

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

Dipartimento di Fisica e Astronomia
Corso di Laurea in Fisica

**Analisi statistica delle spazature tra
livelli di risonanza di ^{166}Er : confronto
con il Gaussian Orthogonal Ensemble**

Relatore:

Prof. Cristian Massimi

Presentata da:

Mira Zoffoli

Correlatore:

Dott. Alberto Mengoni

Anno Accademico 2025/2026

Indice

Introduzione	4
1 Fisica neutronica	7
1.1 Interazioni neutroni-materia	7
1.1.1 Processi di scattering	8
1.1.2 Processi di assorbimento	9
1.2 Sezione d'urto e cattura radiativa	16
1.3 Proprietà statistiche degli stati nucleari eccitati	21
1.3.1 Regimi di risonanza	21
1.3.2 Energia di risonanza E_0	22
1.3.3 Larghezza di risonanza Γ	22
1.3.4 Average Level Spacing D	24
2 n_TOF	28
2.1 La facility	28
2.1.1 Time of Flight	29
2.1.2 Yield di cattura	32
2.2 Misure e analisi della sezione d'urto di ^{166}Er e ^{167}Er	33
2.2.1 Setup sperimentale	36
2.2.2 Descrizione dell'attività	39
3 Analisi dati	41
3.1 Level spacing sperimentale	42
3.2 D_{best}	44
3.3 Conteggio cumulativo	47
Conclusioni	52

Introduzione

In fisica nucleare lo studio e le misure di reazioni, in particolar modo delle sezioni d'urto di reazioni indotte da neutroni, oltre a fornire informazioni sulla struttura nucleare, sono fondamentali per la ricerca in ambito tecnologico. Di particolare rilevanza sono le misure di cattura radiativa (n, γ) , nelle quali il neutrone viene assorbito dal nucleo bersaglio formando un nucleo composto in uno stato eccitato. Ad energie di eccitazione sufficientemente elevate, la densità dei livelli nucleari diventa così alta da rendere necessaria una descrizione statistica dei fenomeni.

Le proprietà statistiche delle risonanze vengono descritte attraverso il Gaussian Orthogonal Ensemble (GOE), che prevede che le spazature tra livelli adiacenti seguano la distribuzione di Wigner. Questa è caratterizzata dalla repulsione dei livelli, per cui la probabilità di trovare due livelli ravvicinati è fortemente soppressa. Lo studio delle proprietà statistiche è particolarmente rilevante nel contesto applicativo della produzione energetica attraverso fissione nucleare in centrali nucleari di nuova generazione. In particolare, recentemente è emersa la necessità di studiare le sezioni d'urto dell'erbio, possibile sostituto del gadolinio come veleno bruciabile all'interno degli elementi di assorbimento neutronico nei combustibili nucleari. Nonostante la sua rilevanza infatti, le sezioni d'urto di cattura degli isotopi naturali dell'erbio presentano incertezze non trascurabili nelle librerie nucleari valutate, rendendo necessarie misure ad alta risoluzione energetica.

I dati sperimentali utilizzati in questa tesi sono stati acquisiti presso la facility n_TOF del CERN, la quale sfrutta la tecnica del Time of Flight per misurare le sezioni d'urto neutroniche in funzione dell'energia con elevata risoluzione su un ampio intervallo energetico. Tali dati sono stati utilizzati per eseguire un'analisi

INDICE

statistica delle spaziatore tra livelli di risonanza di ^{166}Er , al fine di confrontarle con la distribuzione teorica di Wigner.

Nel Capitolo 1 vengono introdotti i fondamenti della fisica neutronica, descrivendo le principali interazioni neutroni-materia, il formalismo di Breit-Wigner per la cattura risonante e le proprietà statistiche degli stati nucleari eccitati nel contesto del GOE. Il Capitolo 2 descrive la facility n_TOF e il setup sperimentale utilizzato per le misure su ^{166}Er ed altri isotopi. Il Capitolo 3 presenta l'analisi statistica delle spaziatore tra livelli di risonanza, il confronto con la distribuzione di Wigner e la stima della spaziatore media $\langle D \rangle$ tramite diversi metodi. Seguono poi le conclusioni, in cui viene brevemente esposto l'esito dell'analisi svolta.

Capitolo 1

Fisica neutronica

1.1 Interazioni neutroni-materia

I neutroni sono particelle elettricamente neutre che non risentono della barriera Coulombiana. La natura elettricamente neutra del neutrone gli conferisce una capacità elevata di penetrazione nella materia e consente un'interazione con i nuclei atomici mediata dalla forza nucleare forte, caratterizzata da un raggio d'azione dell'ordine di 10^{-15} m. Questa proprietà rende il neutrone una sonda particolarmente efficace per lo studio della struttura della materia, inclusi gli atomi più leggeri, rappresentando un vantaggio significativo rispetto ad altre tecniche di indagine con sensibilità strutturale diretta nella fisica nucleare.

Di grande importanza è inoltre la sensibilità isotopica del neutrone, caratteristica che permette di distinguere tra isotopi diversi dello stesso elemento, anche a parità di numero atomico.

In particolare, le lunghezze di scattering coerente dei neutroni sono quantità nucleari fondamentali che rappresentano il collegamento tra le sezioni d'urto misurate da un lato e le funzioni d'onda e il potenziale nucleare dall'altro. Le lunghezze di diffusione possono dunque far luce sui modelli teorici che trattano l'interazione neutrone-nucleo.

Le interazioni tra neutrone e nucleo possono essere suddivise in processi di scattering e di assorbimento.

Nel primo caso, il neutrone viene diffuso senza che venga alterata la composizione

del nucleo bersaglio, si distinguono lo scattering elastico e lo scattering anelastico. Nel caso dell'assorbimento, invece, il neutrone viene catturato e si forma un nucleo composto, che può decadere attraverso diversi canali, tra cui la cattura radiativa (n, γ) o reazioni nucleari come (n, p), (n, α), ($n, 2n$) e la fissione.

La probabilità che si verifichi una determinata interazione tra un neutrone e un nucleo è descritta dalla sezione d'urto, indicata convenzionalmente con σ . Questa grandezza permette di collegare processi microscopici a grandezze macroscopiche misurabili.

La sezione d'urto totale può essere espressa come somma dei contributi dei diversi processi:

$$\sigma_{\text{tot}} = \sigma_{\text{cattura}} + \sigma_{\text{scatt}} + \sigma_{\text{fissione}} + \dots \quad (1.1)$$

La sezione d'urto ha le dimensioni di una superficie ed è espressa in barn (b), dove:

$$1 \text{ b} = 10^{-24} \text{ cm}^2. \quad (1.2)$$

Una discussione più dettagliata della sezione d'urto verrà affrontata nella sezione 1.2.

1.1.1 Processi di scattering

Scattering elastico

Nel caso in cui i nuclei di atomi o molecole del campione possano acquisire, tramite urto con un neutrone, un'energia complessiva (che sia essa traslazionale, rotazionale e vibrazionale) molto piccola rispetto all'energia del fascio di neutroni, allora l'energia del neutrone rimane pressoché invariata ($E_i \approx E_f$) e si parla di scattering elastico. Lo scattering elastico si ha dunque in condizioni in cui l'energia del neutrone incidente è molto maggiore di quella scambiata con il campione.

A grandi distanze dal centro di scattering, la funzione d'onda che descrive il neutrone incidente e quello diffuso elasticamente può essere scritta nella forma:

$$\psi(r) = e^{ikz} + f(\theta) \frac{e^{ikr}}{r} \quad (1.3)$$

dove $f(\theta)$ descrive l'ampiezza dell'onda diffusa nella direzione θ rispetto al fascio incidente.

É proprio grazie all'ampiezza di scattering $f(\theta)$ che è possibile definire la sezione d'urto differenziale, ovvero la probabilità che il neutrone venga diffuso in una certa direzione solida $d\Omega$:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(\theta)|^2 \quad (1.4)$$

All'interno di questa equazione si possono identificare due contributi ben distinti:

- **Onda incidente** (e^{ikz}): questo termine rappresenta il neutrone che si avvicina al nucleo bersaglio come un'onda piana che viaggia lungo l'asse z , in cui $k = 2\pi/\lambda$ è il numero d'onda del neutrone.
- **Onda diffusa** ($f(\theta)\frac{e^{ikr}}{r}$): questo contributo descrive il neutrone che si allontana dal centro di scattering dopo l'interazione come un'onda sferica. Il termine $1/r$ indica che l'ampiezza dell'onda diminuisce con la distanza, come previsto per un'onda che si espande sfericamente.

Scattering anelastico

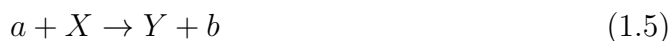
Nel caso in cui invece il neutrone scambia energia con il campione bersaglio, si parla di scattering anelastico. Ciò significa che il vettore d'onda del neutrone cambia sia in modulo che in direzione, a seguito del processo di diffusione.

1.1.2 Processi di assorbimento

Nei processi di assorbimento il neutrone viene incorporato nel nucleo, formando uno stato composto in uno stato di eccitazione. Tale stato, essendo instabile, può decadere indipendentemente dal meccanismo di formazione, dando origine a diversi canali di uscita quali cattura radiativa e reazioni nucleari.

La cattura neutronica viene utilizzata come mezzo completo di spettroscopia degli stati eccitati in quanto rende possibile conoscere il loro numero e posizione.

Una tipica reazione assume la forma:

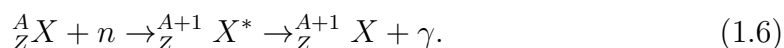


dove a è il proiettile accelerato, X è il bersaglio (generalmente fermo nel sistema di riferimento del laboratorio), Y e b sono i prodotti della reazione. Solitamente Y è un prodotto pesante che si ferma nel bersaglio e non viene osservato direttamente, mentre b è una particella leggera che può essere rivelata e misurata. In generale a e b sono nucleoni o nuclei leggeri, ma può capitare che b sia un raggio γ , nel qual caso la reazione è detta cattura radiativa. (Se a è un raggio γ , la reazione è detta effetto foto-nucleare.)

Un modo alternativo e compatto di indicare la stessa reazione è $X(a,b)Y$ perché permette di riferirsi a una classe generale di reazioni con proprietà comuni, per esempio (n,γ) .

Cattura radiativa (n,γ)

Sebbene sia naturalmente possibile riemettere il neutrone, per nuclei pesanti e neutroni incidenti a energia molto bassa questo tipo di decadimento dello stato composto o risonante è soppresso, e l'emissione γ è il processo di decadimento più probabile. Nei processi di cattura radiativa il neutrone assorbito dal nucleo bersaglio forma insieme ad esso un nucleo composto in uno stato eccitato che decade successivamente attraverso l'emissione di raggi γ . Il processo può essere schematizzato come:



La descrizione quantitativa della sezione d'urto per la cattura radiativa, nel contesto di risonanze isolate, è data dal formalismo di Breit-Wigner.

La formula generale di Breit-Wigner è data da:

$$\sigma(E) = \frac{\pi}{k^2} \frac{2J+1}{(2I+1)(2s+1)} \frac{\Gamma_n \Gamma_\gamma}{(E - E_r)^2 + \left(\frac{\Gamma}{2}\right)^2} \quad (1.7)$$

CAPITOLO 1. FISICA NEUTRONICA

Dove k è il numero d'onda del neutrone incidente, J è lo spin dello stato composto e I è lo spin del nucleo bersaglio.

Includendo la dipendenza energetica del flusso neutronico di cattura, essa è espressa come:

$$\sigma_{\gamma}(E) = \sigma_0 \frac{\Gamma_{\gamma}}{\Gamma} \left(\frac{E_0}{E} \right)^{1/2} \frac{1}{1 + y^2} \quad (1.8)$$

dove il parametro di risonanza y è definito come:

$$y = \frac{2}{\Gamma} (E - E_0) \quad (1.9)$$

dove $E_0 \equiv E_r$ indica l'energia della risonanza considerata, mentre $\Gamma = \Gamma_n + \Gamma_{\gamma} + \dots$ indica la larghezza totale del livello composto, somma dunque dei contributi parziali associati ai diversi canali di decadimento.

Il fattore di ampiezza σ_0 è definito come:

$$\sigma_0 = 4\pi\lambda_0^2 g \frac{\Gamma_n}{\Gamma}, \quad (1.10)$$

in cui λ_0 è la lunghezza d'onda del neutrone incidente e g è il fattore statistico di spin:

$$g = \frac{2J + 1}{(2I + 1)(2s + 1)}. \quad (1.11)$$

Reazioni a particelle cariche

Oltre alla cattura radiativa, un nucleo composto può dare vita a reazioni ad emissione di particelle cariche come protoni, particelle α o nuclei leggeri.

