

Alma Mater Studiorum - Università di Bologna

Dipartimento di Fisica e Astronomia
Corso di Laurea in Astronomia

Teorema del Viriale e applicazioni astrofisiche

Tesi di laurea

Presentata da:
Elena Diquattro

Relatore:
Chiar.ma Prof.ssa Marcella Brusa

Anno Accademico 2025-2026

“Ascoltate!
Se accendono le stelle –
Vuol dire che qualcuno ne ha bisogno?
Vuol dire che qualcuno vuole che esse siano?
Vuol dire che qualcuno chiama perle questi piccoli sputi?
[...]

Vuol dire che è indispensabile
che ogni sera
al di sopra dei tetti
risplenda almeno una stella?!”

Vladimir Majakovskij

Alla mia mamma, che ammiro e amo. Alla mia famiglia, che non ha mai smesso di sostenermi e di credere in me. Ai miei amici, che mi sono sempre stati vicini.
Né io né questa tesi esisteremmo senza di voi. Grazie. <3

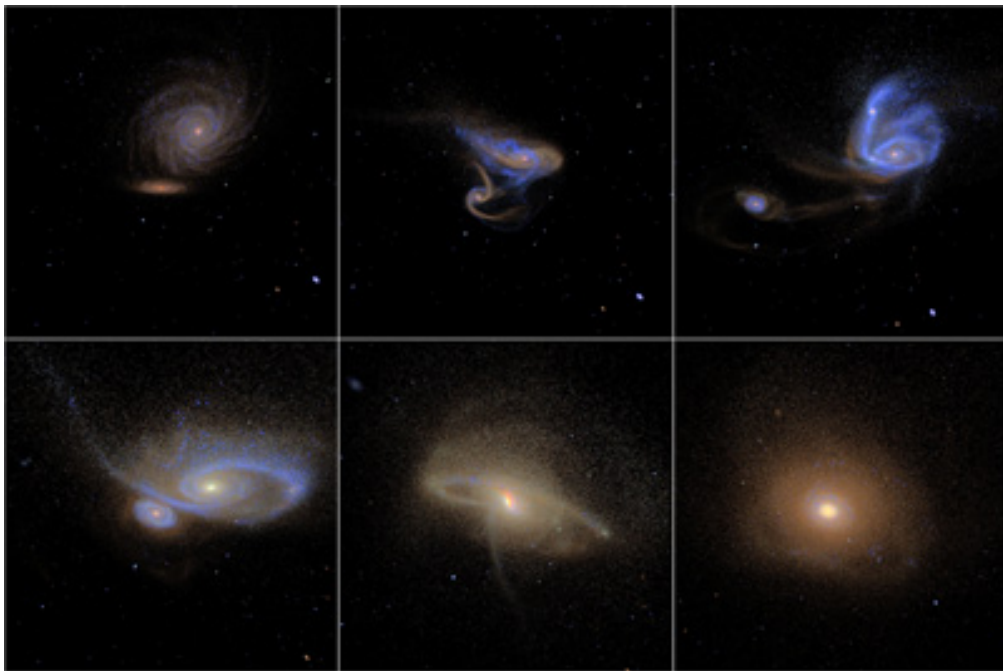


Figura 1: La lenta danza di fusione di due galassie. Data di pubblicazione: 27 ottobre 2011. Crediti: P. Jonsson (Harvard-Smithsonian Center for Astrophysics), G. Novak (Princeton University), e T.J. Cox (Carnegie Observatories, Pasadena, Calif.).

Indice

1	Introduzione	4
2	La derivazione fisico-matematica del Teorema del Viriale	4
3	Il ruolo del Teorema del Viriale nelle fasi di vita di una stella	7
3.1	Il criterio di stabilità delle strutture stellari	9
4	Il Teorema del Viriale nei sistemi stellari	10
4.1	Il tempo di rilassamento	11
4.2	Il Piano del Viriale	12
4.3	La catastrofe gravotermica	14
5	Galaxy Merging e Structure Collapse	15
A	Appendice	19
A.1	L'approssimazione impulsiva e il calcolo del tempo di rilassamento a due corpi	19

1 Introduzione

Il Teorema del Viriale è una legge fisica (i.e., è uno dei risultati del problema degli N-corpi) che regola il rapporto tra l'energia cinetica e l'energia potenziale gravitazionale di alcuni sistemi fisici, cosiddetti *virializzati*, prestandosi particolarmente bene a spiegare i comportamenti macroscopici di quei sistemi composti da un numero enorme di corpi, microscopici al confronto con le dimensioni del sistema visto nella sua interezza; caratteristica che riguarda senz'altro i principali oggetti di studio dell'Astrofisica. Stelle, galassie, e quindi ammassi, sono sistemi virializzati, ovvero sono dei sistemi che, superata la fase iniziale di formazione, hanno raggiunto una condizione di *quasi-equilibrio* tale che, detta T l'energia cinetica e Ω l'energia potenziale gravitazionale:

$$2T = -\Omega \quad (1)$$

Scrivendo questa tesi, mi avvalgo della facoltà di illustrare innanzitutto una semplice derivazione del Teorema del Viriale partendo dalle celeberrime Leggi della Dinamica, e quindi di proiettare questa legge nell'Universo, seguendo un percorso a scala di dimensioni crescente, partendo da una singola struttura stellare e ampliando il campo fino ad includere milioni e miliardi di esse.

2 La derivazione fisico-matematica del Teorema del Viriale

Sia m la massa di una particella e x, y, z le sue coordinate in un sistema di riferimento inerziale; siano ancora F_x, F_y, F_z le componenti della forza agente su di essa, cosicché per la II Legge della Dinamica:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = F_x; \quad m \frac{d^2y}{dt^2} = F_y; \quad m \frac{d^2z}{dt^2} = F_z \quad (2)$$

Avvalendomi della seguente trasformazione:

$$\frac{1}{2} \frac{d^2}{dt^2}(\mathbf{m}\mathbf{x}^2) = m \frac{d}{dt} \left(x \frac{dx}{dt} \right) = \mathbf{m} \left(\frac{d\mathbf{x}}{dt} \right)^2 + \mathbf{m}\mathbf{x} \frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2} \quad (3)$$

posso riscrivere che lungo i tre assi di riferimento:

$$\begin{cases} \frac{1}{2} \frac{d^2}{dt^2}(mx^2) = m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + xF_x \\ \frac{1}{2} \frac{d^2}{dt^2}(my^2) = m\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + yF_y \\ \frac{1}{2} \frac{d^2}{dt^2}(mz^2) = m\left(\frac{dz}{dt}\right)^2 + zF_z \end{cases} \quad (4)$$

e sommando:

$$\frac{1}{2} \frac{d^2}{dt^2}(mr^2) = m\left\{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right\} + (xF_x + yF_y + zF_z) \quad (5)$$

In un problema a N-corpi, considerato quindi il moto generale di una nube di particelle (e.g., molecole, particelle di polvere, stelle,...) e sommata la relazione precedente su tutte le particelle costituenti la configurazione considerata, ottengo:

$$\frac{1}{2} \frac{d^2 I}{dt^2} = 2T + \sum_k (x_k F_{x,k} + y_k F_{y,k} + z_k F_{z,k}) \quad (6)$$

dove:

1. $T = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N m_k \|\mathbf{v}_k\|^2$ è l'*energia cinetica*;
2. $I = \sum_{k=1}^N m_k \|\mathbf{r}_k\|^2$ è il *momento di inerzia* del sistema rispetto all'origine;

e l'ultimo termine viene chiamato il *viriale di Clausius*. Per comprendere quest'ultimo termine, si considerino due particelle: m_i di posizione (x_i, y_i, z_i) e m_j di coordinate (x_j, y_j, z_j) ; siano A, B, C le componenti della forza che la seconda esercita sulla prima (e $-A, -B, -C$ quelle opposte). Il contributo al viriale di queste due forze è $A(x_i - x_j) + B(y_i - y_j) + C(z_i - z_j)$ e quindi il viriale è, sommando su tutte le coppie di particelle:

$$\sum_{i \neq j=1}^N \{A(x_i - x_j) + B(y_i - y_j) + C(z_i - z_j)\} \quad (7)$$

In una nube di densità così bassa che si possa assumere valga la legge dei gas perfetti, è possibile trascurare tutte le forze eccetto quelle gravitazionali; perciò A, B, C sono le componenti della forza diretta da m_j verso m_i di modulo $Gm_i m_j / r_{ij}^2$. L'espressione 7 diventa:

$$-G \sum_{i \neq j=1}^N \frac{m_i m_j}{r_{ij}}$$

Ogni termine della sommatoria corrisponde al lavoro fatto per separare le particelle contro le forze gravitazionali e portarle all'infinito. Il viriale è dunque l'energia potenziale Ω della configurazione, e finalmente:

$$\frac{1}{2} \frac{d^2 \mathbf{I}}{dt^2} = 2\mathbf{T} + \Omega \quad (8)$$

Questo risultato vale quindi in ogni sistema di riferimento inerziale composto da N corpi interagenti le cui equazioni differenziali sono:

$$\ddot{\mathbf{x}}_i = -G \sum_{j=1; j \neq i}^N m_j \frac{(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j)}{r_{ij}^3}, \quad i = 1, \dots, N \quad (9)$$

dove si è usato $r_{ij} = \|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\|$; ovvero è valido per sistemi autogravitanti, nel senso che la forza totale sotto l'azione della quale le N particelle si muovono è determinata dalle masse stesse attraverso 9. In quei sistemi in cui valga 9, è possibile dimostrare che *energia totale*, *momento* e *momento angolare* si conservano; ovvero, rispettivamente:

$$E = T + \Omega; \quad \mathbf{P} = \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}_i; \quad \mathbf{J} = \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{x}_i \wedge \mathbf{v}_i \quad (10)$$

Se valgono inoltre le due identità:

$$\text{Identità di Lagrange - Jacobi}^1 \quad \frac{1}{2} \frac{d^2 I}{dt^2} = 2T + \Omega = \mathbf{E} + \mathbf{T} = 2\mathbf{E} - \Omega \quad (11)$$

$$\text{Disuguaglianza (debole) di Sundman} \quad \|\mathbf{J}\|^2 \leq 2I T = I \left(\frac{d^2 I}{dt^2} - 2E \right) \quad (12)$$

allora si ottiene finalmente il Teorema del Viriale (1):

$$\mathbf{0} \leq 2\mathbf{T} = -\Omega, \quad \forall t \quad (13)$$

Un sistema nel quale valga questa disuguaglianza è per definizione un sistema virializzato; inoltre, deve valere necessariamente che $E \leq 0$, ovvero che l'energia totale di un sistema autogravitante virializzato non può essere positiva.

¹La prima di queste tre identità è appena stata dimostrata. Le altre due derivano immediatamente dalla conservazione dell'energia, una volta che la prima identità si è stabilita.

3 Il ruolo del Teorema del Viriale nelle fasi di vita di una stella

La storia di una stella è la storia della progressiva contrazione di una sfera di gas autogravitante cui corrisponde un continuo innalzamento del contenuto termico della struttura. All'equilibrio di una stella risultano collegate tre scale di tempo caratteristiche:

1. se le forze gravitazionali e di pressione non si fanno equilibrio, la stella si contrarrà o si espanderà in un tempo t_d che viene detto scala di tempo *dinamico*;
2. se la struttura stellare è quasi statica, essa evolve in un tempo scala t_τ cosiddetto *termico*, dato dal rapporto tra l'energia termica totale ed il tasso di perdita di energia nel tempo (dalla superficie);
3. al decorso delle reazioni termonucleari nel nucleo della stella, il rapporto tra la quantità totale di energia nucleare ed il tasso di perdita di questa nel tempo sarà detto scala di tempo *nucleare* t_n .

In generale si ha che: $t_d \ll t_\tau \ll t_n$.

Si consideri innanzitutto una nube interstellare, gravitazionalmente instabile, che si contrae. In questo caso, le forze che si oppongono al collasso possono derivare da: la pressione termica dei gas, la pressione prodotta dai campi magnetici, le forze centrifughe (se la nube è in rotazione), ed ancora dai moti turbolenti interni. Da calcoli effettuati risulterebbe che questi ultimi dovrebbero essere in genere trascurabili, a meno che la turbolenza non sia supersonica o che essa venga amplificata dal processo medesimo del collasso. Riducendomi a considerare solo il primo effetto, trovo il cosiddetto *criterio di Jeans*, che afferma che affinché avvenga il collasso, l'energia potenziale gravitazionale della nube deve superare l'energia cinetica dovuta ai moti termici. Se la nube ha massa M e raggio R ed è composta principalmente da atomi di idrogeno di massa H ; le sue energie, potenziale e cinetica, valgono rispettivamente:

$$|\Omega| = G \frac{MH}{R} \quad e \quad T = \frac{k\theta}{2} \quad (14)$$

e in questo caso θ rappresenta la temperatura. Se avevo trovato che una struttura virializzata rispetta la disuguaglianza 13, il criterio di Jeans afferma che il collasso di una nube di data massa e data temperatura avverrà se $|\Omega| \gtrsim 2T$, ovvero se:

$$G \frac{MH}{R} \gtrsim k\theta \quad (15)$$

Assumendo che il gas sia omogeneamente distribuito, ovvero che abbia $M = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho$, si ricava, per ogni ρ , un raggio minimo per la frazione di nube instabile, ovvero esprimendo R in funzione di M :

$$M_J \gtrsim \frac{10^{23} \theta^{3/2}}{\rho^{1/2}} \quad (16)$$

dove si è usato:

- $G = 6.67 \times 10^{-8} \text{ gr}^{-1} \text{ cm}^3 \text{ s}^{-2}$ costante di gravitazione universale;
- $k = 1.38 \times 10^{-16} \text{ gr cm}^2 \text{ s}^{-2} \text{ K}^{-1}$ costante di Boltzmann;
- $H = 1.66 \times 10^{-24} \text{ gr}$ massa dell'atomo di idrogeno.

