

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

SCUOLA DI SCIENZE
Corso di Laurea in Matematica

Il Mapping Class Group e i suoi generatori

Tesi di Laurea in Geometria

Relatore:
Chiar.ma Prof.ssa
Maria Beatrice Pozzetti

Presentata da:
Alberto Pederzini

Anno Accademico 2024/2025

alla mia famiglia e al mio amico Stefano

Introduzione

Lo studio delle superfici e delle loro simmetrie rappresenta uno dei temi centrali della topologia. Un ruolo fondamentale, in questo contesto, è svolto dal *mapping class group* di una superficie, che è l'argomento principale di questa tesi. Tale gruppo è costituito dalle classi di isotopia degli omeomorfismi della superficie stessa e permette di descriverne in modo naturale le simmetrie topologiche.

Per affrontare l'analisi del *mapping class group* è essenziale introdurre alcune nozioni preliminari sulle superfici e sulle curve che giacciono su di esse. Nel primo capitolo classificheremo questi oggetti geometrici e ne presenteremo proprietà e caratteristiche utili per la trattazione: scriveremo di numeri di intersezione tra due curve semplici chiuse, confronteremo i concetti di omotopia e isotopia per questa tipologia di curve, introdurremo il criterio del bigono e affronteremo il principio di cambio delle coordinate.

Nel secondo capitolo definiremo rigorosamente il *mapping class group* di una superficie e ne forniremo alcuni esempi per comprenderlo al meglio. Più precisamente, calcoleremo il *mapping class group* del disco, ovvero il cosiddetto lemma di Alexander, della sfera e della sfera con una puntura, dell'anello e del toro. Dallo sviluppo di questi esempi noteremo che emergerà l'idea di poter determinare il comportamento di un elemento del gruppo tramite lo studio della sua azione su precise classi di isotopia di curve sulla superficie. Introdurremo quindi il metodo di Alexander che, sfruttando questa intuizione, ci permetterà di dedurre la struttura del *mapping class group* della superficie.

Presenteremo nel terzo capitolo i twist di Dehn, ovvero gli omeomorfismi di ordine infinito più semplici del gruppo, ottenuti tramite una torsione della superficie lungo una curva semplice chiusa. Studieremo alcune proprietà e relazioni fondamentali che essi soddisfano, tra cui la cosiddetta relazione della treccia. Gli esempi di twist di Dehn sul toro e sull'anello ci suggeriranno il ruolo fondamentale che essi hanno nella generazione dei *mapping class group*.

È proprio lo studio dei generatori del gruppo l'obiettivo principale dell'ultimo capitolo della tesi. A tale scopo introdurremo alcuni strumenti fondamentali, tra cui il complesso delle curve e la successione esatta di Birman. Tali risultati ci permetteranno di dimo-

strare, grazie a una doppia induzione sul genere e sul numero di punture della superficie, il teorema di Dehn-Lickorish, il quale ci garantirà che il *mapping class group* di una superficie orientabile chiusa è generato da un numero finito di twist di Dehn relativi a opportune curve semplici chiuse e non separanti. Concluderemo la trattazione esplicitando due insiemi di generatori del *mapping class group*, ovvero i generatori di Lickorish e i generatori di Humphries.

Indice

Introduzione	i
1 Curve e Superfici	1
1.1 Superfici	1
1.2 Curve semplici chiuse	2
1.2.1 Numeri di intersezione	3
1.2.2 Il criterio del bigono	4
1.2.3 Omotopia e isotopia per curve semplici chiuse	6
1.3 Archi	6
1.4 Il principio di cambio delle coordinate	7
2 Il Mapping Class Group e il metodo di Alexander	9
2.1 Definizioni	9
2.2 Il lemma di Alexander	10
2.3 Esempi	11
2.3.1 La sfera e la sfera con una puntura	12
2.3.2 L'anello	12
2.3.3 Il toro	14
2.4 Il metodo di Alexander	15
3 I twist di Dehn	19
3.1 Definizione e rappresentazione	19
3.2 Proprietà dei twist di Dehn	21
3.3 Relazioni tra due twist di Dehn	23
3.3.1 Relazione della treccia	24
3.4 Esempi	26
4 I generatori del Mapping Class Group	27
4.1 Il complesso delle curve	27

4.2	La successione esatta di Birman	31
4.2.1	L'omomorfismo <i>Push</i> in termini di twist di Dehn	32
4.2.2	L'omomorfismo di taglio	33
4.3	L'azione del Mapping Class Group sul complesso delle curve	34
4.4	Il teorema di Dehn-Lickorish	35
4.4.1	I generatori del Mapping Class Group	37
Bibliografia		39

Capitolo 1

Curve e Superfici

Data una superficie S , un generico elemento del suo *mapping class group* è determinato, e anche più facilmente comprensibile, tramite l'azione di un omeomorfismo su una classe di isotopia di curve semplici chiuse su di essa. Introduciamo pertanto in questo capitolo tutti i concetti fondamentali per lo studio degli omeomorfismi e delle curve chiuse su una superficie.

1.1 Superfici

Una superficie è una varietà topologica di dimensione 2, ovvero uno spazio topologico Hausdorff e connesso in cui ogni punto possiede un intorno aperto omeomorfo a un aperto di $\mathbb{R}^2$. Essa può essere dotata o meno di bordo. Si dice che una superficie è chiusa se è compatta e priva di bordo.

Teorema 1.1 (Classificazione delle superfici). *Ogni superficie chiusa, connessa e orientabile è omeomorfa alla somma connessa di una sfera 2-dimensionale con $g \geq 0$ tori. Ogni superficie compatta, connessa e orientabile si ottiene da una superficie chiusa rimuovendo $b \geq 0$ dischi aperti con chiusure disgiunte. Il tipo di omeomorfismo della superficie determina univocamente g e b .*

Il numero di tori g dell'enunciato indica il genere della superficie e il numero di dischi b rappresenta, invece, le componenti di bordo. Rimuovendo un numero finito $n \geq 0$ di punti da una superficie, si ottiene una superficie non compatta con n punture. Indichiamo con $S_{g,n}$ la superficie di genere g con n punture e senza componenti di bordo. Al posto di $S_{g,0}$ scriveremo più semplicemente S_g . La caratteristica di Eulero di una superficie S , definita dal valore $\chi(S) = 2 - 2g - (b + n)$, è un invariante per omeomorfismo. La terna (g, b, n) , pertanto, determina univocamente una superficie a meno di omeomorfismo.

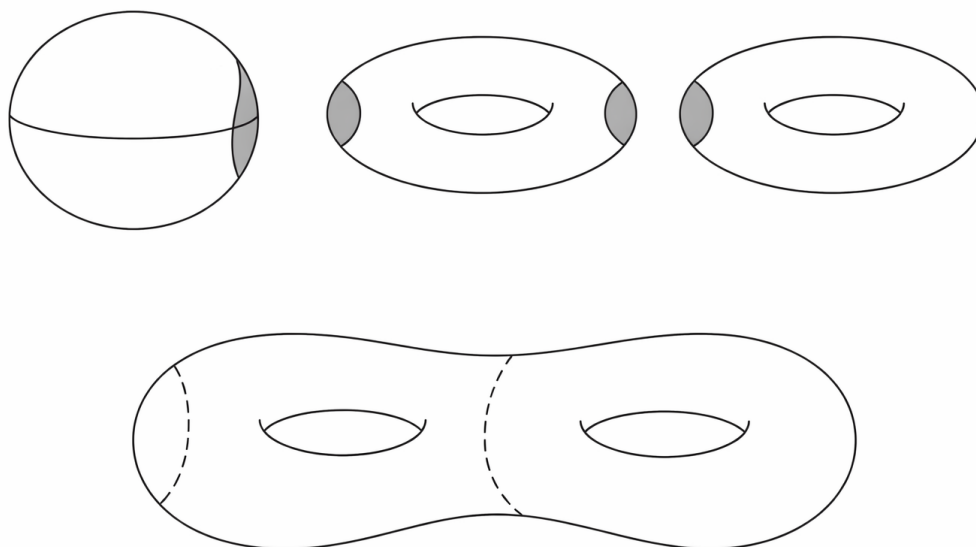


Figura 1.1: *Superficie di genere 2 ottenuta dalla somma connessa della sfera S^2 con due tori S_1 .*

Nel corso della trattazione lavoreremo con superfici che supponiamo sempre essere compatte, connesse e orientate, a meno che non diversamente specificato, come nel caso di superfici con punture. Quest'ultime infatti non sono compatte.

1.2 Curve semplici chiuse

Data una superficie S , una curva chiusa in S è una mappa continua $\gamma : [a, b] \rightarrow S$ tale che $\gamma(a) = \gamma(b)$. Equivalentemente possiamo definire curva chiusa una generica mappa $\gamma' : S^1 \rightarrow S$ continua. Spesso, con un abuso di notazione, identificheremo una curva con la sua immagine su S . Una curva chiusa è detta semplice se è iniettiva, mentre è detta essenziale se non è omotopa liberamente a un punto, a una puntura o a una componente di bordo della superficie. Diciamo che una curva è omotopa liberamente a una puntura se, riaggiungendo il punto tolto alla superficie, essa è omotopa a tale punto. Con omotopia libera si intende un'omotopia senza il punto base.

