

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

SCUOLA DI SCIENZE
Corso di Laurea in Matematica

Il Teorema di Arnol'd-Liouville
sui sistemi hamiltoniani integrabili

Tesi di Laurea in Equazioni Differenziali

Relatore:
Chiar.ma Prof.ssa
Simonetta Abenda

Presentata da:
Elena Dotti

Anno Accademico 2024/2025

Ai miei nonni

Introduzione

Durante il XIX secolo, partendo dalla meccanica lagrangiana, il matematico e fisico William Rowan Hamilton (1805-1865) introdusse la nozione di funzione di Hamilton (o hamiltoniana) e sviluppò il formalismo legato ad essa da cui nacque la meccanica hamiltoniana. Tra i vari elementi di questa formulazione è importante ricordare le equazioni di Hamilton e i sistemi hamiltoniani integrabili, che saranno argomenti centrali in questo elaborato di tesi. In particolare, si vuole arrivare a trattare il teorema di Arnol'd-Liouville; questo diede le condizioni sotto le quali potessero essere risolte le equazioni di Hamilton. Sviluppato tra il XIX e il XX secolo dai matematici Joseph Liouville (1809-1882), che pose le basi studiando l'integrazione delle equazioni differenziali e l'invarianza del volume nello spazio delle fasi, e successivamente da Vladimir Arnold (1937-2010), che nel 1963 con il suo intervento ha permesso di concludere la dimostrazione, descrivendo la struttura topologica globale del sistema (lo spazio delle fasi) data da tori invarianti. Si introducono quindi, inizialmente, tutte le definizioni e i risultati necessari sui sistemi hamiltoniani, che vengono considerati autonomi. Segue poi una discussione su un altro elemento molto importante del formalismo hamiltoniano, ovvero le trasformazioni di coordinate strettamente canoniche, con le loro proprietà e caratterizzazioni. Queste infatti sono di grande rilevanza siccome preservano la struttura delle equazioni di Hamilton. Tra queste, la più rilevante è la trasformazione in coordinate di azione-angolo, che ha difatti un ruolo fondamentale nel teorema di Arnol'd-Liouville, oltre che nella definizione di sistema integrabile secondo Liouville. Questo teorema infatti, il cui obiettivo dell'elaborato è dimostrarlo, enuncia che, preso un sistema hamiltoniano a n gradi di libertà, tale che abbia n integrali primi del moto, f_1, \dots, f_n , in involuzione tra loro e con gradienti indipendenti, allora questo ammette una trasformazione canonica stretta (azione-angolo) tale per cui il sistema trasformato dipende solo dalle variabili azione e gli angoli avanzano in modo lineare nel tempo. Dunque, ricapitolando, il teorema di Arnol'd-Liouville pone le condizioni affinché un sistema hamiltoniano sia integrabile, in particolare la soluzione si riduce a trovare le variabili di azione-angolo, dove la dinamica si semplifica in un moto uniforme e dunque l'integrazione risulta semplice.

Indice

Introduzione	i
1 Richiami sui sistemi hamiltoniani	1
1.1 Le equazioni di Hamilton e parentesi di Poisson	1
1.2 Sistemi hamiltoniani integrabili	5
2 Le trasformazioni canoniche	9
2.1 Trasformazioni canoniche strette	9
2.2 Trasformazioni canoniche strette e parentesi di Poisson	14
2.3 Trasformazioni canoniche strette e 1-forma di Liouville	16
3 Il teorema di Arnol'd-Liouville	20
3.1 Il teorema di Arnol'd-Liouville	20
3.2 Esempi di sistemi hamiltoniani integrabili	31
Bibliografia	37

Capitolo 1

Richiami sui sistemi hamiltoniani

Nel seguente capitolo si vogliono riportare alcune definizioni e risultati preliminari riguardanti i sistemi hamiltoniani, affinché si possano avere tutte le nozioni necessarie per comprendere il teorema principale che verrà sviluppato all'interno della tesi.

1.1 Le equazioni di Hamilton e parentesi di Poisson

Durante la trattazione, si considera come dominio un sottoinsieme aperto in \mathbb{R}^{2n} che verrà indicato con A . Analogamente, questo può anche essere denotato come $\Omega_p \times \Omega_q$, dove Ω_p e Ω_q sono aperti di \mathbb{R}^n . Le funzioni utilizzate, a meno di specifiche, si assumeranno di classe $C^{(\infty)}(A, \mathbb{R})$, ovvero regolari, in realtà, come si noterà in seguito, è sufficiente che siano di classe $C^{(2)}(A, \mathbb{R})$.

Definizione 1.1 (Sistemi hamiltoniani). *Siano dati A un sottoinsieme aperto di \mathbb{R}^{2n} , $(p, q) = (p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n)$ un elemento di A e $H : A \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione regolare. Il sistema composto dalle seguenti $2n$ equazioni differenziali ordinarie*

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad i = 1, \dots, n. \quad (1.1)$$

è detto sistema hamiltoniano di Hamiltoniana H .

Le equazioni in (1.1) sono dette equazioni di Hamilton; le variabili p_i sono dette momenti coniugati alle coordinate q_i ; n è il numero di gradi di libertà del sistema e A è detto spazio delle fasi. Nella notazione data dal prodotto cartesiano $\Omega_p \times \Omega_q$; Ω_p rappresenta lo spazio delle quantità di moto mentre Ω_q quello delle posizioni.

Definizione 1.2 (Campo vettoriale hamiltoniano). *Sia $X_H : A \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ dato da*

$$X_H = \left(-\frac{\partial H}{\partial q}, \frac{\partial H}{\partial p} \right) = \left(-\frac{\partial H}{\partial q_1}, \dots, -\frac{\partial H}{\partial q_n}, \frac{\partial H}{\partial p_1}, \dots, \frac{\partial H}{\partial p_n} \right),$$

questo è detto campo vettoriale hamiltoniano associato ad H .

Utilizzando la notazione seguente:

$$x = (x_1, \dots, x_{2n}) = (p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n),$$

e preso il campo vettoriale hamiltoniano X_H , è possibile vedere le (1.1) in modo compatto come:

$$\dot{x} = X_H.$$

Si consideri ora il gradiente dell'Hamiltoniana $H(p, q)$, denotato con ∇H o $\partial_x H$, vettore contenente le derivate parziali rispetto a $x = (p, q)$:

$$\nabla H = \left(\frac{\partial H}{\partial p_1}, \dots, \frac{\partial H}{\partial p_n}, \frac{\partial H}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial H}{\partial q_n} \right) = \left(\frac{\partial H}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial H}{\partial x_{2n}} \right) = \partial_x H,$$

viene introdotta la matrice antisimmetrica \mathbb{E} , detta identità symplettica, della seguente forma:

$$\mathbb{E} = \begin{pmatrix} \mathbb{O} & -\mathbb{I} \\ \mathbb{I} & \mathbb{O} \end{pmatrix},$$

questa è di dimensione $2n \times 2n$ e i blocchi sono $n \times n$; \mathbb{O} corrisponde alla matrice nulla e \mathbb{I} è l'identità. Essa inoltre verifica le seguenti uguaglianze:

$$\mathbb{E}^{-1} = -\mathbb{E} = \mathbb{E}^T. \quad (1.2)$$

È possibile passare dal vettore $\partial_x H$ al campo vettoriale X_H , tramite la matrice \mathbb{E} appena definita, attraverso la relazione

$$X_H = \mathbb{E} \partial_x H. \quad (1.3)$$

Definizione 1.3 (Flusso del sistema hamiltoniano). *Siano $A \subseteq \mathbb{R}^{2n}$ un aperto, $H : A \rightarrow \mathbb{R}$ funzione hamiltoniana e (p_0, q_0) in A dato iniziale. Si definisce Φ_H^t il flusso del sistema hamiltoniano e $\Phi_H^t(p_0, q_0)$ è la soluzione delle equazioni di Hamilton, al tempo t , con dato iniziale (p_0, q_0) .*

Se il flusso è definito per ogni $t \in \mathbb{R}$ questo viene detto completo e in generale verrà assunto come tale.

Nel caso di sistemi Hamiltoniani autonomi vale il principio di conservazione dell'energia:

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial q} \cdot \dot{q} + \frac{\partial H}{\partial p} \cdot \dot{p} \stackrel{(1.1)}{=} \frac{\partial H}{\partial q} \cdot \frac{\partial H}{\partial p} - \frac{\partial H}{\partial p} \cdot \frac{\partial H}{\partial q} = 0.$$

Ovvero l'hamiltoniana è costante lungo le soluzioni, $H(\Phi_H^t(p, q)) = H(p, q)$. Analogamente, le superfici di energia costante $\Sigma_E = \{(p, q) \in A : H(p, q) = E\}$ sono invarianti, cioè $\Phi_H^t(\Sigma_E) = \Sigma_E$. In particolare se Σ_E è una superficie compatta, e il dato iniziale $(p_0, q_0) \in \Sigma_E$, allora il flusso è completo. Si richiama ora il seguente risultato, che vale anche se il flusso non è completo ma definito su un intervallo $I \subseteq \mathbb{R}$ dipendente da (p_0, q_0) dati iniziali.

Teorema 1.4 (L'hamiltoniana è costante lungo le curve integrali). *Data H funzione hamiltoniana di dominio A , aperto di \mathbb{R}^{2n} , (p_0, q_0) in A dato iniziale e sia $\varphi(t)$ soluzione delle equazioni di Hamilton definita per ogni t in $]\tau_-(p_0, q_0), \tau_+(p_0, q_0)[$. Allora $H(\varphi(t)) = H(p_0, q_0)$.*

Dimostrazione. Si vuole mostrare che $\frac{d}{dt}(H \circ \varphi)(t) = 0$; ovvero che $H(p, q)$ è costante lungo $\varphi(t)$. Utilizzando la regola della catena vale

$$\frac{d}{dt}(H \circ \varphi)(t) = \langle (\nabla_p H(\varphi(t)), \nabla_q H(\varphi(t))), \frac{d\varphi}{dt}(t) \rangle,$$

essendo $\varphi(t)$ soluzione delle equazioni di Hamilton, il secondo membro è uguale a

$$\langle (\nabla_p H(\varphi(t)), \nabla_q H(\varphi(t))), (\nabla_q H(\varphi(t)), -\nabla_p H(\varphi(t))) \rangle_{\mathbb{R}^{2n}},$$

infine, svolgendo il prodotto scalare in \mathbb{R}^{2n} questo risulta

$$\langle \nabla_p H(\varphi(t)), \nabla_q H(\varphi(t)) \rangle_{\mathbb{R}^n} - \langle \nabla_p H(\varphi(t)), \nabla_q H(\varphi(t)) \rangle_{\mathbb{R}^n} = 0.$$

Prendendo quindi primo e ultimo termine di questa serie di uguaglianze otteniamo la tesi. \square

Nel contesto della meccanica hamiltoniana risulta importante definire un'operazione binaria tra funzioni data dalla seguente definizione.

Definizione 1.5 (Parentesi di Poisson). *Sia $A \subseteq \mathbb{R}^{2n}$ un aperto e siano $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$ due funzioni regolari,*

$$\{f, g\} = \frac{\partial f}{\partial q} \cdot \frac{\partial g}{\partial p} - \frac{\partial f}{\partial p} \cdot \frac{\partial g}{\partial q}, \quad (1.4)$$

questa è detta parentesi di Poisson.

Si ricorda che p e q sono vettori in \mathbb{R}^n , $p = (p_1, \dots, p_n)$ e $q = (q_1, \dots, q_n)$, perciò la parentesi di Poisson si scrive esplicitamente nel seguente modo:

$$\{f, g\} = \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial q_j} \cdot \frac{\partial g}{\partial p_j} - \frac{\partial f}{\partial p_j} \cdot \frac{\partial g}{\partial q_j} \right).$$

Osservazione 1.6. Anche in questo caso, è possibile riprendere la notazione vista in precedenza data da $x = (x_1, \dots, x_{2n})$ e, utilizzando la matrice simplettica \mathbb{E} , si ottiene

$$\{f, g\} = \partial_x f \cdot \mathbb{E} \partial_x g. \quad (1.5)$$

Proposizione 1.7. *La Parentesi di poisson gode delle seguenti proprietà:*

1. *Antisimmetria* $\{f, g\} = -\{g, f\}$;

$$2. \text{ Linearità } \{c_1 f_1 + c_2 f_2, g\} = c_1 \{f_1, g\} + c_2 \{f_2, g\};$$

$$3. \text{ Regola di Leibniz } \{fh, g\} = f \{h, g\} + \{f, g\} h.$$

Dimostrazione. Partendo alla definizione (1.4), e utilizzando le proprietà note delle derivate, risulta facile verificare quanto sopra, basta quindi svolgere dei semplici passaggi:

$$1. \{f, g\} = \frac{\partial f}{\partial q} \cdot \frac{\partial g}{\partial p} - \frac{\partial f}{\partial p} \cdot \frac{\partial g}{\partial q} = - \left(\frac{\partial g}{\partial q} \cdot \frac{\partial f}{\partial p} - \frac{\partial g}{\partial p} \cdot \frac{\partial f}{\partial q} \right) = - \{g, f\}.$$

2. Sfruttando la proprietà di linearità delle derivate si ottiene:

$$\begin{aligned} \{c_1 f_1 + c_2 f_2, g\} &= \left(c_1 \frac{\partial f_1}{\partial q} + c_2 \frac{\partial f_2}{\partial q} \right) \cdot \frac{\partial g}{\partial p} - \left(c_1 \frac{\partial f_1}{\partial p} + c_2 \frac{\partial f_2}{\partial p} \right) \cdot \frac{\partial g}{\partial q} \\ &= c_1 \left(\frac{\partial f_1}{\partial q} \cdot \frac{\partial g}{\partial p} - \frac{\partial f_1}{\partial p} \cdot \frac{\partial g}{\partial q} \right) + c_2 \left(\frac{\partial f_2}{\partial q} \cdot \frac{\partial g}{\partial p} - \frac{\partial f_2}{\partial p} \cdot \frac{\partial g}{\partial q} \right) \\ &= c_1 \{f_1, g\} + c_2 \{f_2, g\}. \end{aligned}$$

3. Avendo il prodotto di due funzioni si usa la regola di Leibniz per le derivate:

$$\begin{aligned} \{fh, g\} &= \frac{\partial fh}{\partial q} \cdot \frac{\partial g}{\partial p} - \frac{\partial fh}{\partial p} \cdot \frac{\partial g}{\partial q} \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial q} h + f \frac{\partial h}{\partial q} \right) \cdot \frac{\partial g}{\partial p} - \left(\frac{\partial f}{\partial p} h + f \frac{\partial h}{\partial p} \right) \cdot \frac{\partial g}{\partial q} \\ &= f \left(\frac{\partial h}{\partial q} \cdot \frac{\partial g}{\partial p} - \frac{\partial h}{\partial p} \cdot \frac{\partial g}{\partial q} \right) + \left(\frac{\partial f}{\partial q} \cdot \frac{\partial g}{\partial p} - \frac{\partial f}{\partial p} \cdot \frac{\partial g}{\partial q} \right) h \\ &= f \{h, g\} + \{f, g\} h. \end{aligned}$$

□

Osservazione 1.8. L'antisimmetria ha come conseguenza immediata $\{f, f\} = 0$.

