambda| > \|T\|$, allora la serie $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{T^k}{\lambda^k}$ soddisfa le ipotesi del criterio di convergenza di Cauchy. Denotiamo con X_λ la sua somma, valutiamo il seguente prodotto:

$$-(T - \lambda I) \frac{1}{\lambda} X_\lambda = -(T - \lambda I) \frac{1}{\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{T^k}{\lambda^k} = - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{T^{k+1}}{\lambda^{k+1}} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{T^k}{\lambda^k} = I.$$

In maniera del tutto analoga si prova che:

$$-\frac{1}{\lambda} X_\lambda (T - \lambda I) = I.$$

Quindi $(T - \lambda I)$ è invertibile con inversa::

$$R_\lambda(T) = -\frac{1}{\lambda} X_\lambda = -\frac{1}{\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{T}{\lambda} \right)^k.$$

Ci resta da provare che $R_\lambda(T)$ è limitata. Iniziamo con osservare che, preso $|\lambda| > \|T\|$, si ha $\frac{\|T\|}{|\lambda|} < 1$, quindi:

$$\begin{aligned} \|R_\lambda(T)\| &= \left\| \frac{1}{\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{T}{\lambda} \right)^k \right\| \leq \frac{1}{|\lambda|} \sum_{k=0}^{\infty} \left\| \frac{T^k}{\lambda^k} \right\| \\ &\leq \frac{1}{|\lambda|} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\|T\|^k}{|\lambda|^k} = \frac{1}{|\lambda|} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\|T\|}{|\lambda|} \right)^k \\ &= \frac{1}{|\lambda|} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\|T\|}{|\lambda|}} = \frac{1}{|\lambda|} \cdot \frac{|\lambda|}{|\lambda| - \|T\|} \\ &= \frac{1}{|\lambda| - \|T\|}. \end{aligned}$$

Pertanto $R_\lambda(T)$ è un operatore limitato, quindi $\lambda \in \rho(T)$. □

La convergenza della serie di Neumann garantisce l'esistenza di punti regolari nel piano complesso.

Corollario 3.1.5. *Sia H uno spazio di Hilbert e $T \in \mathcal{L}(H)$. Allora l'insieme risolvente $\rho(T)$ è non vuoto.*

Oltre a garantire che l'insieme risolvente non sia vuoto, la condizione di convergenza ricavata nello Sviluppo di Neumann assicura la limitatezza dello spettro.

Corollario 3.1.6. *Sia H uno spazio di Hilbert e $T \in \mathcal{L}(H)$ e $\lambda \in \sigma(T)$. Allora $|\lambda| \leq \|T\|$.*

Proposizione 3.1.7. *Sia H uno spazio di Hilbert e $T \in \mathcal{L}(H)$. Lo spettro $\sigma(T)$ è compatto e vale la seguente:*

$$\sigma(T) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq \|T\|\}.$$

Dimostrazione. Grazie al Corollario precedente, sappiamo già che lo spettro $\sigma(T)$ è limitato, essendo contenuto nella palla chiusa di raggio $\|T\|$. Per concludere che è compatto, è sufficiente mostrare che è un insieme chiuso in $\mathbb{C}$, ovvero che il suo complementare, l'insieme risolvente $\rho(T)$, è un insieme aperto. Sia $\lambda_0 \in \rho(T)$. Dato $\lambda \in \mathbb{C}$ e $y \in H$, cerchiamo di risolvere l'equazione:

$$Tx - \lambda x = y.$$

L'equazione precedente può essere riscritta come:

$$Tx - \lambda_0 x = y + (\lambda - \lambda_0)x,$$

Poiché $\lambda_0 \in \rho(T)$, l'operatore $T - \lambda_0 I$ è invertibile. Pertanto si ottiene:

$$x = (T - \lambda_0 I)^{-1}(y + (\lambda - \lambda_0)x).$$

Ora andiamo ad applicare il Teorema delle Contrazioni.

