

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

SCUOLA DI SCIENZE
Corso di Laurea in Matematica

∞ -categorie e
Omotopia Simpliciale

Tesi di Laurea in Logica Matematica

Relatore:
Chiar.mo Prof.
Martino Lupini

Presentata da:
Lorenzo Baldinini

Anno Accademico 2025/2026

Introduzione

La teoria delle categorie è una branca della matematica introdotta nella seconda metà del Novecento principalmente grazie ai lavori nella topologia algebrica di Samuel Eilenberg e Saunders Mac Lane. La potenza di questa teoria è stata la sua capacità di unificare ambiti a prima visto molto distanti della matematica.

Il primo capitolo di questa tesi ha l'obiettivo di introdurre il lettore a una discussione generale di teoria delle categorie, pur preparando il terreno per quello che verrà dopo, in particolare soffermandosi sull'intrinseca natura omotopica delle categorie e sul Lemma di Yoneda (si vedano le Sezioni 1.2 e 1.3). Infine, poiché sono argomenti che non vengono trattati in una triennale di matematica, si parlerà di limiti, colimiti e funtori aggiunti, i quali saranno usati più come strumenti tecnici nel resto della trattazione.

Dunque, nel secondo capitolo, che rappresenta lo scheletro vero e proprio della discussione, verranno introdotti gli insiemi simpliciali nella loro versione più astratta. Questi sono un sorprendente strumento combinatorio, le cui applicazioni spaziano dall'essere un potente modello per gli spazi topologici, grazie alla realizzazione geometrica, a un ambiente per poter formalizzare uno dei principali protagonisti di questa tesi, ossia le ∞ -categorie. Gli insiemi simpliciali furono introdotti negli anni '50 da Samuel Eilenberg e Joseph Zilber.

Si comincia parlando della categoria simpliciale Δ , che ha come oggetti gli insiemi linearmente ordinati e finiti $[n] = \{0, \dots, n\}$, e come morfismi le funzioni monotone $[m] \rightarrow [n]$. Verrà osservato che ogni morfismo si può scrivere unicamente come composizione di frecce fondamentali, dette mappe di cofaccia e codegenerazione. Dunque si definiscono gli insiemi simpliciali come funtori controvarianti da Δ alla categoria degli insiemi **Set**. Le elementari proprietà combinatoriche di cui gode Δ vengono ereditate dagli insiemi simpliciali e, anzi, permettono di caratterizzarli. Intuitivamente, si può pensare a un insieme simpliciale come la generalizzazione a più dimensioni di un grafo orientato, in cui, oltre a esserci gli archi 1-dimensionali, vi sono anche celle di dimensione maggiore (chiamati genericamente n -simplessi), che però interagiscono con quelle di dimensione inferiore in un modo preciso. La collezione degli insiemi simpliciali può essere

naturalmente resa una categoria e mostreremo che essa è completa e cocompleta, ossia contiene tutti i limiti e colimiti (piccoli). Inoltre parleremo di sottoinsiemi simpliciali e, in particolare, ci interesseranno i sottoinsiemi degli insiemi simpliciali Δ^n , rappresentati dagli oggetti della categoria Δ . Questi avranno fin da subito una precisa direzione geometrica che verrà resa più chiara avanti. Un altro importante tassello è legato alla buona positura della dimensione di un simpleso in un insieme simpliciale, grazie al Lemma di Eilenberg–Zilber. Questa parte, inoltre, è legata alla nozione di k -scheletro di un insieme simpliciale $X_\bullet$, che si può pensare come il più grande sottoinsieme simpliciale costituito da semplici di dimensione $\leq k$. In particolare, si avrà che $X_\bullet = \bigcup_{k \geq 0} \text{sk}_k(X_\bullet)_\bullet$ e ciascuno k -scheletro è ottenuto dal precedente “attaccando” dei k -semplici non degeneri (ossia di dimensione k). Quest’ultimo è effettivamente uno dei primi fatti non banali sugli insiemi simpliciali e che avrà una ripercussione geometrica.

Successivamente, nella Sezione 2.4, vorremo introdurre degli esempi veri e propri di insiemi simpliciali. La costruzione concreta di un insieme simpliciale è in realtà abbastanza semplice: basta elencare i semplici non degeneri, specificando le mappe di faccia per questi. Invece di concentrarci su questa tipologia di esempi, vorremo introdurre una classe di insiemi simpliciali. In breve, a partire da un qualsiasi funtore covariante $F : \Delta \rightarrow \mathcal{E}$ si può costruire una coppia di funtori aggiunti $L : \mathbf{sSet} \rightleftarrows \mathcal{E} : R$ con la proprietà che, per ogni $n \geq 0$, $L(\Delta^n) \cong F([n])$. In corrispondenza dell’immersione $\Delta \hookrightarrow \mathbf{Cat}$ si ha la coppia $\tau_1 : \mathbf{sSet} \rightleftarrows \mathbf{Cat} : N$. N è il funtore che ad ogni categoria piccola associa l’insieme simpliciale che ha come 0-semplici gli oggetti, come 1-semplici i morfismi e, in generale, come n -semplici stringhe di n morfismi componibili. In questo caso, studieremo nel capitolo successivo l’aggiunto sinistro τ_1 per una sottoclasse notevole di insiemi simpliciali. L’altro esempio fondamentale è dato in corrispondenza del funtore $\Delta \rightarrow \mathbf{Top}$ che realizza $[n]$ come il n -simpleso standard Δ_n e le mappe di cofaccia e codegenerazione come precise funzioni continue tra i semplici. Ad esso corrisponde la coppia $|-| : \mathbf{sSet} \rightleftarrows \mathbf{Top} : \text{Sing}$, con Sing che associa ad ogni spazio topologico un insieme simpliciale, che ha come n -semplici i n -semplici singolari $|\Delta^n| \rightarrow X$ e le cui proprietà verranno approfondite nell’ultimo capitolo, mentre $|-|$ è il funtore di realizzazione geometrica, la cui trattazione occupa la Sezione 2.5. Capendo meglio come sono fatte le realizzazioni dei sottoinsiemi di Δ^n e sfruttando la costruzione induttiva degli insiemi simpliciali tramite i k -scheletri, saremo in grado di mostrare che ogni realizzazione geometrica è un CW-complesso ottenuto “attaccando” iterativamente delle k -celle in corrispondenza dei k -semplici non degeneri.

Nel terzo Capitolo ci sposteremo verso lo studio della natura omotopica degli insiemi simpliciali. Infatti, nonostante siano nati come semplice strumento combinatorio, più

recentemente gli insiemi simpliciali hanno trovato spazio di applicazioni nella teoria delle categorie superiori e in quella dell'omotopia, in quanto forniscono un semplice modello delle cosiddette ∞ -categorie e ∞ -gruppidi. Questo contributo si deve inizialmente a J. Michael Boardman e Rainer Vogt.

In questa parte penseremo agli insiemi simpliciali come a una generalizzazione a più dimensioni di una categoria, in cui un $(n + 1)$ -simpleso rappresenta, in qualche modo, un “morfismo” tra n -simplessi. In particolare, una ∞ -categoria è un insieme simpliciale $X_\bullet$ che soddisfa una precisa condizione di riempimento: per ogni $0 < i < n$, una mappa $\Lambda_i^n \rightarrow X_\bullet$ si può estendere a un n -simpleso $\Delta^n \rightarrow X_\bullet$. I ∞ -gruppidi, invece, soddisfano in aggiunta la condizione di avere tutti i 1-simplessi (o morfismi) invertibili. Per praticità, al posto di questi ultimi, utilizzeremo i complessi di Kan, che sono insiemi simpliciali $X_\bullet$ con la proprietà che tutte le mappe $\Lambda_i^n \rightarrow X_\bullet$ si estendono a n -simplessi (senza restrizioni sugli indici). Nella Sezioni 3.1 e 3.2, mostreremo che il nervo di una categoria è una ∞ -categoria, mentre il nervo di un gruppoide e l'insieme simpliciale singolare di uno spazio topologico sono complessi di Kan.

Nelle Sezioni 3.3 e 3.4, invece, ci concentreremo sulla nozione di omotopia tra morfismi e vedremo come questa ci permetterà di associare a una ∞ -categoria una categoria “ordinaria”, detta categoria omotopica. Inoltre vedremo che questa categoria è in realtà legata alla costruzione dell'aggiunto sinistro τ_1 . Come caso particolare, vedremo la costruzione del gruppoide fondamentale $\Pi_{\leq 1}(X)$ di uno spazio topologico X come categoria omotopica di $\text{Sing}(X)$.

Infine, nella quinta e ultima Sezione ci occuperemo dell'omotopia simpliciale in qualsiasi dimensione, anche se per farlo dovremo restringerci alla trattazione dei soli complessi di Kan. Questo ci permetterà di associare a un complesso di Kan $X_\bullet$ i propri gruppi di omotopia $\pi_n(X_\bullet, v)$, per ogni $n \geq 0$, e l'insieme delle componenti connesse $\pi_0(X_\bullet)$. Come immediata applicazione di ciò, otterremo i gruppi di omotopia superiore di uno spazio topologico X . Questo ci permetterà di riconsiderare l'insieme simpliciale singolare $\text{Sing}(X)$ come il ∞ -gruppoide *fondamentale* di X , indicato $\Pi_\infty(X)$, nel senso che tale invariante estende all'infinito il gruppoide fondamentale $\Pi_{\leq 1}(X)$, poiché contiene tutta l'informazione omotopica dello spazio X .

Indice

Introduzione	i
1 Teoria delle categorie	1
1.1 Categorie e funtori	1
1.2 Trasformazioni naturali e la 2-categoria delle categorie	6
1.3 Funtori rappresentabili e Lemma di Yoneda	8
1.4 Limiti e colimiti	10
1.5 Funtori aggiunti	14
2 Insiemi simpliciali	17
2.1 Categoria simpliciale	17
2.2 Insiemi simpliciali	19
2.3 Simplessi degeneri e dimensione di un insieme simpliciale	25
2.4 Esempi naturali di insiemi simpliciali	30
2.5 Realizzazione geometrica di un insieme simpliciale	37
3 ∞-categorie e Omotopia Simpliciale	41
3.1 Oggetti e morfismi in un insieme simpliciale	41
3.2 ∞ -categorie e complessi di Kan	45
3.3 Omotopia di morfismi	46
3.4 Categoria omotopica di una ∞ -categoria	50
3.5 Gruppi di omotopia	52
Bibliografia	56

Capitolo 1

Teoria delle categorie

In questo capitolo introdurremo dei concetti basilari di teoria delle categorie, che verranno utilizzati nei capitoli successivi. Per evitare di avere semplicemente una lista di definizioni, si è preferito mettere qua e là degli Esempi e delle Proposizioni che avranno un'importanza anche successivamente. Verranno dimostrati dei risultati classici, come il Lemma di Yoneda e il suo Corollario, che avranno un'importanza pratica nella teoria degli insiemi simpliciali. Questa parte fa soprattutto riferimento a [7].

1.1 Categorie e funtori

Definizione 1.1.1. *Una categoria $\mathcal{C}$ è il dato di:*

- *una collezione di oggetti $\text{Ob}(\mathcal{C})$;*
- *una collezione di morfismi $\text{Mor}(\mathcal{C})$;*

tali che:

- *ogni morfismo f ha un dominio e codominio specifici, i quali sono oggetti. Per indicare che un morfismo f ha dominio X e codominio Y si scrive $f : X \rightarrow Y$ oppure $X = \text{dom}(f)$ e $Y = \text{cod}(f)$;*
- *ogni oggetto X ha un morfismo identità, denotato $\text{id}_X : X \rightarrow X$;*
- *per ogni coppia di morfismi componibili f e g , cioè tali che $\text{cod}(f) = \text{dom}(g)$, esiste uno specifico morfismo composto, denotato gf , $g \cdot f$ o $g \circ f$, che ha $\text{dom}(gf) = \text{dom}(f)$ e $\text{cod}(gf) = \text{cod}(g)$.*

$$f : X \rightarrow Y, g : Y \rightarrow Z \rightsquigarrow gf : X \rightarrow Z.$$

Inoltre devono valere i seguenti due assiomi:

- per ogni $f : X \rightarrow Y$, le composizioni id_X e $\text{id}_Y f$ sono entrambe uguali a f ;
- per ogni f, g, h tali che f e g sono componibili e g e h sono componibili, per cui sono ben definiti $h(gf)$ e $(hg)f$, deve valere $h(gf) = (hg)f$. Di conseguenza entrambi sono semplicemente denotati hgf .

$$f : X \rightarrow Y, g : Y \rightarrow Z, h : Z \rightarrow W \rightsquigarrow hgf : X \rightarrow W.$$

Dati X, Y oggetti in $\mathcal{C}$, indicheremo con $\mathcal{C}(X, Y)$ la collezione di tutti i morfismi con dominio X e codominio Y .

Definizione 1.1.2. Una categoria $\mathcal{C}$ è detta piccola se $\text{Mor}(\mathcal{C})$ è un insieme, mentre è detta localmente piccola se, per ogni coppia di oggetti X e Y , $\mathcal{C}(X, Y)$ è un insieme.

Spesso scriveremo $X \in \mathcal{C}$ (invece di $X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$) e $f \in \mathcal{C}(X, Y)$ anche senza sapere se l'uno o l'altro sono insiemi.

Esempio 1.1.3.

- La categoria **Set** ha come oggetti gli insiemi e come morfismi le funzioni di insiemi. È il principale esempio di categoria localmente piccola ma non piccola. Inoltre, si ha la categoria **Set**_{*} degli insiemi puntati, che ha come oggetti coppie (A, a) , con $a \in A$ e come morfismi $f : (A, a) \rightarrow (B, b)$ funzioni $f : A \rightarrow B$ tale che $f(a) = b$.
- La categoria **Top** ha come oggetti gli spazi topologici e come morfismi le funzioni continue. Come per la categoria degli insiemi, si considera anche la categoria **Top**_{*} degli spazi topologici puntati.
- La categoria **Grp** ha come oggetti i gruppi e come morfismi gli omomorfismi di gruppo.
- La categoria **PoSet** ha come oggetti gli insiemi parzialmente ordinati e come morfismi le funzioni monotone.
- Dato un insieme J gli si può associare la categoria *discreta* $\mathcal{J}$ che ha come oggetti gli elementi di J e come unici morfismi le identità.
- Dato un gruppo G , si può considerare la categoria BG , che ha un solo oggetto $*$ e $BG(*, *) = G$.

- Dato un insieme parzialmente ordinato $(P, \leq)$ si può considerare la categoria associata $\mathcal{P}$ che ha come oggetti gli elementi di P e per ogni $a, b \in P$:

$$\mathcal{P}(a, b) = \begin{cases} * & \text{se } a \leq b, \\ \emptyset & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Cioè c'è un unico morfismo $a \rightarrow b$ se e solo se $a \leq b$.

Definizione 1.1.4. Data una categoria $\mathcal{C}$, si definisce la sua categoria opposta $\mathcal{C}^{op}$ come quella con:

- $\text{Ob}(\mathcal{C}^{op}) = \text{Ob}(\mathcal{C})$;
- $\mathcal{C}^{op}(X, Y) = \mathcal{C}(Y, X)$ e la composizione è definita come $g^{op} \circ f^{op} = (f \circ g)^{op}$.

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{f^{op}} & Y & \xrightarrow{g^{op}} & Z & \rightsquigarrow & X & \xleftarrow{f} & Y & \xleftarrow{g} & Z \\ & \searrow & & \nearrow & & & & \nwarrow & & \nearrow & \\ & g^{op} \circ f^{op} = (f \circ g)^{op} & & & & & & f \circ g & & & \end{array} .$$

Definizione 1.1.5. Un morfismo $f : X \rightarrow Y$ è detto:

- un monomorfismo se per ogni oggetto Z , e $h, k : Z \rightarrow X$:

$$fh = fk \implies h = k;$$

- un epimorfismo se per ogni oggetto Z , e $h, k : Y \rightarrow Z$:

$$hf = kf \implies h = k;$$

- un monomorfismo split (o sezione) se esiste $g : Y \rightarrow X$ tale che $gf = \text{id}_X$;
- un epimorfismo split (o retrazione) se esiste $g : Y \rightarrow X$ tale che $fg = \text{id}_Y$;
- un isomorfismo se esiste $g : Y \rightarrow X$ tale che $gf = \text{id}_X$ e $fg = \text{id}_Y$. Un isomorfismo si denota spesso $f : X \xrightarrow{\sim} Y$; in tal caso si dice che X e Y sono isomorfi e si scrive $X \cong Y$;
- un endomorfismo se $\text{dom}(f) = \text{cod}(f)$;
- un automorfismo se è un endomorfismo e isomorfismo.

Come suggerisce il nome, un monomorfismo (epimorfismo) split è sempre un monomorfismo (epimorfismo). Di conseguenza, un isomorfismo è sempre un monomorfismo ed epimorfismo, ma non vale il viceversa in generale. Affinché si abbia il viceversa bisogna richiedere che il morfismo sia in aggiunta almeno una sezione o una retrazione.

Osservazione 1.1.6. Se $\mathcal{C}$ è una categoria localmente piccola, per ogni oggetto X , l'insieme $\text{Aut}_{\mathcal{C}}(X)$ degli automorfismi di X ha una naturale struttura di gruppo.

Definizione 1.1.7. *Un gruppoide è una categoria in cui tutti i morfismi sono isomorfismi.*

Esempio 1.1.8.

- Un gruppoide con un oggetto è la categoria di un gruppo come nell'Esempio 1.1.3.
- Dato uno spazio topologico X , si può definire il gruppoide fondamentale $\Pi_{\leq 1}(X)$ come la categoria che ha come oggetti i punti di X e come morfismi le classi di cammini, a meno di omotopia di cammini, tra punti di X . È un gruppoide perché ogni classe $[\gamma]$ ha come inverso la classe del proprio cammino opposto $[i(\gamma)]$.

Fissato un punto $x_0 \in X$, il gruppo $\text{Aut}_{\Pi_{\leq 1}(X)}(x_0)$ non è altro che il gruppo fondamentale di X basato sul punto x_0 , $\pi_1(X, x_0)$.

Inoltre, due oggetti $x, y \in \Pi_{\leq 1}(X)$ sono isomorfi se e solo se $x, y \in X$ sono connessi per archi, ossia stanno nella stessa componente CPA. Segue che l'insieme delle classi di isomorfismo di $\Pi_{\leq 1}(X)$ è isomorfo a $\pi_0(X)$.

Definizione 1.1.9. *Siano $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ due categorie. Un funtore covariante $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ è il dato:*

- per ogni oggetto $X \in \mathcal{C}$ di un oggetto $F(X) \in \mathcal{D}$;
- per ogni morfismo $f \in \mathcal{C}(X, Y)$ di un morfismo $F(f) \in \mathcal{D}(F(X), F(Y))$;

tale che:

- per ogni $X \in \mathcal{C}$, $F(\text{id}_X) = \text{id}_{F(X)}$;
- per ogni $f : X \rightarrow Y$ e $g : Y \rightarrow Z$ morfismi in $\mathcal{C}$, $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$.

Un funtore controvariante $G : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ è invece il dato di:

- per ogni oggetto $X \in \mathcal{C}$ di un oggetto $G(X) \in \mathcal{D}$;
- per ogni morfismo $f \in \mathcal{C}(X, Y)$ di un morfismo $G(f) \in \mathcal{D}(G(Y), G(X))$;

tale che:

- per ogni $X \in \mathcal{C}$, $G(\text{id}_X) = \text{id}_{G(X)}$;
- per ogni $f : X \rightarrow Y$ e $g : Y \rightarrow Z$ morfismi in $\mathcal{C}$, $G(g \circ f) = G(f) \circ G(g)$.

Osservazione 1.1.10. Dare un funtore controvariante $G : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ è come dare un funtore covariante $G : \mathcal{C}^{op} \rightarrow \mathcal{D}$.

Se non specificato un funtore $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ sarà sempre inteso covariante, mentre per intendere uno controvariante, grazie all'Osservazione, si scriverà $\mathcal{C}^{op} \rightarrow \mathcal{D}$.

Esempio 1.1.11.

- Data una categoria $\mathcal{C}$ e $c \in \mathcal{C}$, per ogni categoria $\mathcal{J}$ si ha il funtore costante $c : \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{C}$ che manda ogni oggetto di $\mathcal{J}$ in c e ogni morfismo nell'identità di c .
- Dati due funtori $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ e $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{E}$, si può definire il funtore *composto* $GF : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{E}$ come:
 1. $GF(c) = G(F(c))$ per ogni oggetto $c \in \mathcal{C}$;
 2. $GF(f) = G(F(f))$ per ogni morfismo $f \in \text{Mor}(\mathcal{C})$.

Inoltre, data una categoria $\mathcal{C}$, si ha il funtore *identità* $\text{id}_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ che fissa tutti gli oggetti e morfismi.

Verrebbe quindi da dire che la collezione di tutte le categorie costituisce essa stessa una categoria. Per evitare problemi di “grandezza”, utilizzeremo solo la categoria **Cat** delle categorie piccole. Si noti che questa non è a sua volta una categoria piccola.

- Analogamente si ha la categoria **Grpd** che ha come oggetti i gruppidi piccoli e come morfismi i funtori.
- Dati due gruppi G e H , i funtori $F : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H}$ sono esattamente gli omomorfismi di gruppo $f : G \rightarrow H$.
- Analogamente, dati due insiemi parzialmente ordinati $(P, \leq)$ e $(A, \leq)$, i funtori $F : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{A}$ sono esattamente funzioni monotone $f : P \rightarrow A$.
- L'insieme delle componenti connesse per archi e il gruppo fondamentale forniscono dei funtori $\pi_0 : \mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{Set}$ e $\pi_1 : \mathbf{Top}_* \rightarrow \mathbf{Grp}$. Inoltre la costruzione del gruppoide fondamentale dà un funtore $\Pi_{\leq 1} : \mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{Grpd}$.

Lemma 1.1.12. *I funtori preservano isomorfismi, ossia se $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ è un funtore e $f : X \rightarrow Y$ è un isomorfismo in $\mathcal{C}$, allora $F(f)$ è un isomorfismo in $\mathcal{D}$.*

Osservazione 1.1.13. Dato un funtore $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$, per ogni $X, Y \in \mathcal{C}$ si ha una funzione:

$$F : \mathcal{C}(X, Y) \rightarrow \mathcal{D}(F(X), F(Y)) \quad .$$

$$f \mapsto F(f)$$

Definizione 1.1.14. Un funtore $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ è detto:

- *fedele* se per ogni $X, Y \in \mathcal{C}$, $F : \mathcal{C}(X, Y) \rightarrow \mathcal{D}(F(X), F(Y))$ è iniettiva;
- *pieno* se per ogni $X, Y \in \mathcal{C}$, $F : \mathcal{C}(X, Y) \rightarrow \mathcal{D}(F(X), F(Y))$ è suriettiva;
- *embedding o pienamente fedele* se è pieno e fedele. In tal caso si scrive $F : \mathcal{C} \hookrightarrow \mathcal{D}$.

Lemma 1.1.15. Un embedding $F : \mathcal{C} \hookrightarrow \mathcal{D}$ riflette isomorfismi, ossia se f è un morfismo in $\mathcal{C}$ tale che $F(f)$ è un isomorfismo in $\mathcal{D}$, allora f è un isomorfismo in $\mathcal{C}$.

Esempio 1.1.16.

- Le immersioni **Set**, **Grp**, **PoSet** $\hookrightarrow$ **Cat** sono degli embedding.
- Consideriamo i funtori $U : \mathbf{Grp}, \mathbf{PoSet}, \mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{Set}$ che si dimenticano delle strutture aggiuntive. Questi sono chiaramente fedeli, ma non pieni.