Corollario 1.9. *Se una delle due funzioni, nella parentesi di Poisson, è una funzione costante $g \equiv c \in \mathbb{R}$; allora vale $\{f, c\} = 0$.*

Più in generale, è possibile dimostrare che, se la funzione g è data dalla composizione di un'altra funzione con f ; allora vale $\{f, g\} = 0$.

Esercizio 1.10. Se $g(p, q) = G(f(p, q))$ con $G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, allora $\{f, g\} = 0$. Anche in questo caso partendo dalla definizione (1.4) si ottiene

$$\begin{aligned} \{f, G(f)\} &= \frac{\partial f}{\partial q} \cdot \frac{\partial G(f)}{\partial p} - \frac{\partial f}{\partial p} \cdot \frac{\partial G(f)}{\partial q} \\ &= \frac{\partial f}{\partial q} \cdot \left(\frac{dG}{df} \cdot \frac{\partial f}{\partial p} \right) - \frac{\partial f}{\partial p} \cdot \left(\frac{dG}{df} \cdot \frac{\partial f}{\partial q} \right) \\ &= \frac{dG}{df} \left(\frac{\partial f}{\partial q} \cdot \frac{\partial f}{\partial p} - \frac{\partial f}{\partial p} \cdot \frac{\partial f}{\partial q} \right) = 0. \end{aligned}$$

Si nota dunque che le parentesi di Poisson hanno diverse proprietà; è importante ricordare tra queste l'identità di Jacobi, lunga da dimostrare ma non difficile.

Proposizione 1.11 (Identità di Jacobi). *Dati $A \subseteq \mathbb{R}^{2n}$ un aperto e $f, g, h : A \rightarrow \mathbb{R}$ tre funzioni. Allora è soddisfatta la seguente relazione:*

$$\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} = 0 \quad (1.6)$$

Dimostrazione. Si nota immediatamente la presenza di derivate seconde,

$$\{f, \{g, h\}\} = \frac{\partial f}{\partial q} \cdot \frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{\partial g}{\partial q} \cdot \frac{\partial h}{\partial p} - \frac{\partial g}{\partial p} \cdot \frac{\partial h}{\partial q} \right) - \frac{\partial f}{\partial p} \cdot \frac{\partial}{\partial q} \left(\frac{\partial g}{\partial q} \cdot \frac{\partial h}{\partial p} - \frac{\partial g}{\partial p} \cdot \frac{\partial h}{\partial q} \right).$$

É quindi opportuno introdurre la seguente notazione compatta, affinché la lettura della dimostrazione sia più fluida;

$$\frac{\partial f}{\partial p} = f_p, \quad \frac{\partial f}{\partial p^2} = f_{p^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial p \partial q} = f_{pq}.$$

Essendo le funzioni considerate almeno $C^2(A, \mathbb{R})$, per il lemma di Schwarz, l'ordine di derivazione delle derivate parziali miste non conta, ovvero, $\frac{\partial f}{\partial p \partial q} = \frac{\partial f}{\partial q \partial p}$. Quindi la parentesi sopra, con la nuova notazione e sfruttando la regola di Leibniz per le derivate, diventa:

$$\{f, \{g, h\}\} = f_q \cdot (g_{pq}h_p + g_qh_{p^2} - g_{p^2}h_q - g_ph_{pq}) - f_p \cdot (g_{q^2}h_p + g_qh_{pq} - g_{pq}h_q - g_ph_{q^2}),$$

le altre parentesi si ottengono banalmente invertendo l'ordine delle f, g, h

$$\{g, \{h, f\}\} = g_q \cdot (h_{pq}f_p + h_qf_{p^2} - h_{p^2}f_q - h_pf_{pq}) - g_p \cdot (h_{q^2}f_p + h_qf_{pq} - h_{pq}f_q - h_pf_{q^2}),$$

$$\{h, \{f, g\}\} = h_q \cdot (f_{pq}g_p + f_qg_{p^2} - f_{p^2}g_q - f_pg_{pq}) - h_p \cdot (f_{q^2}g_p + f_qg_{pq} - f_{pq}g_q - f_pg_{q^2}).$$

Infine, sviluppando i prodotti, i vari elementi a due a due si cancellano. \square

1.2 Sistemi hamiltoniani integrabili

In questa sezione verranno fornite ulteriori definizioni per poter arrivare a parlare dei sistemi hamiltoniani integrabili; questi saranno argomento di discussione grazie al teorema di Arnol'd-Liouville di cui si tratterà in seguito. In questo caso le funzioni hanno come dominio un sottoinsieme $A' = A \times I$; dove $A \subseteq \mathbb{R}^{2n}$ aperto e $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo aperto.

Le parentesi di Poisson, viste nel paragrafo precedente, nel contesto della meccanica hamiltoniana, forniscono una formula per calcolare il cambiamento nel tempo di una qualsiasi grandezza fisica, $f(p, q, t)$, nel sistema, infatti

$$\dot{f} = \frac{\partial f}{\partial p} \cdot \dot{p} + \frac{\partial f}{\partial q} \cdot \dot{q} + \frac{\partial f}{\partial t}.$$

Da qui è facile vedere, utilizzando le equazioni di Hamilton (1.1), che vale

$$\dot{f} = \frac{\partial f}{\partial p} \cdot \left(-\frac{\partial H}{\partial q} \right) + \frac{\partial f}{\partial q} \cdot \left(\frac{\partial H}{\partial p} \right) + \frac{\partial f}{\partial t} = \{f, H\} + \frac{\partial f}{\partial t}.$$

Proposizione 1.12. *Data $f : A \times I \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione che non dipende dal tempo t ; allora vale $\dot{f} = \{f, H\}$.*

Dimostrazione. Dalle uguaglianze riportate sopra la conclusione è ovvia; siccome per ipotesi vale $\frac{\partial f}{\partial t} = 0$, di conseguenza si ottiene

$$\dot{f} = \frac{\partial f}{\partial p} \cdot \dot{p} + \frac{\partial f}{\partial q} \cdot \dot{q} = \frac{\partial f}{\partial p} \cdot \left(-\frac{\partial H}{\partial q} \right) + \frac{\partial f}{\partial q} \cdot \left(\frac{\partial H}{\partial p} \right) = \{f, H\}.$$

□

Corollario 1.13. *Una funzione che non dipende dal tempo, $f : A \times I \rightarrow \mathbb{R}$, ha parentesi di Poisson nulla con l'hamiltoniana H se e solo se è una costante del moto.*

Osservazione 1.14. Attraverso le parentesi di Poisson, è possibile scrivere le equazioni di Hamilton anche nel seguente modo:

$$\dot{q}_i = \{q_i, H\}, \quad \dot{p}_i = \{p_i, H\}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Considerando ora come f e g le funzioni date da $p_i = p_i(p, q)$ e $q_i = q_i(p, q)$ si ottengono le parentesi di Poisson elementari:

$$\{p_i, p_j\}, \quad \{q_i, q_j\}, \quad \{q_i, p_j\}, \quad i, j = 1, \dots, n. \quad (1.7)$$

È possibile svolgere i calcoli, trovando il risultato di ciascuna:

$$\begin{aligned} \{p_i, p_j\} &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial p_i}{\partial q_k} \cdot \frac{\partial p_j}{\partial p_k} - \frac{\partial p_i}{\partial p_k} \cdot \frac{\partial p_j}{\partial q_k} \right) = 0, \\ \{q_i, q_j\} &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial q_i}{\partial q_k} \cdot \frac{\partial q_j}{\partial p_k} - \frac{\partial q_i}{\partial p_k} \cdot \frac{\partial q_j}{\partial q_k} \right) = 0, \\ \{q_i, p_j\} &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial q_i}{\partial q_k} \cdot \frac{\partial p_j}{\partial p_k} - \frac{\partial q_i}{\partial p_k} \cdot \frac{\partial p_j}{\partial q_k} \right) = \delta_{i,j}. \end{aligned}$$

Si ricorda che le derivate parziali valgono:

$$\frac{\partial p_i}{\partial p_k} = \delta_{i,k}, \quad \frac{\partial p_i}{\partial q_k} = 0, \quad \frac{\partial q_i}{\partial q_k} = \delta_{i,k}, \quad \frac{\partial q_i}{\partial p_k} = 0, \quad i, k = 1 \dots, n$$

dove $\delta_{i,k}$ è detta delta di Kronecker ed è tale che

$$\delta_{i,k} = \begin{cases} 1 & i = k \\ 0 & i \neq k \end{cases}$$

Definizione 1.15 (Integrale primo). Una funzione f di classe $C^{(2)}(A \times I, \mathbb{R})$ si dice integrale primo del sistema hamiltoniano di hamiltoniana H se vale

$$\{f, H\} = 0.$$

Osservazione 1.16. Da Corollario 1.13, se f è una costante del moto allora è anche un integrale primo.

Teorema 1.17. Siano f_1, f_2 , di classe $C^{(2)}(A \times I, \mathbb{R})$, due integrali primi del sistema hamiltoniano di hamiltoniana H ; allora, la loro parentesi di Poisson, $\{f_1, f_2\}$, è un integrale primo.

Dimostrazione. Si vuole dimostrare che $\{H, \{f_1, f_2\}\} = 0$. Sfruttando l'identità di Jacobi (1.6) si ottiene

$$\{H, \{f_1, f_2\}\} + \{f_1, \{f_2, H\}\} + \{f_2, \{H, f_1\}\} = 0,$$

siccome f_1, f_2 sono integrali primi del sistema hamiltoniano di hamiltoniana H valgono:

$$\{f_1, H\} = 0, \quad \{f_2, H\} = 0,$$

e quindi, per le proprietà viste in precedenza nella Proposizione 1.7 e nel Corollario 1.9, rimane solamente il primo addendo. Da ciò si ottiene la tesi

$$\{H, \{f_1, f_2\}\} = 0.$$

□

Definizione 1.18 (integrali primi in involuzione). Dati due integrali primi f_1, f_2 di classe $C^{(2)}(A \times I, \mathbb{R})$ si dicono in involuzione se la loro parentesi di Poisson è nulla.

$$\{f_1, f_2\} = 0$$

In modo del tutto analogo si può anche dire che f_1 e f_2 commutano; infatti per l'antisimmetria varrà anche $0 = \{f_2, f_1\}$.

Osservazione 1.19. Se f e g commutano allora anche i flussi hamiltoniani di f e g , pensate come funzioni di Hamilton, commutano

$$\{f, g\} = 0 \iff \Phi_f^s \circ \Phi_g^t = \Phi_g^t \circ \Phi_f^s .$$

Definizione 1.20 (Sistema hamiltoniano integrabile). *Dato un sistema hamiltoniano di Hamiltoniana $H : A \rightarrow \mathbb{R}$ questo viene detto integrabile se ammette n -integrali primi in involuzione.*

Capitolo 2

Le trasformazioni canoniche

Per quanto concerne il formalismo lagrangiano è noto che qualsiasi trasformazione differenziabile e invertibile delle coordinate conservi la forma delle equazioni di Lagrange; ovvero riscrivendo correttamente la lagrangiana si ottengono equazioni del moto equivalenti alle precedenti.

È quindi naturale chiedersi se questo possa valere anche per i sistemi hamiltoniani o eventualmente quali trasformazioni facciano questo, infatti, in questo caso, oltre alle coordinate q_i , vengono trasformati anche i momenti coniugati p_i .

2.1 Trasformazioni canoniche strette

Si consideri il seguente cambiamento di variabili, in cui le coordinate $\tilde{q} = (\tilde{q}_1, \dots, \tilde{q}_n)$ e i momenti $\tilde{p} = (\tilde{p}_1, \dots, \tilde{p}_n)$ si trovano entrambi nella trasformazione:

$$p_i = u_i(\tilde{p}, \tilde{q}, t), \quad q_i = v_i(\tilde{p}, \tilde{q}, t), \quad i = 1, \dots, n. \quad (2.1)$$

questa si può scrivere anche nel seguente modo:

$$\psi(\tilde{p}, \tilde{q}, t) = (u(\tilde{p}, \tilde{q}, t), v(\tilde{p}, \tilde{q}, t)) = (p, q). \quad (2.2)$$

Avendo precedentemente spostato l'attenzione sui sistemi autonomi, è possibile limitarsi a considerare trasformazioni indipendenti dal tempo, nelle quali le (2.1) diventano:

$$p_i = u_i(\tilde{p}, \tilde{q}), \quad q_i = v_i(\tilde{p}, \tilde{q}), \quad i = 1, \dots, n.$$

e di conseguenza la relazione (2.2) è data da:

$$\psi(\tilde{p}, \tilde{q}) = (u(\tilde{p}, \tilde{q}), v(\tilde{p}, \tilde{q})) = (p, q), \quad (2.3)$$

dove $\psi : \tilde{A} \rightarrow A$, diffeomorfismo e \tilde{A}, A sono aperti di \mathbb{R}^{2n} .