Definiamo l'operatore a secondo membro come una funzione $F(x)$:

$$F(x) = (T - \lambda_0 I)^{-1}(y + (\lambda - \lambda_0)x).$$

Affinché F sia una contrazione, deve esistere una costante di Lipschitz $L < 1$ tale per cui si abbia $\|F(x_1) - F(x_2)\| \leq L\|x_1 - x_2\|$ per ogni $x_1, x_2 \in H$. Valutiamo quindi la differenza tra le immagini di due generici vettori x_1 e x_2 sfruttando la linearità degli operatori:

$$\begin{aligned} F(x_1) - F(x_2) &= (T - \lambda_0 I)^{-1}(y + (\lambda - \lambda_0)x_1) - (T - \lambda_0 I)^{-1}(y + (\lambda - \lambda_0)x_2) \\ &= (T - \lambda_0 I)^{-1}(y + (\lambda - \lambda_0)x_1 - y - (\lambda - \lambda_0)x_2) \\ &= (T - \lambda_0 I)^{-1}((\lambda - \lambda_0)(x_1 - x_2)). \end{aligned}$$

Passando ora alle norme otteniamo:

$$\begin{aligned} \|F(x_1) - F(x_2)\| &= \|(T - \lambda_0 I)^{-1}((\lambda - \lambda_0)(x_1 - x_2))\| \\ &\leq \|(T - \lambda_0 I)^{-1}\| \|(\lambda - \lambda_0)(x_1 - x_2)\| \\ &= |\lambda - \lambda_0| \|(T - \lambda_0 I)^{-1}\| \|x_1 - x_2\|. \end{aligned}$$

Dove la quantità racchiusa tra parentesi rappresenta esattamente la costante di Lipschitz L dell'operatore F . Il principio delle contrazioni garantisce l'esistenza e l'unicità del punto fisso (ovvero la soluzione dell'equazione) a patto che $L < 1$, il che porta alla condizione:

$$|\lambda - \lambda_0| \|(T - \lambda_0 I)^{-1}\| < 1.$$

Pertanto $\rho(T)$ è un aperto, il che implica che $\sigma(T)$ è chiuso, e dunque compatto. $\square$

Osservazione 3.1.8. Sia H uno spazio di Hilbert e $T \in \mathcal{L}(H)$. Allora $\sigma(T)$ è non vuoto.

Essendo lo spettro un sottoinsieme compatto e non vuoto del piano complesso, risulta ben definito il massimo modulo dei suoi elementi. Questa quantità, che rappresenta geometricamente il raggio della più piccola palla chiusa centrata nell'origine e contenente l'intero spettro, prende il nome di raggio spettrale.

Definizione 3.1.9. Sia H uno spazio di Hilbert e $T \in \mathcal{L}(H)$. Si definisce *raggio spettrale* di T il numero reale non negativo:

$$r(T) = \sup_{\lambda \in \sigma(T)} |\lambda|.$$

Proposizione 3.1.10. Sia H uno spazio di Hilbert e $T \in \mathcal{L}(H)$. Il raggio spettrale può essere calcolato tramite il seguente limite:

$$r(T) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|T^n\|^{\frac{1}{n}}.$$

3.2 Spettro degli operatori compatti

Esaminiamo ora lo spettro di un operatore lineare compatto. Proveremo che per un operatore compatto T in uno spazio di Hilbert a dimensione infinita, lo spettro si riduce soltanto allo zero e allo spettro puntuale $\sigma_p(K)$.

Teorema 3.2.1. Sia H uno spazio di Hilbert di dimensione infinita e sia $T \in \mathcal{K}(H)$. Allora:

- (a) $0 \in \sigma(T)$;
- (b) $\sigma(T) \setminus \{0\} = \sigma_p(T) \setminus \{0\}$;

(c) si verifica uno dei seguenti casi:

- $\sigma(T) = \{0\}$;
- $\sigma(T) \setminus \{0\}$ è un insieme finito;
- $\sigma(T) \setminus \{0\}$ è una successione convergente a 0.

Prima di procedere alla dimostrazione di tale teorema, introduciamo il seguente lemma preliminare.

Lemma 3.2.2. *Sia $T \in \mathcal{K}(H)$ e sia $(\lambda_n)_{n \geq 1}$ una successione di scalari distinti tale che*

$$\lambda_n \rightarrow \lambda$$

e

$$\lambda_n \in \sigma(T) \setminus \{0\} \quad \forall n.$$

Allora $\lambda = 0$.

In altre parole, tutti i punti di $\sigma(T) \setminus \{0\}$ sono punti isolati.