In particolare, l'emissione di particelle cariche è inibita dalla barriera coulombiana ed è improbabile che avvenga se non nei nuclei molto leggeri.

Fissione

La fissione è principalmente il risultato della competizione tra le forze nucleari e le forze coulombiane nei nuclei pesanti. L'energia totale di legame nucleare aumenta approssimativamente in proporzione ad A , mentre l'energia repulsiva coulombiana

dei protoni aumenta più rapidamente, come Z^2 . Sebbene qualsiasi nucleo possa fissionare se viene fornita sufficiente energia di eccitazione, in pratica il processo è in realtà importante solo per nuclei pesanti (dal torio in poi).

La preferenza energetica dei nuclei a fissionare si può comprendere a partire dall'energia di legame per nucleone.

Un nucleo pesante nella regione dell'uranio ha un'energia di legame di circa 7.6 MeV per nucleone. Se ^{238}U si dividesse in due frammenti uguali con $A=119$, la loro energia di legame per nucleone sarebbe circa 8.5 MeV.

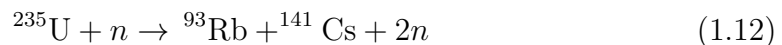
Passare a un sistema più fortemente legato significa che deve essere rilasciata energia. L'energia varia dunque da ^{238}U , legato a -1809 MeV, a due nuclei ^{119}Pd , legati a -2033 MeV.

Per conservare l'energia, lo stato finale deve includere un'energia extra di 214 MeV, che può apparire in varie forme (neutroni, emissioni β e γ dai frammenti), ma che appare principalmente ($\sim 80\%$) come energia cinetica dei frammenti, mentre la repulsione coulombiana li spinge ad allontanarsi.

L'altezza della barriera coulombiana è quasi uguale all'energia rilasciata nella fissione dei nuclei pesanti. Esistono infatti nuclei per i quali il rilascio energetico pone i due frammenti appena sotto la barriera coulombiana, rendendo più probabile l'attraversamento. Questi nuclei vengono denominati a fissione spontanea, nei quali la fissione compete con successo con altri processi di decadimento. Esistono anche nuclei per cui lo stato separato sarebbe sopra la barriera e che quindi fissionerebbero immediatamente: tali nuclei non esistono però in natura.

Altri nuclei possono essere abbastanza sotto la barriera da non fissionare spontaneamente, ma l'assorbimento di una piccola energia (neutrone lento o fotone) può portarli sopra la barriera e causare fissione indotta.

Una tipica reazione di fissione indotta da neutroni è:



che è possibile per neutroni incidenti di energia termica.

Come si nota in Fig.1.1, la distribuzione delle masse dei frammenti di fissione risulta essere simmetrica rispetto al centro: per ogni frammento pesante deve esi-

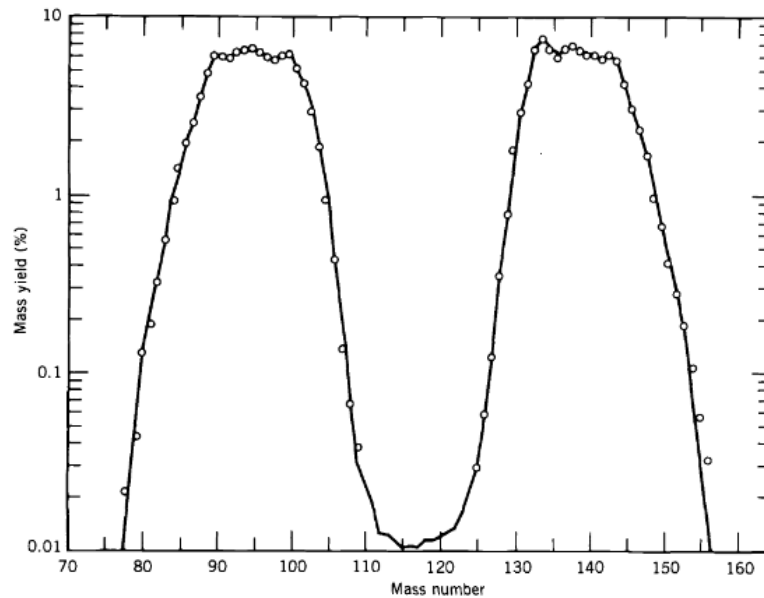


Figura 1.1: Distribuzione di massa dei frammenti di fissione dalla fissione termica di ^{235}U . Da notare la simmetria delle distribuzioni dei frammenti pesanti e leggeri, anche nelle piccole variazioni vicino ai massimi, Ref.[6].

stere un frammento leggero corrispondente, ma si noti che la fissione in frammenti uguali o quasi uguali ($A_1=A_2$) è meno probabile di un fattore circa 600 rispetto allo yield massimo dei frammenti con $A \approx 140$.

Durante la fissione i neutroni, che sono in eccesso nei prodotti della reazione, vengono emessi in due momenti. Inizialmente sono emessi i neutroni *prompt*, entro circa 10^{-16}s , successivamente vengono emessi neutroni ritardati (nell'ordine di qualche secondo), in seguito al decadimento β dei frammenti di fissione.

In Fig.1.2 è possibile vedere graficamente l'andamento delle sezioni d'urto per la fissione indotta da neutroni per ^{235}U e ^{238}U .

Reazione (n, α)

In questa reazione, che è fortemente soppressa in nuclei molto pesanti, dopo l'assorbimento del neutrone, viene emessa una particella α (^4He).



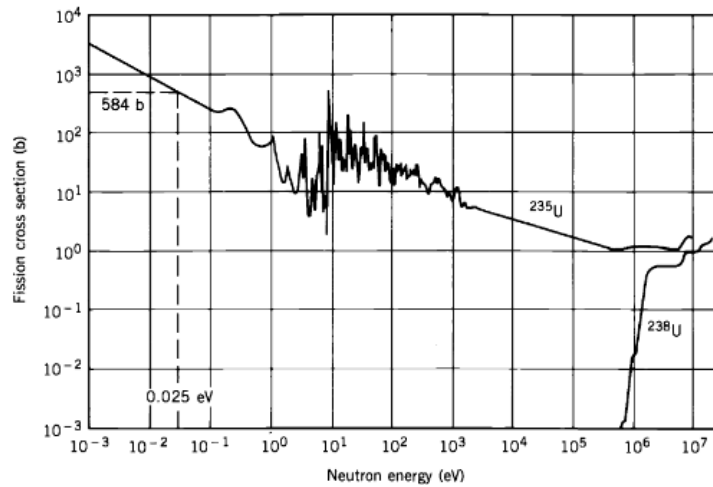
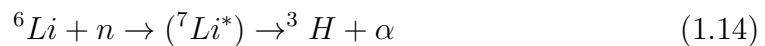


Figura 1.2: Sezione d'urto per fissione indotta da neutroni per ^{235}U e ^{238}U , Ref.[6].

Di particolare importanza è la reazione del ^6Li :



Questa reazione è fortemente esotermica, avviene infatti molto facilmente anche con neutroni lenti, ed è caratterizzata da una sezione d'urto molto elevata. Viene dunque utilizzata nei rivelatori di neutroni (scintillatori): qui le particelle α e il trizio depositano energia per ionizzazione e generano luce o carica (nel caso dei semiconduttori). L'energia è infatti fissata (≈ 4.78 MeV) e il picco energetico è chiaro e marcato.

Come si può vedere in Fig.1.3, la sezione d'urto della reazione $^6\text{Li}(n,\alpha)$ mostra un andamento $1/v$ nella regione dei neutroni termici, seguito da una diminuzione con l'energia e dalla comparsa di una struttura risonante associata agli stati eccitati del nucleo composto ^7Li , in accordo con le valutazioni ENDF (Evaluated Nuclear Data File), che raccoglie sezioni d'urto nucleari.

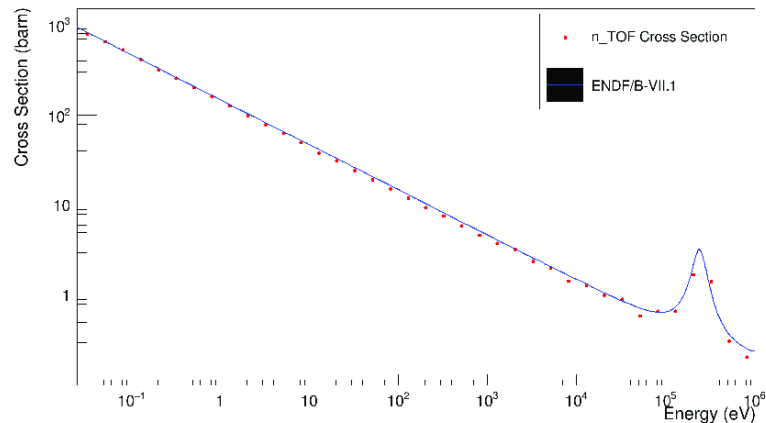
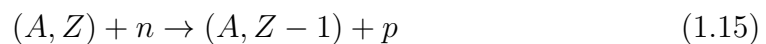


Figura 1.3: Confronto tra la sezione d’urto misurata per ${}^6\text{Li}$ alla facility n_TOF e la valutazione della libreria di dati ENDF/B-VII.1, Ref.[5].

Reazione (n,p)

Quando, successivamente all’assorbimento da parte del nucleo di un neutrone, avviene l’emissione di un protone, si determina la reazione (n,p).



Dove, nel canale di uscita, il numero di massa A rimane costante, mentre il numero atomico diminuisce di 1 a causa della perdita del protone, portando alla trasformazione in un elemento differente. Ad esempio, ${}^{32}\text{S}$ subisce questa reazione nucleare quando bombardato con neutroni, formando così ${}^{32}\text{P}$. La maggior parte delle reazioni (n,p) presenta energie di soglia dei neutroni al di sotto delle quali la reazione non può avvenire poichè la particella carica nel canale di uscita richiede energia (di solito più di 1 MeV) per superare la barriera coulombiana sperimentata dal protone emesso. Solamente la reazione ${}^{14}\text{N}(n,p){}^{14}\text{C}$ non segue questa regola, in quanto può avvenire a qualunque energia dei neutroni incidenti ed è responsabile di una parte sensibile della dose di radiazione assorbita dal corpo umano dovuta ai neutroni termici. Questi neutroni vengono infatti assorbiti dall’azoto-14 presente nelle proteine, causando l’emissione di un protone. Il protone emesso deposita la sua energia cinetica a breve distanza e nel tessuto corporeo, contribuendo così alla dose di radiazione assorbita.

In Fig. 1.4 è possibile visualizzare lo schema per una reazione (n,p), $^{27}\text{Al}(n,p)^{27}\text{Mg}$, nella quale il protone viene emesso immediatamente dopo la cattura neutronica.

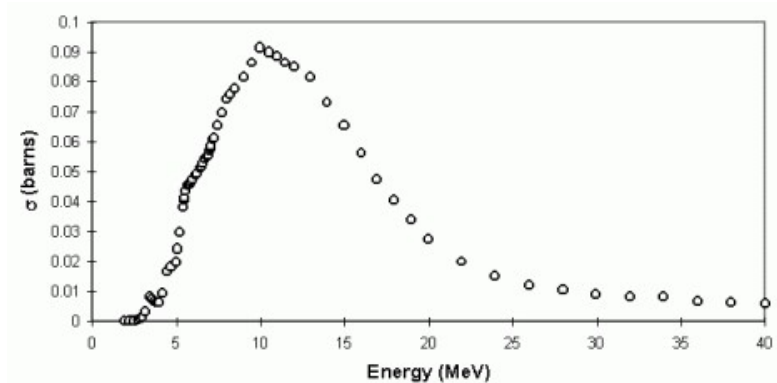


Figura 1.4: Schema della reazione $^{27}\text{Al}(n,p)^{27}\text{Mg}$ e del relativo decadimento. Nella reazione un protone viene emesso immediatamente dopo la cattura del neutrone, lasciando il nucleo ^{27}Mg . Questa reazione è solitamente utilizzata per misurare il flusso di neutroni veloci, Ref.[7].

1.2 Sezione d'urto e cattura radiativa

La misura della sezione d'urto (σ) rende possibile risalire a meccanismi dinamici della reazione studiata e quindi alle interazioni nucleari. Essa si deduce dalla misura del numero di eventi acquisiti, in un determinato processo, per unità di tempo da un rivelatore conoscendo la sua efficienza, l'intensità del fascio che incide nel bersaglio e le caratteristiche del target.