1.2 Trasformazioni naturali e la 2-categoria delle categorie

Definizione 1.2.1. Dati due funtori $F, G : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$, una trasformazione naturale $\alpha : F \Rightarrow G$ è il dato per ogni $X \in \mathcal{C}$ di un morfismo $\alpha_X : F(X) \rightarrow G(X)$ in $\mathcal{D}$ tale che per ogni morfismo $f : X \rightarrow Y$ in $\mathcal{C}$ si abbia il seguente diagramma commutativo:

$$\begin{array}{ccc} F(X) & \xrightarrow{\alpha_X} & G(X) \\ \downarrow F(f) & & \downarrow G(f) \\ F(Y) & \xrightarrow{\alpha_Y} & G(Y) \end{array} \quad .$$

Un isomorfismo naturale è una trasformazione naturale tale che, per ogni $X \in \mathcal{C}$, α_X è un isomorfismo. Per indicare che c'è una trasformazione naturale tra due funtori si usa la notazione:

$$\begin{array}{ccc} & F & \\ \mathcal{C} & \begin{array}{c} \curvearrowright \\ \Downarrow \alpha \\ \curvearrowleft \end{array} & \mathcal{D} \\ & G & \end{array} \quad .$$

Proposizione 1.2.2. Siano $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ due categorie, e $F, G : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ due funtori. Sono equivalenti:

- esiste una trasformazione naturale $\alpha : F \Rightarrow G$;

- esiste un funtore $H : \mathcal{C} \times [1] \rightarrow \mathcal{D}$ tale che si abbia il seguente diagramma commutativo:

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{C} & & \\
 (\text{id}_{\mathcal{C}}, 0) \downarrow & \searrow F & \\
 \mathcal{C} \times [1] & \xrightarrow{H} & \mathcal{D} \\
 (\text{id}_{\mathcal{C}}, 1) \uparrow & \nearrow G & \\
 \mathcal{C} & &
 \end{array} ,$$

con $[1]$ la categoria con due oggetti e un unico morfismo tra essi.

Nel caso degli isomorfismi naturali, ciò è equivalente all'esistenza di un funtore $H : \mathbb{I} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ che soddisfi lo stesso diagramma, con $\mathbb{I}$ la categoria con due oggetti e un unico isomorfismo fra essi. In questo caso è da apprezzare il parallelismo tra l'isomorfismo naturale tra funtori $F \cong G$ e l'omotopia tra funzioni continue $f \simeq g$.

Definizione 1.2.3. Siano $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ due categorie, e $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ un funtore. Allora F si dice un'equivalenza di categorie se esiste un funtore $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$, e degli isomorfismi naturali $GF \cong \text{id}_{\mathcal{C}}$ e $FG \cong \text{id}_{\mathcal{D}}$.

Definizione 1.2.4. Dati $F, G, H : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ funtori, e $\alpha : F \Rightarrow G$ e $\beta : G \Rightarrow H$ trasformazioni naturali, si definisce la composizione verticale $\beta \cdot \alpha : F \Rightarrow H$ come $(\beta \cdot \alpha)_X = \beta_X \cdot \alpha_X$, per ogni $X \in \mathcal{C}$.

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{C} & \begin{array}{c} \xrightarrow{F} \\ \Downarrow \alpha \\ \xrightarrow{G} \\ \Downarrow \beta \\ \xrightarrow{H} \end{array} & \mathcal{D} \\
 & \rightsquigarrow & \\
 \mathcal{C} & \begin{array}{c} \xrightarrow{F} \\ \Downarrow \beta \cdot \alpha \\ \xrightarrow{H} \end{array} & \mathcal{D}
 \end{array} .$$

Osservazione 1.2.5.

1. Dato un funtore $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$, si ha la trasformazione naturale identità $1_F : F \Rightarrow F$.
2. Di conseguenza date due categoria $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ si può considerare la categoria $\mathcal{D}^{\mathcal{C}}$ che ha come oggetti i funtori $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ e come morfismi le trasformazioni naturali tra funtori. Condizione sufficiente affinché questa categoria sia localmente piccola è che $\mathcal{C}$ sia piccola e $\mathcal{D}$ localmente piccola.
3. Dato un isomorfismo naturale $\varphi : F \Rightarrow G$ è definita una trasformazione naturale $\varphi^{-1} : G \Rightarrow F$ tale che $\varphi^{-1} \cdot \varphi = 1_F$ e $\varphi \cdot \varphi^{-1} = 1_G$, ossia gli isomorfismi naturali sono esattamente gli isomorfismi nella categoria $\mathcal{D}^{\mathcal{C}}$.

Definizione 1.2.6. Siano $F, G : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ e $H, K : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{E}$ dei funtori, e $\alpha : F \Rightarrow G$ e $\beta : H \Rightarrow K$ delle trasformazioni naturali. Si definisce la composizione orizzontale

$\beta * \alpha : HF \Rightarrow KG$ come $(\beta * \alpha)_X = K(\alpha_X)\beta_{F(x)}$ o, equivalentemente, $\beta_{G(X)}H(\alpha_X)$ (che coincide perché β è una trasformazione naturale).

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C} & \begin{array}{c} \xrightarrow{F} \\ \alpha \Downarrow \\ \xrightarrow{G} \end{array} & \mathcal{D} \\ & \begin{array}{c} \xrightarrow{H} \\ \beta \Downarrow \\ \xrightarrow{K} \end{array} & \mathcal{E} \end{array} \rightsquigarrow \begin{array}{ccc} \mathcal{C} & \begin{array}{c} \xrightarrow{HF} \\ \beta * \alpha \Downarrow \\ \xrightarrow{KG} \end{array} & \mathcal{E} \end{array} .$$

Le operazioni di composizione verticale e orizzontale tra trasformazioni naturali rende la categoria delle categorie piccole **Cat** (o dei gruppidi **Grpd**) una *2-categoria*, nel senso che, per ogni $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ categorie piccole, $\mathcal{D}^{\mathcal{C}}$ con la composizione verticale è una categoria, mentre la collezione delle categorie piccole con morfismi dati dalle 2-celle del tipo:

$$\mathcal{C} \begin{array}{c} \xrightarrow{F} \\ \alpha \Downarrow \\ \xrightarrow{G} \end{array} \mathcal{D} ,$$

con l'identità rappresentata dalla 2-cella:

$$\mathcal{C} \begin{array}{c} \xrightarrow{\text{id}_{\mathcal{C}}} \\ 1_{\text{id}_{\mathcal{C}}} \Downarrow \\ \xrightarrow{\text{id}_{\mathcal{C}}} \end{array} \mathcal{C} ,$$

e la composizione orizzontale è una categoria.

1.3 Funtori rappresentabili e Lemma di Yoneda

Definizione 1.3.1. Sia $\mathcal{C}$ una categoria localmente piccola e $c \in \mathcal{C}$. Sono definiti i seguenti due funtori, rispettivamente covariante e controvariante:

- $\mathcal{C}(c, -) : \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Set}$, che manda un oggetto X nell'insieme $\mathcal{C}(c, X)$ dei morfismi $c \rightarrow X$ e un morfismo $f : X \rightarrow Y$ nella funzione:

$$\begin{aligned} f_* : \mathcal{C}(c, X) &\rightarrow \mathcal{C}(c, Y) \\ c \xrightarrow{u} X &\mapsto c \xrightarrow{u} X \xrightarrow{f} Y \end{aligned}$$

- $\mathcal{C}(-, c) : \mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Set}$, che manda un oggetto X nell'insieme $\mathcal{C}(X, c)$ e un morfismo $f : X \rightarrow Y$ nella funzione:

$$\begin{aligned} f^* : \mathcal{C}(Y, c) &\rightarrow \mathcal{C}(X, c) \\ Y \xrightarrow{u} c &\mapsto X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{u} c \end{aligned}$$

Osservazione 1.3.2. Le due costruzioni precedenti definiscono due funtori $\mathcal{Y} : \mathcal{C}^{op} \rightarrow \mathbf{Set}^{\mathcal{C}}$ e $\mathcal{Y} : \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Set}^{\mathcal{C}^{op}}$ sugli oggetti. Nel caso controvariante, se $u : c \rightarrow d$ è un morfismo in $\mathcal{C}$, $\mathcal{Y}(u) = u^* : \mathcal{C}(d, -) \Rightarrow \mathcal{C}(c, -)$ è definita per ogni $X \in \mathcal{C}$ come:

$$(u^*)_X = u^* : \mathcal{C}(d, X) \rightarrow \mathcal{C}(c, X) \quad .$$

$$d \xrightarrow{f} X \mapsto c \xrightarrow{u} d \xrightarrow{f} X$$

Definizione 1.3.3. Dato un funtore $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Set}$, si dice *rappresentabile* se esiste un oggetto $c \in \mathcal{C}$ e un isomorfismo naturale $\eta : \mathcal{C}(c, -) \xrightarrow{\sim} F$. Vi è una definizione analoga nel caso di funtori controvarianti.

Teorema 1.3.4 (Lemma di Yoneda). Sia $\mathcal{C}$ una categoria localmente piccola, $c \in \mathcal{C}$ e $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Set}$ un funtore. Allora c'è un isomorfismo di insiemi:

$$\text{Nat}(\mathcal{C}(c, -), F) \cong F(c) .$$

Inoltre tale isomorfismo è naturale sia in c che in F .

Dimostrazione. Presa una trasformazione naturale $\alpha : \mathcal{C}(c, -) \Rightarrow F$, $\alpha_c(\text{id}_c) \in F(c)$. Questo definisce una funzione $\Phi : \text{Nat}(\mathcal{C}(c, -), F) \rightarrow F(c)$. Bisognare provare che tale Φ è iniettiva e suriettiva. Per l'iniettività, osserviamo che, per ogni α trasformazione naturale, $X \in \mathcal{C}$ e $f : c \rightarrow X$, la commutatività del diagramma:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}(c, c) & \xrightarrow{\alpha_c} & F(c) \\ \downarrow f_* & & \downarrow F(f) \\ \mathcal{C}(c, X) & \xrightarrow{\alpha_X} & F(X) \end{array}$$

implica che $\alpha_X(f) = F(f)(\Phi(\alpha))$. Per la suriettività, preso $x \in F(c)$, definiamo, per ogni $X \in \mathcal{C}$, $\alpha_X : \mathcal{C}(c, X) \rightarrow F(X)$ in modo che il diagramma sovrastante commuti per ogni $f : c \rightarrow X$. Tale costruzione definisce una trasformazione naturale $\alpha : \mathcal{C}(c, -) \Rightarrow F$ perché, per ogni $u : X \rightarrow Y$ morfismo in $\mathcal{C}$, il diagramma

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}(c, Y) & \xrightarrow{\alpha_Y} & F(Y) \\ u_* \uparrow & & \uparrow F(u) \\ \mathcal{C}(c, X) & \xrightarrow{\alpha_X} & F(X) \end{array}$$

commuta, in quanto per ogni $f : c \rightarrow X$:

$$\begin{aligned} & \alpha_Y(u_*(f)) \\ &= F(u_*(f))(\Phi(\alpha)) \quad (\text{per definizione di } \alpha_Y) \\ &= F(u \circ f)(\Phi(\alpha)) \quad (\text{per definizione di } u_*) \\ &= F(u)(F(f)(\Phi(\alpha))) \quad (\text{perché } F \text{ è un funtore}) \\ &= F(u)(\alpha_X(f)) . \quad (\text{per definizione di } \alpha_X) \end{aligned}$$

Infine, la condizione di naturalità in c e F significano che, per ogni morfismo $u : c \rightarrow d$ e trasformazione naturale $\gamma : F \Rightarrow G$, si hanno i diagrammi commutativi:

$$\begin{array}{ccc} \text{Nat}(\mathcal{C}(c, -), F) & \xrightarrow{\cong} & F(c) \\ \downarrow (u^*)^* & & \downarrow F(u) \\ \text{Nat}(\mathcal{C}(d, -), F) & \xrightarrow{\cong} & F(d) \end{array} \quad \text{e} \quad (1)$$

$$\begin{array}{ccc} \text{Nat}(\mathcal{C}(c, -), F) & \xrightarrow{\cong} & F(c) \\ \downarrow \gamma_* & & \downarrow \gamma_c \\ \text{Nat}(\mathcal{C}(c, -), G) & \xrightarrow{\cong} & G(c) \end{array} \quad , \quad (2)$$

che sono di facile verifica. □

Osservazione 1.3.5.

1. Vale un risultato analogo nel caso di funtori controvarianti $F : \mathcal{C}^{op} \rightarrow \mathbf{Set}$:

$$\text{Nat}(\mathcal{C}(-, c), F) \cong F(c).$$

2. Data una trasformazione naturale $\alpha : \mathcal{C}(c, -) \rightarrow F(c)$, l'elemento $\alpha_c(\text{id}_c) \in F(c)$ è detto *oggetto universale* della trasformazione.

Corollario 1.3.6 (Embedding di Yoneda). *I funtori $\mathcal{Y} : \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Set}^{\mathcal{C}^{op}}$ e $\mathcal{Y} : \mathcal{C}^{op} \rightarrow \mathbf{Set}^{\mathcal{C}}$ sono degli embedding.*

Dimostrazione. Mostriamo che $\mathcal{Y} : \mathcal{C}^{op} \rightarrow \mathbf{Set}^{\mathcal{C}}$ è un embedding. Presi $c, d \in \mathcal{C}$, la funzione

$$\begin{aligned} \mathcal{C}(c, d) &\rightarrow \text{Nat}(\mathcal{C}(d, -), \mathcal{C}(c, -)) \\ c \xrightarrow{u} d &\mapsto \mathcal{C}(d, -) \xrightarrow{u^*} \mathcal{C}(c, -) \end{aligned}$$

è l'inversa di quella prescritta dal Lemma di Yoneda. □

Osservazione 1.3.7. In particolare, in una categoria $\mathcal{C}$ due oggetti sono isomorfi se e solo se i corrispondenti funtori rappresentati sono naturalmente isomorfi.

1.4 Limiti e colimiti

Definizione 1.4.1. *Data una categoria localmente piccola $\mathcal{C}$ e una piccola $\mathcal{J}$ un diagramma in $\mathcal{C}$ di forma $\mathcal{J}$ è un funtore $F : \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{C}$.*

Definizione 1.4.2. Dato un diagramma $F : \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{C}$ un cono sopra F è il dato di un oggetto $X \in \mathcal{C}$ insieme a una trasformazione naturale $\lambda : X \Rightarrow F$ (dove X indica il funtore costante in X). Detto in altri termini, il dato di un cono sopra F corrisponde a una collezione di mappe $(\lambda_j : X \rightarrow F(j))_{j \in \mathcal{J}}$, dette gambe del cono, tali che, per ogni freccia $f : i \rightarrow j$ in $\mathcal{J}$, si abbia il seguente diagramma commutativo:

$$\begin{array}{ccc} & X & \\ \lambda_i \swarrow & & \searrow \lambda_j \\ F(i) & \xrightarrow{F(f)} & F(j) \end{array} .$$

Un limite $\lim_{\leftarrow}(F)$ è un cono universale di F . Ossia, detto $\ell : \lim_{\leftarrow}(F) \Rightarrow F$ il suo cono, per ogni altro cono $\lambda : X \Rightarrow F$ esiste un unico morfismo $\varphi : X \rightarrow \lim_{\leftarrow}(F)$ tale che, per ogni $j \in \mathcal{J}$, $\lambda_j = \ell_j \circ \varphi$:

$$\begin{array}{ccc} & X & \\ & \downarrow \exists! \varphi & \\ & \lim_{\leftarrow}(F) & \\ \lambda_i \swarrow & & \searrow \lambda_j \\ F(i) & \xrightarrow{F(f)} & F(j) \end{array} \quad \begin{array}{ccc} & & \\ & \ell_i \swarrow & \searrow \ell_j \\ & F(i) & \xrightarrow{F(f)} F(j) \end{array} .$$

In maniera duale, si definisce il cocono sotto F come un oggetto $X \in \mathcal{C}$ dotato di una trasformazione naturale $\mu : F \Rightarrow X$, ossia di una collezione di mappe $(\mu_j : F(j) \rightarrow X)_{j \in \mathcal{J}}$, tale che, per ogni $f : i \rightarrow j$, commuti

$$\begin{array}{ccc} F(i) & \xrightarrow{F(f)} & F(j) \\ \mu_i \searrow & & \swarrow \mu_j \\ & X & \end{array} .$$

Analogamente a prima, un colimite $\lim_{\rightarrow}(F)$ è un cocono universale di F , ossia $\ell : F \Rightarrow \lim_{\rightarrow}(F)$ tale che, per ogni altro cocono $\lambda : F \Rightarrow X$, esiste un unico morfismo $\psi : \lim_{\rightarrow}(F) \rightarrow X$ che soddisfa $\lambda_j = \psi \circ \ell_j$, per ogni $j \in \mathcal{J}$.

$$\begin{array}{ccc} F(i) & \xrightarrow{F(f)} & F(j) \\ \ell_i \searrow & & \swarrow \ell_j \\ & \lim_{\rightarrow}(F) & \\ \lambda_i \swarrow & & \searrow \lambda_j \\ & \downarrow \exists! \psi & \\ & X & \end{array} .$$

Lemma 1.4.3. Siano $F : \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{C}$ diagramma, $\lambda : X \Rightarrow F$ e $\mu : Y \Rightarrow F$ due limiti di F . Allora $X \cong Y$.

Dimostrazione. Consideriamo il funtore $\text{Cone}(-, F) : \mathcal{C}^{op} \rightarrow \mathbf{Set}$ che manda ogni oggetto c nell'insieme delle trasformazioni naturali $c \Rightarrow F$ e un morfismo $u : c \rightarrow d$ nella funzione $u^* : \text{Cone}(d, F) \rightarrow \text{Cone}(c, F)$ che precompone per la trasformazione naturale $u : c \Rightarrow d$. La tesi segue dal fatto che dire che $\lambda : X \Rightarrow F$ è limite del diagramma F significa che c'è un isomorfismo naturale $\mathcal{C}(-, X) \cong \text{Cone}(-, F)$ di oggetto universale λ . $\square$

Un risultato analogo si ha ovviamente nel caso dei colimiti.

Definizione 1.4.4. Sia $F : \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{C}$ diagramma di forma $\mathcal{J}$.

- Se $\mathcal{J}$ è una categoria discreta, allora il limite di F è detto il prodotto degli oggetti $(F(j))_{j \in \mathcal{J}}$ e si denota $\prod_{j \in \mathcal{J}} F(j)$. In particolare se $\mathcal{J}$ è la categoria vuota, il limite del diagramma vuoto è detto oggetto terminale $*$ della categoria $\mathcal{C}$. Esso gode della proprietà universale che, per ogni oggetto $A \in \mathcal{C}$, esiste un unico morfismo $A \rightarrow *$.
- Se $\mathcal{J}$ è la categoria $\bullet \rightrightarrows \bullet$, il limite è detto equalizzatore.

$$\begin{array}{ccccc} & C & & & \\ & \downarrow \exists! & \searrow & & \\ E & \dashrightarrow & A & \xrightarrow[f]{g} & B \end{array}$$

In questo caso un cono sopra F è dato da un morfismo $a : C \rightarrow A$ tale che $gh = fh$ (il morfismo $b : C \rightarrow B$ è necessariamente uguale a tale composizione per la condizione di naturalità).

- Se $\mathcal{J}$ è la categoria $\bullet \rightarrow \bullet \leftarrow \bullet$, il limite è detto pullback.

$$\begin{array}{ccccc} D & & & & \\ & \searrow \exists! & & \searrow & \\ & A \times_C B & \dashrightarrow & A & \\ & \downarrow & \lrcorner & \downarrow f & \\ & B & \xrightarrow{g} & C & \end{array}$$

Un cono è dato da due morfismi $a : D \rightarrow A$ e $b : D \rightarrow B$ tale che $fa = gb$.

Nel caso in cui C sia un oggetto terminale, il pullback del diagramma è semplicemente $A \times B$.

$$\begin{array}{ccc} A \times B & \dashrightarrow & A \\ \downarrow & & \downarrow \\ B & \longrightarrow & * \end{array}$$

Dualizzando le definizioni sopra si ottengono:

- Il coprodotto $\coprod_{j \in \mathcal{J}} F(j)$ come colimite di un diagramma discreto $F : \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{C}$.
- Per $\mathcal{J} = \bullet \rightrightarrows \bullet$ il colimite è detto coequalizzatore.

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow[f]{g} & B & \dashrightarrow & E \\ & & \searrow & & \downarrow \exists! \\ & & & & C \end{array}$$

- Infine se $\mathcal{J} = \bullet \leftarrow \bullet \rightarrow \bullet$, il colimite si chiama pushout.

$$\begin{array}{ccccc} C & \longrightarrow & A & & \\ \downarrow & & \downarrow & \searrow & \\ B & \dashrightarrow & A \sqcup_C B & & \\ & \searrow & \downarrow & \searrow \exists! & \\ & & & & D \end{array}$$

Se C è un oggetto iniziale, il pushout è semplicemente $A \sqcup B$.

Definizione 1.4.5. Una categoria $\mathcal{C}$ si dice completa se ogni diagramma $F : \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{C}$ ha limite in $\mathcal{C}$. Analogamente, $\mathcal{C}$ si dice cocompleta se ha il colimite di ogni diagramma $F : \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{C}$.

Lemma 1.4.6. Sia $\mathcal{C}$ una categoria che contiene tutti i prodotti e gli equalizzatori. Allora $\mathcal{C}$ è completa.

Dimostrazione. Sia $F : \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{C}$ un diagramma. Definiamo due mappe $c, d : \prod_{i \in \mathcal{J}} F(i) \rightarrow \prod_{f: j \rightarrow k} F(k)$. c è la mappa che ha come componente, per ogni $f : j \rightarrow k$, $\pi_k : \prod_{i \in \mathcal{J}} F(i) \rightarrow F(k)$, mentre d è la mappa che ha componente, per ogni $f : j \rightarrow k$, la composizione $\prod_{i \in \mathcal{J}} F(i) \xrightarrow{\pi_j} F(j) \xrightarrow{F(f)} F(k)$. Consideriamo il diagramma:

$$X \xrightarrow{\bar{\lambda}} \prod_{i \in \mathcal{J}} F(i) \xrightarrow[c]{d} \prod_{f: j \rightarrow k} F(k) \quad . \quad (1)$$

Per ipotesi, questo diagramma ha un limite X con una mappa $\bar{\lambda} : X \rightarrow \prod_{i \in \mathcal{J}} F(i)$ tale che $c\bar{\lambda} = d\bar{\lambda}$. Per ogni $i \in \mathcal{J}$ definiamo $\lambda_i = \pi_i \bar{\lambda} : X \rightarrow F(i)$. Per come sono definite c e d e grazie al fatto che X fa commutare il diagramma (1), si mostra che $(\lambda_i)_{i \in \mathcal{J}}$ fornisce un cono $\lambda : X \Rightarrow F$. Inoltre, sfruttando la proprietà universale di X come equalizzatore, si mostra la proprietà universale del cono. $\square$

Osservazione 1.4.7. Analogamente, una categoria è cocompleta se e solo se ammette tutti i coprodotti ed equalizzatori. In questo caso, un diagramma $F : \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{C}$ è equivalente al diagramma:

$$\prod_{f: j \rightarrow k} F(j) \xrightarrow[a]{b} \prod_{i \in \mathcal{J}} F(i) \twoheadrightarrow \text{colim} F \quad ,$$

con a la mappa indotta, per ogni $f : j \rightarrow k$, da $\iota_j : F(j) \rightarrow \coprod_{i \in \mathcal{J}} F(i)$, mentre b è la mappa indotta, per ogni $f : j \rightarrow k$, da $F(j) \xrightarrow{F(f)} F(k) \xrightarrow{\iota_k} \coprod_{i \in \mathcal{J}} F(i)$.

Teorema 1.4.8. *La categoria **Set** è completa e cocompleta.*

Dimostrazione. Per la Proposizione precedente, basta mostrare che **Set** contiene tutti i prodotti, i coprodotti, gli equalizzatori e i coequalizzatori. I primi due sono definiti rispettivamente come prodotti cartesiani e unioni disgiunte. Un diagramma della forma

$$\text{Eq}(f, g) \longrightarrow A \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}} B \longrightarrow \text{CoEq}(f, g)$$

ha come equalizzatore $\{a \in A : f(a) = g(a)\}$ e come coequalizzatore $B/\sim$, dove $\sim$ è la relazione d'equivalenza generata da $f(a) \sim g(a)$, per ogni $a \in A$. $\square$

Utilizzeremo anche il fatto che la categoria degli spazi topologici **Top** è completa e cocompleta. In questo caso il prodotto di una famiglia di spazi topologici $\{A_i\}_{i \in I}$ è definito come il prodotto insiemistico dotato della topologia meno fine che rende tutte le proiezioni $\pi_j : \prod_{i \in I} A_i \rightarrow A_j$ continue, mentre il coprodotto è definito come l'unione disgiunta insiemistica con la topologia più fine che rende tutte le inclusioni $\iota_j : A_j \rightarrow \prod_{i \in I} A_i$ continue. L'equalizzatore è definito tramite la topologia di sottospazio, mentre il coequalizzatore è definito mediante la topologia quoziente.

