Alma Mater Studiorum · Università di Bologna

SCUOLA DI SCIENZE
Corso di Laurea in Matematica

IL GRUPPO DI THOMPSON F E IL PROBLEMA DELLA SUA AMENABILITÀ

Tesi di Laurea in Teoria Geometrica dei Gruppi

Relatore:
Prof. MARCO MORASCHINI

Presentata da:
ANNA BERTOZZI

Anno Accademico 2025-2026

Indice

Introduzione

Nel 1929 John von Neumann definì per la prima volta il concetto di *amenabilità*, una proprietà di alcuni gruppi che consiste nel poter dare all'insieme delle funzioni limitate sul gruppo un'operazione di *media* invariante per traslazioni di elementi del gruppo.

Studiando l'amenabilità dei gruppi allora noti, si notò che tutti i gruppi di cui si poteva dimostrare la non amenabilità contenevano un sottogruppo libero su due generatori. Di conseguenza, von Neumann elaborò la seguente

CONGETTURA (Congettura di von Neumann [**Day57**]). Un gruppo è amenabile se e solo se non contiene un sottogruppo libero di rango 2.

Come possibili controesempi a questa congettura, nel 1965 il matematico Richard J. Thompson introdusse tre gruppi: i *gruppi di Thompson*, comunemente denotati con F, T e V. Essi sono gruppi infiniti finitamente presentati e sono dotati di alcune proprietà non comuni. Di questi gruppi, il più famoso e studiato è il gruppo F: il protagonista di questa tesi.

I gruppi di Thompson sono stati i primi a essere proposti come possibili controesempi alla congettura di von Neumann, eppure tuttora non si sa se essi siano amenabili o meno. La congettura di von Neumann è in ogni caso stata confutata da Alexander Ol'shanskii, che nel 1980 ne ha esibito come primo controesempio un gruppo di torsione non amenabile [**Ol'80**]. Successivamente si è ipotizzato che la congettura fosse vera con l'aggiunta dell'ipotesi che il gruppo fosse finitamente generato, come lo sono tutti i gruppi di Thompson; nel 2003, però, Ol'shanskii e Mark Sapir presentarono un controesempio anche a questa nuova formulazione [**OS03**].

Nonostante ormai determinare l'amenabilità del gruppo di Thompson F non abbia più valenza ai fini di dimostrare o confutare la congettura di von Neumann, il problema della sua amenabilità resta uno dei problemi più intriganti e complessi della Teoria Geometrica dei Gruppi.

Lo scopo di questa tesi è quello di studiare il gruppo F per poi concentrarsi sul problema della sua amenabilità. In particolare introdurremo F e alcune delle sue proprietà nel Capitolo 1. Nei Capitoli 2 e 3 parleremo rispettivamente dei concetti di *crescita di gruppi* e di *amenabilità*, che sono strettamente legati. Infine nel Capitolo 4 mostreremo che il gruppo di Thompson F non è amenabile elementare. Mostreremo tuttavia come sia difficile il problema dell'amenabilità del gruppo F tramite due risultati importanti: F non è un gruppo amenabile elementare e non contiene sottogruppi liberi non abeliani.

CAPITOLO 1

Il gruppo di Thompson F

In questo primo capitolo introduciamo il gruppo di Thompson F e ne vediamo alcune proprietà. Il materiale di questo capitolo è tratto principalmente dalla tesi di Belk [**Bel04**].

1.1. Definizione del gruppo di Thompson F

Prima di introdurre il gruppo di Thompson F, diamo alcune definizioni.

DEFINIZIONE 1.1 (Suddivisione diadica). Una *suddivisione diadica* è una suddivisione finita di $[0,1]$ ottenuta tagliando ripetutamente a metà intervalli.

ESEMPIO 1.2. Un esempio di suddivisione diadica è la suddivisione in Figura 1, in cui abbiamo tagliato a metà l'intervallo $[0,1]$, poi $[0,\frac{1}{2}]$ e $[\frac{1}{2},1]$, e infine $[0,\frac{1}{4}]$ e $[\frac{1}{2},\frac{3}{4}]$.

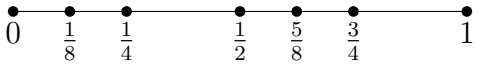


FIGURA 1. Una suddivisione diadica.

DEFINIZIONE 1.3 (Intervallo diadico standard). Un *intervallo diadico standard* è uno degli intervalli di una suddivisione diadica; esso è sempre della forma

$$[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}].$$

OSSERVAZIONE 1.4. La definizione precedente permette di ridefinire una suddivisione diadica come una suddivisione di $[0,1]$ in intervalli diadici standard.

DEFINIZIONE 1.5 (Riordinamento diadico). Siano R, S due suddivisioni diadiche con lo stesso numero di tagli. Un *riordinamento diadico* è un omeomorfismo lineare a tratti ottenuto mandando linearmente l'intervallo i-esimo di R nell'intervallo i-esimo di S.

ESEMPIO 1.6. In Figura 2 osserviamo un esempio di riordinamento diadico, ottenuto mandando linearmente $[0,\frac{1}{4}]$ in $[0,\frac{1}{2}]$, $[\frac{1}{4},\frac{1}{2}]$ in $[\frac{1}{2},\frac{3}{4}]$ e $[\frac{1}{2},1]$ in $[\frac{3}{4},1]$.

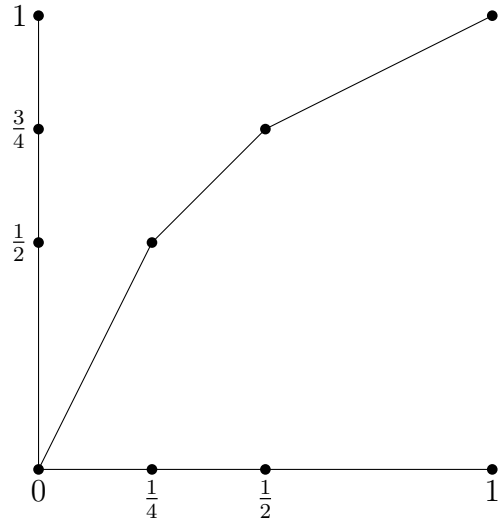


FIGURA 2. Un riordinamento diadico.

TEOREMA 1.7 (Caratterizzazione dei riordinamenti diadici). Sia $f\colon [0,1] \to [0,1]$ un omeomorfismo lineare a tratti; allora f è un riordinamento diadico se e solo se:

(1) Tutte le derivate a tratti di f sono potenze di 2;
(2) Tutti i nodi di f hanno coordinate razionali diadiche.

DIMOSTRAZIONE. Osserviamo che un intervallo diadico standard ha sempre ampiezza $1/2^n$, con $n \in \mathbb{N}$. Allora è chiaro che ogni riordinamento diadico soddisfa le due condizioni.

Viceversa, sia f un omeomorfismo lineare a tratti che soddisfi le due condizioni. Sia $N \in \mathbb{N}$ tale che:

(1) f sia lineare su ogni intervallo diadico standard di ampiezza $1/2^N$;
(2) La formula per ogni tratto lineare di f possa essere scritta come

$$f(t) = 2^m \left(t + \frac{k}{2^N} \right).$$

Sia S la suddivisione di $[0,1]$ in intervalli diadici standard di ampiezza $1/2^N$. Allora f manda ogni intervallo di S in un intervallo diadico standard e quindi manda S in una suddivisione diadica di $[0,1]$. Quindi f è un riordinamento diadico. □

Siamo ora pronte a definire il gruppo di Thompson F:

DEFINIZIONE 1.8 (Gruppo di Thompson F). Il *gruppo di Thompson F* è l'insieme di tutti i riordinamenti diadici.

LEMMA 1.9 (Struttura di gruppo di F). Il gruppo di Thompson F è un gruppo con l'operazione di composizione.

DIMOSTRAZIONE. Per il Teorema 1.7:

(1) La funzione identità è un riordinamento diadico;

(2) Sia f un riordinamento diadico, allora f è invertibile e la sua inversa è un riordinamento diadico;
(3) Per la regola della catena per le derivate e per le proprietà delle potenze, la composizione di riordinamenti diadici è un riordinamento diadico.

□

Ora che abbiamo definito il gruppo di Thompson F, cominciamo a vederne alcune proprietà. Iniziamo osservando che F è infinito e privo di torsione:

TEOREMA 1.10 (F infinito e senza torsione). Il gruppo di Thompson F è infinito e privo di torsione.

DIMOSTRAZIONE. Sia $f \in F$ un elemento diverso dall'identità e sia

$$t_0 \coloneqq \inf\{t \in [0,1] : f(t) \neq t\}.$$

Allora $f(t_0) \neq t_0$ e per il Teorema 1.7 la derivata destra di f in t_0 è 2^m per qualche $m \neq 0$. Per la regola della catena, per ogni $n \in \mathbb{N}$ la derivata destra di f^n in t_0 è 2^{mn}, quindi tutte le potenze di f sono distinte. Ciò mostra che F è infinito e privo di torsione. □

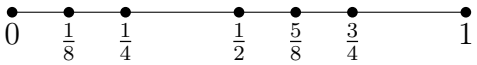
In questa tesi, come fece Thompson quando definì per la prima volta il gruppo F, adotteremo la seguente convenzione:

CONVENZIONE 1.11. Siano f e g due funzioni. La composizione fg è definita in modo tale che

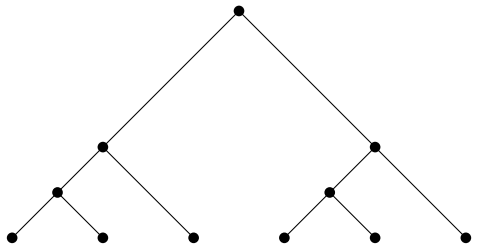
$$fg(t) = g(f(t)).$$

1.2. I diagrammi ad albero

A ogni suddivisione diadica di $[0,1]$ corrisponde un albero binario finito; ad esempio, alla suddivisione diadica



corrisponde l'albero



Infatti ad ogni foglia di questo albero corrisponde un intervallo della suddivisione, mentre la radice rappresenta $[0,1]$. Gli altri nodi rappresentano invece intervalli dagli stadi intermedi della suddivisione.

Mostriamo ora che ogni elemento di F può essere rappresentato da una coppia di alberi binari finiti. Iniziamo con la seguente definizione:

DEFINIZIONE 1.12 (Diagramma ad albero). Un *diagramma ad albero* è l'accostamento in verticale di due alberi binari finiti, uno superiore e uno inferiore, in modo che le loro foglie corrispondano.

DEFINIZIONE 1.13 (Diagramma ad albero ridotto). Un diagramma ad albero è *ridotto* se non ci sono coppie opposte di biforcazioni.

ESEMPIO 1.14 (Diagrammi ad albero ridotti e non ridotti). In Figura 3 possiamo vedere un esempio di diagramma ad albero non ridotto. Invece in Figura 4 vediamo un esempio di diagramma ad albero ridotto.

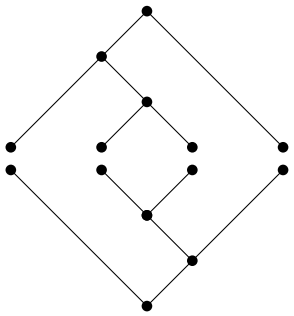


FIGURA 3. Un diagramma ad albero non ridotto.

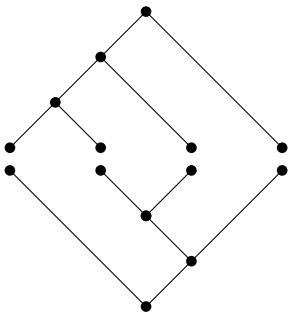


FIGURA 4. Un diagramma ad albero ridotto.

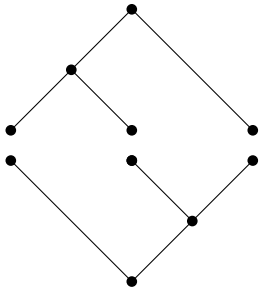
Il seguente teorema mostra che tutti gli elementi del gruppo di Thompson F possono essere rappresentati come diagrammi ad albero ridotti:

TEOREMA 1.15 (F come gruppo dei diagrammi ad albero ridotti). Ogni elemento di F ha un unico diagramma ad albero ridotto.

DIMOSTRAZIONE. Innanzitutto, per ogni elemento $f \in F$, il diagramma ad albero è determinato univocamente dall'albero del dominio, ossia quello superiore, e da f stesso. Inoltre, siano $T \subseteq T'$ possibili alberi superiori, allora il diagramma ad albero con albero superiore T è una riduzione del diagramma ad albero con albero superiore T'. Quindi basta mostrare che l'insieme dei possibili alberi superiori di f abbia un minimo rispetto all'operazione di inclusione.