Definizione 2.1 (Trasformazione canonica in senso stretto). *Una trasformazione di coordinate indipendente dal tempo $(p, q) = \psi(\tilde{p}, \tilde{q})$ si dice canonica in senso stretto, se comunque si prenda $H : A \rightarrow \mathbb{R}$ hamiltoniana, allora le equazioni di Hamilton*

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}, \quad \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p},$$

sono equivalenti alle nuove equazioni

$$\dot{\tilde{p}} = -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{q}}, \quad \dot{\tilde{q}} = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{p}},$$

ove \tilde{H} denota la funzione trasformata $\tilde{H} = H \circ \psi$ ovvero

$$\tilde{H}(\tilde{p}, \tilde{q}) = H(\psi(\tilde{p}, \tilde{q})). \quad (2.4)$$

Al fine di chiarire il concetto, si propongono due esempi: il primo riguarda la trasformazione in coordinate polari, che non è strettamente canonica; il secondo considera il cambiamento di variabili in azione-angolo, che invece rappresenta una trasformazione canonica stretta.

Esempio 2.2. Le coordinate polari

Un cambiamento di variabili molto utilizzato è appunto dato dalle coordinate polari. Le equazioni corrispondenti alla trasformazione $\psi(r, \theta) = (u(r, \theta), v(r, \theta))$ sono

$$p = r \cos \theta, \quad q = r \sin \theta,$$

e l'inversa $\psi^{-1}(p, q)$ è data da

$$r = \sqrt{p^2 + q^2}, \quad \theta = \arctan\left(\frac{q}{p}\right).$$

Se questa trasformazione fosse canonica, per la definizione data, le equazioni di Hamilton trasformate devono essere equivalenti alle precedenti, qualsiasi funzione hamiltoniana $H : A \rightarrow \mathbb{R}$ si prenda. Si consideri però la seguente funzione

$$H(p, q) = \frac{\omega}{2}(p^2 + q^2),$$

questa diventa cambiando in coordinate polari utilizzando (2.4):

$$\tilde{H}(r, \theta) = \frac{\omega}{2}r^2. \quad (2.5)$$

Dalle equazioni di Hamilton (1.1) si ottiene

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} = -\omega q, \quad \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} = \omega p. \quad (2.6)$$

Ora bisogna vedere quanto valgono \dot{r} e $\dot{\theta}$; sviluppando la derivata $\frac{dr}{dt}$ si trova

$$\dot{r} = \frac{\partial r}{\partial q} \cdot \frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial r}{\partial p} \cdot \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{q}{\sqrt{p^2 + q^2}} \cdot \dot{q} + \frac{p}{\sqrt{p^2 + q^2}} \cdot \dot{p},$$

e sostituendo \dot{q} e \dot{p} con quelle in (2.6) si ottiene

$$\dot{r} = \frac{q}{\sqrt{p^2 + q^2}} \cdot (\omega p) + \frac{p}{\sqrt{p^2 + q^2}} \cdot (-\omega q) = 0.$$

Analogamente, per trovare $\dot{\theta}$, si svolge la derivata $\frac{d\theta}{dt}$

$$\dot{\theta} = \frac{\partial \theta}{\partial q} \cdot \frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial \theta}{\partial p} \cdot \frac{\partial p}{\partial t} = \left(\frac{1}{1 + \left(\frac{q}{p}\right)^2} \cdot \frac{1}{p} \right) \cdot \dot{q} + \left(\frac{1}{1 + \left(\frac{q}{p}\right)^2} \cdot \left(-\frac{q}{p^2}\right) \right) \cdot \dot{p},$$

e sostituendo con le equazioni di Hamilton (2.6), trovate in precedenza, si ha:

$$\begin{aligned} \dot{\theta} &= \frac{1}{1 + \left(\frac{q}{p}\right)^2} \cdot \frac{1}{p} \cdot (\omega p) + \frac{1}{1 + \left(\frac{q}{p}\right)^2} \cdot \left(-\frac{q}{p^2}\right) \cdot (-\omega q) \\ &= \frac{\omega}{1 + \left(\frac{q}{p}\right)^2} + \frac{\omega \left(\frac{q}{p}\right)^2}{1 + \left(\frac{q}{p}\right)^2} = \frac{\omega \left(1 + \left(\frac{q}{p}\right)^2\right)}{1 + \left(\frac{q}{p}\right)^2} = \omega. \end{aligned}$$

Rimane da controllare che le equazioni di Hamilton relative alla trasformazione (2.5), che corrispondono a

$$\dot{r} = -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial \theta} = 0, \quad \dot{\theta} = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial r} = \omega r,$$

coincidano con quelle appena trovate sopra, ma è evidente che $\dot{\theta}$ sia diverso dall'equazione precedente.

Cambiando leggermente la trasformazione appena vista, è possibile ottenerne una canonica.

Esempio 2.3. Le variabili azione angolo

Si consideri ora il seguente cambiamento di variabili dato da $\psi(I, \alpha) = (u(I, \alpha), v(I, \alpha))$

$$p = \sqrt{2I} \cdot \cos(\alpha), \quad q = \sqrt{2I} \cdot \sin(\alpha), \quad (2.7)$$

avente inversa $\psi^{-1}(p, q)$ data dalle seguenti equazioni

$$I = \frac{1}{2}(p^2 + q^2), \quad \alpha = \arctan\left(\frac{q}{p}\right).$$

Si vuole provare che questa trasformazione è canonica in senso stretto, andando a vedere chi sono \dot{I} e $\dot{\alpha}$

$$\dot{I} = \frac{\partial I}{\partial q} \cdot \dot{q} + \frac{\partial I}{\partial p} \cdot \dot{p} = q\dot{q} + p\dot{p},$$

$$\dot{\alpha} = \frac{\partial \alpha}{\partial q} \dot{q} + \frac{\partial \alpha}{\partial p} \dot{p} = \frac{1}{1 + \left(\frac{q}{p}\right)^2} \cdot \frac{\dot{q}}{p} + \frac{1}{1 + \left(\frac{q}{p}\right)^2} \cdot \left(-\frac{q\dot{p}}{p^2}\right) = \frac{p\dot{q} - q\dot{p}}{p^2 + q^2}.$$

Sostituendo le variabili p e q con la relazione data da (2.7) e usando le equazioni di Hamilton (1.1) si ottengono

$$\begin{aligned} \dot{I} &= \left(\sqrt{2I} \cdot \cos(\alpha)\right) \cdot \left(-\frac{\partial H}{\partial q}\right) + \left(\sqrt{2I} \cdot \sin(\alpha)\right) \cdot \left(\frac{\partial H}{\partial p}\right) = \\ &= \frac{\partial H}{\partial q} \cdot \left(-\sqrt{2I} \cdot \cos(\alpha)\right) + \frac{\partial H}{\partial p} \cdot \left(\sqrt{2I} \cdot \sin(\alpha)\right), \\ \dot{\alpha} &= \frac{\left(\sqrt{2I} \cdot \cos(\alpha)\right) \cdot \left(\frac{\partial H}{\partial p}\right) - \left(\sqrt{2I} \cdot \sin(\alpha)\right) \cdot \left(-\frac{\partial H}{\partial q}\right)}{2I} = \\ &= \frac{\frac{\partial H}{\partial p} \cdot \left(\sqrt{2I} \cdot \cos(\alpha)\right) + \frac{\partial H}{\partial q} \cdot \left(\sqrt{2I} \cdot \sin(\alpha)\right)}{2I} = \\ &= \frac{\partial H}{\partial p} \cdot \left(\frac{\cos(\alpha)}{\sqrt{2I}}\right) + \frac{\partial H}{\partial q} \cdot \left(\frac{\sin(\alpha)}{\sqrt{2I}}\right). \end{aligned}$$

Dalla definizione, utilizzando (2.4), è possibile esprimere l'hamiltoniana trasformata come

$$\tilde{H}(I, \alpha) = H(\psi(p, q)) = H\left(\sqrt{2I} \cdot \cos(\alpha), \sqrt{2I} \cdot \sin(\alpha)\right),$$

e da qui è possibile calcolare le nuove equazioni di Hamilton

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{H}}{\partial I} &= \frac{\partial H}{\partial p} \cdot \frac{\partial p}{\partial I} + \frac{\partial H}{\partial q} \cdot \frac{\partial q}{\partial I} \\ &= \frac{\partial H}{\partial p} \cdot \left(\frac{\cos(\alpha)}{\sqrt{2I}}\right) + \frac{\partial H}{\partial q} \cdot \left(\frac{\sin(\alpha)}{\sqrt{2I}}\right), \\ \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \alpha} &= \frac{\partial H}{\partial p} \cdot \frac{\partial p}{\partial \alpha} + \frac{\partial H}{\partial q} \cdot \frac{\partial q}{\partial \alpha} \\ &= \frac{\partial H}{\partial p} \cdot \left(-\sqrt{2I} \cdot \sin(\alpha)\right) + \frac{\partial H}{\partial q} \cdot \left(\sqrt{2I} \cdot \cos(\alpha)\right). \end{aligned}$$

Ovvero si trova che le nuove equazioni rispetto alle variabili (I, α) sono equivalenti alle precedenti in (p, q) ; infatti, osservando le \dot{I} e $\dot{\alpha}$ trovate in precedenza, è banale vedere che valgono:

$$\dot{I} = -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial \alpha}, \quad \dot{\alpha} = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial I}.$$

Queste nuove variabili (I, α) vengono dette variabili azione-angolo.

Anche in questo caso, si può esprimere la stretta canonicità in modo compatto, prendendo $x = (x_1, \dots, x_{2n})$. Si consideri quindi un sistema di equazioni differenziali

$\dot{x} = X(x)$ e un cambiamento di variabili $x = \psi(\tilde{x})$. Ora derivando rispetto al tempo l'equazione relativa alla trasformazione e usando la regola della catena si ottiene

$$\dot{x} = \frac{d\psi(\tilde{x})}{dt} = \left(\sum_{j=1}^{2n} \frac{\partial \psi_1}{\partial \tilde{x}_j} \cdot \frac{\partial \tilde{x}_j}{\partial t}, \dots, \sum_{j=1}^{2n} \frac{\partial \psi_{2n}}{\partial \tilde{x}_j} \cdot \frac{\partial \tilde{x}_j}{\partial t} \right),$$

in particolare, sapendo che la matrice jacobiana J , relativa a $\psi(\tilde{x})$, è tale che

$$J_{i,j} = \left(\frac{\partial \psi_i}{\partial \tilde{x}_j} \right),$$

e ricordando $\dot{\tilde{x}} = \left(\frac{\partial \tilde{x}_1}{\partial t}, \dots, \frac{\partial \tilde{x}_{2n}}{\partial t} \right)$, risulta

$$\dot{x} = J(\tilde{x})\dot{\tilde{x}}. \quad (2.8)$$

Nelle nuove variabili, si ha la seguente equazione del moto $\dot{\tilde{x}} = \tilde{X}(\tilde{x})$, ora applicando il cambiamento $x = \psi(\tilde{x})$ al sistema originario $\dot{x} = X(x)$, grazie a (2.8), si ottiene la seguente relazione tra X e \tilde{X} :

$$X(\psi(\tilde{x})) = J(\tilde{x})\tilde{X}(\tilde{x}).$$

Invece, per quanto riguarda il campo vettoriale X_H , presa una qualsiasi H funzione di Hamilton, si può esprimere il campo del trasformato \tilde{X}_H come:

$$\tilde{X}_H = X_{\tilde{H}}, \quad X_H \circ \psi = JX_{H \circ \psi}. \quad (2.9)$$

infatti basta usare la definizione di stretta canonicità con (2.4)

Proposizione 2.4 (Condizione necessaria e sufficiente per la canonicità). *Data $x = \psi(\tilde{x})$ trasformazione di coordinate, questa è canonica in senso stretto se e solamente se la matrice jacobiana J della cambiamento di variabili soddisfa*

$$J\mathbb{E}J^T = \mathbb{E}. \quad (2.10)$$

Dimostrazione. Per dimostrare questa identità si utilizzano la relazione tra campo vettoriale hamiltoniano e coefficienti del differenziale, definita dalla (1.3), e la relazione appena vista tra campo vettoriale hamiltoniano e campo vettoriale della trasformata, data da (2.9). In questo modo si ottiene

$$\mathbb{E}\partial_x H \circ \psi = J\mathbb{E}\partial_x \tilde{H},$$

nel secondo membro dell'equazione analizzando $\partial_x \tilde{H}$ e riprendendo (2.4) si ha

$$\partial_x \tilde{H} = J^T \partial_x H \circ \psi,$$

e quindi si può banalmente riscrivere nel seguente modo:

$$\mathbb{E}\partial_x H \circ \psi = J\mathbb{E}J^T \partial_x H \circ \psi,$$

essendo H una hamiltoniana generica, questo vale per ogni H se e solamente se è soddisfatta la tesi, ovvero $J\mathbb{E}J^T = \mathbb{E}$. \square

Le matrici J che soddisfano tale relazione si dicono *simplettiche*.