Esiste quindi, per ogni fissata condizione del mezzo interstellare, una massa minima in grado di contrarre nota come *massa di Jeans*. Per nubi di massa maggiore o dell'ordine di questa massa 'critica', ci si attende che inizi un processo di contrazione. Tale processo è caratterizzato da tempi scala dinamici del collasso, che per una nube di raggio R e massa M si stimano essere dell'ordine di:

$$t_d \simeq \sqrt{\frac{2R^3}{GM}} \quad (17)$$

Sostituite in 17 le quantità relative al nostro Sole (i.e., $M_\odot \simeq 10^{33} \text{ gr}$ e $R_\odot \simeq 10^{11} \text{ cm}$) si trova un tempo scala dinamico $t_d \sim 10^3$ secondi. Se il gas è non ionizzato e trasparente, l'energia acquisita nella contrazione viene irradiata nello spazio ed il collasso procede quasi isotermicamente. Ciò produce una diminuzione della massa critica che può giustificare ulteriori sottofragmentazioni.

Al procedere della contrazione ed all'aumentare della densità, la temperatura inizia ad aumentare sempre più decisamente, inducendo ad una progressiva ionizzazione della materia. L'alta opacità della materia in fase di ionizzazione fa sì che la radiazione resti sempre più intrappolata: i tempi scala passano da tempi scala dinamici a tempi scala termodinamici, le strutture diventano quasi statiche e passano *sotto il controllo del viriale* nella forma:

$$2\mathbf{T} + \mathbf{\Omega} = \mathbf{0} \quad (18)$$

dove:

1. $\mathbf{T} = \frac{1}{2} \sum_i m_i v_i^2$ = energia cinetica estesa a tutte le particelle del sistema;
2. $\mathbf{\Omega}$ = energia gravitazionale ($\mathbf{\Omega} = 0$ per $r \rightarrow \infty$).

Se le particelle del gas stellare fossero puntiformi e non interagenti tale contrazione non troverebbe mai arresti e la struttura evolverebbe con continuità verso densità e temperatura divergenti. Poiché le particelle sono in realtà ioni ed elettroni, nel corso di questa contrazione possono intervenire due tipi di possibili fenomeni:

1. Gli elettroni degenerano, cosicché la pressione non dipende più dalla temperatura. La contrazione è arrestata dalla pressione degli elettroni degeneri e la struttura si raffredda progressivamente per irraggiamento, sino a costituire un blocco di materia oscura e cristallizzato.
2. Vengono raggiunte temperature centrali alle quali cominciano a divenire efficienti reazioni nucleari.

Poiché più piccola è la massa della stella maggiore è in genere la densità e minore la temperatura nelle zone centrali, stelle di massa sufficientemente piccola ($< 0.1M_{\odot}$) degenerano elettricamente ancora prima di raggiungere le temperature di fusione dell'idrogeno. Stelle di massa leggermente superiore ($0.1M_{\odot} < M < 0.5M_{\odot}$) non riescono ad innescare la combustione dell'elio; mentre stelle ancora più massicce possono degenerare prima di innescare la fusione centrale del carbonio. Ove ciò non avvenga, la contrazione è destinata a proseguire sino alle ultime fasi esplosive.

3.1 Il criterio di stabilità delle strutture stellari

Esamino più nel dettaglio il bilancio energetico di una struttura stellare virializzata ricordando che risulta:

1. $T = \frac{3}{2}k\theta$ = energia cinetica per particella;
2. $U = \frac{n}{2}k\theta$ = energia interna per particella;

dove n è il numero di gradi di libertà del sistema. Dalle due relazioni precedenti, ponendo $1/n = (\gamma - 1)/2$, ottengo che $T = 3U/n = 3(\gamma - 1)U/2$. $\gamma \equiv C_p/C_v$ è definito come il rapporto tra i calori specifici a pressione e volume costanti, rispettivamente. Dal momento che per l'energia della materia all'interno della struttura continua a valere il principio di conservazione dell'energia $E = U + \Omega$, e poiché per il viriale $3(\gamma - 1)U + \Omega = 0$, si ottiene in definitiva:

$$\begin{cases} \Delta E = \frac{3\gamma-4}{3(\gamma-1)} \Delta\Omega \\ \Delta U = -\frac{1}{3(\gamma-1)} \Delta\Omega \end{cases} \quad (19)$$

a seguito di una contrazione! Per un gas perfetto monoatomico in cui $\gamma = 5/3$ e $|\Omega| < 0$:

$$dE = +\frac{1}{2} d|\Omega| \quad dU = -\frac{1}{2} d|\Omega| \quad (20)$$

da cui si vede come metà dell'energia di gravitazione vada in irraggiamento e metà in energia interna. In altre parole, ogni perdita di energia costringe la configurazione a contrarsi e così facendo essa non solo rifornisce l'energia perduta, ma anche si riscalda.

Da 19 è possibile trarre le seguenti conclusioni. Se $\gamma > 4/3$ è possibile il normale funzionamento della stella, nel senso che essa trae dalla contrazione l'energia sia per sostenersi che per irradiare. Al limite per $\gamma = 4/3$ (i.e., il coefficiente di dilatazione adiabatica di un gas di fotoni) tutta l'energia della contrazione va in energia interna. Per $\gamma < 4/3$ la struttura non può essere stabile perché la contrazione indotta dalla perdita di energia per irraggiamento non riesce a produrre l'energia necessaria per mantenere la struttura in uno stato stabile e si manifesta quindi una instabilità gravitazionale. $\gamma > 4/3$ è dunque un criterio necessario per la stabilità delle strutture stellari. La stella risulta così un sistema a calore specifico negativo: la perdita di energia induce un aumento di temperatura. Definita:

$$L \equiv \frac{dE}{dt} = \frac{3\gamma - 4}{3(\gamma - 1)} \frac{d|\Omega|}{dt} \quad (21)$$

e svolgendo i seguenti passaggi algebrici:

$$\begin{aligned} \int_0^t L dt &= \frac{3\gamma - 4}{3(\gamma - 1)} |\Omega| \\ t &\simeq \frac{3\gamma - 4}{3(\gamma - 1)} \frac{GM^2}{R\bar{L}} \end{aligned}$$

(dove si è assunto un valore medio della luminosità) per una stella come il Sole, per $\gamma = 5/3$, si trova che $t \sim 10^{11}$ anni. Il tempo ora ricavato, che posso sinteticamente scrivere:

$$t_\tau \simeq \frac{GM^2}{R\bar{L}} \simeq \frac{\Omega}{\bar{L}} \quad (22)$$

rappresenta il tempo scala termico o di Kelvin-Helmholtz o di contrazione.

