

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

SCUOLA DI SCIENZE
Corso di Laurea in Matematica

Ottimizzazione matematica per flussi su reti di aiuti umanitari

Tesi di Laurea in Ricerca Operativa

Relatore:
Chiar.mo/a Prof./ssa
Laura Galli

Presentata da:
Flavio Clemente

Anno Accademico 2025/2026

A nonno

Introduzione

La Ricerca Operativa svolge da decenni un ruolo chiave nella pianificazione strategica e operativa delle *supply chains* (catene di approvvigionamento). In questo testo analizzeremo in particolare una sua branca, ovvero la logistica umanitaria, dal punto di vista della modellizzazione matematica. Questa disciplina si occupa dell'organizzazione e del controllo del flusso di beni e servizi dai centri di distribuzione fino alle popolazioni colpite da crisi geopolitiche, conflitti armati, epidemie o disastri naturali. Mentre nella logistica commerciale l'obiettivo primario è la massimizzazione del profitto economico, la logistica umanitaria opera in condizioni di estrema urgenza e scarsità di risorse, orientando i propri sforzi verso la minimizzazione della carenza di servizi e beni essenziali e la minimizzazione dei tempi di consegna, il tutto cercando di gestire al meglio le spese.

L'elaborato si articola in tre capitoli, strutturati secondo un percorso che va dalla teoria generale alla modellizzazione applicata.

Nel primo capitolo è presente una classificazione dei principali approcci studiati finora dalla comunità scientifica, dividendoli per natura metodologica, collocazione temporale rispetto al disastro e struttura della funzione obiettivo. In seguito viene svolta un'analisi di alcuni articoli selezionati per rilevanza storica e contributi innovativi. Essi spaziano dal 1996 al 2025, testimoniando come questa branca sia ancora giovane e in via di sviluppo. È opportuno precisare sin da principio che il focus centrale di questo capitolo risiede interamente sulla modellizzazione matematica dei problemi logistici e non sulla progettazione o sull'analisi teorica degli algoritmi di risoluzione. L'obiettivo della tesi è mostrare come la complessità e l'incertezza dei contesti umanitari possano essere tradotte in strutture matematiche rigorose. La sfida principale consiste nell'identificare le giuste variabili decisionali, nel formulare funzioni obiettivo capaci di bilanciare diverse finalità e nel definire sistemi di vincoli che descrivano fedelmente la realtà. È inoltre opportuno specificare che non tutti i modelli sono stati descritti nella loro interezza, ma di alcuni sono stati esposti solo alcuni passaggi ritenuti interessanti e di rilievo per l'elaborato.

Nel secondo capitolo verrà presentata l'iniziativa umanitaria ESUPS (*Emergency Supply Prepositioning Strategy*), nata in seguito ad eventi storici drammatici come il terre-

moto del Nepal del 2015. Quest’ultimo in particolare ha evidenziato la fragilità di uno stoccaggio centralizzato e privo di pianificazione: il 90% delle forniture centrali per i soccorsi d’emergenza erano conservate a Kathmandu, e vennero sepolte sotto le macerie. Ci fu grossa mobilitazione globale, ma le scorte arrivarono con molto ritardo rispetto alla criticità della situazione. Ciò ha indotto la comunità scientifica internazionale a spingere verso la transizione da una gestione puramente reattiva dell’emergenza a una strategia proattiva di preparazione e pre-posizionamento dei beni, ruolo in cui si è distinta ESUPS. In seguito verrà riportato un caso di studio dedicato a ESUPS e proposto da *Gurobi Optimization LLC.*, un’azienda software americana fondata nel 2008, nota per aver sviluppato il *Gurobi Optimizer*, uno dei motori di calcolo (*solver*) di ottimizzazione matematica che si colloca al vertice dei solutori commerciali per problemi di Programmazione Intera Mista (*MIP*). Il caso di studio introduce un modello di base di LP (*Linear Programming*) e alcune sue estensioni, fino ad ottenere un modello SLP (*Stochastic Linear Programming*) di pre-posizionamento di forniture umanitarie.

Nel terzo capitolo l’attenzione si sposterà su una demo offerta da Gurobi, dal titolo “*Tackling World hunger using mathematical optimization*”. Questa usa un modello di MILP (*Mixed Integer Linear Programming*) per organizzare un flusso ottimale di cibo in alcune località bisognose di aiuto in Siria, rispettando anche alcuni vincoli nutrizionali e basandosi su dataset reali del World Food Programme (WFP). Al termine della presentazione, è stata inserita una possibile implementazione, tramite delle modifiche al codice Python originale, che mira ad irrobustire il modello e aiutarlo a gestire alcuni possibili imprevisti selezionati. Chiude l’elaborato l’analisi e il confronto dei risultati ottenuti dal solutore, evidenziandone l’importanza come strumento di supporto alle decisioni in contesti di emergenza.

Indice

Introduzione	i
1 Modelli matematici di ottimizzazione nella logistica umanitaria	1
1.1 Tipologie differenti di metodologie utilizzate	2
1.1.1 Modelli deterministici	2
1.1.2 Modelli stocastici	8
1.2 La classificazione temporale dei modelli:	
<i>pre-disaster</i> e <i>post-disaster</i>	12
1.2.1 Modelli di natura strategica (<i>pre-disaster</i>)	12
1.2.2 Modello PP-HSD: Integrazione Pre e Post-Disastro	15
1.2.3 Modelli di Logistica Umanitaria Post-Disastro: <i>Scheduling</i> e Sin-	
cronizzazione	18
2 L’iniziativa ESUPS	23
2.1 Introduzione al caso di studio: motivazioni e esposizione del modello base	23
2.2 Estensione stocastica del modello	25
2.3 Altre possibili estensioni	26
3 Demo di Gurobi: “Tackling world hunger using mathematical optimization”	29
3.1 Introduzione alla demo, assunzioni e	
importazione dei dataset	29
3.2 Parametri e variabili decisionali del modello	31
3.3 Funzione obiettivo e vincoli	32
3.4 Una possibile implementazione per il modello della demo	33
3.5 Analisi dei Risultati a seguito	
dell’ottimizzazione	35
3.6 Conclusioni e possibili ulteriori estensioni del modello	37

Bibliografia

39

Capitolo 1

Modelli matematici di ottimizzazione nella logistica umanitaria

La logistica umanitaria si occupa di problemi reali caratterizzati da un'elevata complessità computazionale e modellistica. Il numero di variabili decisionali in gioco è spesso considerevole, i parametri sono intrinsecamente incerti e la componente stocastica gioca un ruolo determinante nell'evoluzione degli eventi post-disastro. Di conseguenza, non esiste una strategia matematica o decisionale univoca per affrontare gli scenari analizzati. L'obiettivo di questo capitolo è presentare una rassegna e una classificazione dei diversi approcci modellistici e strategici storicamente rilevanti, al fine di delineare la letteratura scientifica di riferimento.

Le diverse strategie si organizzano in tre macro-dimensioni tassonomiche:

1. **La natura metodologica:** distinzione tra modelli in base alla gestione dell'incertezza. In particolare verranno presi in analisi modelli deterministici e modelli stocastici, mentre quelli di ottimizzazione robusta non verranno approfonditi in questo elaborato.
2. **La collocazione temporale:** classificazione di modelli operanti nel *pre-disaster* o nel *post-disaster*, sia nell'immediatezza che nel lungo termine.
3. **La struttura della funzione obiettivo:** suddivisione dei modelli in base al criterio/ai criteri da perseguire tra efficienza, efficacia ed equità. Si distingue anche tra i modelli *Single-Objective* (Mono-Obiettivo), con una sola funzione obiettivo da ottimizzare, e *Multi-Objective* (Multi-Obiettivo), con più funzioni obiettivo da ottimizzare e gestite tramite *trade-off* (bilanciamento).

1.1 Tipologie differenti di metodologie utilizzate

Come anticipato prima, i problemi presi in carico dalla logistica umanitaria sono complessi e i modelli non sono quindi pienamente capaci di rappresentare fedelmente la realtà. Vedremo ora alcune strategie differenti per gestirne l'incertezza, prendendo in considerazione un insieme di articoli di riferimento selezionati.

1.1.1 Modelli deterministici

I modelli deterministici assumono che tutti i parametri di input (domanda di soccorso, capacità dei nodi, tempi di percorrenza degli archi, ecc.) siano noti a priori con certezza. Sebbene tale assunzione sia distante dalla realtà caotica di un'emergenza, questi modelli sono fondamentali per contesti in cui i dati storici sono consolidati, o come basi matematiche. Ad esempio possono fungere da validatori dell'architettura operativa per un modello stocastico: se non si riesce a formulare e a risolvere in tempi accettabili il modello deterministico di *routing* (instradamento) per un solo scenario (a causa dell'elevata complessità combinatoria, essendo problemi *NP-hard*, ovvero difficile almeno quanto qualsiasi problema della classe *Nondeterministic Polynomial time*), sarà matematicamente impossibile risolvere il problema stocastico complessivo. Inoltre, molti metodi di soluzione esatti per modelli stocastici, in particolare le *Bender Decompositions*, scompongono il problema stocastico principale in tanti sotto-problemi deterministici quanti sono gli scenari.

Uno dei paper capostipite per la gestione della logistica d'emergenza post-disastro è quello di Haghani & Oh (1996) [1]. Il problema è formulato come un modello MILP deterministico. Per catturare la dinamicità delle operazioni di soccorso in un contesto deterministico, gli autori utilizzano il concetto di rete spazio-temporale: il tempo viene discretizzato in un insieme di intervalli finiti $t \in \{1, 2, \dots, T\} = \mathcal{T}$, e a ciascuno di essi viene associato un grafo rappresentante la rete. La rete risultante è composta da:

- Nodi spazio-temporali $(i, t) \in N \times \mathcal{T}$: Rappresentano una specifica posizione geografica i all'istante di tempo t . N è l'insieme totale dei nodi "spazio". Si può visualizzare come $N = U \cup UV \cup V \cup VW \cup W$, dove U rappresenta l'insieme dei nodi di origine, V l'insieme dei nodi di transito e W l'insieme dei nodi di destinazione. UV e VW sono insiemi di nodi con duplice funzione.
- Archi $a \in A$. Si dividono in:
 - Archi spaziali di movimento $a \in A$: Collegano un nodo $(i, t) \in N \times \mathcal{T}$ a un nodo $(j, t') \in N \times \mathcal{T}$.

-Archi temporali di sosta: Collegano il nodo $(i, t) \in N \times \mathcal{T}$ al nodo $(i, t + 1) \in N \times \mathcal{T}$, modellando lo stoccaggio di beni o la sosta dei veicoli presso la stessa struttura tra due intervalli di tempo consecutivi.