Per concludere la Sezione, facciamo qualche osservazione sul rapporto tra limiti (o colimiti) in una categoria e funtori. Siano $K : \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{C}$ diagramma e $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$. Se $\lambda : X \Rightarrow K$ è un cono, componendo con F si ottiene un cono $F(\lambda) : F(X) \Rightarrow FK$ del diagramma $FK : \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{D}$. Supponendo che il diagramma FK abbia limite Y , allora si ha un morfismo $Y \rightarrow F(X)$. Anche supponendo che X sia limite del diagramma K , non è detto che tale morfismo sia un isomorfismo.

Definizione 1.4.9. *Sia $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$; si dice che F preserva i limiti (o che è continuo) se, per ogni diagramma $K : \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{C}$, F manda un cono limite di K in un cono limite di FK . Analogamente, F preserva i colimiti (o è cocontinuo) se un colimite di ogni diagramma $K : \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{C}$ viene mandato da F in un colimite di FK .*

1.5 Funtori aggiunti

Definizione 1.5.1. *Siano $F : \mathcal{C} \rightleftarrows \mathcal{D}$ due funtori tra categorie localmente piccole. Si dice che F è un aggiunto sinistro di G o G è un aggiunto destro di F e si indica $F \dashv G$*

se, per ogni $c \in \mathcal{C}$ e $d \in \mathcal{D}$, esiste una biezione

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(F(c), d) &\cong \mathcal{C}(c, G(d)) \\ F(c) &\xrightarrow{f^\#} d \mapsto c \xrightarrow{f^\flat} G(d) \end{aligned} \quad (1)$$

naturale in c e d , ossia, per ogni $u : c \rightarrow c'$ morfismo in $\mathcal{C}$ e $v : d \rightarrow d'$ morfismo in $\mathcal{D}$, si ha il diagramma commutativo:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{D}(F(c), d') & \xrightarrow{\cong} & \mathcal{C}(c, G(d')) \\ v_* \uparrow & & G(v)_* \uparrow \\ \mathcal{D}(F(c), d) & \xrightarrow{\cong} & \mathcal{C}(c, G(d)) \\ F(u)^* \uparrow & & u^* \uparrow \\ \mathcal{D}(F(c'), d) & \xrightarrow{\cong} & \mathcal{C}(c', G(d)) \end{array} \quad .$$

Esempio 1.5.2.

- Sia $U : \mathbf{Grp} \rightarrow \mathbf{Set}$ funtore dimenticante. Esso ammette un aggiunto sinistro $F : \mathbf{Set} \rightarrow \mathbf{Grp}$ che associa a un insieme S il gruppo libero su S , ossia l'insieme delle parole finite nell'alfabeto $\{s, s^{-1} : s \in S\}$ modulo un'opportuna regola di semplificazione e con l'operazione definita tramite concatenazione. Il fatto che si abbia la biezione naturale (1) esprime la proprietà universale del gruppo libero, ossia che per ogni gruppo G e $f^\flat : S \rightarrow G$ funzione di insiemi, esiste un'unica $f^\# : F(S) \rightarrow G$ omomorfismo di gruppi che sugli elementi di S coincide con $f^\flat$.
- Sia $U : \mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{Set}$ funtore dimenticante. Allora tale funtore ammette sia aggiunto sinistro $D : \mathbf{Set} \rightarrow \mathbf{Top}$ che destro $G : \mathbf{Set} \rightarrow \mathbf{Top}$. D è il funtore che associa ad ogni insieme lo spazio topologico ottenuto munendolo della topologia discreta, mentre G associa ad ogni insieme lo spazio topologico ottenuto con la topologia grossolana.

Proposizione 1.5.3. *Siano $F : \mathcal{C} \rightleftarrows \mathcal{D}$ due funtori. Sono equivalenti:*

1. F è aggiunto sinistro di G ;
2. per ogni $c \in \mathcal{C}$ e $d \in \mathcal{D}$ esiste una specifica biezione $\mathcal{D}(F(c), d) \cong \mathcal{C}(c, G(d))$ tale che per i diagrammi sottostanti:

$$\begin{array}{ccc} F(c) & \xrightarrow{f^\#} & d \\ \downarrow F(h) & & \downarrow k \\ F(c') & \xrightarrow{g^\#} & d' \end{array} \quad \longleftrightarrow \quad \begin{array}{ccc} c & \xrightarrow{f^\flat} & G(d) \\ \downarrow h & & \downarrow G(k) \\ c' & \xrightarrow{g^\flat} & G(d') \end{array} \quad ,$$

quello di sinistra commuta se e solo se commuta quello di destra;

3. esiste una trasformazione naturale $\eta : \text{id}_{\mathcal{C}} \Rightarrow GF$, detta unità dell'aggiunzione, tale che la composizione

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(F(c), d) &\xrightarrow{G} \mathcal{C}(G(F(c)), G(d)) && \xrightarrow{(\eta_c)^*} \mathcal{C}(c, G(d)) \\ F(c) &\xrightarrow{f^\#} d \mapsto G(F(c)) && \xrightarrow{G(f^\#)} G(d) \mapsto c \xrightarrow{\eta_c} G(F(c)) && \xrightarrow{G(f^\#)} G(d) \end{aligned}$$

è una biezione per ogni $c \in \mathcal{C}$ e $d \in \mathcal{D}$.

4. esiste una trasformazione naturale $\varepsilon : FG \Rightarrow \text{id}_{\mathcal{D}}$, detta counità dell'aggiunzione, tale che la composizione

$$\begin{aligned} \mathcal{C}(c, G(d)) &\xrightarrow{F} \mathcal{D}(F(c), F(G(d))) && \xrightarrow{(\varepsilon_d)_*} \mathcal{D}(F(c), d) \\ c &\xrightarrow{f^\flat} G(d) \mapsto F(c) && \xrightarrow{F(f^\flat)} F(G(d)) \mapsto F(c) && \xrightarrow{F(f^\flat)} F(G(d)) && \xrightarrow{\varepsilon_d} d \end{aligned}$$

è una biezione per ogni $c \in \mathcal{C}$ e $d \in \mathcal{D}$.

Osservazione 1.5.4. Grazie a questa Proposizione, si deduce immediatamente dalla Definizione (1.2.3) che ogni equivalenza di categorie $F : \mathcal{C} \rightleftarrows \mathcal{D} : G$ è un'aggiunzione (in particolare F è sia aggiunto sinistro che destro di G).

Proposizione 1.5.5. *Aggiunti destri sono continui, mentre aggiunti sinistri sono co-continui.*

Dimostrazione. Consideriamo l'aggiunzione:

$$\mathcal{C} \begin{array}{c} \xrightarrow{F} \\ \xleftarrow[G]{\perp} \end{array} \mathcal{D} \quad .$$

Commentiamo solo perché F preserva i colimiti. L'idea è che tramite l'aggiunzione possiamo trasferire un cocono di un diagramma FK di $\mathcal{D}$ a un cocono del diagramma K di $\mathcal{C}$, per cui tale cocono fattorizza tramite il colimite del diagramma in $\mathcal{C}$ e tale fattorizzazione si può ri-trasferire a una fattorizzazione del cocono del diagramma in $\mathcal{D}$. □

Capitolo 2

Insiemi simpliciali

In questo capitolo viene introdotto lo strumento combinatorio principale di questa tesi, ossia gli insiemi simpliciali. Prima viene introdotta la categoria simpliciale e ne vengono studiate le proprietà principali, quindi verranno introdotti gli insiemi simpliciali, di cui studieremo la struttura combinatorica in generale e vedremo alcuni insiemi simpliciali notevoli. Infine studieremo una classe di esempi naturali che godono di proprietà interessanti. Questo capitolo si riferisce principalmente a [1], [2], [4] e [6].

2.1 Categoria simpliciale

Definizione 2.1.1. Sia Δ la categoria che ha come oggetti gli insiemi non vuoti, finiti e totalmente ordinati $[n] = \{0, \dots, n\}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e come morfismi le funzioni $f : [m] \rightarrow [n]$ monotone, ossia $i \leq j$ implica $f(i) \leq f(j)$.

Definizione 2.1.2. Per ogni $n \geq 1$ e $0 \leq i \leq n$ ci sono $n + 1$ mappe iniettive $d_n^i : [n - 1] \rightarrow [n]$, dette mappe di cofaccia, definite come:

$$d_n^i(j) = \begin{cases} j & \text{se } j < i, \\ j + 1 & \text{se } j \geq i. \end{cases}$$

Inoltre, per ogni $n \geq 0$ e $0 \leq i \leq n$ ci sono $n + 1$ mappe suriettive $s_n^i : [n + 1] \rightarrow [n]$, dette di codegenerazione, definite come:

$$s_n^i(j) = \begin{cases} j & \text{se } j \leq i, \\ j - 1 & \text{se } j > i. \end{cases}$$

La i -esima mappa di cofaccia d_n^i salta il termine i , mentre la i -esima mappa di codegenerazione s_n^i manda due elementi in i .

Proposizione 2.1.3. *Le mappe di cofaccia e codegenerazione soddisfano le seguenti relazioni simpliciali:*

$$\begin{aligned} d_{n+1}^j d_n^i &= d_{n+1}^i d_n^{j-1} \text{ se } i < j, \\ s_n^j s_{n+1}^i &= s_n^i s_{n+1}^{j+1} \text{ se } i \leq j, \\ s_{n-1}^j d_n^i &= \begin{cases} \text{id}_{[n-1]} & \text{se } i = j, j+1, \\ d_{n-1}^i s_{n-2}^{j-1} & \text{se } i < j, \\ d_{n-1}^{i-1} s_{n-2}^j & \text{se } i > j+1. \end{cases} \end{aligned}$$

Definizione 2.1.4. *Siano $0 \leq n \leq m$. Una mappa di cofaccia generale è un morfismo $\iota : [n] \rightarrow [m]$ iniettivo, mentre una mappa di codegenerazione generale è un morfismo $\rho : [m] \rightarrow [n]$ suriettivo. Inoltre chiamiamo mappe di covertice $v_i : [0] \rightarrow [n]$, per $0 \leq i \leq n$, quella che manda 0 in i .*

Osservazione 2.1.5.

1. Le mappe di cofaccia (codegenerazioni) generali sono tutti e soli i monomorfismi (epimorfismi) nella categoria Δ . Inoltre, ogni monomorfismo (epimorfismo) ha una retrazione (sezione), ossia è split.
2. Il numero di mappe di cofaccia generali $[n] \rightarrow [m]$ è $\binom{m+1}{n+1}$, visto che una mappa di cofaccia generale è univocamente determinata dalla sua immagine. Invece, il numero di mappe di codegenerazione generali $[m] \rightarrow [n]$ è $\binom{m}{n}$, in quanto una tale mappa è determinata dall'insieme $\{j \in \{0, \dots, m-1\} : f(j+1) \neq f(j)\}$, il quale è un sottoinsieme di $\{0, \dots, m-1\}$ di n elementi.

Lemma 2.1.6. *Ogni morfismo $f : [m] \rightarrow [n]$ in Δ si scrive in modo unico come:*

$$(*) \quad f = d_n^{i_s} \circ d_{n-1}^{i_{s-1}} \circ \dots \circ d_{n-t+1}^{i_1} \circ s_{m-t}^{j_t} \circ \dots \circ s_{m-2}^{j_2} \circ s_{m-1}^{j_1}$$

con $n \geq i_s > i_{s-1} > \dots > i_1 \geq 0$, $0 \leq j_t < \dots < j_2 < j_1 < m$ e $n = m - t + s$.

Dimostrazione. Siano $i_1 < \dots < i_s$ gli elementi di $[n]$ che non stanno nell'immagine di f e $j_t < \dots < j_1$ gli elementi $j \in [m]$ tali che $f(j+1) = f(j)$. Allora è chiaro dalle definizioni dei morfismi di cofaccia e codegenerazione che vale (*). Viceversa, se f si può scrivere come in (*) si possano caratterizzare gli indici i_k e j_ℓ come sopra. $\square$

Osservazione 2.1.7.

1. Si dice che (*) è la composizione canonica di f in Δ .
2. In particolare, dal Lemma segue che ogni morfismo $f : [m] \rightarrow [n]$ si scrive come $f = \iota \circ \rho$ con ρ mappa di codegenerazione generale e ι mappa di cofaccia generale.

3. Dal Lemma, segue che la categoria Δ può essere identificata con la categoria Δ' generata dagli oggetti $[n]$, i morfismi d_n^i, s_m^j e le relazioni simpliciali. Infatti, siccome le relazioni simpliciali valgono in Δ , esiste un unico funtore $\Delta' \rightarrow \Delta$ che è l'identità sugli oggetti e i morfismi d_n^i e s_m^j . Siccome ogni morfismo in Δ è composizione di mappe di cofaccia e codegenerazione, la funzione $\Delta'([m], [n]) \rightarrow \Delta([m], [n])$ è suriettiva. Mostriamone l'iniettività: presi $f, g : [m] \rightarrow [n]$ morfismi in Δ' con la stessa immagine in $\Delta([m], [n])$, siccome Δ' soddisfa le relazioni simpliciali, f e g si possono scrivere nella forma $(*)$ (anche se non è detto a priori che queste scritture siano uniche). Le immagini in Δ di queste decomposizioni sono l'unica decomposizione dell'immagine di f e g , che coincidono, ergo $f = g$.

Definizione 2.1.8. Siano $n, m \geq 0$; pensiamo $[n] \times [m]$ come un insieme parzialmente ordinato ponendo $(i, j) \leq (i', j') \iff i \leq i' \text{ e } j \leq j'$.

La motivazione dietro questa definizione è che se $f : [k] \rightarrow [n]$ e $g : [k] \rightarrow [m]$ sono morfismi in Δ , allora, pensandoli come funzioni, passano a una funzione $(f, g) : [k] \rightarrow [n] \times [m]$, $(f, g)(i) = (f(i), g(j))$. La definizione dell'ordine su $[n] \times [m]$ rende (f, g) un morfismo di insiemi parzialmente ordinati.

Osservazione 2.1.9. Se $h : [k] \rightarrow [n] \times [m]$ è un morfismo di insiemi parzialmente ordinati, allora $|h([k])| \leq \min\{k + 1, n + m + 1\}$.

2.2 Insiemi simpliciali

Definizione 2.2.1. Un insieme simpliciale $X_\bullet$ è una collezione di insiemi X_n , per ogni $n \geq 0$, con funzioni $d_i^n : X_n \rightarrow X_{n-1}$ (per $n \geq 1$ e $0 \leq i \leq n$), dette mappe di faccia, e $s_i^n : X_n \rightarrow X_{n+1}$ (per $n \geq 0$ e $0 \leq i \leq n$), dette mappe di degenerazione, che soddisfano le seguenti relazioni simpliciali:

$$\begin{aligned} d_i^n d_j^{n+1} &= d_{j-1}^n d_i^{n+1} \text{ se } i < j, \\ s_i^{n+1} s_j^n &= s_{j+1}^{n+1} s_i^n \text{ se } i \leq j, \\ d_i^n s_j^{n-1} &= \begin{cases} \text{id}_{X_{n-1}} & \text{se } i = j, j + 1, \\ s_{j-1}^{n-2} d_i^{n-1} & \text{se } i < j, \\ s_j^{n-2} d_{i-1}^{n-1} & \text{se } i > j + 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Gli elementi dell'insieme X_n sono detti n -simplessi.

Equivalentemente, un insieme simpliciale è semplicemente un funtore $X_\bullet : \Delta^{op} \rightarrow \mathbf{Set}$. In accordo con la notazione precedente, indicheremo $X_n = X_\bullet([n])$, $d_i^n = X(d_n^i)$

e $s_i^n = X(s_n^i)$. Inoltre se $f : [n] \rightarrow [m]$ è un morfismo in Δ , denotiamo $f^* = X_\bullet(f) : X_m \rightarrow X_n$ la funzione indotta.

Quando sarà chiaro dal contesto, indicheremo un insieme simpliciale $X_\bullet$ semplicemente come X .

Definizione 2.2.2. Si chiamano *mappe di faccia generali*, *degenerazione generali* e *vertice* quelle indotte, rispettivamente, da mappe di cofaccia generali, *codegenerazione generali* e *coverte*.

Osservazione 2.2.3. Per il Punto 2 dell'Osservazione 2.1.7, ogni funzione $f^* : X_m \rightarrow X_n$, indotta da un morfismo $f : [n] \rightarrow [m]$, si scrive come $f^* = \rho^* \circ \iota^*$, con ρ^* mappa di degenerazione generale e ι^* mappa di faccia generale.

Il fatto di vedere gli insiemi simpliciali come funtori ci porta a introdurre il concetto di morfismo di insiemi simpliciali.

Definizione 2.2.4. Un morfismo di insiemi simpliciali $\alpha : X_\bullet \rightarrow Y_\bullet$ è una trasformazione naturale $X_\bullet \Rightarrow Y_\bullet$, ossia il dato, per ogni $n \geq 0$, di funzioni $\alpha_n = \alpha_{[n]} : X_n \rightarrow Y_n$ tali che, per ogni morfismo $f : [n] \rightarrow [m]$, si ha il diagramma commutativo:

$$\begin{array}{ccc} X_n & \xrightarrow{\alpha_n} & Y_n \\ f^* \uparrow & & \uparrow f^* \\ X_m & \xrightarrow{\alpha_m} & Y_m \end{array} \quad .$$

Siccome ogni morfismo in Δ si scrive come composizione di d_n^i e s_m^i , questa relazione basta verificarla per ogni d_n^i e s_m^i .

sSet è la categoria degli insiemi simpliciali.

Definizione 2.2.5. Sia $n \geq 0$; si chiama *l'n-esimo insieme simpliciale standard* $\Delta^n = \Delta(-, [n])$, ossia il funtore controvariante rappresentato da $[n]$. In particolare, per ogni $m \geq 0$, $\Delta_m^n = \Delta([m], [n])$ e le mappe di faccia e degenerazione d_i^m e s_i^m sono date pre-componendo per d_m^i e s_m^i in Δ , ossia

$$\begin{aligned} d_i^m : \Delta_m^n &\rightarrow \Delta_{m-1}^n \quad , \\ [m] \xrightarrow{f} [n] &\mapsto [m-1] \xrightarrow{d_m^i} [m] \xrightarrow{f} [n] \\ s_i^m : \Delta_m^n &\rightarrow \Delta_{m+1}^n \quad . \\ [m] \xrightarrow{f} [n] &\mapsto [m+1] \xrightarrow{s_m^i} [m] \xrightarrow{f} [n] \end{aligned}$$

Osservazione 2.2.6.

1. Se $\mathfrak{Y} : \Delta \rightarrow \mathbf{sSet}$ è l'embedding di Yoneda, chiaramente $\Delta^n = \mathfrak{Y}([n])$ e dunque morfismi di insiemi simpliciali $f : \Delta^n \rightarrow \Delta^m$ corrispondono biunivocamente con morfismi $f : [n] \rightarrow [m]$ in Δ (e per questo li indichiamo nello stesso modo).
2. Sempre per il Lemma di Yoneda, n -simplessi x di un insieme simpliciale $X_\bullet$ corrispondono biunivocamente e naturalmente a morfismi di insiemi simpliciali $x : \Delta^n \rightarrow X_\bullet$.

Inoltre, se $f : [n] \rightarrow [m]$ è un morfismo in Δ , allora $f^* : X_m \rightarrow X_n$ è la funzione che manda $\Delta^m \xrightarrow{x} X_\bullet$ in $\Delta^n \xrightarrow{f} \Delta^m \xrightarrow{x} X_\bullet$.

Definizione 2.2.7. Siano $X = X_\bullet$ e $Y = Y_\bullet$ due insiemi simpliciali. Si dice che Y è un sottoinsieme simpliciale di X , e si scrive $Y \subseteq X$, se per ogni $n \geq 0$, $Y_n \subseteq X_n$ e, per ogni $f : [n] \rightarrow [m]$, $f^*(Y_m) \subseteq Y_n$. Equivalentemente, questa condizione deve valere per ogni mappa di faccia e degenerazione di X .

Più in generale, Y è sottoinsieme simpliciale di X se esiste un monomorfismo di insiemi simpliciali $f : Y \rightarrow X$.

Le due definizioni sono compatibili per il seguente Lemma.

Lemma 2.2.8. Siano $X = X_\bullet$ e $Y = Y_\bullet$ due insiemi simpliciali, e $f : Y \rightarrow X$ un morfismo di insiemi simpliciali. Allora f è un monomorfismo se e solo se, per ogni $n \geq 0$, la funzione $f_n : Y_n \rightarrow X_n$ è iniettiva.

Dimostrazione. Il “se” segue dal fatto che le funzioni iniettive sono monomorfismi in **Set**.

Per il viceversa, supponiamo che f sia un monomorfismo e siano $n \geq 0$, $y_1, y_2 \in Y_n$ tali che $f_n(y_1) = f_n(y_2)$. Considero $y_1, y_2 : \Delta^n \rightarrow Y$ morfismi di insiemi simpliciali corrispondenti. Per dimostrare che $f \circ y_1 = f \circ y_2$, per il Lemma di Yoneda, basta verificarlo su $\text{id}_{[n]} : (f \circ y_1)_n(\text{id}_{[n]}) = f_n(y_1) = f_n(y_2) = (f \circ y_2)_n(\text{id}_{[n]})$. Essendo f un monomorfismo, segue che $y_1 = y_2$. $\square$

Definizione 2.2.9. Sia $n \geq 0$ e sia Σ una collezione di sottoinsiemi non vuoti di $[n]$. Diciamo che Σ è chiusa verso il basso se per ogni $J \in \Sigma$ e $I \subseteq J$ non vuoto, segue che $I \in \Sigma$.

Definizione 2.2.10. Se $n \geq 0$ e Σ è chiusa verso il basso, denotiamo Δ_Σ^n il sottoinsieme simpliciale di Δ^n che ha come k -simplessi i morfismi $f : [k] \rightarrow [n]$ tali che $f([k]) \in \Sigma$.

Osservazione 2.2.11. Il fatto che Δ_Σ^n sia un insieme simpliciale segue immediatamente dalla proprietà di Σ di essere chiusa verso il basso: se $g : [k] \rightarrow [h]$ è un morfismo in

Δ e $f : [h] \rightarrow [n]$ è un h -simpleso di Δ_Σ^n , $g^*(f) = fg$ è un k -simpleso di Δ_Σ^n , perché $f(g([k])) \subseteq f([h])$.

Esempio 2.2.12.

- Se $\Sigma = \emptyset$, allora $\Delta_\Sigma^n = \emptyset$ per ogni $n \geq 0$.
- Siano $0 \leq i \leq n$ e $\Sigma = \{\emptyset \neq A \subseteq [n] : i \notin A\}$, la quale è chiusa verso il basso. L'insieme simpliciale Δ_Σ^n , che si denota $\partial_i \Delta^n$, è detta i -esima faccia simpliciale di Δ^n . Si ha $\partial_i \Delta^n \cong \Delta^{n-1}$.
- Se $n \geq 0$ e $\Sigma = \mathcal{P}([n]) \setminus \{\emptyset, [n]\}$, l'insieme simpliciale Δ_Σ^n , denotato $\partial \Delta^n$, si chiama n -sfera simpliciale. Vale che $\partial \Delta^n = \bigcup_{i=0}^n \partial_i \Delta^n$.
- Se $0 \leq i \leq n$ e $\Sigma = \mathcal{P}([n]) \setminus \{\emptyset, [n], \{0, \dots, i-1, i+1, \dots, n\}\}$ l'insieme simpliciale Δ_Σ^n , denotato Λ_i^n , si chiama l' i -esimo corno simpliciale di Δ^n . Se $0 < i < n$, Λ_i^n si chiama corno interno, altrimenti, se $i = 0$ o $i = n$, si chiama corno esterno.