4 Il Teorema del Viriale nei sistemi stellari

A questo punto, posso estendere quanto detto finora ai sistemi stellari. Trattando di sistemi stellari virializzati, è opportuno introdurre delle nuove variabili, la *dispersione di velocità viriale* σ_V e il *raggio viriale* r_V , cosicché l'energia potenziale gravitazionale e l'energia cinetica di tali sistemi si possano riscrivere come:

$$|\Omega| \equiv \frac{GM^2}{r_V} \quad e \quad T \equiv \frac{M\sigma_V^2}{2} \quad (23)$$

Posto che valga rigorosamente il Teorema del Viriale, la dispersione di velocità viriale allora può essere riscritta in funzione di tutto il resto come:

$$\sigma_V^2 = \frac{2T}{M} = \frac{|\Omega|}{M} = \frac{GM}{r_V} \quad (24)$$

4.1 Il tempo di rilassamento

Nonostante io sia riuscita grossomodo a trascurare le mutue interazioni tra le particelle delle strutture stellari esaminate, una conseguenza che il problema degli N-corpi porta inevitabilmente con sé, mi trovo adesso a dover definire le condizioni affinché si possa, o non si possa, continuare ad ignorare la natura granulare reale dei sistemi stellari. Per farlo, utilizzerò il valore del **tempo di rilassamento**, che non è altro che quel tempo, decorso il quale, un sistema fisico approssimativamente *continuo*, e quindi estremamente più semplice da studiare, diventa *discreto*. Cosicché si potranno considerare i sistemi stellari estesi, come le galassie ellittiche, principalmente non collisionali; mentre i sistemi più piccoli, come gli ammassi globulari e gli ammassi aperti, sistemi collisionali.

La derivazione matematica del tempo di rilassamento a due corpi è piuttosto lunga e la sua dimostrazione sarebbe prolissa, per questo mi limito semplicemente a riportare qui sotto la sua espressione:

$$t_{2b} \sim \frac{v_t^2}{8\pi G^2 n_f m_f^2 \ln \bar{\Lambda} \Psi(v_t)} \quad (25)$$

e a postporre un approfondimento sul tema in Appendice A.1. In 25, il pedice f sta per 'field', mentre il pedice t sta per 'test', in perfetto accordo con il fatto che si affronta il problema dal punto di vista di una stella di massa m_t e velocità v_t che interagisce con un sistema a N-corpi, descritto da una funzione DF (i.e., *phase-space distribution function*) $f = f(\mathbf{x}_f, \mathbf{v}_f)$, e composto da stelle di massa identica m_f . Fatta l'ulteriore assunzione che le masse del campo abbiano distribuzione spaziale uniforme e la loro distribuzione di velocità sia isotropa, $f \rightarrow n_f g(v_f)$: n_f è la densità di numero ed è indipendente dalla posizione delle singole stelle e g è una funzione positiva dipendente dal modulo di $\mathbf{v}_f$. $\ln \bar{\Lambda}$ si chiama logaritmo di Coulomb (pesato sulle velocità) e dipende dal parametro di impatto, mentre $\Psi(v_t)$ si chiama potenziale di Rosenbluth e può essere interpretato come il 'potenziale' nello spazio delle velocità della distribuzione di 'densità' $g(v_f)$. Se considero un sistema finito di forma sferica e raggio R , omogeneamente riempito da N stelle identiche di massa $m = m_f = m_t$ (cosicché $n_f = 3N/4\pi R^3$), e impostando arbitrariamente $r_V = R$, 24 diventa:

$$\sigma_V^2 = \frac{GNm}{R} \quad (26)$$

e adotto questo valore come velocità caratteristica del sistema; i.e., $\sigma_V = v_f = v_t$. Dal momento che il potenziale di Rosenbluth alle alte velocità mostra un comportamento asintotico $\Psi(v_t) \sim 1/v_t$ e detto $t_{cross} = 2R/\sigma_V$ il tempo di attraversamento naturale del sistema, posso esprimere t_{2b} in unità di questo tempo di attraversamento come:

$$\frac{t_{2b}}{t_{cross}} \sim \frac{N}{12 \ln \bar{\Lambda}}, \quad \ln \bar{\Lambda} = \ln \frac{2R}{b_{\pi/2}} = \ln N \quad (27)$$

Se per una tipica galassia ellittica si utilizzano i valori $N \simeq 10^{11}$ e $t_{cross} \simeq 2 \times 10^8 \text{ yrs}$, il tempo di rilassamento caratteristico sarà dell'ordine di $t_{2b} \approx 10^{6 \div 7} \text{ Gyr}$: come avevo già anticipato, le galassie sono essenzialmente sistemi non collisionali su tempi scala cosmologici. All'opposto, negli ammassi globulari, in cui $N \simeq 10^{5 \div 6}$ e $t_{cross} \simeq 10^6 \text{ yrs}$, $t_{2b} \approx 5 \times 10^9 \text{ yrs}$ e quindi ci si aspetta che gli effetti collisionali diventino importanti su tempi scala più brevi della loro età. Questi sistemi si dicono essere marginalmente collisionali. Infine, per gli ammassi aperti dove $N \simeq 10^{2 \div 3}$ e $t_{cross} \simeq 10^6 \text{ yrs}$ deriva che $t_{2b} \approx 10^7 \text{ yrs}$, addirittura un tempo più breve del tempo di permanenza delle stelle più massive della sequenza principale, motivo per il quale gli ammassi aperti sono generalmente composti da stelle giovani e blu.

Prima di continuare, ci si chiede come un sistema stellare, inizialmente *non* all'equilibrio (e.g., una protogalassia oppure un paio di galassie che si legano in un unico sistema), raggiunga la sua configurazione di equilibrio e come le proprietà strutturali e dinamiche dello stato finale dipendano dalle specifiche condizioni iniziali. Nel quadro della dinamica stellare, il processo dinamico che porta alla virializzazione è noto come *violent relaxation*. Il modo migliore per discutere questo processo, sarebbe quello di utilizzare i concetti di meccanica statistica. Qui, per non appesantire inutilmente la trattazione, mi limito ad evidenziare il fatto che la violent relaxation dipende dalle fluttuazioni globali del potenziale, dipendente dal tempo, del sistema che ridistribuisce le energie delle stelle indipendentemente dalla loro massa. Inoltre, la violent relaxation agisce su tempi scala piuttosto brevi se comparati agli altri fenomeni di rilassamento, dell'ordine di $t_{VR} \approx t_{dyn} \approx 1/\sqrt{G\rho}$, dove ρ è la densità media del sistema.

4.2 Il Piano del Viriale

Molti dei fenomeni che riguardano i sistemi stellari autogravitanti possono essere qualitativamente illustrati usando il **piano del viriale**. Sull'asse orizzontale si collochi l'energia potenziale gravitazionale: in questo modo, i punti vicini all'origine rappresentano sistemi 'diluati', mentre verso destra si incontreranno sistemi sempre più 'concentrati'. Sull'asse verticale, invece, si rappresenti l'energia cinetica: i punti nella