Dimostrazione. Poiché sappiamo che $\lambda_n \in \sigma_p(T)$, poniamo $e_n \neq 0$ tale che $(T - \lambda_n I)e_n = 0$. Definiamo E_n come il sottospazio generato da $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$. Vogliamo dimostrare che $E_n \subset E_{n+1}$, con $E_n \neq E_{n+1}$ per ogni n . Per farlo, è sufficiente verificare che, per ogni n , i vettori $e_1, e_2, \dots, e_n$ siano linearmente indipendenti.

Procediamo per induzione su n . Supponiamo che l'indipendenza valga fino a n e supponiamo che $e_{n+1} = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i$. Applicando l'operatore T ad entrambi i membri e sfruttando la definizione di autovettore, otteniamo:

$$Te_{n+1} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \lambda_i e_i = \sum_{i=1}^n \alpha_i \lambda_{n+1} e_i.$$

Da cui segue che $\alpha_i(\lambda_i - \lambda_{n+1}) = 0$ per $i = 1, 2, \dots, n$. Poiché gli autovalori sono distinti, si ha necessariamente $\alpha_i = 0$ per ogni $i = 1, 2, \dots, n$; ma questo implicherebbe $e_{n+1} = 0$, generando una contraddizione. Abbiamo così provato che $E_n \subset E_{n+1}$ e $E_n \neq E_{n+1}$ per ogni n .

Applicando il Lemma di Riesz 2.2.3, possiamo costruire una successione di vettori $(u_n)_{n \geq 1}$ tale che $u_n \in E_n$, $\|u_n\| = 1$ e $\text{dist}(u_n, E_{n-1}) \geq 1/2$ per ogni $n \geq 2$. Per $2 \leq m < n$, si ottiene:

$$E_{m-1} \subset E_m \subset E_{n-1} \subset E_n.$$

D'altra parte, è immediato verificare che $(T - \lambda_n I)E_n \subset E_{n-1}$. Pertanto otteniamo:

$$\begin{aligned} \left\| \frac{Tu_n}{\lambda_n} - \frac{Tu_m}{\lambda_m} \right\| &= \left\| \frac{(Tu_n - \lambda_n u_n)}{\lambda_n} - \frac{(Tu_m - \lambda_m u_m)}{\lambda_m} + u_n - u_m \right\| \\ &\geq \text{dist}(u_n, E_{n-1}) \geq \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Se avessimo $\lambda_n \rightarrow \lambda$ con $\lambda \neq 0$, la successione $(Tu_n/\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dovrebbe ammettere una sottosuccessione convergente (poiché T è compatto, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ è limitata e $1/\lambda_n \rightarrow 1/\lambda$). Tuttavia, la disuguaglianza appena trovata mostra che i termini di tale successione distano tra loro almeno $1/2$, impedendo l'esistenza di sottosuccessioni di Cauchy. Abbiamo quindi una contraddizione, il che conclude la dimostrazione e prova che $\lambda = 0$. $\square$

Ora siamo pronti per dimostrare il teorema precedente.

Dimostrazione del Teorema 3.2.1. Analizziamo separatamente i tre punti dell'enunciato.

- (a) Supponiamo per assurdo che $0 \notin \sigma(T)$. Allora T è biiettivo ed esiste l'operatore limitato T^{-1} . Dunque per la Proposizione 2.1.6 abbiamo che $I = T \circ T^{-1}$ è un operatore compatto. Pertanto per il Teorema di Riesz 2.2.4 la palla unitaria chiusa B_H è compatta e $\dim H < \infty$, ottenendo così una contraddizione.
- (b) Sia $\lambda \in \sigma(T)$ con $\lambda \neq 0$. Vogliamo dimostrare che λ è un autovalore. Procediamo per assurdo e supponiamo che λ non lo sia. Ciò equivale ad affermare che l'equazione omogenea $(T - \lambda I)x = 0$ ammette unicamente la soluzione banale $x = 0$, il che implica che il nucleo dell'operatore è banale: $\ker(T - \lambda I) = \{0\}$. Poiché T è un operatore compatto e $\lambda \neq 0$, possiamo applicare il Teorema dell'Alternativa di Fredholm 2.2.7. Tale teorema garantisce che l'operatore $(T - \lambda I)$ è iniettivo se e solo se è suriettivo. Avendo supposto l'injectività, ne consegue la suriettività, ovvero l'immagine coincide con l'intero spazio: $\text{Im}(T - \lambda I) = H$. Di conseguenza, l'operatore $(T - \lambda I)$ risulta essere biiettivo. Ma questo significa, per definizione, che λ appartiene all'insieme risolvibile dell'operatore, ovvero $\lambda \in \rho(T)$. Ottenendo così una contraddizione.