Per ogni $[n] \in \Delta$, si ha il funtore $ev_n : \mathbf{sSet} \rightarrow \mathbf{Set}$ che manda un insieme simpliciale $X_\bullet = X$ nell'insieme dei n -simplessi X_n e un morfismo di insiemi simpliciali $\alpha : X \rightarrow Y$, nella sua n -esima componente $\alpha_n : X_n \rightarrow Y_n$.

Proposizione 2.2.13. *La categoria $\mathbf{sSet}$ è completa e cocompleta.*

Dimostrazione. Mostriamo solo che $\mathbf{sSet}$ è completa, in quanto per la cocompletezza si potrà ragionare analogamente. Invece di dimostrare che $\mathbf{sSet}$ contiene tutti i prodotti ed equalizzatori e usare il Lemma 1.4.6, useremo che la categoria $\mathbf{Set}$ è completa e i limiti di insiemi simpliciali si calcolano a livello dei simplessi.

Sia $F : \mathcal{J} \rightarrow \mathbf{sSet}$ un diagramma: ciò significa che per ogni $j \in \mathcal{J}$, $F(j)$ è un insieme simpliciale, mentre se $f : i \rightarrow j$ è un morfismo in $\mathcal{J}$, $F(f)$ è un morfismo di insiemi simpliciali. Per ogni $[n] \in \Delta$, sia $F_n = ev_n F : \mathcal{J} \rightarrow \mathbf{Set}$; essendo un diagramma in $\mathbf{Set}$, la quale è una categoria completa, esiste $L_n = \lim_{i \in \mathcal{J}} F(i)_n$. Si noti che la scelta di un rappresentante per ciascun limite non è canonica, però una volta stabiliti gli L_n c'è un'unica estensione di tale scelta a un insieme simpliciale $L : \Delta^{op} \rightarrow \mathbf{Set}$. Infatti, siano $f : [n] \rightarrow [m]$ morfismo in Δ e $g : j \rightarrow k$ morfismo in $\mathcal{J}$; allora si ha il diagramma commutativo:

$$\begin{array}{ccc}
 & L_m = \lim_{i \in \mathcal{J}} F(i)_m & \\
 \pi_j^m \swarrow & & \searrow \pi_k^m \\
 F(j)_m & \xrightarrow{F(g)_m} & F(k)_m \\
 \downarrow F(j)(f) & & \downarrow F(k)(f) \\
 F(j)_n & \xrightarrow{F(g)_n} & F(k)_n
 \end{array}$$

Infatti, il triangolo in alto commuta perché L_m è limite dei $F(i)_m$, mentre il quadrato sottostante commuta perché $F(g)$ è un morfismo $F(j) \rightarrow F(k)$. Dunque esiste un'unica $L(f) : L_m \rightarrow L_n$. L'unicità di tale costruzione ne garantisce la funtorialità.

Infine, mostriamo che L è limite del diagramma F . Anzitutto come gambe del cono $\pi : L \Rightarrow F$ prendiamo, per ogni $j \in \mathcal{J}$, $\pi_j : L \rightarrow F(j)$, che ha come componenti $\pi_j^n : L_n \rightarrow F(j)_n$. Questo è un morfismo di insiemi simpliciali perché se $f : [n] \rightarrow [m]$, il diagramma

$$\begin{array}{ccc} L_n & \xrightarrow{\pi_j^n} & F(j)_n \\ \uparrow L(f) & & \uparrow F(j)(f) \\ L_m & \xrightarrow{\pi_j^m} & F(j)_m \end{array}$$

commuta per definizione di $L(f)$. Inoltre se $\mu : Y \Rightarrow F$ è un altro cono sopra F , allora, per ogni $[n] \in \Delta$, si ha un cono $\mu^n : Y_n \Rightarrow F_n$: infatti, se $g : j \rightarrow k$ è un morfismo in $\mathcal{J}$, si ha il diagramma a sinistra:

$$\begin{array}{ccc} & Y & \\ \mu_j \swarrow & & \searrow \mu_k \\ F(j) & \xrightarrow{F(g)} & F(k) \end{array} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{array}{ccc} & Y_n & \\ \mu_j^n \swarrow & & \searrow \mu_k^n \\ F(j)_n & \xrightarrow{F(g)_n} & F(k)_n \end{array},$$

che specializzato per $[n]$ dà il diagramma a destra. Dunque esiste un unico $\varphi_n : Y_n \rightarrow L_n$ tale che, per ogni $j \in \mathcal{J}$, $\mu_j^n = \pi_j^n \circ \varphi_n$. Resta da far vedere che mettendo insieme i φ_n si ottiene un morfismo di insiemi simpliciali $\varphi : Y \rightarrow L$, tale che per ogni $j \in \mathcal{J}$, $\mu_j = \pi_j \circ \varphi$. Sia $f : [n] \rightarrow [m]$ morfismo in Δ . Bisogna dimostrare che

$$\begin{array}{ccc} Y_n & \xrightarrow{\varphi_n} & L_n \\ \uparrow Y(f) & & \uparrow L(f) \\ Y_m & \xrightarrow{\varphi_m} & L_m \end{array}$$

commuta. A tal fine, si osservi che, per ogni $g : j \rightarrow k$ in $\mathcal{J}$, si ha il diagramma commutativo:

$$\begin{array}{ccc} & Y_m & \\ \mu_j^m \swarrow & & \searrow \mu_k^m \\ F(j)_m & \xrightarrow{F(g)_m} & F(k)_m \\ \downarrow F(j)(f) & & \downarrow F(k)(f) \\ F(j)_n & \xrightarrow{F(g)_n} & F(k)_n \end{array},$$

per motivi simili a prima. Allora esiste un'unica $\psi : Y_m \rightarrow L_n$ tale che $\forall j \in \mathcal{J}$, $\pi_j^n \circ \psi = F(j)(f) \mu_j^m$. D'altraparte, $\pi_j^n \circ L(f) \circ \varphi_m = F(j)(f) \circ \pi_j^m \circ \varphi_m = F(j)(f) \circ \mu_j^m$, per costruzione di $L(f)$ e φ_m . Analogamente, $\pi_j^n \circ \varphi_n \circ Y(f) = \mu_j^n \circ Y(f) = F(j)(f) \circ \mu_j^m$,

per costruzione di φ_n e perché $\mu_j : Y \rightarrow F(j)$ è un morfismo di insiemi simpliciali. Quindi, per unicità, $L(f) \circ \varphi_m = \varphi_n \circ Y(f)$. $\square$

In realtà abbiamo dimostrato molto di più del fatto che **sSet** è completa (e cocompleta). In particolare, per ogni $n \geq 0$, il funtore ev_n preserva i limiti (e colimiti), per cui per calcolare l'insieme dei n -simplessi di un limite (o colimite) di insiemi simpliciali, basta guardare al limite (o colimite) dei n -simplessi.

Esempio 2.2.14.

- Se $\{X(j)\}_{j \in \mathcal{J}}$ è una famiglia di insiemi simpliciali, allora il prodotto $\prod_{j \in \mathcal{J}} X(j)$ è anch'esso un insieme simpliciale tale che:

$$\left(\prod_{j \in \mathcal{J}} X(j)\right)_n = \prod_{j \in \mathcal{J}} X(j)_n.$$

- Analogamente, il coprodotto $\coprod_{j \in \mathcal{J}} X(j)$ è un insieme simpliciale tale che:

$$\left(\coprod_{j \in \mathcal{J}} X(j)\right)_n = \coprod_{j \in \mathcal{J}} X(j)_n.$$

Corollario 2.2.15. *Siano $X = X_\bullet$ e $Y = Y_\bullet$ insiemi simpliciali, e $f : X \rightarrow Y$ morfismo di insiemi simpliciali. Allora f è un epimorfismo se e solo se, per ogni $n \geq 0$, $f_n : X_n \rightarrow Y_n$ è suriettiva.*

Dimostrazione. Il “se” segue dal fatto che le funzioni suriettive sono epimorfismi in **Set**.

Per il viceversa, consideriamo il diagramma pushout in **sSet**:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ f \downarrow & \lrcorner & \downarrow \iota_1 \\ Y & \xrightarrow{\iota_2} & Y \coprod_X Y \end{array}.$$

Poiché f è un epimorfismo, si ha che $\iota_1 = \iota_2 = \iota$. Allora, guardando a livelli dei n -simplessi si ha il diagramma pushout in **Set**:

$$\begin{array}{ccc} X_n & \xrightarrow{f_n} & Y_n \\ f_n \downarrow & \lrcorner & \downarrow \iota_n \\ Y_n & \xrightarrow{\iota_n} & Y_n \coprod_{X_n} Y_n \end{array},$$

che implica la suriettività di f_n . $\square$

2.3 Simplessi degeneri e dimensione di un insieme simpliciale

Definizione 2.3.1. Dato un insieme simpliciale $X = X_\bullet$, un semplice $x \in X$ si dice degenerare se può essere scritto come $\rho^*(y)$ con y semplice e ρ^* mappa di degenerazione generale non banale (ossia diversa dall'identità). x si dice non degenerare altrimenti.

Equivalentemente, x è degenerare se il morfismo canonico $\Delta^n \xrightarrow{x} X$ si può fattorizzare come $\Delta^n \xrightarrow{\rho} \Delta^m \xrightarrow{y} X$, con $\rho : [n] \rightarrow [m]$ mappa di codegenerazione generale non banale (per cui $m < n$).

Lemma 2.3.2 (Eilenberg–Zilber). Dato un insieme simpliciale $X = X_\bullet$, ogni semplice x può essere scritto in modo unico come:

$$x = \rho_x^*(x^\#),$$

con ρ_x^* mappa di degenerazione generale e $x^\#$ semplice non degenerare.

Equivalentemente, il morfismo canonico $\Delta^n \xrightarrow{x} X$ si fattorizza in modo unico come $\Delta^n \xrightarrow{\rho_x} \Delta^m \xrightarrow{x^\#} X$, con $\rho_x : [n] \rightarrow [m]$ mappa di codegenerazione generale e $x^\#$ non degenerare.

Dimostrazione. Sia $x \in X_n$.

Esistenza: Procediamo per induzione su n .

Se $n = 0$ e $\rho^* : X_0 \rightarrow X_0$ è una mappa di degenerazione generale, necessariamente è l'identità e dunque x è non degenerare; quindi basta prendere $\rho_x^* = \text{id}$ e $x^\# = x$.

Se $n > 0$ distinguo in base al fatto che x sia degenerare o no. Se x è degenerare, esiste $\rho^* : X_m \rightarrow X_n$ (con $m < n$) mappa di degenerazione generale non banale e $y \in X_m$ tale che $x = \rho^*(y)$. Per ipotesi induttiva, esiste ρ_y^* mappa di degenerazione generale e $y^\#$ non degenerare tale che $y = \rho_y^*(y^\#)$. Allora $x = \rho^*(\rho_y^*(y^\#))$, con $\rho^* \circ \rho_y^*$ mappa di degenerazione generale e $y^\#$ non degenerare.

Unicità: Siano $x_1 \in X_n$, $x_2 \in X_m$ e supponiamo che $x = \rho_1^*(x_1) = \rho_2^*(x_2)$ con ρ_1^* , ρ_2^* mappe di degenerazione generale e x_1 , x_2 simplessi non degeneri. Siccome ρ_1 è una mappa di codegenerazione generale, ha una sezione $\bar{\rho}_1$ (Osservazione 2.1.5). Di conseguenza $\bar{\rho}_1^*$ è una retrazione di ρ_1^* . Allora:

$$\begin{aligned} \rho_1^*(x_1) &= \rho_2^*(x_2) \\ x_1 &= \bar{\rho}_1^*(\rho_2^*(x_2)) = (\rho_2 \circ \bar{\rho}_1)^*(x_2). \end{aligned}$$

Siccome x_1 è non degenerare $n \leq m$. Per simmetria, si ha anche $m \leq n$ e dunque $n = m$. Inoltre, sappiamo che $x_1 = h^*(x_2)$ con $h = \rho_2 \circ \bar{\rho}_1 : [m] \rightarrow [m]$. La non

degenerazione di x_1 implica che h è suriettiva, e dunque anche iniettiva, ossia $h = \text{id}_{[m]}$. Di conseguenza $x_1 = x_2 = y$. Infine, abbiamo mostrato che ogni sezione $\bar{\rho}_1$ di ρ_1 è anche una sezione per ρ_2 , da cui $\rho_1 = \rho_2$. $\square$

Proposizione 2.3.3. *Un m -simpleso di Δ^n è non degenero se e solo se è un morfismo di faccia generale. Di conseguenza i m -simplessi non degeneri sono $\binom{n+1}{m+1}$ per $m \leq n$ e 0 per $m > n$. In particolare c'è un solo n -simpleso non degenero.*

Dimostrazione. Sia $x \in \Delta_m^n$ degenero; allora $x = \rho^*(y) = y \circ \rho$ con ρ mappa di codegenerazione generale non banale. In particolare ρ non è iniettiva, e quindi x non è iniettiva. Se invece x non è iniettiva, sia $x = \iota \circ \rho$ come nel Lemma 2.1.6. Allora ρ è una mappa di codegenerazione non banale (altrimenti x sarebbe iniettiva) e $x = \rho^*(\iota)$. $\square$

Definizione 2.3.4. *Sia X un insieme simpliciale. Diremo che $x \in X_n$ ha dimensione k se il semplice non degenero $x^\#$ (come nell'enunciato del Lemma di Eilenberg–Zilber) è un k -simpleso di X .*

Diremo che X ha dimensione $\leq k$ se ogni semplice di X ha dimensione $\leq k$. Inoltre X ha dimensione k se ha dimensione $\leq k$, ma non ha dimensione $\leq k-1$ (ossia esiste un semplice di dimensione k).

Esempio 2.3.5.

- Stante la Proposizione 2.3.3, l'insieme simpliciale standard Δ^n ha dimensione n , mentre la i -esima faccia simpliciale $\partial_i \Delta^n$, la n -sfera simpliciale $\partial \Delta$ e l' i -esimo corno simpliciale Λ_i^n hanno dimensione $n-1$.
- Sia $\{X(j)\}_{j \in \mathcal{J}}$ una collezione di insiemi simpliciali e X il coprodotto. Allora X ha dimensione $\leq k$ se e solo se, per ogni j , $X(j)$ ha dimensione $\leq k$.
- Se X e Y sono due insiemi simpliciali di dimensione rispettivamente k e h , allora $X \times Y$ ha dimensione $k+h$.

Infatti, se $n \geq 0$ e $z = (x, y) \in X_n \times Y_n$ un n -simpleso non degenero, per il Lemma di Eilenberg–Zilber, x e y fattorizzano in $\Delta^n \xrightarrow{\rho_x} \Delta^{m_x} \xrightarrow{x^\#} X$ e $\Delta^n \xrightarrow{\rho_y} \Delta^{m_y} \xrightarrow{y^\#} Y$, con $x^\#$ e $y^\#$ non degeneri, per cui $m_x \leq k$ e $m_y \leq h$. Queste due fattorizzazioni si combinano per dare una fattorizzazione di z in $\Delta^n \xrightarrow{(\rho_x, \rho_y)} \Delta^{m_x} \times \Delta^{m_y} \xrightarrow{x^\# \times y^\#} X \times Y$ con $(\rho_x, \rho_y) : [n] \rightarrow [m_x] \times [m_y]$ morfismo di insiemi parzialmente ordinati, come nell'Osservazione 2.1.9. Per non degenerazione di z , si ha che $n \leq m_x + m_y \leq k + h$.

Infine, siano $x \in X_k$ e $y \in Y_h$ simplessi non degeneri; i morfismi canonici corrispondenti danno una mappa $\Delta^k \times \Delta^h \xrightarrow{(x, y)} X \times Y$. Allora la scelta di un morfismo

di insiemi parzialmente ordinati $[k+h] \rightarrow [k] \times [h]$ iniettivo (o, equivalentemente, con immagine massima) determina un $(k+h)$ -simpleso non degeneri di $X \times Y$.

Osservazione 2.3.6. In particolare l'insieme simpliciale $\Delta^k \times \Delta^h$ ha dimensione $k+h$. Il numero di $(k+h)$ -simplessi non degeneri coincide con il numero di morfismi di insiemi parzialmente ordinati $[k+h] \rightarrow [k] \times [h]$ iniettivi, che sono in numero $\binom{k+h}{k}$.

In particolare il prisma $\Delta^n \times \Delta^1$ ha esattamente $n+1$ $(n+1)$ -simplessi non degeneri.

Definizione 2.3.7. Sia $X = X_\bullet$ un insieme simpliciale e $k \geq 0$. Per ogni $n \geq 0$, definiamo $\text{sk}_k(X)_n$ come il sottoinsieme di X_n costituito dai n -simplessi $\Delta^n \xrightarrow{x} X$ che ammettono una fattorizzazione $\Delta^n \rightarrow \Delta^m \xrightarrow{y} X$, con $m \leq k$.

Osservazione 2.3.8.

1. Segue immediatamente dalla definizione che $\{\text{sk}_k(X)_n\}_{n \geq 0}$ sia stabile rispetto alle mappe di faccia e degenerazione e dunque costituisce un sottoinsieme simpliciale $\text{sk}_k(X)_\bullet \subseteq X_\bullet$, detto il k -esimo scheletro di X .
2. Siano $m \leq n$ due interi, allora per ogni insieme simpliciale X , l' m -scheletro è contenuto nell' n -scheletro.
3. Sia X un insieme simpliciale e k un intero. Se $n \leq k$, allora $\text{sk}_k(X)$ contiene ogni n -simpleso di X . In particolare $\bigcup_k \text{sk}_k(X) = X$, cioè X è il colimite del diagramma:

$$\text{sk}_0(X) \hookrightarrow \text{sk}_1(X) \hookrightarrow \text{sk}_2(X) \hookrightarrow \cdots \rightarrow X.$$

4. Sia X un insieme simpliciale e x un n -simpleso di X non degeneri. Allora x appartiene al k -scheletro $\text{sk}_k(X)$ se e solo se $n \leq k$.

Proposizione 2.3.9. Sia X un insieme simpliciale e k un intero. Allora:

1. Il sottoinsieme simpliciale $\text{sk}_k(X)$ ha dimensione $\leq k$;
2. Per ogni insieme simpliciale Y di dimensione $\leq k$, la composizione con l'inclusione $\iota : \text{sk}_k(X) \hookrightarrow X$ induce una biezione:

$$\mathbf{sSet}(Y, \text{sk}_k(X)) \cong \mathbf{sSet}(Y, X)$$

Dimostrazione. Il Punto 1 è una riformulazione del Punto 4 dell'Osservazione 2.3.8.

Per il Punto 2, preso un morfismo di insiemi simpliciali $f : Y \rightarrow X$, dobbiamo mostrare che, per ogni y n -simpleso di Y , $f_n(y)$ è un n -simpleso in $\text{sk}_k(X)$. Per Eilenberg–Zilberg esiste un m -simpleso non degeneri $y^\#$ di Y e $\rho_y : [n] \rightarrow [m]$ tale che $y = \rho_y^*(y^\#)$. Avendo Y dimensione $\leq k$, segue che $m \leq k$ e quindi applicando f si ha $f_n(y) = f_n(\rho_y^*(y^\#)) = \rho_y^*(f_m(y^\#))$, ossia $f_n(y) \in \text{sk}_k(X)_n$. $\square$

Corollario 2.3.10. *Per ogni $k \geq 0$ e X insieme simpliciale, $\text{sk}_k(X)$ è il più grande sottoinsieme di X di dimensione $\leq k$.*

Definizione 2.3.11. *Sia X un insieme simpliciale; per ogni $k \geq 0$, definiamo il sottoinsieme $X_k^{nd} \subseteq X_k$ dei k -simplessi non degeneri.*

Osservazione 2.3.12.

1. Per il Lemma di Eilenberg–Zilber, un insieme simpliciale X può essere identificato con il sottoinsieme simpliciale generato dai suoi simplessi non degeneri, ossia il più piccolo sottoinsieme simpliciale di X che contiene tutti i simplessi non degeneri.
2. Sia X un insieme simpliciale e $k \geq 0$. Ogni elemento $x \in X_k^{nd}$ determina un morfismo $\Delta^k \rightarrow X$; siccome $\partial\Delta^k \subseteq \Delta^k$ ha dimensione $\leq k-1$, questa mappa porta $\partial\Delta^k$ nel $(k-1)$ -scheletro $\text{sk}_{k-1}(X)$. Tale costruzione determina il seguente diagramma pushout:

$$\begin{array}{ccc} \coprod_{x \in X_k^{nd}} \partial\Delta^n & \longrightarrow & \text{sk}_{k-1}(X) \\ \downarrow & \lrcorner & \downarrow \\ \coprod_{x \in X_k^{nd}} \Delta^n & \longrightarrow & \text{sk}_k(X) \end{array} .$$

Infatti, srotolando le definizioni, ci si riconduce a dimostrare il seguente:

(*) Sia x un n -simpleso di $\text{sk}_k(X)$ che non è contenuto in $\text{sk}_{k-1}(X)$. Allora x fattorizza unicamente come

$$\Delta^n \xrightarrow{\alpha} \Delta^k \xrightarrow{y} X,$$

con y simpleso non degenero di X e α di codegenerazione generale.

Per il Lemma di Eilenberg–Zilber, x fattorizza unicamente come $\Delta^n \xrightarrow{\alpha} \Delta^m \xrightarrow{y} X$, con α mappa di codegenerazione e y non degenero. Siccome x è nel k -scheletro, segue che $m \leq k$; inoltre, poiché x non è nel $(k-1)$ -scheletro, segue che $m \geq k$.

Per concludere questa parte, vogliamo studiare più approfonditamente i morfismi di insiemi simpliciali con dominio i corni Λ_i^n , le sfere $\partial\Delta^n$ e i prismi $\Delta^n \times \Delta^1$. Per il Lemma di Yoneda, sappiamo che morfismi $\Delta^n \rightarrow X$ corrispondono a n -simplessi di X ; vorremo caratterizzare queste mappe in una maniera combinatorica simile. In tutti e tre i casi sarà utile capire chi sono i simplessi non degeneri di dimensione massima e individuare la relazione simpliciale che soddisfano.

Partiamo studiando i morfismi $\Lambda_i^n \rightarrow X$. Anzitutto osserviamo i n ($n-1$)-simplessi non degeneri di Λ_i^n sono $d_n^j : \Delta^{n-1} \rightarrow \Lambda_i^n$, per $j \neq i$.

Lemma 2.3.13. *Sia $X = X_\bullet$ un insieme simpliciale, e $n \geq 0$, $0 \leq i \leq n$ degli interi. La funzione:*

$$\begin{aligned} \mathbf{sSet}(\Lambda_i^n, X) &\rightarrow (X_{n-1})^n \\ \Lambda_i^n &\xrightarrow{f} X \mapsto (f \circ d_n^j)_{j=0, \dots, n; j \neq i} \end{aligned}$$

è iniettiva e ha come immagine le n -uple di $(n-1)$ -simplessi di X :

$$(\sigma_0, \dots, \sigma_{i-1}, \bullet, \sigma_{i+1}, \dots, \sigma_n)$$

tali che, per ogni $j, k \neq i$ con $j < k$, si ha $d_j^{n-1}(\sigma_k) = d_{k-1}^{n-1}(\sigma_j)$.

Dimostrazione. Anzitutto osserviamo che presa $f : \Lambda_i^n \rightarrow X$ e $j, k \neq i$ con $j < k$ si ha $d_j^{n-1}(f \circ d_n^k) = f \circ d_n^k \circ d_{n-1}^j = f \circ d_n^j \circ d_{n-1}^{k-1} = d_{k-1}^{n-1}(f \circ d_n^j)$, ossia l'immagine è contenuta nell'insieme delle n -uple di $(n-1)$ -simplessi di X che soddisfano la proprietà combinatoria dell'enunciato.