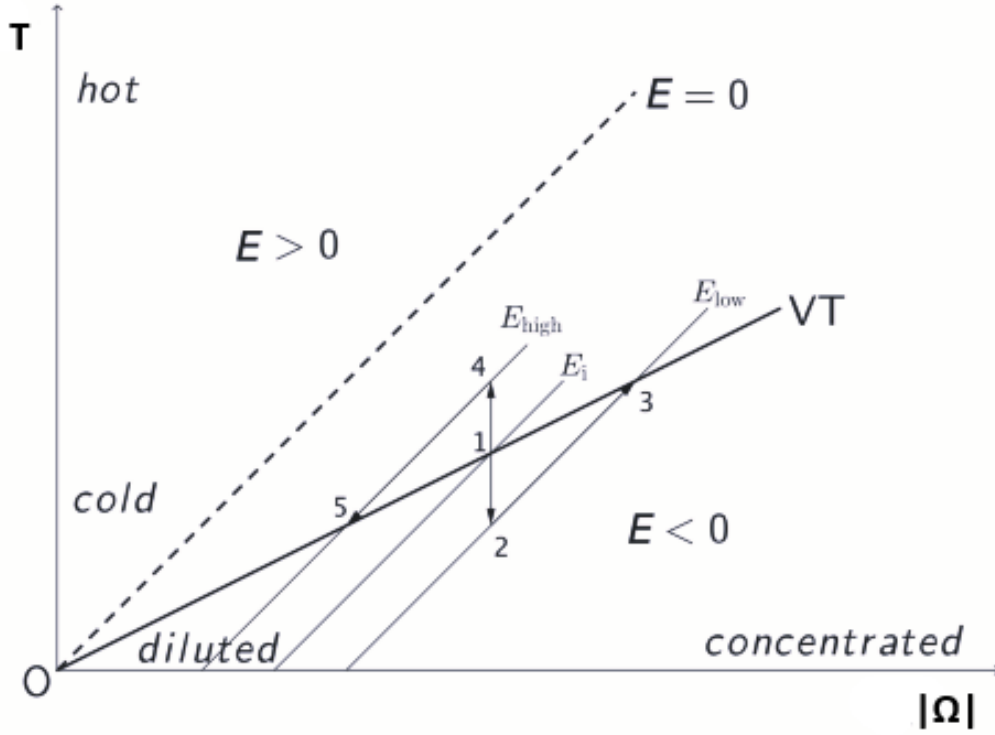


Figura 2: Il piano del viriale di sistemi autogravitanti con forza $1/r^2$. La retta spessa e continua indicata con VT rappresenta il Teorema del Viriale e le sue intersezioni con alcune rette di conservazione dell'energia per differenti valori dell'energia totale (negativa). Non esistono sistemi virializzati aventi energia totale positiva. I sistemi sono qualitativamente indicati come caldi, freddi, diluiti e concentrati in funzione della loro posizione sul piano. Fonte: *Introduction to Stellar Dynamics*[3].

parte bassa del piano rappresentano i sistemi 'freddi' e in corrispondenza all'incremento dei valori in ordinata si troveranno i sistemi 'caldi'. Da 13, segue che un sistema autogravitante è virializzato se e solo se:

$$T = \frac{|\Omega|}{2} \quad (28)$$

Se un sistema evolve con energia costante, allora il punto che lo rappresenta nel piano può muoversi solo lungo una retta fissata dalle sue condizioni iniziali. Ovviamente, la bisettrice $T = |\Omega|$ rappresenta quei sistemi con energia totale nulla; mentre le linee parallele al di sopra di questa rappresenteranno sistemi *non legati*, e le linee parallele

al di sotto rappresenteranno sistemi *legati* (i.e., a energia totale negativa). La prima importante conseguenza che è possibile evincere dalla Figura 2 è che solo i sistemi con energia totale negativa possono essere virializzati, come si nota facilmente dal fatto che solo le rette a energia costante di questa famiglia hanno intersezioni con la retta del viriale. Una definizione più generale di virializzazione estenderebbe il concetto ai sistemi dipendenti dal tempo, e quindi rilasserebbe la severa corrispondenza tra i concetti di equilibrio e virializzazione presentata fino ad adesso, convertendo semplicemente le grandezze fisiche in gioco come grandezze:

$$\langle f \rangle_t \equiv \frac{1}{t} \int_0^t f(\tau) d\tau \quad (29)$$

Se $\exists \lim_{t \rightarrow \infty} \langle f \rangle_t$, questo limite si chiama valore medio di f e mi permette di riscrivere il Teorema del Viriale come:

$$2\langle T \rangle = -\langle \Omega \rangle \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dI}{dt} = o(t) \text{ per } t \rightarrow \infty \quad (30)$$

4.3 La catastrofe gravotermica

Un'analisi dettagliata della stabilità degli ammassi globulari mostra che esistono quattro meccanismi che tendono a slegare le stelle dagli ammassi. Il primo e più diretto è il processo di evaporazione delle stelle dall'ammasso. Un ammasso globulare può essere infatti riguardato come un sistema di particelle autogravitanti (le stelle) che, a causa delle mutue interazioni gravitazionali, sono destinate come di consueto a raggiungere uno stato di equilibrio, equipartendo l'energia tra i vari componenti. I tempi caratteristici per questi scambi di energia, ovvero il tempo di rilassamento, risultano, nel caso degli ammassi globulari galattici, dell'ordine del miliardo di anni, come trovato in 4.1. Così è da presumere che gli ammassi globulari siano «dinamicamente rilassati» e che le velocità tendano a seguire la distribuzione di Maxwell-Boltzmann. Il processo continuo di ridistribuzione delle velocità porta una frazione delle stelle a superare la velocità di fuga, evaporando dall'ammasso.

Si supponga di partire con un sistema virializzato rappresentato dal punto 1 nel piano del viriale in Figura 1 e di assumere che una frazione della sua energia cinetica si perda perché, proprio come nel caso di evaporazione gravitazionale, esso perda una stella. Graficamente, questo è rappresentato dalla freccia $1 \rightarrow 2$; in pratica, il sistema 'si raffredda' a Ω fissato. Il sistema, non più all'equilibrio, non può restare al punto 2: se il sistema è virializzato, l'unica posizione possibile nel piano del viriale si trova al punto 3, corrispondente a una configurazione più concentrata e con una temperatura

più alta. Ovviamente, si vede succedere l'opposto lungo il cammino $1 \rightarrow 4 \rightarrow 5$. Si ritrova nuovamente l'importante risultato che i sistemi autogravitanti sono caratterizzati da un calore specifico negativo. Uno degli effetti della perdita di stelle per evaporazione gravitazionale è dunque la contrazione del sistema, il quale non si stringe in maniera omologa. Infatti, siccome le stelle scappano presumibilmente dal bordo, aumenta il contrasto di densità tra le regioni centrali e le regioni esterne. Questo fenomeno si chiama **catastrofe gravotermica** e i profili di densità degli ammassi globulari che mostrano il decorso di questo fenomeno si chiamano *post-collapse*. A questo punto, nell'ammasso globulare iniziano a formarsi delle binarie in due modi differenti: 3-body captures e tidal captures. Le stelle, che dalla parte esterna entrano nel core, iniziano ad assorbire energia dalle binarie, che hanno una sezione d'urto dinamica molto grande. L'energia spesa a discapito delle binarie, che si avvicinano, può arrestare la contrazione del core dell'ammasso globulare portando ad una riespansione. Si generano in questo modo una serie di contrazioni e riespansioni che si chiamano *oscillazioni gravotermiche*.

Non mi sorprende che analoghe considerazioni possano essere fatte sulle sfere di gas. Una sfera di gas all'equilibrio (i.e., una protostella) con temperatura più alta di quella dell'ambiente circostante, per la II Legge della Termodinamica perde energia attraverso la radiazione: $dE/dt < 0$. Se il processo è lento (dell'ordine del tempo di Kelvin ricavato in 22), allora il suo punto rappresentativo percorrerà la retta del viriale e naturalmente:

$$\frac{d\langle T \rangle}{dt} = -\frac{dE}{dt}; \quad \frac{d\langle \Omega \rangle}{dt} = 2\frac{dE}{dt} \quad (31)$$

La protostella si contrae e si riscalda. Ovviamente, la sua contrazione si arresterà quando finalmente la sua temperatura centrale sarà alta abbastanza da produrre le reazioni nel nucleo. In una bellissima analogia, è possibile pensare che anche la contrazione del nucleo degli ammassi globulari, a causa della catastrofe gravotermica, si arresterà quando l'ammasso brucerà l'energia gravitazionale delle stelle binarie nel nucleo.