- (c) Per ogni intero $n \geq 1$ l'insieme

$$\sigma(T) \cap \left\{ \lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \geq \frac{1}{n} \right\}$$

è vuoto oppure *finito* (se avesse infiniti punti distinti, esisterebbe una sotto-successione convergente a un certo λ con $|\lambda| \geq 1/n$, poiché $\sigma(T)$ è compatto, e questo contraddirebbe il Lemma precedente). Quindi, se $\sigma(T) \setminus \{0\}$ ha infiniti punti distinti, possiamo ordinarli come una successione che tende a 0.

□

Le proprietà appena dimostrate delineano una struttura molto rigida per gli autovalori degli operatori compatti. Per formalizzare questo comportamento, enunciamo la seguente definizione.

Definizione 3.2.3 (Spettro discreto). Si dice che un operatore compatto $T : H \rightarrow H$ possiede uno *spettro discreto* perchè il suo spettro, ad eccezione al più del punto $\lambda = 0$, è costituito esclusivamente da autovalori isolati aventi molteplicità finita, i quali ammettono lo zero come unico possibile punto di accumulazione.

Alla luce di questa definizione, il Teorema precedente si può riassumere affermando che **lo spettro di un qualsiasi operatore compatto in dimensione infinita è discreto**.

3.3 Operatori Autoaggiunti

Dopo aver esaminato le proprietà degli operatori compatti, introduciamo un'ulteriore classe di operatori che gioca un ruolo fondamentale nella teoria spettrale: gli operatori autoaggiunti. Si tratta dell'analogo infinito dimensionale delle matrici simmetriche e garantisce che tutti gli autovalori siano reali. Iniziamo richiamando brevemente la definizione di operatore aggiunto in uno spazio di Hilbert.

Definizione 3.3.1. Sia H uno spazio di Hilbert e sia $T \in \mathcal{L}(H)$ un operatore lineare e limitato. Si definisce *operatore aggiunto* di T , e si indica con T^* , l'unico operatore in $\mathcal{L}(H)$ che soddisfa la relazione:

$$\langle Tx, y \rangle = \langle x, T^*y \rangle \quad \forall x, y \in H.$$

Sulla base di questa nozione, possiamo isolare la classe degli operatori che risultano identici al proprio aggiunto, i quali presentano analogie profonde con le matrici simmetriche reali.

Definizione 3.3.2. Un operatore limitato $T \in \mathcal{L}(H)$ si dice *autoaggiunto* (o simmetrico) se coincide con il proprio aggiunto, ovvero se $T = T^*$. Equivalentemente, l'operatore T è autoaggiunto se vale l'identità:

$$\langle Tx, y \rangle = \langle x, Ty \rangle \quad \forall x, y \in H.$$

Presentiamo ora alcune proprietà fondamentali che caratterizzano la struttura spettrale degli operatori autoaggiunti.

Proposizione 3.3.3. Sia $T \in \mathcal{L}(H)$ un operatore autoaggiunto. Poniamo

$$m = \inf_{\substack{u \in H \\ \|u\|=1}} \langle Tu, u \rangle \quad e \quad M = \sup_{\substack{u \in H \\ \|u\|=1}} \langle Tu, u \rangle.$$

Allora $\sigma(T) \subset [m, M]$, $m \in \sigma(T)$ e $M \in \sigma(T)$. Inoltre, la norma dell'operatore è data da:

$$\|T\| = \max\{|m|, |M|\}.$$

Dimostrazione. Sia $\lambda > M$; mostreremo che $\lambda \in \rho(T)$. Per definizione di M , abbiamo:

$$\langle Tu, u \rangle \leq M\|u\|^2 \quad \forall u \in H,$$

pertanto:

$$\langle \lambda u - Tu, u \rangle \geq (\lambda - M)\|u\|^2 = \alpha\|u\|^2 \quad \forall u \in H, \text{ con } \alpha > 0.$$