Data una curva chiusa orientata $\gamma \in S$ possiamo identificarla con un elemento di $\pi_1(S)$ semplicemente fissando un punto base del gruppo e scegliendo un cammino che congiunga il punto alla curva. L'elemento ottenuto di $\pi_1(S)$ è ben definito a meno di coniugio, e, con un piccolo abuso di notazione, denominiamo anch'esso γ .

Proposizione 1.2. *Si ha una corrispondenza biunivoca tra le classi di coniugio non banali di elementi di $\pi_1(S)$ e le classi di omotopia libera non banali di curve chiuse orientate su S .*

1.2.1 Numeri di intersezione

Una curva $\gamma : S^1 \rightarrow S$ è detta regolare se è di classe C^1 e se il vettore tangente alla sua immagine non è nullo in alcun punto. Due curve regolari di una superficie si dicono trasversali se, in ogni punto di intersezione, i loro vettori tangenti in quel punto sono linearmente indipendenti. Date due curve è sempre possibile modificarle tramite omotopia in modo tale che siano trasversali.

Esistono due modi naturali per contare il numero di punti di intersezione tra due curve trasversali: tenendo conto del segno oppure trascurandolo. Questi corrispondono rispettivamente al numero di intersezione algebrico e al numero di intersezione geometrico.

Definizione 1.3 (Numero di intersezione algebrico). *Sia α e β una coppia di curve chiuse, semplici, orientate e trasversali su una superficie S . Definiamo numero di intersezione algebrico $\hat{i}(\alpha, \beta)$ la somma degli indici dei punti di intersezione tra α e β , dove un indice ha valore $+1$ se l'orientazione dell'intersezione è coerente con l'orientazione della superficie e -1 altrimenti.*

Osserviamo che $\hat{i}(\alpha, \beta)$ dipende esclusivamente dalle classi di omotopia libera delle due curve. Pertanto possiamo definire il numero di intersezione algebrico $\hat{i}(a, b)$ con a e b le classi di omotopia libera rispettivamente di α e di β .

Definizione 1.4 (Numero di intersezione geometrico). *Siano α e β come nella definizione precedente. Il numero di intersezione geometrico tra le loro classi di omotopia libera a e b è definito come segue.*

$$i(a, b) = \min\{|\alpha \cap \beta| : \alpha \in a, \beta \in b\}.$$

Diciamo che le curve α e β sono in posizione minimale se soddisfano tale uguaglianza.

In seguito, con un piccolo abuso di notazione, indicheremo $i(\alpha, \beta)$ il numero di intersezione geometrico tra le classi delle curve α e β .

Un esempio importante di calcolo del numero di intersezione algebrico e geometrico è quello del toro, che sfrutteremo nel capitolo seguente per determinare il suo *mapping class group*.

Proposizione 1.5. *Indichiamo con T^2 il toro orientato. Alle classi di omotopia libera di curve semplici chiuse e orientate su $T^2 \cong \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ corrispondono gli elementi primitivi di $\pi_1(T^2) \cong \mathbb{Z}^2$.*

Proposizione 1.6 (Numeri di intersezione sul toro). *Siano α e β due classi di curve semplici chiuse e orientate su T^2 corrispondenti agli elementi primitivi (p, q) e (p', q') di $\mathbb{Z}^2$. Allora il loro numero di intersezione algebrico è dato da*

$$\hat{i}(\alpha, \beta) = pq' - p'q,$$

mentre il numero di intersezione geometrico soddisfa

$$i(\alpha, \beta) = |pq' - p'q|.$$

Dimostrazione. Osserviamo che se p e q sono coprimi, allora esiste una matrice $A \in SL(2, \mathbb{Z})$ tale che $A((p, q)) = (1, 0)$. Questa trasformazione lineare induce un omeomorfismo sul toro che ne preserva l'orientazione e la cui azione su $\pi_1(T^2) \cong \mathbb{Z}^2$ è A stessa. Pertanto, siccome gli omeomorfismi che preservano l'orientazione conservano sia il numero di intersezione algebrico sia quello geometrico, abbiamo la tesi. $\square$

Introduciamo ora un criterio fondamentale per determinare se due curve trasversali sono in posizione minimale, ovvero se realizzano il numero di intersezione geometrico.

1.2.2 Il criterio del bigono

Due curve semplici chiuse e trasversali α e β formano un bigono su una superficie S se esiste un disco contenuto in S (il bigono) il cui bordo è costituito dall'unione di un arco di α e un arco di β che si intersecano in due punti distinti della superficie.

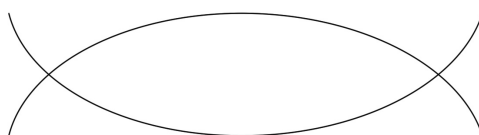


Figura 1.2: Un bigono.

Lemma 1.7. *Se due curve semplici chiuse e trasversali α e β su una superficie S non formano alcun bigono, allora, scelti due qualsiasi sollevamenti $\tilde{\alpha}$ e $\tilde{\beta}$ di α e β nel rivestimento universale di S , essi si intersecano in al più un punto.*

Proposizione 1.8 (Il criterio del bigono). *Due curve semplici chiuse e trasversali su una superficie S sono in posizione minimale se e solo se non formano bigoni.*

Dimostrazione. Siano α e β due curve semplici chiuse e trasversali in S che formano un bigono. Dimostriamo che esiste una curva omotopa ad α che riduce di due le intersezioni con β . Consideriamo un piccolo intorno chiuso del bigono omeomorfo a un disco, in modo tale che l'intersezione di $\alpha \cup \beta$ con quest'ultimo sia come in figura 1.2. Più precisamente questa intersezione consiste in un arco α' di α e un arco β' di β , che si intersecano in esattamente due punti. Siccome il disco è semplicemente connesso e gli estremi di α' giacciono sullo stesso lato di β' , possiamo modificare α nel disco chiuso tramite omotopia, cosicchè i due archi siano disgiunti. Abbiamo così dimostrato che le curve iniziali non erano in posizione minimale.

Siano ora α e β due curve semplici chiuse che non sono in posizione minimale e sia $H : S^1 \times [0, 1] \rightarrow S$ un'omotopia di α che ne riduce le intersezioni con β (esiste per l'implicazione precedente). Senza perdere di generalità possiamo supporre che H e β siano trasversali in modo tale che la preimmagine $H^{-1}(\beta)$ sia una 1-varietà nell'anello $S^1 \times [0, 1]$. Poichè H riduce il numero di intersezioni tra α e β , deve esistere almeno una componente δ che connette $S^1 \times \{0\}$ a se stesso. Indichiamo con δ' l'arco di $S^1 \times \{0\}$ che insieme a δ forma un disco Δ in $S^1 \times [0, 1]$. $H(\delta \cup \delta')$ è una curva chiusa in S contenuta in $\alpha \cup \beta$ e quindi si solleva a una curva chiusa nel rivestimento universale $\tilde{S}$ di S . Tale sollevamento si può estendere a due sollevamenti di α e β che si intersecano in due punti. Per il lemma 1.7 si conclude che α e β formano almeno un bigono. $\square$

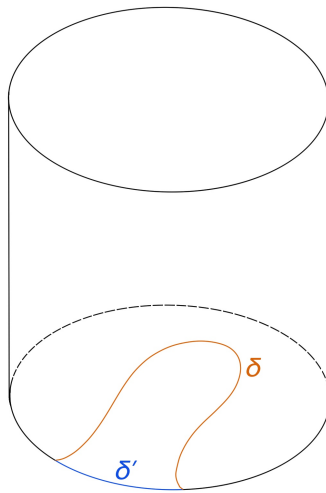


Figura 1.3: Disco formato dalle curve δ e δ' sull'anello $S^1 \times [0, 1]$.

Corollario 1.9. Due curve semplici chiuse che si intersecano esattamente una volta sono in posizione minimale.

1.2.3 Omotopia e isotopia per curve semplici chiuse

Due curve semplici chiuse α e β sono isotope se esiste un'omotopia

$$H : S^1 \times [0, 1] \rightarrow S$$

da α a β , tale che la curva chiusa $H(S^1 \times \{t\})$ è semplice per ogni $t \in (0, 1)$.

Nel corso del nostro studio sul *mapping class group* interscambieremo spesso le classi di omotopia con quelle di isotopia delle curve. Ci è permesso fare ciò grazie al seguente risultato.