Diremo che un intervallo diadico standard è *regolare* se f lo manda linearmente in un intervallo diadico standard. Allora un albero T è un possibile albero superiore se e solo se tutte le sue foglie sono regolari. Dunque l'insieme dei possibili alberi superiori è chiuso per intersezioni, e quindi ha un minimo. □

ESEMPIO 1.16 (Un elemento di F come diagramma ad albero ridotto). Questo diagramma ad albero ridotto corrisponde all'elemento di F descritto in Figura 2:

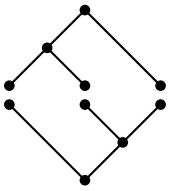


Denotiamo i diagrammi ad albero con il simbolo $\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}$, dove A denota l'albero superiore e B quello inferiore.

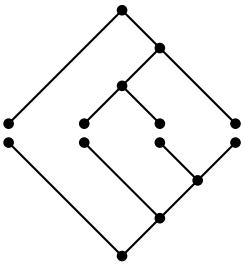
OSSERVAZIONE 1.17. Siano f e g elementi di F con diagrammi ad albero $\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} B \\ C \end{bmatrix}$ rispettivamente. Allora $\begin{bmatrix} A \\ C \end{bmatrix}$ è un diagramma ad albero dell'elemento fg.

Quindi per moltiplicare due elementi f e g ci basta trovare una coppia di diagrammi ad albero tale che l'albero inferiore di f sia uguale all'albero superiore di g. Tale coppia si può sempre trovare semplicemente espandendo i diagrammi ad albero ridotti.

ESEMPIO 1.18 (Prodotto di x_0 e x_1). Supponiamo di voler moltiplicare questi elementi x_0 e $x_1 \in F$:

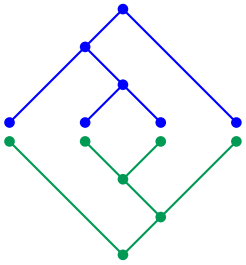


L'elemento $x_0 \in F$.

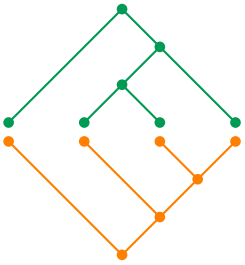


L'elemento $x_1 \in F$.

Possiamo espandere i loro diagrammi ad albero in modo tale che l'albero inferiore di x_0 sia uguale all'albero superiore di x_1:

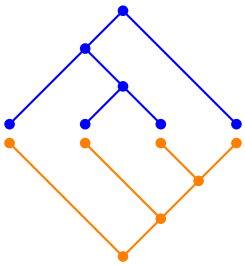


L'elemento $x_0 \in F$.



L'elemento $x_1 \in F$.

Otteniamo così che il diagramma ad albero della loro moltiplicazione è semplicemente:



L'elemento $x_0x_1 \in F$.

Analogamente, è molto facile trovare gli inversi degli elementi di F; infatti sia un elemento $\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}$, il suo inverso è semplicemente $\begin{bmatrix} B \\ A \end{bmatrix}$.

1.3. Un insieme di generatori di F

Abbiamo mostrato che F è un gruppo infinito. In questa sezione esibiremo prima un insieme infinito di generatori di F e poi dimostreremo che F ha in realtà anche una presentazione finita con solo due generatori.

Iniziamo considerando gli elementi $x_0, x_1, x_2,...$ di F definiti come in Figura 5:

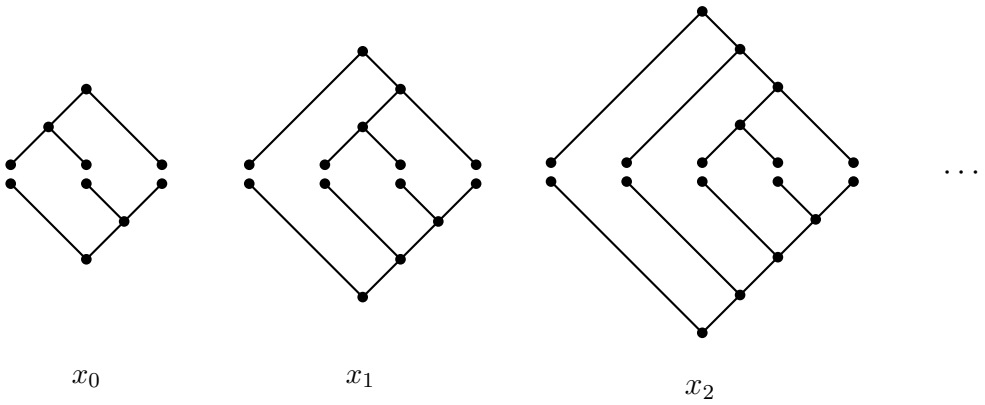


FIGURA 5. Gli elementi $x_0, x_1, x_2, \ldots$ di F.

Notiamo che gli alberi inferiori di tutti questi elementi hanno la stessa forma, ossia hanno un lungo lato a destra da cui partono rami sinistri. Un albero di questo tipo si chiama *viticcio destro*. Invece l'albero superiore dell'elemento x_i è un viticcio destro con $i+1$ foglie a cui è stata aggiunta una biforcazione alla i-esima foglia. Usiamo questa definizione per definire una classe di elementi di F:

DEFINIZIONE 1.19 (Elemento positivo). Un elemento di F è detto *positivo* se nella sua forma ridotta l'albero inferiore è un viticcio destro.

Se A è un albero binario, denotiamo con $\left[A\right]$ l'elemento positivo di F di cui A è l'albero superiore e con $\left[A\right]^{-1}$ il suo inverso, ossia l'elemento di cui A è l'albero inferiore e il cui albero superiore è un viticcio destro. Inoltre, ogni sottoalbero di un viticcio destro è a sua volta un viticcio destro; quindi ogni diagramma ad albero, ridotto o meno, il cui albero inferiore è un viticcio destro rappresenta un elemento positivo.

PROPOSIZIONE 1.20 (F è generato dai suoi elementi positivi). Ogni elemento di F può essere espresso nella forma pq^{-1}, dove p e q sono elementi positivi di F.

DIMOSTRAZIONE. Sia f un elemento di F descritto da un diagramma ad albero $\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}$; allora posso scrivere f come $\left[A\right]\left[B\right]^{-1}$. □

DEFINIZIONE 1.21 (Ampiezza di un albero binario). L'*ampiezza* di un albero binario è il numero delle sue foglie meno uno.

Sia un albero binario di ampiezza w, allora numeriamo le sue foglie in ordine da 0 a w.

PROPOSIZIONE 1.22 (Aggiunta di biforcazioni ad alberi binari). Sia A un albero binario di ampiezza w; se $n < w$, allora $\left[A\right] x_n = \left[A \wedge n\right]$, dove $A \wedge n$ è l'albero binario ottenuto attaccando una biforcazione all'n-esima foglia di A.

DIMOSTRAZIONE. Sia V un viticcio destro di ampiezza w; allora $\begin{bmatrix} A \wedge n \\ V \wedge n \end{bmatrix}$ è un diagramma ad albero per $\left[A\right]$ e, dato che $n < w$, $x_n = \left[V \wedge n\right]$; allora moltiplicando otteniamo $\left[A\right] x_n = \left[A \wedge n\right]$. □

DEFINIZIONE 1.23 (Gambo destro). Il *gambo destro* di un albero binario è il viticcio destro che cresce dalla radice dell'albero.

ESEMPIO 1.24. In Figura 6 vediamo un albero binario del quale è stato evidenziato il gambo destro.

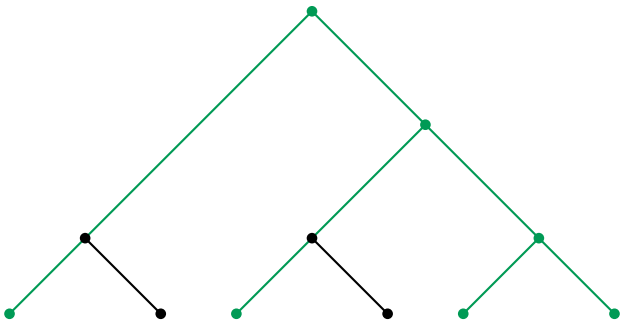
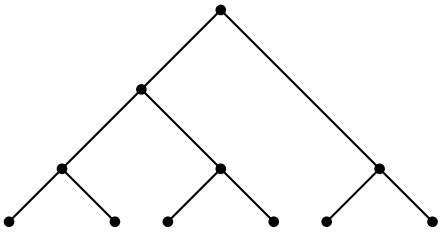


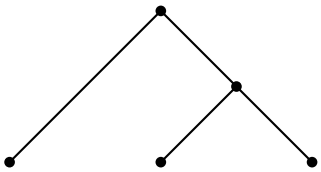
FIGURA 6. Un albero binario; in verde, il suo gambo destro.

È chiaro che ogni albero binario può essere costruito a partire da un viticcio destro alle cui foglie aggiungiamo biforcazioni una alla volta.

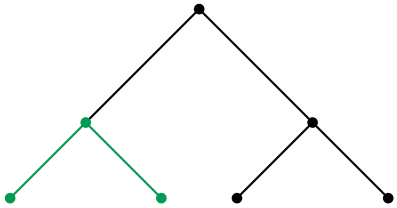
ESEMPIO 1.25 (Costruzione di un albero binario). Consideriamo questo albero binario A:



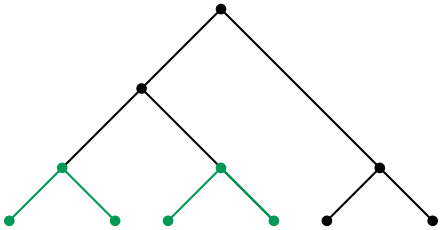
Vogliamo costruire A a partire da un viticcio destro. Per farlo, consideriamo il suo gambo destro e ad esso aggiungiamo biforcazioni una alla volta in corrispondenza di alcune foglie:



Il gambo destro di A.



Attacchiamo una biforcazione alla foglia numero 0.



Attacchiamo biforcazioni alle foglie numero 0 e 1.

Otteniamo così l'albero A a partire da un viticcio destro.

Siamo ora pronte a mostrare che gli elementi $x_0, x_1, x_2, ...$ di F presentati in Figura 5 generano F:

COROLLARIO 1.26 (Un insieme infinito di generatori di F). L'insieme $\{x_0, x_1, x_2, ...\}$ genera F.

DIMOSTRAZIONE. Possiamo costruire ogni elemento di F aggiungendo biforcazioni all'albero banale. Allora per la Proposizione 1.22, l'insieme $\{x_0, x_1, x_2, ...\}$ genera F. □

Forniamo ora una presentazione di F con i generatori presentati nel corollario precedente.

TEOREMA 1.27 (Una presentazione infinita di F).

$$\langle x_0, x_1, x_2, ... | x_n x_k = x_k x_{n+1} \text{ per ogni } n > k \rangle$$

è una presentazione di F.

Un elemento del gruppo F può essere scritto in più modi per mezzo dei generatori appena presentati. Esiste però un'unica forma normale, come vediamo nel seguente teorema:

TEOREMA 1.28 (Forma normale). Ogni elemento di F può essere espresso univocamente come

$$x_0^{a_0} ... x_n^{a_n} x_n^{-b_n} ... x_0^{-b_0},$$

dove:

- $a_0, ..., a_n, b_0, ..., b_n \in \mathbb{N}$;
- esattamente uno tra a_n, b_n è diverso da zero;
- $a_i \neq 0$ e $b_i \neq 0 \Rightarrow a_{i+1} \neq 0$ e $b_{i+1} \neq 0$ $\forall i$.

Una dimostrazione dei Teoremi 1.27 e 1.28 può essere trovata nel Capitolo 2 della Tesi di Belk [**Bel04**].

È possibile mettere ogni parola di F in forma normale usando le seguenti quattro mosse, che sono tutte derivate dalle relazioni date nel Teorema 1.27:

$$x_n^{-1} x_k \to x_k x_{n+1}^{-1}$$
$$x_k^{-1} x_n \to x_{n+1} x_k^{-1}$$
$$x_n x_k \to x_k x_{n+1}$$
$$x_k^{-1} x_n^{-1} \to x_{n+1}^{-1} x_k^{-1}$$
$$\text{con } k < n.$$

Queste mosse possono essere anche usate nel verso opposto, ma solo se la differenza tra i due indici k e n è strettamente maggiore di uno. Ad esempio, non si possono applicare alla parola $x_2 x_3$.