Applicando il Teorema di Lax-Milgram 1.2.9, deduciamo che l'operatore $\lambda I - T$ è biiettivo e ammette inverso limitato, dunque $\lambda \in \rho(T)$. In modo del tutto analogo, si dimostra che ogni $\lambda < m$ appartiene a $\rho(T)$. Dunque possiamo concludere che $\sigma(T) \subset [m, M]$. Dimostriamo ora che $M \in \sigma(T)$ (la dimostrazione per m è simile). Consideriamo la forma bilineare $a(u, v) = \langle Mu - Tu, v \rangle$. Essendo T autoaggiunto, tale forma è simmetrica e soddisfa:

$$a(v, v) \geq 0 \quad \forall v \in H.$$

Pertanto, essa soddisfa la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz, ovvero:

$$|\langle Mu - Tu, v \rangle| \leq \langle Mu - Tu, u \rangle^{1/2} \langle Mu - Tv, v \rangle^{1/2} \quad \forall u, v \in H.$$

Prendendo l'estremo superiore su $\|v\| = 1$, si ottiene che esiste una costante $C > 0$ tale che:

$$\|Mu - Tu\| \leq C \langle Mu - Tu, u \rangle^{1/2} \quad \forall u \in H. \quad (3.1)$$

Per definizione di M , esiste una successione limitata $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ con $\|u_n\| = 1$ tale che $\langle Tu_n, u_n \rangle \rightarrow M$. Dalla stima (3.1) deduciamo che $\|Mu_n - Tu_n\| \rightarrow 0$. Dunque $M \in \sigma(T)$. Infine, dimostriamo che $\|T\| = \mu$, dove $\mu = \max\{|m|, |M|\}$. Scriviamo l'identità di polarizzazione $\forall u, v \in H$:

$$\begin{aligned}\langle T(u+v), u+v \rangle &= \langle Tu, u \rangle + \langle Tv, v \rangle + 2\langle Tu, v \rangle, \\ \langle T(u-v), u-v \rangle &= \langle Tu, u \rangle + \langle Tv, v \rangle - 2\langle Tu, v \rangle.\end{aligned}$$

Sottraendo membro a membro otteniamo:

$$\begin{aligned}4\langle Tu, v \rangle &= \langle T(u+v), u+v \rangle - \langle T(u-v), u-v \rangle \\ &\leq M\|u+v\|^2 - m\|u-v\|^2.\end{aligned}$$

Pertanto otteniamo:

$$4\langle Tu, v \rangle \leq \mu(\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2) = 2\mu(\|u\|^2 + \|v\|^2).$$

Sostituendo v con αv (con $\alpha > 0$), la disuguaglianza diventa:

$$4\langle Tu, v \rangle \leq 2\mu \left(\frac{\|u\|^2}{\alpha} + \alpha\|v\|^2 \right).$$

Minimizzando il membro di destra rispetto ad α , ponendo $\alpha = \|u\|/\|v\|$, otteniamo:

$$|\langle Tu, v \rangle| \leq \mu\|u\|\|v\| \quad \forall u, v \in H,$$

il che implica $\|T\| \leq \mu$. D'altra parte è chiaro che $|\langle Tu, u \rangle| \leq \|T\|\|u\|^2$, da cui segue $|m| \leq \|T\|$ e $|M| \leq \|T\|$, e quindi $\mu \leq \|T\|$. Concludiamo che deve valere l'uguaglianza $\|T\| = \mu$. $\square$

Corollario 3.3.4. *Sia $T \in \mathcal{K}(H)$ un operatore autoaggiunto tale che $\sigma(T) = \{0\}$. Allora $T = 0$.*

Dimostrazione. Grazie alla Proposizione 3.3.3, sappiamo che se $\sigma(T) = \{0\}$, allora gli estremi associati all'operatore sono nulli. Di conseguenza, si ha che $\langle Tu, u \rangle = 0$ per ogni $u \in H$. Sfruttando l'identità di polarizzazione, ne segue che:

$$2\langle Tu, v \rangle = \langle T(u+v), u+v \rangle - \langle Tu, u \rangle - \langle Tv, v \rangle = 0 \quad \forall u, v \in H.$$

Essendo il prodotto scalare $\langle Tu, v \rangle = 0$ per ogni scelta di $v \in H$, deduciamo che $Tu = 0$ per ogni $u \in H$, e perciò $T = 0$. $\square$

3.4 Il Teorema Spettrale (Hilbert-Schmidt)

Premettiamo il seguente corollario al risultato centrale di questo capitolo che è il Teorema spettrale di Hilbert-Schmidt.