Proposizione 1.10. *Siano α e β due curve semplici chiuse ed essenziali su una superficie S . Allora α è isotopa a β se e solo se α è omotopa a β .*

Idea della dimostrazione. Un'implicazione è banale siccome un'isotopia è un'omotopia per definizione. Supponiamo che α sia omotopa a β . In particolare il numero di intersezione geometrico soddisfa $i(\alpha, \beta) = 0$. Mediante un'isotopia di α possiamo assumere che le due curve siano trasversali. Se α e β non sono disgiunte allora formano un bigono per la proposizione 1.8. Tramite isotopie di α possiamo ridurre il numero di intersezioni tra le due curve, eliminando i bigoni uno ad uno fino a quando α e β non siano completamente disgiunte. L'omotopia tra le due curve così ottenute può essere scelta in modo tale che la sua immagine sia una regione della superficie omeomorfa a un anello, avente bordo $\alpha \cup \beta$. Siccome le componenti di bordo di un anello sono isotope, si ottiene così un'isotopia tra α e β in S . $\square$

Un'isotopia di una superficie S è un'omotopia $H : S \times [0, 1] \rightarrow S$ tale che, per ogni $t \in [0, 1]$, la mappa $H : S \times \{t\} \rightarrow S$ è un omeomorfismo. Data un'isotopia tra due curve semplici chiuse in S , spesso sarà utile promuoverla a un'isotopia della superficie stessa, denominata isotopia ambiente di S .

Proposizione 1.11 (Estensione di isotopia). *Sia S una superficie qualunque e sia $F : S^1 \times [0, 1] \rightarrow S$ un'isotopia liscia tra due curve semplici chiuse in S . Allora esiste un'isotopia $H : S \times [0, 1] \rightarrow S$ tale che $H|_{S \times \{0\}}$ è l'identità e $H|_{F(S^1 \times \{0\}) \times [0, 1]} = F$.*

1.3 Archi

Nel corso della trattazione affronteremo ragionamenti induttivi che ci porteranno a tagliare le superfici lungo curve semplici chiuse, in modo tale da ottenere nuove superfici topologicamente più "semplici". Tali curve della superficie originale possono trasformarsi quindi in una collezione di archi sulla superficie tagliata, spostando così il fulcro della

discussione dalle curve verso quest'ultimi.

Sia S una superficie compatta, eventualmente con bordo, e con un numero finito di punture. Indichiamo con P l'insieme di tali punti tolti. Un arco proprio in S è una mappa $\delta : [0, 1] \rightarrow S$ tale che $\delta^{-1}(P \cup \partial S) = \{0, 1\}$.

Come per le curve, spesso identificheremo un arco con la sua immagine e diremo che è semplice se la mappa δ è iniettiva. La classe di omotopia libera di un generico arco mantiene i punti di bordo della superficie, che ad ogni tempo rimangono nella componente di ∂S in cui giacciono. Un'omotopia (o isotopia) di un arco si dice relativa al bordo se gli estremi dell'arco sono fissati ad ogni tempo dell'omotopia. Un arco in una superficie S si dice essenziale se non è omotopo nè a una componente di bordo nè ad una puntura di S .

1.4 Il principio di cambio delle coordinate

Introduciamo in questa sezione una tecnica fondamentale nella teoria del *mapping class group*: il principio di cambio delle coordinate. Alla base del principio troviamo la seguente definizione.

Definizione 1.12. *Data una superficie S e una curva semplice chiusa α su di essa, la superficie ottenuta tagliando S lungo α , che indichiamo con S_α , è compatta e dotata di un omeomorfismo h tra due delle sue componenti di bordo che soddisfa le seguenti:*

1. *Il quoziente $S_\alpha / (x \sim h(x))$ è omeomorfo ad S .*
2. *L'immagine delle due componenti di bordo tramite questo quoziente è proprio la curva α .*

La definizione è analoga se si tagliano superfici con bordo o punture lungo archi propri, a patto che gli estremi di quest'ultimi siano situati sulle componenti di bordo o sulle punture. Allo stesso modo è possibile tagliare una superficie su una collezione finita di curve e archi.

Definizione 1.13. *Una curva semplice chiusa α in una superficie S è detta non separante se la superficie tagliata S_α è connessa. Analogamente è detta separante se sconnette la superficie.*

Proposizione 1.14. *Siano α e β due curve semplici chiuse e non separanti in una superficie S . Allora esiste un omeomorfismo $\phi : S \rightarrow S$ tale che $\phi(\alpha) = \beta$.*

Idea della dimostrazione. Le superfici S_α e S_β , ottenute tagliando S lungo le due curve, hanno la stessa caratteristica di Eulero, lo stesso numero di componenti di bordo e di punture. Dal teorema 1.1 di classificazione delle superfici segue che sono omeomorfe. Esiste quindi un omeomorfismo $\phi : S_\alpha \rightarrow S_\beta$ che rispetta la relazione di equivalenza sulle relative componenti di bordo. Esso definisce un automorfismo della superficie S che manda α in β . Se desideriamo preservare l'orientazione di S , possiamo comporlo con un omeomorfismo che inverte l'orientazione e che fissa la curva β . $\square$

Generalizzando la proposizione precedente, considerando anche curve separanti, otteniamo il seguente teorema.

Teorema 1.15 (Classificazione delle curve semplici chiuse in una superficie). *Siano α e β due curve semplici chiuse in una superficie S . Esiste un omeomorfismo di S che ne preserva l'orientazione e che manda α in β se e solo se le superfici tagliate S_α e S_β (eventualmente sconnesse) sono omeomorfe.*

Per comprendere al meglio gli omomorfismi di una superficie è pertanto evidente la necessità di studiarne l'azione su una collezione di curve e, per fare ciò, ci viene in aiuto il principio di cambio delle coordinate. Tale principio ci permetterà infatti di ricondurre configurazioni arbitrarie di curve semplici chiuse a modelli specifici, di cui sarà più semplice intuirne il carattere geometrico. Un esempio importante di tale principio è il seguente.

Esempio 1.16 (Coppie di curve semplici chiuse che si intersecano una sola volta). Siano α e β due curve non separanti su una superficie S tali che $i(\alpha, \beta) = 1$. Tagliando S lungo α otteniamo la superficie S_α che ha due ulteriori componenti di bordo date da α . L'immagine di β in S_α è un arco semplice che connette queste due componenti. Consideriamo ora la superficie $(S_\alpha)_\beta$ ottenuta tagliando S_α lungo tale arco. Quest'ultima ha una componente di bordo suddivisa in quattro archi: due derivanti da α e due da β . Sia $(S_\gamma)_\delta$ una superficie ottenuta analogamente dalle curve γ e δ . Per il teorema di classificazione esiste un omeomorfismo $\phi : (S_\alpha)_\beta \rightarrow (S_\gamma)_\delta$ che preserva le classi di equivalenza sui bordi. Esso induce un omeomorfismo di S che manda la coppia $\{\alpha, \beta\}$ nella coppia $\{\gamma, \delta\}$. Tale omeomorfismo rappresenta il cambio di coordinate.

Capitolo 2

Il Mapping Class Group e il metodo di Alexander

Dopo aver consolidato alcune nozioni preliminari sulla teoria di curve e superfici, introduciamo in questo capitolo il *mapping class group* di una superficie e ne forniamo alcuni esempi. Questi includono il caso del disco, della sfera, dell'anello e del toro. Da tali calcoli emerge un metodo fondamentale che denominiamo metodo di Alexander.

2.1 Definizioni

Sia S una superficie. Indichiamo con $Omeo^+(S, \partial S)$ il gruppo degli automorfismi di S che ne preservano l'orientazione e che fissano i punti di ∂S . Dotiamo tale gruppo della topologia compatto-aperta.

Definizione 2.1 (Mapping class group). *Il mapping class group di S , denotato con $MCG(S)$, è il gruppo*

$$MCG(S) = \pi_0(Omeo^+(S, \partial S)).$$

Indicando con $Omeo_0(S, \partial S)$ il sottogruppo degli elementi di $Omeo^+(S, \partial S)$ che sono isotopi all'identità, possiamo equivalentemente definire

$$MCG(S) = Omeo^+(S, \partial S) / Omeo_0(S, \partial S).$$

Ricordiamo i seguenti risultati sugli omeomorfismi di una superficie.

Proposizione 2.2. *Siano f e g in $Omeo^+(S, \partial S)$. Allora f è omotopa a g relativamente al bordo di S se e solo se è isotopa a g relativamente al bordo di S .*

Proposizione 2.3. *Sia S una superficie compatta. Allora ogni omeomorfismo di S è isotopo a un diffeomorfismo di S .*

Sfruttando le proposizioni precedenti possiamo fornire una nuova definizione equivalente di *mapping class group*:

$$\begin{aligned} MCG(S) &= \pi_0(Diff^+(S, \partial S)) \\ &= Diff^+(S, \partial S) / \sim \end{aligned}$$

dove $Diff^+(S, \partial S)$ è il gruppo dei diffeomorfismi che preservano l'orientazione di S e che coincidono con l'identità sul bordo e $\sim$ è la relazione di omotopia liscia relativa al bordo o di isotopia liscia relativa al bordo.

Osservazione 2.4. Se S è una superficie con punture allora possiamo pensare a quest'ultime come punti marcati, che sia gli omeomorfismi che le isotopie della definizione di $MCG(S)$ lasciano invariati a meno di permutazioni.