Esempio 2.5. Si può quindi mostrare che il cambiamento di variabili dell'Esempio 2.3 soddisfa questa proposizione; calcolando J la Jacobiana della trasformazione $\psi(I, \alpha)$ si ottiene

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial p}{\partial I} & \frac{\partial p}{\partial \alpha} \\ \frac{\partial q}{\partial I} & \frac{\partial q}{\partial \alpha} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\cos(\alpha)}{\sqrt{2I}} & -\sqrt{2I} \sin(\alpha) \\ \frac{\sin(\alpha)}{\sqrt{2I}} & \sqrt{2I} \cos(\alpha) \end{pmatrix}.$$

Moltiplicando le matrici come mostrato in (2.10) si ottiene

$$\begin{pmatrix} \frac{\cos(\alpha)}{\sqrt{2I}} & -\sqrt{2I} \sin(\alpha) \\ \frac{\sin(\alpha)}{\sqrt{2I}} & \sqrt{2I} \cos(\alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\cos(\alpha)}{\sqrt{2I}} & \frac{\sin(\alpha)}{\sqrt{2I}} \\ -\sqrt{2I} \sin(\alpha) & \sqrt{2I} \cos(\alpha) \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\cos(\alpha)}{\sqrt{2I}} & -\sqrt{2I} \sin(\alpha) \\ \frac{\sin(\alpha)}{\sqrt{2I}} & \sqrt{2I} \cos(\alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2I} \sin(\alpha) & -\sqrt{2I} \cos(\alpha) \\ \frac{\cos(\alpha)}{\sqrt{2I}} & \frac{\sin(\alpha)}{\sqrt{2I}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ossia vale la relazione precedentemente citata e perciò per la Proposizione 2.4 la trasformazione $(p, q) = \psi(I, \alpha)$ è strettamente canonica.

2.2 Trasformazioni canoniche strette e parentesi di Poisson

Definizione 2.6 (Trasformazione canonica che preserva le parentesi di Poisson). *Data $(p, q) = \psi(\tilde{p}, \tilde{q})$ trasformazione di coordinate, si dice che questa preserva le parentesi di Poisson se prese due funzioni $f, g : A \subseteq \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$ e $\tilde{f} = f \circ \psi$, $\tilde{g} = g \circ \psi$ le loro trasformate, allora risulta*

$$\{\tilde{f}, \tilde{g}\} = \{f, g\} \circ \psi. \quad (2.11)$$

Ovvero quello che si vuole intendere è che; nella prima parentesi le derivate parziali vengono fatte rispetto alle nuove variabili \tilde{p} e \tilde{q} ; nella seconda si deriva rispetto alle vecchie variabili p e q . Quindi, senza esplicitare il cambiamento di variabili, si può scrivere brevemente come:

$$\{\tilde{f}, \tilde{g}\} = \{f, g\}. \quad (2.12)$$

Osservazione 2.7. Se ψ è una trasformazione che preserva le parentesi di Poisson, questa di conseguenza preserva anche le parentesi di Poisson elementari; ovvero servendoci della trasformazione in (2.3) valgono:

$$\{u_i, u_j\} = 0, \quad \{v_i, v_j\} = 0, \quad \{u_i, v_j\} = \delta_{i,j} \quad i, j = 1, \dots, n. \quad (2.13)$$

Non ovvio invece è il viceversa; ovvero, l'invarianza per trasformazioni delle parentesi di Poisson elementari implica che tutte le parentesi di Poisson vengano preservate. Infatti:

$$\{\tilde{f}, \tilde{g}\} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \tilde{q}_k} \cdot \frac{\partial \tilde{g}}{\partial \tilde{p}_k} - \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \tilde{p}_k} \cdot \frac{\partial \tilde{g}}{\partial \tilde{q}_k} \right),$$

ricordando che $\tilde{f} = f(u_1(\tilde{p}, \tilde{q}), \dots, u_n(\tilde{p}, \tilde{q}), v_1(\tilde{p}, \tilde{q}), \dots, v_n(\tilde{p}, \tilde{q}))$ e utilizzando (2.3) come notazione si ha:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \tilde{q}_k} &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial u_i} \cdot \frac{\partial u_i}{\partial \tilde{q}_k} + \frac{\partial f}{\partial v_i} \cdot \frac{\partial v_i}{\partial \tilde{q}_k} \right), \\ \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \tilde{p}_k} &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial u_i} \cdot \frac{\partial u_i}{\partial \tilde{p}_k} + \frac{\partial f}{\partial v_i} \cdot \frac{\partial v_i}{\partial \tilde{p}_k} \right). \end{aligned}$$

Analogamente, cambiando \tilde{f} con \tilde{g} e effettuando raccoglimenti opportuni, notando che è possibile ridursi ad avere le parentesi di Poisson elementari, risulta

$$\begin{aligned} \{\tilde{f}, \tilde{g}\} &= \sum_{i,j=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial q_j} \cdot \{v_i, v_j\} \right) + \sum_{i,j=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_j} \cdot \{v_i, u_j\} \right) + \\ &+ \sum_{i,j=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_j} \cdot \{u_i, v_j\} \right) + \sum_{i,j=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial p_j} \cdot \{u_i, u_j\} \right). \end{aligned}$$

Da qui si osserva la tesi, utilizzando il risultato dato da (2.13), infatti rimarranno solo

$$\begin{aligned} \{\tilde{f}, \tilde{g}\} &= \sum_{i,j=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_j} \right) - \sum_{i,j=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_j} \right) = \\ &= \sum_{i,j=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_j} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_j} \right) = \{f, g\}. \end{aligned}$$

ovvero otteniamo proprio la definizione (2.12).

Proposizione 2.8 (La stretta canonicità preserva le parentesi di Poisson). *La trasformazione $(p, q) = \psi(\tilde{p}, \tilde{q})$ preserva le parentesi di Poisson se e solo se è strettamente canonica.*

Dimostrazione. È possibile utilizzare la notazione compatta data da (1.5) per entrambi i membri della definizione (2.11)

$$\partial_{\tilde{x}} \tilde{f} \cdot \mathbb{E} \partial_{\tilde{x}} \tilde{g} = (\partial_x f \cdot \mathbb{E} \partial_x g) \circ \psi,$$

utilizzando le relazioni $\partial_{\tilde{x}}\tilde{f} = J^T \partial_x f \circ \psi$ e $\partial_{\tilde{x}}\tilde{g} = J^T \partial_x g \circ \psi$, si può riscrivere il primo membro come segue:

$$(\partial_x f \cdot J \mathbb{E} J^T \partial_x g) \circ \psi = (\partial_x f \cdot \mathbb{E} \partial_x g) \circ \psi,$$

ma eliminando ψ , essendo diffeomorfismo, siccome la relazione è soddisfatta per ogni f e g se e solamente se vale $J \mathbb{E} J^T = \mathbb{E}$, grazie alla Proposizione 2.4 si ha la tesi. \square

Esempio 2.9. Anche in questo caso si può mostrare che la trasformazione dell'Esempio 2.3 preserva la parentesi di Poisson e, per l'Osservazione 2.7, basta verificare che vengano preservate le parentesi di Poisson elementari; ricordiamo il cambiamento di variabili

$$p = u(I, \alpha) = \sqrt{2I} \cos(\alpha), \quad q = v(I, \alpha) = \sqrt{2I} \sin(\alpha),$$

quello che si deve dimostrare è che valgano le seguenti:

$$\{u, u\} = 0, \quad \{v, v\} = 0, \quad \{u, v\} = 1.$$

Le prime due derivano banalmente dalla proprietà di antisimmetria della parentesi di Poisson; mentre per la terza basta svilupparla ed eseguire dei semplici calcoli:

$$\frac{\partial u}{\partial I} \cdot \frac{\partial v}{\partial \alpha} - \frac{\partial v}{\partial I} \cdot \frac{\partial u}{\partial \alpha} = \left(\frac{\cos(\alpha)}{\sqrt{2I}} \right) \cdot \left(\sqrt{2I} \cos(\alpha) \right) - \left(\frac{\sin(\alpha)}{\sqrt{2I}} \right) \cdot \left(-\sqrt{2I} \sin(\alpha) \right) = 1.$$

2.3 Trasformazioni canoniche strette e 1-forma di Liouville

Un'ultima caratterizzazione delle trasformazioni canoniche si ha attraverso la 1-forma di Liouville, che viene definita come segue:

$$p \cdot dq = p_1 dq_1 + \cdots + p_n dq_n. \quad (2.14)$$

Definizione 2.10 (Trasformazione che preserva che preserva debolmente la 1-forma di Liouville). *Data $(p, q) = \psi(\tilde{p}, \tilde{q})$ trasformazione, si dice che questa preserva debolmente la 1-forma di Liouville, se esiste localmente $f(\tilde{p}, \tilde{q})$ tale che risulti soddisfatta l'identità differenziale*

$$u \cdot dv = \tilde{p} \cdot d\tilde{q} + df. \quad (2.15)$$

ovvero vale che $u \cdot dv - \tilde{p} \cdot d\tilde{q}$ è una forma differenziale localmente esatta. È possibile scrivere, con un abuso di notazione, l'identità (2.15) in un modo più intuitivo

$$p \cdot dq = \tilde{p} \cdot d\tilde{q} + df.$$

Sfruttando la regola del prodotto del differenziale su $d(p \cdot q)$ e $d(\tilde{p} \cdot \tilde{q})$ e sostituendo in (2.15) si ottiene la seguente relazione equivalente:

$$q \cdot dp = \tilde{q} \cdot d\tilde{p} + df'.$$

dove $f' = -f + u \cdot v - \tilde{p} \cdot \tilde{q}$, questa esiste se e solo se esiste f . Sottraendo la seconda espressione alla prima è possibile vedere un'altra definizione analoga data da

$$u \cdot dv - v \cdot du = \tilde{q} \cdot d\tilde{p} - \tilde{p} \cdot d\tilde{q} + dg.$$

dove $g = 2f - u \cdot v + \tilde{p} \cdot \tilde{q}$ e, anche questa, esiste se e solo se esiste f . Vedendola ora in notazione compatta

$$\mathbb{E}\psi \cdot d\psi - \mathbb{E}\tilde{x} \cdot d\tilde{x} = dg, \tag{2.16}$$

sarà utile per dimostrare il seguente risultato.

Proposizione 2.11. *Data $(p, q) = \psi(\tilde{p}, \tilde{q})$ trasformazione, questa preserva debolmente la 1-forma di Liouville se e solo se è strettamente canonica.*

Dimostrazione. Ricordando che $d\psi = Jd\tilde{x}$, la definizione in (2.16) si può scrivere come

$$(J^T \mathbb{E}\psi - \mathbb{E}\tilde{x}) \cdot d\tilde{x} = dg.$$

Si denota il campo vettoriale con $X = J^T(\tilde{x})\mathbb{E}\psi(\tilde{x}) - \mathbb{E}\tilde{x}$; g esiste se e solo se la forma $X(\tilde{x}) \cdot d\tilde{x}$ è esatta, dunque equivale a richiedere

$$\frac{\partial X_i}{\partial \tilde{x}_j} = \frac{\partial X_j}{\partial \tilde{x}_i} \quad i, j = 1, \dots, 2n.$$

In particolare si osserva che vale

$$\frac{\partial X_i}{\partial \tilde{x}_j} - \frac{\partial X_j}{\partial \tilde{x}_i} = 2(J^T \mathbb{E}J - \mathbb{E})_{i,j}.$$

Ma questa vale per ogni $i, j = 1, \dots, 2n$, se e solo se la matrice J è simplettica, e quindi dalla Proposizione 2.4 si ha la tesi. \square

Esempio 2.12. Riprendendo sempre l'Esempio 2.3, essendo una trasformazione strettamente canonica, mostriamo che preserva debolmente la 1-forma di Liouville. Troviamo quindi una $f(I, \alpha)$ tale per cui valga la definizione, ovvero $df = p \cdot dq - I \cdot d\alpha$ localmente. Ricordando che

$$p = \sqrt{2I} \cos(\alpha), \quad q = \sqrt{2I} \sin(\alpha). \\ I = \frac{1}{2}(p^2 + q^2), \quad \alpha = \arctan\left(\frac{q}{p}\right).$$

Si riscrive la forma differenziale, mettendo in evidenza le variabili (I, α) , così da ottenere $df = f_1(I, \alpha)d\alpha + f_2(I, \alpha)dI$

$$\begin{aligned} df &= \sqrt{2I} \cos(\alpha) \left(\frac{\partial q}{\partial \alpha} d\alpha + \frac{\partial q}{\partial I} dI \right) - I \cdot d\alpha \\ &= \sqrt{2I} \cos(\alpha) \left(\sqrt{2I} \cos(\alpha) \cdot d\alpha + \frac{1}{\sqrt{2I}} \sin(\alpha) \cdot dI \right) - I \cdot d\alpha \\ &= I \cos(2\alpha) \cdot d\alpha + \frac{\sin(2\alpha)}{2} \cdot dI. \end{aligned}$$

Siccome le variabili (I, α) sono definite nell'insieme $[0, +\infty[\times [-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$, che è convesso quindi stellato, se la forma differenziale è chiusa, questa è anche esatta sul dominio di definizione grazie al Lemma di Poincaré. Prima di procedere si verifica quindi che $f_1(I, \alpha)d\alpha + f_2(I, \alpha)dI$ sia chiusa

$$\frac{\partial(I \cos(2\alpha))}{\partial I} = \frac{\partial(\cos(\alpha) \sin(\alpha))}{\partial \alpha},$$

il che è banalmente vero svolgendo le derivate. Si trova ora $f(I, \alpha)$ con dei semplici calcoli

$$f = \int f_1(I, \alpha)d\alpha = \int I \cos(2\alpha)d\alpha = \frac{1}{2}I \sin(2\alpha) + g(I),$$

dove $g(I)$ è una funzione che dipende solo dalla variabile I

$$\frac{\partial f}{\partial I} = \frac{1}{2} \sin(2\alpha) + g'(I),$$

siccome $f_2(I, \alpha) = \frac{\partial f}{\partial I}$, da qui vale che $g'(I) = 0$. Ora si conclude

$$f = \int \frac{1}{2} \sin(2\alpha)dI = I \cos(\alpha) \sin(\alpha) + c.$$

Si è trovata una famiglia di $f(I, \alpha)$ che soddisfa la definizione.

È infine possibile costruire una serie di trasformazioni, tali che siano canoniche, grazie alle funzioni generatrici.