Gli altri parametri del modello sono:

M = insieme di modalità di trasporto, $m \in M$ è un indice

G = insieme di merci o prodotti, $g \in G$ è un indice

EPT_{gi} = periodo di tempo più vicino per il ritiro della merce g al nodo i

SE_{git} = quantità di offerta esogena della merce g al nodo i nel periodo di tempo t

EDT_{gi} = periodo di tempo più vicino per la consegna della merce g al nodo i

DE_{git} = quantità di domanda esogena della merce g al nodo i nel periodo di tempo t

YE_{it}^m = numero di veicoli della modalità m disponibili al nodo i nel periodo di tempo t

YCA^m = capacità del veicolo per la modalità m

$ACA_{itjt'}^m$ = capacità dell'arco tra il nodo i al tempo t e il nodo j al tempo t' espressa in numero di veicoli per la modalità m

$CVR_{itjt'}^m$ = costo unitario per lo spostamento di un veicolo di modalità m dal nodo i al tempo t al nodo j al tempo t'

$CGR_{itjt'}^{gm}$ = costo unitario per la spedizione della merce g tramite la modalità m dal nodo i al tempo t al nodo j al tempo t'

CSC_{git} = costo unitario per lo stoccaggio dell'offerta per la merce g al nodo i dal periodo di tempo t al periodo di tempo $t + 1$

CDC_{git} = costo unitario per il rinvio della domanda per la merce g al nodo i dal periodo di tempo t al periodo di tempo $t + 1$

Sono presenti variabili decisionali continue, che tracciano le merci, e discrete, che tracciano i veicoli:

$Y_{itjt'}^m \in \mathbb{N}$: flusso di veicoli di modalità m dal nodo i al periodo di tempo t al nodo j al periodo di tempo t'

$YC_{it}^m \in \mathbb{N}$ numero di veicoli di modalità m che vengono mantenuti dal periodo di tempo t al periodo di tempo $t + 1$ al nodo i

$X_{ijt'}^{gm} \in \mathbb{R}^+$: flusso della merce g tramite la modalità m dal nodo i al periodo di tempo t al nodo j al periodo di tempo t'

$SC_{git} \in \mathbb{R}^+$: quantità di offerta della merce g che viene mantenuta (carried over) dal periodo di tempo t al periodo di tempo $t + 1$ al nodo i

$DC_{git} \in \mathbb{R}^+$: quantità di domanda della merce g che viene rimandata (carried over) dal periodo di tempo t al periodo di tempo $t + 1$ al nodo i

$XT_{it(t+K_{mm'})}^{gmm'} \in \mathbb{R}^+$: quantità di merce g che viene trasferita dalla modalità m alla modalità m' al nodo i al periodo di tempo t

Nel modello vengono utilizzate anche le seguenti variabili decisionali:

$SE_{git}^m \in \mathbb{R}^+$: quantità di offerta esogena della merce g assegnata alla modalità m al nodo i nel periodo di tempo t

$SC_{git}^m \in \mathbb{R}^+$: quantità di offerta della merce g che viene mantenuta dalla modalità m dal periodo di tempo t al periodo di tempo $t + 1$ al nodo i

$DE_{git}^m \in \mathbb{R}^+$: quantità di domanda esogena della merce g consegnata dalla modalità m al nodo i nel periodo di tempo t

$DC_{git}^m \in \mathbb{R}^+$: quantità di domanda della merce g che viene rimandata dalla modalità m dal periodo di tempo t al periodo di tempo $t + 1$ al nodo i

I vincoli sono strutturati in forma analoga a quelli del MCF (*Minimum Cost Flow*). Il modello considera infatti vincoli di conservazione e di capacità sia sul flusso di merce che sul flusso di veicoli, oltre che vincoli di natura temporale. Nel dettaglio:

- **Vincoli di conservazione del flusso per i nodi spazio-temporali:** Il loro scopo è garantire che la quantità totale di merce g che entra in un nodo i al tempo t tramite la modalità m sia esattamente uguale al flusso in uscita.

$$\begin{aligned} & \sum_j \sum_{t'} X_{jt't}^{gm} + \sum_{m'} XT_{i(t-K_{m'm})t}^{gm'm} + SC_{gi(t-1)}^m + SE_{git}^m \\ &= \sum_j \sum_{t'} X_{ijt'}^{gm} + \sum_{m'} XT_{it(t+K_{mm'})}^{gmm'} + SC_{git}^m \quad (i \in U, UV, V; \forall m, t, g) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \sum_j \sum_{t'} X_{jt't}^{gm} + \sum_{m'} XT_{i(t-K_{m'm})t}^{gm'm} - DC_{gi(t-1)}^m \\ &= \sum_j \sum_{t'} X_{ijt'}^{gm} + \sum_{m'} XT_{it(t+K_{mm'})}^{gmm'} - DC_{git}^m + DE_{git}^m \quad (i \in VW, W; \forall m, t, g). \end{aligned}$$

Il primo vincolo si applica ai nodi di origine pura (U), di origine e transito (UV) e di transito puro (V). Esso stabilisce che la somma dei flussi in ingresso (le merci in arrivo da altri nodi, le merci trasferite da altre modalità di trasporto m' , le scorte mantenute dal periodo precedente $t-1$ e l'offerta esogena immessa nel sistema SE) deve eguagliare i flussi in uscita (le merci spedite verso altri nodi, quelle trasferite verso altre modalità e le scorte stoccate per il periodo successivo $t+1$).

Il secondo vincolo si applica invece ai nodi di destinazione (W) e di destinazione con ruolo di transito (VW). Al posto dell'offerta esogena viene integrata la gestione della domanda esogena (DE) che deve essere soddisfatta al nodo, sottratta al rinvio della domanda insoddisfatta (DC) tra i vari periodi di tempo.

- **Offerta e domanda esogene per le merci.** Definiscono l'offerta e la domanda esogene di materie prime.

$$SE_{git} = \sum_m SE_{git}^m \quad (i \in U, UV);$$

$$DE_{git} = \sum_m DE_{git}^m \quad (i \in VW, W).$$

- **Vincoli di finestra temporale per le merci nei nodi di destinazione:**

$$DC_{git}^m = 0 \quad \forall t < EDT_{gi}, \forall m \in M, \forall g \in G, \forall i \in N.$$

Questi vincoli stabiliscono che ciascuna merce g non può essere consegnata al nodo di destinazione i prima del periodo di tempo di consegna più vicino o minimo (EDT_{gi}). Di conseguenza, la variabile che gestisce la domanda da soddisfare o rinviare per quella modalità (DC_{git}^m) viene forzata a zero per tutti i periodi di tempo precedenti a tale soglia.

- **Conservazione del flusso veicolare:** il flusso veicolare che entra nel nodo i al periodo di tempo t deve essere uguale al flusso veicolare che esce da questo nodo.

$$YE_{it}^m + \sum_j \sum_{t'} Y_{jt'it}^m + YC_{i(t-1)}^m = \sum_j \sum_{t'} Y_{itjt'}^m + YC_{it}^m \quad \forall m, i, t \in M \times N \times T.$$

- **Vincoli di capacità veicolari:** il flusso veicolare della modalità m su un arco $((i, t), (j, t'))$ deve rispettare la capacità di quell'arco in quel periodo di tempo.

$$Y_{itjt'}^m \leq ACA_{itjt'}^m \quad \forall m, i, t, j, t'.$$

- **Vincoli di collegamento:** rappresentano la relazione tra le variabili di flusso veicolare e le variabili di flusso delle merci. Determinano il numero minimo di veicoli necessari per spostare la merce assegnata su un arco per ciascun tipo di modalità.

$$YCA^m \cdot Y_{ijt'}^m - \sum_g X_{ijt'}^{gm} \geq 0 \quad \forall m, i, t, j, t'.$$

Infine, la funzione obiettivo è di particolare interesse. Si colloca come funzione mono-obiettivo ottenuta per scalarizzazione, infatti sebbene il problema incorpori sia considerazioni economiche che umanitarie, queste vengono ricondotte a un'unica funzione di costo lineare. Il *trade-off* tra efficienza economica ed efficacia operativa viene affrontato dal modello introducendo una funzione di penalità lineare per la domanda non soddisfatta e per lo stoccaggio delle scorte di offerta invendute o accumulate. Assegnando un valore matematicamente dominante a tale penalità, la funzione obiettivo spinge il sistema a privilegiare l'efficacia del soccorso rispetto al risparmio economico. Vediamola nel dettaglio:

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{i,j,t,t',m} CVR_{ijt'}^m \cdot Y_{ijt'}^m \\ & + \sum_{i,j,t,t',g,m} CGR_{ijt'}^{gm} \cdot X_{ijt'}^{gm} \\ & + \sum_{i \in U, UV, V} \sum_{t,g} CSC_{git} \cdot \left(\sum_m SC_{git}^m \right) + \sum_{i \in VW, W} \sum_{t,g} CDC_{git} \cdot \left(\sum_m DC_{git}^m \right) \\ & + \sum_{i \in UV, V} \sum_{t,g,m,m'} CGT_{it(t+K_{mm'})}^{gmm'} \cdot XT_{it(t+K_{mm'})}^{gmm'}. \end{aligned}$$

Le quattro componenti rappresentano rispettivamente i costi del flusso veicolare, i costi del flusso delle merci, la funzione di penalità sopra citata e i costi di trasferimento lungo tutti gli intervalli temporali. Gli autori propongono in seguito algoritmi euristici per la risoluzione.

Un esempio di modello con funzione obiettivo *Multi-Objective*

Il modello analizzato finora e quelli che verranno analizzati a seguire rientrano nella categoria dell'ottimizzazione *Single-Objective*, in cui le diverse metriche di performance vengono scalarizzate all'interno di un'unica funzione di costo globale. Tuttavia, nella gestione delle emergenze, i decisori devono spesso bilanciare obiettivi in conflitto tra loro, la cui riduzione a un'unica grandezza rischia di sovrasemplificare la realtà operativa e le priorità etiche.

Un contributo fondamentale per il superamento di questo limite è il modello deterministico fornito da Ferrer *et al.* (2018) [2]. È classificabile come un problema di *Vehicle Routing* per gli aiuti umanitari. Dal punto di vista della collocazione temporale, la formulazione opera nella fase *post-disaster* strettamente operativa, in particolare nella fase del *Last Mile Distribution*, il trasferimento dagli hub locali ai punti di distribuzione finale. Il modello non verrà esplicitato nella sua interezza, ma la sua analisi si concentrerà sulla funzione obiettivo per evidenziarne le differenze rispetto alle altre formulazioni trattate.

Il modello formula il problema di distribuzione tramite l'introduzione di tre funzioni obiettivo distinte, di cui omettiamo la definizione rigorosa per non appesantire la notazione:

1. **Efficienza economica** (f_1): Minimizzazione dei costi operativi legati all'impiego della flotta e dei trasporti.
2. **Efficacia operativa** (f_2): Minimizzazione dei tempi di consegna e dei ritardi.
3. **Equità** (f_3): Minimizzazione delle disparità nella distribuzione degli aiuti. Questo è l'elemento di maggiore innovazione del modello, in quanto penalizza algebricamente le soluzioni che favoriscono la copertura totale di alcune aree geografiche solo perché logisticamente o economicamente più accessibili, a discapito di aree remote.

Il problema di ottimizzazione multi-obiettivo si configura come la minimizzazione simultanea di un vettore che ha come componenti le tre funzioni:

$$\min_{x \in \mathcal{X}} \mathbf{F}(x) = [f_1(x), f_2(x), f_3(x)]^T,$$

dove $\mathcal{X}$ rappresenta l'insieme delle soluzioni ammissibili definito dai vincoli logistici del *routing* (capacità dei veicoli, bilancio dei nodi, limiti orari).

A differenza dei modelli *Single-Objective*, in problemi reali con obiettivi conflittuali non esiste un'unica soluzione ottima in grado di minimizzare simultaneamente tutte le componenti di $\mathbf{F}(x)$. La risoluzione di questo framework si basa pertanto sul concetto di Dominanza Paretiana.

Definizione 1.1. Una soluzione ammissibile $x^* \in \mathcal{X}$ è definita **ottimo di Pareto** (o non dominata) se non esiste alcun'altra soluzione $x \in \mathcal{X}$ tale che:

$$f_i(x) \leq f_i(x^*) \quad \forall i \in \{1, 2, 3\}, \quad \text{ed} \quad \exists j \in \{1, 2, 3\} : \quad f_j(x) < f_j(x^*).$$

L'insieme di tutte le soluzioni ottime di Pareto P^* , se mappato nello spazio multidimensionale degli obiettivi, genera la *Frontiera di Pareto*

$$PF = \{\mathbf{F}(x^*) \in \mathbb{R}^3 \mid x^* \in P^*\}.$$

Questo approccio metodologico trasforma il modello matematico da strumento decisionale che impone una soluzione ottima univoca in uno strumento di supporto alle decisioni. Le agenzie umanitarie disporranno di un ventaglio di opzioni efficienti permettendo loro di gestire con più elasticità il *trade-off* logistico; sarà ad esempio possibile calcolare l'esatto incremento percentuale dei costi di trasporto necessario per garantire una distribuzione equa degli aiuti vitali.

1.1.2 Modelli stocastici

La programmazione lineare stocastica è un framework di ottimizzazione avanzato utilizzato per supportare processi decisionali in condizioni di incertezza. Tra le varie formulazioni presenti in letteratura, una delle più rilevanti è il modello a due stadi con ricorso (*two-stage recourse model*). In questo approccio, il processo decisionale è suddiviso temporalmente in due fasi distinte rispetto al manifestarsi dell'incertezza, la quale viene modellata formalmente attraverso uno spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Assumendo che l'insieme degli eventi elementari Ω sia finito, è possibile configurare l'incertezza mediante un insieme discreto di scenari generici $\omega_k \in \Omega$, indicizzati con $k \in K = \{1, \dots, |\Omega|\}$. Ciascuno scenario si realizza con una probabilità nota:

$$p_k = \mathbb{P}(\{\omega_k\}) > 0,$$

tale che

$$\sum_{k \in K} p_k = 1.$$

Il framework matematico si struttura come segue:

1. **Primo Stadio (*Here-and-Now*):** Descrive le decisioni strategiche preventive, rappresentate dal vettore di variabili x . Tali decisioni devono essere assunte prima che lo scenario reale si manifesti e sono vincolate da un poliedro convesso d'ammissibilità $X = \{Ax = b\}$.
2. **Secondo Stadio (*Wait-and-See*):** Modella le decisioni correttive o di ricorso, descritte dal vettore y_k , che vengono intraprese per ogni scenario $k \in K$ solo dopo che l'incertezza si è palesata.