2.2 Il lemma di Alexander

Per determinare il *mapping class group* di una superficie ci viene in aiuto il metodo di Alexander che, studiando il comportamento di un omeomorfismo della superficie su un'opportuna collezione di curve, è in grado di determinare se quest'ultimo sia isotopo all'identità. Alla base del metodo troviamo il seguente lemma.

Lemma 2.5 (di Alexander). *Sia D^2 il disco unitario chiuso in $\mathbb{R}^2$. Il gruppo $MCG(D^2)$ è banale.*

Dimostrazione. Sia $\phi \in Omeo^+(D^2, \partial D^2)$. Definiamo

$$F(x, t) = \begin{cases} (1-t)\phi(\frac{x}{1-t}) & \text{se } 0 \leq |x| < 1-t \\ x & \text{se } 1-t \leq |x| \leq 1 \end{cases}$$

per $0 \leq t < 1$ e definiamo $F(x, 1)$ come l'identità di D^2 . Allora F è un'isotopia tra ϕ e l'identità. $\square$

Possiamo visualizzare l'isotopia F della dimostrazione considerando il cilindro $D^2 \times [0, 1]$ e il cono come in figura 2.1. Fissata un'altezza t , la sezione ottenuta rappresenta il comportamento dell'omeomorfismo $F(\cdot, t)$: restringe ϕ al disco di raggio $1-t$ e coincide con l'identità al di fuori di quest'ultimo.

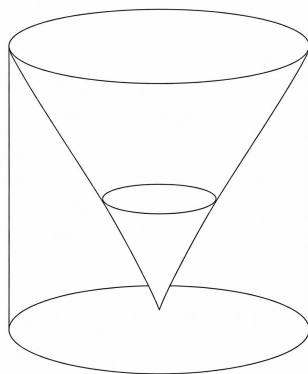


Figura 2.1: *Rappresentazione del lemma di Alexander.*

Corollario 2.6. *Il mapping class group del disco D^2 con una puntura è banale.*

Dimostrazione. Possiamo supporre a meno di omeomorfismo che la puntura si trovi al centro del disco e pensarla come un punto marcato. È così ben definita l'isotopia del lemma di Alexander. $\square$

2.3 Esempi

Come primo esempio di *mapping class group* non banale consideriamo la superficie S_g e l'omeomorfismo ϕ di ordine g , indicati in figura 2.3 per $g = 5$. La classe dell'elemento ϕ è anch'essa di ordine g nel $MCG(S)$, siccome è possibile scegliere una curva semplice chiusa α in S_g tale che $\alpha, \phi(\alpha), \phi^2(\alpha), \dots, \phi^{g-1}(\alpha)$ siano a due a due non isotopi.

Rappresentando S_g come un $(4g+2)$ -gono con i lati opposti identificati tra loro (la figura 2.2 mostra il caso $g = 2$), possiamo ottenere degli elementi non banali del $MCG(S_g)$ ruotando il poligono di un angolo multiplo di $2\pi/(4g+2)$. Per esempio, ruotando di un angolo di π si ottiene un importante elemento di ordine 2 del *mapping class group*, denominato involuzione iperellittica.

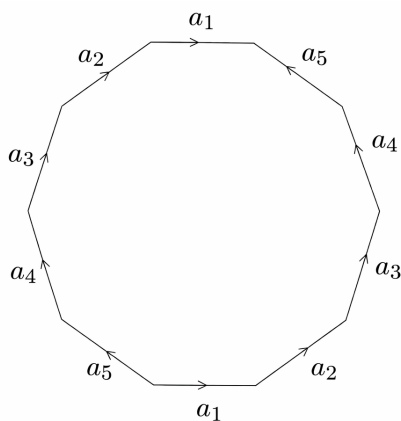


Figura 2.2: *Ruotando il poligono di un angolo di $2\pi/10$ si ottiene un elemento di ordine 10 del $MCG(S_2)$.*

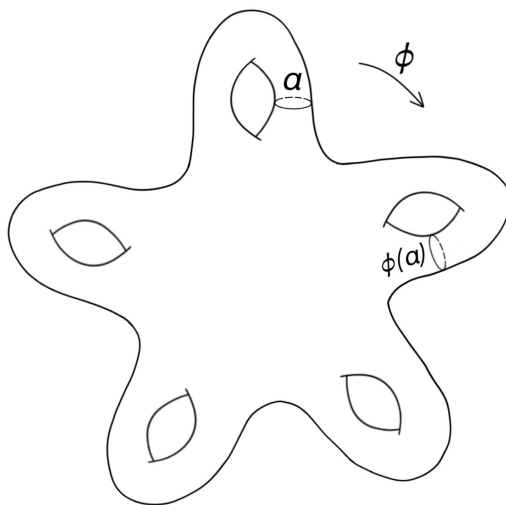


Figura 2.3: L'omeomorfismo ϕ del mapping class group di S_5 .

2.3.1 La sfera e la sfera con una puntura

Presentiamo ora altri due *mapping class groups* che sono banali, rispettivamente $MCG(S_{0,1})$ e $MCG(S^2)$. Per dimostrare il primo, indentifichiamo $S_{0,1}$ con $\mathbb{R}^2$ e sfruttiamo il fatto che ogni omeomorfismo ϕ di $\mathbb{R}^2$ che ne preserva l'orientazione è omotopo all'identità tramite l'omotopia

$$F(x, t) = tx + (1 - t)\phi(x).$$

Per quanto riguarda S^2 , ogni omeomorfismo può essere modificato tramite isotopia in modo che fissi almeno un punto. Possiamo così applicare il caso di $S_{0,1}$ considerando il punto fisso come punto marcato.

2.3.2 L'anello

Il nostro prossimo esempio è il più semplice *mapping class group* di ordine infinito, quello dell'anello A . Il calcolo di quest'ultimo illustra un'importante idea alla base della teoria dei *mapping class group*: definiremo un cammino sull'anello che connette le due componenti di bordo. Studiando l'azione di un determinato omeomorfismo su tale cammino saremo in grado di comprendere come è fatto un generatore del $MCG(A)$.

Proposizione 2.7. $MCG(A) \cong \mathbb{Z}$

Dimostrazione. Costruiamo una mappa $\rho : MCG(A) \rightarrow \mathbb{Z}$. Siano $f \in MCG(A)$ e ϕ un suo rappresentante. Consideriamo il rivestimento universale di A , la striscia infinita

$\tilde{A} \cong \mathbb{R} \times [0, 1]$, e solleviamo ϕ a $\tilde{\phi} : \tilde{A} \rightarrow \tilde{A}$ tale che $\tilde{\phi}(0, 0) = (0, 0)$.

Denotiamo $\tilde{\phi}_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la restrizione di $\tilde{\phi}$ al bordo $\mathbb{R} \times \{1\}$. Siccome $\tilde{\phi}_1$ è un sollevamento a $\mathbb{R}$ dell'identità di una delle componenti di bordo di A , risulta essere una traslazione intera. Definiamo $\rho(f) = \tilde{\phi}_1(0)$. ρ è ovviamente un omomorfismo siccome la composizione di automorfismi di A viene mandata in una composizione di traslazioni intere che è ancora una traslazione intera. Verifichiamo ora che sia ben definita. Sia ψ un altro rappresentante nella classe di f ; allora esiste un'isotopia F tra ϕ e ψ che ad ogni tempo t è l'identità sul bordo di A . Tale F si solleva a una nuova isotopia $\tilde{F}$ tale che $\tilde{F}(0, 0, 0) = (0, 0)$ e che fa commutare il seguente diagramma, dove p indica il rivestimento universale.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} \times [0, 1] \times [0, 1] & \xrightarrow{\tilde{F}} & \mathbb{R} \times [0, 1] \\ \downarrow p' & & \downarrow p \\ A \times [0, 1] & \xrightarrow{F} & A \end{array}$$

Avremo così che $\tilde{F}$ è un'isotopia tra $\tilde{\phi}$ e $\tilde{\psi}$; infatti $\tilde{F}|_{\mathbb{R} \times [0, 1] \times \{0\}} = \tilde{\phi}$, poichè entrambi sono sollevamenti di ϕ che fissano $(0, 0) \in \mathbb{R} \times [0, 1]$ e, siccome l'isotopia F fissa il bordo di A per ogni tempo t , $\tilde{F}(\cdot, 0, t)$ è a valori interi e di conseguenza costante. Pertanto si ha che $\tilde{F}(0, 0, 1) = (0, 0)$ e che $\tilde{F}|_{\mathbb{R} \times [0, 1] \times \{1\}} = \tilde{\psi}$. Dato che analogamente $\tilde{F}(\cdot, 1, t)$ è costante, concludiamo che $\tilde{\phi}(0, 1) = \tilde{F}(0, 1, 0) = \tilde{F}(0, 1, 1) = \tilde{\psi}(0, 1)$ e quindi $\tilde{\phi}_1(0) = \tilde{\psi}_1(0)$. Dimostriamo ora che ρ è suriettiva. Definiamo in primo luogo un cammino semplice orientato δ che connette due componenti di bordo di A . Dato $n \in \mathbb{Z}$, la trasformazione lineare di $\mathbb{R}^2$ data dalla matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

manda $\mathbb{R} \times [0, 1]$ in se stesso e inoltre per ogni isomorfismo di rivestimento τ si ha $\tau \circ M = M \circ \tau$. Pertanto la restrizione dell'applicazione lineare M alla striscia $\mathbb{R} \times [0, 1]$ discende ad un preciso omeomorfismo ϕ di A . L'azione di tale omeomorfismo su δ è rappresentato nella figura 2.4 per il caso $n = -1$. Segue dalla definizione di ρ che $\rho([\phi]) = n$.