ESEMPIO 1.29 (Forma normale). Mettiamo in forma normale la parola

$$x_0 x_3 x_6 x_3^{-1} x_1 x_4^{-1} x_0 x_3^{-1} x_0^{-1}$$

usando le quattro mosse appena presentate e le loro inverse. Iniziamo ordinando gli indici:

$$\begin{aligned}
x_0 x_3 x_6 (x_3^{-1} x_1)(x_4^{-1} x_0) x_3^{-1} x_0^{-1} &\longrightarrow x_0 x_3 x_6 (x_1 x_4^{-1})(x_0 x_5^{-1}) x_3^{-1} x_0^{-1} \\
x_0 x_3 x_6 x_1 (x_4^{-1} x_0) x_5^{-1} x_3^{-1} x_0^{-1} &\longrightarrow x_0 x_3 x_6 x_1 (x_0 x_5^{-1}) x_5^{-1} x_3^{-1} x_0^{-1} \\
x_0 x_3 x_6 (x_1 x_0) x_5^{-1} x_5^{-1} x_3^{-1} x_0^{-1} &\longrightarrow x_0 x_3 x_6 (x_0 x_2) x_5^{-1} x_5^{-1} x_3^{-1} x_0^{-1} \\
x_0 x_3 (x_6 x_0) x_2 x_5^{-1} x_5^{-1} x_3^{-1} x_0^{-1} &\longrightarrow x_0 x_3 (x_0 x_7) x_2 x_5^{-1} x_5^{-1} x_3^{-1} x_0^{-1} \\
x_0 (x_3 x_0)(x_7 x_2) x_5^{-1} x_5^{-1} x_3^{-1} x_0^{-1} &\longrightarrow x_0 (x_0 x_4)(x_2 x_8) x_5^{-1} x_5^{-1} x_3^{-1} x_0^{-1} \\
x_0 x_0 (x_4 x_2) x_8 x_5^{-1} x_5^{-1} x_3^{-1} x_0^{-1} &\longrightarrow x_0 x_0 (x_2 x_5) x_8 x_5^{-1} x_5^{-1} x_3^{-1} x_0^{-1}
\end{aligned}$$

Ora gli indici sono nell'ordine giusto, ma nella scrittura compaiono entrambi x_0 e x_0^{-1}, mentre non compaiono né x_1 né x_1^{-1}. Quindi la parola non è ancora in forma normale. Procediamo dunque eliminando una coppia di x_0, x_0^{-1}:

$$x_0(x_0x_2)x_5x_8x_5^{-1}x_5^{-1}(x_3^{-1}x_0^{-1}) \longrightarrow x_0(x_1x_0)x_5x_8x_5^{-1}x_5^{-1}(x_0^{-1}x_2^{-1})$$
$$x_0x_1(x_0x_5)x_8x_5^{-1}(x_5^{-1}x_0^{-1})x_2^{-1} \longrightarrow x_0x_1(x_4x_0)x_8x_5^{-1}(x_0^{-1}x_4^{-1})x_2^{-1}$$
$$x_0x_1x_4(x_0x_8)(x_5^{-1}x_0^{-1})x_4^{-1}x_2^{-1} \longrightarrow x_0x_1x_4(x_7x_0)(x_0^{-1}x_4^{-1})x_4^{-1}x_2^{-1}$$
$$x_0x_1x_4x_7(x_0x_0^{-1})x_4^{-1}x_4^{-1}x_2^{-1} \longrightarrow x_0x_1x_4x_7x_4^{-1}x_4^{-1}x_2^{-1}$$

Analogamente a prima, ora nella parola abbiamo x_4 e x_4^{-1}, ma non x_5 o x_5^{-1}. Cancelliamo quindi una coppia x_4, x_4^{-1}:

$$x_0x_1(x_4x_7)x_4^{-1}x_4^{-1}x_2^{-1} \longrightarrow x_0x_1(x_6x_4)x_4^{-1}x_4^{-1}x_2^{-1}$$
$$x_0x_1x_6(x_4x_4^{-1})x_4^{-1}x_2^{-1} \longrightarrow x_0x_1x_6x_4^{-1}x_2^{-1}$$

Abbiamo dunque ottenuto che la forma normale della parola è

$$x_0x_1x_6x_4^{-1}x_2^{-1}.$$

Nel Teorema 1.27 abbiamo visto una presentazione di F con infiniti generatori. In realtà però F è un gruppo finitamente presentato: vediamone dunque una presentazione finita.

TEOREMA 1.30 (Una presentazione finita di F). Gli elementi x_0 e x_1 generano F; in particolare, F ha presentazione:

$$\langle x_0, x_1 \mid x_2x_1 = x_2x_3,\ x_3x_1 = x_1x_4\rangle;$$

dove per ogni $n \geq 2$ il simbolo x_n denota l'elemento coniugato

$$(x_1)^{x_0^{n-1}} = (x_0^{n-1})^{-1}x_1x_0^{n-1}.$$

DIMOSTRAZIONE. Per definizione,

$$x_{n+1} = x_0^{-n}x_1x_0^n = x_0^{-(n-1)}x_2x_0^{n-1} = ... = x_0^{-1}x_nx_0$$

per ogni $n \geq 1$, quindi x_0 e x_1 generano tutto F.

Resta da mostrare che le due relazioni sono sufficienti. Denotiamo con $R_{n,k}$, con $n > k \geq 0$ la relazione $x_nx_k = x_kx_{n+1}$; vogliamo mostrare che dalle relazioni $R_{2,1}$ e $R_{3,1}$ derivano le relazioni $R_{n,k}$ per ogni $n > k \geq 0$.

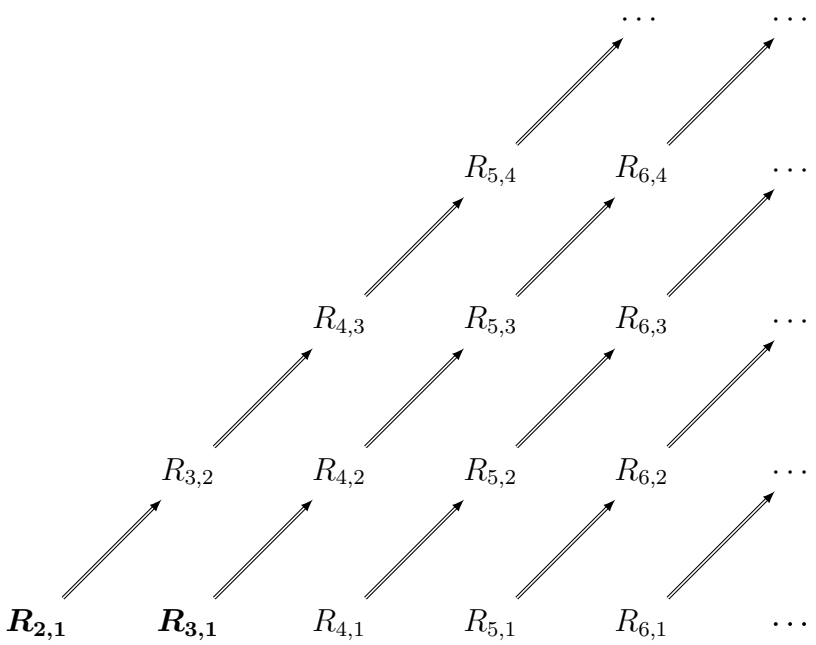
Innanzitutto, osserviamo che le relazioni $R_{n,0}$ seguono dalla definizione di x_n per ogni $n > 0$.

Inoltre, se è vera la relazione $R_{n,k}$ per $n > k > 0$, allora per ogni $i > 0$

$$x_{n+i}x_{k+i} = x_0^{-i}x_nx_kx_0^i = x_0^{-i}x_kx_{n+1}x_0^i = x_{k+i}x_{n+i+1},$$

ossia è vera la relazione $R_{k+i,n+i}$ per ogni $i > 0$.

Quindi possiamo costruire il seguente schema, dove in grassetto sono le relazioni date nella presentazione e derivate dalle definizioni mentre le frecce indicano le implicazioni:



A questo punto possiamo dedurre le relazioni $R_{n,1}$ con $n \geq 4$ per induzione, ponendo come passo base la relazione $R_{3,1}$. Osserviamo che per dedurre la relazione $R_{n,1}$ possiamo utilizzare tutte le relazioni $R_{j,i}$ con $j - 1 < n - 1$. Dunque abbiamo $x_2 x_n x_1 = x_{n-1} x_2 x_1 = x_{n-1} x_1 x_3 = x_1 x_n x_3 = x_1 x_3 x_{n+1} = x_2 x_1 x_{n+1}$. Allora, moltiplicando i membri per x_2^{-1}, otteniamo $x_n x_1 = x_1 x_{n+1}$, ossia la relazione $R_{n,1}$. □

Il gruppo F ha due presentazioni finite canoniche; in quella che abbiamo appena visto, le relazioni $R_{n,0}$ erano vere per definizione e dalle relazioni $R_{2,1}$ e $R_{3,1}$ potevano essere dedotte tutte le altre. È possibile invece assumere le relazioni $R_{n,n-1}$ vere per definizione e usare le relazioni $R_{2,0}$ e $R_{3,0}$ per dedurre le altre. Abbiamo dunque una seconda presentazione, la cui dimostrazione è analoga alla precedente.

PROPOSIZIONE 1.31 (Una presentazione finita di F). F ha presentazione

$$\langle x_0, x_1 \mid x_2 x_0 = x_0 x_3,\ x_3 x_0 = x_0 x_4 \rangle,$$

dove per ogni $n \geq 2$ il simbolo x_{n+1} denota l'elemento $x_{n-1}^{-1} x_n x_{n-1}$.

1.4. Il sottogruppo commutatore $[F, F]$ di F

In questa sezione studieremo le proprietà algebriche del commutatore $[F, F]$ di F.

Ricordiamo che l'abelianizzazione di F è il gruppo $F \,/\, [F, F]$. Iniziamo dalla seguente:

PROPOSIZIONE 1.32 (Abelianizzazione di F). L'abelianizzazione di F è $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$.

DIMOSTRAZIONE. Abelianizzando la presentazione standard di F presentata nel Teorema 1.27 otteniamo:

$$\langle x_0, x_1, x_2, ... \mid x_n + x_k = x_k + x_{n+1} \text{ per ogni } n > k \rangle,$$

che implica che $x_n = x_{n+1}$ per ogni $n \geq 1$. Allora dato che $x_1 + x_0 = x_0 + x_2 = x_0 + x_1$, otteniamo:

$$F \,/\, [F, F] = \langle x_0, x_1 \mid x_0 + x_1 = x_1 + x_o \rangle.$$

Questo gruppo è il gruppo abeliano con due generatori, che è isomorfo a $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$. □

PROPOSIZIONE 1.33 (Descrizione dell'abelianizzazione di F). Consideriamo la funzione

$$\begin{array}{rccl} \varphi \colon & F & \longrightarrow & \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \\ & f & \longmapsto & \big(\log_2 f'(0), \log_2 f'(1)\big). \end{array}$$

Allora φ è un epimorfismo e $\mathrm{Ker}(\varphi) = [F, F]$.

DIMOSTRAZIONE. Per la regola della catena per le derivate, φ è un omomorfismo.

Inoltre, siano x_0 e x_1 i generatori nella presentazione di F fornita nel Teorema 1.30, osserviamo che

$$\varphi(x_0) = (1, -1) \quad \text{e} \quad \varphi(x_1) = (0, -1).$$

Poiché questi vettori sono una base di $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$, φ è suriettivo e il suo nucleo è $[F, F]$ per la Proposizione 1.32. □

La proposizione precedente mostra che l'abelianizzazione di F è $F \,/\, [F, F] = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$.

COROLLARIO 1.34 (Caratterizzazione degli elementi di $[F, F]$). Sia $f \in F$. Allora $f \in [F, F]$ se e solo se f è banale (ossia uguale all'identità) in intorni di 0 e 1.

DIMOSTRAZIONE. Consideriamo la funzione φ definita nella Proposizione 1.33. Allora abbiamo:

$$f \in [F, F] \Leftrightarrow f \in \mathrm{Ker}(\varphi) \Leftrightarrow \big(\log_2 f'(0), \log_2 f'(1)\big) = (0, 0) \Leftrightarrow$$

$$\big(f'(0), f'(1)\big) = (1, 1) \Leftrightarrow f \text{ è banale in intorni di 0 e 1.}$$

□

DEFINIZIONE 1.35 (Intervallo diadico). Un *intervallo diadico* è un intervallo chiuso i cui estremi sono razionali diadici.

DEFINIZIONE 1.36 (Il gruppo $PL_2(I)$). Sia I un intevallo diadico. Allora *il gruppo* $PL_2(I)$ è il sottogruppo di F costituito da tutti e soli gli elementi di F che hanno supporto in I, ossia tali che sono l'identità fuori da I.

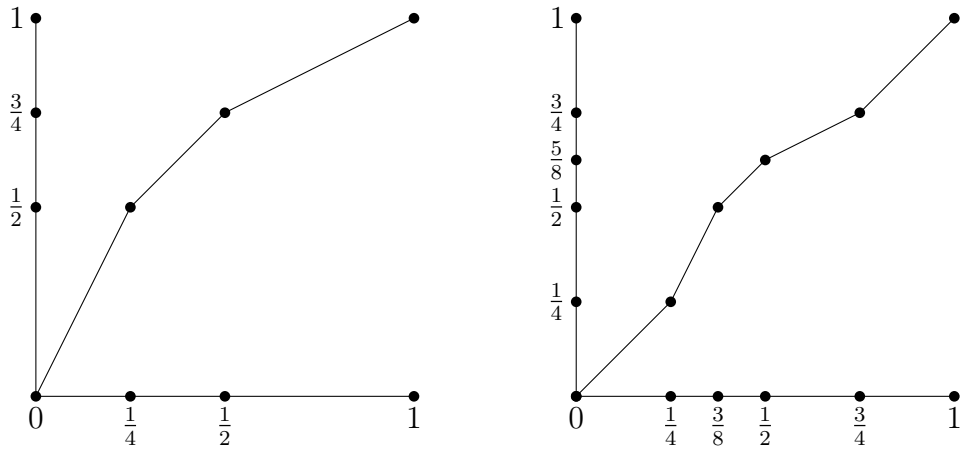
PROPOSIZIONE 1.37 (Isomorfismo tra $PL_2(I)$ ed F). Sia I un intervallo diadico. Allora $PL_2(I)$ è isomorfo a F. In particolare, esiste un omeomorfismo lineare a tratti $\gamma : [0, 1] \to I$ tale che:

(1) Tutte le derivate a tratti di γ sono potenze di 2;
(2) Tutti i nodi di γ hanno coordinate razionali diadiche.