Sia ora $w : \coprod_{\ell=0; \ell \neq i}^n \Delta^n \rightarrow \Lambda_i^n$ la mappa indotta, per ogni $\ell \neq i$, da $d_n^\ell : \Delta^{n-1} \rightarrow \Lambda_i^n$. Allora l'iniettività della funzione nell'asserto è equivalente a dire che tale w è un epimorfismo, ossia che ha tutte le componenti suriettive. Sia quindi $m \geq 0$ un intero e $\alpha : [m] \rightarrow [n]$ un m -simpleso di Λ_i^n , cioè con immagine che non contiene $\{0, \dots, i-1, i+1, \dots, n\}$. Ciò significa che esiste un $\ell \neq i$ tale che l'immagine di α è contenuta in $[n] \setminus \{\ell\}$. In corrispondenza di tale indice, α si fattorizza in modo unico come $\alpha = d_n^\ell \circ \beta_\ell$, con β_ℓ m -simpleso di Δ^{n-1} . Allora, per costruzione, $\alpha = w_m(\beta_\ell)$.

Per concludere, bisogna provare che ogni n -upla di siffatti $(n-1)$ -simplessi di X proviene da una qualche $f : \Lambda_i^n \rightarrow X$. Preso $\ell \neq i$, sia $u_\ell : \coprod_{j \neq i; j < \ell} \Delta^{n-2} \rightarrow \Delta^{n-1}$ mappa data, per ogni j siffatto, da $d_{n-1}^j : [n-2] \rightarrow [n-1]$, mentre $v_\ell : \coprod_{k \neq i; k > \ell} \Delta^{n-2} \rightarrow \Delta^{n-1}$ data, per ogni k siffatto, da $d_{n-1}^{k-1} : [n-2] \rightarrow [n-1]$. Mettendo insieme questi morfismi e re-indicizzando si ottiene il diagramma:

$$\begin{array}{ccccc} \coprod_{j, k \neq i; j < k} \Delta^{n-2} & \xrightarrow[u]{u} & \coprod_{\ell \neq i} \Delta^{n-1} & \longrightarrow & \text{Coeq}(u, v) \xrightarrow{\bar{w}} \Lambda_i^n \\ & & & \searrow w & \uparrow \end{array} .$$

Sia $\text{Coeq}(u, v)$ il coequilizzatore di tale diagramma; se mostriamo che $\Lambda_i^n \cong \text{Coeq}(u, v)$ avremo esattamente la tesi. Per le relazioni simpliciali delle mappe di cofaccia, si ha che $w \circ u = w \circ v$ e quindi esiste un unico $\bar{w} : \text{Coeq}(u, v) \rightarrow \Lambda_i^n$ che fa commutare il diagramma. Per concludere che è un isomorfismo di insiemi simpliciali, bisogna verificare che è una biezione a livello dei simplessi. Preso $m \geq 0$, la suriettività di $\bar{w}_m$ segue da quella di w_m , mentre per l'iniettività bisogna mostrare che, preso $\alpha : [m] \rightarrow [n]$ m -simpleso di Λ_i^n e $j, k \neq i$ che non stanno nell'immagine di α , i m -simplessi di Δ^{n-1} β_j e β_k tramite cui α si

fattorizza vanno a finire nello stesso m -simpleso di $\text{Coeq}(u, v)$. Supponiamo che $j < k$, allora esiste un m -simpleso γ di Δ^{n-2} tale che $\beta_k = u_j(\gamma)$ e $\beta_j = v_k(\gamma)$; di conseguenza le immagini di β_k e β_j sono uguali in $\text{Coeq}(u, v)$, per definizione di coequilizzatore. $\square$

Osservazione 2.3.14. In maniera analoga, si possono caratterizzare i morfismi $\partial\Delta^n \rightarrow X$ come $(n+1)$ -uple di $(n-1)$ -simplessi di X che sono “compatibili” sulla frontiera, ossia $(\sigma_0, \dots, \sigma_n) \in (X_{n-1})^{n+1}$ tale che, per ogni $j < k$, $d_j^{n-1}(\sigma_k) = d_{k-1}^{n-1}(\sigma_j)$. In questo caso la dimostrazione si basa sul fatto che $\partial\Delta^n$ è il coequilizzatore del diagramma:

$$\coprod_{j < k} \Delta^{n-2} \xrightarrow[u]{u} \coprod_{\ell} \Delta^{n-1} \dashrightarrow \partial\Delta^n.$$

Infine, concentriamo sul prisma $\Delta^n \times \Delta^1$; per quanto osservato nell'Osservazione 2.3.6, ci sono esattamente $n+1$ $(n+1)$ -simplessi non degeneri $\rho_0, \dots, \rho_n$, corrispondenti ai cammini di lunghezza $n+1$ nella griglia ordinata $[n] \times [1]$. Più esplicitamente, $\rho_k : [n+1] \rightarrow [n] \times [1]$ è il morfismo con immagine:

$$\{(0, 0), (1, 0), \dots, (k, 0), (k, 1), \dots, (n-1, 1), (n, 1)\}.$$

È dunque chiaro che questi simplessi verificano $d_{k+1}^{n+1}(\rho_k) = d_{k+1}^{n+1}(\rho_{k+1})$, per ogni $0 \leq k \leq n-1$.

Lemma 2.3.15. *Sia X un insieme simpliciale e $n \geq 0$. La funzione:*

$$\begin{aligned} \mathbf{sSet}(\Delta^n \times \Delta^1, X) &\rightarrow (X_{n+1})^{n+1}, \\ H : \Delta^n \times \Delta^1 &\rightarrow X \mapsto (H \circ \rho_k)_{k=0, \dots, n} \end{aligned}$$

è iniettiva e ha immagine le $(n+1)$ -uple di $(n+1)$ -simplessi $(\sigma_0, \dots, \sigma_n)$ tali che, per ogni $0 \leq k \leq n-1$, $d_k^{n+1}(\sigma_k) = d_{k+1}^{n+1}(\sigma_{k+1})$.

Sia X un insieme simpliciale e $v \in X_0$ uno 0-simpleso. Denotiamo con v anche il sottoinsieme simpliciale di X che contiene v come 0-simpleso e un unico n -simpleso per ogni $n \geq 0$, che per convenienza denoteremo sempre $v : \Delta^n \rightarrow X$.

Esempio 2.3.16. Sia S^n l'insieme simpliciale che ha come simplessi non degeneri solo uno 0-simpleso e un n -simpleso. Se X è un insieme simpliciale, dare una mappa $S^n \rightarrow X$ è equivalente alla scelta di $v \in X_0$ e $\sigma \in X_n$ tali che, per ogni $i = 0, \dots, n$, $d_i(\sigma) \in v$.

2.4 Esempi naturali di insiemi simpliciali

Fin'ora abbiamo lavorato con gli insiemi simpliciali in astratto. Adesso vorremmo introdurre degli esempi più concreti. Questi esempi, però, non sono altro che dei casi

particolari di una costruzione molto più generale. Siccome le loro proprietà si possono dimostrare in questo grado di generalità, si preferisce procedere con questa costruzione più astratta.

Costruzione 2.4.1. Sia $\mathcal{E}$ una categoria localmente piccola e cocompleta e $F : \Delta \rightarrow \mathcal{E}$ un funtore covariante. Tale funtore permette di costruire per ogni oggetto $e \in \mathcal{E}$ un insieme simpliciale $R(e)$. Inoltre tale costruzione è funtoriale, cioè si estende a un funtore $R : \mathcal{E} \rightarrow \mathbf{sSet}$.

Preso $e \in \mathcal{E}$, definiamo $R(e)$ come l'insieme simpliciale che ha come n -simplessi, $R(e)_n = \mathcal{E}(F([n]), e)$. Questa scelta definisce un insieme simpliciale perché se $f : [n] \rightarrow [m]$ è un morfismo in Δ , allora si ha $F(f)^* : \mathcal{E}(F([m]), e) \rightarrow \mathcal{E}(F([n]), e)$, dato dalla pre-composizione per $F(f)$. Inoltre se $g : e \rightarrow e'$ è un morfismo in $\mathcal{E}$, si definisce il morfismo di insiemi simpliciali $R(g) : R(e) \rightarrow R(e')$ come $R(g)_n = g_* : \mathcal{E}(F([n]), e) \rightarrow \mathcal{E}(F([n]), e')$, dato dalla post-composizione per g . È un morfismo di insiemi simpliciali perché se $f : [n] \rightarrow [m]$ è un morfismo in Δ , il seguente diagramma commuta per l'associatività della composizione di morfismi in $\mathcal{E}$:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E}(F([n]), e) & \xrightarrow{g_*} & \mathcal{E}(F([n]), e') \\ F(f)^* \uparrow & & \uparrow F(f)^* \\ \mathcal{E}(F([m]), e) & \xrightarrow{g_*} & \mathcal{E}(F([m]), e') \end{array} .$$

Esempio 2.4.2. [Nervo di una categoria piccola]

Sappiamo che ogni insieme parzialmente ordinato realizza una categoria piccola e che i morfismi tra insiemi parzialmente ordinati corrispondono con funtori tra tali realizzazioni. Si ha dunque l'embedding $i : \Delta \hookrightarrow \mathbf{Cat}$ della categoria simpliciale nella categoria delle categorie piccole. A tale funtore corrisponde quindi $N : \mathbf{Cat} \rightarrow \mathbf{sSet}$ che associa ad ogni categoria piccola un insieme simpliciale, detto il nervo della categoria. Esplicitamente, sia $\mathcal{C}$ una categoria piccola, allora $N(\mathcal{C})_\bullet$ è l'insieme simpliciale che ha come n -simplessi l'insieme dei funtori $\mathbf{Cat}([n], \mathcal{C})$. Le mappe di faccia e degenerazione sono $d_i^n : \mathbf{Cat}([n], \mathcal{C}) \rightarrow \mathbf{Cat}([n-1], \mathcal{C})$, dato dalla pre-composizione per d_n^i (pensato come funtore tra categorie piccole) e $s_i^n : \mathbf{Cat}([n], \mathcal{C}) \rightarrow \mathbf{Cat}([n+1], \mathcal{C})$, dato dalla pre-composizione per s_n^i (pensato come funtore tra categorie piccole).

Più intuitivamente si possono pensare i n -simplessi di $N(\mathcal{C})_\bullet$ come:

- $N(\mathcal{C})_0 = \text{Ob}(\mathcal{C})$
- $N(\mathcal{C})_1 = \text{Mor}(\mathcal{C})$
- $N(\mathcal{C})_2 = \{\text{coppie di frecce componibili } \rightarrow \rightarrow \text{ in } \mathcal{C}\}$
- ...

- $N(\mathcal{C})_n = \{\text{stringhe di } n \text{ frecce componibili } \rightarrow \rightarrow \cdots \rightarrow \text{ in } \mathcal{C}\}$

Quindi la mappa di faccia $d_i^n : N(\mathcal{C})_n \rightarrow N(\mathcal{C})_{n-1}$ prende una stringa di n frecce componibili

$$c_0 \rightarrow c_1 \rightarrow \cdots \rightarrow c_i \rightarrow \cdots \rightarrow c_n$$

e ottiene $n - 1$ frecce componibili componendo la i -esima e la $(i + 1)$ -esima freccia se $0 < i < n$ e ignorando la prima o l'ultima freccia se i è rispettivamente 0 o n , mentre la mappa di degenerazione $s_i^n : N(\mathcal{C})_n \rightarrow N(\mathcal{C})_{n+1}$ ottiene $n + 1$ frecce componibili aggiungendo l'identità di c_i in posizione i .

Osservazione 2.4.3. Dalla descrizione del nervo $N(\mathcal{C})$ segue che un morfismo di insiemi simpliciali $X \rightarrow N(\mathcal{C})$ è univocamente determinata dall'azione sui 1-simplessi, cioè se $f, g : X \rightarrow N(\mathcal{C})$ sono due morfismi di insiemi simpliciali tali che $f_1 = g_1$, allora $f = g$.

Definizione 2.4.4. Preso $n \geq 0$ definiamo $\Delta_n = \{(t_0, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^{n+1} : t_i \geq 0 \forall i, \sum_{i=0}^n t_i = 1\}$ l'involuppo convesso dei vettori della base canonica di $\mathbb{R}^{n+1}$, detto l' n -simpleso standard. Ci riferiamo a Δ_n come uno spazio topologico (con la topologia indotta dalla topologia euclidea di $\mathbb{R}^{n+1}$).

Siano $d_n^i : \Delta_{n-1} \rightarrow \Delta_n$, $d_n^i(t_0, \dots, t_{n-1}) = (t_0, \dots, t_{i-1}, 0, t_i, \dots, t_{n-1})$ mappa continua che aggiunge uno 0 in posizione i e $s_n^i : \Delta_{n+1} \rightarrow \Delta_n$, $s_n^i(t_0, \dots, t_{n+1}) = (t_0, \dots, t_{i-1}, t_i + t_{i+1}, t_{i+2}, \dots, t_{n+1})$ mappa continua che somma le coordinate i e $i + 1$. Geometricamente d_n^i inserisce Δ_{n-1} come la i -esima faccia di Δ_n (quella opposta al vertice e_i), mentre s_n^i proietta Δ_{n+1} nella sua i -esima faccia.

Osservazione 2.4.5. Si può mostrare che le funzioni d_n^i e s_m^j soddisfano le relazioni simpliciali. Di conseguenza, per il Punto 3 dell'Osservazione 2.1.7, esiste un unico funtore $\Delta : \mathbf{\Delta} \rightarrow \mathbf{Top}$ che manda $[n]$ in Δ_n , le mappe di cofaccia nelle funzioni continue d_n^i e le mappe di codegenerazione nelle funzioni continue s_m^j . Se $f : [m] \rightarrow [n]$ è un morfismo in $\mathbf{\Delta}$ denotiamo $f_* = \Delta(f) : \Delta_m \rightarrow \Delta_n$. Più esplicitamente, $f_* : \Delta_m \rightarrow \Delta_n$ è la funzione continua definita da:

$$(t_0, \dots, t_m) \mapsto \left(\sum_{f(i)=0} t_i, \sum_{f(i)=1} t_i, \dots, \sum_{f(i)=n} t_i \right).$$

Definizione 2.4.6. Sia X uno spazio topologico. Un n -simpleso singolare è $\sigma : \Delta_n \rightarrow X$ continua.

Esempio 2.4.7. [L'insieme simpliciale singolare di uno spazio topologico]

Al funtore $\Delta : \mathbf{\Delta} \rightarrow \mathbf{Top}$ corrisponde secondo la Costruzione 2.4.1 il funtore $\text{Sing} : \mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{sSet}$ che associa ad ogni spazio topologico X l'insieme simpliciale singolare

$\text{Sing}(X)_\bullet$. Per ogni $n \geq 0$, $\text{Sing}(X)_n = \mathbf{Top}(\Delta_n, X)$, ossia l'insieme dei n -simplessi singolari di X . Le mappe di faccia $d_i^n : \mathbf{Top}(\Delta_n, X) \rightarrow \mathbf{Top}(\Delta_{n-1}, X)$ sono ottenute pre-componendo $d_i^n : \Delta_{n-1} \rightarrow \Delta_n$, mentre le mappe di degenerazione $s_i^n : \mathbf{Top}(\Delta_n, X) \rightarrow \mathbf{Top}(\Delta_{n+1}, X)$ sono ottenuto pre-componendo $s_i^n : \Delta_{n+1} \rightarrow \Delta_n$.

Osservazione 2.4.8. Sia X uno spazio topologico e $Y \subseteq X$ un sottospazio. Allora $\text{Sing}(Y)_\bullet \subseteq \text{Sing}(X)_\bullet$.

Si osservi che, per ogni spazio topologico X e $n \geq 0$, si ha, per il Lemma di Yoneda,

$$\mathbf{sSet}(\Delta^n, \text{Sing}(X)_\bullet) \cong \text{Sing}(X)_n = \mathbf{Top}(\Delta_n, X),$$

che ricorda una relazione di aggiunzione. In effetti, vedremo che esiste un aggiunto sinistro $|-| : \mathbf{sSet} \rightarrow \mathbf{Top}$, detto realizzazione geometrica, del funtore Sing . L'esistenza di tale aggiunto è in realtà un fatto più generale, legato alla Costruzione 2.4.1.

Costruzione 2.4.9. Siano $\mathcal{E}$, $F : \Delta \rightarrow \mathcal{E}$ e $R : \mathcal{E} \rightarrow \mathbf{sSet}$ come nella Costruzione 2.4.1. Vogliamo ora costruire un aggiunto sinistro $L : \mathbf{sSet} \rightarrow \mathcal{E}$ di R .

Sia X un insieme simpliciale; per ogni $n, m \geq 0$, consideriamo il coprodotto di copie di $F([n])$ indicizzato dagli elementi di X_m , che indichiamo $X_m \times F([n])$. Un morfismo $f : [n] \rightarrow [m]$ induce delle mappe $f_* : X_m \times F([n]) \rightarrow X_m \times F([m])$ e $f^* : X_m \times F([n]) \rightarrow X_n \times F([n])$ secondo i diagrammi:

$$\begin{array}{ccccc} & & X_m \times F([n]) & & \\ & \nearrow \iota_x & & \searrow f_* & \\ F([n]) & \xrightarrow{F(f)} & F([m]) & \xrightarrow{\iota_x} & X_m \times F([m]) \end{array} \quad e$$

$$\begin{array}{ccc} & X_m \times F([n]) & \\ & \nearrow \iota_x & \downarrow f^* \\ F([n]) & \xrightarrow{\iota_{f^*(x)}} & X_n \times F([n]) \end{array} \quad ,$$

per ogni $x \in X_m$.

Consideriamo ora il diagramma dato, per ogni $f : [n] \rightarrow [m]$, dai morfismi $f_* : X_m \times F([n]) \rightarrow X_m \times F([m])$ e $f^* : X_m \times F([n]) \rightarrow X_n \times F([n])$. Un *wedge* sotto questo diagramma è un oggetto e di $\mathcal{E}$, insieme con mappe $\gamma_n : X_n \times F([n]) \rightarrow e$, tale che per ogni $f : [n] \rightarrow [m]$, il seguente diagramma commuti:

$$\begin{array}{ccc} X_m \times F([n]) & \xrightarrow{f_*} & X_m \times F([m]) \\ \downarrow f^* & & \downarrow \gamma_m \\ X_n \times F([n]) & \xrightarrow{\gamma_n} & e \end{array} \quad . \quad (1)$$

Il *coend*, scritto $\int^n X_n \times F([n])$, è definito come wedge universale. Equivalentemente, il coend è il coequilizzatore del diagramma:

$$\coprod_{f:[n] \rightarrow [m]} X_m \times F([n]) \begin{matrix} \xrightarrow{f_*} \\ \xleftarrow{f^*} \end{matrix} \coprod_{[n]} X_n \times F([n]) \dashrightarrow \int^n X_n \times F([n]).$$

Osserviamo che se $h : \int^n X_n \times F([n]) \rightarrow e$ è un morfismo in $\mathcal{E}$, allora e diventa un wedge grazie ai morfismi $h\gamma_n$ (e per la proprietà universale del coend tutti i wedge sono di questa forma).

Sugli oggetti, il funtore $L : \mathbf{sSet} \rightarrow \mathcal{E}$ è definito tramite il coend:

$$L(X) = \int^n X_n \times F([n]).$$

Se $\alpha : X \rightarrow Y$ è un morfismo di insiemi simpliciali, per ogni $n \geq 0$, possiamo definire $(\alpha_n)_* : X_n \times F([n]) \rightarrow Y_n \times F([n])$ grazie al diagramma:

$$\begin{array}{ccc} & X_n \times F([n]) & \\ \nearrow \iota_x & \downarrow (\alpha_n)_* & \\ F([n]) & \xrightarrow{\iota_{\alpha_n(x)}} & Y_n \times F([n]) \end{array},$$

per ogni $x \in X_n$.

Di conseguenza, per ogni $f : [n] \rightarrow [m]$ si ha il diagramma commutativo:

$$\begin{array}{ccccc} X_m \times F([n]) & \xrightarrow{f_*} & X_m \times F([m]) & \xrightarrow{(\alpha_m)_*} & Y_m \times F([m]) \\ \downarrow f^* & & \downarrow \gamma_m & & \downarrow \omega_m \\ X_n \times F([n]) & \xrightarrow{\gamma_n} & \int^n X_n \times F([n]) & & \\ (\alpha_n)_* \downarrow & & \searrow \exists! L(\alpha) & & \\ Y_n \times F([n]) & \xrightarrow{\omega_n} & \int^n Y_n \times F([n]) & & \end{array},$$

che quindi per la proprietà universale del coend, definisce un'unica mappa $L(\alpha) : L(X) \rightarrow L(Y)$. Per vedere che tale diagramma commuta, basta verificarlo per ogni $x \in X_m$:

$$\begin{array}{ccc} F([n]) & \xrightarrow{F(f)} & F([m]) \xrightarrow{\iota_{\alpha_m(x)}} Y_m \times F([m]) \\ \downarrow \iota_{\alpha_n(f^*(x))} = \iota_{f^*(\alpha_m(x))} & & \downarrow \omega_m \\ Y_n \times F([n]) & \xrightarrow{\omega_n} & \int^n Y_n \times F([n]) \end{array}.$$

L'unicità di $L(\alpha)$ garantisce la funtorialità della costruzione.

Resta da mostrare che L è l'aggiunto sinistro di R , ossia, per ogni $X \in \mathbf{sSet}$ e $e \in \mathcal{E}$, c'è un isomorfismo:

$$\mathbf{sSet}(X, R(e)) \cong \mathcal{E}(L(X), e),$$

naturale in X ed e . Sia $\gamma : X \rightarrow R(e)$ morfismo di insiemi simpliciali, ossia, per ogni $n \geq 0$, si ha $\gamma_n : X_n \rightarrow \mathcal{E}(F([n]), e)$ che soddisfano condizioni di naturalità imposte dai morfismi di Δ . Queste ci permettono di definire, per ogni $n \geq 0$, $\gamma_n : X_n \times F([n]) \rightarrow e$ morfismi in $\mathcal{E}$, usando che, per ogni $x \in X_n$, si ha $\gamma_n(x) : F([n]) \rightarrow e$. Questi morfismi rendono e un wedge sotto il diagramma di cui $L(X)$ è il coend; dobbiamo mostrare che (1) commuta per ogni $f \in \text{Mor}(\Delta)$. Ciò equivale a provare che, per ogni $x \in X_m$, i morfismi $F([n]) \xrightarrow{F(f)} F([m]) \xrightarrow{\gamma_m(x)} e$ e $F([n]) \xrightarrow{\gamma_n(f^*(x))} e$ coincidono, ossia il diagramma

$$\begin{array}{ccc} X_m & \xrightarrow{\gamma_m} & \mathcal{E}(F([m]), e) \\ \downarrow f^* & & \downarrow (F(f))^* \\ X_n & \xrightarrow{\gamma_n} & \mathcal{E}(F([n]), e) \end{array}$$

commuta, il che è vero per naturalità di γ . Per la proprietà universale del coend, esiste quindi un'unica mappa $\gamma^b : L(X) \rightarrow e$, che usiamo per definire:

$$\begin{aligned} \phi : \mathbf{sSet}(X, R(e)) &\rightarrow \mathcal{E}(L(X), e), \\ \gamma &\mapsto \gamma^b. \end{aligned}$$

Viceversa, data $h : L(X) \rightarrow e$ in $\mathcal{E}$, abbiamo delle mappe $X_n \times F([n]) \xrightarrow{\omega_n} L(X) \xrightarrow{h} e$ per ogni $n \geq 0$, dove ω_n sono i morfismi del coend. Usiamo queste funzioni per definire, per ogni $n \geq 0$, $h_n^\# : X_n \rightarrow \mathcal{E}(F([n]), e)$ che porta $x \in X_n$ in $h\omega_n\iota_x$. Si ha che $h^\# : X \rightarrow R(e)$ è un morfismo di insiemi simpliciali: infatti, ragionando come prima, si ha che il diagramma di sinistra commuta se e solo se il diagramma di destra commuta:

$$\begin{array}{ccc} X_m \xrightarrow{h_m^\#} \mathcal{E}(F([m]), e) & & X_m \times F([n]) \xrightarrow{f_*} X_m \times F([m]) \\ \downarrow f^* & \Downarrow (F(f))^* & \downarrow f^* \\ X_n \xrightarrow{h_n^\#} \mathcal{E}(F([n]), e) & \xrightarrow{\quad} & X_n \times F([n]) \xrightarrow{h\omega_n} e \end{array} \quad \begin{array}{c} \text{.} \end{array}$$

Abbiamo quindi definito:

$$\begin{aligned} \psi : \mathcal{E}(L(X), e) &\rightarrow \mathbf{sSet}(X, R(e)), \\ h &\mapsto h^\#. \end{aligned}$$

Resta da mostrare che ϕ e ψ sono una l'inversa dell'altra e che sono naturali in X ed e .