Da un punto di vista applicativo dunque, le sezioni d'urto sono strumenti utili per l'indagine delle strutture nucleari della materia.

La sezione d'urto di interazione neutronica è di fatto una quantità dipendente dall'energia del neutrone incidente. In particolare, questa può cambiare velocemente anche per variazioni piccole dell'energia cinetica, rendendo evidenti strutture di tipo risonante.

I picchi osservati nella sezione d'urto possono essere dunque considerati come la dimostrazione sperimentale degli autostati energetici del sistema composto. Al variare dell'energia è possibile distinguere due regioni:

CAPITOLO 1. FISICA NEUTRONICA

- La regione delle risonanze risolte (RRR): a basse energie, da 0 eV fino a diversi keV, le risonanze sono separate e la distanza tra i livelli è $D \gg \Gamma$
- La regione delle risonanze non risolte (URR): ad energie che vanno dal keV al MeV non è possibile separare i livelli in quanto essi sono troppo ravvicinati ($D \lesssim \Gamma$), qui la trattazione è di tipo statistico, e verrà approfondita nella sezione 1.3.

Cattura risonante

Lo studio delle risonanze neutroniche è strettamente legato all'intuizione di Bohr secondo cui i nuclei sono sistemi a grande complessità. Gli esperimenti degli anni '30 del Novecento, in particolare quelli di Fermi e del suo gruppo a Roma sulla diffusione di neutroni da parte di nuclei leggeri, avevano rivelato l'esistenza di numerose risonanze strette. Bohr sostenne che l'esistenza di risonanze del nucleo composto così numerose e ravvicinate fosse incompatibile con il moto di particelle indipendenti e fosse invece dovuta alle forti interazioni nucleone-nucleone.

A partire da questa particolare osservazione, Bohr propose il suo modello del nucleo composto: il nucleone incidente, portando energia cinetica, unita all'energia di legame, collide con i nucleoni del bersaglio e condivide la propria energia con molti nucleoni. Occorre dunque un tempo lungo, in unità del tempo di attraversamento del nucleone all'interno del nucleo, prima che uno dei nucleoni costituenti assorba energia sufficiente per essere riemesso dal sistema.

Il formalismo di Breit-Wigner descrive proprio la sezione d'urto di cattura come il risultato della formazione di uno stato intermedio del nucleo composto: questo si comporta come un livello eccitato quantizzato del sistema nucleare. In questa configurazione il neutrone incidente viene assorbito dal nucleo bersaglio formando uno stato composto instabile. L'energia di legame del neutrone, più la sua energia cinetica iniziale, viene distribuita tra tutti o dalla maggior parte dei nucleoni del nucleo composto. Tale stato è caratterizzato da un'energia discreta E_0 e da una larghezza finita Γ , associata alla sua vita media. Breit-Wigner descrive la cattura neutronica nei casi in cui si creano stati risonanti del nucleo composto a una energia vicina a quella del neutrone incidente.

CAPITOLO 1. FISICA NEUTRONICA

Il modello del nucleo composto delle reazioni nucleari tratta gli stati nucleari non legati come se formassero un continuo privo di struttura. Possono esistere stati nucleari discreti, ma sono così numerosi e così vicini tra loro che formano di fatto uno spettro continuo.

Ciascuno di questi presunti stati discreti è instabile rispetto al decadimento e quindi possiede una certa larghezza. Quando gli stati sono così numerosi che la loro spaziatura è molto minore delle larghezze dei singoli stati, si ottiene il continuo del nucleo composto.

Nella forma tradizionale della formula Breit-Wigner per una risonanza isolata, la sezione d'urto può essere descritta da:

$$\sigma(E) \propto \frac{\Gamma_{\text{in}}\Gamma_{\text{out}}}{(E - E_0)^2 + \left(\frac{\Gamma}{2}\right)^2} \quad (1.16)$$

dove E è l'energia del neutrone nel sistema di riferimento del laboratorio, E_0 è l'energia di risonanza, che corrisponde allo stato eccitato del nucleo composto.

Γ rappresenta la larghezza totale della risonanza, legata alla vita media dello stato composto, che verrà approfondita successivamente.

Nella maggior parte dei casi una descrizione della sezione d'urto di cattura termica può essere fornita dal formalismo di Breit-Wigner nella forma:

$$\sigma_\gamma(E) = \sigma_0 \frac{\Gamma_\gamma}{\Gamma} \sqrt{\frac{E_0}{E}} \frac{1}{1 + y^2} \quad (1.17)$$

dove:

$$y = \frac{2}{\Gamma}(E - E_0) \quad (1.18)$$

è il parametro di forma ridotto che determina la forma Lorentziana della risonanza.

La sezione d'urto al picco della risonanza è data da:

$$\sigma_0 = 4\pi\lambda_0^2 \frac{g\Gamma_n}{\Gamma} = \frac{2.608 \times 10^6}{E_0(\text{eV})} \left(\frac{A+1}{A}\right)^2 \frac{g\Gamma_n}{\Gamma} \quad (1.19)$$

dove:

CAPITOLO 1. FISICA NEUTRONICA

- $\lambda_0 = \lambda(E_0) =$ lunghezza d'onda del neutrone all'energia di risonanza;
- $g =$ fattore statistico di spin ($g = \frac{2J+1}{2(2I+1)}$) dove J è lo spin totale della risonanza e I lo spin del nucleo bersaglio;
- $\Gamma_n =$ larghezza neutronica (larghezza parziale per il canale neutronico);
- $\Gamma =$ larghezza totale della risonanza;
- $E_0 =$ energia di risonanza;
- $A =$ numero di massa del nucleo bersaglio.

La larghezza totale Γ , che verrà approfondita in seguito, è la somma di tutte le larghezze parziali:

$$\Gamma = \Gamma_n + \Gamma_\gamma + \Gamma_\alpha + \Gamma_p + \Gamma_d + \Gamma_f + \dots \quad (1.20)$$

Quando si considera il limite dei neutroni termici, per cui $E \ll E_0$, lontani dalla risonanza:

$$E - E_0 \approx -E_0 \quad (1.21)$$

ed il termine $\frac{1}{1+y^2}$ risulta essere costante.

In questo regime la sezione d'urto assume un comportamento inversamente proporzionale al quadrato dell'energia:

$$\sigma(E) \propto \frac{1}{\sqrt{E}} \quad (1.22)$$

Poichè l'energia cinetica del neutrone $E \propto v^2$, si ottiene che, in regime asintotico:

$$\sigma(v) \propto \frac{1}{v} \quad (1.23)$$

Questa dipendenza descrive proprio il comportamento della cattura neutronica a basse energie in assenza di risonanze vicine.

Cattura non risonante

Le sezioni d'urto della reazione di cattura neutronica sono solitamente misurate tramite tecniche sperimentali attraverso misure relative. La sezione d'urto sco-

nosciuta viene misurata confrontando il numero di reazioni osservate con quello di un materiale di riferimento, del quale si conosce la sezione d'urto con elevata precisione.

Generalmente, le sezioni d'urto vengono misurate in uno spettro neutronico non termico. Per poter confrontare i dati si utilizza come valore di riferimento la sezione d'urto σ_0 di neutroni che si muovono a velocità $v_0 = 2200 \text{ m/s}$ ($E_0 = 0.0253 \text{ eV}$).

Viene introdotto dunque il fattore di Westcott g_w per convertire la sezione d'urto effettiva misurata, $\hat{\sigma}$, al valore standard a 2200 m/s:

$$\hat{\sigma} = \sigma^0(g_w + rs) \quad (1.24)$$

In cui si possono distinguere:

- $g_w = \frac{\sigma}{\sigma_0}$ è il fattore di Westcott;
- r : l'indice epitermico, che è approssimativamente la frazione della densità totale di neutroni nella componente non termica del flusso neutronico;
- s : una quantità dipendente dalla temperatura e dalla struttura delle risonanze del nucleo.

Il fattore g_w rappresenta il rapporto tra la sezione d'urto media su uno spettro Maxwelliano e la sezione d'urto di riferimento a 2200 m/s. Tale termine tiene conto delle deviazioni della dipendenza ideale $1/v$.

Si può dimostrare che se la sezione di cattura varia seguendo la legge $\sigma(v) \propto \frac{1}{v}$, allora la media Maxwelliana coincide proprio con il valore a 2200 m/s e si ha $g_w = 1$.

Oltre alla descrizione risonante della cattura neutronica attraverso il formalismo di Breit-Wigner, è importante determinare anche un ulteriore contributo, dato dalla cattura diretta del neutrone.

Nel caso di cattura diretta, dunque con l'assorbimento del neutrone direttamente in uno stato legato, il sistema viene descritto attraverso il formalismo di Lane-Lynn, che costituisce la base della teoria R-matrix.

Nella configurazione Lane-Lynn lo spazio delle fasi è suddiviso in due regioni: una regione interna (dentro il nucleo), dominata principalmente dalla formazione di stati composti, e una regione esterna (fuori dalla regione nucleare), in cui avviene invece la cattura diretta del neutrone.

La matrice R connette le funzioni d'onda delle due regioni al confine, permettendo di calcolare la sezione d'urto totale come somma coerente dei contributi, risonante e diretto.

1.3 Proprietà statistiche degli stati nucleari eccitati

1.3.1 Regimi di risonanza

Data l'elevata densità dei livelli eccitati, la trattazione delle risonanze neutroniche richiede un approccio statistico. Sarebbe infatti impossibile una trattazione deterministica degli stati individuali del nucleo composto.

Il modello del nucleo composto (compound nucleus) descrive le reazioni nucleari trattando gli stati nucleari non legati come se formassero un continuo di livelli. Possono dunque esistere stati nucleari discreti, ma essi sono talmente numerosi e così ravvicinati tra loro da dare origine a uno spettro quasi continuo.

Ognuno di questi stati, formalmente considerato discreto, è instabile rispetto al decadimento e possiede quindi una determinata larghezza energetica. Quando il numero di stati diventa così elevato che la loro spaziatura media è molto più piccola delle larghezze individuali, si individua il cosiddetto continuo del nucleo composto.

La regione di risonanza si trova tra l'estremo del continuo e quello degli stati legati. In particolare tale regione è costituita da stati discreti nel regime del nucleo composto, caratterizzato da un insieme completo di numeri quantici e parametri dinamici.

Tali stati presentano una probabilità elevata di formazione (sezioni d'urto elevate) e larghezze molto piccole, poiché a basse energie incidenti, dove le risonanze

sono più probabili, lo stato quasi-legato formato ha solitamente solo due canali di decadimento disponibili: la riemissione della particella incidente (scattering elastico o inelastico) oppure l'emissione γ .

Per ottenere una comprensione qualitativa delle risonanze è utile rappresentare il potenziale nucleare visto dalla particella catturata come un pozzo quadrato: le funzioni d'onda che oscillano all'interno e all'esterno del nucleo devono essere raccordate in modo continuo. Variando l'energia della particella incidente è possibile variare la fase relativa tra soluzione interna ed esterna.

Ogni risonanza è caratterizzata da un set di parametri, ognuno dei quali descrive una specifica caratteristica fisica dello stato risonante.

1.3.2 Energia di risonanza E_0

L'energia di risonanza E_0 è l'energia del neutrone incidente per cui si forma il nucleo composto. Tale energia corrisponde a un massimo nella sezione d'urto della reazione.

Infatti nel formalismo di Breit-Wigner, già riportato in precedenza, si ha la formula della sezione d'urto:

$$\sigma(E) \propto \frac{1}{(E - E_0)^2 + \Gamma^2/4} \quad (1.25)$$

da cui è evidente il fatto che l'energia di picco massimo è identificabile proprio con l'energia di risonanza.

Quando l'energia è pari a E_0 si ha l'accoppiamento massimo tra lo stato di scattering iniziale e lo stato quasi-legato del nucleo composto, con successivo aumento della probabilità di formazione dello stato composto intermedio.

1.3.3 Larghezza di risonanza Γ

Il valore di aspettazione dell'energia di uno stato stazionario rimane costante nel tempo, e infinito è il tempo di vita dello stato stesso rispetto al decadimento.

CAPITOLO 1. FISICA NEUTRONICA

Quando però viene introdotto nel sistema, in aggiunta al potenziale originario V , un debole potenziale perturbativo V' , quest'ultimo consente al sistema di compiere delle transizioni tra i nuovi autostati approssimati ψ_n .