Rimane da dimostrare che ρ sia iniettiva. Supponiamo ora che $f \in \text{Ker}(\rho)$ e sia ϕ un suo rappresentante. Definiamo $\tilde{\phi}$ come sopra. Siccome $\rho(f) = 0$ abbiamo che $\tilde{\phi}$ agisce come l'identità sul bordo di $\mathbb{R} \times [0, 1]$. Mostriamo ora la ϕ_* -equivarianza dell'omotopia $\tilde{F}(x, y, t) = t(x, y) + (1 - t)\phi(x, y)$ tra l'identità di $\mathbb{R} \times [0, 1]$ e $\tilde{\phi}$. Per fare ciò è sufficiente verificare che $\tilde{\phi}(\tau(x, y)) = \tau(\tilde{\phi}(x, y))$ per ogni automorfismo di rivestimento τ e per ogni $(x, y) \in \tilde{A}$. Questo segue direttamente dal fatto che $\tilde{\phi}(\tau(x, y)) = \phi_*(\tau(\tilde{\phi}(x, y)))$, poichè ϕ fissa puntualmente ∂A e conseguentemente ϕ_* è l'identità del gruppo $\pi_1(A) \cong \mathbb{Z}$.

L'omotopia $\tilde{F}$ tra $\tilde{\phi}$ e l'identità è pertanto ϕ_* -equivariante e fissa il bordo di $\tilde{A}$, quindi discende a un'omotopia F tra ϕ e l'identità che fissa il bordo di A puntualmente. Quindi f è l'identità del $MCG(A)$ e ρ è iniettiva. $\square$

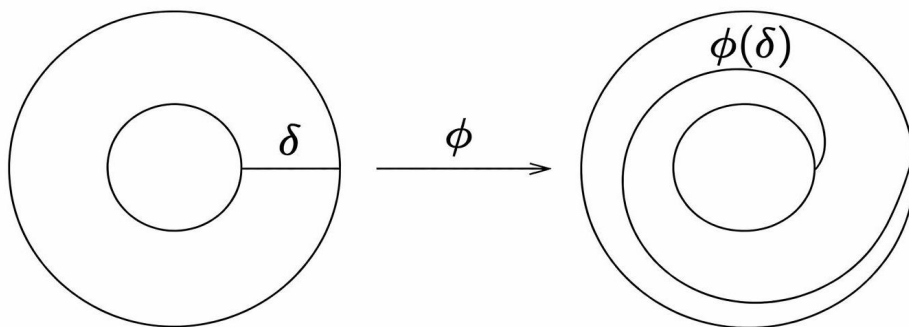


Figura 2.4: Un generatore del $MCG(A)$.

2.3.3 Il toro

L'esempio del toro T^2 è essenziale per comprendere al meglio lo studio del *mapping class group* di superfici di genere superiore, poichè è intuitivo e ricco di diversi meccanismi fondamentali di questa teoria. Il calcolo del $MCG(T^2)$ infatti mette in luce l'azione degli omeomorfismi sul gruppo fondamentale e mostra come invarianti geometrici, quali le curve semplici chiuse e i loro numeri di intersezione, ci permettano di fornire una descrizione algebrica esplicita del gruppo.

Proposizione 2.8. *L'omomorfismo $\sigma : MCG(T^2) \rightarrow SL(2, \mathbb{Z})$ dato dall'azione del $MCG(T^2)$ su $\pi_1(T^2) \cong \mathbb{Z}^2$ è un isomorfismo.*

Dimostrazione. Sia $p : \mathbb{R}^2 \rightarrow T^2$ il rivestimento universale del toro $T^2 \cong \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$. Sia $f \in MCG(T^2)$ e $\phi \in f$ un suo rappresentante. A meno di isotopia possiamo supporre che ϕ fissi l'origine, che scegliamo come punto base. L'omomorfismo ϕ induce un'applicazione $\phi_* : \pi_1(T^2) \rightarrow \pi_1(T^2)$, ovvero un automorfismo del gruppo abeliano libero $\mathbb{Z}^2$ che è rappresentabile tramite una matrice $A \in GL(2, \mathbb{Z})$. Poichè ϕ preserva l'orientazione del toro, lascia invariato il numero di intersezione algebrica tra due curve semplici chiuse orientate. In particolare, se le curve α e β corrispondono ai generatori $(1, 0)$ e $(0, 1)$ di $\pi_1(T^2)$, avremo che $\hat{i}(\alpha, \beta) = 1$ e per proposizione 1.6 si avrà $\det(A) = \hat{i}(\phi(\alpha), \phi(\beta)) = \hat{i}(\alpha, \beta) = 1$. Pertanto $A \in SL(2, \mathbb{Z})$. Ne consegue che l'omomorfismo $\sigma : MCG(T^2) \rightarrow SL(2, \mathbb{Z})$ che manda f in A è ben definito.

Mostriamo ora che σ è suriettiva. Scelta una qualsiasi matrice $M \in SL(2, \mathbb{Z})$, questa

è associata a un omeomorfismo $\tilde{\phi}_M : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ che preserva l'orientazione e tale che $\tilde{\phi}_M(x, y) = M(x, y)$. Poichè M manda $\mathbb{Z}^2$ in se stesso, l'applicazione $\tilde{\phi}_M$ è equivariante rispetto alle trasformazioni di rivestimento, e quindi discende ad un omeomorfismo $\phi_M : T^2 \rightarrow T^2$. Per costruzione, l'automorfismo indotto $(\phi_M)_*$ di $\pi_1(T^2)$ è rappresentato proprio da M . Pertanto si ha che $\sigma([\phi_M]) = M$.

Rimane da dimostrare che σ sia iniettiva. Sia $f \in MCG(T^2)$ tale che $\sigma(f) = Id$ e sia ϕ un rappresentante della sua classe che fissa l'origine. Allora ϕ_* agisce trivialmente su $\pi_1(T^2)$, siccome f appartiene al nucleo di σ , ed esiste un sollevamento $\tilde{\phi} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ che fissa l'origine che è equivariante rispetto al gruppo delle trasformazioni di rivestimento. Definiamo così l'isotopia $\tilde{F}(x, y) = (1-t)(x, y) + t\tilde{\phi}(x, y)$ tra $\tilde{\phi}$ e l'identità di $\mathbb{R}^2$. Essendo quest'ultima $\mathbb{Z}^2$ -equivariante, discende a un'isotopia tra ϕ e l'identità del toro. $\square$

2.4 Il metodo di Alexander

Dai calcoli degli esempi precedenti notiamo come questi seguano lo stesso schema generale: trovare una collezione di curve e/o archi che dividono la superficie in dischi, permettendoci di applicare il lemma di Alexander e determinare così il *mapping class group* tramite l'azione degli omeomorfismi sulle classi di isotopia di tali curve e archi. Questo procedimento è il principio alla base del metodo di Alexander.

Osservazione 2.9. Tagliando l'anello lungo l'arco δ rappresentato nella figura 2.4 si ottiene un disco. Lo stesso si ottiene tagliando il toro lungo le curve semplici chiuse α e β indicate nella dimostrazione della proposizione 2.8.

Prima di enunciare formalmente il metodo forniamo una definizione rigorosa su tale collezione di curve e archi.

Definizione 2.10. *Sia S una superficie compatta con un numero finito di punti marcati. Diciamo che una collezione $\{\gamma_i\}$ di curve e archi riempie S se la superficie ottenuta da S tagliando lungo tutti i γ_i è un'unione disgiunta di dischi con al più un punto marcato ciascuno.*

Osservazione 2.11. Se l'azione di un omeomorfismo su una collezione di curve che riempie la superficie S fissa le loro classi di isotopia, ciò non implica che debba appartenere alla classe banale del $MCG(S)$. Consideriamo, per esempio, la superficie S_g e la collezione di curve indicata nella figura seguente. L'involuzione iperellittica fissa le classi di isotopia delle curve e ne preserva l'orientazione, ma non coincide con l'elemento neutro del *mapping class group* (vedi l'esempio nella sezione 2.3).