Sia $\gamma : X \rightarrow R(e)$ morfismo di insiemi simpliciali e consideriamo $(\gamma^b)^\# : X \rightarrow R(e)$. Per ogni $n \geq 0$, $(\gamma^b)_n^\# : X_n \rightarrow \mathcal{E}(F([n]), e)$ manda x in $\gamma^b\omega_n\iota_x = \gamma_n\iota_x = \gamma_n(x)$ per come sono definite ϕ e ψ . D'altra parte, se $h : L(X) \rightarrow e$ è un morfismo in $\mathcal{E}$, $(h^\#)^b : L(X) \rightarrow e$ soddisfa che, per ogni $n \geq 0$ e $x \in X_n$, $(h^\#)^b\omega_n\iota_x = h_n^\#(x) = h\omega_n\iota_x : F([n]) \rightarrow e$, per cui $h = (h^\#)^b$.

Infine, sia $\alpha : X \rightarrow Y$ morfismo di insiemi simpliciali; bisogna verificare la commutatività in **Set** di:

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{sSet}(X, R(e)) & \xrightarrow{\cong} & \mathcal{E}(L(X), e) \\ \alpha^* \uparrow & & (L(\alpha))^* \uparrow \\ \mathbf{sSet}(Y, R(e)) & \xrightarrow{\cong} & \mathcal{E}(L(Y), e) \end{array} \quad .$$

Preso $\gamma : Y \rightarrow R(e)$ morfismo di insiemi simpliciali, dobbiamo dimostrare che $(\gamma\alpha)^b = \gamma^b L(\alpha)$. Ma, per ogni $n \geq 0$ e $x \in X_n$, $(\gamma\alpha)^b \omega_n \iota_x = (\gamma\alpha)_n(x)$, mentre $\gamma^b L(\alpha) \omega_n \iota_x = \gamma^b \omega_n \iota_{\alpha_n(x)} = \gamma_n(\alpha_n(x))$ e dunque sono uguali per definizione di composizione di morfismi di insiemi simpliciali.

Inoltre, se $k : e \rightarrow f$ è morfismo in $\mathcal{E}$, bisogna verificare la commutatività in **Set** di:

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{sSet}(X, R(e)) & \xrightarrow{\cong} & \mathcal{E}(L(X), e) \\ \downarrow (R(k))_* & & \downarrow k_* \\ \mathbf{sSet}(X, R(f)) & \xrightarrow{\cong} & \mathcal{E}(L(X), f) \end{array} \quad .$$

Preso $\gamma : X \rightarrow R(e)$ morfismo di insiemi simpliciali, dobbiamo dimostrare che $(R(k)\gamma)^b = k\gamma^b$. In effetti, per ogni $n \geq 0$ e $x \in X_n$, $(R(k)\gamma)^b \omega_n \iota_x = (R(k)\gamma)_n(x) = R(k)_n(\gamma_n(x)) = k(\gamma_n(x))$ e $k\gamma^b \omega_n \iota_x = k(\gamma_n(x))$.

Abbiamo quindi dimostrato:

Teorema 2.4.10. *Sia $\mathcal{E}$ una categoria localmente piccola e cocompleta, $F : \Delta \rightarrow \mathcal{E}$ un funtore e $R : \mathcal{E} \rightleftarrows \mathbf{sSet} : L$ i funtori definiti come nelle Costruzioni 2.4.1 e 2.4.9. Allora $L \dashv R$.* $\square$

Osservazione 2.4.11.

1. Dal Teorema segue, grazie alla Proposizione 1.5.5, che il funtore R preserva i limiti piccoli, mentre il funtore L preserva i colimiti piccoli.
2. Per una definizione equivalente di aggiunta, esiste $\eta : 1_{\mathbf{sSet}} \Rightarrow RL$ trasformazione naturale tale che, per ogni insieme simpliciale X e per ogni oggetto $e \in \mathcal{E}$, la composizione:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(L(X), e) &\xrightarrow{R} \mathbf{sSet}(R(L(X)), R(e)) \xrightarrow{(\eta_X)^*} \mathbf{sSet}(X, R(e)), \\ L(X) &\xrightarrow{f} e \mapsto R(L(X)) \xrightarrow{R(f)} R(e) \mapsto X \xrightarrow{\eta_X} R(L(X)) \xrightarrow{R(f)} R(e) \end{aligned}$$

è una biezione.

Lemma 2.4.12. *Sia X un insieme simpliciale, $e^\# \in \mathcal{E}$ e $u : X \rightarrow R(e^\#)$ tale che sia soddisfatta la seguente condizione: per ogni $e \in \mathcal{E}$, la funzione*

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(e^\#, e) &\xrightarrow{R} \mathbf{sSet}(R(e^\#), R(e)) \xrightarrow{(u)^*} \mathbf{sSet}(X, R(e)) \\ L(X) &\xrightarrow{f} e \mapsto R(e^\#) \xrightarrow{R(f)} R(e) \mapsto X \xrightarrow{u} R(e^\#) \xrightarrow{R(f)} R(e) \end{aligned} \quad (2)$$

è biunivoca. Allora $L(X) \cong e^\#$.

Dimostrazione. Per dimostrarlo, usiamo l'embedding di Yoneda $\mathcal{J} : \mathcal{E}^{op} \hookrightarrow \mathbf{Set}^{\mathcal{E}}$. A tal fine, è sufficiente dimostrare che $\mathcal{E}(e^\#, -) \cong \mathcal{E}(L(X), -)$ naturalmente. Sia dunque $f : e \rightarrow e'$ morfismo di $\mathcal{E}$; bisogna provare la commutatività di:

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{E}(e^\#, e) & \xrightarrow{\cong} & \mathbf{sSet}(X, R(e)) & \xrightarrow{\cong} & \mathcal{E}(L(X), e) \\ \downarrow f_* & & & & \downarrow f_* \\ \mathcal{E}(e^\#, e') & \xrightarrow{\cong} & \mathbf{sSet}(X, R(e')) & \xrightarrow{\cong} & \mathcal{E}(L(X), e') \end{array} .$$

Presa $g : e^\# \rightarrow e$, seguendo il diagramma in alto a destra si ottiene $fh : L(X) \rightarrow e'$ con $h : L(X) \rightarrow e$ tale che $R(h)\eta_X = R(g)u$. Per finire, si osserva che $R(fh)\eta_X = R(f)R(h)\eta_X = R(f)R(g)u = R(fg)u$ ed è quindi l'immagine di fg tramite la biezione. $\square$

Osservazione 2.4.13. Per ogni $n \geq 0$, $\text{id}_{F([n])} \in R(F([n]))_n = \mathcal{E}(F([n]), F([n]))$ e dunque, per Yoneda, ha associato un morfismo di insiemi simpliciali $u : \Delta^n \rightarrow R(F([n]))$, che verifica la condizione (2). Quindi, per il Lemma precedente, $L(\Delta^n) \cong F([n])$.

2.5 Realizzazione geometrica di un insieme simpliciale

Per concludere il Capitolo, ci soffermiamo a studiare più approfonditamente l'aggiunto sinistro del funtore Sing .

Esempio 2.5.1. **[Realizzazione geometrica di un insieme simpliciale]**

Nell'Esempio 2.4.7 abbiamo costruito, grazie al funtore $\Delta : \mathbf{\Delta} \rightarrow \mathbf{Top}$, il funtore $\text{Sing} : \mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{sSet}$ che associa ad ogni spazio topologico un insieme simpliciale. Grazie al Teorema 2.4.10, tale funtore ammette un aggiunto sinistro, che denotiamo $|-| : \mathbf{sSet} \rightarrow \mathbf{Top}$, chiamato *realizzazione geometrica di un insieme simpliciale*. In particolare, per l'Osservazione 2.4.13, $|\Delta^n| \cong \Delta_n$. In generale, se X è un insieme simpliciale, la sua realizzazione geometrica è ottenuta come quoziente dello spazio topologico $\coprod_{n \geq 0} X_n \times \Delta_n$. Per ogni $n \geq 0$, $X_n \times \Delta_n$ è semplicemente l'unione disgiunta di copie di Δ_n indicizzate dagli elementi di X_n o equivalentemente (da cui la notazione) come lo spazio topologico

prodotto tra X_n , con la topologia discreta, e Δ_n . La relazione di equivalenza per cui si quozienta è quella generata, per ogni $f : [n] \rightarrow [m]$ morfismo in Δ , $x \in X_m$ e $t \in \Delta_n$, da $(x, f_*(t)) \sim (f^*(x), t)$:

$$\begin{aligned} X_m \times \Delta_n &\xrightarrow{f_*} X_m \times \Delta_m \\ (x, t) &\mapsto (x, f_*(t)) \\ X_m \times \Delta_n &\xrightarrow{f^*} X_n \times \Delta_n \\ (x, t) &\mapsto (f^*(x), t) \end{aligned}$$

Inoltre, se $F : \mathcal{J} \rightarrow \mathbf{sSet}$ è un diagramma, allora $|\operatorname{colim}_{j \in \mathcal{J}} F(j)| = \operatorname{colim}_{j \in \mathcal{J}} |F(j)|$.

Osservazione 2.5.2. Sia X uno spazio topologico e consideriamo l'insieme simpliciale $\operatorname{Sing}(X)$. Un elemento della realizzazione geometrica $|\operatorname{Sing}(X)|$ è una classe di equivalenza $[\sigma, x]$, con $\sigma : |\Delta^n| \rightarrow X$ n -simplexso singolare e $x \in |\Delta^n|$. Si noti che è ben definita la funzione continua canonica:

$$\begin{aligned} \varepsilon_X : |\operatorname{Sing}(X)| &\rightarrow X, \\ [\sigma, x] &\mapsto \sigma(x). \end{aligned}$$

Definizione 2.5.3. *In virtù del Lemma 2.4.12, dato un insieme simpliciale S e Y uno spazio topologico, si dice che Y è una realizzazione geometrica di S se equivalentemente:*

1. $Y \cong |S|$;
2. esiste $u : S \rightarrow \operatorname{Sing}(Y)$ morfismo di insiemi simpliciali tale che per ogni spazio topologico X sia soddisfatta la condizione (2) del Lemma.

Definizione 2.5.4. *Sia $\Sigma \subseteq \mathcal{P}([n]) \setminus \{\emptyset\}$ chiusa verso il basso. Definiamo:*

$$|\Delta^n|_\Sigma = \{(t_0, \dots, t_n) \in |\Delta^n| : \{i \in [n] : t_i \neq 0\} \in \Sigma\}.$$

Osservazione 2.5.5.

1. $|\Delta^n|_\Sigma$ sono sottoinsiemi chiusi di $|\Delta^n|$. Infatti, per ogni S sottoinsieme non vuoto di $[n]$, definiamo $|\Delta^n|_S = \{(t_0, \dots, t_n) \in |\Delta^n| : t_i = 0 \text{ se } i \notin S\}$, il quale è un sottoinsieme chiuso di $|\Delta^n|$. Allora la tesi segue dal fatto che:

$$|\Delta^n|_\Sigma = \bigcup_{S \in \Sigma} |\Delta^n|_S.$$

2. Sia $\varphi : \Delta^n \rightarrow \operatorname{Sing}(|\Delta^n|)$ il morfismo canonico associato a $\operatorname{id}_{|\Delta^n|}$. Allora tale mappa restringe a un morfismo $\varphi_\Sigma : \Delta^n_\Sigma \rightarrow \operatorname{Sing}(|\Delta^n|_\Sigma)$. Infatti, per ogni $f : [k] \rightarrow [n]$ tale che $f([k]) \in \Sigma$, si ha $f_*(|\Delta^k|) \subseteq |\Delta^n|_\Sigma$.

Proposizione 2.5.6. *Sia $\Sigma \subseteq \mathcal{P}([n]) \setminus \{\emptyset\}$ chiusa verso il basso. Allora la mappa canonica $\varphi_\Sigma : \Delta_\Sigma^n \rightarrow \text{Sing}(|\Delta^n|_\Sigma)$ esibisce $|\Delta^n|_\Sigma$ come una realizzazione geometrica di Δ_Σ^n .*

Dimostrazione. Procediamo per induzione sulla cardinalità di Σ . Se Σ è vuoto, allora Δ_Σ^n è l'insieme simpliciale vuoto, che ha come realizzazione geometrica l'insieme vuoto, $|\Delta^n|_\Sigma$. Supponiamo ora che Σ sia non vuoto e prendiamo $S \in \Sigma$ massimale; siano

$$\Sigma_0 = \Sigma \setminus \{S\}, \Sigma_1 = \{A \subseteq S : A \neq \emptyset\} \text{ e } \Sigma_{01} = \Sigma_0 \cap \Sigma_1$$

che sono ancora chiuse verso il basso. Per ipotesi induttiva, f_{Σ_0} e $f_{\Sigma_{01}}$ esibiscono $|\Delta^n|_{\Sigma_0}$ e $|\Delta^n|_{\Sigma_{01}}$ come realizzazione geometrica di $\Delta_{\Sigma_0}^n$ e $\Delta_{\Sigma_{01}}^n$. Inoltre, se $S = \{i_0 < \dots < i_m\}$, allora, identificandolo con $[m]$, si vede che f_{Σ_1} esibisce $|\Delta^n|_{\Sigma_1}$ come realizzazione geometrica di $\Delta_{\Sigma_1}^n$.

Poiché $\Sigma_{01} = \Sigma_0 \cap \Sigma_1$ e $\Sigma = \Sigma_0 \cup \Sigma_1$, segue che il seguente diagramma:

$$\begin{array}{ccc} \Delta_{\Sigma_{01}}^n & \hookrightarrow & \Delta_{\Sigma_0}^n \\ \downarrow & \lrcorner & \downarrow \\ \Delta_{\Sigma_1}^n & \hookrightarrow & \Delta_\Sigma^n \end{array}$$

è di pushout, poiché lo è a livello dei k -simplessi per ogni k . Di conseguenza è sufficiente provare che anche il diagramma

$$\begin{array}{ccc} |\Delta_{\Sigma_{01}}^n| & \hookrightarrow & |\Delta_{\Sigma_0}^n| \\ \downarrow & \lrcorner & \downarrow \\ |\Delta_{\Sigma_1}^n| & \hookrightarrow & |\Delta_\Sigma^n| \end{array}$$

è di pushout. Questo segue dal fatto che $|\Delta^n|_{\Sigma_0}$ e $|\Delta^n|_{\Sigma_1}$ sono due sottoinsiemi chiusi di $|\Delta^n|$ con intersezione $|\Delta^n|_{\Sigma_{01}}$ e unione $|\Delta^n|_\Sigma$. $\square$

Esempio 2.5.7. Dalla Proposizione precedente segue che la realizzazione geometrica di $\partial_i \Delta^n$ è $\partial_i \Delta_n = \{(t_0, \dots, t_n) \in \Delta_n : t_i = 0\}$, ossia la faccia opposta al vertice e_i . Analogamente, la realizzazione della n -sfera simpliciale $\partial \Delta^n$ è $\partial \Delta_n = \{(t_0, \dots, t_n) \in \Delta_n : \exists i \in [n] \text{ tale che } t_i = 0\}$, ossia il bordo dell' n -simpleso. Infine, la realizzazione del i -esimo corno Λ_i^n è $|\Lambda_i^n| = \{(t_0, \dots, t_n) \in \Delta_n : \exists j \neq i \text{ tale che } t_j = 0\} = \bigcup_{j=0, j \neq i}^n \partial_j \Delta_n$.

Corollario 2.5.8. *Per ogni insieme simpliciale X , $|X|$ è un CW-complesso.*

Dimostrazione. Sappiamo che $X = \bigcup_{k \geq 0} \text{sk}_k(X)$ e dunque $|X| = \bigcup_{k \geq 0} |\text{sk}_k(X)|$, dove $|\text{sk}_k(X)|$ è detto k -scheletro della realizzazione geometrica $|X|$. Inoltre, per l'Osservazione

2.3.12, per ogni $k \geq 0$, si ha il seguente diagramma pushout:

$$\begin{array}{ccc} \coprod_{x \in X_k^{nd}} |\partial \Delta^k| & \longrightarrow & |\text{sk}_{k-1}(X)| \\ \downarrow & & \downarrow \\ \coprod_{x \in X_k^{nd}} |\Delta^k| & \longrightarrow & |\text{sk}_k(X)| \end{array}$$

che dice esattamente che il k -scheletro di $|X|$ è ottenuto dal $(k-1)$ -scheletro attaccando delle k -celle (corrispondenti ai k -simplessi non degeneri di X). $\square$

Osservazione 2.5.9. Dalla Dimostrazione si evince che la realizzazione geometrica di un insieme simpliciale X di dimensione n è un CW-complesso di dimensione n . Si noti che, se X è uno spazio topologico non discreto, anche nel caso in cui X sia un CW-complesso di dimensione finita, comunque $\text{Sing}(X)$ è un insieme simpliciale di dimensione infinita e quindi $|\text{Sing}(X)|$ è un CW-complesso di dimensione infinita. Nonostante ciò, si ha la mappa continua canonica $\varepsilon_X : |\text{Sing}(X)| \rightarrow X$, individuata nell'Osservazione 2.5.2.

Esempio 2.5.10. Sia S^n l'insieme simpliciale introdotto nell'Esempio 2.3.16. Lo spazio topologico $|S^n|$ è un CW-complesso con un'unica 0-cella e n -cella, cioè è l'usuale n -sfera.

Se X è uno spazio topologico, per aggiunzione, dare un morfismo di insiemi simpliciali $S^n \xrightarrow{f^b} \text{Sing}(X)$ è equivalente a dare una mappa continua $|S^n| \xrightarrow{f^\#} X$. Più precisamente, se f^b manda lo 0-simplesso di S^n nello 0-simplesso semplice singolare x_0 , che possiamo identificare con un punto di X , $f^\#$ è una mappa continua puntata, che manda il punto speciale di $|S^n|$ in x_0 .

Capitolo 3

∞ -categorie e Omotopia Simpliciale

In questo Capitolo finale, vedremo un'applicazione degli insiemi simpliciali alla teoria delle categorie superiori. In particolare, vedremo come gli insiemi simpliciali forniscono un modello per le ∞ -categorie e ∞ -gruppidi, in particolare i complessi di Kan. Inoltre, studieremo un po' di teoria omotopica legata a questi speciali insiemi simpliciali. Nella fattispecie, vedremo la categoria omotopica associata a una ∞ -categoria e i gruppi di omotopia di un complesso di Kan. Per questa parte si invita il lettore a sfogliare [1], [3], [4] e [5] per maggiori dettagli.

3.1 Oggetti e morfismi in un insieme simpliciale

Definizione 3.1.1. *Sia X un insieme simpliciale.*

Un oggetto di X è uno 0-simplesso di X , o, equivalentemente, un morfismo $\Delta^0 \xrightarrow{x} X$.

Una freccia di X (detto anche un morfismo di X o una mappa di X) è un 1-simplesso di X , ossia un morfismo $f : \Delta^1 \rightarrow X$. Tale freccia ha un dominio e un codominio, ossia $d_1^1(f)$ e $d_0^1(f)$ rispettivamente.

$$\Delta^0 \xrightarrow{d_1^1} \Delta^1 \xrightarrow{f} X, \quad \Delta^0 \xrightarrow{d_1^0} \Delta^0 \xrightarrow{f} X.$$

Un diagramma della forma:

$$x \xrightarrow{f} y,$$

in un insieme simpliciale X vorrà dire che f è una freccia di X , $x = d_1^1(f)$ e $y = d_0^1(f)$.

Ciò equivale ad avere il seguente diagramma commutativo:

$$\begin{array}{ccc}
 \Delta^0 & \xrightarrow{x} & X \\
 d_1^1 \searrow & & \uparrow f \\
 & \Delta^1 & \\
 d_1^0 \nearrow & & \uparrow y \\
 \Delta^0 & \xrightarrow{y} & X
 \end{array}
 .$$

Dato un oggetto x in un insieme simpliciale X , l'identità di x è un morfismo di X corrispondente alla composizione:

$$\text{id}_x = s_0^0(x) : \Delta^1 \xrightarrow{s_0^0} \Delta^0 \xrightarrow{x} X.$$

Un triangolo in X è una mappa $t : \partial_2 \Delta \rightarrow X$. Per l'Osservazione 2.3.14, questa può essere vista come una tripla (f, g, h) di morfismi in X tali che il dominio di f coincide con il dominio di h , il codominio di f coincide con il dominio di g e il codominio di g coincide con il codominio di h :

$$\begin{array}{ccc}
 & y & \\
 f \nearrow & \downarrow g & \\
 x & \xrightarrow{h} & z
 \end{array}
 . \tag{1}$$

Analogamente, per il Lemma 2.3.13, una mappa $\Lambda_1^2 \rightarrow X$ può essere vista come una coppia di morfismi in X (f, g) tali che il codominio di f coincide con il dominio di g :

$$\begin{array}{ccc}
 & y & \\
 f \nearrow & \downarrow g & \\
 x & & z
 \end{array}
 . \tag{2}$$

Definizione 3.1.2. Un triangolo (f, g, h) in X , come nel diagramma (1), è commutativo (o, semplicemente, commuta) se esiste un morfismo di insiemi simpliciali $c : \Delta^2 \rightarrow X$ la cui restrizione con il proprio bordo coincida con (f, g, h) :

$$\begin{array}{ccc}
 \partial \Delta^2 & \xrightarrow{(f, g, h)} & X \\
 \downarrow & \nearrow c & \\
 \Delta^2 & &
 \end{array}
 .$$

Inoltre, data una coppia di morfismi in X componibili (f, g) , come in (2), una composizione di f e g è un morfismo h in X tale che (f, g, h) sia un triangolo commutativo.

Esempio 3.1.3. Se $X = N(\mathcal{C})$ è il nervo di una categoria piccola, allora gli oggetti in X sono precisamente gli oggetti in $\mathcal{C}$, i morfismi in X sono i morfismi in $\mathcal{C}$ e i triangoli commutativi in X sono i triangoli commutativi in $\mathcal{C}$. Inoltre, c'è una biezione:

$$\mathbf{sSet}(\Delta^2, N(\mathcal{C})) \xrightarrow{\cong} \mathbf{sSet}(\Lambda_1^2, N(\mathcal{C})),$$

che esprime il fatto che ogni coppia di morfismi componibili in $N(\mathcal{C})$ ha esattamente una composizione.

Questa cosa vale in realtà più in generale.

Proposizione 3.1.4. *Sia $\mathcal{C}$ una categoria piccola. Allora l'insieme simpliciale $N(\mathcal{C})$ soddisfa che, per ogni coppia di interi $0 < i < n$ e ogni mappa $\sigma_0 : \Lambda_i^n \rightarrow N(\mathcal{C})$, esiste un'unica $\sigma : \Delta^n \rightarrow N(\mathcal{C})$ tale che $\sigma|_{\Lambda_i^n} = \sigma_0$.*

Dimostrazione. Sia σ_0 come nell'enunciato. Consideriamo prima il caso $n \geq 3$. Per il Lemma di Yoneda, dobbiamo provare che esiste un unico funtore $F : [n] \rightarrow \mathcal{C}$ tale che, per ogni $f : [k] \rightarrow [n]$ k -simpleso in Λ_i^n , $F \circ f = \sigma_0(f)$. In particolare, se $v^j : [0] \rightarrow [n]$ è mappa di covertice (che appartiene a Λ_i^n), $F \circ v^j = \sigma_0(v^j)$, quindi per ogni $0 \leq j \leq n$ $F(j) = c_j$, con c_j immagine tramite σ_0 del j -esimo vertice. Se invece $e_{j,k} : [1] \rightarrow [n]$ è uno spigolo di Δ^n , per l'ipotesi $n \geq 3$, appartiene a Λ_i^n e dunque $F \circ e_{j,k} = \sigma_0(e_{j,k})$, perciò, per ogni $0 \leq j \leq k \leq n$, $F(j \leq k) = f_{j,k}$ con $f_{j,k}$ immagine tramite σ_0 dello spigolo $e_{j,k}$.