5 Galaxy Merging e Structure Collapse

Concludo questa trattazione illustrando due processi particolarmente rilevanti nello studio degli ammassi di galassie, entrambi guidati dalla virializzazione di tali strutture. I fenomeni in questione sono il galaxy **merging** e lo structure **collapse**; rispettivamente: la fusione di due galassie inizialmente distinte, o aloni di materia oscura, e l'evoluzione di un sistema gravitazionalmente legato. Per semplicità, restringo la discussione al caso

non dissipazionale, ovvero al caso in cui la sola gravità è in gioco e non si verificano grossi guadagni o perdite di energia. Nonostante questa riduzione del problema, infatti, si può comunque giungere a una buona rappresentazione della realtà fisica considerando solo il Teorema del Viriale e tre delle più importanti leggi scalari empiriche a cui obbediscono le galassie ellittiche, elencate di seguito:

$$\text{Legge di Faber – Jackson (1976)} \quad L \propto \sigma_o^\alpha, \alpha \approx 4 \quad (32)$$

$$\text{Legge di Kormendy (1977)} \quad L \propto R_e^\beta, \beta \lesssim 1 \quad (33)$$

$$\text{Relazione } M_{BH} - \sigma \text{ (2000)} \quad M_{BH} \propto M_\star; \quad M_{BH} \propto \sigma_o^\gamma, \gamma \approx 4 \div 5 \quad (34)$$

Per studiare il merging, considero due sistemi stellari autogravitanti e virializzati, con una separazione inizialmente più grande delle loro dimensioni; cosicché risulti, a un tempo iniziale:

$$E_{i1} = -T_{i1} = 2U_{i1}; \quad E_{i2} = -T_{i2} = 2U_{i2} \quad (35)$$

Durante la fusione, si assume che non avvengano perdite di massa ma che si registri solo un piccolo guadagno di energia in termini di ΔE . Se impongo che anche il prodotto finale sia virializzato, allora trovo che $E_f = -T_f = 2U_f$. Considerata un'energia finale $E_f = E_{i1} + E_{i2} + \Delta E$ e nel rispetto del principio di conservazione dell'energia, si può scrivere che, in termini di energia cinetica:

$$T_f = -E_f = T_{i1} + T_{i2} - \Delta E \Rightarrow \sigma_{\mathbf{vf}}^2 = \frac{\mathbf{M}_1 \sigma_{\mathbf{v1}}^2 + \mathbf{M}_2 \sigma_{\mathbf{v2}}^2}{\mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2} - \frac{2\Delta E}{\mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2} \quad (36)$$

mentre in termini di energia potenziale:

$$U_f = \frac{E_f}{2} = U_{i1} + U_{i2} + \frac{\Delta E}{2} \Rightarrow \frac{1}{\mathbf{r}_{\mathbf{vf}}} = \frac{\mathbf{M}_1^2/\mathbf{r}_{\mathbf{v1}} + \mathbf{M}_2^2/\mathbf{r}_{\mathbf{v2}}}{(\mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2)^2} - \frac{\Delta E}{2\mathbf{G}(\mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2)^2} \quad (37)$$

Ho così ottenuto le espressioni della dispersione di velocità del sistema finale e del suo raggio viriale. Nonostante σ_V e r_V siano, di consueto, delle quantità legate alla dispersione di velocità osservata e al raggio effettivo; 36 e 37 impongono importanti restrizioni agli scenari di formazione galattica, vista la particolare difficoltà con cui aumenta la dispersione di velocità al confronto con il raggio viriale. Ovviamente, seppur qui trascurata, l'ulteriore dissipazione di energia che si registrerebbe per via della presenza dei gas contribuirebbe ad aumentare la dispersione della velocità e la contrazione del raggio.

Seppur qualitativamente, voglio parlare anche del secondo fenomeno citato, ovvero del collasso di una struttura legata, autogravitante e non dissipazionale, con delle condizioni iniziali 'fredde'. Per farlo, mi piacerebbe riportare i risultati ottenuti da uno

studio sugli ammassi di galassie, *The scaling relations of galaxy clusters and their dark matter halos*[4](2003), con onorevole menzione a uno dei miei professori di triennale, Luca Ciotti, che ha lavorato a questa ricerca e che ringrazio per la sua professionalità e gentilezza. Da un campione di 16 ammassi a redshift $z \leq 0.2$ osservati in banda V, sono state ricavate le seguenti relazioni:

$$L \propto \sigma^{2.18 \pm 0.52} \quad (38)$$

$$L \propto R_e^{1.55 \pm 0.19} \quad (39)$$

dove L è espresso in unità di $10^{12} L_\odot/h$, σ in unità di 1000 km/s e R_e in Mpc/h ($H_0 = 100h \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$, $h = 1$) e gli errori sugli esponenti tengono in considerazione anche le incertezze sulle osservazioni. La disposizione di questo campione, attorno a 38 e 39, è riportata in Figura 3. Nonostante queste relazioni sembrano corrispondere alle leggi di Faber-Jackson e di Kormendy rispettivamente, è opportuno notare che le pendenze trovate per questi ammassi differiscono da quelle seguite di consueto dalle galassie, se prese singolarmente; fatta l'osservazione che i valori di R_e e di σ dipendano in modo più o meno pronunciato dalla banda di osservazione. Al contempo, i 13 aloni massicci di materia oscura che sono stati utilizzati nella ricerca, che si pensa siano le strutture ospitanti gli ammassi di galassie, sono stati ottenuti da simulazioni ad alta risoluzione in una cosmologia ΛCDM , con parametri cosmologici $\Omega_m = 0.3$ e $\Omega_\Lambda = 0.7$. Lo *spherical top-hat model* sugli aloni di materia oscura predice che essi a un certo punto siano collassati e virializzati; i.e., $M = r_{\text{vir}} \sigma_{\text{vir}}^2 / G$. Inoltre, tutti gli aloni vengono caratterizzati da una densità media costante ρ_Δ , data dalla densità critica dell'Universo a dato redshift per un fattore Δ dipendente da z e dai parametri cosmologici adottati. Per semplicità, sia r_Δ il raggio della sfera che contiene una tale densità media cosicché $M \propto r_\Delta^3$. In generale, $r_{\text{vir}} \neq r_\Delta$ ma, per una famiglia con distribuzione di densità $r_{\text{vir}}/r_\Delta \simeq \text{cost}$, il Teorema del Viriale può essere riscritto come:

$$M \propto r_\Delta \sigma_{\text{vir}}^2 \quad \rightarrow \quad M \propto \sigma_{\text{vir}}^3 \quad \text{se } M \propto r_\Delta^3 \quad (40)$$

Questo risultato mostra perché la dispersione di velocità degli aloni di materia oscura ottenuta nelle simulazioni cosmologiche aumenta con la massa dell'alone, un fenomeno che non si verifica nel caso troppo semplicistico, in cui grossi aloni si formano semplicemente dalla fusione di piccoli aloni simili, che non riproduce correttamente le relazioni di FJ e di Kormendy.