Anche in una condizione di trasformazione tra stato iniziale di energia E_i e stato finale E_f l'energia si deve conservare. Dunque l'energia totale di decadimento deve rimanere costante. Se $E_f < E_i$, la differenza di energia viene emessa sotto forma di radiazione o particelle.

Uno stato non stazionario possiede una incertezza energetica non nulla ΔE . Questa quantità viene chiamata "larghezza" dello stato ed è solitamente indicata con Γ .

Il tempo di vita τ di questo stato, ovvero il tempo medio prima che si verifichi una transizione verso uno stato più basso, può essere stimato tramite il principio di indeterminazione associando τ al tempo Δt durante il quale è possibile effettuare una misura dell'energia dello stato. Si ottiene dunque:

$$\Gamma = \frac{\hbar}{\tau} \quad (1.26)$$

dove $\hbar = h/2\pi$ è la costante di Planck ridotta.

Come già descritto in precedenza, la larghezza totale Γ è in realtà somma di tutte le larghezze parziali, per cui ogni Γ_i rappresenta la probabilità relativa che il nucleo ha di decadere attraverso un determinato canale.

$$\Gamma = \Gamma_n + \Gamma_\gamma + \Gamma_\alpha + \Gamma_p + \Gamma_d + \Gamma_f + \dots \quad (1.27)$$

Dove si ha:

- Γ_n : larghezza neutronica, indica la probabilità che un nucleo composto riemetta un neutrone.
- Γ_γ : larghezza radiativa, associata al decadimento tramite emissione γ ;
- Γ_α : larghezza associata all'emissione di particelle α .
- Γ_p : larghezza associata all'emissione protonica,
- Γ_d : larghezza associata all'emissione di deuteroni,

- Γ_f : larghezza di fissione, associata al decadimento del nucleo composto tramite fissione.

Si definisce inoltre Γ_i^0 , che rappresenta la reduced neutron width, ottenuta eliminando la dipendenza energetica dovuta alla penetrabilità.

A causa dell'estrema complessità e del carattere casuale dello stato composto, le ampiezze di decadimento verso un canale fissato sono distribuite normalmente con media nulla. Di conseguenza, le larghezze parziali, essendo proporzionali al quadrato delle ampiezze, seguono la distribuzione di Porter–Thomas.

Nel caso $\nu = 1$, ovvero nel caso standard single-channel, si ha:

$$P(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} e^{-x/2}$$

dove

$$x = \frac{\Gamma_i^0}{\langle \Gamma_i^0 \rangle}$$

Questa trattazione vale per le larghezze parziali associate ad un canale di decadimento singolo. Nel caso in cui siano presenti più canali di uscita, la distribuzione generale da considerare è un chi-quadro con ν pari al numero di componenti indipendenti del decadimento.

1.3.4 Average Level Spacing D

In un nucleo composto, ad energie di eccitazione molto alte, i livelli raggiungono una densità tale da rendere necessaria una trattazione statistica. Si studiano quindi non più le singole energie E_i bensì le differenze $D_i = E_{i+1} - E_i$. Si introduce dunque un nuovo parametro, la densità dei livelli. Il modo più diretto e semplice per determinare tale parametro è utilizzando le misure neutroniche con lo stesso J^π in un intervallo energetico ΔE contenente molte risonanze N . Si ha dunque:

$$\langle D_{\ell j} \rangle = \frac{\Delta E}{N - 1} \tag{1.28}$$

dove $\langle D_{\ell j} \rangle$ è la spaziatura media tra livelli di risonanza definiti dal momento angolare ℓ e da spin j .

La densità dei livelli, ovvero il numero dei livelli per unità di energia, è definita come:

$$\rho(E) = \frac{dN}{dE}. \quad (1.29)$$

In prima approssimazione per intervalli energetici piccoli, questa è legata alla spaziatura media dei livelli attraverso:

$$\langle D \rangle \simeq \frac{1}{\rho(E)} \quad (1.30)$$

Nel modello a gas di Fermi, la densità dei livelli nucleari cresce in modo esponenziale con l'energia di eccitazione. Questo implica dunque che ad alte energie di eccitazione lo spettro nucleare diventa così fitto da rendere impossibile una descrizione di tipo deterministico degli stati individuali, giustificando di conseguenza un approccio statistico.

Risonanze deboli possono però sfuggire all'osservazione, a causa di risoluzione energetica sperimentale e dall'allargamento Doppler delle risonanze, per cui è necessario distinguere tra p-waves e s-waves o effettuare correzioni per le risonanze che mancano.

Poichè il problema sperimentale tuttavia persiste, si può trovare una parziale soluzione nelle leggi di distribuzione statistica delle spaziature tra livelli e la distribuzione di Porter–Thomas, dunque in due casi di osservabili complementari: da una parte si ha lo studio delle spaziature tra livelli energetici, dall'altra lo studio delle fluttuazioni delle larghezze di risonanza.

Quando questi due metodi sono combinati nell'analisi delle risonanze neutroniche, è possibile infatti determinare in modo più affidabile la spaziatura media tra livelli energetici.

Nel 1956 Wigner descrisse la distribuzione delle spaziature tra livelli sulla base del comportamento degli autovalori di una matrice simmetrica. Egli suggerì infatti

l'idea che i livelli appartenenti a una singola popolazione dovessero seguire lo stesso comportamento di ordinamento degli autovalori di grandi matrici reali simmetriche $N \times N$ con elementi distribuiti casualmente secondo una distribuzione gaussiana:

$$P(H_{ij}) = e^{-H_{ij}^2} \quad (1.31)$$

Dove H_{ij} sono gli elementi di matrice della Hamiltoniana del nucleo composto, che vengono considerati i numeri casuali di una distribuzione gaussiana.

Questo è oggi noto come Gaussian Orthogonal Ensemble (GOE). L'ortogonalità dipende dalla conservazione di simmetria per inversione temporale tipica delle risonanze neutroniche.

Di fatto la distribuzione di Wigner in questo caso può essere derivata come l'approssimazione del modello nel limite a dimensioni molto grandi.

La distribuzione di Wigner delle spazature tra i livelli di risonanza, da considerare con lo stesso spin e stessa parità, assume dunque la forma:

$$P(D) = \frac{\pi}{2} \frac{D}{\langle D \rangle} e^{-\frac{\pi}{4} \frac{D^2}{\langle D \rangle^2}} \quad (1.32)$$

dove $\langle D \rangle$ è la spaziatura media tra livelli e D è la spaziatura tra livelli vicini (nearest-neighbor spacing).

Nel contesto dell'Ensemble Ortogonale Gaussiano (GOE) si osserva un fenomeno caratteristico, noto come repulsione tra livelli energetici (level repulsion). Questo fenomeno implica che la probabilità di trovare due livelli con spaziatura molto piccola sia fortemente soppressa. La densità di probabilità per gli autovalori infatti si annulla quando due autovalori si avvicinano tra loro, manifestazione diretta della meccanica quantistica.

A differenza infatti di un sistema di livelli non correlati (con una distribuzione esponenziale delle spazature), nel GOE è presente una densità nulla per $D \rightarrow 0$, rendendo evidente che i livelli si respingano a vicenda. Questo riflette la natura statistica a corto raggio tra i livelli energetici. I livelli adiacenti non sono infatti indipendenti, ma mostrano una correlazione tale da generare una repulsione nello spazio delle energie. Una soppressione analoga si osserva anche per spazature

molto grandi, poichè i livelli tendono a distribuirsi in modo regolare lungo l'asse energetico, rendendo improbabile la presenza di grandi lacune nello spettro.

É possibile anche ricavare una stima per l'errore su D , data da una quantità proporzionale a $\frac{1}{\sqrt{N}}$:

$$\Delta(D) = \frac{0.52\langle D \rangle}{\sqrt{N}}. \quad (1.33)$$

In analisi sperimentale, la distribuzione delle spazature non viene studiata direttamente nelle variabili D_i , bensì viene definita la variabile adimensionale:

$$s = \frac{D}{\langle D \rangle} \quad (1.34)$$

che consente di confrontare sistemi fisici differenti eliminando la dipendenza dalla scala energetica del nucleo. Questa procedura, nota come *unfolding*, rende universale la distribuzione e indipendente dalla densità locale dei livelli.

La distribuzione delle spazature dunque viene costruita come un istogramma normalizzato a:

$$\int_0^\infty P(s) ds = 1 \quad (1.35)$$

Dal punto di vista prettamente numerico, le spazature sono ottenute a partire dagli autovalori ordinati dell'energia nucleare, mentre la normalizzazione è effettuata utilizzando la spaziatura media calcolata sul campione sperimentale.

Capitolo 2

n_TOF

2.1 La facility

La facility n_TOF è un plesso sperimentale situato al CERN dal 2001. n_TOF sfrutta una sorgente di neutroni pulsati accoppiata a una traiettoria di 200 m progettata per studiare le interazioni neutrone-nucleo per energie cinetiche di neutroni che vanno da pochi meV a diversi GeV.

Lo studio delle reazioni indotte da neutroni è di grande importanza in una vasta gamma di campi di ricerca, che vanno dalla nucleosintesi stellare, agli effetti di rottura della simmetria nei nuclei composti, all'indagine delle densità a livello nucleare, fino alle applicazioni della tecnologia nucleare, inclusa la trasmutazione dei rifiuti nucleari, i sistemi alimentati da acceleratori e le indagini sul ciclo del combustibile nucleare.

I neutroni vengono generati attraverso reazioni di spallazione, prodotte da un fascio pulsato di protoni da 20 GeV che colpisce un bersaglio di piombo dal peso di 1.3 tonnellate. I protoni vengono accelerati dal Proton Synchrotron e ogni protone incidente sul bersaglio genera circa 300 neutroni. Sono presenti due aree sperimentali: EAR1 posta a 185 m dal bersaglio di spallazione e EAR2, a 20 m dal bersaglio.

Il bersaglio di spallazione è circondato da 5 cm di acqua: 1 cm di quest'acqua funge da refrigerante, necessario perchè la potenza dissipata dal fascio incidente nel

blocco provoca un notevole incremento di temperatura, 4 cm di acqua borata ($\text{H}_2\text{O} + 1.28\% \text{H}_3\text{BO}_3$) fungono invece da moderatore dello spettro neutronico che inizialmente è di tipo veloce. Questo genera un ampio spettro neutronico, che ricopre un intervallo energetico dalla regione dei meV fino alla regione dei GeV. Nella prima configurazione della facility era presente un solo blocco di acqua demineralizzata di 5 cm che svolgeva sia il compito di moderatore che di refrigerante.

L'Experimental Area 2 (EAR2) è attiva dal 2014 e fornisce un flusso neutronico istantaneo di circa 10^7 neutroni per impulso protonico nominale, riferito a un impulso nominale di 7×10^{12} protoni, significativamente superiore rispetto alla *Experimental Area 1* (EAR1). L'elevato flusso neutronico in EAR2 comporta alti rate di conteggio nei rivelatori, che mettono in crisi i sistemi di rivelazione di cattura utilizzati precedentemente. Per questo motivo è stato sviluppato un Segmented Total Energy Detector (sTED), per superare le limitazioni nella risposta del rivelatore, riducendo il volume attivo per modulo e utilizzando un fotomoltiplicatore (PMT) ottimizzato per alte rate di conteggio. Quest'ultimo è stato utilizzato anche per le misure di erbio.

Uno schema della facility è riportato in Fig. 2.1. Un ulteriore approfondimento del setup sperimentale verrà riportato in sezione 2.2

2.1.1 Time of Flight

Le energie dei neutroni di interesse coprono un intervallo che va da energie termiche (25 meV) fino a centinaia di MeV, a seconda dell'applicazione presa in considerazione. In un intervallo così ampio le sezioni d'urto neutroniche presentano strutture risonanti e soglie di reazione brusche che cambiano in modo significativo da isotopo a isotopo e non possono essere previste, rendendo necessarie quindi misure ad alta risoluzione energetica per risolvere tali strutture.

L'energia cinetica dei neutroni incidenti sul bersaglio è determinata dal tempo di volo, da cui il nome n_TOF (neutron Time Of Flight). Si misura infatti il tempo di percorrenza all'interno del tubo a vuoto posizionato tra il bersaglio di spallazione e la zona sperimentale.