Corollario 3.4.1. *Sia $(e_n)_{n \geq 1}$ una base ortonormale di H . Allora per ogni $u \in H$, si ha*

$$u = \sum_{k=1}^{+\infty} \langle u, e_k \rangle e_k, \quad \text{cioè} \quad u = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \langle u, e_k \rangle e_k$$

e

$$\langle u, v \rangle = \sum_{k=1}^{+\infty} \langle u, e_k \rangle \langle v, e_k \rangle \quad \forall v \in H.$$

In particolare, vale la seguente uguaglianza:

$$\|u\|^2 = \sum_{k=1}^{+\infty} |\langle u, e_k \rangle|^2.$$

Tale Corollario ci porta in modo naturale alla definizione di base spettrale per un operatore compatto e autoaggiunto

Definizione 3.4.2. Sia $T \in \mathcal{K}(H)$ un operatore compatto e autoaggiunto. Si chiama *base spettrale* per T una base hilbertiana $(v_n)_{n \geq 1}$ di H costituita interamente da autovettori di T , ovvero tale che $Tv_n = \lambda_n v_n$ per ogni $n \geq 1$, dove $(\lambda_n)_{n \geq 1}$ è la successione dei corrispondenti autovalori reali.

Dimostriamo ora che anche in dimensione infinita vale il seguente fondamentale risultato di diagonalizzabilità (in una opportuna base) per gli operatori lineari compatti autoaggiunti.

Teorema 3.4.3 (Teorema spettrale di Hilbert-Schmidt). *Sia H uno spazio di Hilbert separabile e $T \in \mathcal{K}(H)$ un operatore lineare, compatto e autoaggiunto. Allora esistono una base spettrale $(v_n)_{n \geq 1}$ di H e una successione di autovalori reali $(\lambda_n)_{n \geq 1}$ con $\lambda_n \rightarrow 0$, tali che per ogni $u \in H$ l'operatore T ammette la seguente rappresentazione:*

$$Tu = \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n \langle u, v_n \rangle v_n.$$

Dimostrazione. Assumiamo che H abbia dimensione infinita. Poiché $T \in \mathcal{K}(H)$, per il Teorema 3.2.1 si ha che:

$$\sigma(T) \setminus \{0\} = \sigma_p(T) \setminus \{0\} = \{\lambda_n\}_{n \geq 1},$$

con la successione degli autovalori che tende a zero ($\lambda_n \rightarrow 0$ per $n \rightarrow \infty$). Andiamo a suddividere la dimostrazione in tre passaggi.

Passo 1: Definizione degli autospazi.

Sia $(\lambda_n)_{n \geq 1}$ la successione di tutti gli autovalori distinti di T , escluso lo zero. Poniamo:

$$\lambda_0 := 0, \quad E_0 := \ker(T), \quad E_n := \ker(T - \lambda_n I) \quad (n \geq 1).$$

Osserviamo che E_0 ed E_n (per $n \geq 1$) sono sottospazi chiusi di H , in quanto nuclei di operatori lineari continui. Inoltre,

$$0 \leq \dim(E_0) \leq \infty \quad \text{mentre} \quad 0 < \dim(E_n) < \infty.$$

grazie al punto (a) del Teorema dell'Alternativa di Fredholm 2.2.7

Passo 2: Somma diretta ortogonale e densità.

Proviamo che H è la somma diretta degli E_n per $n \in \mathbb{N}_0$. Per farlo, dimostriamo che gli spazi E_k sono mutualmente ortogonali e, inoltre, che l'involuppo lineare della loro unione è denso in H .

- (a) *Ortogonalità:* Se $u \in E_m$ e $v \in E_n$, con $m \neq n$, allora $Tu = \lambda_m u$ e $Tv = \lambda_n v$, pertanto:

$$\lambda_m \langle u, v \rangle = \langle Tu, v \rangle = \langle u, Tv \rangle = \lambda_n \langle u, v \rangle.$$

Poiché $\lambda_n \neq \lambda_m$, si deduce che $\langle u, v \rangle = 0$; di conseguenza, i sottospazi E_m ed E_n sono mutualmente ortogonali.