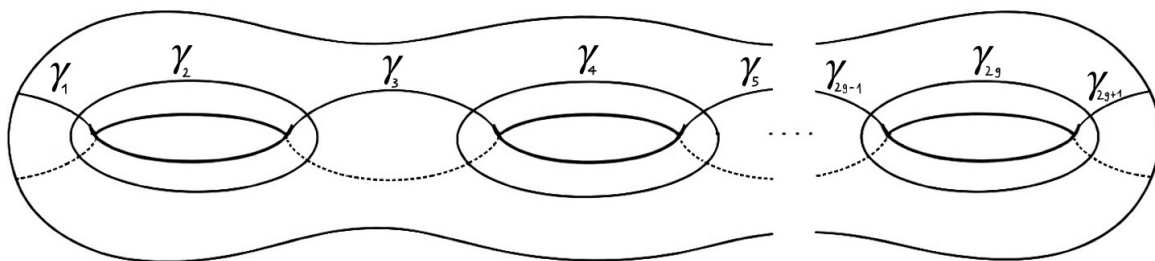


Figura 2.5: Collezione di curve che riempie la superficie S_g .

Teorema 2.12 (Il metodo di Alexander). *Sia S una superficie compatta, eventualmente con punti marcati, e sia $\phi \in \text{Omeo}^+(S, \partial S)$. Sia $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ una collezione di curve chiuse semplici essenziali e archi propri semplici in S con le proprietà:*

1. *I γ_i sono a due a due in posizione minimale.*
2. *I γ_i sono a due a due non isotopi.*
3. *Fissati i, j, k distinti, almeno uno tra $\gamma_i \cap \gamma_j$, $\gamma_i \cap \gamma_k$ o $\gamma_j \cap \gamma_k$ è vuoto.*

Allora valgono le seguenti:

1. *Se esiste una permutazione σ di $\{1, \dots, n\}$ tale che $\phi(\gamma_i)$ è isotopo a $\gamma_{\sigma(i)}$ relativamente a ∂S per ogni i , allora $\phi(\cup \gamma_i)$ è isotopo a $\cup(\gamma_i)$ sempre relativamente al bordo di S .*

Se consideriamo $\cup \gamma_i$ come un grafo (possibilmente sconnesso) Γ in S che ha per vertici i punti di intersezione e gli estremi degli archi, allora la composizione di ϕ con l'isotopia tra $\phi(\cup \gamma_i)$ e $\cup(\gamma_i)$ è un automorfismo ϕ_Γ di Γ .

2. *Supponiamo che $\{\gamma_i\}$ riempiano S . Se ϕ_Γ fissa ogni vertice e ogni arco di Γ con orientazione, allora ϕ è isotopo all'identità. Altrimenti, esiste $m \geq 2$ tale che ϕ^m è isotopo all'identità.*

Prima di dimostrare il metodo enunciamo il seguente risultato preliminare.

Lemma 2.13. *Sia S una superficie compatta, eventualmente con punti marcati, e siano $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ una collezione di curve chiuse semplici essenziali e archi semplici propri in S che soddisfano le proprietà dell'enunciato del metodo di Alexander. Se $\gamma'_1, \dots, \gamma'_n$ è un'altra di queste collezioni tale che γ'_i è isotopo a γ_i relativamente al bordo di S per ogni i , allora esiste un'isotopia di S relativa a ∂S che manda γ'_i in γ_i per ogni i , e conseguentemente che manda $\cup \gamma'_i$ in $\cup \gamma_i$.*

Dimostrazione del metodo di Alexander. Sia $\{\gamma_1, \dots, \gamma_n\}$ come nell'enunciato, e per ogni i indichiamo con γ'_i la curva semplice chiusa $\phi(\gamma_{\sigma^{-1}(i)})$. Applicando il lemma precedente alle collezioni $\{\gamma_i\}$ e $\{\gamma'_i\}$, possiamo definire un'isotopia della superficie S che manda γ'_i in γ_i per ogni i , e quindi che manda $\cup \gamma'_i$ in $\cup \gamma_i$. Abbiamo così provato il primo punto della tesi.

Siano il grafo Γ e l'automorfismo ϕ_Γ come nelle ipotesi. Poichè il gruppo degli automorfismi di un grafo finito è necessariamente finito, esiste una potenza $m \geq 0$ tale che ϕ_Γ^m sia l'automorfismo identità, ovvero che fissi ogni vertice e ogni lato di Γ con la sua orientazione. Siccome ϕ preserva l'orientazione, ne segue che ϕ_Γ^m , dopo eventuali modifiche tramite isotopia, fissa Γ puntualmente e manda ciascuna regione complementare in se stessa. Infatti una regione complementare è determinata dai lati orientati di Γ che ne costituiscono il bordo. Supponiamo ora che la collezione $\{\gamma_i\}$ riempa S , ovvero che la superficie ottenuta tagliando S lungo Γ è un insieme di dischi chiusi, ciascuno eventualmente con un punto marcato. Applicando il lemma di Alexander a ognuno di essi, notiamo che ϕ^m è isotopa all'identità di S . Questo dimostra il secondo punto della tesi. $\square$

Il metodo di Alexander consente pertanto di tradurre un problema topologico globale su un omeomorfismo della superficie in un problema combinatorio finito, permettendoci di dedurre le proprietà del *mapping class group* della superficie dall'analisi dell'azione su un grafo.

Capitolo 3

I twist di Dehn

Presentiamo in questo capitolo i più semplici elementi di ordine infinito del *mapping class group* di una superficie, ovvero quegli elementi che hanno i rappresentanti con il supporto più piccolo possibile: i twist di Dehn.

3.1 Definizione e rappresentazione

Per definire i twist di Dehn ricordiamo l'esempio dell'anello $A = S^1 \times [0, 1]$. Per fornire un'orientazione ad A lo immergiamo nel piano con coordinate polari tramite la mappa $(\theta, t) \mapsto (\theta, t + 1)$. Indichiamo con $T : A \rightarrow A$ la mappa definita da $T(\theta, t) = (\theta + 2\pi t, t)$. T è un omeomorfismo che preserva l'orientazione di A e che ne fissa il bordo; dunque è un elemento del $MCG(A)$, e lo denotiamo “twist sinistro” di A . La figura 2.4 mostra il comportamento di tale omeomorfismo.

Definizione 3.1 (Twist di Dehn). *Siano S una superficie orientata e α una curva semplice chiusa in S . Sia N un intorno chiuso regolare di α omeomorfo all'anello A mediante l'omeomorfismo $\phi : A \rightarrow N$ che preserva l'orientazione. Denominiamo twist di Dehn relativo ad α , l'omeomorfismo T_α definito come segue:*

$$T_\alpha(x) = \begin{cases} \phi \circ T \circ \phi^{-1}(x) & \text{se } x \in N \\ x & \text{se } x \notin N \end{cases}$$

Il twist di Dehn T_α dipende dalla scelta dell'intorno N e dell'omeomorfismo ϕ , ma la classe di isotopia di T_α nel *mapping class group* non dipende da nessuna di queste scelte. Essa non dipende nemmeno dalla scelta di α nella sua classe di isotopia: indicando con a quest'ultima classe, è ben definito l'elemento T_a del $MCG(S)$. Con un abuso di notazione a volte scriveremo T_α per indicare il twist di Dehn relativo alla classe di isotopia a .

Un modo per rappresentare il twist di Dehn T_a è il seguente. Tagliamo S lungo α , applichiamo un “twist” di un angolo di 2π a un intorno di una delle due componenti di bordo ottenute e poi le incolliamo tra loro. Questi passaggi sono mostrati in figura 3.1 per la superficie S_2 .

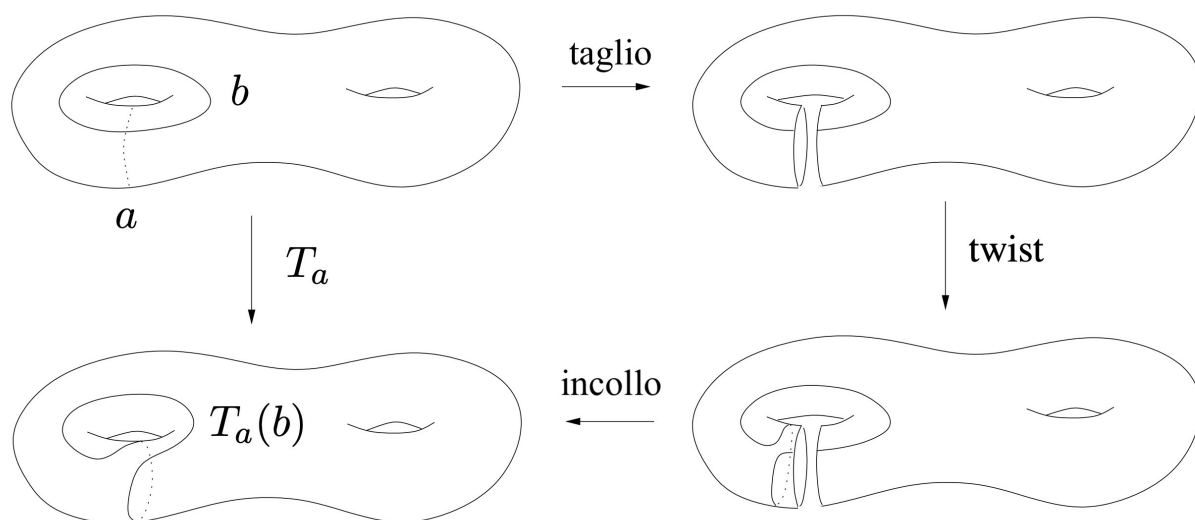


Figura 3.1: Rappresentazione di un twist di Dehn relativo alla classe di isotopia a della curva α .