Allora ogni omeomorfismo γ che soddisfa queste condizioni induce l'isomorfismo tra $PL_2(I)$ e F tramite coniugio.

DIMOSTRAZIONE. Ogni intervallo diadico I è unione finita di intervalli diadici standard. Allora possiamo scegliere una suddivisione diadica di $[0, 1]$ con lo stesso numero di intervalli e costruire la funzione γ che manda linearmente ogni intervallo in $[0, 1]$ nel corrispettivo in I. L'isomorfismo tra $PL_2(I)$ e F è dato mandando ogni elemento $f \in PL_2(I)$ nell'elemento $\gamma f \gamma^{-1} \in F$. □

ESEMPIO 1.38. Consideriamo gli elementi x_0 e f appartenenti rispettivamente a F e a $PL_2(I)$, con $I = [\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]$, mostrati in Figura 8.



$x_0 \in F$. $f \in PL_2(I)$.

FIGURA 8. Gli elementi x_0 e $f \in F$.

Sappiamo che I è l'unione degli intervalli diadici standard $[\frac{1}{4}, \frac{3}{8}]$, $[\frac{3}{8}, \frac{1}{2}]$ e $[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]$. Suddividiamo dunque $[0, 1]$ in $[0, \frac{1}{4}]$, $[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$ e $[\frac{1}{2}, 1]$ e costruiamo γ come in figura:

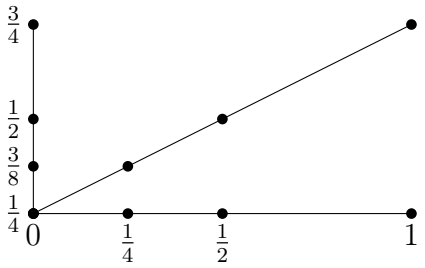


FIGURA 9. La funzione γ da $[0, 1]$ a $[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]$.

Allora $\gamma f \gamma^{-1} = x_0$. Analogamente, coniugando ogni elemento di $PL_2(I)$ per γ otteniamo l'isomorfismo tra F e $PL_2(I)$.

OSSERVAZIONE 1.39. Per il Corollario 1.34, se $I \subsetneq [0,1]$, allora $PL_2(I) \subsetneq [F,F]$.

TEOREMA 1.40 (Caratterizzazione dei sottogruppi normalizzati da $[F,F]$). Ogni sottogruppo non banale di F che è normalizzato da $[F,F]$ contiene $[F,F]$.

DIMOSTRAZIONE. Sia N un sottogruppo non banale di F normalizzato da $[F,F]$, ossia tale che per ogni $f \in [F,F]$, $N = f^{-1}Nf$, e sia η un elemento non banale di N. Siccome η non è l'identità, esiste un intervallo diadico $I \subsetneq (0,1)$ tale che $I \cap \eta(I) = \varnothing$. Per l'Osservazione 1.39, possiamo considerare il gruppo $PL_2(I) \subsetneq [F,F]$.

Sia $f \in PL_2(I)$. Allora valgono i seguenti tre fatti:

(1) $[\eta, f] = \eta^{-1}(f^{-1}\eta f)$ appartiene ad N perché $PL_2(F) \subseteq [F,F]$ normalizza N;
(2) f ha supporto in I, quindi se $t \notin I \cup \eta(I)$ si ha

$$\eta^{-1}(t) \notin \eta(I) \cup I \implies f^{-1}(\eta^{-1}(t)) = \eta^{-1}(t)$$

$$\implies \eta(f^{-1}(\eta^{-1}(t))) = \eta(\eta^{-1}(t)) = t.$$

Ne segue che se $t \notin I \cup \eta(I)$, allora abbiamo:

$$(\eta^{-1}f^{-1}\eta f)(t) = f(\eta(f^{-1}(\eta^{-1}(t)))) = f(t) = t.$$

Quindi $\operatorname{supp}[\eta, f] \subseteq I \cup \eta(I)$.
(3) Per ogni $t \in I$, $f(t) \notin \eta(I)$ dato che $I \cap \eta(I) = \varnothing$; tuttavia, $\operatorname{supp}(\eta^{-1}f^{-1}\eta) \subseteq \eta(I)$, da cui $f(t) \notin \operatorname{supp}(\eta^{-1}f^{-1}\eta)$. Quindi $\eta^{-1}f^{-1}\eta f(t) = f(t)$. Ne segue che $[\eta, f]$ coincide con f su I.

Quindi per ogni $f, g \in PL_2(I)$ si ha che $[f,g] = [[\eta, f], g] \in N$. Questo mostra che N contiene $[PL_2(I), PL_2(I)]$.

Mostriamo che in realtà N contiene tutto $[F,F]$.

Osserviamo che per ogni $k \in \mathbb{N}_{>0}$ esiste $\gamma_k \in [F,F]$ tale che $\gamma_k(I) = [\frac{1}{2^{k+1}}, \frac{2^{k+1}-1}{2^{k+1}}]$. Allora coniugando un elemento di N per γ_k, otteniamo un elemento di N con supporto in $[\frac{1}{2^{k+1}}, \frac{2^{k+1}-1}{2^{k+1}}]$, quindi N contiene tutti i commutatori con supporto in $[\frac{1}{2^{k+1}}, \frac{2^{k+1}-1}{2^{k+1}}]$ per ogni $k \in \mathbb{N}_{>0}$, da cui N contiene tutto $[F,F]$. □

Il teorema precedente ha come conseguenze due corollari:

COROLLARIO 1.41 (Abelianità dei quozienti propri di F). Ogni quoziente proprio di F è abeliano.

DIMOSTRAZIONE. Sia N un sottogruppo normale non banale di F. Allora per il Teorema 1.40 N contiene il sottogruppo commutatore $[F,F]$ di F. Da ciò segue che il gruppo quoziente $F \,/\, N$ è contenuto in $F \,/\, [F,F]$, che è abeliano. Quindi anche $F \,/\, N$ è abeliano. □

COROLLARIO 1.42 (Semplicità di $[F, F]$). Il sottogruppo commutatore di F è semplice.

DIMOSTRAZIONE. Sia N un sottogruppo normale non banale del commutatore $[F, F]$ di F. Allora N è un sottogruppo non banale di F normalizzato da $[F, F]$, quindi per il Teorema 1.40 N contiene $[F, F]$. Da ciò segue che N è proprio $[F, F]$, quindi $[F, F]$ è semplice. □

CAPITOLO 2

Crescita di gruppi

In questo capitolo introduciamo il concetto di *crescita di gruppi*, che descrive come cresce un gruppo rispetto a un suo insieme di generatori. In particolare ci concentreremo sulla crescita di gruppi finitamente generati, di cui fa parte il gruppo di Thompson F [Capitolo 1].

2.1. Funzioni di crescita

In questa prima sezione introduciamo le *funzioni di crescita* di gruppi finitamente generati. Prima di farlo, introduciamo una metrica su tali gruppi: la *metrica delle parole*.

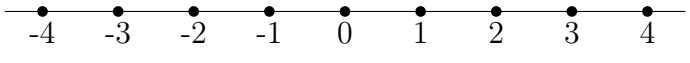
DEFINIZIONE 2.1 (Grafo di Cayley). Sia G un gruppo e sia $S \subseteq G$ un suo insieme di generatori. Allora il *grafo di Cayley* di G rispetto a S è il grafo $Cay(G, S)$ tale che:

(1) L'insieme dei suoi vertici è G;
(2) L'insieme dei suoi lati è $\{\{g, gs\} \mid g \in G, s \in S \cup S^{-1} \setminus \{e\}\}$. In altre parole, due vertici del grafo di Cayley sono adiacenti se e solo se uno è uguale all'altro moltiplicato a destra per un elemento non banale di S o un suo inverso.

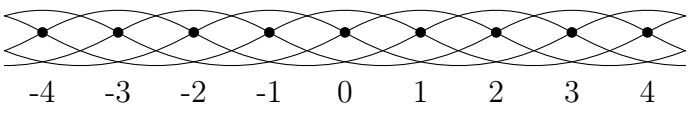
OSSERVAZIONE 2.2. Per definizione abbiamo che

$$Cay(G, S) = Cay(G, S^{-1}) = Cay(G, S \cup S^{-1}).$$

ESEMPIO 2.3 (Grafi di Cayley di $\mathbb{Z}$). In Figura 1 vediamo due esempi di grafi di Cayley di $\mathbb{Z}$ rispetto a diversi insiemi di generatori: $\{1\}$ e $\{2, 3\}$.



$Cay(\mathbb{Z}, \{1\})$.



$Cay(\mathbb{Z}, \{2, 3\})$.

FIGURA 1. Grafi di Cayley di $\mathbb{Z}$.

ESEMPIO 2.4 (Grafo di Cayley del gruppo di Klein). In Figura 2, vediamo il grafo di Cayley del gruppo di Klein $K_4 = \langle s, r \mid sr = rs, s^2 = r^2 = Id \rangle$ con insieme di generatori $\{r, s\}$.

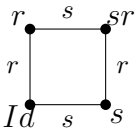


FIGURA 2. $Cay(K_4, \{r, s\})$.

DEFINIZIONE 2.5 (Metrica delle parole). Sia G un gruppo e sia $S \subseteq G$ un insieme di generatori di G. La *metrica delle parole* su G rispetto a S è la metrica su G associata al grafo di Cayley $Cay(G, S)$, ossia

$$d_S(g, h) := \min\{n \in \mathbb{N} \mid \exists s_1, ...s_n \in S \cup S^{-1},\ g^{-1}h = s_1...s_n\ \},$$

per ogni $g, h \in G$.

D'ora in poi, indichiamo con (G, d_S) il grafo di Cayley di G dotato di metrica delle parole rispetto all'insieme di generatori S.

ESEMPIO 2.6 (Metriche delle parole su $\mathbb{Z}$). Consideriamo il gruppo $\mathbb{Z}$ e vediamo la metrica delle parole su di esso rispetto a diversi insiemi di generatori S.

Se $S = \{1\}$, allora $d_S(n, m) = |n - m|$ per ogni $n, m \in \mathbb{Z}$.

Se invece $S = \mathbb{Z}$, allora $d_T(n, m) = 1$ per ogni $n, m \in \mathbb{Z}$. Osserviamo che in questo caso l'insieme di generatori è infinito.

ESEMPIO 2.7 (Metriche delle parole sul gruppo di Klein). Consideriamo il gruppo di Klein K_4 con insieme di generatori $\{r, s\}$. Allora abbiamo:

$$d_S(g, g) = 0 \text{ per ogni } g \in K_4,$$
$$d_S(Id, r) = d_S(Id, s) = d_S(r, sr) = d_S(s, sr) = 1,$$
$$d_S(Id, sr) = d_S(s, r) = 2.$$

Grazie alla metrica delle parole, possiamo definire le funzioni di crescita per gruppi finitamente generati.

DEFINIZIONE 2.8 (Funzione di crescita). Sia G un gruppo finitamente generato e sia $S \subseteq G$ un insieme finito di generatori. La *funzione di crescita* di G rispetto a S è

$$\begin{array}{rccc} \beta_{G,S}\colon & \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ & r & \longmapsto & |B_r^{G,S}(e)|. \end{array}$$

dove $|B_r^{G,S}(e)| = \{g \in G \mid d_S(g, e) \leq r\}$.

Notiamo che questa definizione è ben posta perché, essendo G finitamente generato, $|B_r^{G,S}(e)| < +\infty$ per ogni $r \in \mathbb{N}$.