- (b) *Densità:* Consideriamo il sottospazio generato da tutti gli autospazi:

$$F := \text{span} \left(\bigcup_{n=0}^{\infty} E_n \right) = \left\{ \sum_{n=0}^m a_n u_n : m \in \mathbb{N}, u_n \in E_n, a_n \in \mathbb{R} \right\}.$$

Proviamo che F è denso in H . Ovviamente $T(F) \subseteq F$. Ne segue che il complemento ortogonale è invariante, ovvero

$$T(F^\perp) \subseteq F^\perp.$$

Infatti, dato $u \in F^\perp$, per ogni $v \in F$ si ha $Tv \in F$ e quindi:

$$\langle Tu, v \rangle = \langle u, Tv \rangle = 0.$$

Data l'arbitrarietà di $v \in F$, deduciamo che $Tu \in F^\perp$. Denotiamo ora la restrizione di T a $F^\perp$ con T_0 ; l'operatore

$$T_0 = T|_{F^\perp} : F^\perp \rightarrow T(F^\perp) \subseteq F^\perp$$

è compatto ed autoaggiunto su $F^\perp$.

Ora proviamo che $\sigma(T_0) = \{0\}$. Sia, per assurdo, $\lambda \in \sigma(T_0)$ con $\lambda \neq 0$. Poiché $\lambda \in \sigma_p(T_0) \setminus \{0\}$, esiste $u \in F^\perp$ con $u \neq 0$ tale che $T_0 u = \lambda u$. Perciò λ è uno degli autovalori di T ; supponiamo $\lambda = \lambda_n$ con $n \geq 1$. Pertanto $u \in E_n \subseteq F$. Poiché $u \in F^\perp \cap F$, risulta $u = 0$, ottenendo una contraddizione. Dunque $\sigma(T_0) = \{0\}$ e, per il Corollario 3.3.4, si ha $\langle T_0 u, u \rangle = 0$ per ogni $u \in F^\perp$. Utilizzando l'identità di polarizzazione per ogni $u, v \in F^\perp$:

$$2\langle T_0 u, v \rangle = \langle T_0(u+v), u+v \rangle - \langle T_0 u, u \rangle - \langle T_0 v, v \rangle = 0.$$

Dall'arbitrarietà di u e v , segue che $T_0 = 0$, cioè l'operatore T si annulla su $F^\perp$. Si ha, allora:

$$F^\perp \subseteq \ker(T) = E_0 \subseteq F,$$

cioè $F^\perp \subseteq F$ e quindi $F^\perp = F \cap F^\perp = \{0\}$. Ne segue che F è denso in H , poiché $\overline{F} = (F^\perp)^\perp = \{0\}^\perp = H$.

Passo 3: Costruzione della base e rappresentazione.

Per ogni $n \geq 1$, gli spazi a dimensione finita E_n possiedono una base ortonormale formata da autovettori di T relativi all'autovalore λ_n ,

$$\mathcal{B}_n = \{v_{n,1}, v_{n,2}, \dots, v_{n,N(n)}\}.$$

D'altra parte, $E_0 = \ker(T)$ è un sottospazio chiuso dello spazio separabile H , pertanto ammette una base di Hilbert numerabile e ortonormale

$$\mathcal{B}_0 = \{v_{0,1}, v_{0,2}, \dots\}$$

formata da autovettori di T relativi a $\lambda_0 = 0$. In definitiva, l'unione

$$\mathcal{B} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}_0} \mathcal{B}_n$$

è una base ortonormale di H formata da autovettori di T .

Ordinando tale base come $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \dots\}$, per ogni $u \in H$ vale la rappresentazione in serie $u = \sum_{n=1}^{+\infty} \langle u, v_n \rangle v_n$. Essendo T lineare e continuo, otteniamo infine:

$$Tu = \sum_{n=1}^{+\infty} \langle u, v_n \rangle T v_n = \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n \langle u, v_n \rangle v_n.$$

Concludendo così la dimostrazione. □

Osservazione 3.4.4. È importante sottolineare che l'autospazio relativo a ciascun autovalore non nullo λ_n (con $n \geq 1$) dell'operatore T ha dimensione finita. Tale proprietà, garantita dall'ipotesi di compattezza, rappresenta una differenza fondamentale rispetto all'autospazio $E_0 = \ker(T)$, il quale può invece avere dimensione infinita.

Bibliografia

- [1] H. Brezis, *Analisi Funzionale - Teoria e applicazioni*, Liguori Editore, 1986.
- [2] W. Rudin, *Functional Analysis*, McGraw-Hill, 2nd Edition, 1991.
- [3] J. Weidmann, *Linear Operators in Hilbert Spaces*, Graduate Texts in Mathematics 68, Springer-Verlag, 1980.