Resta da verificare che F siffatto sia effettivamente un funtore $[n] \rightarrow \mathcal{C}$. Preso $0 \leq j \leq n$, lo spigolo degenerare $e_{j,j}$ è uguale a $s_0^0(v^j)$, per cui $\sigma_0(e_{j,j}) = s_0^0(\sigma_0(v^j)) = s_0^0(c_j) = \text{id}_{c_j}$, ossia $F(j \leq j) = \text{id}_{F(j)}$. Mostriamo che se $0 \leq j \leq k \leq l \leq n$, allora $f_{j,l} = f_{k,l} \circ f_{j,k}$. La tripla (j, k, l) individua un 2-simpleso τ di Δ^n . Se τ è in Λ_i^n , allora $\tau' = \sigma_0(\tau)$ è un 2-simpleso di $N(\mathcal{C})$ tale che $d_2^2(\tau') = \sigma_0(d_2^2(\tau)) = f_{j,k}$, $d_0^2(\tau') = f_{k,l}$ e $d_1^2(\tau') = f_{j,l}$, ossia τ' attesta che $f_{j,l} = f_{k,l} \circ f_{j,k}$.

Se invece τ non appartiene a Λ_i^n , allora $\{j, k, l\} = [n] \setminus \{i\}$, che implica $n = 3$ e $i = 1, 2$. Guardando al caso $i = 1$ (per cui $j = 0, k = 2$ e $l = 3$), possiamo elencare tutti gli spigoli di Λ_1^3 : per $\{0, 1, 2\}$ si ha $f_{0,2} = f_{1,2} \circ f_{0,1}$, per $\{0, 1, 3\}$ si ha $f_{0,3} = f_{1,3} \circ f_{0,1}$ e per $\{1, 2, 3\}$ si ha $f_{1,3} = f_{2,3} \circ f_{1,2}$. Di conseguenza, $f_{0,3} = f_{1,3} \circ f_{0,1} = f_{2,3} \circ f_{1,2} \circ f_{0,1} = f_{2,3} \circ f_{0,2}$.

Il caso $n = 2$ è stato già commentato nell'esempio precedente. $\square$

Osservazione 3.1.5. In maniera analoga alla Proposizione, si può dimostrare che, per ogni $n \geq 3$, c'è una biezione:

$$\mathbf{sSet}(\Delta^n, N(\mathcal{C})) \rightarrow \mathbf{sSet}(\partial\Delta^n, N(\mathcal{C})),$$

mentre per $n = 2$ tale funzione è iniettiva, ma non suriettiva. Ciò esprime il fatto che una tripla di morfismi componibili (f, g, h) in $\mathcal{C}$ proviene da un triangolo commutativo se e solo se $h = g \circ f$.

Definizione 3.1.6. Data una mappa $f : x \rightarrow y$ in un insieme simpliciale X , si dice che f è invertibile se esistono $g : y \rightarrow x$ e $h : y \rightarrow x$ tali che i triangoli

$$\begin{array}{ccc} & y & \\ f \nearrow & & \downarrow g \\ x & \xrightarrow{\text{id}_x} & x \end{array} \quad \begin{array}{ccc} & x & \\ h \nearrow & & \downarrow f \\ y & \xrightarrow{\text{id}_y} & y \end{array}$$

sono commutativi in X .

Esempio 3.1.7. Sia $\mathcal{G}$ un gruppoide e $N(\mathcal{G})$ il suo nervo. Allora ogni mappa in $N(\mathcal{G})$ è invertibile. Di più, vale che la funzione:

$$\mathbf{sSet}(\Delta^2, N(\mathcal{G})) \rightarrow \mathbf{sSet}(\Lambda_i^2, N(\mathcal{G})),$$

è una biezione per $i = 0, 2$ (per $i = 1$ lo sappiamo già in quanto $\mathcal{G}$ in particolare è una categoria). Questa corrispondenza esprime il fatto che ogni volta si ha un diagramma del tipo:

$$\begin{array}{ccc} & y & \\ f \nearrow & & \\ x & \xrightarrow{h} & z \end{array} \quad \begin{array}{ccc} & y & \\ f \nearrow & & \downarrow g = hf^{-1} \\ x & \xrightarrow{h} & z \end{array},$$

si può completare in modo unico ottenendo un diagramma commutativo.

Questa cosa vale più in generale:

Proposizione 3.1.8. Sia $\mathcal{G}$ un gruppoide. Allora $N(\mathcal{G})$ soddisfa che per ogni coppia di interi $n \geq 2$ e $0 \leq i \leq n$, e morfismi di insiemi simpliciali $\sigma_0 : \Lambda_i^n \rightarrow N(\mathcal{G})$ esiste un unico $\sigma : \Delta^n \rightarrow N(\mathcal{G})$ tale che $\sigma|_{\Lambda_i^n} = \sigma_0$.

Dimostrazione. Procediamo come nella dimostrazione della Proposizione 3.1.4. Facciamo prima il caso $n \geq 3$. Essendo in particolare $\mathcal{G}$ una categoria, possiamo supporre che $i = 0, n$. Sia $i = 0$; dobbiamo costruire un unico funtore $F : [n] \rightarrow \mathcal{G}$ tale che, per ogni $f : [k] \rightarrow [n]$ in Λ_0^n , $F \circ f = \sigma_0(f)$. Il funtore F lo definiamo sugli oggetti $0 \leq j \leq n$ come l'immagine c_j tramite σ_0 del j -esimo vertice di Δ^n , mentre sui morfismi $0 \leq j \leq k \leq n$ come l'immagine $f_{j,k}$ dello spigolo $e_{j,k}$ di Δ^n . Si dimostra in maniera analoga che $F(j \leq j) = \text{id}_{c_j}$ e che, se la tripla $0 \leq j \leq k \leq l \leq n$ individua un 2-simplex in Λ_0^n , allora $f_{j,l} = f_{k,l} \circ f_{j,k}$. Rimane il caso in cui tale 2-simplex non è in Λ_0^n , che implica $\{j, k, l\} = [n] \setminus \{0\}$, ossia $n = 3$, $j = 1$, $k = 2$ e $l = 3$. Elencando i 2-simplex di Λ_0^3 : per $\{0, 1, 2\}$ si ha $f_{0,2} = f_{1,2} \circ f_{0,1}$, per $\{0, 1, 3\}$ si ha $f_{0,3} = f_{1,3} \circ f_{0,1}$ e per $\{0, 2, 3\}$ si ha $f_{0,3} = f_{2,3} \circ f_{0,2}$, per cui $f_{2,3} \circ f_{1,2} \circ f_{0,1} = f_{2,3} \circ f_{0,2} = f_{0,3} = f_{1,3} \circ f_{0,1}$. Essendo $\mathcal{G}$ un gruppoide, componendo a destra per $f_{0,1}^{-1}$ si ottiene l'identità desiderata.

Il caso $i = n$ è analogo, mentre $n = 2$ è stato commentato nell'esempio precedente. $\square$

Osservazione 3.1.9. La funzione

$$\mathbf{sSet}(\Delta^1, N(\mathcal{G})) \rightarrow \mathbf{sSet}(\Lambda_i^1, N(\mathcal{G})),$$

per $i = 0, 1$ è suriettiva, ma non iniettiva in generale. In quanto un morfismo $\Lambda_i^1 \rightarrow N(\mathcal{G})$ ($i = 0, 1$) individua un oggetto $c \in \mathcal{G}$ come codominio o dominio di un morfismo, e dunque non è univoca la scelta di un morfismo di $\mathcal{G}$ che abbia c come codominio o dominio rispettivamente (però ne esiste sempre almeno uno: id_c).

3.2 ∞ -categorie e complessi di Kan

Definizione 3.2.1. Una ∞ -categoria (o quasi-categoria) è un insieme simpliciale $\mathcal{C}$ tale che, per ogni $n \geq 2$, e $0 < i < n$, ogni morfismo $\Lambda_i^n \rightarrow \mathcal{C}$ si estende a un morfismo $\Delta^n \rightarrow \mathcal{C}$. Equivalentemente, la funzione:

$$\mathbf{sSet}(\Delta^n, \mathcal{C}) \rightarrow \mathbf{sSet}(\Lambda_i^n, \mathcal{C})$$

è suriettiva per ogni $0 < i < n$.

Un ∞ -gruppoide è una ∞ -categoria in cui ogni morfismo è invertibile.

Un complesso di Kan è un insieme simpliciale $\mathcal{G}$ tale che, per ogni $n \geq 0$ e $0 \leq i \leq n$, ogni morfismo $\Lambda_i^n \rightarrow \mathcal{G}$ si estende a un morfismo $\Delta^n \rightarrow \mathcal{G}$, ossia la mappa:

$$\mathbf{sSet}(\Delta^n, \mathcal{G}) \rightarrow \mathbf{sSet}(\Lambda_i^n, \mathcal{G})$$

è suriettiva.

Esempio 3.2.2.

- Per quanto dimostrato nella scorsa Sezione, il nervo di una categoria è una ∞ -categoria, mentre il nervo di un gruppoide è un complesso di Kan.
- Per ogni $n \geq 1$, Δ^n è una ∞ -categoria (perché $\Delta^n = N([n])$), ma non è un ∞ -gruppoide perché ad esempio il morfismo $0 \rightarrow 1$ non è invertibile.

Proposizione 3.2.3. Ogni complesso di Kan è un ∞ -gruppoide.

Dimostrazione. Sia $\mathcal{G}$ un complesso di Kan. Allora, per definizione, essa è anche una ∞ -categoria. Resta da verificare che ogni morfismo è invertibile. Sia $f : x \rightarrow y$ una mappa e considero i due diagrammi:

$$\begin{array}{ccc} & y & \\ f \nearrow & \downarrow \exists g & \\ x & \xrightarrow{\text{id}_x} & x \end{array} \quad , \quad \begin{array}{ccc} & x & \\ \exists h \nearrow & \downarrow f & \\ y & \xrightarrow{\text{id}_y} & y \end{array}$$

che corrispondono rispettivamente a morfismi $\Lambda_0^2 \rightarrow \mathcal{G}$ e $\Lambda_2^2 \rightarrow \mathcal{G}$. Allora per la proprietà di riempimento, esistono $g, h : y \rightarrow x$ mappe che fanno commutare i diagrammi, ossia f è invertibile. $\square$

Teorema 3.2.4. *Sia X uno spazio topologico. Allora l'insieme simpliciale singolare $\text{Sing}(X)$ è un complesso di Kan.*

Dimostrazione. Dobbiamo provare che, per ogni $0 \leq i \leq n$, un morfismo $\sigma_0 : \Lambda_i^n \rightarrow \text{Sing}(X)$ si estende a un morfismo $\sigma : \Delta^n \rightarrow \text{Sing}(X)$. Per l'aggiunzione $|-| \dashv \text{Sing}$ si ha che il diagramma di sinistra commuta se e solo se commuta quello di destra:

$$\begin{array}{ccc} \Lambda_i^n & \xrightarrow{\sigma_0} & \text{Sing}(X) \\ \downarrow & \nearrow \sigma & \\ \Delta^n & & \end{array} \iff \begin{array}{ccc} |\Lambda_i^n| & \xrightarrow{f_0} & X \\ r \uparrow \downarrow & \nearrow f & \\ |\Delta^n| & & \end{array} .$$

Definiamo quindi $f = f_0 \circ r$ con r una qualsiasi retrazione di $|\Delta^n|$ in $|\Lambda_i^n|$. $\square$

Osservazione 3.2.5. In particolare dalla dimostrazione si evince che tale estensione non è unica.

3.3 Omotopia di morfismi

Definizione 3.3.1. *Sia $\mathcal{C}$ una ∞ -categoria e $f, g : x \rightarrow y$ due morfismi in $\mathcal{C}$. Un'omotopia da f a g è un 2-simplesso σ di $\mathcal{C}$ tale che $d_0^2(\sigma) = \text{id}_y$, $d_1^2(\sigma) = g$ e $d_2^2(\sigma) = f$, come nel diagramma:*

$$\begin{array}{ccc} & y & \\ f \nearrow & & \searrow \text{id}_y \\ x & \xrightarrow{g} & y \end{array} .$$

Diremo che f e g sono omotopi se esiste un'omotopia da f a g e si scrive $f \sim g$.

Esempio 3.3.2. Se $\mathcal{C}$ è una categoria ordinaria e $f, g : x \rightarrow y$ sono due morfismi, f e g sono omotopi come morfismi dell' ∞ -categoria $\mathbf{N}(\mathcal{C})$ se e solo se $f = g$.

Esempio 3.3.3. Sia $\pi : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow |\Delta^2|$ la funzione continua definita da $\pi(s, t) = (1-s, (1-t)s, ts)$. Si può verificare che π è la proiezione al quoziente del quadrato a cui viene collassato il lato $\{0\} \times [0, 1]$.

Sia X uno spazio topologico, allora la costruzione $\sigma \mapsto \sigma \circ \pi$ determina una mappa dall'insieme $\text{Sing}(X)_2$ dei 2-simplessi di X all'insieme delle funzioni continue $H : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$. Presi due cammini $f, g : [0, 1] \rightarrow X$ che soddisfano $f(0) = g(0)$ e $f(1) = g(1)$ (ossia due morfismi con lo stesso dominio e codominio in $\text{Sing}(X)$), la

mappa descritta sopra si restringe a una biezione tra le omotopie da f e g come appena definite e le omotopie di cammini da f a g .

Proposizione 3.3.4. *Sia $\mathcal{C}$ una ∞ -categoria, x, y oggetti in $\mathcal{C}$ e $\mathcal{C}(x, y)$ l'insieme dei morfismi in $\mathcal{C}$ con dominio x e codominio y . Allora essere omotopi è una relazione di equivalenza su $\mathcal{C}(x, y)$.*

Dimostrazione. Anzitutto osserviamo che per ogni $f : x \rightarrow y$ morfismo, il 2-simplesso degenerare $s_1^1(f)$ fornisce un'omotopia da f a f e dunque l'omotopia è una relazione riflessiva su $\mathcal{C}(x, y)$. Termineremo la dimostrazione provando:

(*) Siano $f, g, h : x \rightarrow y$ morfismi da x a y . Se f è omotopo a g e f è omotopo a h , allora g è omotopo a h .

Ponendo $h = f$ in (*) seguirà la simmetria della relazione di omotopia, per cui in (*) potremo sostituire l'ipotesi f omotopo a g con g omotopo a f , e quindi (*) implicherà la transitività della relazione di omotopia.

Proviamo quindi (*): siano σ_2 e σ_3 2-simplessi che attestano rispettivamente omotopie da f a h e da f a g e sia σ_0 il 2-simplesso dato dal morfismo costante $\Delta^2 \rightarrow \Delta^0 \xrightarrow{y} \mathcal{C}$. Allora la tupla $(\sigma_0, \bullet, \sigma_2, \sigma_3)$ determina un morfismo $\tau_0 : \Lambda_1^3 \rightarrow \mathcal{C}$ (si veda il Lemma 2.3.13), rappresentato dal diagramma:

$$\begin{array}{ccccc} & & y & \xrightarrow{\text{id}_y} & y \\ & \nearrow f & \searrow g & \searrow \text{id}_y & \\ x & & & & y \\ & \nwarrow h & \nearrow \text{id}_y & \nearrow \text{id}_y & \end{array},$$

dove le frecce tratteggiate rappresentano la frontiera della faccia mancante del corno Λ_1^3 . L'ipotesi che $\mathcal{C}$ è una ∞ -categoria garantisce che τ_0 si può estendere a un 3-simplesso τ e $d_1^3(\tau)$ attesta un'omotopia da g a h . $\square$

Nella definizione data di omotopia tra morfismi c'è un'apparente asimmetria in quanto la richiesta è che esista un 2-simplesso che abbia una faccia costante sul *codominio* dei morfismi. Il seguente Lemma risolve questa spiacevole incongruenza e ci permetterà di ri-caratterizzare la nozione di omotopia.

Lemma 3.3.5. *Sia $\mathcal{C}$ una ∞ -categoria e $f, g : x \rightarrow y$ morfismi. Allora sono equivalenti:*

1. *esiste un 2-simplesso σ tale che $d_0^2(\sigma) = \text{id}_y$, $d_1^2(\sigma) = g$ e $d_2^2(\sigma) = f$ (cioè f è omotopo a g);*

$$\begin{array}{ccc} & y & \\ f \nearrow & & \searrow \text{id}_y \\ x & \xrightarrow{g} & y \end{array}$$

2. esiste un 2-simplesso τ tale che $d_0^2(\tau) = f$, $d_1^2(\tau) = g$ e $d_2^2(\tau) = \text{id}_x$.

$$\begin{array}{ccc} & x & \\ \text{id}_x \nearrow & & \searrow f \\ x & \xrightarrow{g} & y \end{array}$$

Dimostrazione. Mostriamo solo che 1 implica 2 in quanto il viceversa si può fare in maniera simile. Per ipotesi f è omotopo a g ; siccome la relazione di omotopia è simmetrica, segue che g è omotopo a f . Sia dunque σ un 2-simplesso che attesti tale omotopia. La tupla di 2-simplessi $(\sigma, s_1^1(g), \bullet, s_0^1(g))$ descrive una mappa $\rho_0 : \Delta_2^3 \rightarrow \mathcal{C}$ che rappresentiamo tramite il diagramma:

$$\begin{array}{ccccc} & & x & \xrightarrow{g} & y \\ & \text{id}_x \nearrow & & \searrow f & \text{id}_y \\ x & \xrightarrow{g} & & & y \\ & \text{id}_x \nearrow & & \searrow f & \text{id}_y \\ & & x & \xrightarrow{g} & y \end{array} \quad .$$

Poiché $\mathcal{C}$ è una ∞ -categoria, ρ_0 si estende a una mappa $\rho : \Delta^3 \rightarrow \mathcal{C}$ con $\tau = d_2^3(\rho)$ che soddisfa la proprietà del punto 2. $\square$

Proposizione 3.3.6. *Sia $\mathcal{C}$ una ∞ -categoria e $f, g : x \rightarrow y$ morfismi. Allora f è omotopo a g se e solo se esiste una mappa di insiemi simpliciali $H : \Delta^1 \times \Delta^1 \rightarrow \mathcal{C}$ che soddisfa $H_{|\{0\} \times \Delta^1} = f$, $H_{|\{1\} \times \Delta^1} = g$, $H_{|\Delta^1 \times \{0\}} = \text{id}_x$ e $H_{|\Delta^1 \times \{1\}} = \text{id}_y$, come rappresentato dal diagramma:*

$$\begin{array}{ccc} x & \xrightarrow{f} & y \\ \downarrow \text{id}_x & \searrow h & \downarrow \text{id}_y \\ x & \xrightarrow{g} & y \end{array} \quad .$$

Dimostrazione. La dimostrazione si basa sull'osservazione che dare una mappa $\Delta^1 \times \Delta^1 \rightarrow \mathcal{C}$ equivale a descrivere un quadrato commutativo in $\mathcal{C}$ (si veda il Lemma 2.3.15).

Se σ è un 2-simplesso che attesta un'omotopia da f a g , come triangolo inferiore del quadrato commutativo basta prendere $s_0^1(g)$.

Viceversa, se abbiamo un quadrato commutativo come nell'enunciato, il triangolo superiore attesta un'omotopia da f a h , mentre il triangolo inferiore, in virtù della Proposizione precedente, attesta un'omotopia da h a g . Siccome la relazione di omotopia è transitiva, segue che f è omotopo a g . $\square$

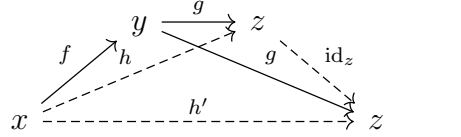
Proposizione 3.3.7. *Sia $\mathcal{C}$ una ∞ -categoria e $f : x \rightarrow y$ e $g : y \rightarrow z$ due morfismi. Allora:*

1. esiste una composizione $h : x \rightarrow z$ di f con g ;

2. tale composizione è unica a meno di omotopia, ossia se $h : x \rightarrow z$ è una composizione di f con g e $h' : x \rightarrow z$ è un altro morfismo, h' è una composizione di f con g se e solo se h' è omotopo a h .

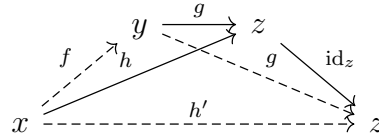
Dimostrazione.

1. I morfismi f e g forniscono un morfismo $\sigma_0 : \Lambda_1^2 \rightarrow \mathcal{C}$ (Lemma 2.3.13) che, per definizione, si estende a un morfismo $\sigma : \Delta^2 \rightarrow \mathcal{C}$; $h = d_1^2(\sigma)$ è una composizione di f con g , come attestato da σ .
2. Siano $h, h' : x \rightarrow z$ e supponiamo che esistano σ_3, σ_2 2-simplessi che attestano rispettivamente h e h' come composizioni di f con g . Considero inoltre $\sigma_0 = s_1(g)$. Allora $(\sigma_0, \bullet, \sigma_2, \sigma_3)$ forniscono un morfismo $\Lambda_1^3 \rightarrow \mathcal{C}$ (Lemma 2.3.13), rappresentato dal diagramma:



Tale diagramma si estende a un 3-simplesso τ e $d_1^3(\tau)$ attesta un'omotopia tra h e h' .

Viceversa, se h' è omotopo ad h , composizione di f con g , sia σ_1 2-simplesso che dà l'omotopia e consideriamo il morfismo $\Lambda_2^3 \rightarrow \mathcal{C}$ dato da $(\sigma_0, \bullet, \sigma_1, \sigma_3)$ (Lemma 2.3.13). Quest'ultimo si estende a un 3-simplesso τ , con $d_2^3(\tau)$ che riconosce h' come composizione di f con g .



□

Esempio 3.3.8. Sia X uno spazio topologico e $f, g : [0, 1] \rightarrow X$ due cammini in X componibili, cioè $f(1) = g(0)$ e sia $g \star f : [0, 1] \rightarrow X$ il cammino ottenuto tramite

$$(g \star f)(t) = \begin{cases} f(2t) & \text{se } t \in [0, \frac{1}{2}] \\ g(2t - 1) & \text{se } t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

Allora $g \star f$ è una composizione di f con g nella ∞ -categoria $\text{Sing}(X)$. Più precisamente, il 2-simplesso singolare $\sigma : |\Delta^2| \rightarrow X$

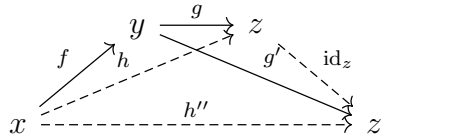
$$\sigma(t_0, t_1, t_2) = \begin{cases} f(t_1 + 2t_2) & \text{se } t_0 \geq t_2 \\ g(t_2 - t_0) & \text{se } t_0 \leq t_2 \end{cases}$$

è un 2-simplesso di $\text{Sing}(X)$ che attesta $g \star f$ come composizione di f con g .

Si noti che, in virtù della Proposizione 3.3.7, tale composizione non è unica, però ogni composizione di f con g è omotopa a $g \star f$ (e viceversa).

Proposizione 3.3.9. *Siano $f, f' : x \rightarrow y$ morfismi omotopi, $g, g' : y \rightarrow z$ morfismi omotopi e h e h' rispettivamente una composizione di f con g e di f' con g' . Allora h è omotopo a h' .*

Dimostrazione. Sia h'' una composizione di f con g' . Siccome la relazione di omotopia è di equivalenza, è sufficiente provare che h è omotopo a h'' e analogamente h' è omotopo a h'' . Mostriamo che h è omotopo a h'' . Considero il diagramma:



Esso si completa a un 3-simplesso la cui 1-esima faccia attesta l'omotopia desiderata. $\square$

3.4 Categoria omotopica di una ∞ -categoria

Nel capitolo 2 abbiamo introdotto il funtore nervo $N : \mathbf{Cat} \rightarrow \mathbf{sSet}$ e, corrispondentemente, il suo aggiunto sinistro $\tau_1 : \mathbf{sSet} \rightarrow \mathbf{Cat}$, detto funtore della categoria omotopica. In questa parte, vogliamo dare una descrizione più esplicita della categoria omotopica associata a una ∞ -categoria e un complesso di Kan.