ESEMPIO 2.9. Vediamo alcuni esempi di funzioni di crescita di gruppi finitamente generati:

(1) Consideriamo il gruppo $\mathbb{Z}$ con insieme di generatori $\{1\}$. Allora

$$B_r^{\mathbb{Z},\{1\}}(0) = \{n \in \mathbb{Z} \mid |n| \leq r\},$$

quindi la sua funzione di crescita è

$$\begin{array}{rccc} \beta_{\mathbb{Z},\{1\}}\colon & \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ & r & \longmapsto & 2r+1. \end{array}$$

(2) Consideriamo il gruppo $G = K_4$ con insieme di generatori $\{r, s\}$. Allora la sua funzione di crescita è

$$\begin{array}{rccc} \beta_{K_4,\{r,s\}}\colon & \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ & 0 & \longmapsto & 1 \\ & 1 & \longmapsto & 3 \\ & r & \longmapsto & 4, \text{ per ogni } r > 1. \end{array}$$

PROPOSIZIONE 2.10 (Proprietà delle funzioni di crescita). Sia G un gruppo finitamente generato e sia $S \subseteq G$ un insieme finito di generatori. Allora:

(1) La funzione $\beta_{G,S}$ è submoltiplicativa, ossia per ogni $r, r' \in \mathbb{N}$

$$\beta_{G,S}(r + r') \leq \beta_{G,S}(r)\beta_{G,S}(r');$$

(2) Se G è infinito, $\beta_{G,S}$ è strettamente crescente e $\beta_{G,S}(r) \geq r$ per ogni $r \in \mathbb{N}$;
(3) Per ogni $r \in \mathbb{N}$, $\beta_{G,S}(r) \leq \beta_{F(S),S}(r)$, dove $F(S)$ è il gruppo libero generato da S.

DIMOSTRAZIONE.

(1) $\beta_{G,S}(r + r')$ è il numero di parole a distanza minore o uguale a $r + r'$ da e. Queste parole sono al più il numero di parole w a distanza r da e più il numero di parole a distanza r' da w. Otteniamo così che

$$\beta_{G,S}(r + r') \leq \beta_{G,S}(r)\beta_{G,S}(r');$$

(2) Se per assurdo esistesse $r \in \mathbb{N}$ tale che $\beta_{G,S}(r + 1) = \beta_{G,S}(r)$, allora avremmo che $\beta_{G,S}(r') = \beta_{G,S}(r)$ per ogni $r' \geq r$, quindi $G = B_r^{G,S}(e)$. Da ciò seguirebbe che G è finito, quindi tale r non esiste. Ciò mostra che $\beta_{G,S}$ è strettamente crescente. Da questo fatto segue che $\beta_{G,S}(r) \geq r$ per ogni $r \in \mathbb{N}$.
(3) Considero la funzione $\varphi : F(S) \longrightarrow G$ che estende Id_S. Allora φ è un omomorfismo suriettivo. Inoltre, poiché φ introduce relazioni tra gli elementi di S, per ogni $h \in F(S)$ abbiamo che $d_S(h, e) \geq d_S(\varphi(h), e)$. Da ciò segue che

$$\beta_{G,S}(r) = |B_r^{G,S}(e)| = |\varphi(B_{r'}^{F(S),S}(e))| \leq |B_r^{F(S),S}(e)| = \beta_{F(S),S}(r).$$

□

ESEMPIO 2.11 (Funzione di crescita del gruppo libero). Consideriamo un gruppo libero non abeliano $F_{n\geq 2}$ e un suo insieme di generatori S. Dal suo grafo di Cayley deduciamo facilmente che

$$\beta_{F_n,S}(r) = 1 + 2n\sum_{j=0}^{r-1}(2n-1)^j = 1 + \frac{n}{n-1}((2n-1)^r - 1).$$

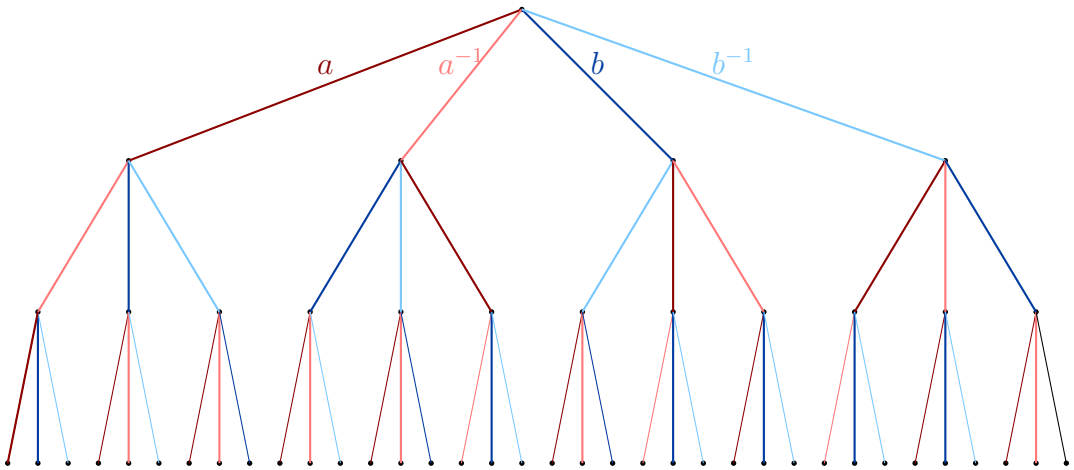


FIGURA 3. La palla in $(F_2, d_{\{a,b\}})$ di raggio 3 centrata in e. Essa ha cardinalità $\beta_{F_2,\{a,b\}}(3) = 53$.

2.2. Crescita di gruppi

In questa sezione generalizziamo la definizione di funzione di crescita e introduciamo una nozione di equivalenza per funzioni di crescita.

DEFINIZIONE 2.12 (Funzione di crescita generalizzata). Una *funzione di crescita generalizzata* è una funzione del tipo $\mathbb{R}_{\geq 0} \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ crescente.

ESEMPIO 2.13. Sia G un gruppo finitamente generato e sia $S \subseteq G$ un insieme finito di generatori; allora

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_{\geq 0} & \longrightarrow & \mathbb{R}_{\geq 0} \\ r & \longmapsto & \beta_{G,S}(\lfloor r \rfloor), \end{array}$$

è una funzione di crescita generalizzata (ed è submoltiplicativa). Chiamiamo tale funzione *funzione di crescita associata* alla funzione di crescita di G rispetto a S $\beta_{G,S}$.

DEFINIZIONE 2.14 (Quasi-dominanza). Siano $f, g\colon \mathbb{R}_{\geq 0} \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ due funzioni di crescita generalizzate; si dice che g *quasi-domina* f se esistono $c, b \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ tali che per ogni $r \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ valga $f(r) \leq cg(cr + b) + b$. In tal caso, si scrive $f \prec g$.

DEFINIZIONE 2.15 (Funzioni quasi-equivalenti). Siano $f, g : \mathbb{R}_{\geq 0} \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ due funzioni di crescita generalizzate; f e g sono *quasi-equivalenti* se $f \prec g$ e $g \prec f$: In tal caso si scrive $f \sim g$.

OSSERVAZIONE 2.16. La quasi-equivalenza è una relazione di equivalenza tra funzioni di crescita generalizzate; sull'insieme delle sue classi di equivalenza, la quasi-dominanza induce un ordine parziale.

ESEMPIO 2.17 (Quasi-dominanza e quasi-equivalenza). Vediamo alcuni esempi di funzioni di quasi-dominanza e quasi-equivalenza tra funzioni di crescita generalizzate:

(1) Sia $a \in \mathbb{R}_{\geq 0}$; consideriamo la funzione di crescita generalizzata

$$\begin{array}{rccc} f_a \colon & \mathbb{R}_{\geq 0} & \longrightarrow & \mathbb{R}_{\geq 0} \\ & x & \longmapsto & x^a. \end{array}$$

Per ogni $a, a' \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ con $a \leq a'$ abbiamo che per ogni $r \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ vale $r^a \leq r^{a'} + 1$; allora per ogni $a, a' \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ con $a \leq a'$, $f_a \prec f_{a'}$. Se invece $a > a'$, allora per ogni $b, c \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ $\lim_{r\to\infty} \frac{r^a}{c(cr+b)^{a'}+b} = +\infty$, quindi $f_a \not\prec f_{a'}$. Quindi $f_a \sim f_{a'}$ se e solo se $a = a'$.

(2) Sia $a \in \mathbb{R}_{>1}$; consideriamo la funzione di crescita generalizzata

$$\begin{array}{rccc} e_a \colon & \mathbb{R}_{\geq 0} & \longrightarrow & \mathbb{R}_{\geq 0} \\ & x & \longmapsto & a^x. \end{array}$$

Per ogni $a, a' \in \mathbb{R}_{>1}$ $e_a \sim e_{a'}$; inoltre $e_a \succ f_{a'}$ e $e_a \not\sim f_{a'}$ per ogni $a \in \mathbb{R}_{>1}$ e per ogni $a' \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Infine esiste una funzione di crescita generalizzata f tale che $f \prec e_a$ e $f \nsim e_a$ per ogni $a \in \mathbb{R}_{>1}$ e $f \prec f_{a'}$ e $f \nsim f_{a'}$ per ogni $a' \in \mathbb{R}_{\geq 0}$.

Possiamo applicare le definizioni di quasi-dominanza e quasi-equivalenza anche alle funzioni di crescita di gruppi finitamente generati grazie alle funzioni di crescita ad esse associate.

DEFINIZIONE 2.18 (Funzioni di crescita quasi-dominate). Siano G e H due gruppi e siano $S \subseteq G$ e $T \subseteq H$ loro insiemi finiti di generatori. Siano $\beta_{G,S}$ e $\beta_{H,T}$ rispettivamente le loro funzioni di crescita. Allora $\beta_{G,S}$ è *quasi-dominata* da $\beta_{H,T}$ se le loro funzioni di crescita associate lo sono. Nello specifico, $\beta_{G,S} \prec \beta_{H,T}$ se esistono $c, b \in \mathbb{N}$ tali che per ogni $r \in \mathbb{N}$ $\beta_{G,S}(r) \leq c\beta_{H,T}(cr + b) + b$.

DEFINIZIONE 2.19 (Funzioni di crescita quasi-equivalenti). Siano G e H due gruppi e siano $S \subseteq G$ e $T \subseteq H$ loro insiemi finiti di generatori. Siano $\beta_{G,S}$ e $\beta_{H,T}$ rispettivamente le loro funzioni di crescita. Allora $\beta_{G,S}$ è *quasi-equivalente* a $\beta_{H,T}$ se le loro funzioni di crescita associate lo sono.

FATTO 2.20 (Buona definizione della classe di equivalenza delle funzioni di crescita [**Löh17**, Proposition 6.4.2]). Sia G un gruppo finitamente generato e siano $S, T \subseteq G$ due insiemi finiti di generatori. Allora $\beta_{G,S} \sim \beta_{G,T}$. Quindi la classe di equivalenza della funzione di crescita di G non dipende dall'insieme di generatori.

Possiamo ora introdurre il *tipo di crescita* di un gruppo finitamente generato.

DEFINIZIONE 2.21 (Tipo di crescita di gruppi finitamente generati). Sia G un gruppo finitamente generato. Il *tipo di crescita* di G è la classe di quasi-equivalenza delle funzioni di crescita generalizzate di G rispetto a ogni insieme finito di generatori. In particolare:

(1) G ha *crescita esponenziale* se il suo tipo di crescita è quello della mappa esponenziale ($x \longmapsto e^x$).
(2) G ha *crescita subesponenziale* se il suo tipo di crescita è quasi-dominato da quello della mappa esponenziale ($x \longmapsto e^x$).
(3) G ha *crescita polinomiale* se il suo tipo di crescita è quasi-dominato dalla funzione ($x \longmapsto x^a$) per qualche $a \in \mathbb{R}_{\geq 0}$.
(4) G ha *crescita intermedia* se non ha crescita né esponenziale né polinomiale.

OSSERVAZIONE 2.22. La crescita di un gruppo finitamente generato G è al massimo esponenziale; infatti, per la Proposizione 2.10, se S è un insieme finito di generatori, $\beta_{G,S} \leq \beta_{F(S),S}$, dove $F(S)$ è il gruppo libero generato da S, che ha crescita esponenziale.

ESEMPIO 2.23 (Crescita di gruppi). Vediamo alcuni esempi di tipi di crescita di gruppi finitamente generati:

(1) Il gruppo $\mathbb{Z}^n$ ha crescita polinomiale per ogni $n \in \mathbb{N}$; in particolare, al variare di $n \in \mathbb{N}$, le sue funzioni di crescita sono quasi-equivalenti alla funzione ($x \longmapsto x^n$).
(2) I gruppi liberi non abeliani di rango finito hanno crescita esponenziale.

FATTO 2.24. Esistono gruppi di crescita intermedia. Questo fatto non è banale ed è stato dimostrato per la prima volta nel 1984 da Rostislav Grigorchuk che ne ha presentato come esempio il primo gruppo di Grigorchuk [**Gri84**].

PROPOSIZIONE 2.25 (La funzione di crescita di un gruppo quasi-domina quella di un suo sottogruppo). Sia G un gruppo finitamente generato e sia H un suo sottogruppo finitamente generato; siano $S \subseteq G$ e $T \subseteq H$ insiemi finiti di generatori. Allora $\beta_{H,T} \prec \beta_{G,S}$.