La dipendenza funzionale del secondo stadio dal primo è governata da un vincolo di accoppiamento stocastico. Definita la variabile aleatoria discreta ξ sul supporto K , l'effetto dell'incertezza si traduce, per ogni scenario k , nel vettore dei parametri $\xi_k = (q_k, T_k, W_k, h_k)$. La funzione di valore ottimo del secondo stadio, indicata con $Q(x, \xi_k)$, è

definita dalla soluzione del seguente problema di ottimizzazione condizionato alla scelta del vettore di primo stadio x :

$$Q(x, \xi_k) = \min_{y_k} \{q_k^T y_k \mid W_k y_k = h_k - T_k x\}, \quad (1.1)$$

dove W_k rappresenta la matrice di ricorso e T_k rappresenta la matrice di trasferimento. L'obiettivo del problema SLP (*Stochastic Linear Programming*) complessivo consiste nel minimizzare la somma dei costi certi di primo stadio e del valore atteso della funzione di ricorso del secondo stadio. Sfruttando la natura discreta della variabile aleatoria ξ , l'operatore di valore atteso $\mathbb{E}_\xi[\cdot]$ si può esprimere come combinazione convessa delle funzioni di costo dei singoli scenari, pesate per le rispettive probabilità p_k . Il problema complessivo assume pertanto la forma compatta:

$$\min_{x \in X} c^T x + \mathbb{E}_\xi[Q(x, \xi)] = \min_{x \in X} \{c^T x + \sum_{k \in K} p_k Q(x, \xi_k)\}. \quad (1.2)$$

In questa categoria si colloca il lavoro di Balcik & Beamon (2008) [3]. Gli autori sviluppano un modello SMILP (*Stochastic Mixed Integer Linear Programming*) con l'introduzione di scenari di disastro multipli. Integrano l'incertezza strutturando scenari discreti che variano per localizzazione del disastro, intensità e trasporti utilizzabili. Dal punto di vista temporale, si colloca invece nella fase pre-disastro, infatti viene definito come un *Maximal Covering Location Problem* (MCLP), evoluzione del *Facility Location Problem* (FLP). Vediamo in breve la struttura del modello.

Parametri in input:

- J : insieme dei siti potenziali in cui è possibile aprire un DC.
- K : insieme delle tipologie di beni di soccorso.
- S : insieme dei possibili scenari.
- d_s^k : domanda prevista per l'articolo di tipo k nello scenario s .
- v_k : spazio richiesto per lo stoccaggio di una singola unità del bene k .
- V_j : capacità volumetrica totale di stoccaggio disponibile nel centro j .
- g_j^k : costo di acquisto e di conservazione del bene k nel magazzino j .
- F_j : costo di apertura del DC j .

Le variabili decisionali sono tre:

- $x_j \in \{0, 1\}$: variabile binaria di primo stadio (*pre-positioning*) sull'apertura o meno del centro di distribuzione (DC) $j \in J$.
- $s_j^k \in \mathbb{R}^+$: variabile continua che indica la quantità del bene di soccorso $k \in K$ acquistata e stoccata nel centro di distribuzione j .
- $f_{js}^k \in [0, 1]$: variabile continua che indica la percentuale della domanda del bene k soddisfatta dal centro di distribuzione j nello scenario $s \in S$.

Analizziamo ora i vincoli:

- **Vincolo di legame logico tra le variabili continue:** $f_{js}^k d_s^k \leq s_j^k \quad \forall j \in J, \forall k \in K, \forall s \in S$.

Questo vincolo garantisce che il livello delle scorte in un centro di distribuzione non sia inferiore alla quantità massima di domanda che il centro di distribuzione dovrà affrontare in un singolo scenario di disastro.

- **Vincolo di Capacità:** $\sum_{k \in K} v_k \cdot s_j^k \leq V_j \cdot x_j \quad \forall j \in J$.

Lo spazio totale occupato da tutte le tipologie di scorte presenti nel magazzino j non può superare la capacità volumetrica totale di stoccaggio disponibile nel centro j se esso viene aperto ($x_j = 1$).

- **Vincoli di Budget:**

$$\sum_{j \in J} F_j \cdot x_j + \sum_{j \in J} \sum_{k \in K} g_j^k \cdot s_j^k \leq B_0 \quad ;$$

$$\sum_{k \in K} \sum_{j \in J} d_s^k c_{js}^k f_{js}^k \leq B_1 \quad \forall s \in S.$$

Il primo vincolo richiede che le spese pre-disastro relative alla creazione di un centro di distribuzione e al mantenimento dell'inventario non superino il budget pre-disastro B_0 , e il secondo vincolo garantisce che i costi di trasporto sostenuti tra i centri di distribuzione e ciascuno scenario di disastro siano inferiori al budget post-disastro previsto B_1 . La sostanziale novità di questi vincoli risiede nel fatto che il budget cessa di essere una variabile da minimizzare e diventa un parametro rigido, eliminando di fatto i costi dalla funzione obiettivo. Questo spinge il modello a saturare la risorsa finanziaria disponibile al fine di ottimizzare esclusivamente il livello di servizio e la tempestività del soccorso verso le popolazioni vulnerabili. La funzione obiettivo finale del modello

$$\max \sum_{s \in S} p_s \sum_{k \in K} \sum_{l_k} \sum_{j \in J_s(l_k)} d_s^k f_{js}^k w_k \alpha_k^{l_k}$$

opera come un operatore lineare di massimizzazione del valore atteso, rappresentato dalla somma in s , della copertura umanitaria: il fine ultimo da perseguire è pertanto l'efficacia. I parametri w_k sono i pesi di criticità per il tipo di articolo k , sono tali che

$w_k \geq 0$ e $\sum_k w_k = 1$, e hanno la funzione di imporre un ordine di priorità logistico-sanitaria. Il prodotto $d_s^k f_{js}^k$ rappresenta la quantità assoluta di domanda del bene k effettivamente soddisfatta dal centro j , e va logicamente massimizzato. L'elemento più rilevante risiede nel fattore $\alpha_k^{l_k}$: la funzione obiettivo modella la tempestività del soccorso attraverso una struttura a gradini basata su un numero intero $L_k \geq 1$ di fasce temporali stabilite per ciascun bene k . L'indice corrente $l_k \in \{1, \dots, L_k\}$ seleziona lo specifico livello di servizio, mentre l'insieme spazio-temporale $J_s(l_k)$ definisce una partizione dei centri di distribuzione candidati j i cui tempi di risposta t_{sjk} ricadono in intervalli contigui e mutuamente disgiunti. Ciascun livello è associato a un coefficiente di attenuazione $\alpha_k^{l_k}$, governato da una successione strettamente decrescente ($\alpha_k^1 = 1 > \alpha_k^2 > \dots > \alpha_k^{L_k} \geq 0$) che agisce come operatore di penalizzazione del ritardo. Quando i tempi di transito aumentano, il centro j viene mappato in un livello l_k più elevato, attivando un moltiplicatore α frazionario (minore di 1) che riduce l'apporto finale della frazione di domanda soddisfatta f_{sjk} . Per massimizzare il valore atteso complessivo, l'algoritmo è algebricamente incentivato a localizzare i magazzini in nodi capaci di garantire tempi minimi, forzando il sistema a operare nei primi livelli di servizio dove l'utilità del soccorso è massima e vicina all'unità.

Un altro approccio storicamente rilevante che si avvale di un modello a due stadi con ricorso è l'articolo di Barbarosogu & Arda (2004) [4]. Questo articolo non verrà presentato per esteso ma sarà preso in considerazione un solo vincolo, che riassume gli elementi nuovi e di interesse per quest'elaborato. A differenza di [3], il modello si presenta come un problema di flusso su rete, considerando un grafo $G = (V, A)$, che si focalizza quindi più sul trasporto che sulla localizzazione. Difatti, in questo caso le variabili di primo stadio determinano, oltre che lo stoccaggio dei beni, la capacità di trasporto (es. quanti camion affittare/preparare) prima che il disastro colpisca. Le variabili di secondo stadio riguardano l'instradamento e i flussi di distribuzione sulla rete. La differenza sostanziale risiede nel trattamento dell'incertezza: in [3], è prevalentemente sulla domanda (d_s^k) e sulla posizione geografica dell'epicentro del disastro; in [4], il modello risente dell'incertezza dal punto di vista topologico, infatti c'è una forte aleatorietà sulla sopravvivenza degli archi della rete e sulle loro capacità. Questo si evince in particolare nei vincoli (stocastici) di conservazione del flusso, dove per ogni scenario s , il modello deve rispettare la conservazione dei beni nei nodi. Tuttavia, la capacità degli archi (strade/ponti) è una variabile casuale che dipende dallo scenario:

$$x_{ij}^s \leq \text{Capacità}_{ij}^s \quad \forall (i, j) \in A$$

dove x_{ij}^s rappresenta il flusso di beni lungo l'arco (i, j) nello scenario s . Se la strada tra i e j è compromessa nello scenario s , la capacità diventa zero (o molto ridotta).

1.2 La classificazione temporale dei modelli: *pre-disaster e post-disaster*

Una suddivisione imprescindibile per le differenti formulazioni del problema delle *supply chains* umanitarie è legata alla tempistica con cui viene organizzata la distribuzione dei beni. Lo spartiacque temporale ed operativo è scandito dal verificarsi del disastro stesso: nella letteratura di riferimento, la distinzione più netta separa gli interventi di *pre-disaster* da quelli di *post-disaster*.

1.2.1 Modelli di natura strategica (*pre-disaster*)

I modelli di *pre-disaster* puntano sulla pianificazione preventiva dell'efficienza logistica, perseguendo la *preparedness* (reazione alle catastrofi). All'interno della programmazione stocastica a due stadi, questa fase coincide matematicamente con il primo stadio, in cui le decisioni devono essere prese in condizioni di incertezza prima che lo scenario si realizzi. Le variabili decisionali si dividono principalmente in:

- **Decisioni di localizzazione:** variabili binarie che determinano l'apertura o meno di un'infrastruttura;
- **Decisioni di inventario:** variabili continue o intere che definiscono quantitativamente il livello di beni da pre-posizionare nei magazzini.

In questo contesto, il contributo di Acimovic & Goentzel (2016) [5] rappresenta un passaggio fondamentale nella letteratura, ovvero quello dalla modellizzazione puramente prescrittiva a quella valutativa. I modelli stocastici classici formulano un unico grande problema in cui le capacità pre-posizionate sono incognite da determinare al fine di minimizzare il costo globale atteso. Al contrario, nel valutare il sistema corrente, [5] assumono la configurazione attuale della rete globale e le scorte già allocate dalle agenzie umanitarie non come variabili decisionali, bensì come parametri di input.

Di seguito viene definito l'elenco dei parametri del problema:

- $I \ni i$: Insieme di tutti i depositi e magazzini logistici reali.
- $K \ni k$: Insieme dei possibili scenari di disastro stocastici.

- $J \ni j$: Insieme delle possibili localizzazioni geografiche dei disastri.
- $M \ni m$: Insieme dei tipi di disastro.
- $R \ni r$: Insieme delle modalità di trasporto disponibili.
- c_{ijr} : Costo per trasportare una singola unità di bene dal magazzino i alla destinazione j tramite la modalità r .
- τ_{ijr} : Tempo necessario per spedire una singola unità di bene dal magazzino i alla destinazione j tramite la modalità r .
- p^k : Probabilità di occorrenza dello scenario di disastro k ($\sum_k p^k = 1$).
- S_{jmt} : Capacità di risposta locale al disastro nella localizzazione j , per il tipo m , al periodo temporale t .
- $\chi \in \mathbb{N}$: Inventario totale iniziale disponibile nell'intero sistema.
- TAP^k : Popolazione totale colpita dallo scenario di disastro k (*Total Affected Population*).
- β_{jmt} : Unità di bene richieste per singola persona nella localizzazione j , al tempo t , per il tipo di disastro m .
- j^k : Localizzazione specifica del disastro avvenuto nello scenario k .
- $d^k \equiv \max(TAP^k \beta_{j^k, m, t} - S_{j^k, m, t}, 0)$: Domanda netta ed effettiva di beni per lo scenario di disastro k .
- X_i : Quantità di stock iniziale pre-posizionata nel magazzino i (elemento del vettore $\mathbf{X}$, trattato come parametro di input fisso nella valutazione della rete attuale).