Per le misure di sezioni d'urto vengono rivelati i prodotti della reazione $n + \text{bersaglio}$ quali particelle α , raggi γ di cattura, frammenti di fissione o neutroni

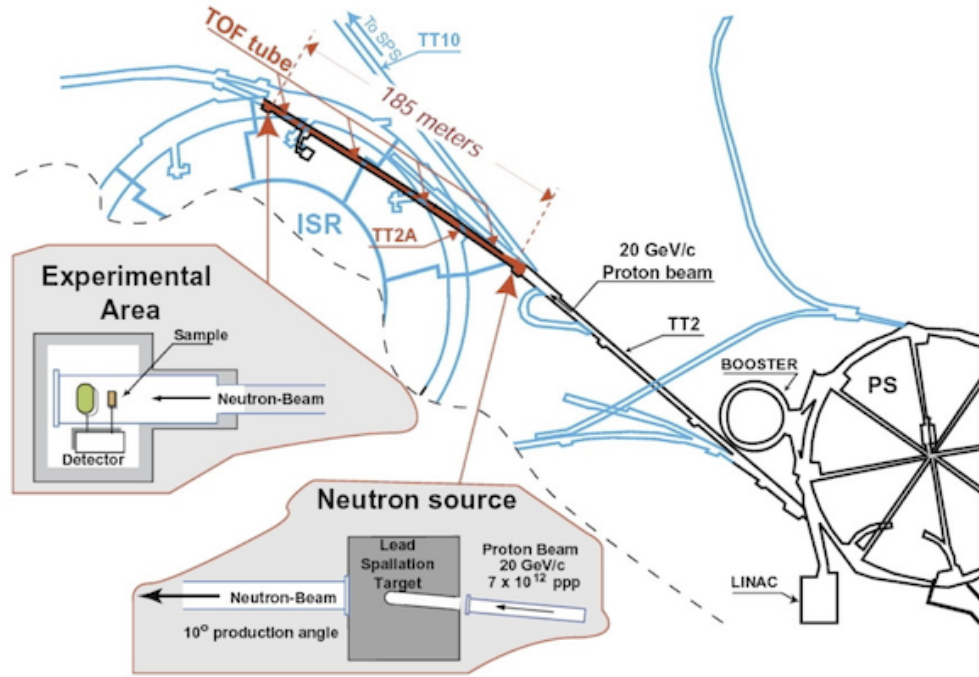


Figura 2.1: Schema della facility n_TOF. Ref.[[17]].

diffusi ad un tempo t_n considerato il tempo di arrivo per determinare il tempo di volo del neutrone:

$$t_{obs} = t_n - t_0. \quad (2.1)$$

Mediante la tecnica del Time Of Flight (TOF), le sezioni d'urto neutroniche possono essere misurate in funzione dell'energia del neutrone. L'energia cinetica del neutrone è data dall'espressione relativistica esatta:

$$E_n = E - mc^2 = \sqrt{p^2c^2 + m^2c^4} - mc^2 \quad (2.2)$$

Nel limite non relativistico, valido al di sotto di circa 1 MeV, questa si riduce a $E_n = \frac{1}{2}mv^2$. Poiché la velocità del neutrone è determinata dal tempo di volo t_{obs} percorso lungo la distanza L tra il bersaglio di spallazione e il rivelatore, si ottiene:

$$E_n(\text{eV}) = \left(\frac{72.2996 \cdot L(\text{m})}{t_{\text{det}}(\mu\text{s}) - t_0(\mu\text{s})} \right)^2 \quad (2.3)$$

dove t_0 è il tempo di produzione del pacchetto di neutroni e t_{det} è il tempo di rivelazione della reazione. Il fattore numerico 72.2996 incorpora la massa del neutrone e le opportune conversioni di unità.

Le reazioni di cattura neutronica producono una cascata di raggi γ con energia totale pari a:

$$E_{\text{casc}} = S_n + \left(\frac{A}{(A+1)} \right) E_n \quad (2.4)$$

dove A è il numero di massa dell'isotopo studiato, S_n è l'energia di separazione del neutrone del nucleo prodotto, cioè l'energia necessaria per rimuovere un neutrone dal nucleo composto formato dopo la cattura neutronica. Il TAC è progettato proprio per assorbire completamente questa cascata con un'efficienza quanto più indipendente possibile dallo schema di decadimento del nucleo composto.

Per effettuare misure di tempo di volo è necessario che i neutroni siano emessi da una sorgente pulsata. Essi vengono emessi in un tempo relativamente breve, che viene considerato come il tempo iniziale t_0 . Il campione da analizzare viene posizionato ad una distanza L dalla sorgente.

Il cosiddetto γ -flash nei rivelatori, prodotto da raggi γ altamente energetici che viaggiano lungo la linea di fascio, può essere utilizzato per determinare l'istante t_0 , poichè i raggi γ viaggiano alla velocità della luce e per questo arrivano ai rivelatori prima dei neutroni:

$$t_0 = t_\gamma - \frac{L}{c} \quad (2.5)$$

Dove t_γ è proprio il tempo registrato per il γ -flash.

La risoluzione energetica relativa della facility è data da:

$$\frac{\Delta E_n}{E_n} = 2 \sqrt{\left(\frac{\Delta t}{t} \right)^2 + \left(\frac{\Delta L}{L} \right)^2} \quad (2.6)$$

dove Δt e ΔL rappresentano rispettivamente l'incertezza sul tempo di produzione e sulla lunghezza di volo. La risoluzione delle strutture risonanti è dunque favorita

da una lunga traiettoria di volo.

2.1.2 Yield di cattura

La quantità osservabile nelle misure (n, γ) è il capture yield (yield di cattura) $Y_{n, \gamma} E(n)$, che rappresenta la frazione di neutroni che intersecano il campione e che subiscono una reazione di cattura. Questa quantità è necessaria per lo studio e la conoscenza della sezione d'urto di una determinata reazione.

In teoria nucleare, lo yield di cattura neutronico è dato da:

$$Y_c(E_n) = (1 - e^{-n\sigma_{tot}}) \frac{\sigma_c}{\sigma_{tot}} + Y_{MS} \quad (2.7)$$

dove σ_{tot} è la sezione d'urto totale della reazione, σ_c è la sezione d'urto di cattura, n è la densità areale del bersaglio, ovvero il numero di nuclei per unità di area e Y_{MS} è lo yield ricavato da processi di scattering multiplo (processi in cui il neutrone subisce diffusione elastica una o più volte, per poi venire catturato da un nucleo del bersaglio producendo un bersaglio non distinguibile da uno di cattura diretta). Y_{MS} produce quindi un background nella misura dello yield di cattura.

Sperimentalmente, è definito:

$$Y_{n, \gamma} E(n) = \frac{C(e_n) - B(e_n)}{\epsilon_{n, \gamma} N \Phi_n(E_n)} \quad (2.8)$$

dove $C(E_n)$ e $B(E_n)$ sono i ratei di conteggio totale e di fondo, ϵ è l'efficienza di rivelazione delle cascate di cattura, Φ è l'intensità dei neutroni incidenti registrata dal sistema SiMon, e N è la costante di proporzionalità tra l'intensità neutronica incidente sul SiMon e quella incidente sul campione.

SiMon è il nome dei Silicon Monitors, rivelatori a solido formati da quattro rivelatori al silicio posti attorno ad una sottile lamina circolare di Mylar, un film di poliestere (PET, polietilene tereftalato) molto sottile, trasparente e resistente, su cui viene depositato un sottilissimo strato di litio.

Nel caso di bersagli sottili, tali che:

$$n\sigma_{tot} \ll 1 \quad (2.9)$$

l'espressione dello yield può essere approssimata sviluppando l'esponenziale al primo ordine:

$$1 - e^{-n\sigma_{tot}} \approx n\sigma_{tot} \quad (2.10)$$

ottenendo quindi:

$$Y_c(E_n) \approx n\sigma_c \quad (2.11)$$

In questa approssimazione lo yield di cattura risulta direttamente proporzionale alla sezione d'urto di cattura neutronica.

Per campioni più spessi, invece, diventano rilevanti gli effetti di auto-schermaggio neutronico e scattering multiplo. In questi casi lo yield osservato contiene anche contributi dovuti a neutroni che subiscono uno o più scattering elastici prima della cattura, producendo eventi che non sono sperimentalmente distinguibili da quelli di cattura diretta.

Lo yield sperimentale ottenuto viene analizzato tramite formalismo R-matrix. Questo permette di parametrizzare le risonanze neutroniche in termini di energie di risonanza, larghezze neutroniche e larghezze radiative.

2.2 Misure e analisi della sezione d'urto di ^{166}Er e ^{167}Er

Motivazioni delle misure su erbio

I parametri di risonanza per reazioni indotte da neutroni sugli isotopi sono quantità cruciali per la progettazione in sicurezza dei reattori nucleari, per la comprensione della nucleosintesi stellare e per lo sviluppo di sistemi di trasmutazione dei rifiuti nucleari. I parametri di risonanza neutronici forniscono inoltre informazioni affidabili per numerosi altri campi, inclusa la fisica nucleare fondamentale e applicazioni mediche.

Negli ultimi vent'anni le attività di ricerca nel campo degli assorbitori bruciabili (materiali inseriti in un nocciolo nucleare con grandi sezioni d'urto di assorbimento neutronico) hanno mostrato che l'Erbia (Er_2O_3 , ossido di erbio) può essere con-

siderata un'alternativa eccellente alla Gadolinia (Gd_2O_3), materiale al momento ampiamente impiegato nei reattori nucleari commerciali.

Gli isotopi delle terre rare, in particolare l'erbio, sono considerati tra le migliori scelte come veleni bruciabili in specifici reattori. I veleni bruciabili sono quindi solitamente scelti tra elementi che presentano una sezione d'urto di cattura neutronica comparabile o superiore a quella del ^{235}U per neutroni termici. Il loro scopo è infatti quello di competere con l'uranio nelle fasi iniziali di accensione del reattore, regolando il numero di neutroni presenti al suo interno. Quando sia il veleno bruciabile che l'uranio sono stati impoveriti dall'accensione del reattore, il veleno bruciato smette di competere con il materiale fissile. A questo punto del ciclo di accensione, quest'ultimo può essere dunque controllato in modo più facile e sicuro per produrre energia.

L'erbio infatti presenta una sezione d'urto di assorbimento termico inferiore (c'è dunque minor degradazione della distribuzione di potenza), un coefficiente di feedback di temperatura più negativo (che porta un miglioramento della sicurezza del nocciolo del reattore, in quanto quando la temperatura aumenta la reattività in questo caso diminuisce), integrali di risonanza più elevati ed estesi energeticamente (si ha migliore controllo delle fasi di avviamento e dei transitori accidentali, con assorbimento di neutroni anche ad energie più alte) e una riduzione del contenuto dell'isotopo ^{239}Pu nell'inventario del nocciolo a fine combustibile (End Of Life, EOL), c'è quindi un rafforzamento delle misure di non proliferazione.

Lo sviluppo del cosiddetto concetto Erbia Super High Burn-Up (Er-SHB) ha dimostrato che l'erbio potrebbe essere miscelato direttamente in tutte le barrette di combustibile di un Fuel Assembly (FA) al Beginning Of Life (BOL), aprendo la possibilità di una produzione su larga scala di combustibile a più alto arricchimento ($>5\%$) negli impianti già esistenti di produzione del combustibile nucleare, senza modificare gli impianti industriali e senza ridurre la sicurezza nucleare della fase front-end del ciclo del combustibile nucleare.

Tramite il design Erbium Super High Burnup (Er-SHB) si avrebbe infatti un miglior controllo delle condizioni transitorie operative accidentali, con una

estensione della vita del combustibile rispetto ai sistemi che utilizzano gadolinio.

Nonostante la loro importanza, le sezioni d'urto di cattura degli isotopi naturali dell'erbio (^{166}Er , ^{168}Er , ^{170}Er) presentano incertezze valutate non trascurabili ($> 7\%$) nei dati della libreria ENDF/B-VIII.0 per energie superiori a 1 eV. Per l'isotopo ^{167}Er , ad esempio, l'incertezza valutata precedentemente (ENDF/B-VIII.0, $E > 1$ eV) è pari al 2.3%.

Sono state effettuate analisi di sensitività e incertezza (S&U) su diverse configurazioni di assemblaggi di combustibile, al fine di valutare l'impatto delle incertezze delle sezioni d'urto di cattura dell'erbio sulla criticità del sistema per energie neutroniche superiori a 10 eV, studiando dunque la stabilità dei reattori. Questo valore soglia è stato scelto poiché, oltre questa energia, si verifica la sovrapposizione delle strutture risonanti degli isotopi dell'erbio, rendendo necessaria una misura ad alta risoluzione energetica, quale quella ottenibile presso la facility n_TOF.