DIMOSTRAZIONE. Sia $S' := S \cup T$; allora S' è un insieme finito di generatori di G. Sia $r \in \mathbb{N}$, allora per ogni $h \in B_r^{H,T}(e)$ abbiamo:

$$d_{S'}(e,h) \leq d_T(e,h) \leq r.$$

Abbiamo così $B_r^{H,T}(e) \subseteq B_r^{G,S'}(e)$ e quindi $\beta_{H,T}(r) \leq \beta_{G,S'}(r)$. Questo mostra che $\beta_{H,T} \prec \beta_{G,S'}$. Ricordiamo che per il Fatto 2.20 $\beta_{G,S} \sim \beta_{G,S'}$; allora $\beta_{H,T} \prec \beta_{G,S}$. □

COROLLARIO 2.26 (Crescita esponenziale di un gruppo contenente un gruppo libero non abeliano di rango finito). Sia G un gruppo finitamente generato e sia $H \leq G$ un gruppo libero non abeliano di rango finito. Allora G ha crescita esponenziale.

DIMOSTRAZIONE. Poiché è un gruppo libero non abeliano di rango finito, H ha crescita esponenziale. Allora per la Proposizione 2.25 anche G ha crescita esponenziale. □

CAPITOLO 3

Gruppi amenabili

In questo capitolo introdurremo il concetto di *amenabilità* in Teoria dei Gruppi, studieremo alcune proprietà dei gruppi amenabili e infine vedremo come il concetto di amenabilità si lega a quello di crescita di gruppi di cui abbiamo parlato nel Capitolo 2.

3.1. Amenabilità tramite medie invarianti

Cominciamo introducendo l'amenabilità tramite *medie invarianti*. Proprio dalla parola *media*, in inglese *mean*, viene il termine *amenabilità*.

DEFINIZIONE 3.1 (L'insieme $\ell^\infty(X,\mathbb{R})$). Sia X un insieme. Indichiamo con $\ell^\infty(X,\mathbb{R})$ è l'insieme delle funzioni limitate da X a $\mathbb{R}$.

OSSERVAZIONE 3.2. L'insieme $\ell^\infty(X,\mathbb{R})$ si può dotare di struttura di spazio vettoriale reale con le operazioni di somma puntuale e di prodotto per scalari.

OSSERVAZIONE 3.3. Sia G un gruppo. Ogni azione sinistra di G su X induce un'azione sinistra di G su $\ell^\infty(X,\mathbb{R})$ tramite

$$\begin{array}{rcl} G \times \ell^\infty(X,\mathbb{R}) & \longrightarrow & \ell^\infty(X,\mathbb{R}) \\ (g,f) & \longmapsto & (x \mapsto f(g^{-1}\cdot x)). \end{array}$$

Infatti:

(1) La funzione $(x \longmapsto f(g^{-1}\cdot x))$ è limitata;
(2) L'elemento neutro di G agisce su una funzione $f \in \ell^\infty(X,\mathbb{R})$ mandandola in sé stessa;
(3) Per ogni $g,h \in G$, abbiamo che $(gh)\cdot f = g\cdot(h\cdot f)$.

Abbiamo ora tutti gli strumenti per definire un gruppo amenabile:

DEFINIZIONE 3.4 (Gruppo amenabile). Sia G un gruppo. Diciamo che G è *amenabile* se esiste una funzione lineare

$$m\colon \ell^\infty(X,\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$$

tale che:

(1) $m(1) = 1$;
(2) $m(f) \geq 0$ per ogni funzione f non negativa;
(3) $m(g\cdot f) = m(f)$ per ogni $f \in \ell^\infty(X,\mathbb{R})$ e per ogni $g \in G$.

Tale funzione m è detta *media invariante*.

ESEMPIO 3.5 (Amenabilità dei gruppi finiti). Tutti i gruppi finiti sono amenabili. Infatti basta prendere come media invariante la funzione

$$m(f) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} f(g).$$

Un importante esempio di gruppo non amenabile è il gruppo libero di rango 2. Lo dimostriamo nella seguente proposizione:

PROPOSIZIONE 3.6 (Non amenabilità del gruppo libero di rango 2). Il gruppo libero F_2 di rango 2 non è amenabile.

DIMOSTRAZIONE. Sia per assurdo F_2 amenabile tramite la funzione m. Sia $\{a, b\} \subset F_2$ un insieme di generatori e consideriamo l'insieme $A \subset F_2$ delle parole ridotte di F_2 che iniziano con una potenza non banale di a. Allora $F_2 = A \cup a^{-1}A$.

Per le proprietà delle medie invarianti, abbiamo:

$$1 = m(1) \leq m(\chi_A + \chi_{a^{-1}A}) = m(\chi_A) + m(\chi_{a^{-1}A}) =$$
$$= m(\chi_A) + m(a^{-1} \cdot \chi_A) = 2m(\chi_A) \Rightarrow m(\chi_A) \geq \frac{1}{2}.$$

Inoltre gli insiemi A, bA e b^2A sono disgiunti; allora abbiamo:

$$1 = m(1) \geq m(\chi_{A \sqcup bA \sqcup b^2A}) = m(\chi_A) + m(\chi_{bA}) + m(\chi_{b^2A}) =$$
$$= m(\chi_A) + m(b \cdot \chi_A) + m(b^2 \cdot \chi_A) = 3m(\chi_A) \geq \frac{3}{2} \Rightarrow 1 \geq \frac{1}{2},$$

che è assurdo. Ciò mostra che non può esistere una media invariante per F_2, quindi F_2 non è amenabile. □

3.2. Gruppi amenabili elementari

Abbiamo già visto che i gruppi finiti sono amenabili. Mostriamo ora che anche tutti i gruppi abeliani lo sono. Per farlo usiamo il seguente teorema, che enunciamo soltanto:

TEOREMA 3.7 (Teorema del punto fisso di Markov-Kakutani [**Pat88**, Proposition 0.14]). Sia V uno spazio vettoriale localmente convesso (ad esempio normato). Sia A un gruppo abeliano e sia $A \curvearrowright V$ un'azione di gruppo tramite mappe continue e lineari. Sia $K \subseteq V$ non vuoto, convesso, compatto e tale che $A \cdot K \subseteq K$. Allora esiste $x \in K$ tale che $a \cdot x = x$ per ogni $a \in A$.

PROPOSIZIONE 3.8 (Amenabilità dei gruppi abeliani). Tutti i gruppi abeliani sono amenabili.

DIMOSTRAZIONE. Sia G un gruppo abeliano. Lo spazio vettoriale $\ell^\infty(G, \mathbb{R})$ è normato tramite la norma

$$\|f\| \coloneqq \sup_{g \in G} |f(g)|;$$

inoltre l'azione di G su $\ell^\infty(G, \mathbb{R})$ è un'isometria.

Consideriamo il duale topologico L di $\ell^\infty(G,\mathbb{R})$ dotato di topologia debole-*; allora L eredita dall'azione isometrica sinistra di G su $\ell^\infty(G,\mathbb{R})$ un'azione di G sinistra tramite mappe continue e lineari.

Considero ora l'insieme

$$M \coloneqq \{m \in L \mid m(1) = 1, m(f) \geq 0 \ \forall f \geq 0\}.$$

L'insieme M è un sottospazio non vuoto, chiuso e convesso di L. Inoltre, $G \cdot M \subseteq M$ e per il Teorema di Banach-Alaoglou [**Lan93**, Chapter IV, Theorem 1.4] M è compatto. Allora, dato che G è abeliano, il Teorema del punto fisso di Markov-Kakutani implica che M contiene un punto fisso $m \in M$ per l'azione di $G \curvearrowright M$. Ne segue che m è la media invariante desiderata su G. □

Mostriamo ora le principali proprietà ereditarie dei gruppi amenabili.

Proposizione 3.9 (Proprietà ereditarie dei gruppi amenabili).

(1) I sottogruppi di gruppi amenabili sono amenabili.
(2) Le immagini tramite omomorfismi di gruppi amenabili sono amenabili.
(3) Sia
$$1 \longrightarrow N \xrightarrow{i} G \xrightarrow{\pi} Q \longrightarrow 1$$
un'estensione di gruppi. Allora G è amenabile se e solo se Q ed N sono amenabili.
(4) Sia G un gruppo e sia $(G_i)_{i\in I}$ un insieme diretto di sottogruppi amenabili di G tali che $G = \bigcup_{i\in I} G_i$. Allora G è amenabile.

Dimostrazione.

(1) Sia G un gruppo amenabile tramite media invariante m. Sia H un suo sottogruppo e sia $R \subseteq G$ un insieme di rappresentanti di G/H. Sia infine $s\colon G \longrightarrow H$ la funzione tale che $g \in s(g) \cdot R$ per ogni $g \in G$. Allora la funzione
$$\begin{aligned} m'\colon \ell^\infty(H,\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ f &\longmapsto m(f \circ s) \end{aligned}$$
è una media invariante per H, quindi H è amenabile.
(2) Sia G un gruppo amenabile tramite media invariante m. Sia $\pi\colon G \longrightarrow Q$ un omomorfismo di gruppi suriettivo. Allora
$$\begin{aligned} m'\colon \ell^\infty(Q,\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ f &\longmapsto m(f \circ \pi) \end{aligned}$$
è una media invariante per Q, quindi Q è amenabile.
(3) Sia G amenabile; allora N è amenabile per il punto (1), mentre Q lo è per il punto (2).

Viceversa, siano N e Q amenabili tramite medie invarianti m_N e m_Q. Supponiamo senza perdere di generalità che $N \leq G$ e $Q = G/N$. Allora la funzione
$$\begin{aligned} m'\colon \ell^\infty(G,\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ f &\longmapsto m_Q(g \cdot N \longmapsto m_N(n \longmapsto f(g \cdot n))) \end{aligned}$$

è una media invariante per G, quindi G è amenabile.

(4) Senza perdere di generalità supponiamo che $(G_i)_{i\in I}$ sia crescente. Per ogni $i \in I$, sia la funzione m_i la media invariante tramite cui G_i è amenabile. Consideriamo le funzioni

$$\begin{aligned} \widetilde{m_i}\colon \ell^\infty(G,\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ f &\longmapsto m_i(f\big|_{G_i}). \end{aligned}$$

Per il Teorema di Banach-Alaoglu [**Lan93**, Chapter IV, Theorem 1.4], esiste una sottosuccessione di $(m_i)_{i\in I}$ convergente a una funzione m. Allora m è una media invariante per G, quindi G è amenabile.

□

Le proprietà ereditarie dei gruppi amenabili hanno due importanti conseguenze che vediamo di seguito.

Corollario 3.10 (Caratterizzazione di un gruppo amenabile tramite i suoi sottogruppi finitamente generati). Sia G un gruppo. Allora G è amenabile se e solo se tutti i sottogruppi di G finitamente generati sono amenabili.

Dimostrazione. Sia G amenabile. Allora per il punto (1) della Proposizione 3.9, tutti i suoi sottogruppi sono amenabili.

Viceversa, siano tutti i sottogruppi finitamente generati di G amenabili. Essi formano un insieme diretto di gruppi $(G_i)_{i\in I}$ tale che $G = \bigcup_{i\in I} G_i$. Allora per il punto (4) della Proposizione 3.9, G è amenabile. □

Corollario 3.11 (Non amenabilità di un gruppo contenente un gruppo libero di rango 2). Sia G un gruppo contenente un sottogruppo libero di rango 2. Allora G non è amenabile.

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che G sia amenabile. Allora per il punto (1) della Proposizione 3.9, tutti i suoi sottogruppi sono amenabili. Quindi anche il gruppo libero di rango 2 sarebbe amenabile, ma questo è assurdo per la Proposizione 3.6. Quindi G non è amenabile. □

Fatto 3.12 (Esistenza di gruppi non amenabili non contenenti gruppi liberi). È invece falso il contrario: esistono gruppi non amenabili che non contengono sottogruppi liberi di rango 2. Il primo esempio di un gruppo con queste proprietà fu costruito da Ol'shanskii [**Ol'80**].

Chiamiamo *gruppi amenabili elementari* il più piccolo insieme contenente tutti i gruppi finiti o abeliani che sia chiuso per sottogruppi, quozienti, estensioni e unioni dirette. Denotiamo questo insieme con EG. Per le proprietà ereditarie dei gruppi amenabili, i gruppi amenabili elementari sono amenabili.

Abbiamo visto che i gruppi contenenti un sottogruppo libero di rango 2 non sono amenabili. Denotiamo l'insieme di tali gruppi con NF.

Denotiamo infine con AG l'insieme dei gruppi amenabili.

È chiaro che $EG \subseteq AG \subseteq NF$; meno evidente è però se queste inclusioni siano strette. Oggi sappiamo che non lo sono: ad esempio, il primo gruppo di Grigorchuk

appartiene alla classe $AG \setminus EG$ [**Gri84**]. Invece Ol'shanskii ha costruito un gruppo di torsione non amenabile appartenente alla classe $NF \setminus AG$ [**Ol'80**].

Il gruppo di Thompson F è stato introdotto inizialmente come possibile esempio per dimostrare che l'inclusione stretta di una di queste due inclusioni, ma tuttora non si sa se esso appartenga a $AG \setminus EG$ oppure a $NF \setminus AG$.