Per ogni scenario stocastico $k \in K$ è formulato un distinto problema di ottimizzazione per i flussi di trasporto dal magazzino ai beneficiari. Questo modello definisce come variabili decisionali le quantità y_{ir}^k da inviare da ciascun nodo reale i allo scenario k tramite il mezzo r .

Il valore ottimo della funzione obiettivo, che minimizza il tempo atteso di risposta complessivo ponderato per la probabilità degli scenari, è espresso da:

$$V(\mathbf{X}) = \min_y \sum_{k \in K} p^k \sum_{i \in I, r \in R} \tau_{i, j^k, r} y_{ir}^k.$$

Il problema è soggetto ai seguenti vincoli logici e fisici per ciascuno scenario:

- **Soddisfacimento della domanda:** garantisce che la domanda effettiva per lo scenario sia interamente coperta dai flussi in uscita dai magazzini della rete.

$$\sum_{i \in I, r \in R} y_{ir}^k = d^k \quad \forall k \in K.$$

- **Capacità dei magazzini:** impone che il flusso totale spedito da un singolo deposito non superi le scorte fisicamente pre-posizionate in esso.

$$\sum_{r \in R} y_{ir}^k \leq X_i \quad \forall i \in I, \forall k \in K.$$

- **Non negatività dei flussi:**

$$y_{ir}^k \in \mathbb{R}^+ \quad \forall i \in I, \forall k \in K, \forall r \in R.$$

Il valore ottimo $V(\mathbf{X})$ di questa formulazione diviene strumento per il calcolo di metriche analitiche rigorose.

Tuttavia, per stabilire un valore di riferimento ideale, il modello viene esteso trasformando il vettore delle scorte $\mathbf{X}$ da parametro a variabile di decisione. Introducendo la costante χ per indicare il tetto massimo di inventario totale disponibile a livello globale, il pre-posizionamento ottimo si ottiene risolvendo il seguente problema di ottimizzazione congiunta:

$$V^{OPT}(\chi) = \min_{\mathbf{X}, \mathbf{y}} \{V(\mathbf{X}) : \sum_{i \in I} X_i = \chi, \quad X_i \in \mathbb{R}^+ \quad \forall i \in I\}.$$

L'efficacia della rete è quindi successivamente misurata tramite un set di indicatori di *humanitarian response capacity*:

- **Metriche di copertura e servizio:**

- **Media pesata della domanda:** $\mu \equiv \sum_k p^k d^k$.
- **Domanda media soddisfatta:** $\mu' \equiv \sum_k p^k \min(d^k, \chi)$.
- **Frazione di domanda servita:** $\gamma \equiv \mu' / \mu$.
- **Frazione pesata di disastri completamente serviti:** $\delta \equiv \sum_{k: d^k \leq \chi} p^k$.

- **Metriche di efficienza e bilanciamento:**

- **Metrica di bilancio:** $\Delta \equiv V(\mathbf{X}) / V^{OPT}(\chi)$, che confronta il costo attuale con quello teorico ottimo.

- Costo/tempo medio per unità consegnata: $\phi \equiv V(\mathbf{X})/\mu'$.

Gli autori effettuano poi un'analisi sull'impatto delle variazioni parametriche tramite la dualità. In seguito per ogni scenario k , il modello estrae la variabile duale π_i^k associata al vincolo di capacità del deposito i , ovvero: $\sum_r y_{ir}^k \leq X_i \quad \forall i \in I, \forall k \in K$. Tale valore rappresenta il *prezzo ombra* (o valore marginale) delle scorte pre-posizionate: esso quantifica la variazione della funzione obiettivo che si otterrebbe potendo disporre di un'unità aggiuntiva di merce nel magazzino i durante lo scenario k . Questa metrica π_i permette di identificare in quale magazzino i un incremento unitario dello stock X_i produrrebbe il maggiore beneficio logistico atteso a livello globale.

Il ruolo di questo modello è legato al *pre-disaster* a causa del suo fine applicativo, cioè l'analisi marginale. Permettendo di calcolare la variazione della metrica globale a fronte di una perturbazione delle scorte, il modello valuta l'impatto atteso di una modifica prima che l'evento si verifichi. L'ottimizzazione matematica degli scenari futuri diventa così un riferimento attraverso cui le agenzie possono ripartire strategicamente i fondi di *preparedness*.

1.2.2 Modello PP-HSD: Integrazione Pre e Post-Disastro

In questa sezione verrà analizzato l'articolo del 2018 di Noham & Tzur [6]. È stato scelto per il suo contributo nello sviluppo di un modello, denominato PP-HSD (*Pre and Post-disaster Humanitarian Supply-chain Design*), che incorpora attivamente le decisioni reali prese dopo un disastro direttamente nella fase di pianificazione preventiva. Gli autori sottolineano che i modelli tradizionali assumono un'ottimizzazione globale che spesso risulta inapplicabile nella realtà, in quanto ignorano il comportamento effettivo della popolazione e dei soccorritori. Ignorare queste dinamiche pratiche (le decisioni post-disastro) in fase di pianificazione porta a soluzioni inefficaci e complessivamente inferiori. Incorporando questi comportamenti sotto forma di “vincoli umanitari”, il modello migliora significativamente le performance dell'intera catena di approvvigionamento. Le decisioni prese prima dell'evento, come l'apertura dei magazzini, influenzano irrimediabilmente l'efficienza della risposta successiva.

Un aspetto importante da sottolineare è che il problema di [6] si configura come un problema di flusso su rete a due livelli. Dai magazzini principali, indicizzati con $i \in I$, inizia il flusso di beni, che arrivano successivamente negli LDC (*Local Distribution Centers*), indicizzati con $j \in J$, e infine ai punti di domanda $k \in K$.

Anche questo modello viene formulato con un approccio stocastico, come si evince dalla funzione obiettivo che viene ponderata per la probabilità di accadimento di ogni scenario di disastro $s \in S$. Elenchiamo gli altri parametri del modello:

- P_s : probabilità di avvenimento dello scenario $s \in S$.
- d_k^s : domanda al punto k nello scenario s .
- $\delta \geq 1$: rapporto massimo tra le proporzioni di domanda soddisfatta in tutti i punti di domanda (il divario del livello di servizio).
- L_{jk} : distanza (o tempo di percorrenza) tra LCD j e punto di domanda k .
- M : coefficiente di tipo *Big-M*, impostabile al valore $\max L_{jk}$.
- NI e NJ^s : rispettivamente il numero massimo di magazzini e LCD da poter aprire.
- L'_{ij} : la distanza o tempo di percorrenza da i a j .
- C_j : capacità dell'LCD j .

Le variabili decisionali sono di 7 tipi, di cui 4 binarie e 3 continue:

- U_i : uguale a 1 se il magazzino i viene aperto, 0 altrimenti.
- T_{jk}^s : pari a 1 se il punto di domanda k è assegnato all'LDC j nello scenario s , 0 altrimenti.
- $\hat{T}_{ij}^s$: pari a 1 se l'LDC j è assegnato al magazzino i nello scenario s .
- Y_h^s : pari a 1 se l'LDC j viene aperto nello scenario s , 0 altrimenti.
- X_k^s : numero di unità assegnate al punto di domanda k nello scenario s .
- x_{jk}^s : numero di unità allocate dall'LCD j al punto di domanda k nello scenario s .
- RT_{jk}^s : tempo di risposta totale per raggiungere il punto di domanda k , quando assegnato all'LDC j nello scenario s .

L'obiettivo del problema è fornire la maggiore quantità possibile di scorte nel minor tempo possibile. Ad essere massimizzato è quindi il rapporto tra le unità inviate e il tempo di risposta totale, che rappresenta l'efficacia attesa della distribuzione. La funzione obiettivo è la seguente:

$$\max \sum_{s \in S} P^s \sum_{j \in J} \sum_{k \in K} \frac{x_{jk}^s}{RT_{jk}^s}.$$

Notiamo però che essa non è lineare, in quanto sia x_{jk}^s che RT_{jk}^s sono variabili decisionali del modello.

Il legame tra Pre e Post-disastro viene attuato tramite i vincoli umanitari, che agiscono come filtri operativi. Il primo è il vincolo di Equità nelle Assegnazioni (E-AL), che impedisce al sistema di massimizzare l'efficienza globale (l'obiettivo principale) a scapito della giustizia distributiva. Viene rappresentato da due equazioni:

$$\begin{aligned} \frac{X_k^s}{d_k^s} &\leq \frac{X_m^s}{d_m^s} \cdot \delta \quad \forall k, m \neq k \in K, \forall s \in S; \\ \frac{X_k^s}{d_k^s} &\leq \frac{X_m^s}{d_m^s} + (2 - T_{jk}^s - T_{jm}^s) \quad \forall k, m, k \neq m \in K, \forall s \in S, \forall j \in J. \end{aligned}$$

Questo vincolo forza il modello a mantenere il divario di servizio entro la soglia δ , obbligando la fase di pianificazione (Pre) a prevedere una rete capace di servire anche le zone meno accessibili.

Parallelamente, il vincolo di Preferenza Operativa (P-AS) modella la prassi empirica dei soccorritori:

$$L_{jk}T_{jk}^s \leq L_{hk}Y_h^s + M(1 - Y_h^s) \quad \forall k \in K, \forall j, h \neq j \in J, \forall s \in S.$$

Tale vincolo impone l'assegnazione al centro di distribuzione più vicino, rendendo il design della rete dipendente dalle regole di comportamento che verranno adottate nella fase di risposta (Post). Si rimanda la spiegazione sulla tecnica di attivazione *Big-M* alla sezione 1.2.3.

In definitiva, nel modello [6], la funzione obiettivo definisce il target ideale, ma sono i vincoli umanitari a definire la realizzabilità operativa. Infatti senza questi vincoli, il modello sceglierebbe una configurazione strategica basata esclusivamente sulla minimizzazione dei costi o del tempo di risposta globale. Con i vincoli, il “pre-disastr” è limitato al sottoinsieme di soluzioni che sono effettivamente implementabili e accettabili durante l'emergenza (post-disastro), rendendo il design della rete intrinsecamente dipendente dalle necessità operative future. Si presuppone infine che il criterio di efficienza (costo) sia espresso attraverso i vincoli di limitazione del numero di strutture aperte:

$$\sum_{j \in J} Y_j^s \leq NJ^s \quad \forall s \in S; \quad \sum_{i \in I} U_i \leq NI.$$

La rigidità strutturale è garantita dai vincoli di connettività, capacità e collegamento logico tra le variabili:

- $\hat{T}_{ij}^s \leq U_i$: Il vincolo di attivazione LDC-Magazzino sancisce che nessun centro di distribuzione può operare se il magazzino a monte non è stato strategicamente aperto nella fase di Pre-disastro.

- $RT_{jk}^s = \sum_{i \in I} (\hat{T}_{ij}^s \cdot L'_{ij}) + L_{jk}$: Il tempo di risposta sintetizza il costo logistico totale, legando direttamente le scelte tattiche, ovvero l'assegnazione degli LDC, alla topologia di rete definita preventivamente.
- $T_{jk}^s \leq Y_j^s$: Questo vincolo di attivazione Punto-LDC garantisce che un punto di domanda k possa ricevere beni da un LDC j nello scenario s solo se l'LDC j è stato aperto ($Y_j^s = 1$).
- $\sum_{j \in J} T_{jk}^s = 1 \quad \forall k, s$: stabilisce che esattamente un LDC servirà ciascun punto di domanda k .
- $\sum_{i \in I} \hat{T}_{ij}^s = 1 \quad \forall j, s$: assicura che ogni LDC aperto j sia collegato a esattamente un magazzino principale.
- $x_{jk}^s \leq C_j \cdot T_{jk}^s \quad \forall k, j, s$: Un LDC può inviare prodotti ai punti di domanda solo se serve tali punti di domanda.
- $\sum_{k \in K} x_{jk}^s \leq C_j \quad \forall j, s$: la quantità totale inviata da un LDC a tutti i punti di domanda non supera la sua capacità.
- $\sum_{j \in J} x_{jk}^s = X_k^s \quad \forall k, s$: definisce la quantità ricevuta da un punto di domanda.
- $X_k^s \leq d_k^s \quad \forall k, s$: verifica che i punti di domanda non ricevano più unità rispetto alla loro domanda.