Definizione 2.13 (Funzione generatrice). Sia $F(\tilde{q}, q)$ una funzione di $2n$ variabili definita su un aperto di \mathbb{R}^{2n} e in esso si abbia

$$\det \left(\frac{\partial^2 F}{\partial \tilde{q}_i \partial q_j} \right) \neq 0. \quad (2.17)$$

Allora le equazioni

$$p = \frac{\partial F}{\partial q}(\tilde{q}, q), \quad \tilde{p} = -\frac{\partial F}{\partial \tilde{q}}(\tilde{q}, q), \quad (2.18)$$

definiscono implicitamente un cambiamento di coordinate locale $(p, q) = \psi(\tilde{p}, \tilde{q})$. Dove $\psi: \tilde{A} \rightarrow A$, $A = \psi(\tilde{A})$.

La condizione (2.17) garantisce l'invertibilità locale di $\tilde{p} = -\frac{\partial F}{\partial \tilde{q}}(\tilde{q}, q)$ nelle q e grazie al teorema delle funzioni implicite si ottiene $q = v(\tilde{p}, \tilde{q})$, sostituendo poi in p si trova anche $p = u(\tilde{p}, \tilde{q})$. Quindi si riesce a esprimere tutto in funzione di (\tilde{p}, \tilde{q}) e perciò si ottiene la trasformazione ψ , invertendo il procedimento si trova l'inversa $\psi^{-1}(p, q) = (\tilde{p}, \tilde{q})$.

Proposizione 2.14. *La trasformazione ψ generata è una trasformazione canonica.*

Dimostrazione. Si sfrutta la caratterizzazione della canonicità data con la 1-forma di Liouville e, trovando la giusta f , si conclude grazie alla Proposizione 2.11. Ponendo $f(\tilde{p}, \tilde{q}) = F(\tilde{q}, v(\tilde{p}, \tilde{q}))$ si ottiene

$$df = \frac{\partial F}{\partial q}(\tilde{q}, v(\tilde{p}, \tilde{q})) \cdot dv + \frac{\partial F}{\partial \tilde{q}}(\tilde{q}, v(\tilde{p}, \tilde{q})) \cdot d\tilde{q} = u \cdot dv - \tilde{p} \cdot d\tilde{q},$$

ovvero vale (2.15) e la trasformazione ψ preserva debolmente la 1-forma di Liouville. \square

Queste trasformazioni generate, però, hanno necessariamente $q = v(\tilde{p}, \tilde{q})$ che dipende da \tilde{p} ed escludono quindi i cambiamenti di coordinate del tipo:

$$p = u(\tilde{p}, \tilde{q}), \quad q = v(\tilde{q}),$$

ovvero, trasformazioni puntuali estese canonicamente ai momenti. In queste viene compresa l'identità.

Sempre sfruttando la 1-forma di Liouville, utilizzando una formula equivalente data da $p \cdot dq = -\tilde{q} \cdot d\tilde{p} + dg$ con $g = f + \tilde{p} \cdot \tilde{q}$, possiamo trovare un'altro tipo di funzione generatrice.

Proposizione 2.15. *Sia $S(\tilde{p}, q)$ tale che nel suo dominio di definizione valga:*

$$\det \left(\frac{\partial^2 S}{\partial \tilde{p}_i \partial q_j} \right) \neq 0.$$

Allora le equazioni

$$p = \frac{\partial S}{\partial q}(\tilde{p}, q), \quad \tilde{q} = \frac{\partial S}{\partial \tilde{p}}(\tilde{p}, q), \quad (2.19)$$

definiscono implicitamente una trasformazione di coordinate

$$p = u(\tilde{p}, \tilde{q}), \quad q = v(\tilde{p}, \tilde{q}),$$

che è canonica nel suo dominio di definizione.

Considerando ora la seguente funzione $S(\tilde{p}, q) = \tilde{p} \cdot q$ e utilizzando le equazioni (2.19), è possibile vedere che la trasformazione corrisponde a $p = \tilde{p}$ e $q = \tilde{q}$ ovvero l'identità, che invece prima non era compresa ma è ovviamente una trasformazione canonica.

Per concludere, rimangono escluse ancora due funzioni generatrici (ottenute nel modo analogo); nella prima si lega il vecchio momento q alla nuova posizione \tilde{q} , data dalla funzione $F_3(\tilde{q}, p)$; nella seconda questo invece viene legato al nuovo momento $F_4(\tilde{p}, p)$.

Capitolo 3

Il teorema di Arnol'd-Liouville

Si riprende in considerazione un sistema hamiltoniano autonomo, con n gradi di libertà, avente hamiltoniana $H(p, q)$; se questa non dipende da una (o più) coordinate, q_k , segue che il corrispondente momento coniugato, p_k , è costante del moto del sistema; infatti, tramite le equazioni di Hamilton (1.1) e il Corollario 1.13 vale

$$\dot{p}_k = \{p_k, H\} = -\frac{\partial H}{\partial q_k} = 0.$$

Ora se l'hamiltoniana $H(p, q)$ è indipendente da tutte le coordinate q_1, \dots, q_n , ovvero $H(p, q) = h(p)$ è funzione dei soli momenti, si ha

$$\dot{p}_i = 0, \quad \dot{q}_i = \frac{\partial h}{\partial p_i} = \omega_i(p), \quad i = 1, \dots, n.$$

Dunque, l'integrazione delle equazioni del moto è banale e l'integrale generale si scrive:

$$p_i(t) = p_i^0, \quad q_i = \omega_i(p^0)t + q_i^0, \quad i = 1, \dots, n. \quad (3.1)$$

dove p_i^0, q_i^0 , indicano i dati iniziali.

Le coordinate assenti nell'hamiltoniana vengono dette variabili cicliche, questo perché esse tipicamente sono angoli, il che si può osservare dalle (3.1), infatti, avanzano con velocità angolare costante. Ciascuna delle variabili q_i sta su un circolo, dunque, l' n -pla $q = (q_1, \dots, q_n)$ sta su un toro n -dimensionale \mathbb{T}^n . Ora, se il dominio dei momenti $p = (p_1, \dots, p_n)$ è $B \subseteq \mathbb{R}^n$, si osserva che lo spazio delle fasi è $B \times \mathbb{T}^n$; dove a ogni punto in B è attaccato come fibra un toro \mathbb{T}^n , allora il moto avviene sulla fibra ed è lineare.

3.1 Il teorema di Arnol'd-Liouville

Un sistema che può presentare una struttura come quella vista in precedenza non sempre viene descritto come tale; l'hamiltoniana $H(p, q)$, in generale, può dipendere da

tutte le variabili. É possibile però che esista una trasformazione canonica tale per cui si riesca a vedere l'hamiltoniana come funzione dei soli momenti, le nuove variabili ottenute si indicano come $(I, \alpha) = (I_1, \dots, I_n, \alpha_1, \dots, \alpha_n) \in B \times \mathbb{T}^n$,

$$(p, q) = \phi(I, \alpha), \quad \phi : B \times \mathbb{T}^n \rightarrow \phi(B \times \mathbb{T}^n) \subseteq A,$$

e sono tali che la nuova hamiltoniana $K = H \circ \phi$ dipenda solo da I , cioè $K(I, \alpha) = h(I)$.

Definizione 3.1 (sistema integrabile secondo Liouville). *Data $H : A \subseteq \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$ hamiltoniana questa si dice integrabile secondo Liouville, nel dominio $\tilde{A} \subseteq A$, se esiste una trasformazione canonica $(p, q) = \phi(I, \alpha)$, definita per $I \in B \subseteq \mathbb{R}^n$ e $\alpha \in \mathbb{T}^n$ tale che:*

i) $\tilde{A} = \phi(B \times \mathbb{T}^n)$;

ii) la nuova hamiltoniana $K = H \circ \phi$ è funzione delle sole azioni

$$K(I, \alpha) = h(I), \quad h : B \rightarrow \mathbb{R}.$$

La domanda che viene posta è quindi: sotto quali ipotesi è possibile stabilire se un sistema risponde alla definizione precedentemente vista? Il teorema di Arnol'd-Liouville dà soluzione a questo quesito. Prima di esporre l'enunciato del teorema, si riportano i seguenti risultati che serviranno ai fini della dimostrazione. Il primo, legato maggiormente all'algebra lineare, afferma:

Lemma 3.2. *Se \mathcal{T} è un sottogruppo discreto di \mathbb{R}^n , allora esistono $e_1, \dots, e_k \in \mathcal{T}$ linearmente indipendenti, $k \leq n$, tali che \mathcal{T} è costituito da tutte e sole le loro combinazioni lineari intere:*

$$\mathcal{T} = \left\{ \sum_{i=1}^k m_i e^i, m_1, \dots, m_k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Questo servirà per concludere la dimostrazione del secondo lemma, il quale enuncia:

Lemma 3.3. *Data \mathcal{M} una varietà n -dimensionale connessa, se su essa esistono X_1, \dots, X_n , n campi vettoriali tangenti, linearmente indipendenti in ogni suo punto, che commutano a due a due ed i cui flussi $\Phi_1^t, \dots, \Phi_n^t$ sono prolungabili per $t \in \mathbb{R}$, allora esiste k numero intero, $0 \leq k \leq n$, tale che \mathcal{M} è diffeomorfa al cilindro*

$$\mathcal{C}^{k, n-k} = \mathbb{T}^k \times \mathbb{R}^{n-k}.$$

Dimostrazione. Preso $t = (t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^n$, si definisce la seguente mappa $\Phi^t : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ come:

$$\Phi^t = \Phi_n^{t_n} \circ \dots \circ \Phi_1^{t_1};$$

siccome, per ipotesi, i campi vettoriali commutano, e di conseguenza anche i flussi associati ad essi, l'ordine in cui vengono applicati i vari $\Phi_i^{t_i}$ è indifferente. Fissato ora un punto $x \in \mathcal{M}$, si definisce la seguente applicazione $\Psi_x : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{M}$:

$$\Psi_x(t) = \Phi^t(x),$$

cioè fisso il punto x mentre t varia. È possibile dimostrare alcune proprietà di Ψ_x , che permetteranno di arrivare alla tesi, come:

- Ψ_x è un diffeomorfismo locale; in particolare mappa un intorno U_x di $t = 0$ in V_x intorno di x . Inanzitutto questa applicazione è differenziabile essendo composizione dei flussi $\Phi_i^{t_i}$; questi a loro volta sono differenziabili grazie al teorema di regolarità della mappa flusso, siccome i campi X_i sono regolari. Sapendo che vale

$$\frac{\partial \Phi_i^{t_i}}{\partial t_i} = X_i,$$

banalmente per ogni t segue:

$$\frac{\partial \Psi_x}{\partial t_i}(t) = \frac{\partial (\Phi_n^{t_n} \circ \dots \circ \Phi_1^{t_1})}{\partial t_i}(t) = X_i(\Psi_x(t)),$$

infatti, viene derivata solo la i -esima componente, essendo l'unica che dipende da t_i . In particolare per $t = 0$ si ha:

$$\frac{\partial \Psi_x}{\partial t_i}(0) = X_i(\Phi_i^0(x)) = X_i(x).$$

Essendo i campi X_i linearmente indipendenti per ipotesi, lo jacobiano

$$J_{\Psi_x}(0) = \frac{\partial \Psi_x}{\partial t}(0) = (X_1(x), \dots, X_n(x)),$$

ha rango massimo. Di conseguenza, per il teorema della funzione inversa, Ψ_x è invertibile, in un opportuno intorno V_x di x , ed è quindi un diffeomorfismo locale. Come conseguenza, se considero una curva $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathcal{M}$ che congiunge due punti, ad esempio $x, y \in \mathcal{M}$, gli aperti del tipo V_x , trovati sopra, ricoprono la curva al variare del tempo. Infatti, dati due punti arbitrari $x_1, x_2 \in V_x$ esiste $t \in \mathbb{R}^n$ tale che $\Phi^t(x_1) = x_2$, questo sarà dato banalmente da $t^{(2)} - t^{(1)}$, dove per $t^{(1)}$ e $t^{(2)}$ valgono rispettivamente $x_1 = \Phi^{t^{(1)}}(x)$ e $x_2 = \Phi^{t^{(2)}}(x)$.

- $\Psi_x : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{M}$ è suriettiva. Si ricorda che, essendo \mathcal{M} una varietà n -dimensionale connessa, grazie alla definizione e implicazioni topologiche, questa è anche connessa per archi. Perciò, presi due punti in \mathcal{M} esiste sempre un cammino che li collega. Si considerano dunque $x, y \in \mathcal{M}$ e $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathcal{M}$ il cammino questi due punti.

Per ogni $x' \in \gamma$ esisterà un aperto $V_{x'}$ come nel punto precedente; essendo la curva compatta, γ può essere ricoperta da un numero finito di questi aperti. Si costruisce così una catena finita di k punti nella curva, che parte da x e finisce in y :

$$x_0 = x, x_1, \dots, x_k = y,$$

questa è tale che x_{i-1} e x_i stiano nello stesso aperto V_i . Si trovano così $t^{(1)}, \dots, t^{(k)} \in \mathbb{R}^n$ tali che $x_i = \Phi^{t^{(i)}}(x_{i-1})$, ponendo $t = t^{(1)} + \dots + t^{(k)}$, si ha che $\Phi^t(x) = y$, grazie alla proprietà di gruppo di $\{\Phi^t, t \in \mathbb{R}^n\}$. Quindi per ogni $y \in \mathcal{M}$ ho trovato un tempo $t \in \mathbb{R}^n$ tale che $y = \Psi_x(t)$.