Indicando con b la classe di isotopia di una curva semplice chiusa β , tale che $i(a, b) \neq 0$, la classe $T_a(b)$ è ottenuta sostituendo ogni segmento di β che interseca α con una nuova curva che avvolge la superficie lungo α e che, successivamente, si ricongiunge a β . La figura 3.1 mostra il caso $i(a, b) = 1$. Nel caso in cui il numero di intersezione geometrico tra a e b sia grande, può essere complicato riuscire a rappresentare la classe di isotopia $T_a(b)$ con tale metodo. Utilizzeremo così la seguente procedura per raffigurare la situazione locale di tutte le intersezioni. Consideriamo $i(a, b)$ curve parallele α_i nella classe di a , ciascuna in posizione minimale con β . Successivamente, per ogni punto di intersezione tra le α_i e β , modifichiamo quest'ultima, “risolvendo” le intersezioni, come indicato in figura 3.2.

Osservazione 3.2. Se a e b sono due classi di isotopia con $i(a, b) = 0$, allora $T_a(b) = 0$: possiamo scegliere un intorno N di a tale che esiste un rappresentante della classe di b che appartiene al suo complementare.

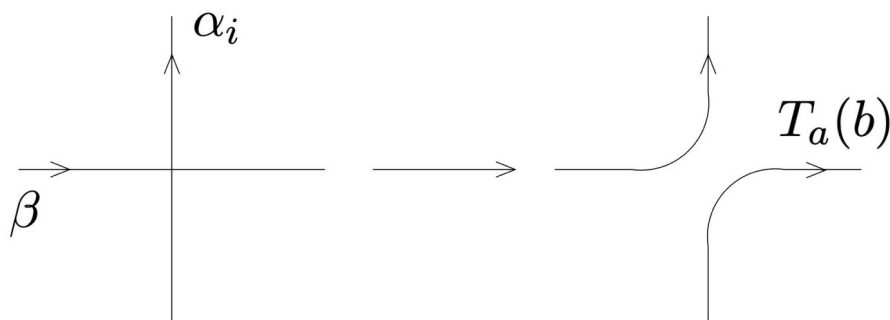


Figura 3.2: Rappresentazione di un twist di Dehn risolvendo l'intersezione tra β e α_i .

3.2 Proprietà dei twist di Dehn

Proposizione 3.3. *Sia a la classe di isotopia della curva semplice chiusa α in una superficie S . Se α non è omotopo a un punto o una puntura di S , allora il twist di Dehn T_a è un elemento non banale del $MCG(S)$.*

Dimostrazione. Supponiamo che α sia una curva non separante. Allora, per il principio di cambio delle coordinate, esiste una curva semplice chiusa β tale che $i(\alpha, \beta) = 1$. Indichiamo con b la sua classe di isotopia. Come in figura 3.1, è possibile scegliere un rappresentante di $T_a(b)$ che interseca β una sola volta. Dal criterio del bigono risulta chiaro che $i(T_a(b), b) = 1$ e, pertanto, T_a è un elemento non banale di $MCG(S)$.

Ipotizziamo ora che α sia una curva che separi la superficie S e, grazie al principio di cambio di coordinate, scegliamo la curva β tale che $i(\alpha, \beta) = 2$, come in figura 3.3. Il numero di intersezione geometrico tra $T_a(b)$ e β è uguale a 4, in quanto tutti e quattro i candidati bigoni, ottenuti ciascuno dall'unione di un arco sulla curva β e un arco su $T_a(\beta)$, sono curve semplici chiuse non separanti e, quindi, non sono veri bigoni. Questo prova che T_a non è la classe banale.

Rimane da dimostrare il caso in cui α sia omotopo a una componente di bordo della superficie S . Siccome per ipotesi la curva α non è omotopa a un punto o a una puntura di S , ne consegue che la superficie ha bordo differente dal disco o dal disco bucato. Indichiamo con S' la superficie ottenuta incollando tra loro due copie di S lungo tale bordo. In S' la curva α è diventata essenziale. Perciò, se T_a fosse l'elemento banale del $MCG(S)$, allora sarebbe banale anche nel $MCG(S')$ per definizione di *mapping class group* di superfici con bordo, e questo è assurdo, perchè contraddirebbe quanto dimostrato in precedenza. $\square$

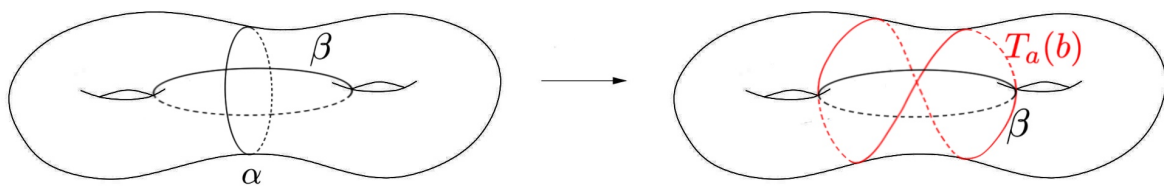


Figura 3.3: Il twist di Dehn relativo alla curve semplici chiuse separante a è non banale.

Generalizziamo ora la proposizione precedente nel seguente risultato, fornendo una formula che esplicita la relazione tra i twist di Dehn e i numeri di intersezione tra due curve.

Proposizione 3.4. *Siano a e b due classi di isotopia arbitrarie di curve semplici chiuse ed essenziali in una superficie. Sia k un intero qualsiasi. Allora si ha*

$$i(T_a^k(b), b) = |k| i(a, b)^2.$$

Idea della dimostrazione. Scegliamo due rappresentanti α e β , rispettivamente delle classi a e b , che siano in posizione minimale. Prendendo $k i(a, b)$ copie parallele della curva α , che giacciono sullo stesso lato di questa, e applicando il metodo indicato in figura 3.2 per risolvere ogni intersezione con β , otteniamo una curva semplice chiusa β' nella classe di isotopia di $T_a^k(b)$. Abbiamo così che $|\beta \cap \beta'| = |k| i(a, b)^2$. Con un ragionamento analogo alla proposizione 3.3 siamo in grado di affermare che le curve β e β' non formano bigoni e, quindi, che sono in posizione minimale. È così verificata la seguente catena di uguaglianze.

$$|k| i(a, b)^2 = |\beta \cap \beta'| = i(\beta, \beta') = i(b, T_a^k(b)).$$

□

Corollario 3.5. *I twist di Dehn relativi alle curve semplici chiuse ed essenziali hanno ordine infinito.*

Dimostrazione. Sia a la classe di isotopia di curve semplici chiuse ed essenziali. Allora, per il principio di cambio delle coordinate, esiste b con $i(a, b) \neq 0$. Supponiamo, per assurdo, che esista $k \in \mathbb{Z}$ tale che T_a^k è la classe banale del *mapping class group*. In tal caso avremmo $T_a^k(b) = b$, e di conseguenza

$$0 = i(b, b) = i(T_a^k(b), b) = |k| i(a, b)^2,$$

che è verificata esclusivamente per $k = 0$.

□

3.3 Relazioni tra due twist di Dehn

Proposizione 3.6. *Siano a e b due classi di isotopia di curve semplici chiuse ed essenziali. Allora si ha*

$$T_a = T_b \iff a = b.$$

Dimostrazione. Abbiamo già verificato l'implicazione verso sinistra, siccome abbiamo osservato che un twist di Dehn è ben definito rispetto a una classe di isotopia di curve semplici chiuse.