1.2.3 Modelli di Logistica Umanitaria Post-Disastro: *Scheduling* e Sincronizzazione

I modelli matematici di logistica umanitaria con natura puramente operativa agiscono nella fase immediatamente successiva al disastro (*post-disaster*), focalizzandosi sulla gestione dei flussi di soccorso quando le condizioni sono caratterizzate da estrema incertezza e scarsità di risorse. Nella programmazione stocastica a due stadi, questa fase coincide matematicamente con il secondo stadio. In questo contesto le variabili decisionali sono solitamente variabili di flusso (come visto nella sezione precedente) o variabili di *scheduling* (pianificazione) e sincronizzazione, per ottimizzare il coordinamento logistico e temporale dei veicoli. Prendendo come riferimento gli sviluppi recenti della letteratura, in particolare l'approccio proposto da Ramadhan *et al.* [7], assume una rilevanza critica la pianificazione temporale dei vettori per evitare colli di bottiglia o ritardi distributivi. L'articolo citato presenta un modello di ottimizzazione per la distribuzione di materiali logistici da un magazzino ai centri di accoglienza a seguito di inondazioni. Il modello

impiega tre modalità di trasporto: camion, drone e gommone. Il problema viene definito come “*Traveling Salesman Problem with Drone and Boat*” (TSP-DB), modellato utilizzando la MILP, e il cui obiettivo è ridurre al minimo il tempo di completamento delle operazioni. Verrà qui esposta solo la componente temporale e di sincronizzazione della formulazione, che rappresenta il principale oggetto innovativo e di interesse per la rassegna svolta in questo capitolo.

Il camion trasporta sia il drone che il gommone. I centri situati in aree non allagate possono essere serviti da camion e drone, mentre quelli situati in aree allagate sono raggiungibili tramite gommone e drone. Il drone può effettuare una sola consegna alla volta prima di fare ritorno al camion, mentre il gommone è in grado di eseguire più consegne in un unico viaggio. Per modellare la coordinazione temporale tra il veicolo principale (Camion, T) e i veicoli secondari (Droni, D , e Barche, B), definiamo T_i^v come l'istante temporale in cui il veicolo $v \in \{T, D, B\}$ opera al nodo i .

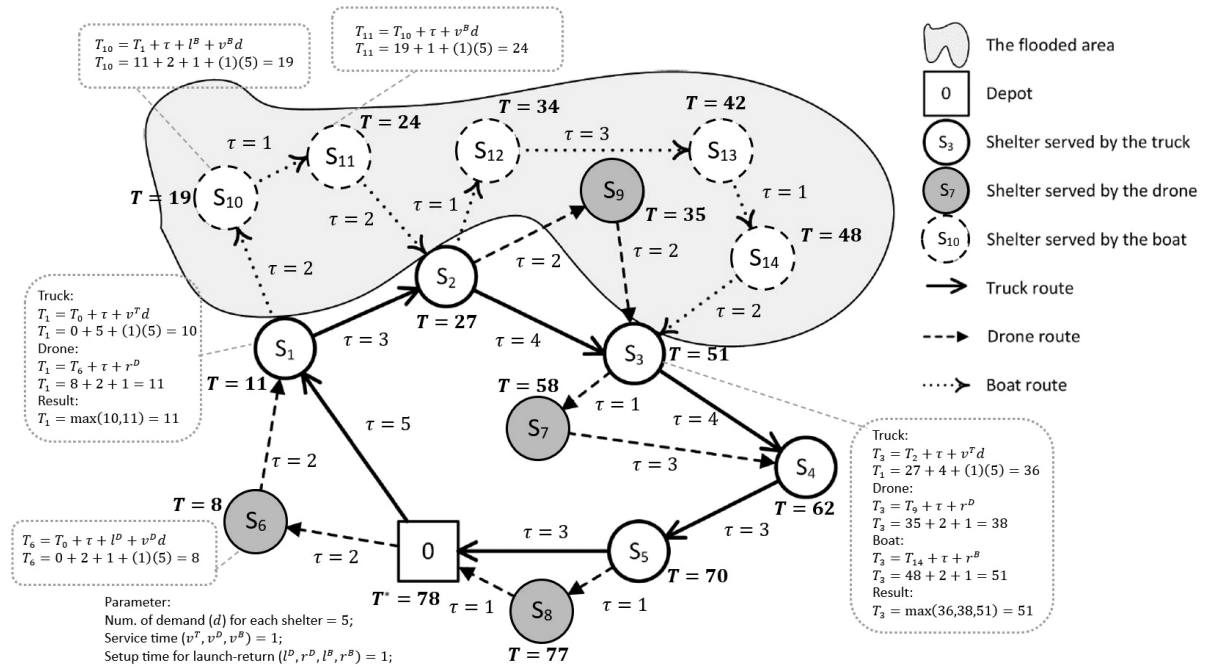


Figura 1.1: Un'illustrazione del modello TSP-DB [7].

Il problema considera inoltre un insieme di rifugi $\mathcal{S} = \{1, 2, \dots, n\}$ da rifornire, suddiviso in due tipologie: rifugi in aree asciutte ($\mathcal{S}^G \subseteq \mathcal{S}$) e rifugi in aree alluvionate ($\mathcal{S}^F = \mathcal{S} \setminus \mathcal{S}^G$). Un camion, che trasporta sia un drone che un gommone gonfiabile, parte dal deposito iniziale (indicizzato con 0) e vi ritorna al termine del servizio di tutti i rifugi (indicizzato con $n + 1$). L'insieme globale dei nodi della rete è definito come $\mathcal{N} = \{0, 1, \dots, n, n + 1\}$.

Per modellare la logica operativa e i punti di interazione dei diversi veicoli, vengono definiti i seguenti insiemi:

- $\mathcal{N}_0^G = \{0\} \cup \mathcal{S}^G$: insieme dei nodi da cui il camion può partire e il drone può essere lanciato.
- $\mathcal{N}_+^G = \mathcal{S}^G \cup \{n+1\}$: insieme dei nodi in cui il camion può dirigersi e il drone può rientrare.
- $\mathcal{N}_0^D = \mathcal{N} \setminus \{n+1\}$: nodi dai quali il drone può staccarsi dal camion (partenza del drone).
- $\mathcal{N}_+^D = \mathcal{N} \setminus \{0\}$: nodi verso cui il drone può dirigersi dopo aver completato la visita a un rifugio.
- $\mathcal{N}^L \subseteq \mathcal{N}$: insieme dei nodi designati per il lancio e il recupero del gommone.
- $\mathcal{Q} = \{1, 2, \dots, |\mathcal{S}^F|\}$: insieme dei viaggi disponibili per il gommone. Il modello vincola il numero massimo di viaggi alla cardinalità dei nodi alluvionati ($|\mathcal{S}^F|$); i viaggi non selezionati dal risolutore vengono considerati vuoti.
- $\mathcal{T}^D$: l'insieme delle tuple per il drone $\langle i, j, k \rangle \in \mathcal{T}^D, i \in \mathcal{N}_0^G, j \in \{\mathcal{S} : j \neq i\}, k \in \{\mathcal{N}_+^G : k \neq j, k \neq i\}$.

I vincoli temporali sono aggregati in tre macro-categorie logiche:

1. Continuità Temporale e Tempi di Servizio Questi vincoli garantiscono che l'arrivo a un nodo successivo sia coerente con il tempo di partenza, includendo il tempo di percorrenza τ_{ij}^v e un parametro aggregato σ_j^v che racchiude tutti i tempi operativi (setup, servizio, recupero).

$$\begin{aligned}
 T_j^T &\geq T_i^T + \tau_{ij}^T + \sigma_j^T - M(1 - X_{ij}) \quad \forall i \in \mathcal{N}_0^G, j \in \mathcal{N}_+^G, j \neq i; \\
 T_j^D &\geq T_i^D + \tau_{ij}^D + \sigma_j^D - M \left(1 - \sum_{k \in \mathcal{N}_+^G, \langle i, j, k \rangle \in \mathcal{T}^D} Y_{ijk} \right) \quad \forall i \in \mathcal{N}_0^D, j \in \mathcal{N}_+^D, j \neq i; \\
 T_j^B &\geq T_i^B + \tau_{ij}^B + \sigma_j^B - M \left(1 - \sum_{q \in \mathcal{Q}} Z_{ijq} \right) \quad \forall i, j \in \mathcal{N}^L \cup \mathcal{S}^F, j \neq i;
 \end{aligned}$$

dove X_{ij} , Y_{ijk} e Z_{ijq} indicano le variabili decisionali binarie di *routing* per le tre tipologie di mezzi. La struttura dei vincoli si basa principalmente su due basi:

- **Meccanismo di attivazione (Big-M):** Se il veicolo v non percorre la tratta tra il nodo i e il nodo j , la relativa variabile binaria di *routing* (X_{ij} , $\sum Y_{ijk}$ o

$\sum Z_{ijq}$) assume valore nullo. Di conseguenza, il termine della penale diventa pari a M , disattivando di fatto il vincolo poiché la disuguaglianza risulta banalmente soddisfatta per un valore di M sufficientemente grande. Al contrario, se la tratta viene effettivamente selezionata dal modello, la componente binaria assume valore pari a 1; il termine *Big-M* si annulla, rendendo il vincolo stringente.

- **Progressione del tempo e operazioni:** Quando il vincolo è attivo, esso impone che l'istante temporale di inizio servizio presso il nodo successivo (T_j^v) sia maggiore o uguale all'istante di arrivo al nodo precedente (T_i^v), a cui vanno sommati il tempo netto di viaggio sulla tratta (τ_{ij}^v) e il parametro di sosta aggregato (σ_j^v).

2. Sincronizzazione di Lancio: Un veicolo secondario non può iniziare la sua missione se il veicolo primario non è fisicamente presente al nodo di lancio. Di conseguenza, l'istante temporale in cui il mezzo secondario inizia la sua missione autonoma dal nodo i (T_i^D o T_i^B) non può in alcun modo precedere l'orario in cui il camion stesso raggiunge il medesimo nodo (T_i^T).

$$T_i^D \geq T_i^T - M \left(1 - \sum_{i \in \mathcal{I}, j \neq i} \sum_{k \in \mathcal{N}_+^G, \langle i, j, k \rangle \in \mathcal{T}^D} Y_{ijk} \right) \quad \forall i \in \mathcal{N}_0^G;$$

$$T_i^B \geq T_i^T - M \left(1 - \sum_{j \in S^F} \sum_{q \in \mathcal{Q}} Z_{ijq} \right) \quad \forall i \in \mathcal{N}^L.$$

Come nel set di vincoli 1, anche qui viene utilizzato il meccanismo di attivazione Big-M.