- Se Ψ_x è biiettiva il lemma è già dimostrato ponendo $k = 0$ e \mathcal{M} diffeomorfa a \mathbb{R}^n .
- Se Ψ_x non è biiettiva si considera l'insieme $\mathcal{T} \subseteq \mathbb{R}^n$ contenente i periodi di x , ovvero:

$$\mathcal{T} = \{t \in \mathbb{R}^n : \Psi_x(t) = x\} = \{t \in \mathbb{R}^n : \Phi^t(x) = x\}.$$

Questo insieme è un sottogruppo discreto di \mathbb{R}^n e non dipende da x . Infatti, presi due punti qualsiasi $x, y \in \mathcal{M}$, se $\tau \in \mathbb{R}^n$ è periodo di x allora lo è anche di y ; dal punto precedente si sa esistere $\rho \in \mathbb{R}^n$ tale che $\Psi_x(\rho) = \Phi^\rho(x) = y$ allora vale

$$\Phi^\tau(y) = \Phi^\tau(\Phi^\rho(x)) = \Phi^\rho(\Phi^\tau(x)) = \Phi^\rho(x) = y.$$

Si consideri ora il quoziente $\tilde{\mathcal{M}} = \mathbb{R}^n / \mathcal{T}$ e la proiezione $\pi : \mathbb{R}^n \rightarrow \tilde{\mathcal{M}}$, si può vedere che Ψ_x è costante lungo le classi di equivalenza, infatti se $t, s \in \mathcal{T}$ vale $\Psi_x(t) = \Psi_x(s)$

$$\Psi_x(t) = \Phi^t(x) = x = \Phi^s(x) = \Psi_x(s).$$

Quindi per la proprietà universale del quoziente esiste l'applicazione $\tilde{\Psi}_x : \tilde{\mathcal{M}} \rightarrow \mathcal{M}$, tale che questo diagramma commuti

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \xrightarrow{\Psi_x} & \mathcal{M} \\ \pi \downarrow & \nearrow \tilde{\Psi}_x & \\ \tilde{\mathcal{M}} & & \end{array}$$

ovvero vale $\pi \circ \tilde{\Psi}_x = \Psi_x$, e risulta essere un diffeomorfismo.

Per concludere, dati i punti precedenti, basta mostrare che $\tilde{\mathcal{M}}$ è diffeomorfa a $\mathcal{C}^{k, n-k}$. Riprendendo ora \mathcal{T} gruppo dei periodi, questo si è visto essere un sottogruppo discreto di \mathbb{R}^n , si può quindi utilizzare il Lemma 3.2; sia $k < n$, esisteranno $e_1, \dots, e_k \in \mathcal{T}$ tali che \mathcal{T} è costituito da solo combinazioni lineari intere. Si considerano ora e_{k+1}, \dots, e_n

tali che e_1, \dots, e_n siano una base. Si esegue ora un cambiamento di coordinate lineare invertibile dalle $t \in \mathbb{R}^n$ alle nuove variabili $\alpha \in \mathbb{R}^n$ definito da

$$t = \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i,$$

posta T una matrice $n \times n$ tale che le colonne corrispondono ai vettori e_1, \dots, e_n , si può scrivere anche nel seguente modo:

$$t = \frac{1}{2\pi} T \alpha,$$

affinché $t \in \mathcal{T}$, ovvero sia un periodo, si ha che e_1, \dots, e_k devono essere multipli interi di 2π e i restanti e_{k+1}, \dots, e_n devono essere nulli. Ora il gruppo \mathcal{T} nelle nuove variabili diventa $(2\pi\mathbb{Z})^k$ e di conseguenza il quoziente $\mathbb{R}^n / (2\pi\mathbb{Z})^k$, che è proprio $\mathcal{C}^{k, n-k}$, corrisponde a $\mathbb{R}^n / \mathcal{T}$, ovvero $\tilde{\mathcal{M}}$. Considerate le due proiezioni al quoziente $\pi : \mathbb{R}^n \rightarrow \tilde{\mathcal{M}}$ e $p : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{C}^{k, n-k}$, si osserva il seguente diagramma

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R}^n & \xrightarrow{\frac{1}{\pi}T} & \mathbb{R}^n & \xrightarrow{\Psi_x} & \mathcal{M} \\ p \downarrow & & \pi \downarrow & \nearrow \tilde{\Psi}_x & \\ \mathcal{C}^{k, n-k} & \xrightarrow{\tilde{T}} & \tilde{\mathcal{M}} & & \end{array}$$

È ben posto il diffeomorfismo $\tilde{T} : \mathcal{C}^{k, n-k} \rightarrow \tilde{\mathcal{M}}$ tale che vale $\pi \circ \frac{1}{2\pi} = \tilde{T} \circ p$. Posto ora $F = \tilde{\Psi}_x \circ \tilde{T}$ questo è un diffeomorfismo dal cilindro $\mathcal{C}^{k, n-k}$ a \mathcal{M} . \square

Nell'enunciato del teorema di Arnol'd-Liouville, date n funzioni regolari $f_1, \dots, f_n : A \subseteq \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$ e un punto $c \in \mathbb{R}^n$, si lavorerà con superfici di livello \mathcal{M}_c definite come:

$$\mathcal{M}_c = \{x \in A : f_1(x) = c_1, \dots, f_n(x) = c_n\}.$$

Continuiamo a vedere ulteriori risultati, utili ai fini della dimostrazione:

Lemma 3.4. *La 1-forma $p \cdot dq$ è chiusa su ciascuna superficie \mathcal{M}_c*

Lemma 3.5. *Se f_1, \dots, f_n sono in involuzione e sono indipendenti in un punto $x \in \mathcal{M}$, allora attorno a esso si possono scegliere coordinate canoniche locali (p, q) tali che risulti:*

$$\det \left(\frac{\partial f_i}{\partial p_j}(x) \right) \neq 0. \quad (3.2)$$

Si procede ora ad enunciare, e dimostrare, il teorema:

Teorema 3.6 (Il teorema di Arnol'd-Liouville). *Sia $A \subseteq \mathbb{R}^{2n}$ un aperto, munito di coordinate canoniche $(p, q) = (p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n)$, e siano $F_1, \dots, F_n : A \rightarrow \mathbb{R}$ funzioni regolari, a due a due in involuzione:*

$$\{F_i, F_j\} = 0 \quad i, j = 1, \dots, n. \quad (3.3)$$

Preso $c = (c_1, \dots, c_n) \in \mathbb{R}^{2n}$, consideriamo la curva di livello \mathcal{M}_c :

$$\mathcal{M}_c = \{(p, q) \in A : F_1(p, q) = c_1, \dots, F_n(p, q) = c_n\},$$

sia ora $c^* \in \mathbb{R}^n$ e assumiamo F_1, \dots, F_n indipendenti su \mathcal{M}_{c^*} ovvero:

$$\text{rango } \frac{\partial(F_1, \dots, F_n)}{\partial(p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n)} = n \quad (3.4)$$

in ogni punto di \mathcal{M}_{c^*} . Allora:

i) \mathcal{M}_{c^*} è una varietà differenziabile n -dimensionale invariante per ciascuno degli n flussi hamiltoniani $\Phi_{F_1}^t, \dots, \Phi_{F_n}^t$;

ii) se \mathcal{M}_{c^*} è una varietà compatta e connessa allora è diffeomorfa al toro n -dimensionale:

$$\mathbb{T}^n = \{(\varphi_1, \dots, \varphi_n) \bmod 2\pi\} = \mathbb{R}^n / \mathbb{Z}^n;$$

iii) nel caso compatto e connesso, esiste un intorno $\mathcal{I} \subseteq \mathbb{R}^n$ di c^* tale che, l'insieme

$$\mathcal{M}_{\mathcal{I}} = \bigcup_{c \in \mathcal{I}} \mathcal{M}_c \quad (3.5)$$

è diffeomorfo a $\mathcal{I} \times \mathbb{T}^n$ e, inoltre, in esso esistono coordinate canoniche di azione-angolo; ovvero, esiste un cambiamento di coordinate $(p, q) = \phi(I, \alpha)$, definito per

$$(I, \alpha) \in B \times \mathbb{T}^n, \quad B \subseteq \mathbb{R}^n,$$

tale che $\mathcal{M}_{\mathcal{I}} = \phi(B \times \mathbb{T}^n)$ e ciascuna funzione trasformata è funzione delle sole azioni:

$$F_i \circ \phi = \tilde{F}_i(I, \alpha) = c_i(I); \quad i = 1, \dots, n.$$

Dimostrazione. i) Per quanto concerne il primo punto, come conseguenza del teorema della funzione implicita, posta $F = (F_1, \dots, F_n) : A \rightarrow \mathbb{R}^n$, vale $\mathcal{M}_{c^*} = F^{-1}(c^*)$ e siccome F_1, \dots, F_n sono indipendenti su \mathcal{M}_{c^*} , ovvero vale la condizione (3.4), questo significa che il differenziale di F è suriettivo e dunque \mathcal{M}_{c^*} è una sottovarietà avente la seguente dimensione:

$$\dim \mathcal{M}_{c^*} = \dim A - n = n.$$

Invece, per le (3.3) vale che ciascuna delle funzioni F_1, \dots, F_n è conservata nel sistema di hamiltoniana F_i , con $i = 1, \dots, n$; ovvero \mathcal{M}_{c^*} è invariante per ciascuno dei flussi hamiltoniani $\Phi_{F_1}^t, \dots, \Phi_{F_n}^t$; cioè se parto con un punto in \mathcal{M}_{c^*} , la soluzione rimane sulla varietà per ogni istante di tempo t .

ii) Sia ora X_i il campo vettoriale associato all'hamiltoniana F_i definito nel seguente modo:

$$X_i = -\frac{\partial F_i}{\partial q} \cdot \frac{\partial}{\partial p} + \frac{\partial F_i}{\partial p} \cdot \frac{\partial}{\partial q} = \{ \cdot, F_i \},$$

grazie alla condizione (3.4) gli n campi vettoriali X_1, \dots, X_n sono linearmente indipendenti in \mathcal{M}_{c^*} e commutano tra loro grazie alla (3.3) e l'Osservazione 1.19, inoltre, essi sono tangenti a \mathcal{M}_{c^*} ; si osserva che \mathcal{M}_{c^*} è ortogonale a ciascuno dei gradienti $\nabla F_1, \dots, \nabla F_n$, infatti vale:

$$X_i \cdot \nabla F_j = \left(-\frac{\partial F_i}{\partial q}, \frac{\partial F_i}{\partial p} \right) \cdot \left(\frac{\partial F_j}{\partial p}, \frac{\partial F_j}{\partial q} \right) = -\{F_i, F_j\} = 0.$$

L'ultima uguaglianza viene garantita dalla condizione (3.3). Si hanno così tutte le ipotesi necessarie per utilizzare il Lemma 3.3, il quale ha come tesi \mathcal{M}_{c^*} è diffeomorfa al cilindro $\mathcal{C}^{k, n-k}$ per un determinato intero k , $0 \leq k \leq n$. Siccome per ipotesi \mathcal{M}_{c^*} è compatta, di conseguenza, essendo diffeomorfe, deve esserlo anche $\mathcal{C}^{k, n-k}$, che possiamo vedere come $\mathbb{T}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$, ma questo succede solo quando $k = n$, ovvero \mathcal{M}_{c^*} è diffeomorfa a \mathbb{T}^n , toro n -dimensionale.

iii) Proseguiamo con l'ultima asserzione; dallo studio della singola curva di livello \mathcal{M}_{c^*} , che nel punto precedente si è visto essere diffeomorfa al toro \mathbb{T}^n , si prosegue studiando un intorno tubolare $\mathcal{M}_{\mathcal{I}}$ di \mathcal{M}_{c^*} , definito come in (3.5), dove \mathcal{I} è un intorno in \mathbb{R}^n di c^* . Si prende ora una superficie n -dimensionale trasversa a \mathcal{M}_{c^*} , in un punto fissato x^* , che denotiamo come \mathcal{S} . Se \mathcal{I} è sufficientemente piccolo, la condizione di trasversalità ci dice che \mathcal{S} interseca ogni superficie \mathcal{M}_c in un unico punto, $x = x(c)$, che dipende dalla curva di livello, ossia da $c \in \mathcal{I}$. La superficie \mathcal{S} ammette, per definizione, una forma parametrica

$$\mathcal{S} = \{x \in A : \sigma_i(x) = 0, i = 1, \dots, n.\},$$

ricordando ora le equazioni che descrivono la superficie \mathcal{M}_c , date da $F_i(x) = c_i$ per $i = 1, \dots, n$, il fatto che le due superfici siano trasversali in x^* si traduce in

$$\det \frac{\partial(F, \sigma)}{\partial x}(x^*) \neq 0.$$

Questa assicura: l'indipendenza di F_1, \dots, F_n su tutto l'intorno tubolare $\mathcal{M}_{\mathcal{I}}$ e, per il teorema della funzione inversa, l'esistenza locale di $x = \epsilon(c, s)$ tali che $F_i(\epsilon(c, s)) = c_i$ e $\sigma_i(\epsilon(c, s)) = s_i$, dunque $x(c) = \epsilon(c, 0)$.