3.3. Crescita di gruppi e amenabilità

In questa sezione vediamo come i concetti di crescita di gruppi e amenabilità sono legati. Per farlo, innanzitutto diamo le seguenti definizioni.

DEFINIZIONE 3.13 (Spazio UDBG). Uno *spazio UDBG (uniformemente discreto e di geometria limitata)* è uno spazio metrico (X, d) tale che:

(1) $\inf\{d(x, x') \mid x, x' \in X, x \neq x'\} > 0$;
(2) Per ogni $r \in \mathbb{R}_{>0}$ esiste $k_r \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $x \in X$, $|B_r^{X,d}(x)| \leq k_r$.

ESEMPIO 3.14 (Un grafo di Cayley è UDBG). Sia G un gruppo finitamente generato e sia $S \subseteq G$ un insieme finito di generatori. Allora (G, d_S) è uno spazio UDBG. Infatti:

(1) $\inf\{d_S(g, g') \mid g, g' \in G, g \neq g'\} = 1 > 0$ perché per ogni $g, g' \in G$ $d_S(g, g') \in \mathbb{N}$;
(2) Per ogni $r \in \mathbb{R}_{>0}$ esiste $k_r \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $g \in G$, $|B_r^{G,d_S}(g)| \leq k_r$ perché G è finitamente generato.

DEFINIZIONE 3.15 (r-frontiera). Sia X uno spazio UDBG e sia $F \subseteq X$. Sia $r \in \mathbb{N}$. La *r-frontiera* di F in X è

$$\partial_r^X(F) := \{x \in X \setminus F \mid \exists f \in F \text{ t.c. } d(x, f) \leq r\}.$$

ESEMPIO 3.16. In Figura 1, vediamo un esempio di spazio UDBG e della sua r-frontiera.

A questo punto possiamo definire le successioni di Følner:

DEFINIZIONE 3.17 (Successione di Følner). Sia X uno spazio UDBG. Una *successione di Følner* in X è una successione $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$, con $F_n \subseteq X$ non vuoti, tale che per ogni $r \in \mathbb{N}$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\left|\partial_r^X(F_n)\right|}{|F_n|} = 0.$$

OSSERVAZIONE 3.18. Sia G un gruppo finitamente generato e sia $S \subseteq G$ un insieme finito di generatori. Allora per ogni $F \subseteq G$ abbiamo:

$$\partial_1^{(G,d_S)}(F) = \{g \in G \setminus F \mid \exists s \in S \cup S^{-1} \text{ t.c. } gs \in F\} = F \cdot (S \cup S^{-1}) \setminus F,$$

quindi $\partial_1^{(G,d_S)}(F)$ è piccolo rispetto a F se $g \cdot (S \cup S^{-1}) \subseteq F$ per molti $g \in G$.

ESEMPIO 3.19 (Successione di Følner in $\mathbb{Z}^n$). Consideriamo il gruppo $\mathbb{Z}^n$ e il suo insieme canonico di generatori $S = \{e_1, ...e_n\}$. Una successione di Følner per

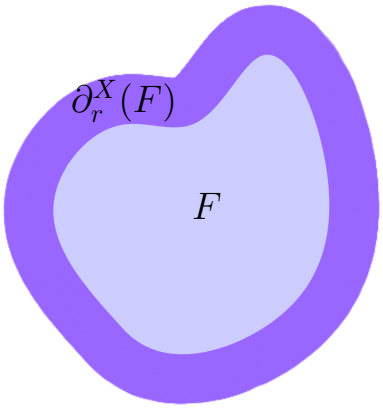


FIGURA 1. In lilla, un sottospazio F di uno spazio UDBG X. In viola, la sua r-frontiera.

$(\mathbb{Z}^n, d_S)$ è la successione $(F_k)_{k\in\mathbb{N}}$, dove per ogni $k \in \mathbb{N}$ l'insieme $F_k = \{-k, ..., k\}^n$, ossia l'insieme al variare di $n \in \mathbb{N}$ dei vettori di Z^n con coordinate in $\{-k, ..., k\}$.

Ad esempio, in $\mathbb{Z}^2$, i primi tre elementi di questa successione sono quelli raffigurati in Figura 2 insieme alle rispettive 1-frontiere. Allora $\left|F_k\right| = (2k+1)^2$ e $\left|\partial_1^X(F_n)\right| = 4(2k+1)$, quindi

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{\left|\partial_1^{\mathbb{Z}^n}(F_n)\right|}{|F_n|} = \lim_{k\to+\infty} \frac{4(2k+1)}{(2k+1)^2} = 0.$$

PROPOSIZIONE 3.20 (Caratterizzazione degli spazi con successioni di Følner). Sia X uno spazio UDBG. Allora X ha una successione di Følner se e solo se per ogni $r \in \mathbb{N}$ e per ogni $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ esiste $F \subseteq X$ non vuoto tale che $\frac{|\partial_r^X(F)|}{|F|} < \varepsilon$.

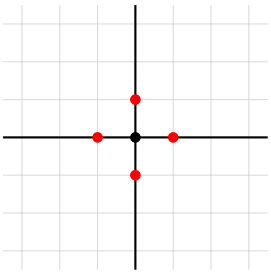
DIMOSTRAZIONE. Sia $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di Følner per X. Allora per ogni $r \in \mathbb{N}$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\left|\partial_r^X(F_n)\right|}{|F_n|} = 0,$$

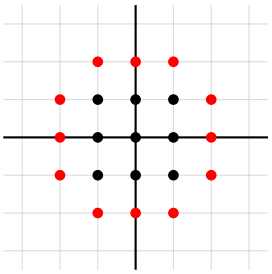
ossia per ogni $r \in \mathbb{N}$ e per ogni $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ esiste $N \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq N$ vale

$$\frac{\left|\partial_r^X(F_n)\right|}{|F_n|} < \varepsilon.$$

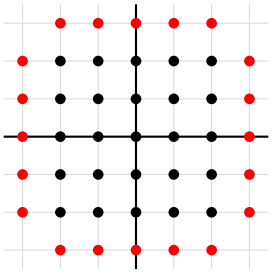
Viceversa, se per ogni $r \in \mathbb{N}$ e per ogni $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ esiste $F \subseteq X$ non vuoto tale che $\frac{|\partial_r^X(F)|}{|F|} < \varepsilon$, allora per ogni $r \in \mathbb{N}$ esiste $F_n \subseteq X$ non vuoto tale che $\frac{|\partial_r^X(F_n)|}{|F_n|} < \frac{1}{n}$, quindi esiste una successione $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ di Følner. □



(A) Il punto nero è $F_0 = \{(0,0)\}$, i punti rossi sono $\partial_1^{\mathbb{Z}^2}(F_0)$.



(B) I punti neri sono $F_1 = \{-1,0,1\}^2$, i punti rossi $\partial_1^{\mathbb{Z}^2}(F_1)$.



(C) I punti neri sono $F_2 = \{-2,-1,0,1,2\}^2$, i punti rossi $\partial_1^{\mathbb{Z}^2}(F_2)$.

FIGURA 2. I primi tre elementi della successione di Følner $(F_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{Z}^2$ e le loro 1-frontiere.

Vogliamo ora mostrare che un gruppo con crescita subesponenziale è amenabile. Per farlo, cominciamo col dimostrare che se un gruppo finitamente generato ha crescita subesponenziale (Definizione 2.21, Punto 2), allora ammette una successione di Følner.

PROPOSIZIONE 3.21 (Esistenza di una successione di Følner per spazi con crescita subesponenziale). Sia X uno spazio UDBG e sia $x_0 \in X$. Sia $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la successione così definita: per ogni $n \in \mathbb{N}$, $F_n \coloneqq B_n^X(x_0)$. Se la funzione di crescita di X

$$\begin{aligned} \beta : \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{N} \\ n &\longmapsto |F_n|, \end{aligned}$$

ha crescita subesponenziale, allora esiste una sottosuccessione di $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ che è di Følner per X.

DIMOSTRAZIONE. Poiché β ha crescita subesponenziale, per ogni $r \in \mathbb{N}$, per ogni $N \in \mathbb{N}$ e per ogni $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$, esiste $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq N$ tale che

$$\frac{\beta(n+r)}{\beta(n)} < 1 + \varepsilon.$$

Infatti se per assurdo esistessero $r, N \in \mathbb{N}$ e $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ tali che per ogni $n \in \mathbb{N}, n \geq N$,

$$\frac{\beta(n+r)}{\beta(n)} \geq 1 + \varepsilon,$$

allora per ogni $k \in \mathbb{N}$ avremmo che

$$\beta(N + kr) \geq (1 + \varepsilon)^k \beta(N).$$

Da ciò seguirebbe che β quasi-domina la funzione esponenziale e quindi avrebbe crescita esponenziale.

Per ogni $j \in \mathbb{N}$, prendiamo $r = j$, $N = n_{j-1} + 1$ e $\varepsilon = 1/j$; allora possiamo costruire induttivamente una successione $(n_j)_{j\in\mathbb{N}}$ strettamente crescente tale che per ogni $j \in \mathbb{N}$

$$\frac{\beta(n_j + j)}{\beta(n_j)} < 1 + \frac{1}{j}.$$

Per ogni $r, n \in \mathbb{N}$

$$\partial_n^X F_n \subseteq B_{n+r}^X(x_0) \setminus B_n^X(x_0).$$

Allora

$$|\partial_n^X F_n| \leq |B_{n+r}^X(x_0) \setminus B_n^X(x_0)| = \beta(n + r) - \beta(n).$$

Quindi per ogni $j \in \mathbb{N}_{\geq r}$

$$\frac{|\partial_r^X F_{n_j}|}{|F_{n_j}|} \leq \frac{\beta(n_j + j) - \beta(n_j)}{\beta(n_j)} = \frac{\beta(n_j + j)}{\beta(n_j)} - 1 < \frac{1}{j}.$$

Allora

$$\frac{|\partial_r^X F_{n_j}|}{|F_{n_j}|} \xrightarrow[j\to\infty]{} 0.$$

Ciò mostra che $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ammette una sottosuccessione di Følner. □

Corollario 3.22 (Esistenza di una successione di Følner per gruppi finitamente generati con crescita subesponenziale). Sia G un gruppo finitamente generato con crescita subesponenziale. Sia $S \subseteq G$ un insieme finito di generatori. Allora (G, d_S) ha una successione di Følner.

Dimostrazione. Innanzitutto, dato che il gruppo G è finitamente generato sappiamo che (G, d_S) è uno spazio UDBG. Consideriamo la successione $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ data da $F_n := B_n^{G,S}(e)$. Allora la funzione di crescita

$$\begin{array}{rcl} \beta : \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ n & \longmapsto & |F_n|, \end{array}$$

non è altro che la funzione di crescita di G rispetto a S, che ha crescita subesponenziale per ipotesi. Quindi, per la Proposizione 3.21, (G, d_S) ammette una successione di Følner. □

Vogliamo concludere dimostrando che ogni gruppo finitamente generato con crescita subesponenziale è amenabile. Prima però, diamo le seguenti definizioni:

Definizione 3.23 (Filtro). Sia X un insieme non vuoto. Un *filtro* su X è una collezione S di sottoinsiemi di X tale che:

(1) $\varnothing \in S$;
(2) Se $A, B \in S$, allora $A \cap B \in S$;
(3) Se $A \in S$ e $A \subseteq B$, allora $B \in S$.

ESEMPIO 3.24. Sia X uno spazio topologico e sia $x \in X$. L'insieme degli intorni di x è un filtro su X.

DEFINIZIONE 3.25 (Ultrafiltro). Sia X un insieme non vuoto. Un *ultrafiltro* su X è un filtro S tale che, per ogni $A \subseteq X$, o $A \in S$ oppure $X \setminus A \in S$.

DEFINIZIONE 3.26 (Ultrafiltro principale). Sia X un insieme non vuoto e sia S un ultrafiltro su X. Diremo che S è un ultrafiltro *principale* se esiste un elemento $s \in X$ tale che $S = \{A \subseteq X \mid s \in A\}$.

DEFINIZIONE 3.27 (Limite lungo un ultrafiltro). Sia $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione limitata e sia S un ultrafiltro su $\mathbb{N}$. Il *limite lungo* S di $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è il numero $L \in \mathbb{R}$ tale che per ogni intorno U di L, $\{n \in \mathbb{N} \mid x_n \in U\} \in S$.

TEOREMA 3.28 (Amenabile $\Leftrightarrow$ Følner). Sia G un gruppo finitamente generato e sia $S \subseteq G$ un insieme finito di generatori. Allora G è amenabile se e solo se (G, d_s) ha una successione di Følner.

DIMOSTRAZIONE. Sia $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di Følner per G e sia ω un ultrafiltro non principale su $\mathbb{N}$. Considero la funzione

$$\begin{aligned} m\colon \ell^\infty(G,\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ f &\longmapsto \lim_{n\in\omega} \tfrac{1}{|F_n|} \textstyle\sum_{g\in F_n} f(g). \end{aligned}$$

Allora:

(1) $m(1) = 1$;
(2) Se $f \geq 0$, allora $m(f) \geq 0$;
(3) Poiché gli insiemi di Følner sono quasi invarianti, il limite è invariante per l'azione di un elemento di G su F_n, quindi $m(h \cdot f) = m(f)$ per ogni $h \in G$.