Alla domanda se gli aloni di materia oscura di grande massa siano responsabili della determinazione delle relazioni scalari osservate per gli ammassi vicini, gli autori della ricerca hanno risposto che *il modello di collasso cosmologico, unitamente a un aumento*

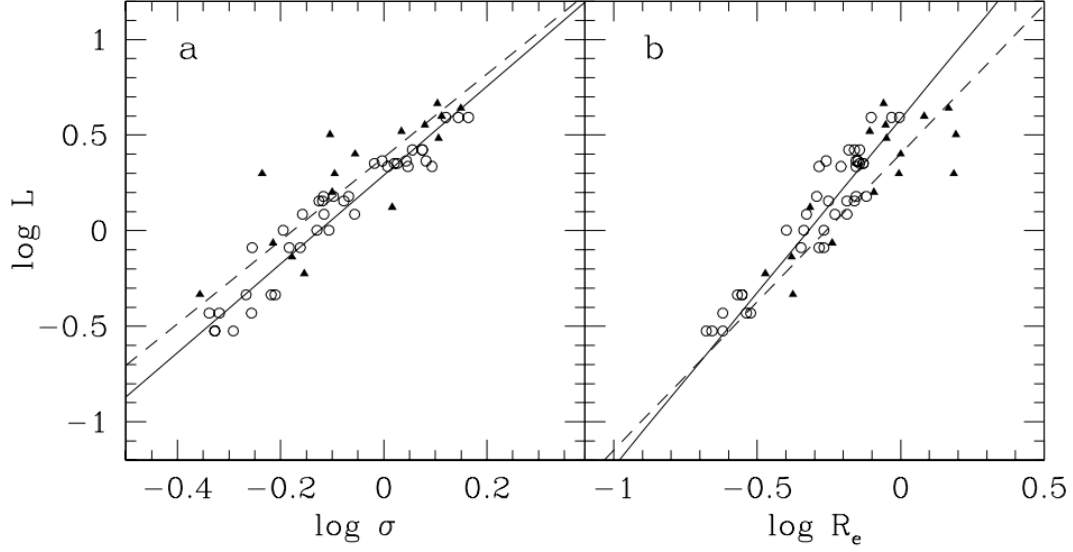


Figura 3: **Pannello a**: FJ per gli ammassi osservati (triangoli pieni) e gli aloni di DM (cerchi vuoti) descritti da un rapporto massa-luminosità $\Upsilon = 280h \{M/(10^{14}M_{\odot}/h)\}^{0.23} M_{\odot}/L_{\odot}$. La relazione di best-fit corrispondente alla retta tratteggiata è $L \propto \sigma^{2.18}$, mentre si è usato $L \propto \sigma^{2.32}$ per plottare la retta continua. **Pannello b**: La relazione di Kormendy per gli stessi oggetti del **Pannello a**. In questo caso, le relazioni di best-fit sono $L \propto R_e^{1.55}$ per gli ammassi (retta tratteggiata) e $L \propto R_e^{1.82}$ per gli aloni di DM (retta continua). Ogni alone di DM è rappresentato da 3 cerchi vuoti corrispondenti a 3 differenti linee di vista. Le luminosità sono normalizzate a $10^{12}L_{\odot}/h$, le dispersioni di velocità sono espresse in 1000 km/s e i raggi in Mpc/h . Fonte: *The scaling relations of galaxy clusters and their dark matter halos*[4].

del rapporto massa-luminosità in funzione della massa dell'ammasso, sembrano essere sufficienti a giustificare la loro esistenza e validità. Al contempo, non si esclude che le leggi che seguono le galassie ellittiche siano il risultato del collasso cosmologico delle fluttuazioni di densità, all'epoca in cui le scale galattiche divennero non-lineari, combinato alle successive modifiche apportate dall'early-time merging dissipativo.

A Appendice

A.1 L'approssimazione impulsiva e il calcolo del tempo di rilassamento a due corpi

L'approccio standard adottato per il calcolo del tempo di rilassamento si basa su due assunzioni:

1. Tutti gli incontri tra le particelle si trattano come fenomeni indipendenti, e quindi l'effetto di ogni incontro viene semplicemente sommato a quello degli altri.
2. Tutti gli incontri tra le particelle sono visti come collisioni iperboliche a due corpi.

Come già detto, sia $f = f(\mathbf{x}_f, \mathbf{v}_f)$ la phase-space distribution function del sistema, che per semplicità si assume essere composto da stelle di massa identica m_f . Se si impone, inoltre, che la massa di test m_t a $t = -\infty$ abbia posizione iniziale $\mathbf{x}_t(-\infty)$ e velocità iniziale $\mathbf{v}_t(-\infty)$, l'ipotesi di interazione iperbolica risulta sempre soddisfatta. Per ogni coppia (m_t, m_f) , sia μ la massa ridotta e $\mathbf{r}(t) = \mathbf{x}_t(t) - \mathbf{x}_f(t)$ e $\mathbf{v}(t) = \mathbf{v}_t(t) - \mathbf{v}_f(t)$, rispettivamente, la posizione relativa e la velocità relativa di m_t al tempo t rispetto a una certa m_f . Inoltre, siano: $\mathbf{v}(\pm\infty)$ la velocità relativa asintotica delle due particelle (ovvero le loro velocità relative per $t \rightarrow \pm\infty$), $\Delta\mathbf{v} = \mathbf{v}(\infty) - \mathbf{v}(-\infty)$ la variazione totale della loro velocità relativa e $\mathbf{J}' = \mu\mathbf{r}(t) \wedge \mathbf{v}(t)$ e $E' = \mu\|\mathbf{v}(t)\|^2/2 - Gm_t m_f / \|\mathbf{r}(t)\|$ il momento angolare totale (costante) e l'energia totale della coppia nel sistema di riferimento inerziale del loro centro di massa. Il parametro di impatto dell'orbita risultante è descritto dall'equazione $\|\mathbf{J}'\| = \mu b \|\mathbf{v}(-\infty)\|$, $\|\mathbf{v}(\infty)\| = \|\mathbf{v}(-\infty)\|$ e la velocità relativa finale $\mathbf{v}(\infty)$ ruota rispetto alla direzione della velocità relativa iniziale $\mathbf{v}(-\infty)$ di un angolo $2\Delta\varphi - \pi$. Fatte queste premesse, l'idea alla base del calcolo del tempo di rilassamento a due corpi è quella di valutare la somma degli effetti di tutte le interazioni a due corpi nel caso ideale di assenza delle restanti $N - 2$ stelle e di stabilire una certa soglia, cosicché quando questo effetto supera questo limite, si dirà essere trascorso un tempo di rilassamento. Qui si vuole seguire l'approccio più semplice, che consiste nell'analisi delle variazioni dell'energia cinetica associate alla componente perpendicolare della velocità della particella di test rispetto alla velocità relativa iniziale.