Costruzione 3.4.1. Sia $\mathcal{C}$ una ∞ -categoria. Per ogni $x, y \in \mathcal{C}$, denotiamo con $\text{h}\mathcal{C}(x, y)$ l'insieme dei morfismi $x \rightarrow y$ quozientato per la relazione di equivalenza di omotopia. Per ogni morfismo $f : x \rightarrow y$, denotiamo con $[f]$ la classe di equivalenza di f .

Dalle Proposizioni 3.3.7 e 3.3.9 segue che è ben definita una funzione:

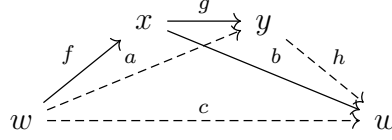
$$\circ : \text{h}\mathcal{C}(y, z) \times \text{h}\mathcal{C}(x, y) \rightarrow \text{h}\mathcal{C}(x, z),$$

che manda $([g], [f])$ nella classe $[h]$, con h una composizione di f con g .

Proposizione 3.4.2. *Sia $\mathcal{C}$ una ∞ -categoria. Allora:*

1. *La regola di composizione definita nella Costruzione 3.4.1 è associativa, ossia, per ogni $f : w \rightarrow x$, $g : x \rightarrow y$ e $h : y \rightarrow z$, si ha $[h] \circ ([g] \circ [f]) = ([h] \circ [g]) \circ [f]$;*
2. *Per ogni oggetto $x \in \mathcal{C}$, la classe $[\text{id}_x] \in \text{h}\mathcal{C}(x, x)$ soddisfa $[\text{id}_x] \circ [f] = [f]$, per ogni $f : w \rightarrow x$, e $[g] \circ [\text{id}_x] = [g]$, per ogni $g : x \rightarrow y$.*

Dimostrazione. 1. Siano $a : w \rightarrow y$ una composizione di f con g , $b : x \rightarrow z$ una composizione di g con h e $c : x \rightarrow z$ una composizione di f con b . Allora $[h] \circ ([g] \circ [f]) = [h] \circ [a]$ e $([h] \circ [g]) \circ [f] = [b] \circ [f] = [c]$. Sarà quindi sufficiente provare che c è una composizione di a con h . Ciò segue dal completamento del diagramma:



2. Il 2-simplesso $s_0^1(f)$ attesta esattamente f come una composizione di f con id_x , mentre $s_1^1(f)$ descrive f come una composizione di id_y con f .

□

Definizione 3.4.3 (Categoria omotopica). Sia $\mathcal{C}$ una ∞ -categoria. Definiamo la categoria $\text{h}\mathcal{C}$ come segue:

- gli oggetti di $\text{h}\mathcal{C}$ sono gli oggetti di $\mathcal{C}$;
- per ogni coppia di oggetti $x, y \in \mathcal{C}$, $\text{h}\mathcal{C}(x, y)$ è l'insieme dei morfismi $x \rightarrow y$ a meno di omotopia, come nella Costruzione 3.4.1;
- per ogni oggetto $x \in \mathcal{C}$, il morfismo identità da x a sé stesso in $\text{h}\mathcal{C}$ è $[\text{id}_x]$;
- la composizione di morfismi è definita come nella Costruzione 3.4.1.

Esempio 3.4.4. Sia $\mathcal{C}$ una categoria (piccola) ordinaria. Allora la categoria omotopica della ∞ -categoria $N(\mathcal{C})$ può essere identificata con $\mathcal{C}$ stessa. In particolare, $\text{h}\Delta^n$ può essere identificato con la categoria $[n]$.

Osservazione 3.4.5. Se $\mathcal{G}$ è un complesso di Kan, allora $\text{h}\mathcal{G}$ è un gruppoide. Questo perché, come mostrato nella Proposizione 3.2.3, ogni morfismo $f : x \rightarrow y$ ha un'inverso sinistro e destro, che nella categoria $\text{h}\mathcal{G}$ diventano l'inverso di $[f]$.

Esempio 3.4.6. Sia X uno spazio topologico e consideriamo il complesso di Kan $\text{Sing}(X)$. Allora la categoria omotopica $\text{hSing}(X)$ può essere visto come il gruppoide fondamentale $\Pi_{\leq 1}(X)$. Di fatto, $\text{hSing}(X)$ fornisce una descrizione più precisa di quella data nel Capitolo 1, e coincide con essa in virtù degli Esempi 3.3.3 e 3.3.8.

Osservazione 3.4.7. Siano $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ due ∞ -categorie e $f : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ un morfismo di insiemi simpliciali. Allora f passa a un funtore $F : \text{h}\mathcal{C} \rightarrow \text{h}\mathcal{D}$, perché f manda omotopie di morfismi in $\mathcal{C}$ in omotopie di morfismi in $\mathcal{D}$.

Costruzione 3.4.8. Sia $\mathcal{C}$ una ∞ -categoria. Preso un n -simpleso $\Delta^n \xrightarrow{\sigma} \mathcal{C}$, possiamo associargli un funtore $[n] \rightarrow \mathbf{hC}$ che a $i \in [n]$ associa l'immagine c_i dell' i -vertice tramite σ e a $0 \leq i \leq j \leq n$ associa la classe $[f_{i,j}]$ dell'immagine dello spigolo (i, j) tramite σ . Questa costruzione fornisce quindi un morfismo di insiemi simpliciali $u : \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{N}(\mathbf{hC})$.

Proposizione 3.4.9. *Sia $\mathcal{C}$ una ∞ -categoria e $u : \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{N}(\mathbf{hC})$ il morfismo canonico come nella Costruzione 3.4.8. Allora u esibisce $\mathbf{hC}$ come la categoria omotopica di $\mathcal{C}$, ossia la funzione*

$$\begin{aligned} \mathbf{Cat}(\mathbf{hC}, \mathcal{D}) &\xrightarrow{\mathbf{N}} \mathbf{sSet}(\mathbf{N}(\mathbf{hC}), \mathbf{N}(\mathcal{D})) \xrightarrow{u_*} \mathbf{sSet}(\mathcal{C}, \mathbf{N}(\mathcal{D})) \\ \mathbf{hC} &\xrightarrow{F} \mathcal{D} \mapsto \mathbf{N}(\mathbf{hC}) \xrightarrow{\mathbf{N}(F)} \mathbf{N}(\mathcal{D}) \mapsto \mathcal{C} \xrightarrow{u} \mathbf{N}(\mathbf{hC}) \xrightarrow{\mathbf{N}(F)} \mathbf{N}(\mathcal{D}) \end{aligned}$$

è una biezione per ogni $\mathcal{D} \in \mathbf{Cat}$.

Dimostrazione. Sia $f : \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{N}(\mathcal{D})$ un morfismo di insiemi simpliciali. Per l'Osservazione 3.4.7, f passa a un funtore $F : \mathbf{hC} \rightarrow \mathbf{hN}(\mathcal{D}) \cong \mathcal{D}$ (dove l'ultima identificazione è per l'Esempio 3.4.4). È facile convincersi che la composizione:

$$\mathcal{C} \xrightarrow{u} \mathbf{N}(\mathbf{hC}) \xrightarrow{\mathbf{N}(F)} \mathbf{N}(\mathcal{D})$$

coincide con f sui vertici e morfismi, e dunque, per l'Osservazione 2.4.3, è uguale a f . Questo mostra la suriettività.

Per l'iniettività, prendiamo $G : \mathbf{hC} \rightarrow \mathcal{D}$ funtore tale che $\mathbf{N}(G)u = f$. Dall'identità $\mathbf{N}(G)u = \mathbf{N}(F)u$ segue, per definizione di u , $\mathbf{hC}$ e per l'azione di $\mathbf{N}(F)$ e $\mathbf{N}(G)$ sugli oggetti e morfismi di $\mathcal{C}$, che F e G coincidono su oggetti e morfismi di $\mathbf{hC}$. $\square$

Osservazione 3.4.10. Dalla costruzione della categoria omotopica di una ∞ -categoria $\mathcal{C}$ si evince che in realtà la categoria $\tau_1(\mathcal{C}) \cong \mathbf{hC}$ dipende solo dal 2-scheletro $\mathbf{sk}_2(\mathcal{C})$ di $\mathcal{C}$.

3.5 Gruppi di omotopia

In questa ultima Sezione vogliamo introdurre degli strumenti algebrici per studiare i complessi di Kan. Anzitutto introdurremo la nozione di omotopia simpliciale, che estende quella già vista nel caso dei morfismi. Per richiedere che questa sia una relazione di equivalenza in generale servirà usare esclusivamente i complessi di Kan.

Definizione 3.5.1. *Sia X un insieme simpliciale e x, x' due n -simplessi che condividono il bordo, ossia $d_i^n(x) = d_i^n(x')$, per ogni $0 \leq i \leq n$. x e x' si dicono omotopi, e si scrive $x \sim x'$, se esiste un $(n+1)$ -simpleso y tale che $d_i^{n+1}(y) = s_{n-1}^{n-1}d_i^n(x) = s_{n-1}^{n-1}d_i^n(x')$, per $0 \leq i < n$, $d_n^{n+1}(y) = x$ e $d_{n+1}^{n+1}(y) = x'$.*

In tal caso y si dice un'omotopia tra x e x' .

Proposizione 3.5.2. *Se X un complesso di Kan, allora la relazione $\sim$ è di equivalenza.*

Dimostrazione. La relazione $\sim$ è riflessiva in quanto, per ogni $x : \Delta^n \rightarrow X$, $s_n^n(x)$ è un $(n+1)$ -simpleso che attesta un'omotopia di x con sé stesso.

Per concludere proviamo che se $x \sim x'$ e $x \sim x''$, allora $x' \sim x''$. Sia y' un $(n+1)$ -simpleso che verifica:

$$\text{per } i < n, d_i^{n+1}(y') = s_{n-1}^{n-1}d_i^n(x), d_n^{n+1}(y') = x \text{ e } d_{n+1}^{n+1}(y') = x'.$$

Analogamente, sia y'' un $(n+1)$ -simpleso che verifica:

$$\text{per } i < n, d_i^{n+1}(y'') = s_{n-1}^{n-1}d_i^n(x), d_n^{n+1}(y'') = x \text{ e } d_{n+1}^{n+1}(y'') = x''.$$

Allora gli $n+2$ $(n+1)$ -simplessi

$$d_0^{n+2}s_n^{n+1}s_n^n(x'), \dots, d_{n-1}^{n+2}s_n^{n+1}s_n^n(x'), y', y''$$

individuano un morfismo $\Lambda_{n+2}^{n+2} \rightarrow X$, che, per ipotesi, si estende a un $(n+2)$ -simpleso $z : \Delta^{n+2} \rightarrow X$ tale che $d_i^{n+2}(z) = d_0^{n+2}s_n^{n+1}s_n^n(x')$, per $0 \leq i \leq n-1$, $d_n^{n+2}(z) = y'$ e $d_{n+1}^{n+2}(z) = y''$. Allora si può verificare che $d_{n+2}^{n+2}(z)$ è esattamente il $(n+1)$ -simpleso cercato. $\square$

Per comodità, dato un n -simpleso σ , denotiamo $\partial^n \sigma = (d_0^n(\sigma), \dots, d_n^n(\sigma))$.

Definizione 3.5.3. *Sia X un complesso di Kan e $v \in X_0$ un oggetto di X . Per ogni $n > 0$, definiamo $\pi_n(X, v)$ come l'insieme delle classi di omotopia di n -simplessi $x \in X_n$ con $d_i(x) \in v$, per ogni $0 \leq i \leq n$.*

Sia inoltre $\pi_0(X)$ l'insieme delle classi di omotopia di vertici di X . Si dice che X è connesso se π_0 è un singoletto.

Osservazione 3.5.4. Nel caso in cui x e x' sono due n -simplessi con bordo costante in v , un'omotopia y tra x e x' soddisfa sempre:

$$\partial^{n+1}y = (v, \dots, v, x, x').$$

Costruzione 3.5.5. Siano α e β i rappresentanti di due elementi in $\pi_n(X, v)$. Consideriamo i $n+1$ n -simplessi definiti da:

$$\begin{cases} v_i = v \text{ per } i = 0, \dots, n-2, \\ v_{n-1} = \alpha, \\ v_{n+1} = \beta. \end{cases}$$

Essi soddisfano che $d_j^{n-1}(v_k) = d_{k-1}^{n-1}(v_j)$, per ogni $j, k \neq n$ e $j < k$; dunque, per il Lemma 2.3.13, individuano un morfismo $\sigma_0 : \Lambda_n^{n+1} \rightarrow X$. Poiché X è un complesso di Kan, tale mappa si estende a un $(n+1)$ -simpleso $\sigma : \Delta^{n+1} \rightarrow X$.

Consideriamo l' n -simpleso $d_n^{n+1}(\sigma)$. Per costruzione, la restrizione di tale simpleso al bordo è costante in v e dunque $d_n^{n+1}(\sigma)$ rappresenta un elemento di $\pi_n(X, v)$.

Lemma 3.5.6. *La classe di omotopia di $d_n^{n+1}(\sigma)$ non dipende dalla scelta dei rappresentanti delle classi $[\alpha]$ e $[\beta]$ e dalla scelta di σ .*

Dimostrazione. Mostriamo anzitutto che $[d_n^{n+1}(\sigma)]$ non dipende dalla scelta del riempimento di σ_0 (si faccia riferimento alle notazioni precedenti). Infatti se σ' è un altro $(n+1)$ -simpleso con:

$$\partial^{n+1}\sigma' = (v, \dots, v, \alpha, d_n^{n+1}(\sigma'), \beta),$$

allora considero i $n+1$ $(n+1)$ -simplessi:

$$(v, \dots, v, s_n^n(\alpha), \bullet, \sigma, \sigma').$$

Questi definiscono un $n+2$ simpleso $u : \Delta^{n+2} \rightarrow X$ e si può verificare che $d_n^{n+2}(u)$ fornisce un'omotopia tra σ e σ' .

Facciamo ora vedere che $[d_n^{n+1}(\sigma)]$ non dipende dalla scelta del rappresentante di $[\beta]$ (analogamente si potrà ragionare per $[\alpha]$). Infatti, se $\beta \sim \beta'$ e $\tau : \Delta^{n+1} \rightarrow X$ ne attesta un'omotopia, scelgo σ' tale che:

$$\partial^{n+1}\sigma' = (v, \dots, v, \alpha, d_n^{n+1}(\sigma'), \beta').$$

I $n+1$ $(n+1)$ -simplessi:

$$(v, \dots, v, s_{n-1}^n(\alpha), \sigma', \bullet, \tau)$$

forniscono $u : \Delta^{n+2} \rightarrow X$ con:

$$\partial^{n+1}d_{n+1}^{n+2}(u) = (v, \dots, v, \alpha, d_n^{n+1}(\sigma'), \beta).$$

Di conseguenza si può scegliere $\sigma = d_{n+1}^{n+2}(u)$ e si ha $d_n^{n+1}(\sigma) = d_n^{n+1}(\sigma')$ (e per quanto già mostrato una qualsiasi altra scelta darebbe comunque la stessa classe di omotopia). $\square$

Osservazione 3.5.7. Come conseguenza del Lemma, è ben definita la funzione:

$$\begin{aligned} m : \pi_n(X, v) \times \pi_n(X, v) &\rightarrow \pi_n(X, v) \\ ([\alpha], [\beta]) &\mapsto [d_n^{n+1}(\sigma)] \end{aligned}$$

con $\partial^{n+1}\sigma = (v, \dots, v, \alpha, d_n^{n+1}(\sigma), \beta)$.

Sia inoltre $e \in \pi_n(X, v)$ la classe di omotopia rappresentata dalla mappa costante:

$$\Delta^n \rightarrow \Delta^0 \xrightarrow{v} X.$$

Teorema 3.5.8. *Con le definizioni date in precedenza, $\pi_n(X, v)$ è un gruppo per ogni $n \geq 1$ ed è abeliano per $n \geq 2$.*

Dimostrazione. Mostriamo solo che $\pi_n(X, v)$ è un gruppo.

Sia α un n -simpleso. Allora $s_{n-1}^n(\alpha)$ e $s_n^n(\alpha)$ sono dei $(n+1)$ -simplessi che attestano rispettivamente $[\alpha] \cdot e = [\alpha]$ e $e \cdot [\alpha] = [\alpha]$. Inoltre, considero la mappa $\sigma_0 : \Lambda_{n+1}^{n+1} \rightarrow X$ definita dalla n -upla $(v, \dots, v, \alpha, v)$; l'estensione $\sigma : \Delta^{n+1} \rightarrow X$ verifica che $\partial^{n+1}\sigma = (v, \dots, v, \alpha, v, d_{n+1}(\sigma))$, ossia σ attesta $e = [v]$ come composizione tra $[\alpha]$ e $[d_{n+1}(\sigma)]$. Analogamente si mostra che $[\alpha]$ ha un inverso sinistro.

Resta quindi da mostrare che l'operazione è associativa. Siano $\alpha, \beta, \gamma : \Delta^n \rightarrow X$ rappresentanti di elementi di $\pi_n(X, v)$. Scegliamo dei $(n+1)$ -simplessi $\sigma_{n-1}, \sigma_{n+1}, \sigma_{n+2}$ tali che:

$$\begin{aligned}\partial^{n+1}\sigma_{n-1} &= (v, \dots, v, \alpha, d_n^{n+1}(\sigma_{n-1}), \beta) \\ \partial^{n+1}\sigma_{n+1} &= (v, \dots, v, d_n^{n+1}(\sigma_{n-1}), d_n^{n+1}(\sigma_{n+1}), \gamma) \text{ e} \\ \partial^{n+1}\sigma_{n+2} &= (v, \dots, v, \beta, d_n^{n+1}(\sigma_{n+2}), \gamma).\end{aligned}$$

Mettendoli insieme si ottiene una mappa $\Lambda_n^{n+2} \xrightarrow{(v, \dots, v, \sigma_{n-1}, \bullet, \sigma_{n+1}, \sigma_{n+2})} X$, che quindi si estende a un $(n+2)$ -simpleso $u : \Delta^{n+2} \rightarrow X$. Ma allora:

$$\partial^{n+1}d_n^{n+2}(u) = (v, \dots, v, \alpha, d_n^{n+1}(\sigma_{n+1}), d_n^{n+1}(\sigma_{n+2})),$$

e di conseguenza:

$$\begin{aligned}[\alpha]([\beta][\gamma]) &= [\alpha][d_n^{n+1}(\sigma_{n+2})] \\ &= [d_n^{n+1}(\sigma_{n+1})] \\ &= [d_n^{n+1}(\sigma_{n-1})][\gamma] \\ &= ([\alpha][\beta])[\gamma].\end{aligned}$$

□

Come applicazione dei gruppi di omotopia si ha che si possono definire i *gruppi di omotopia superiore* di uno spazio topologico X come i gruppi di omotopia simpliciale dell'insieme simpliciale singolare $\text{Sing}(X)$.

Osservazione 3.5.9.

1. In particolare, se $x_0 \in X$ e pensiamo x_0 come uno 0-simpleso di X , allora $\pi_1(\text{Sing}(X), x_0) \cong \pi_1(X, x_0)$, con quest'ultimo che è l'usuale gruppo fondamentale di X . Questo perché un 1-simpleso di $\text{Sing}(X)$ che ha bordo costante in x_0

è esattamente un cammino chiuso di X basato in x_0 e, grazie all'Esempio 3.3.3, l'omotopia tra due tali morfismi è l'usuale omotopia di cammini.

Analogamente, $\pi_0(\text{Sing}(X)) \cong \pi_0(X)$.

2. Più in generale, se X è un complesso di Kan e $\text{h}X$ è il suo gruppoide omotopico, $\pi_1(X, v) \cong \text{Aut}_{\text{h}X}(v)$, mentre $\pi_0(X)$ è l'insieme delle classi di isomorfismo di $\text{h}X$.

Per l'Osservazione 1 precedente, dato uno spazio topologico X , il complesso di Kan $\text{Sing}(X)$ è spesso denominato *∞ -gruppoide fondamentale* $\Pi_\infty(X)$. Come abbiamo osservato precedentemente, se X è uno spazio topologico, la realizzazione geometrica $|\text{Sing}(X)|$ è un CW-complesso di dimensione infinita (salvo casi banali). Si può dimostrare (si veda [3]) che la mappa canonica $\varepsilon_X : |\text{Sing}(X)| \rightarrow X$ è un'equivalenza debole, nel senso che induce un isomorfismo di insiemi $\pi_0(|\text{Sing}(X)|) \xrightarrow{\cong} \pi_0(X)$ e, per ogni $n \geq 1$ e $x_0 \in X$, degli isomorfismi di gruppi $\pi_n(|\text{Sing}(X)|, x_0) \xrightarrow{\cong} \pi_n(X, x_0)$.

In questo senso, $\Pi_\infty(X)$ è un invariante omotopico completo dello spazio X .

Esempio 3.5.10. Sia $\mathcal{G}$ un gruppoide e $N(\mathcal{G})$ il suo nervo. Sappiamo che $N(\mathcal{G})$ è un complesso di Kan e ne vogliamo quindi studiare i gruppi di omotopia. Per l'Osservazione appena fatta, siccome $\text{h}N(\mathcal{G}) \cong \mathcal{G}$, sappiamo che $\pi_0(N(\mathcal{G}))$ è l'insieme delle classi di isomorfismo di $\mathcal{G}$, mentre $\pi_1(N(\mathcal{G})) \cong \text{Aut}_{\mathcal{G}}(x)$, per ogni x oggetto di $\mathcal{G}$.

Invece, per $n \geq 2$, siccome l'($n-1$)-simplexso costante in x è:

$$x \xrightarrow{\text{id}_x} x \xrightarrow{\text{id}_x} \dots \xrightarrow{\text{id}_x} x,$$

segue che l'unico n -simplexso con bordo costante in x è la composizione dell'identità di x n volte, ossia l' n -simplexso costante in x . Di conseguenza, $\pi_n(N(\mathcal{G}), x) \cong 0$, per ogni $n \geq 2$.

In particolare, se G è un gruppo e BG è il gruppoide associato come nell'Esempio 1.1.3, allora i gruppi di omotopia del suo nervo sono:

$$\pi_n(N(BG), *) \cong \begin{cases} G & \text{per } n = 1, \\ 0 & \text{per } n \geq 2. \end{cases}$$

Invece il π_0 è un singoletto perché BG ha un solo oggetto.

Bibliografia

- [1] Denis-Charles Cisinski. *Higher Categories and Homotopical Algebra*, volume 180. Cambridge University Press, 2019.
- [2] Peter Gabriel and Michel Zisman. *Calculus of Fractions and Homotopy Theory*. Springer Science & Business Media, 2012.
- [3] Paul G. Goerss and John F. Jardine. *Simplicial Homotopy Theory*. Springer Science & Business Media, 2009.
- [4] Jacob Lurie. *Kerodon, The Language of ∞ -categories*. <https://kerodon.net>, 2026.
- [5] J. Peter May. *Simplicial Objects in Algebraic Topology*, volume 11. University of Chicago Press, 1992.
- [6] Emily Riehl. *A Leisurely Introduction to Simplicial Sets*. Expository article available online at <http://www.math.harvard.edu/eriehl>, 2011.
- [7] Emily Riehl. *Category Theory in Context*. Courier Dover Publications, 2017.

Ringraziamenti

Ringrazio il relatore per avermi proposto questo interessante ambito di ricerca, che mi ha permesso di sviluppare la mia passione per la teoria delle categorie e la topologia algebrica.

Ringrazio tutte le persone che mi sono state affianco in questi anni: i miei genitori, le mie sorelle, i miei amici e i compagni di corso.