In particolare, le analisi S&U sono state effettuate per un FA Er-SHB all'inizio del ciclo e alla fine del ciclo.

È stato inoltre considerato un terzo caso, costituito dall'assemblaggio di riferimento adottato nei reattori ad acqua leggera (LWR) che utilizzano combustibile ossido misto uranio-plutonio (MOX) con un contenuto medio di plutonio dell'8.65%. In questa analisi, il contenuto medio di plutonio è stato aumentato fino al 12.5% per progettare un sistema innovativo in grado di migliorare l'efficienza del ciclo del combustibile (cioè un migliore utilizzo del combustibile) ed estendere la durata del ciclo (ovvero riduzione della fase di fermata), evitando al contempo che il coefficiente di reattività in vuoto diventi positivo. La reattività iniziale in eccesso dovuta all'aumento del contenuto di plutonio è stata compensata drogando tutte le barre di combustibile con erbia (1% in atomi).

Il quarto caso considerato è stato la configurazione "open square" dell'assemblaggio del concetto europeo di reattore a piombo ELSY (sistema avanzato con refrigerante al piombo), con erbia come assorbitore bruciabile integrale (Integral Burnable Absorber, IBA).

I quattro casi analizzati hanno di fatto dimostrato che ^{166}Er e ^{168}Er sono i

contributori più rilevanti (casi 1 e 2) all'incertezza sulla criticità oltre i 10 eV, per i quali è stata necessaria una misura ad alta risoluzione. L'isotopo ^{167}Er è il principale contributore all'incertezza sia sotto (caso 3) sia sopra (caso 4) la soglia dei 10 eV. L'isotopo ^{170}Er invece, nonostante fornisca un contributo minore in tutti i casi studiati, è quello con la maggiore incertezza valutata (15.3%).

2.2.1 Setup sperimentale

Sono state effettuate diverse misure sfruttando il setup di rilevamento per ottenere sezioni d'urto accurate per ^{166}Er ed ^{167}Er (n,γ), parametrizzate in termini di parametri di risonanza, con una efficienza totale di circa 7%. Sono stati utilizzati due sistemi di rilevamento ben consolidati: uno basato su tre rivelatori C_6D_6 a bassa sensibilità ai neutroni in configurazione con cinque rivelatori sTED (segmented Total Energy Detector), l'altro basato sul Calorimetro ad Assorbimento Totale (TAC), progettato invece per rivelare la cascata completa di raggi γ emessa nelle reazioni di cattura neutronica.

Uno schema del setup sperimentale è riportato in Fig.2.2

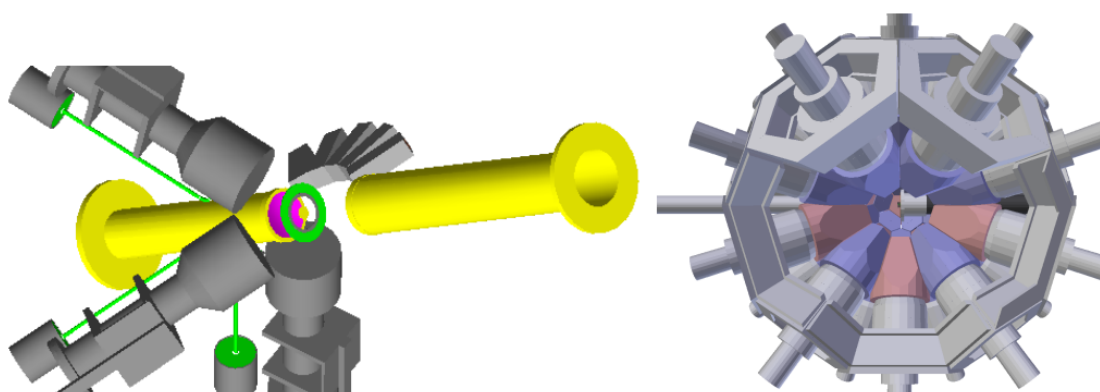


Figura 2.2: Schema del setup per le misure con rivelatore C_6D_6 (a sinistra) e con TAC (a destra). Ref. [1].

Nel primo set di tre rivelatori, C_6D_6 , posizionati a 125° rispetto al fascio, si ha un'efficienza totale pari a 7%. Il nome dello scintillatore deriva dal liquido scintillatore utilizzato, il benzene deuterato, dove gli atomi di idrogeno sono sostituiti

da atomi di deuterio. Quest'ultimo riduce sensibilmente la probabilità di cattura neutronica all'interno del rivelatore. Dopo la cattura di un neutrone da parte del campione bersaglio, tramite la reazione (n,γ) , il nucleo composto si diseccita e produce una cascata di raggi γ . Tali fotoni γ , entrando nel rivelatore, interagiscono con il liquido scintillatore, portando alla produzione di particelle cariche per effetto Compton, effetto fotoelettrico e produzione di coppie. Queste particelle depositano energia nel liquido, eccitando le molecole del scintillatore, che emettono luce. La luce viene poi raccolta da un fotomoltiplicatore (PMT), da cui viene convertita in un segnale elettrico.

Accanto ai rivelatori C_6D_6 è stato poi sviluppato e utilizzato anche il sistema sTED (*segmented Total Energy Detector*), progettato in modo specifico per misure di cattura neutronica in condizioni di elevato rate di conteggio, come nella Experimental Area 2 (EAR2) della facility n_TOF. Lo sTED è costituito da un array di moduli scintillatori di piccolo volume, accoppiati a fotomoltiplicatori ottimizzati proprio per alte frequenze di conteggio, i quali trasformano la luce in segnali elettrici misurabili. La segmentazione del rivelatore consente di ridurre gli effetti di pile-up legati alla sovrapposizione dei segnali e gli shift di guadagno osservati nei rivelatori di grande volume, mantenendo allo stesso tempo una buona efficienza di rivelazione per le cascate γ emesse nei processi di cattura neutronica. Lo sTED rende possibile dunque la divisione dello scintillatore e l'abbassamento del rate per modulo. Esso è stato posizionato a vari angoli per la determinazione della dipendenza angolare dell'emissione γ delle diverse risonanze s-wave e p-wave degli isotopi di erbio. Le fotografie di un singolo modulo sTED e di un insieme di moduli assemblati sono riportate in Fig.2.3.

Il Calorimetro ad Assorbimento Totale (TAC) è invece un rivelatore segmentato a simmetria sferica (4π), costituito da 42 cristalli di BaF_2 (fluoruro di bario) di due forme diverse (pentagonali ed esagonali), costruito appositamente per rivelare le cascate di raggi γ emesse nelle reazioni di cattura neutronica. I cristalli, incapsulati in fibra di carbonio drogata con ^{10}B , formano una calotta sferica di spessore 15 cm con diametro interno di 20 cm. Il TAC ha un'efficienza vicina molto alta per la rivelazione delle cascate di cattura, con una risoluzione energetica del 16% a 662



Figura 2.3: Fotografie di un singolo modulo sTED (in alto) e di un insieme di nove moduli sTED assemblati in un cluster (in basso). Ref.[[2]]

keV e del 6% a 6.1 MeV.

Una calotta sferica spessa 5 cm, costruita in $C_{12}H_{20}O_6Li_2$, è inserita nella cavità interna del TAC, al fine di moderare e assorbire parzialmente i neutroni diffusi dal campione. La combinazione di questo moderatore con gli involucri in fibra di carbonio drogata con ^{10}B definisce una sensibilità ai neutroni inferiore all'1% nell'intervallo di energie neutroniche di interesse.

Le caratteristiche del TAC permettono di eseguire misure di alta qualità della cattura neutronica, anche quando si possiedono campioni di piccola massa e/o radioattivi. L'elevata efficienza del TAC e intensità elevata del fascio neutronico di n_TOF consentono di ridurre il background dovuto all'attività intrinseca nel caso di campioni radioattivi.

2.2.2 Descrizione dell'attività

L'esperimento è stato diviso in due parti.

Inizialmente sono state prese misure con campioni di Erblio naturale, che contenevano i diversi isotopi stabili nelle abbondanze isotopiche naturali rispettive. In particolare sono stati utilizzati ^{162}Er 0.1%, ^{164}Er 1.6%, ^{166}Er 33.5%, ^{167}Er 22.9%, ^{168}Er 27.0%, ^{170}Er 14.9%.

È stata utilizzata una massa del campione di ~ 30 mg in modo da avere $3.4 \cdot 10^5$ atomi/barn nel campione e un yield totale inferiore a 0.2; come già visto infatti, un yield piccolo riduce gli effetti di auto-schermaggio e di interazioni multiple.

Successivamente, sono state fatte misure con Erblio arricchito, al fine di estendere le misure a energie più elevate e ridurre il contributo dovuto alle risonanze degli altri isotopi di Erblio.

Al fine di soddisfare il requisito HPRL (High Priority Request List) di ottenere la sezione d'urto di cattura di ^{167}Er con un'incertezza inferiore al 2% a energie inferiori a 100 eV, è stato necessario selezionare un campione ben definito.

Come precedentemente spiegato, non è possibile ottenere la sezione d'urto di cattura di ^{167}Er con bassa incertezza utilizzando un campione naturale a energie superiori a 50 eV, a causa della presenza delle risonanze degli altri isotopi di Erblio.

Per misurare la sezione d'urto di cattura di ^{167}Er sopra 50 eV, e le sezioni d'urto degli isotopi ^{166}Er , ^{168}Er e ^{170}Er , sono dunque stati utilizzati campioni con arricchimento isotopico 97% e massa 200 mg.

Il numero totale di protoni utilizzato è stato $9.0 \cdot 10^{18}$, includendo le misure di background a fascio acceso.

La normalizzazione è stata invece effettuata attraverso il metodo della risonanza saturata usando la risonanza a 4.9 eV dell' ^{197}Au .

In Fig. 2.4 è riportata la stima dei ratei di conteggio attesi per il campione di erblio naturale utilizzato.

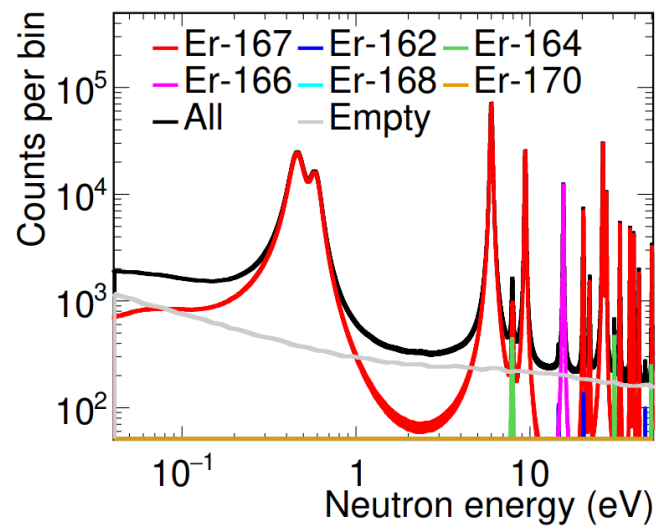


Figura 2.4: Stima dei ratei di conteggio attesi per un campione di erbio naturale da 30 mg, in funzione dell'energia neutronica, per i rivelatori C_6D_6 con $1.5 \cdot 10^{18}$ protoni. Sono mostrati i contributi dei singoli isotopi, il fondo a fascio acceso senza campione (*Empty*) e la somma totale (*All*), con 1000 bin per decade, Ref.[1].

Capitolo 3

Analisi dati

La diffusione di neutroni lenti consente lo studio delle singole risonanze in una finestra energetica ristretta, corrispondente a stati ad alta energia di eccitazione nel nucleo composto (tipicamente 5–7 MeV). A queste energie, come già discusso in precedenza, la densità di livelli nei nuclei medi e pesanti è molto elevata. Tuttavia, la presenza della barriera centrifuga associata al momento angolare del neutrone incidente limita i valori del momento angolare orbitale accessibili e, di conseguenza, gli spin J delle risonanze del nucleo composto che contribuiscono alla diffusione.

Per neutroni lenti si osservano principalmente risonanze di tipo s e p . Per effettuare un confronto significativo con le previsioni teoriche, è necessario che i livelli appartenenti a una stessa sequenza abbiano gli stessi numeri quantici. Per questo motivo, i dati sperimentali sono stati confrontati, risonanza per risonanza, con le valutazioni riportate in letteratura (S. F. Mughabghab, *Atlas of Neutron Resonances*, Vol. 2: Resonance Properties and Thermal Cross Sections, $Z = 61$ – 100 ; Ref.[16]). In particolare, sono state selezionate esclusivamente le risonanze attribuite a onde s , al fine di garantire la coerenza del campione analizzato.