3. Sincronizzazione di Recupero: Il camion non può abbandonare il nodo di incontro designato finché il drone o la barca non hanno ultimato le consegne e fatto ritorno alla mothership.

$$T_k^T \geq T_k^D - M \left(1 - \sum_{i \in \mathcal{N}_0^G} \sum_{j \in \mathcal{I}} Y_{ijk} \right) \quad \forall k \in \mathcal{N}_+^G;$$

$$T_k^T \geq T_k^B - M \left(1 - \sum_{(i, j): \langle i, j, k \rangle \in \mathcal{T}^D} \sum_{q \in \mathcal{Q}} Z_{ijq} \right) \quad \forall k \in \mathcal{N}^L.$$

Autori	Metodologia	Fase Temporale	Problema Logistico	Funzione Obiettivo
Haghani & Oh	Deterministico	Post-disastro	Multi-commodity Network Flow (Flusso di rete multi-prodotto)	Single-objective: Minimizzazione dei costi di logistica, trasporto e penalità per ritardi/domanda non soddisfatta.
Ferrer <i>et al.</i>	Deterministico	Post-disastro	Vehicle Routing and Scheduling (<i>routing</i> dei veicoli e pianificazione)	Multi-objective: Compromesso tra minimizzazione dei tempi di arrivo (efficienza) ed equità nella distribuzione ai beneficiari.
Balcik & Beamon	Deterministico	Pre-disastro (Preparedness)	Facility Location & Inventory (Localizzazione delle strutture e gestione delle scorte)	Single-objective: Massimizzazione della copertura della domanda (Copertura massima) soggetti a vincoli di budget pre-disastro.
Barbarosogu & Arda	Stocastico (A due stadi)	Pre e Post-disastro (Integrato)	Resource Allocation & Transportation (Allocazione delle risorse e trasporto)	Single-objective: Minimizzazione del valore atteso dei costi di trasporto e dei costi di carenza di servizi nel secondo stadio.
Acimovic & Goentzel	Analitico / Stocastico	Pre-disastro	Inventory & Network Capacity (Gestione delle scorte e capacità della rete)	Single-objective: Minimizzazione dei tempi di risposta della catena di approvvigionamento attraverso il preposizionamento ottimale delle scorte.
Noham & Tzur	Stocastico (A due stadi)	Pre e Post-disastro (Integrato)	Facility Location, Inventory & Distribution (Localizzazione delle strutture, gestione delle scorte e distribuzione)	Single-objective: Minimizzazione dei costi di setup pre-disastro più i costi logistici e di penalità attesi post-disastro.
Ramadhan <i>et al.</i>	Stocastico	Post-disastro	Resource Allocation & Routing (Allocazione delle risorse e instradamento)	Multi-objective: Bilanciamento tra minimizzazione dei costi operativi, massimizzazione della tempestività e livello di servizio.

Tabella 1.1: Classificazione dei modelli di ottimizzazione analizzati nel Capitolo 1.

Capitolo 2

L'iniziativa ESUPS

2.1 Introduzione al caso di studio: motivazioni e esposizione del modello base

In questo capitolo verrà presentata l'iniziativa umanitaria ESUPS (*Emergency Supply Pre-positioning Strategy*) e un suo relativo caso di studio per la creazione di un modello di *pre-positioning/stock allocation* di forniture umanitarie, con scenari di disastro e obiettivo probabilistico/atteso.

L'obiettivo principale dell'iniziativa ESUPS è la definizione di strategie collettive per il posizionamento preventivo di forniture di soccorso in casi di emergenza. Infatti, ESUPS implementa sul campo i principi di [5]. Come visto in precedenza, è un articolo cardine sul pre-posizionamento coordinato dei beni umanitari, che può salvare vite umane e ridurre i costi globali di network in media del 15% rispetto alla gestione isolata. ESUPS promuove lo sviluppo di strategie coordinate attraverso sia l'analisi di metriche che misurano il tempo di risposta e i costi (come quelle fornite da [5]), sia di dati. Essi sono raccolti e mappati nella piattaforma STOCKHOLM (*STOCK of Humanitarian Organisations Logistics Mapping*), che fornisce raccomandazioni incrociando i dati storici sui disastri.

Si prende ora in esame il caso di studio didattico ufficiale di *Gurobi Optimization* dedicato a ESUPS [8]. Esso è definibile come una guida pratico-teorica alla modellazione matematica applicata alla logistica umanitaria. In particolare offre un modello base di LP, successivamente esteso a un SLP e fortemente legato al modello dell'articolo [5]. La guida propone anche l'implementazione in codice Python mediante Jupyter Notebook per risolvere il modello utilizzando il *solver* Gurobi e i dati reali forniti da STOCKHOLM. Quest'ultima parte non verrà inserita nell'elaborato, ma è stata utile per realizzare le modifiche di un codice Python (sempre fornito da Gurobi) esposte nel capitolo 3.4. Infine

i risultati ottenuti sono valutati tramite la metrica di bilancio Δ definita nella sezione 1.2.1. Per la costruzione del modello considereremo il contesto in cui ci si aspetta il verificarsi di un determinato disastro naturale e si desidera trasportare i rifornimenti dai magazzini, con scorte predefinite, il più rapidamente possibile verso il luogo della catastrofe. A tal proposito è doveroso fare alcune assunzioni:

- Le località dei magazzini sono date in input.
- I trasporti hanno capacità illimitata.
- Si assume che i disastri non avvengano contemporaneamente.
- I beni da portare sono indistinguibili tra loro.

I parametri dati in input sono:

- I : insieme dei magazzini.
- τ_i : tempo di trasporto per portare un'unità di beni dal magazzino $i \in I$ al luogo del disastro.
- b_i : capacità totale del magazzino $i \in I$.
- d : la domanda totale da soddisfare, ovvero la quantità di beni da portare al disastro.

La variabile decisionale y_i rappresenta la quantità di risorse spedita dal magazzino $i \in I$. A livello tassonomico, questo modello iniziale si colloca tra i deterministici e temporalmente nella fase *post-disaster*. La funzione obiettivo è

$$\min_y \sum_{i \in I} \tau_i y_i ,$$

che minimizza il tempo di trasporto dai magazzini alla destinazione.

Le variabili y_i sono soggette a tre vincoli:

- $\sum_{i \in I} y_i = d$: le scorte inviate devono soddisfare la domanda.
- $y_i \leq b_i \quad \forall i \in I$: non si può inviare più di quanto un magazzino abbia.
- $y_i \in \mathbb{R}^+ \quad \forall i \in I$: non si può inviare un flusso negativo di beni.

2.2 Estensione stocastica del modello

Per estendere il modello deterministico precedentemente trattato e catturare l'aleatorietà degli eventi calamitosi, è possibile applicare il framework SLP a due stadi definito nella Sezione 1.1.2. Il primo passo è introdurre un insieme K di possibili scenari di disastro da tenere in considerazione (terremoto, alluvione, tsunami ecc..). Ogni scenario k si verifica con una data probabilità p_k , tale che

$$\sum_{k \in K} p_k = 1$$

Le decisioni strategiche di primo stadio (*here-and-now*) vengono modellate introducendo il vettore delle variabili $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{|I|}$, che sostituisce i parametri statici b_i del modello deterministico, rappresentando il limite di scorte da pre-posizionare nel magazzino i . Di conseguenza, le decisioni operative di distribuzione e spedizione dei beni (variabili di secondo stadio y_i^k) risultano subordinate all'allocazione iniziale: non è possibile instradare da un nodo una quantità di merci superiore a quella stoccata nel primo stadio.

Mappando il modello ESUPS nella formulazione matematica generale introdotta nelle equazioni (1.1) e (1.2) della sezione 1.1.2, si ricavano le seguenti corrispondenze strutturali:

- **Poliedro di Primo Stadio X :** Le variabili x_i devono rispettare i vincoli di non negatività ($x_i \in \mathbb{R}^+$) e il budget globale di stoccaggio ($\sum_{i \in I} x_i = \chi$). Questo configura il sistema $\{Ax = b\}$ in cui $A \in \mathbb{R}^{1 \times |I|}$ è una matrice riga di elementi unitari e il termine noto b coincide con lo scalare χ . Non essendo presenti costi di attivazione o acquisto preventivo nel primo stadio, il vettore dei coefficienti di costo è nullo ($c = 0$).

- **Vincoli di Accoppiamento (T_k e W_k):** Le matrici hanno dimensioni $(|I|+1) \times |I|$. Il sistema $T_k x + W_k y_k = h_k$ si compone di:

- Vincolo di capacità di spedizione $-x_i + y_i^k \leq 0$: le prime $|I|$ righe della matrice di trasferimento T_k corrispondono all'opposto della matrice identità e le prime $|I|$ righe della matrice di ricorso W_k alla matrice identità.
- Vincolo di soddisfacimento della domanda $-\sum_{i \in I} y_i^k \leq -d^k$: la riga corrispondente in T_k è nulla, mentre in W_k presenta coefficienti unitari.

Il vettore dei termini noti stocastici è quindi definito come $h_k = [0, \dots, 0, -d^k]^T \in \mathbb{R}^{|I|+1}$.

- **Funzione di Ricorso e Obiettivo:** Ai vettori di secondo stadio vengono associati i tempi di percorrenza stocastici τ_{ik} , che ricoprono il ruolo dei vettori di costo q_k . La funzione di secondo stadio diventa $Q(x, \xi_k) = \min \sum_{i \in I} \tau_{ik} y_i^k$, determinando la funzione obiettivo complessiva di minimizzazione del valore atteso del tempo di risposta umanitario:

$$\min_{x \in X, y} \sum_{k \in K} p_k \sum_{i \in I} \tau_{ik} y_i^k$$

2.3 Altre possibili estensioni

Un aspetto che non è stato finora considerato è quello delle modalità di trasporto. Per estendere il modello in tale direzione, è sufficiente introdurre un insieme R di modalità di trasporto disponibili e ridefinire le variabili decisionali:

$$y_{ir}^k \in \mathbb{R}^+ \quad \forall i \in I, k \in K, r \in R$$

che rappresentano la quantità di beni da inviare nello scenario k dal magazzino i utilizzando la modalità di trasporto r . Analogamente, introduciamo i nuovi parametri temporali:

$$\tau_{ikr} \in \mathbb{R}^+ \quad \forall i \in I, k \in K, r \in R$$

che indicano il tempo necessario per consegnare i beni nello scenario k dal nodo i tramite il mezzo r . La nuova funzione obiettivo assume quindi la forma

$$\min_{x \in X, y} \sum_{k \in K} p_k \sum_{i \in I} \sum_{r \in R} \tau_{ikr} y_{ir}^k$$

soggetta ai nuovi vincoli

$$\sum_{i \in I} \sum_{r \in R} y_{ir}^k = d^k \quad \forall k \in K; \quad (2.1)$$

$$\sum_{r \in R} y_{ir}^k \leq x_i \quad \forall i \in I \forall k \in K; \quad (2.2)$$

$$y_{ir}^k \in \mathbb{R}^+ \quad \forall i \in I, \forall k \in K, \forall r \in R. \quad (2.3)$$

Sebbene il tempo di consegna rappresenti l'assoluta priorità nelle situazioni di emergenza post-disastro analizzate, un'analisi dei costi risulta imprescindibile a livello operativo. Le agenzie umanitarie operano sotto rigidi vincoli di budget: optare per un jet risulta considerevolmente più veloce rispetto al trasporto su gomma, ma il suo costo elevato potrebbe esaurire rapidamente i fondi, compromettendo la capacità di approvvigionare ulteriori risorse vitali. Introduciamo quindi i parametri di costo unitario:

$$c_{ikr} \in \mathbb{R}^+ \quad \forall i \in I, k \in K, r \in R$$

e definiamo due distinte funzioni di valutazione, rappresentanti rispettivamente il costo totale atteso e il tempo totale atteso di trasporto:

$$C(y) = \sum_{k \in K} p_k \sum_{i \in I} \sum_{r \in R} c_{ikr} y_{ir}^k ;$$

$$T(y) = \sum_{k \in K} p_k \sum_{i \in I} \sum_{r \in R} \tau_{ikr} y_{ir}^k .$$

La necessità di bilanciare queste due grandezze trasforma il modello in un problema di ottimizzazione multi-obiettivo. Per risolverlo, adottiamo il metodo della scalarizzazione pesata combinato con la *Linear Max-Min Normalization* [9]. Questa tecnica mappa i valori delle funzioni obiettivo nell'intervallo $[0, 1]$, utilizzando come estremi la soluzione ideale (*Utopia*) e la soluzione anti-ideale (*Nadir*).

Siano $T_{\min}$ e $C_{\min}$ i valori di ottimo assoluto (*Utopia*) ottenuti minimizzando singolarmente $T(y)$ e $C(y)$ soggetti ai vincoli (2.1)-(2.3). Siano invece $T_{\max}$ e $C_{\max}$ i valori di Nadir, corrispondenti al valore che una funzione assume in corrispondenza del punto di ottimo dell'altra. Le funzioni normalizzate si esprimono come:

$$T_{\text{norm}}(y) = \frac{T(y) - T_{\min}}{T_{\max} - T_{\min}} ;$$

$$C_{\text{norm}}(y) = \frac{C(y) - C_{\min}}{C_{\max} - C_{\min}} .$$

Tale normalizzazione è strettamente necessaria per evitare che la componente monetaria domini matematicamente quella temporale durante l'ottimizzazione, essendo le due grandezze caratterizzate da unità di misura e ordini di grandezza intrinsecamente differenti.