Nel punto precedente, per dimostrare che la superficie di livello \mathcal{M}_{c^*} , compatta e connessa, è diffeomorfa a \mathbb{T}^n , veniva definita l'applicazione $\Psi_x : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{M}_{c^*}$ e poi quozientata affinché fosse biiettiva. Ragionando in modo analogo questo si può

fare anche per $\mathcal{M}_{\mathcal{I}}$. Si considera il cilindro pieno $\Lambda = \mathcal{I} \times \mathbb{R}^n$ e la seguente mappa da Λ a valori nell'intorno tubolare $\mathcal{M}_{\mathcal{I}}$

$$G : \Lambda \rightarrow \mathcal{M}_{\mathcal{I}},$$

$$G(c, t) = \Phi^t(x(c)) = \Phi_n^{t_n} \circ \dots \circ \Phi_1^{t_1}(x(c)).$$

Fissato $\hat{c} \in \mathcal{I}$, la funzione $G(\hat{c}, t)$ si comporta come $\Psi_{x(\hat{c})}(t) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{M}_{\hat{c}}$. Siccome $\mathcal{M}_{\hat{c}}$ è una varietà regolare, compatta e connessa, la funzione G deve essere periodica, rispetto alla variabile t , con i periodi che appartengono a $\mathcal{T}(\hat{c})$, che dipende dalla superficie di livello, ossia da \hat{c} . Riprendendo la costruzione vista del Lemma 3.3 infatti vale

$$\mathcal{T}(c) = \{t \in \mathbb{R}^n : G(c, t) = x(c)\} = \{t \in \mathbb{R}^n : \Phi^t(x(c)) = x(c)\}.$$

Se $\tau \in \mathcal{T}(c)$ senza troppa difficoltà è possibile vedere

$$G(c, t + \tau) = \Phi^{t+\tau}(x(c)) = \Phi^t(\Phi^\tau(x(c))) = \Phi^t(x(c)).$$

Quozientando ora per ogni $c \in \mathcal{I}$ il cilindro Λ con $\mathcal{T}(c)$, dove \sim relazione di equivalenza è data da

$$(c_1, \tau_1) \sim (c_2, \tau_2) \iff c_1 = c_2 = c, \quad \tau_1 - \tau_2 \in \mathcal{T}(c),$$

consideriamo quindi

$$\mathcal{T} = \bigcup_{c \in \mathcal{I}} (\{c\} \times \mathcal{T}(c)),$$

definiamo $\tilde{\Lambda} = \Lambda / \sim = \Lambda / \mathcal{T}$ dato dalla proiezione al quoziente $\pi : \Lambda \rightarrow \tilde{\Lambda}$, sfruttando il ragionamento analogo del Lemma 3.3, essendo G costante per le classi di equivalenza, per la proprietà universale del quoziente, esiste il diffeomorfismo $\tilde{G} : \tilde{\Lambda} \rightarrow \mathcal{M}_{\mathcal{I}}$ tale che $G = \tilde{G} \circ \pi$.

$$\begin{array}{ccc} \Lambda & \xrightarrow{G} & \mathcal{M}_{\mathcal{I}} \\ \pi \downarrow & \nearrow \tilde{G} & \\ \tilde{\Lambda} & & \end{array}$$

In particolare, essendo $\tilde{\Lambda} = \mathcal{I} \times \mathbb{T}^n$, $\mathcal{M}_{\mathcal{I}}$ è diffeomorfo a $\mathcal{I} \times \mathbb{T}^n$.

Per concludere bisogna mostrare che su esso esistono coordinate canoniche di azione-angolo (I, α) e tali per cui le hamiltoniane F_i possono essere scritte in funzione delle sole azioni. In primo luogo si mostra come, grazie a una opportuna scelta della sezione \mathcal{S} , e come conseguenza in particolare di $x(c)$, le coordinate

(c, t) siano canoniche. Siccome F_1, \dots, F_n sono in involuzione e indipendenti in tutto l'intorno tubulare $\mathcal{M}_{\mathcal{I}}$, per il Lemma 3.5 è possibile scegliere coordinate canoniche locali (p, q) attorno a un punto $x^* \in \mathcal{M}_{c^*}$ tali per cui valga la condizione (3.2). Questa permette di poter affermare che, presa \mathcal{S} come superficie tale che le sue equazioni parametriche siano $q_i = q_i^*$, con $i = 1, \dots, n$, questa è trasversa a \mathcal{M}_{c^*} in $x^* = (p^*, q^*)$. Infatti, la condizione di trasversalità tra \mathcal{S} e \mathcal{M}_{c^*} , ossia:

$$\det \frac{\partial(F, q)}{\partial x}(x^*) \neq 0,$$

si traduce in

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial p} & \frac{\partial F}{\partial q} \\ \mathbb{O} & \mathbb{I} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial p} \end{pmatrix} \cdot \det(\mathbb{I}) = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial p} \end{pmatrix} \neq 0.$$

Sempre per la condizione (3.2) e grazie al teorema della funzione inversa si denotano ora con

$$P_i(c, q) = p_i, \quad i = 1, \dots, n,$$

le funzioni che invertono localmente F_1, \dots, F_n rispetto a p_1, \dots, p_n , cioè:

$$F_i(P(c, q), q) = c_i, \quad i = 1, \dots, n,$$

allora l'intersezione tra \mathcal{S} e \mathcal{M}_c , al variare di $c \in \mathcal{I}$ è

$$x(c) = (P(c, q^*), q^*).$$

Questa è una rappresentazione parametrica della superficie \mathcal{S} . Si vuole verificare che il cambiamento di coordinate locale sia canonico, data ora la funzione

$$W(c, q) = \int_{q^*}^q P(c, q') \cdot dq',$$

con integrale lungo un cammino qualsiasi su \mathcal{M}_c da q^* a q ; questa è ben definita in un intorno di (c^*, q^*) grazie al Lemma 3.4. È inoltre una buona funzione generatrice locale, infatti si ha

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 W}{\partial c \partial q} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial P}{\partial c} \end{pmatrix} \neq 0,$$

derivante dal fatto che P è ottenuta tramite l'inversione di F e quindi $\frac{\partial P}{\partial c}$ ha determinante non nullo. La trasformazione canonica che viene generata implicitamente, che si denota con ψ , è definita da

$$p = \frac{\partial W}{\partial q}(c, q) = P(c, q), \quad h = \frac{\partial W}{\partial c}(c, q) = \int_{q^*}^q \frac{\partial P}{\partial c}(c, q') \cdot dq'.$$

Si può mostrare che la trasformazione locale $\psi : (p, q) \rightarrow (c, h)$ generata è tale che la variabile h coniugata a c coincide, ove è definita, con t , ovvero in particolare ψ^{-1} e G coincidono. Quest'ultimo risultato, su cui non ci si sofferma sulla dimostrazione, servirà per dimostrare la canonicità della funzione G . Ora, riprendendo l'ultima affermazione, si ha che il cambiamento di coordinate $\psi^{-1} : (c, h) \rightarrow (p, q)$ mappa canonicamente un intorno U^* di $(c^*, 0)$ in un intorno V^* di (p^*, q^*) . Considerando quindi la restrizione di G su U^* , questa è una canonica. Per dimostrare che G lo è dappertutto, si considera quindi un intorno U di un punto (c', t') generico, bisogna mostrare che $G(U) = V \subseteq \mathcal{M}_{\mathcal{I}}$ in modo canonico, dove V è un intorno del punto $(p', q') = G(c', t')$. Si pone come

$$\bar{R}^{t'}(c, t) = (c, t + t'),$$

la traslazione in t di t' , e si considera come U proprio $\bar{R}^{t'}(U^*)$, V invece sarà $\Phi^{t'}(V^*)$. Si osserva ora il seguente diagramma

$$\begin{array}{ccc} U^* & \xrightarrow{G|_{U^*}} & V^* \\ \bar{R}^{t'} \downarrow & & \downarrow \Phi^{t'} \\ U & \xrightarrow{G} & V \end{array}$$

questo risulta essere commutativo, ovvero vale

$$G \circ \bar{R}^{t'} = \Phi^{t'} \circ G|_{U^*} .$$

Inoltre, siccome si ha che: $\Phi^{t'}$ è canonico, $\bar{R}^{t'}$ è una traslazione (quindi è canonica) e infine $G|_{U^*}$ è canonica, allora vedendo G nel seguente modo:

$$G = \Phi^{t'} \circ G|_{U^*} \circ \bar{R}^{-t'} ,$$

essa è canonica su tutto il suo dominio di definizione $\mathcal{I} \times \mathbb{R}^n$.

In conclusione è necessario introdurre le variabili di azione-angolo sull'intorno tubolare $\mathcal{M}_{\mathcal{I}}$. Si ricorda come nel Lemma 3.3 si è passato dalle variabili t alle variabili α

$$t = \frac{1}{2\pi} T(c)\alpha,$$

dove $T(c)$ rappresenta la matrice dei periodi T relativa alla curva di livello \mathcal{M}_c . Si vogliono ora introdurre delle nuove variabili $I = I(c)$, che dipendano solo da c , tali che valga la seguente trasformazione:

$$I = I(c), \quad \alpha(c, \tau) = 2\pi T^{-1}(c)t, \quad (3.6)$$

e questa sia canonica. Si definiscono dunque le nuove variabili I come

$$I_i(c) = \frac{1}{2\pi} \oint_{\gamma_i(c)} p \cdot dq, \quad (3.7)$$

dove γ_i è un laccio in $x \in \mathcal{M}_c$, punto qualsiasi, facendo variare di 2π il solo angolo α_i . Questa è ben definita grazie al Lemma 3.4; siccome sappiamo che sulla superficie di livello \mathcal{M}_c la forma $p \cdot dq$ è chiusa, l'integrale è invariante rispetto a cammini omotopi, e in particolare dalla scelta del punto. Considerando ora la seguente trasformazione in variabili miste:

$$I = I(c), \quad t = \frac{1}{2\pi} T(c)\alpha,$$

se questa soddisfa la relazione

$$\frac{\partial I}{\partial c} = \frac{1}{2\pi} T^T(c), \quad (3.8)$$

allora è canonica. Infatti questa trasformazione è generata dalla funzione

$$S(c, \alpha) = \alpha \cdot I(c),$$

e si può verificare facilmente che le equazioni generate sono quelle sopra

$$I = \frac{\partial S}{\partial \alpha} = I(c), \quad t = \frac{\partial S}{\partial c} = \alpha \cdot \frac{\partial I}{\partial c} = \alpha \frac{1}{2\pi} T^T(c) = \frac{1}{2\pi} T(c)\alpha.$$

Bisogna quindi solo mostrare che per le I_1, \dots, I_n definite in (3.7) vale la relazione (3.8), in questo modo si dimostra che la trasformazione è canonica. Si considera ora un incremento δ in c

$$2\pi[I_i(c + \delta) - I_i(c)] = \oint_{\gamma_i(c+\delta)} p \cdot dq - \oint_{\gamma_i(c)} p \cdot dq = \oint_{\Gamma_i^{c,c+\delta}} p \cdot dq,$$

il cammino $\Gamma_i^{c,c+\delta} = \gamma_i(c + \delta) - \gamma_i(c)$ è omotopo all'identità, con un qualunque percorso di andata e ritorno tra i cicli $\gamma_i(c + \delta)$, cammino in $\mathcal{M}_{c+\delta}$, e $\gamma_i(c)$, cammino in \mathcal{M}_c . Se uno dei due lati del percorso di andata e ritorno è a $t = 0$, l'altro è esattamente dopo che l'angolo α_i è avanzato di 2π , corrispondentemente ciascuno dei t_j è avanzato del periodo T_{ij} . Il ciclo $\Gamma_i^{c,c+\delta}$ ha per immagine, nelle diverse coppie di variabili (c_i, t_i) , cicli del tipo $\tilde{\Gamma}_{ij}^{c,c+\delta}$. Per la canonicità della trasformazione G , grazie alla Definizione 2.10 e alla Proposizione 2.11, la forma differenziale $p \cdot dq - c \cdot dt$ è esatta e quindi chiusa, dunque il suo integrale lungo un ciclo omotopo all'identità è nullo, si ha in questo modo

$$2\pi[I_i(c + \delta) - I_i(c)] = \sum_{j=1}^n \oint_{\tilde{\Gamma}_{ij}^{c,c+\delta}} c_j \cdot dt_j = \sum_{j=1}^n \text{Area} \left(\tilde{\Gamma}_{ij}^{c,c+\delta} \right),$$

Consideriamo ora variazioni di δ con una sola componente diversa da zero, ad esempio la k -esima componente, ora solo il termine k -esimo della sommatoria non è nullo e si ha

$$2\pi \frac{\partial I_i}{\partial c_k} = T_{ki},$$

che è la relazione (3.8), ossia ciò che volevamo. Il dominio delle variabili (I, α) , dopo aver quozientato sugli angoli, è della forma voluta, ovvero

$$I \in B \subseteq \mathbb{R}^n, \quad \alpha \in \mathbb{T}^n,$$

dove $B = I(\mathcal{I})$, ovvero l'immagine di \mathcal{I} data dalla prima delle (3.6). Ciascuna delle F_i , che in una prima fase con la trasformazione ψ è coniugata a $F'_i(c, h) = c_i$, è ora mutata in $\tilde{F}_i(I, \alpha) = c_i(I)$, dove $c(I)$ è la funzione che inverte la prima delle (3.6).

Il teorema di Arnol'd-Liouville è così dimostrato. \square

Osservazione 3.7. Nell'enunciato del teorema, non si fa riferimento a nessuna hamiltoniana di interesse, le funzioni F_i sono di uguale importanza. Si considera dunque una qualsiasi di queste, ad esempio F_1 , come H ; essendo per ipotesi le funzioni F_1, \dots, F_n in involuzione, il sistema hamiltoniano di Hamiltoniana H è integrabile e, dalla tesi del teorema, si ottiene che esiste una trasformazione canonica $(p, q) = \phi(I, \alpha)$, definita, nel caso compatto, in $B \times \mathbb{T}^n$, che coniuga H a $K = H \circ \phi$ che dipende dalle sole azioni, $K = h(I)$.