Quindi m è una media invariante per G.

Viceversa, sia G amenabile. Sappiamo che lo spazio $\ell^1(G,\mathbb{R})$ è denso nel suo doppio duale dotato di topologia debole-*, che coincide con il duale di $\ell^\infty(G,\mathbb{R})$. Allora ogni media invariante m di G è il limite di una successione di funzioni in $\ell^1(G,\mathbb{R})$, che a loro volta sono limiti di successioni di funzioni in $\ell^1(G,\mathbb{R})$ con supporto finito. Tuttavia le medie m sono per definizione invarianti, quindi i supporti finiti di tali funzioni sono quasi invarianti. Da essi si ottengono gli insiemi di Følner di G tramite la loro caratterizzazione nella Proposizione 3.20. □

COROLLARIO 3.29 (Amenabilità dei gruppi finitamente generati con crescita subesponenziale). Ogni gruppo finitamente generato con crescita subesponenziale è amenabile.

DIMOSTRAZIONE. Sia G un gruppo finitamente generato con crescita subesponenziale. Allora per il Corollario 3.22, G ammette una successione di Følner. Il Teorema 3.28 G mostra che è amenabile.

□

In linea con quanto mostrato, possiamo estendere la definizione di amenabilità agli spazi UDBG:

Definizione 3.30 (Spazio amenabile). Uno *spazio amenabile* è uno spazio UDBG che ha una successione di Følner.

CAPITOLO 4

Il problema dell'amenabilità del gruppo F

In questo capitolo studieremo la crescita del gruppo di Thompson F in relazione con il problema di stabilire la sua amenabilità.

4.1. La crescita del gruppo F

Iniziamo studiando la crescita del gruppo F. Per prima cosa, dimostriamo la seguente proposizione:

PROPOSIZIONE 4.1 (Esistenza di un monoide libero in F). Il sottomonoide di F generato da $\{x_0^{-1}, x_1\}$ è libero. Qui gli elementi x_0, x_1 denotano i generatori di F descritti nel Teorema 1.30.

DIMOSTRAZIONE. Ogni parola appartenente al monoide generato da $\{x_0^{-1}, x_1\}$ è della forma

$$x_1^{a_1} x_0^{-1} x_1^{a_2} x_0^{-1} ... x_1^{a_{n-1}} x_0^{-1} x_1^{a_n},$$

con $a_i \geq 0$ per ogni $i = 1, ..., n$. La forma normale di tale parola, ottenuta spostando a destra gli x_0^{-1}, è

$$x_1^{a_1} x_2^{a_2} ... x_n^{a_n} x_0^{-n+1}.$$

Quindi siano

$$x_1^{a_1} x_0^{-1} x_1^{a_2} x_0^{-1} ... x_1^{a_{n-1}} x_0^{-1} x_1^{a_n},$$
$$x_1^{b_1} x_0^{-1} x_1^{b_2} x_0^{-1} ... x_1^{b_{m-1}} x_0^{-1} x_1^{b_m},$$

due elementi del monoide generato da $\{x_0^{-1}, x_1\}$, essi sono uguali se e solo se $n = m$ e $a_i = b_i$ per ogni $i = 1, ..., n$.

Quindi ogni parola in x_0^{-1} e x_1 rappresenta un diverso elemento di F. Ciò mostra che il sottomonoide di F generato da $\{x_0^{-1}, x_1\}$ è libero. □

Dalla proposizione precedente deduciamo che il gruppo F ha crescita esponenziale.

TEOREMA 4.2 (Crescita di F). Il gruppo di Thompson F ha crescita esponenziale.

DIMOSTRAZIONE. Per il Teorema 1.30, il gruppo F è generato dagli elementi $\{x_0, x_1\}$. Allora anche $S \coloneqq \{x_0^{-1}, x_1\}$ è un insieme di generatori di F.

Considero la funzione di crescita di F rispetto a S

$$\begin{aligned} \beta_{F,S} \colon \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{N} \\ r &\longmapsto |B_r^{F,S}|. \end{aligned}$$

Per la Proposizione 4.1, il sottomonoide generato da S è libero; allora per ogni $r \in \mathbb{N}$

$$|B_r^{F,S}| \geq 2^r.$$

Ciò mostra che $\beta_{F,S}$ quasi domina la funzione esponenziale, quindi F ha crescita esponenziale. □

4.2. Il problema dell'amenabilità del gruppo F

In questa sezione studiamo il problema dell'amenabilità del gruppo di Thompson F.

Iniziamo osservando che F non appartiene alla classe dei gruppi amenabili elementari.

TEOREMA 4.3 (Non amenabilità elementare di F). Il gruppo F non è un gruppo amenabile elementare.

DIMOSTRAZIONE. Costruiamo le classi di gruppi EG_α come segue: EG_0 è la classe contenente tutti i gruppi finiti e abeliani, EG_α è la classe dei gruppi che possono essere costruiti a partire da elementi di $\bigcup_{\beta<\alpha} EG_\beta$ tramite estensioni e unioni dirette.

Per definizione, ogni classe EG_α è chiusa per sottogruppi e quozienti, quindi

$$EG = \bigcup_\alpha EG_\alpha.$$

Poiché F non è né finito né abeliano, F non appartiene alla classe EG_0. Inoltre, poiché è finitamente generato, F non può essere espresso come unione diretta non banale di gruppi. Ci resta da mostrare che non può essere espresso neanche come estensione non banale di gruppo di EG_α per qualche α.

Supponiamo per assurdo che esista un'estensione di gruppi

$$1 \longrightarrow N \xrightarrow{i} F \xrightarrow{\pi} Q \longrightarrow 1,$$

con $N, Q \in EG_\beta$ per qualche $\beta < \alpha$.

Il gruppo N è normale in F, quindi per il Teorema 1.40 il gruppo N contiene il sottogruppo commutatore $[F, F]$ di F. Allora per l'Osservazione 1.39 e per la Proposizione 1.37, N contiene una copia di F. Ma allora, poiché la classe EG_β è chiusa per sottogruppi, anche F dovrebbe appartenere a EG_β, che è assurdo. Questo mostra che F non può essere ottenuto tramite estensione di gruppi e quindi F non appartiene alla classe EG. □

Abbiamo mostrato che F non è amenabile elementare. Mostriamo ora che tuttavia F non contiene un gruppo libero di rango 2.

TEOREMA 4.4 (Assenza di gruppi liberi di rango 2). Il gruppo F non contiene un sottogruppo libero di rango 2.

DIMOSTRAZIONE. Siano f e g due elementi del gruppo F e sia $H = \langle f, g\rangle \subseteq F$ il sottogruppo da essi generato. Vogliamo mostrare che H non è un sottogruppo libero. Questo mostra la tesi.

Consideriamo due casi.

Per prima cosa supponiamo che f e g non abbiamo punti fissi in comune contenuti in $(0,1)$. Allora ogni $t \in (0,1)$ può essere mandato arbitrariamente vicino a 0 da elementi di H. Infatti se per assurdo esistesse $t \in (0,1)$ tale che la sua orbita $\mathcal{O}$ di t avesse un estremo inferiore maggiore di 0, allora per monotonia di f e g avremmo:

$$f(\inf \mathcal{O}) = \inf f(\mathcal{O}) = \inf \mathcal{O};$$
$$g(\inf \mathcal{O}) = \inf g(\mathcal{O}) = \inf \mathcal{O};$$

ossia $\inf \mathcal{O}$ sarebbe un punto fisso comune a f e g contenuto in $(0,1)$.

Consideriamo ora il commutatore $[f,g]$ di f e g, che ha come supporto l'intervallo $(a,b) \subset (0,1)$, e l'elemento $h \in \langle f, g\rangle$ tale che $h(b) < a$. Consideriamo il coniugato di $[f,g]$ per h

$$[f,g]^h \coloneqq h^{-1}[f,g]h.$$

Allora abbiamo:

$$\mathrm{supp}[f,g]^h = h^{-1}(\mathrm{supp}[f,g]) = h^{-1}(a,b) = (h^{-1}(a), h^{-1}(b)).$$

Poiché h è monotona crescente, $h^{-1}(a) > b$, si ha che

$$(h^{-1}(a), h^{-1}(b)) \cap (a,b) = \varnothing,$$

quindi

$$\mathrm{supp}[f,g]^h \cap \mathrm{supp}([f,g]) = \varnothing.$$

Allora $[f,g]^h$ e $[f,g]$ commutano, quindi f e g non generano un gruppo libero.

Supponiamo invece che f e g abbiano un punto fisso in comune appartenente a $(0,1)$. Allora il supporto di $\langle f, g\rangle$ è l'unione delle parti interne di un numero finito di intervalli diadici $I_1, ...I_n$. Da ciò segue che l'omomorfismo

$$\begin{array}{rcl} f\colon H = \langle f, g\rangle & \longrightarrow & PL_2(I_1) \times ... \times PL_2(I_n) \\ h & \longmapsto & (h|_{I_1}, ..., h|_{I_n}), \end{array}$$

è iniettivo.

Consideriamo ora il gruppo libero di rango 2 generato da a e b e la funzione

$$\begin{array}{rcl} \pi\colon F_2 & \longrightarrow & \langle f, g\rangle \\ a & \longmapsto & f \\ b & \longmapsto & g. \end{array}$$

Consideriamo inoltre per ogni $k \in \{1, ..., n\}$ la funzione

$$\begin{array}{rcl} f_k\colon H = \langle f, g\rangle & \longrightarrow & PL_2(I_k) \\ h & \longmapsto & h|_{I_k}. \end{array}$$

Per ogni $k \in \{1, ..., n\}$, f e g non hanno punti fissi in comune appartenenti a I_k perché $I_k \subseteq \mathrm{supp}H$; allora, per quanto visto sopra, $f_k(H) \subseteq PL_2(I_k)$ non è un gruppo libero. Da ciò segue che per ogni $k \in \{1, ..., n\}$, $\mathrm{Ker}(f_k \circ \pi) \neq \{Id\}$.

Allora abbiamo:

$$\mathrm{Ker}(f \circ \pi) = \bigcap_{k=1}^{n} \mathrm{Ker}(f_k \circ \pi) \neq \{Id\}$$

perché l'intersezione finita di sottogruppi normali non banali di F è non banale.

Ciò mostra che $\mathrm{Ker}(\pi) \neq \{Id\}$, quindi il sottogruppo $H = \langle f, g \rangle$ non è libero. □

Ricordiamo che EG indica la classe dei gruppi amenabili elementari, AG quella dei gruppi amenabili e FN quella dei gruppi non contenenti un sottogruppo libero di rango 2. Abbiamo le seguenti inclusioni:

$$EG \subseteq AG \subseteq NF.$$

Abbiamo mostrato che il gruppo di Thompson $F \notin EG$ e $F \in NF$. Resta ora da determinare se F appartiene alla classe $FN \setminus AG$ oppure $AG \setminus EG$.

Per il Corollario 3.29, se il gruppo F avesse crescita subesponenziale, allora sarebbe amenabile. Tuttavia abbiamo mostrato nel Teorema 4.2 che F ha crescita esponenziale, quindi non possiamo usare questo risultato per determinare se F sia amenabile o meno.

L'amenabilità del gruppo F è ancora un problema aperto. Nel corso degli anni sono stati pubblicati diversi articoli che presentavano dimostrazioni dell'amenabilità o della non amenabilità di F, ma tutte sono state provate errate [**Sap14**].

Bibliografia

[Bel04] James M. Belk. *Thompson's Group F*. PhD thesis, Cornell University, 2004.

[Day57] Mahlon M. Day. Amenable semigroups. *Illinois Journal of Mathematics*, 1(4):509–544, 1957.

[Gri84] Rostislav I. Grigorchuk. Degrees of growth of finitely presented groups and the theory of invariant means. *Izvestiya Akademii Nauk SSSR. Seriya Matematicheskaya*, 48(5):939–985, 1984.

[Lan93] Serge Lang. *Real and Functional Analysis*, volume 142 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, New York, 3 edition, 1993.

[Löh17] Clara Löh. *Geometric Group Theory: An Introduction*. Universitext. Springer, Cham, 2017.

[Ol'80] Alexander Yu. Ol'shanskii. On the problem of the existence of an invariant mean on a group. *Uspekhi Matematicheskikh Nauk*, 35(4):199–200, 1980.

[OS03] Alexander Yu. Ol'shanskii and Mark V. Sapir. Non-amenable finitely presented torsion-by-cyclic groups. *Publications Mathématiques de l'IHÉS*, 96:43–169, 2003.

[Pat88] Alan L. T. Paterson. *Amenability*, volume 29 of *Mathematical Surveys and Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, 1988.

[Sap14] Mark Sapir. Another false proof of nonamenability of the r. thompson group f, 2014.