Infine applichiamo il metodo della somma pesata, introducendo un parametro convesso $\alpha \in [0, 1]$ che funge da peso per stabilire il grado di priorità del fattore tempo rispetto al fattore costo. Il problema originale di ottimizzazione logistica rimane multi-obiettivo, ma per permetterne la risoluzione computazionale, esso viene mappato in una famiglia parametrica di funzioni mono-obiettivo

$$\min_y (\alpha T_{\text{norm}}(y) + (1 - \alpha) C_{\text{norm}}(y))$$

tramite la scalarizzazione pesata. Variando infatti il parametro α da 0 a 1, il solutore è in grado di esplorare lo spazio delle soluzioni ottime, tracciando (sotto determinate assunzioni) la Frontiera di Pareto del modello ESUPS esteso. Questo fornisce alle agenzie umanitarie un quadro chiaro del costo marginale associato al risparmio di tempo.

Capitolo 3

Demo fornita da Gurobi: “Tackling world hunger using mathematical optimization”

3.1 Introduzione alla demo, assunzioni e importazione dei dataset

In questo capitolo, analizzeremo una demo dal titolo “*Tackling world hunger using mathematical optimization*” [10], fornito da Gurobi, in modo da introdurre il passaggio dalla teoria alla modellizzazione applicata. La demo viene presentata mediante un Jupyter Notebook in Google Colab, usando un codice Python che importa dei dataset della United Nations World Food Program (WFP). Il modello si propone di trasportare cibo da città fornitrici ad altre beneficiarie in Siria. Il problema verrà strutturato secondo un modello di *Min Cost Flow* (MCF) con sorgenti e destinazioni multiple, con vincoli aggiuntivi riguardanti il soddisfacimento di bisogni nutrizionali base per la popolazione.

Come nel caso ESUPS, è bene precisare alcune delle assunzioni che sono state prese in considerazione per la realizzazione del modello:

- Fabbisogno nutrizionale fisso per ogni individuo .
- Disponibilità illimitata di cibo.
- Rete logistica deterministica: Si assume che le rotte di trasporto siano note, fisse e prive di interruzioni.

- Certezza dei dati: Tutti i parametri di input (prezzi dei prodotti, costi di spedizione, contenuto nutrizionale di ogni alimento) sono considerati dati esatti e privi di incertezza (modello deterministico e non stocastico).
- Assenza di capacità massima di trasporto: non ci sono vincoli di capacità sugli archi.

Per iniziare, viene costruita una rete di trasporti composta da città fornitrici, snodi di transito e campi beneficiari, quindi un grafo orientato con un set N_S di 11 sorgenti e un set N_B di 7 destinazioni e costi c_{ij} su ogni arco.

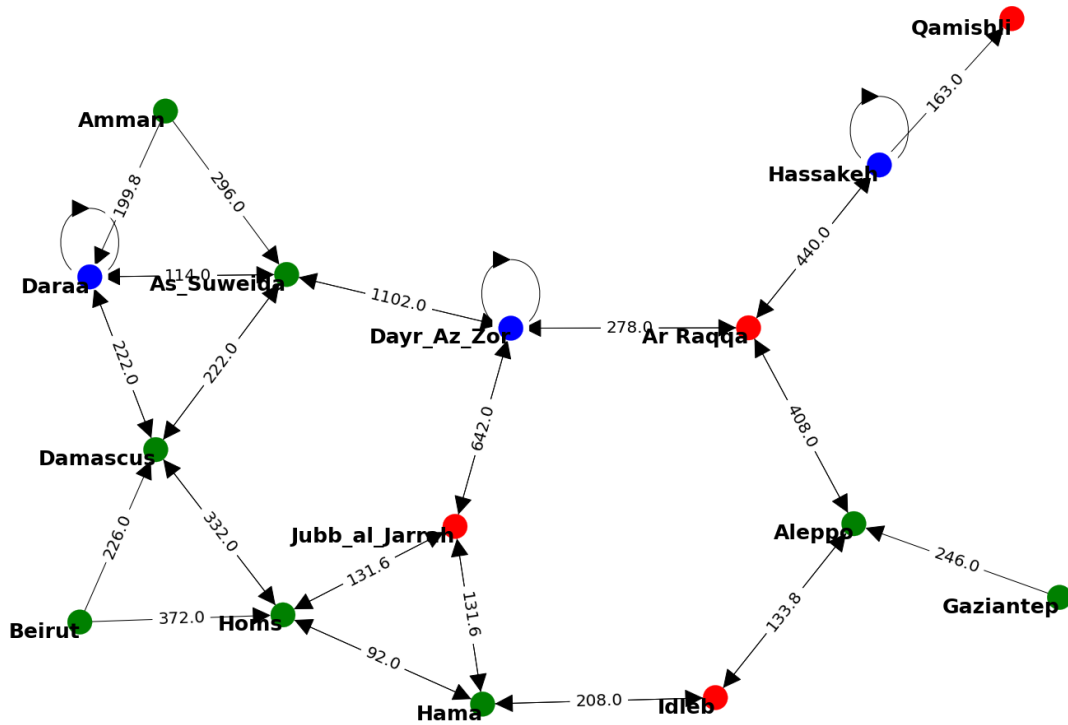


Figura 3.1: Grafo rappresentante la rete umanitaria

Nodi verdi: città fornitrici

Nodi rossi: città beneficiarie

Nodi blu: città sia fornitrici che beneficiarie

In secondo luogo, abbiamo in input informazioni sulla composizione nutrizionale di diversi tipi di alimenti e sui bisogni nutrizionali di una persona media.

In terzo luogo, vengono caricate le informazioni sui costi di approvvigionamento di diversi tipi di cibo dalle città fornitrici utilizzando dati storici sui costi di approvvigionamento.

3.2 Parametri e variabili decisionali del modello

Definiamo ora i parametri dati in input dal problema e la loro notazione (i pedici i e j sono usati per denotare le città, il pedice f per ogni tipologia di cibo e il pedice u per ogni nutriente):

- N_S : insieme di tutte le città fornitrici
- N_B : insieme di tutte le città beneficiarie
- $N = N_S \cup N_B$: insieme di tutte le città
- N_{TS} : insieme dei nodi di transito (non coinvolti direttamente nella fornitura o nel consumo, utili solo per il passaggio di cibo).
- b_j : numero di abitanti beneficiari nella città ricevente j
- E : insieme degli archi del grafo che definiscono i collegamenti di trasporto
- U : insieme di tutti i nutrienti
- m_u : minima quantità di nutriente u per ogni persona
- F : insieme di tutte le tipologie di cibo
- $v_{f,u}$: quantità di nutriente u in un'unità di cibo f
- $p_{f,i}$: costo di acquisto di un'unità di cibo f per la città fornitrice i
- $t_{(i,j)}$: costo di trasporto per unità di cibo sull'arco (i, j)

Per il nostro modello, abbiamo poi bisogno di tre variabili decisionali:

- $r_{f,j}$: dimensione della razione per persona di cibo f nella città beneficiaria j
- $s_{f,i}$: quantità di cibo f acquistata nella città fornitrice i
- $x_{f,i,j}$: quantità di cibo f trasportata sull'arco (i, j)

3.3 Funzione obiettivo e vincoli

Come anticipato precedentemente, ci troviamo davanti un modello di MCF con sorgenti e destinazioni multiple, di conseguenza l’obiettivo da voler raggiungere nel modello è quello di minimizzare i costi totali, che provengono dai costi di trasporto $t_{(i,j)}$ e dai costi di reperimento del cibo $p_{f,i}$.

La funzione obiettivo adottata è

$$\min \sum_{f \in F} \sum_{i \in N_S} s_{f,i} p_{f,i} + \sum_{f \in F} \sum_{(i,j) \in E} x_{f,i,j} t_{(i,j)}.$$

Analizziamo ora i vincoli:

Il primo vincolo è quello di soddisfacimento della minima quantità m_u di nutriente u per ogni persona, e può essere espresso come segue

$$m_u \leq \sum_{f \in F} v_{f,u} r_{f,j} \quad \forall u \in U \quad \forall j \in N_B,$$

osservando che $v_{f,u} r_{f,j}$ è la quantità di nutriente u ricavata dal cibo f e ricevuta da una singola persona nella città beneficiaria j .

I restanti vincoli sono quelli classici di conservazione del flusso del MCF, con le dovute modifiche. Introduciamo innanzitutto le notazioni di:

stella uscente $\delta^+(i) = \{(i, j) \in E \mid j \in N\}$,

stella entrante $\delta^-(i) = \{(j, i) \in E \mid j \in N\}$,

ovvero rispettivamente l’insieme di archi uscenti e l’insieme degli archi entranti di un nodo i .

È bene ora imporre i vincoli distinguendo i nodi in beneficiari, fornitori o nodi che svolgono entrambe le funzioni.

- Per i nodi beneficiari:

$$\sum_{j \in \delta^-(i)} x_{f,j,i} - \sum_{j \in \delta^+(i)} x_{f,i,j} = b_i r_{f,i} \quad \forall i \in N_B \setminus N_S, \forall f \in F.$$

Qui, il termine a sinistra dell’equazione rappresenta la differenza tra unità di cibo ricevute e spedite dal nodo i ; il termine a destra è la quantità totale di cibo consegnato al nodo beneficiario i .

- Per i nodi di rifornimento:

$$\sum_{j \in \delta^-(i)} x_{f,j,i} - \sum_{j \in \delta^+(i)} x_{f,i,j} = -s_{f,i} \quad \forall i \in N_S \setminus N_B, \forall f \in F.$$

Qui, il lato destro è la quantità di cibo acquistato dalla città fornitrice. Si noti che il segno negativo indica che una quantità negativa di cibo sta fluendo verso il fornitore, il che equivale a dire che una quantità positiva di cibo sta lasciando il fornitore.

- Per i nodi sia di rifornimento che beneficiari:

$$\sum_{j \in \delta^-(i)} x_{f,j,i} - \sum_{j \in \delta^+(i)} x_{f,i,j} = b_i r_{f,i} - s_{f,i} \quad \forall i \in N_B \cap N_S, \forall f \in F.$$

In questo caso, il lato destro è la quantità netta di cibo “assorbito” dalla città.

Una volta inseriti i dati nel software Gurobi e imposti i vincoli e la funzione obiettivo da minimizzare, l’ottimizzatore dà quindi in output il valore ottimo del problema di ottimizzazione (nel nostro caso 400.81 milioni di \$), il flusso di cibo sugli archi del grafo per ogni tipologia f in F , e la quantità di cibo ricevuta da ogni beneficiario. In quest’ultima, la distribuzione varia in base a che sito ricevente ci troviamo, ma ognuna soddisfa i requisiti minimi di nutrimenti.

3.4 Una possibile implementazione per il modello della demo

Vedremo ora una possibile integrazione per la demo presentata finora nel terzo capitolo.

In particolare, una modifica del codice Python e un’aggiunta di dati sintetici ma verosimili per implementare la componente stocastica vista nella sezione 1.1.2 al modello di MILP della demo, che passerà quindi ad essere strutturato come SMILP. In seguito il solutore Gurobi riefetterà il calcolo sul nuovo modello e verrà svolta un’analisi sui nuovi risultati ottenuti, confrontandoli con quelli originali.

Il primo passo è stato aggiungere un set $K = \{k_1, k_2, k_3, k_4\}$ di scenari possibili, ognuno dei quali provoca una variazione dei parametri in input della demo e a cui è associata una probabilità stimata di accadere p_{k_i} :

1. k_1 rappresenta il caso base, che lascia i dati invariati. $p_{k_1} = 0.4$.

2. k_2 simula l'avvenimento di una crisi petrolifera. I costi di trasporto vengono aumentati del 50%. $p_{k_2} = 0.25$.
3. k_3 considera una crisi umanitaria acuta, che provoca un aumento della domanda dei beneficiari del 30%. $p_{k_3} = 0.2$.
4. k_4 simula un'interruzione nei collegamenti tra i nodi: un nodo di transito (per semplicità, imponremo il primo, cioè *Jubb al Jarrah*) viene bloccato, cioè non può più spedire scorte. $p_{k_4} = 0.15$.