3.2 Esempi di sistemi hamiltoniani integrabili

Riprendendo dunque il teorema di Arnol'd-Liouville; se esistono n costanti del moto a due a due in involuzione allora, in un opportuno dominio, il sistema è integrabile, cioè questa è una condizione sufficiente all'integrabilità. Si osserva però che è anche una condizione necessaria, infatti, utilizzando la Definizione 3.1 ovvero l'integrabilità secondo Liouville, le I_i , date dall'inversione di $\phi(I, \alpha)$ e pensate come funzioni di p e q , ovvero $I_i = \phi^{-1}(p, q)$, sono costanti del moto a due a due in involuzione, infatti banalmente grazie alle equazioni di Hamilton vale

$$\dot{I}_i = -\frac{\partial K}{\partial \alpha_i} = 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

e inoltre essendo ϕ una trasformazione canonica stretta questa preserva le parentesi di Poisson, dunque dall'Osservazione 2.7 vale:

$$\{I_i, I_j\} = 0, \quad i, j = 1, \dots, n.$$

Si vuole ora osservare due categorie di esempi di sistemi integrabili:

1. I sistemi isocroni, questi sono sistemi hamiltoniani in cui tutte le orbite sono periodiche o condividono lo stesso periodo, indipendentemente dalle condizioni iniziali. In particolare ci si sofferma sui sistemi linearizzati attorno a un punto di equilibrio stabile la cui hamiltoniana presenta la seguente forma:

$$H(p, q) = \frac{1}{2} (p \cdot A^{-1}p + q \cdot Bq), \quad (3.9)$$

dove A e B sono matrici simmetriche definite positive. In particolare dall'algebra lineare è noto che, per il teorema spettrale, nel caso di matrici finite e reali, queste siano (separatamente) diagonalizzabili mediante una matrice ortogonale. È possibile però diagonalizzare simultaneamente una coppia di forme quadratiche, con un'unica trasformazione di coordinate, a patto che una di esse sia simmetrica definita positiva. Questo è quindi applicabile all'equazione (3.9), in modo da ottenere un sistema di n oscillatori armonici disaccoppiati

$$\tilde{H}(\tilde{p}, \tilde{q}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (\tilde{p}_i^2 + \omega_i^2 \tilde{q}_i^2). \quad (3.10)$$

Si vede ora come è possibile ottenere la forma vista sopra; essendo simmetrica definita positiva, la matrice A soddisfa $A = UDU^T = Y^2$ ove U è una matrice ortogonale e Y matrice simmetrica invertibile. In particolare, invertendo tutto affinché sia in funzione di A^{-1} , si ottiene $A^{-1} = UD^{-1}U^T = Y^{-2}$. Dunque, definiamo la trasformazione $p' = Y^{-1}p$ affinché valga la seguente identità:

$$p \cdot A^{-1}p = p \cdot Y^{-2}p = Y^{-1}p \cdot Y^{-1}p = p' \cdot p' = p'^2,$$

ora bisogna trasformare le coordinate q in modo tale si abbia stretta canonicità; dunque deve valere $q' = Yq$. Come verifica a ciò, basta osservare che vale la Proposizione 2.4 ovvero l'identità $J\mathbb{E}J^T = \mathbb{E}$, dove J è la matrice jacobiana del cambiamento di variabili. Prendendo l'altro pezzo si ha invece

$$q \cdot Bq = Y^{-1}q' \cdot BY^{-1}q' = q' \cdot Y^{-1}BY^{-1}q' = q' \cdot \tilde{B}q',$$

si osserva che \tilde{B} è ancora una matrice simmetrica, perché prodotto di matrici simmetriche, dunque esiste una matrice ortogonale V che la diagonalizza in Λ

$$V\tilde{B}V^T = \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix},$$

con base ortogonale di autovettori data da $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, dunque un qualsiasi vettore q' si decompone in quella base come $q' = \sum_{i=1}^n q'_i v_i$. Si conclude ora osservando che, siccome V matrice ortogonale è invariante per prodotto scalare, quindi vale

$$q' \cdot \tilde{B}q' = Vq' \cdot \Lambda Vq', \quad p' \cdot p' = Vp' \cdot Vp',$$

inoltre ricordando che $v_i \cdot v_j = \delta_{ij}$, in particolare si ottengono

$$p \cdot A^{-1}p = p' \cdot p' = \sum_{i=1}^n p_i'^2,$$

$$q \cdot Bq = q' \cdot \tilde{B}q' = \sum_{i=1}^n \lambda_i q_i'^2.$$

Per concludere, grazie a un teorema, le frequenze $\{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ degli oscillatori armonici, sono date dall'equazione

$$\det(B - \xi A) = 0, \quad \xi = \omega^2,$$

in particolare, sfruttando le scomposizioni viste sopra

$$\det(Y) \det(\tilde{B} - \xi \mathbb{I}) \det(Y) = 0,$$

dunque, essendo Y invertibile, è possibile ridursi solamente a studiare:

$$\det(\tilde{B} - \xi \mathbb{I}) = 0,$$

si ottiene così che le frequenze coincidono con $\lambda_i = \xi_i = \omega_i^2$ e la trasformazione del cambiamento di coordinate è data da

$$\tilde{p} = Vp' = VY^{-1}p, \quad \tilde{q} = Vq' = VYq,$$

ottenendo così l'equazione (3.10) di n oscillatori armonici disaccoppiati. É importante osservare che la trasformazione è strettamente canonica, essendo trasformazione lineare che soddisfa l'identità (2.10), in quanto V ortogonale e dunque vale $V^T = V^{-1}$.

Si considerano ora le n energie degli oscillatori

$$E_i = \frac{1}{2} (\tilde{p}_i^2 + \omega_i^2 \tilde{q}_i^2), \quad i = 1, \dots, n.$$

Le F_i del teorema diventano così le energie E_i per $i = 1, \dots, n$. Si verifica ora che sono costanti nel moto e in involuzione, infatti valgono:

$$\begin{aligned} \dot{E}_i = \left\{ E_i, \tilde{H} \right\} &= \frac{\partial E_i}{\partial \tilde{q}_i} \cdot \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{p}_i} - \frac{\partial E_i}{\partial \tilde{p}_i} \cdot \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{q}_i} \\ &= \frac{\partial E_i}{\partial \tilde{q}_i} \cdot \frac{\partial E_i}{\partial \tilde{p}_i} - \frac{\partial E_i}{\partial \tilde{p}_i} \cdot \frac{\partial E_i}{\partial \tilde{q}_i} = 0, \quad i = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Questo perché l'energia $E_i(p, q)$ dipende solamente da p_i e q_i , per lo stesso motivo si verifica facilmente la proprietà di involuzione

$$\{E_i, E_j\} = \left(\frac{\partial E_i}{\partial \tilde{q}_i} \cdot \frac{\partial E_j}{\partial \tilde{p}_i} - \frac{\partial E_i}{\partial \tilde{p}_i} \cdot \frac{\partial E_j}{\partial \tilde{q}_i} \right) + \left(\frac{\partial E_i}{\partial \tilde{q}_j} \cdot \frac{\partial E_j}{\partial \tilde{p}_j} - \frac{\partial E_i}{\partial \tilde{p}_j} \cdot \frac{\partial E_j}{\partial \tilde{q}_j} \right) = 0,$$

per ogni $i, j = 1, \dots, n$. E infine, rimane da osservare che il rango della matrice in (3.4) sia massimo

$$\frac{\partial(E_1, \dots, E_n)}{\partial(\tilde{p}_1, \dots, \tilde{p}_n, \tilde{q}_1, \dots, \tilde{q}_n)} = \begin{pmatrix} \tilde{p}_1 & 0 & \dots & 0 & \omega_1^2 \tilde{q}_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \tilde{p}_2 & \dots & 0 & 0 & \omega_2^2 \tilde{q}_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \tilde{p}_n & 0 & 0 & \dots & \omega_n^2 \tilde{q}_n \end{pmatrix},$$

la perdita di rango si verifica nel caso in cui una riga sia nulla, ovvero simultaneamente valga $\tilde{p}_i = 0$ e $\tilde{q}_i = 0$ per un certo $i = 1, \dots, n$, ovvero se uno o più oscillatori sono all'equilibrio. Per ciascun oscillatore è possibile introdurre le variabili di azione-angolo come nell'Esempio 2.3 già visto

$$\tilde{p}_i = \sqrt{2\omega_i I_i} \cdot \cos(\alpha_i), \quad \tilde{q}_i = \sqrt{\frac{2I_i}{\omega_i}} \cdot \sin(\alpha_i),$$

date dalla trasformazione $(\tilde{p}, \tilde{q}) = \phi(I, \alpha)$. In questo modo la nuova hamiltoniana dipende solamente dalle azioni, infatti sostituendo vale

$$\tilde{H}(\tilde{p}, \tilde{q}) = \tilde{H}(\phi(I, \alpha)) = K(I, \alpha) = \omega \cdot I.$$

Ad esempio si considera la seguente hamiltoniana:

$$H(p, q) = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2) + \frac{1}{2}(q_1^2 + q_2^2 + k(q_1 - q_2)^2)$$

questa rappresenta un sistema di due pendoli aventi entrambi massa e lunghezza unitaria, sospesi alla medesima quota, collegati tra loro da una molla (senza peso) di costante elastica k e sottoposti a gravità $g = 1$. Per ricondurre alla forma (3.9), si osserva quali sono le matrici delle forme quadratiche che, sviluppando la parte nelle coordinate q , corrispondono a

$$A = \mathbb{I}, \quad B = \begin{pmatrix} 1+k & -k \\ -k & 1+k \end{pmatrix},$$

queste sono ovviamente simmetriche e definite positive per $k > \frac{1}{2}$, come vedremo nei prossimi passaggi. La matrice Y della prima trasformazione è l'identità. Si passa ora a trovare le frequenze $\{\omega_1, \omega_2\}$; svolgendo banali calcoli per trovare gli

autovalori della matrice B , siccome in questo caso l'equazione scomposta è uguale a quella di partenza essendo Y l'identità, si ottiene

$$\omega_1^2 = 1, \quad \omega_2^2 = 1 + 2k,$$

e in particolare il cambiamento di variabili corrisponderà al seguente:

$$\tilde{p} = Vp, \quad \tilde{q} = Vq,$$

dove V è la matrice ortogonale degli autovalori. Dunque il sistema trasformato sarà

$$\tilde{H}(\tilde{p}, \tilde{q}) = \frac{1}{2} (\tilde{p}_1^2 + \tilde{q}_1^2) + \frac{1}{2} (\tilde{p}_2^2 + (1 + 2k)\tilde{q}_2^2),$$

quindi nella forma (3.10), come si voleva. Per concludere, siccome in generale, da un hamiltoniana in quella forma, si è visto che valgono le ipotesi del teorema di Arnol'd-Liouville, si trovano le variabili di azione angolo, queste saranno date da

$$\begin{aligned} \tilde{p}_1 &= \sqrt{2I_1} \cdot \cos(\alpha_1), & \tilde{q}_1 &= \sqrt{2I_1} \cdot \sin(\alpha_1), \\ \tilde{p}_2 &= \sqrt{2\sqrt{1+2k} \cdot I_2} \cdot \cos(\alpha_2), & \tilde{q}_2 &= \sqrt{\frac{2I_2}{\sqrt{1+2k}}} \cdot \sin(\alpha_2). \end{aligned}$$

Banalmente sostituendo si otterrà $\tilde{H}(\tilde{p}, \tilde{q}) = \tilde{H}(\phi(I, \alpha)) = I_1 + \sqrt{1+2k} \cdot I_2$, ovvero la nuova hamiltoniana dipende dalle sole azioni come voluto.

2. il moto centrale piano; in questo caso i sistemi hanno hamiltoniana come:

$$H(p_r, p_\theta, r, \theta) = \frac{p_r^2}{2} + \frac{p_\theta^2}{2r^2} + V(r),$$

essendo in questo caso $n = 2$, basta osservare che l'energia H e il momento angolare p_θ si conservano, infatti dalle equazioni di Hamilton (1.1)

$$\dot{p}_\theta = -\frac{\partial H}{\partial \theta} = 0,$$

siccome l'hamiltoniana H non dipende esplicitamente da θ , in particolare da questa si ricava anche l'involuzione

$$\dot{p}_\theta = \{H, p_\theta\} = 0.$$

Come nell'esempio precedente si verifica ora il rango della seguente matrice:

$$\frac{\partial(H, p_\theta)}{\partial(p_r, p_\theta, r, \theta)} = \begin{pmatrix} p_r & \frac{p_\theta}{r^2} & -\frac{p_\theta^2}{r^3} + \frac{\partial V}{\partial r} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

questa matrice ha rango 2 se e solamente se la prima riga non è uguale a $(0, \lambda, 0, 0)$ per un qualche $\lambda \in \mathbb{R}$, ovvero se e solo se contemporaneamente si ha

$$\begin{cases} p_r = 0 \\ -\frac{p_\theta^2}{r^3} + \frac{\partial V}{\partial r} = 0 \end{cases}$$

Si osserva ora cosa succede sui piani θp_θ e $r p_r$; grazie alle equazioni di Hamilton per il primo si ha

$$\dot{\theta} = \frac{\partial H}{\partial p_\theta} = \frac{p_\theta}{r^2}, \quad \dot{p}_\theta = -\frac{\partial H}{\partial \theta} = 0,$$

ovvero, supponendo $p_\theta \neq 0$, p_θ è costante mentre θ avanza in modo uniforme. L'altro piano, fissando ora p_θ , viene regolato dalla seguente:

$$H_{p_\theta}(p_r, r) = \frac{p_r^2}{2} + V_{p_\theta}(r), \quad V_{p_\theta}(r) = \frac{p_\theta^2}{2r^2} + V(r).$$

Quindi ora la matrice vista sopra ha perdita di rango per $p_r = 0$ e $\frac{\partial V_{p_\theta}}{\partial r} = 0$ che corrispondono ai punti critici dell'hamiltoniana $H_{p_\theta}(r, p_r)$, per gli altri punti invece il moto avviene su un circolo chiuso. Riprendendo quanto detto prima sul piano θp_θ si ottiene che il moto è svolto su un toro bidimensionale. La trasformazione delle variabili da $(p_r, p_\theta, r, \theta)$ alle $(I_1, I_2, \alpha_1, \alpha_2)$ di azione angolo è ottenuta grazie all'equazione di Hamilton-Jacobi, un po' più complessa dell'esempio precedente.

Bibliografia

- [1] G. Benettin: *Appunti per il corso di Meccanica Analitica*, 2017/18.
- [2] G. Benettin e F. Fassò: *Introduzione alla teoria delle perturbazioni per sistemi Hamiltoniani*, 2001/02.
- [3] A. Fasano & S. Marmi: *Analytical Mechanics*, 2006, Oxford University Press.
- [4] L. Martina: "Sistemi integrabili", Ithaca: viaggio nella scienza XI, 2018, Università del Salento.
- [5] G. Gentile: *Introduzione ai sistemi dinamici. Volume 2: Meccanica Hamiltoniana ed equazioni differenziali*, Springer, 2022.