In questa sezione viene presentata l'analisi dei dati sperimentali relativi alle risonanze neutroniche osservate. A partire dagli spettri misurati, è stata effettuata un'analisi mediante un fit di tipo R -matrix, con lo scopo di estrarre i parametri fondamentali del sistema nucleare.

Data set

Sono stati utilizzati i dati sperimentali acquisiti nell'esperimento di cattura neutronica nella facility n_TOF. È stato preso in considerazione il campione di ^{166}Er , l'isotopo più abbondante in natura (33,6%) e le relative misure di energie di risonanza. In particolare, si è studiata la distribuzione di probabilità degli spacing, valutando la compatibilità dei dati sperimentali con la teoria neutronica, in particolare la distribuzione di Wigner per sistemi caotici.

3.1 Level spacing sperimentale

L'ipotesi di base è che lo spettro delle energie di risonanza, una volta selezionati stati con uguali numeri quantici, possa essere descritto statisticamente attraverso la teoria delle matrici casuali.

Per prima cosa è stata dunque confrontata la distribuzione sperimentale delle spaziature con la distribuzione di Wigner tipica della teoria Random Matrix (GOE) per sistemi caotici.

L'elaborazione dei dati è stata realizzata tramite il framework ROOT (CERN), che ha permesso la gestione dei file sperimentali, il calcolo delle quantità statistiche e la produzione delle distribuzioni e dei grafici.

Poiché le spaziature sono definite solamente tra livelli adiacenti, le energie di risonanze del set di dati sperimentali sono state ordinate in ordine crescente, in modo da ottenere una corretta sequenza dei livelli:

$$E_1 < E_2 < \dots < E_N \quad (3.1)$$

La lista delle spaziature sperimentali è stata inizialmente calcolata aritmeticamente come la differenza tra livelli consecutivi

$$D_i = E_{i+1} - E_i \quad (3.2)$$

valore successivamente utilizzato per il calcolo aritmetico della spaziatura media, utilizzando la formula [1.28].

Il valore $\langle D \rangle$ è stato necessario per valutare la normalizzazione delle spaziatore. Si è convertito l'istogramma delle spaziatore normalizzate in una densità di probabilità, imponendo la condizione di normalizzazione unitaria mediante la riscalatura dell'istogramma per la sua area totale.

L'istogramma è stato costruito infatti con 15 bin nell'intervallo $s \in [0, 3]$ e normalizzato dividendo per il numero totale di spaziatore e per la larghezza del bin, in modo che l'integrale fosse unitario e l'asse y rappresentasse una densità di probabilità, come già definito in [1.35].

L'incertezza sulla spaziatore media è stata calcolata assumendo la statistica della distribuzione di Wigner per i nearest-neighbour spacings. In questa ipotesi, l'errore sulla media è $\propto 1/\sqrt{N}$ ed è dato da

$$\Delta\langle D \rangle = 0.52 \frac{\langle D \rangle}{\sqrt{N}}, \quad (3.3)$$

dove il fattore numerico deriva dalla varianza specifica della distribuzione statistica teorica, ovvero la forma dipendente da s di 1.32:

$$P(s) = \frac{\pi}{2} s e^{-\frac{\pi}{4}s^2}. \quad (3.4)$$

Quest'ultima equazione è stata utilizzata come funzione teorica di confronto per l'istogramma delle spaziatore normalizzate $s = D/\langle D \rangle$, permettendo di verificare la presenza di correlazioni tra i livelli energetici compatibili con la statistica del Gaussian Orthogonal Ensemble. Si può vedere il confronto grafico in Fig.3.1.

È stato calcolato $\langle D \rangle = (41.66 \pm 2.61)$ eV, calcolato su $N_{\text{liv}} = 70$ livelli ($N_{\text{sp}} = 69$ spaziatore).

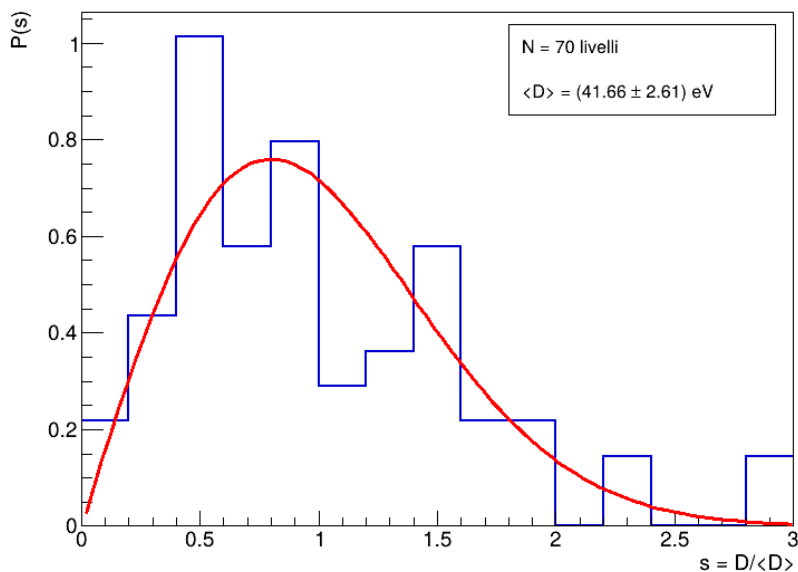


Figura 3.1: Distribuzione degli spacing normalizzati $s = D/\langle D \rangle$ per i livelli di risonanza del nucleo ^{166}Er . La curva rossa è la distribuzione di Wigner $P(s) = \frac{\pi}{2} s e^{-\frac{\pi}{4}s^2}$, predetta dal GOE. Il valor medio degli spacing è $\langle D \rangle = 41.66 \pm 2.61$ eV, calcolato su $N = 70$ livelli.

3.2 D_{best}

Per una stima più accurata della spaziatura media tra livelli, è stato effettuato un fit della distribuzione sperimentale delle spaziature con la distribuzione teorica di Wigner associata al Gaussian Orthogonal Ensemble (GOE).

In questo modo la spaziatura media $\langle D \rangle$ non viene più calcolata aritmeticamente dal set di dati, ma viene trattata come parametro libero del modello e determinata minimizzando la funzione χ^2 tra il numero di eventi osservati e quello atteso in ciascun intervallo energetico:

$$N_{th} = N_{sp} \int_{\Delta D} P(D; \langle D \rangle) dD$$

Dove N_{th} è il numero teorico atteso nel bin i , ovvero il numero di spaziature (spacing) che ci si aspetta di trovare in un determinato intervallo di spacing.

N_{sp} è invece il numero di spacing sperimentale tra due livelli consecutivi. Il prodotto tra la probabilità predetta dalla distribuzione di Wigner e il numero totale di spacing osservati (N_{sp}) rende possibile, infatti, passare da una distribuzione di probabilità a un conteggio legato al numero atteso di eventi.

La funzione χ^2 è definita come:

$$\chi^2(\langle D \rangle) = \sum_{i=1}^{n_{\text{bin}}} \frac{(N_i^{\text{exp}} - N_i^{\text{th}})^2}{\sigma_i^2} \quad (3.5)$$

dove N_i^{exp} è il numero di spazature osservate nel bin i , N_i^{th} è il numero atteso secondo la distribuzione di Wigner, e $\sigma_i = \sqrt{N_i^{\text{exp}}}$ è l'incertezza statistica di Poisson sul conteggio. Il numero di gradi di libertà è $n_{\text{dof}} = n_{\text{bin}} - 1 = 14$, sottraendo un solo grado di libertà in quanto l'unico parametro libero è $\langle D \rangle_{\text{best}}$. La normalizzazione della curva non costituisce un parametro aggiuntivo poiché N_{sp} è fissato dal numero di spazature sperimentali osservate.

La minimizzazione della funzione χ^2 è un metodo statistico utilizzato per determinare i parametri di un modello teorico che meglio si adattano a un insieme di dati sperimentali. Il suo scopo è trovare i valori dei parametri che minimizzino la somma dei quadrati delle differenze tra i valori osservati e quelli attesi dal modello, pesate per le incertezze di misura: il parametro ottimale $\langle D \rangle_{\text{best}}$ è proprio quello che porta χ^2 al suo valore minimo, tramite uno scan sul parametro $\langle D \rangle$ nell'intervallo $[0.5 \langle D \rangle_{\text{aritm}}, 1.5 \langle D \rangle_{\text{aritm}}]$.

Come si può vedere in Fig.3.2, i dati sperimentali sono stati rappresentati come punti blu con barre di errore $\sigma_i = \sqrt{N_i}$ sull'asse y e $\sigma_x = \Delta D/2$ sull'asse x , pari alla metà della larghezza del bin. Come si può osservare dalla figura, alcuni punti sperimentali si discostano in modo visibile dalla curva teorica di Wigner. Questo fatto è atteso e non inficia sulla validità del confronto. Con un campione di soli $N = 70$ livelli infatti, le fluttuazioni statistiche nei singoli bin sono dell'ordine di $\sqrt{N_i}$, e quindi relativamente grandi rispetto al contenuto dello stesso bin. Il valore di $\chi^2/\text{ndof} = 15.94/14 \approx 1.14$ tuttavia conferma che le fluttuazioni osservate sono

compatibili con una variazione statistica attorno alla distribuzione teorica. Questo conferma dunque un buon accordo tra i dati sperimentali e il modello del GOE.

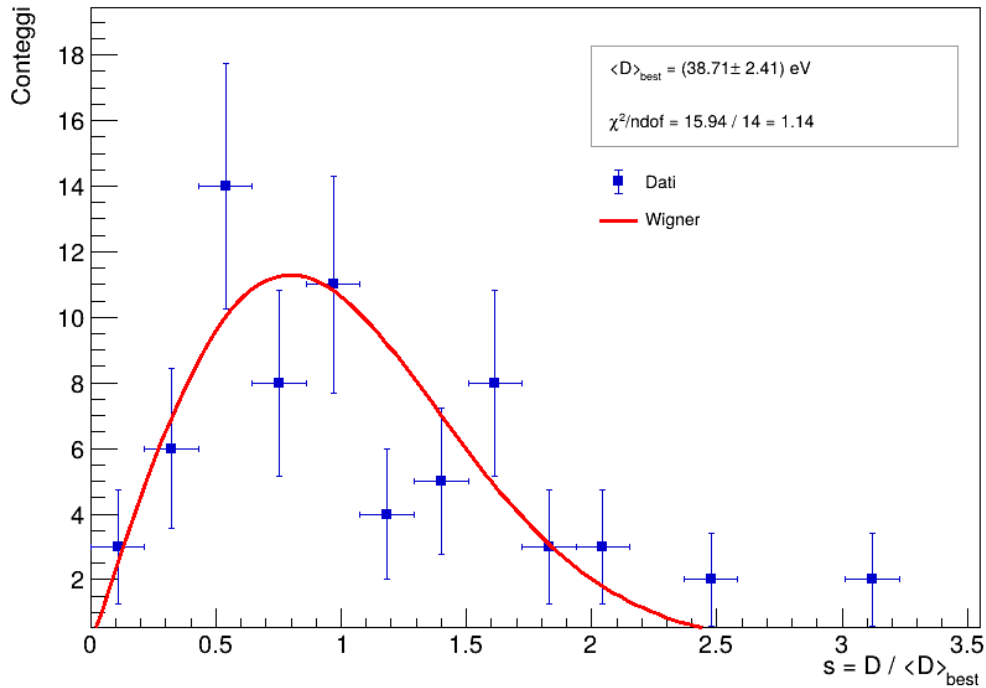


Figura 3.2: Distribuzione delle spazature D per i livelli di risonanza del nucleo ^{166}Er . I punti blu con barre di errore rappresentano i conteggi sperimentali per bin; la curva rossa è il fit con la distribuzione di Wigner. Il risultato del fit fornisce $\langle D \rangle_{\text{best}} = (38.71 \pm 2.41)$ eV, con $\chi^2/\text{ndof} = 15.94/14$.

In Tab.3.1 sono riportati i risultati dell'analisi della media delle spazature e del fit.