In seguito, sono state aggiunte delle variabili di primo stadio binarie $open_hub_i \in \{0, 1\}$ per decidere l'apertura o meno dei nodi di transito a fronte di un costo fisso di attivazione ($C^{\text{hub}} = 50000\$$). Le variabili continue originali relative alle razioni (r), agli approvvigionamenti (s) e ai flussi di trasporto (x) sono state ulteriormente indicizzate per il set di scenari $k \in K$. Il collegamento tra primo e secondo stadio avviene tramite l'aggiunta di un nuovo vincolo:

$$\sum_{j \in \delta^+(i)} x_{k,f,i,j} \leq M \cdot open_hub_i \quad \forall i \in N_{TS}, \forall k \in K, \forall f \in F,$$

con M opportunamente scelta (nel codice inserita a 10000000). Esso forza il flusso in uscita a essere rigorosamente nullo per tutti e 4 gli scenari del secondo stadio se il software ha deciso strategicamente di non aprire il nodo i , mentre in caso di apertura del nodo di transito i consente di inviare flusso senza restrizioni, tramite la tecnica del *Big-M* spiegata nella sezione 1.2.3.

Alla fine di queste modifiche, il modello passa da avere 1320 variabili a 5291. Nonostante ciò, questo non influenza significativamente il tempo di calcolo che rimane ben sotto 1 secondo.

Infine, la funzione obiettivo è stata modificata per minimizzare la somma dei costi di apertura dei nodi di transito (primo stadio) e il valore atteso dei costi operativi di approvvigionamento e trasporto (secondo stadio):

$$\begin{aligned} \text{CostoFisso} &= \sum_{i \in N_{TS}} C^{\text{hub}} open_hub_i, \\ \text{CostoAtteso} &= \sum_{k \in K} p_k \left[\sum_{f \in F} \sum_{i \in N_S} s_{k,f,i} p_{f,i} + \sum_{f \in F} \sum_{(i,j) \in E} x_{k,f,i,j} \tilde{t}_{i,j}^k \right], \end{aligned}$$

dove il costo di trasporto dipendente dallo scenario $\tilde{t}_{i,j}^k$ è definito come:

$$\tilde{t}_{i,j}^k = \begin{cases} 1.5 \cdot t_{i,j} & \text{se } k = k_2 \\ t_{i,j} & \text{altrimenti} \end{cases}$$

La nuova funzione obiettivo è quindi:

$$\min \quad \text{CostoFisso} + \text{CostoAtteso}.$$

3.5 Analisi dei Risultati a seguito dell'ottimizzazione

Vediamo ora il comportamento del modello in seguito alla completata ottimizzazione del problema. Il risolutore Gurobi seleziona una strategia ottima di primo stadio selettiva, imponendo l'apertura di soli 5 hub di transito su un totale di 11 disponibili (*Dayr-Az-Zor, Homs, Aleppo, Hassakeh, Ar Raqqa*) e decretando la chiusura dei rimanenti 6.

Flussi di Trasporto sulla Rete $x_{k,f,i,j}$:

La variabile x mappa lo spostamento fisico delle diverse tipologie di cibo lungo gli archi attivi della rete logistica.

- **Scenario k_1 :** La struttura topologica del grafo (archi usati per il flusso di beni) risulta invariata rispetto a quella del modello originale, nonostante la chiusura di alcuni hub di transito. Questo accade perché nel modello originario, sebbene il grafo offrisse la totale libertà di transitare attraverso tutti gli 11 nodi intermedi senza penalità, l'ossatura logistica ottimale si poggiava già interamente sul sottoinsieme composto dai nodi di transito aperti nel primo stadio, lasciando i restanti 6 hub con un flusso di transito nullo.
- **Scenario k_2 :** Registra un riassetto geografico dei flussi rispetto alla distribuzione del latte. Per evitare l'aumento del 50% dei costi di trasporto, il modello azzerava completamente i flussi su tratte lunghe, preferendo percorsi a corto raggio. I flussi degli altri beni rimangono stabili.
- **Scenario k_3 :** Mostra un perfetto scalamento lineare del +30% su tutti gli archi attivi rispetto al caso base. La struttura geometrica della rete non cambia, ma i volumi movimentati aumentano uniformemente per far fronte all'incremento della popolazione nei campi.
- **Scenario k_4 :** I flussi sono completamente identici al caso base, non registrando alcuna deviazione o interruzione del traffico.

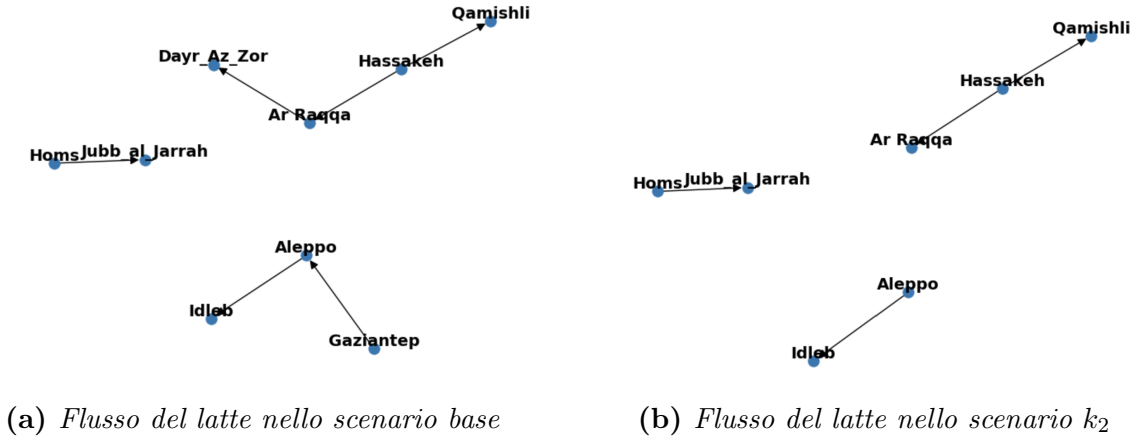


Figura 3.2: Confronto tra i flussi di latte.

Approvvigionamenti nei Fornitori $s_{k,f,i}$:

- **Scenario k_1 :** Invariate rispetto alla demo originale.
- **Scenario k_2 :** Evidenzia un cambiamento strategico dei fornitori per il comparto del latte. Il modello azzerà gli acquisti dal fornitore di Gaziantep e riduce *Hassakeh*, attivando massicciamente i fornitori locali di *Aleppo* e *Dayr-Az-Zor*. Per tutti gli altri prodotti, i fornitori e le quantità acquistate restano invariati.
- **Scenario k_3 :** Registra un incremento del +30% nelle quantità acquistate da ciascun fornitore attivo nel caso base.
- **Scenario k_4 :** Le quantità acquistate sono del tutto identiche al caso base.

Razioni Assegnate ai Beneficiari $r_{k,f,j}$:

I valori pro-capite distribuiti nei quattro scenari sono identici. Ciò dimostra che il modello, pur di fronte a shock economici, logistici o demografici, assorbe le criticità a monte pur di garantire lo stesso livello di assistenza nutrizionale.

L’invarianza dei risultati tra lo scenario base e lo scenario di chiusura di un nodo non indica l’inutilità di quest’ultimo, bensì riflette l’efficacia e la robustezza della programmazione stocastica a due stadi. In questa formulazione, la sola presenza dello scenario k_4 spinge a priori Gurobi a rilevare l’inefficienza strutturale del nodo in questione. Il solutore decreta la chiusura del nodo già nel primo stadio, canalizzando le risorse sui 5 nodi più robusti. Di conseguenza, essendo l’hub disattivato fin dal principio, la simulazione del guasto non produce alcuna variazione operativa poiché nessun flusso vi transitava.

Il passaggio del valore ottimo della funzione obiettivo da \$400.81 milioni a \$430.45 milioni registra un incremento dei costi totali attesi pari a \$29.64 milioni (+7.4%). Questo incremento è giustificato da alcuni fattori principali. Uno di questi è sicuramente l'introduzione dei nuovi costi C^{hub} , non presenti nella formulazione base. Un altro fattore risiede nello scenario di crisi umanitaria, che viene assorbito dal modello. Le razioni per ogni persona non sono state tagliate, anche se questo ha comportato il 30% di cibo in più da comprare e trasportare. L'algoritmo stocastico ha però distribuito questi nuovi acquisti sulla rete in modo efficiente, in modo da far salire il costo totale solo del 7.4%.

3.6 Conclusioni e possibili ulteriori estensioni del modello

L'introduzione di scenari probabilistici ha permesso di dimostrare come l'ottimizzazione matematica sia in grado di aiutare ad assorbire l'incertezza dei contesti emergenziali, a fronte di un incremento dei costi complessivi ampiamente giustificato. Difatti il fattore più importante da considerare è che l'incertezza ha un costo: il modello SMILP ha scartato la soluzione più economicamente vantaggiosa (ma fragile) in favore di una soluzione più robusta e protetta dai possibili imprevisti. In sede di logistica umanitaria, ciò è inevitabile se si vogliono garantire gli standard umanitari adeguati anche in situazioni critiche.

Oltre all'estensione stocastica qui presentata, il modello potrebbe essere ulteriormente sviluppato integrando altre varianti, come quelle esaminate nel Capitolo 1. Si potrebbe valutare, ad esempio, l'inserimento di vincoli di capacità massima sugli archi di trasporto, l'estensione a un orizzonte temporale multi-periodo con l'introduzione di reti spazio-temporali, l'accoppiamento della rete di flusso con modelli di *routing* dei veicoli (VRP), oppure considerare che alcune combinazioni di tipologie di alimenti possono essere adatte alla creazione di ricette nutrizionali bilanciate.

Tuttavia, quando si affrontano problemi reali e quindi complessi come la gestione di una crisi umanitaria, è fondamentale riconoscere che non esiste un modello unico "perfetto" in grado di rappresentare fedelmente la realtà senza incorrere in insostenibili barriere computazionali. Diventa quindi evidente l'importanza strategica di solutori matematici avanzati come Gurobi. Il *solver* si rivela cruciale come strumento di analisi comparativa. Attraverso il confronto dei risultati ottenuti con formulazioni e approcci differenti, è possibile comprendere a fondo i *trade-off* tra i possibili obiettivi che chi costruisce il modello cerca di ottenere, identificando di volta in volta le strategie più efficaci e applicabili per supportare le decisioni sul campo.

Bibliografia

- [1] Haghani & Oh (1996): *Formulation and solution of a multi-commodity, multi-modal network flow model for disaster relief operations*, Transportation Research Part A: Policy and Practice, 30(3), 231-250.
- [2] Ferrer, Martin-Campo, Ortuno, Pedraza-Martinez, Tirano & Vitoriano (2018): *Multi-criteria optimization for last mile distribution of disaster relief aid: Test cases and applications*, European Journal of Operational Research, 269(2), 501-515.
- [3] Balcik & Beamon (2008): *Facility location in humanitarian relief chains: Decision models and applications*, International Journal of Logistics Research and Applications, 11(2), 101-12.
- [4] Barbarosogu & Arda (2004): *A two-stage stochastic programming framework for transportation planning in disaster response*, Journal of the Operational Research Society, 55(1), 43-53.
- [5] Acimovic & Goentzel (2016): *Models and Metrics to Assess Humanitarian Response Capacity*, Journal of Operations Management, 45(1), 11-29.
- [6] Noham & Tzur (2018): *Designing humanitarian supply chains by incorporating actual post-disaster decisions*, European Journal of Operational Research, 265(3), 1064-1077.
- [7] Ramadhan, Irawan, Salhi & Cai (2025): *The truck traveling salesman problem with drone and boat for humanitarian relief distribution in flood disaster: Mathematical model and solution methods*, European Journal of Operational Research, 22(1), 270-291.
- [8] Rapkin, Chane, Acimovic, Montanari, Yurchisin, Ruthmair, van der Velden, Antenucci, & Kennerly (2025), *ESUPS Educational Case Study*, URL: <https://gurobi-casestudy-esups.readthedocs.io/en/latest/intro.html>.

- [9] Marler & Arora (2004): *Survey of multi-objective optimization methods for engineering*, 26(1), 369-395.
- [10] Gurobi Optimization (2023), *Tackling world hunger using mathematical optimization*, URL: <https://www.gurobi.com/resources/demos/tackling-world-hunger-using-mathematical-optimization>.