Si ripeta nuovamente che nel caso di distribuzione spazialmente omogenea e isotropa sulle velocità:

$$f = f(\mathbf{x}_f, \mathbf{v}_f) = n_f g(v_f), \quad v_f \equiv \|\mathbf{v}_f\| \quad e \quad 4\pi \int_0^\infty g(v_f) v_f^2 dv_f = 1 \quad (41)$$

Semplici considerazioni geometriche mostrano che in approssimazione impulsiva, in un intervallo di tempo Δt il numero di incontri con le particelle del campo all'interno

di un volume di velocità differenziale $d^3\mathbf{v}_f$ attorno a $\mathbf{v}_f$, e con parametro di impatto compreso tra b e $b + db$, è:

$$\Delta n_{enc} = 2\pi b db \times \|\mathbf{v}_t - \mathbf{v}_f\| \Delta t \times n_f g(v_f) d^3\mathbf{v}_f \quad (42)$$

A questo punto, posso finalmente introdurre il concetto di *coefficiente di diffusione*, che per una qualsiasi proprietà orbitale P della stella di test, si definisce:

$$D(P) = 2\pi n_f \int_{\mathbb{R}^3} g(v_f) \|\mathbf{v}_t - \mathbf{v}_f\| d^3\mathbf{v}_f \int_0^\infty \langle P \rangle b db \quad (43)$$

In pratica $D(P)$ misura il tasso di cambiamento temporale della proprietà P dell'orbita per il risultato degli effetti accumulati degli incontri con le stelle del campo.

Si supponga di aver risolto il problema dei due corpi relativo a un singolo incontro, e quindi di aver trovato le espressioni di $\Delta\mathbf{v}_\perp$ e di $\Delta\mathbf{v}_\parallel$ dell'orbita relativa, per cui:

$$\Delta\mathbf{v}_{t\perp} = \frac{\mu}{m_t} \Delta\mathbf{v}_\perp; \quad \Delta\mathbf{v}_{t\parallel} = \frac{\mu}{m_t} \Delta\mathbf{v}_\parallel \quad (44)$$

Non è difficile notare che in una distribuzione di stelle omogenea e isotropa, $D(\mathbf{v}_\perp) = D(\mathbf{v}_{t\perp}) = 0$; per questa ragione si decide di lavorare con delle quantità del secondo ordine e i relativi coefficienti di diffusione. In questo caso specifico:

$$D(\|\Delta\mathbf{v}_{t\perp}\|^2) = \frac{\mu^2}{m_t^2} D(\|\Delta\mathbf{v}_\perp\|^2) \quad (45)$$

Dopo ogni incontro della nostra stella di test con una stella di campo, nel limite per grandi parametri di impatto, il cambiamento nella velocità relativa perpendicolare alla velocità relativa iniziale $\mathbf{v}(-\infty)$ si esprime come:

$$\mu \|\Delta\mathbf{v}_\perp\| \sim \frac{Gm_t m_f}{b^2} \frac{2b}{v}, \quad v = \|\mathbf{v}(-\infty)\| \quad (46)$$

da cui trovo che:

$$\|\Delta\mathbf{v}_{t\perp}\|^2 = \frac{\mu^2}{m_t^2} \|\Delta\mathbf{v}_\perp\|^2 \sim \frac{4G^2 m_f^2}{b^2 v^2}, \quad b \rightarrow \infty \quad (47)$$

Finalmente 43 si riduce a:

$$D(\|\Delta\mathbf{v}_{t\perp}\|^2) \sim 8\pi G^2 n_f m_f^2 \int_{\mathbb{R}^3} \frac{g(v_f)}{v} d^3\mathbf{v}_f \int_0^\infty \frac{db}{b} \quad (48)$$

La doppia divergenza logaritmica del parametro di impatto:

$$\int_0^\infty \frac{db}{b} = \ln b|_0^\infty = \infty - (-\infty) = \infty \quad (49)$$

a $b = 0$ è stata rinominata *divergenza ultravioletta*; mentre a $b = \infty$ prende il nome di *divergenza infrarossa*. Entrambe queste divergenze scompaiono ammettendo che l'integrale del parametro d'impatto sia limitato tra due valori limite, un minimo e un massimo, come mostrato in 50.

$$\int_{b_{\min}}^{b_{\max}} \frac{db}{b} = \ln \frac{b_{\max}}{b_{\min}} = \ln \Lambda \quad (50)$$

Sono quindi finalmente giunta alla definizione operativa del logaritmo di Coulomb. Dopo aver integrato sul parametro di impatto, è possibile integrare sullo spazio delle velocità la nuova variabile introducendo il *logaritmo di Coulomb pesato sulle velocità* $\ln \bar{\Lambda}$:

$$\int_{\mathbb{R}^3} \frac{g(v_f) \ln \Lambda}{\|\mathbf{v}_t - \mathbf{v}_f\|} d^3 v_f \equiv \Psi(v_t) \ln \bar{\Lambda} \quad (51)$$

dove ho definito il potenziale di Rosenbluth $\Psi(v_t)$. La condizione di normalizzazione sulla funzione g mostra che per grandi valori di v_t rispetto alle velocità caratteristiche delle stelle di campo, questo potenziale è dominato dal termine di 'monopolo' $1/v_t$. In sintesi:

$$D(\|\Delta \mathbf{v}_{t\perp}\|^2) \sim 8\pi G^2 n_f m_f^2 \ln \bar{\Lambda} \Psi(v_t) \quad (52)$$

L'effetto cumulato degli incontri è quindi quello di riscaldare la particella di test nella direzione perpendicolare alla velocità relativa iniziale. Il tempo caratteristico associato a questo 'riscaldamento' si definisce in modo naturale essere:

$$t_{2b} \equiv \frac{E_t(-\infty)}{D(\Delta E_{t\perp})} \sim \frac{v_t^2}{8\pi G^2 n_f m_f^2 \ln \bar{\Lambda} \Psi(v_t)} \sim \frac{v_t^3}{8\pi G^2 n_f m_f^2 \ln \bar{\Lambda}} \quad (53)$$

nonché esattamente il tempo di rilassamento a due corpi che avevo scritto in 25. L'ultima espressione la si intende essere valida al limite per grandi v_t . Dal momento che per grandi Λ la formula di $D(\|\Delta \mathbf{v}_{t\parallel}\|^2)$ si dimostra essere:

$$D(\|\Delta \mathbf{v}_{t\parallel}\|^2) \sim 4\pi G^2 n_f m_f^2 \Psi(v_t) \quad (54)$$

(ovvero è trascurabile se confrontato con 52) la scelta di considerare solo la componente perpendicolare nella definizione di tempo di rilassamento è asintoticamente corretta.

Riferimenti bibliografici

- [1] CASTELLANI, Vittorio, 1985. *Astrofisica stellare. I fondamenti fisici dell'interpretazione evolutiva di stelle e galassie*. Nicola Zanichelli S.p.A., Bologna
- [2] CESTER, Bruno, 1984. *Corso di Astrofisica*. 4^a ed. Ulrico Hoepli Editore S.p.A., Milano
- [3] CIOTTI, Luca, 2021. *Introduction to Stellar Dynamics*. Cambridge University Press, Cambridge
- [4] LANZONI B., CIOTTI L. et al. *The scaling relations of galaxy clusters and their dark matter halos*. 2003