Quantità	Valore
Media aritmetica $\langle D \rangle_{\text{aritm}}$	$(41.66 \pm 2.61) \text{ eV}$
Media da fit (Wigner) $\langle D \rangle_{\text{best}}$	$(38.71 \pm 2.41) \text{ eV}$
χ_{min}^2	15.94
NDOF	14
χ^2/NDOF	1.14

Tabella 3.1: Risultati della media delle spaziature e qualità del fit per i livelli di ^{166}Er .

Come precedentemente sottolineato, la distribuzione di Wigner predice $P(D) \propto D$ per $D \rightarrow 0$, ovvero una soppressione della probabilità di trovare livelli molto ravvicinati, nota appunto come *level repulsion*. Questo comportamento è in contrasto con la distribuzione di Poisson $P(D) = \frac{1}{\langle D \rangle} e^{-D/\langle D \rangle}$, che ci si aspetta per livelli non correlati, che invece raggiunge il suo massimo per $D \rightarrow 0$.

Il confronto con i dati sperimentali dimostra anche graficamente lo svuotamento del primo bin, in accordo con la previsione del GOE e in disaccordo con la statistica poissoniana. Questo conferma la presenza di correlazioni a corto raggio tra i livelli energetici di ^{166}Er .

È stato poi confrontato il risultato ottenuto con il valore tabulato, Ref.[16], risultato compatibile entro l'errore associato.:

$$D_0 = 36.2 \pm 1.8 \text{ eV} \quad (3.6)$$

3.3 Conteggio cumulativo

La funzione di conteggio cumulativo $N(E)$, definita come il numero di livelli con energia inferiore a E , è formalmente espressa come:

$$N(E) = \int_{-\infty}^E dE' \sum_n \delta(E' - E_n) \quad (3.7)$$

CAPITOLO 3. ANALISI DATI

Dove E_n sono le energie di risonanza di ^{166}Er ordinate in ordine crescente, e $N(E)$ è il contatore che vale 1 dopo la prima risonanza, 2 dopo la seconda, e così a seguire. Al crescere di E , essa aumenta di un'unità ogni volta che E supera un autovalore non degenere, rimanendo altrimenti costante. Questo è il metodo matematico rigoroso per esprimere l'operazione di conteggio.

Poiché la spaziatura media $\langle D \rangle$ può essere considerata costante nell'intervallo energetico analizzato, la funzione $N(E)$ cresce in media linearmente con E . È dunque possibile confrontarla con rette della forma:

$$N(E) = A + B \cdot E \quad (3.8)$$

dove si è posto $A = 0$ e $B = 1/\langle D \rangle$, ottenendo:

$$N(E) = \frac{E}{\langle D \rangle} \quad (3.9)$$

Le rette sono costruite utilizzando le due stime della spaziatura media: la media aritmetica $\langle D \rangle_{\text{aritm}}$ e il valore $\langle D \rangle_{\text{best}}$ estratto dal fit della distribuzione di Wigner. Il coefficiente angolare di ciascuna retta corrisponde alla densità dei livelli $\rho = dN/dE = 1/\langle D \rangle$.

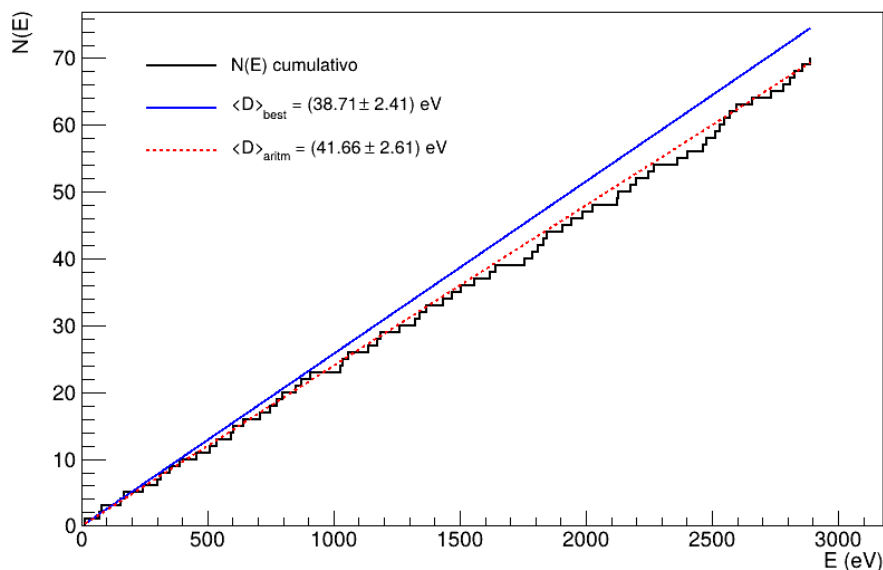


Figura 3.3: Conteggio cumulativo $N(E)$ per i livelli di risonanza di ^{166}Er . Le due rette corrispondono alle stime $\langle D \rangle_{\text{aritm}} = 41.66 \text{ eV}$ e $\langle D \rangle_{\text{best}} = 38.71 \text{ eV}$, costruite come $N(E) = E/\langle D \rangle$ con intercetta nulla.

Nel grafico, riportato in Fig.3.3, è evidente il confronto tra la retta ottenuta dalla media aritmetica $\langle D \rangle_{\text{aritm}}$ e quella ottenuta dal fit di minimizzazione del χ^2 , $\langle D \rangle_{\text{best}}$. Le due rette presentano pendenze consistenti tra loro, confermando la coerenza della stima della spaziatura media indipendentemente dal metodo utilizzato.

La piccola differenza osservata tra la retta costruita utilizzando il valore aritmetico della spaziatura media e quella con il valore estratto dal fit della distribuzione di Wigner si può interpretare come possibile evidenza della presenza di livelli mancanti nel set sperimentale. La perdita di livelli porta infatti a una sovrastima delle spaziature osservate tra livelli consecutivi. È presente quindi un aumento della media aritmetica delle spaziature e un'apparente riduzione della densità dei livelli nel conteggio cumulativo.

I risultati ottenuti sono anche in accordo con le analisi riportate in letteratura. Liou et al. (Ref.[13]) hanno studiato le proprietà statistiche dei livelli di risonanza

CAPITOLO 3. ANALISI DATI

di diversi isotopi dell'erbio, analizzando 109 livelli di ^{166}Er fino a 4200 eV: il fit lineare alla funzione cumulativa $N(E)$ forniva $\langle D \rangle = 38.3$ eV, in ottimo accordo con il valore ottenuto in questa analisi $\langle D \rangle_{\text{best}} = 38.71 \pm 2.41$ eV.

Il valore ricavato tramite il fit della distribuzione di Wigner è il più rappresentativo della densità media dei livelli.

Sarebbe possibile ricavare una stima quantitativa della frazione di livelli mancanti attraverso un'analisi specifica di *missing level statistics*, che tuttavia va oltre gli scopi di questa tesi.

Conclusioni

L'obiettivo di questa tesi è stato l'analisi delle proprietà statistiche delle spaziatore tra livelli di risonanza dell'isotopo ^{166}Er , per verificare la congruenza con il formalismo di Gaussian Orthogonal Ensemble, confrontando i risultati statistici con le previsioni teoriche della teoria di Wigner.

L'analisi è stata fatta tramite il framework ROOT del CERN, utilizzando i dati provenienti dalle misure relative alle energie di risonanza di ^{166}Er fatte nella facility n_TOF. A partire da un campione di $N = 70$ livelli, è stata calcolata la spaziatura media aritmetica $\langle D \rangle_{\text{aritm}} = (41.66 \pm 2.61)$ eV. La distribuzione delle spaziatore normalizzate è stata confrontata con la distribuzione di Wigner, predetta dalla GOE. Successivamente si è calcolato tramite minimizzazione della funzione χ^2 il $\langle D \rangle_{\text{best}}$, con un risultato pari a $\langle D \rangle_{\text{best}} = (38.71 \pm 2.41)$ eV, con $\chi^2/\text{ndof} = 15.94/14$, indicando un buon accordo tra dati e modello teorico di Wigner.

È stato infine analizzato l'andamento della funzione di conteggio cumulativo $N(E)$ confrontandolo con rette aventi coefficiente angolare pari a $1/\langle D \rangle$, utilizzando sia il valore della spaziatura media aritmetica $\langle D \rangle_{\text{aritm}}$ sia quello ottenuto dal fit con la distribuzione di Wigner $\langle D \rangle_{\text{best}}$. I risultati ottenuti risultano consistenti con le stime precedentemente ricavate e con i dati riportati in letteratura. I risultati ottenuti mostrano dunque una coerenza significativa tra il valore medio della spaziatura dei livelli di risonanza di ^{166}Er e le previsioni del Gaussian Orthogonal Ensemble.

Bibliografia

- [1] V. Alcayne et al., *Measurement of the $^{166,167,168,170}\text{Er}(n,\gamma)$ cross-section at EAR1*, Proposal to the ISOLDE and Neutron Time-of-Flight Committee, European Organization for Nuclear Research (CERN), January 11 (2023).
- [2] V. Alcayne et al., *A Segmented Total Energy Detector (sTED) optimized for (n,γ) cross-section measurements at n_TOF EAR2*, Nuclear Instruments and Methods in Physics Research A (2024).
<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0969806X24000173>
- [3] J. M. Blatt and V. F. Weisskopf, *Theoretical Nuclear Physics*, Wiley, New York (1952).
- [4] N. Bohr, *Neutron Capture and Nuclear Constitution*, Nature **137**, 344 (1936).
- [5] L. Damone et al., *$^7\text{Be}(n,p)$ cross section measurement for the Cosmological Lithium Problem at the n_TOF facility at CERN*, EPJ Web of Conferences **184**, 02004 (2018).
doi:10.1051/epjconf/201818402004
- [6] G. J. Dilorio, *Direct Physical Measurement of Mass Yields in Thermal Fission of Uranium-235*, Garland, New York (1979).
- [7] SUNY Geneseo Nuclear Physics Group, $^{27}\text{Al}(n,p)^{27}\text{Mg}$, <https://www.geneseo.edu/nuclear/27alnp27mg>
- [8] C. Guerrero et al., *The n_TOF Total Absorption Calorimeter for neutron capture measurements at CERN*, Nucl. Instrum. Methods A **608**, 424 (2009).

BIBLIOGRAFIA

- <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S016890020901465X>
- [9] C. Guerrero et al., *Performance of the neutron time-of-flight facility n_TOF at CERN*, Eur. Phys. J. A **49**, 27 (2013).
<https://doi.org/10.1140/epja/i2013-13027-6>
- [10] D. K. Jha, *Elements of Nuclear Reactors*, Discovery Publishing House, p. 65 (2004).
- [11] K. S. Krane, *Introductory Nuclear Physics*, Wiley (1987).
- [12] J. Lilley, *Nuclear Physics: Principles and Applications*, Wiley (2001).
- [13] H. I. Liou, H. S. Camarda, S. Wynchank, M. Slagowitz, G. Hacken, F. Rahn, J. Rainwater, *Neutron-Resonance Spectroscopy VIII. The Separated Isotopes of Erbium: Evidence for Dyson's Theory Concerning Level Spacings*, Columbia University Report (1971).
- [14] M. L. Mehta, *Random Matrices*, 3rd ed., Elsevier, Amsterdam (2004).
- [15] S. F. Mughabghab, *Atlas of Neutron Resonances*, Elsevier (2006).
- [16] S. F. Mughabghab, *Atlas of Neutron Resonances, Volume 2: Resonance Properties and Thermal Cross Sections $Z = 61-102$* .
- [17] *n_TOF experiment at CERN*.
<https://ntof-exp.web.cern.ch/>
- [18] M. Pârvu, P. Krawczun, V. A. Kudryavtsev, *An optimized C_6D_6 detector for studies of resonance-dominated (n,γ) cross-sections*.
- [19] J. A. Pavón-Rodríguez et al. (n_TOF Collaboration), *Characterisation of the neutron beam in the n_TOF-EAR2 experimental area at CERN following the spallation target upgrade*, Eur. Phys. J. A **61**, 277 (2025).
<https://doi.org/10.1140/epja/s10050-025-01727-x>
- [20] P. Rinard, *Neutron interactions with matter*, in *Passive Nondestructive Assay of Nuclear Materials*, pp. 375–377 (1991).

BIBLIOGRAFIA

- [21] T. Wang et al., *Measurements of neutron total cross-sections and resonance parameters of erbium at the Pohang Neutron Facility* (2009).
- [22] H. A. Weidenmüller and G. E. Mitchell, *Random matrices and chaos in nuclear physics: Nuclear structure*, Rev. Mod. Phys. **81**, 539 (2009).