Dimostriamo che se $a \neq b$, allora $T_a \neq T_b$. Cerchiamo una classe di isotopia c tale che $i(a, c) = 0$ e $i(b, c) \neq 0$. Distinguiamo due casi possibili, se $i(a, b) = 0$ e se $i(a, b) \neq 0$. Nel primo possiamo scegliere $c = a$, mentre nel secondo è possibile trovare c grazie al principio di cambio delle coordinate. Per la proposizione 3.4 otteniamo:

$$i(T_a(c), c) = i(a, c)^2 = 0 \neq i(b, c)^2 = i(T_b(c), c).$$

Ne consegue che $T_a(c) \neq T_b(c)$ e $T_a \neq T_b$. □

Proposizione 3.7. *Sia S una superficie. Per ogni $f \in MCG(S)$ e per ogni classe di isotopia a di curve semplici chiuse in S , vale:*

$$T_{f(a)} = f T_a f^{-1}.$$

Dimostrazione. Indichiamo con ϕ un rappresentante della classe di isotopia f , con α un rappresentante di a e con ψ_α un rappresentante di T_a il cui supporto è un anello. Notiamo che ϕ^{-1} manda un intorno regolare di $\phi(\alpha)$ in un intorno regolare di α , preservandone l'orientazione. Successivamente ψ_α applica un twist a tale intorno e ϕ lo riporta nell'intorno di $\phi(\alpha)$, anche in questo caso preservandone l'orientazione. Abbiamo così ottenuto un twist di Dehn relativo alla curva $\phi(\alpha)$. □

Corollario 3.8. *Se a e b sono classi di isotopia di curve semplici chiuse e non separanti in S , allora i relativi twist di Dehn T_a e T_b sono coniugati nel $MCG(S)$.*

Corollario 3.9. *Sia S una superficie. Per ogni $f \in MCG(S)$ e per ogni classe di isotopia a di curve semplici chiuse in S , è soddisfatta la seguente equivalenza.*

$$f \text{ commuta con } T_a \iff f(a) = a.$$

Dimostrazione. Dalle proposizioni precedenti risulta:

$$f T_a = T_a f \iff f T_a f^{-1} = T_a \xrightarrow{3.7} T_{f(a)} = T_a \xrightarrow{3.6} f(a) = a.$$

□

Corollario 3.10. *Per ogni a e b classi di isotopia di curve semplici chiuse in una superficie, valgono:*

$$i(a, b) = 0 \iff T_a(b) = b \iff T_a T_b = T_b T_a.$$

Dimostrazione. L'unico fatto non banale è che la seconda equazione implichi la prima. Supponiamo che $T_a(b) = b$; allora per la proposizione 3.4 abbiamo:

$$i(a, b)^2 = i(T_a(b), b) = i(b, b) = 0.$$

Ne consegue che $i(a, b) = 0$. □

Possiamo generalizzare ciascuna delle formule precedenti al caso di potenze dei twist di Dehn. Otteniamo così i seguenti risultati.

Proposizione 3.11. *Sia S una superficie e siano $j, k \in \mathbb{Z}$. Per ogni $f \in MCG(S)$ e per ogni classe di isotopia a e b di curve semplici chiuse in S , valgono le seguenti:*

1. $T_a^j = T_b^k \iff a = b$ e $j = k$.
2. $T_{f(a)}^j = f T_a^j f^{-1}$.
3. f commuta con $T_a^j \iff f(a) = a$.
4. $i(a, b) = 0 \iff T_a^j T_b^k = T_b^k T_a^j$.

3.3.1 Relazione della treccia

Presentiamo a seguito una relazione fondamentale nella teoria dei *mapping class groups*: la relazione della treccia. Quest'ultima ci permette di tradurre una specifica configurazione geometrica tra due curve semplici chiuse in un preciso legame algebrico tra i corrispondenti twist di Dehn.

Proposizione 3.12 (Relazione della treccia). *Se a e b sono classi di isotopia di curve semplici chiuse con $i(a, b) = 1$, allora*

$$T_a T_b T_a = T_b T_a T_b.$$

Dimostrazione. Grazie alle proposizioni precedenti abbiamo la catena di equivalenze:

$$T_a T_b T_a = T_b T_a T_b \iff (T_a T_b) T_a (T_a T_b)^{-1} = T_b \xrightarrow{3.7} T_{T_a T_b(a)} = T_b \xrightarrow{3.6} T_a T_b(a) = b.$$

Per il principio di cambio delle coordinate possiamo ipotizzare di essere nel caso indicato dalla figura 3.4, dove α e β sono due rappresentanti rispettivamente della classe di a e di b . □

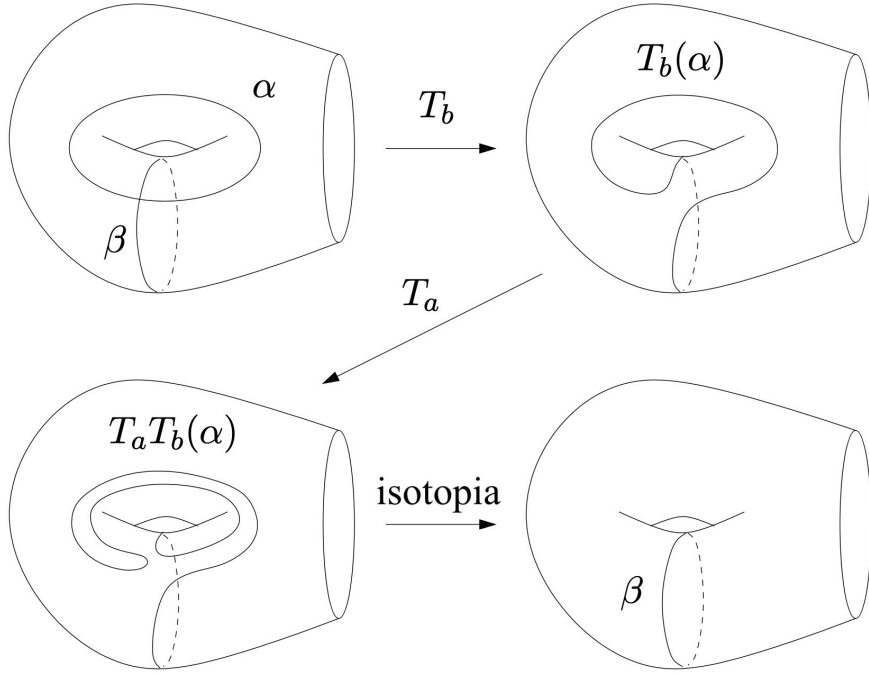


Figura 3.4: Dimostrazione della relazione della treccia.

Se due twist di Dehn soddisfano la relazione della treccia, allora le curve corrispondenti hanno necessariamente numero di intersezione geometrico uguale a 1. Quindi è verificata anche l'implicazione opposta della relazione. Dimostriamo questo risultato.

Proposizione 3.13. *Se a e b sono classi di isotopia distinte di curve semplici chiuse tali che i twist di Dehn soddisfano $T_a T_b T_a = T_b T_a T_b$, allora $i(a, b) = 1$.*

Dimostrazione. Abbiamo già verificato che la relazione $T_a T_b T_a = T_b T_a T_b$ è equivalente a $T_a T_b(a) = b$. Ciò implica che $i(a, T_a T_b(a)) = i(a, b)$. Applicando T_a^{-1} , otteniamo:

$$i(T_a^{-1}(a), T_a^{-1}T_a T_b(a)) = i(a, T_b(a)) \stackrel{3.4}{=} i(a, b)^2.$$

Pertanto abbiamo ricavato che $i(a, b) = i(a, b)^2$, ed è soddisfatta se e solo se $i(a, b)$ è uguale a 1 o 0. Se $i(a, b) = 0$, allora la proposizione 3.10 riduce la relazione a $T_a = T_b$, e ciò è assurdo, siccome abbiamo supposto che $a \neq b$. Concludiamo così che $i(a, b) = 1$. $\square$

Osservazione 3.14. Se a e b sono due classi di isotopia di curve semplici chiuse essenziali e orientate con $i(a, b) = 1$, allora, grazie al principio di cambio delle coordinate, notiamo che $T_b T_a^2 T_b$ inverte l'orientazione di a .

3.4 Esempi

Per comprendere al meglio il comportamento dei twist di Dehn su una superficie, presentiamo in questa sezione due esempi fondamentali: il toro e l'anello.

Ricordiamo dalla proposizione 2.8 che l'isomorfismo di gruppi $\sigma : MCG(T^2) \rightarrow SL(2, \mathbb{Z})$ è ben definito. Date le due curve α e β sul toro, corrispondenti rispettivamente ai generatori $(1, 0)$ e $(0, 1)$ di $\pi_1(T^2)$, i twist di Dehn relativi alle loro classi, T_α e T_β , vengono identificati tramite σ con le matrici:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Tali matrici generano il gruppo $SL(2, \mathbb{Z})$ e, conseguentemente, T_α e T_β sono i generatori del *mapping class group* del toro. Tale procedimento è valido anche per il toro con una puntura, dove i twist di Dehn relativi alle curve α e β generano il $MCG(S_{1,1})$.

Un ragionamento analogo vale anche per l'isomorfismo $\rho : MCG(A) \rightarrow \mathbb{Z}$ della proposizione 2.7, che fa corrispondere il twist di Dehn T dell'anello, definito all'inizio del capitolo, al generatore -1 di $\mathbb{Z}$. Dunque T è un generatore del $MCG(A)$, come avevamo già anticipato nella figura 2.4.

Osservazione 3.15. La relazione della treccia tra i twist di Dehn relativi alle curve α e β sul toro corrisponde alla relazione di $SL(2, \mathbb{Z})$:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Gli esempi precedenti ci suggeriscono il ruolo fondamentale dei twist di Dehn nella struttura dei *mapping class group*: ci anticipano, infatti, l'esistenza di un'importante legame tra i twist di Dehn e i generatori del gruppo, che studieremo nel prossimo capitolo.

Capitolo 4

I generatori del Mapping Class Group

Introdotta i twist di Dehn e studiato il loro ruolo centrale in questa teoria, approfondiamo in questo capitolo il problema della generazione del *mapping class group*. Cerchiamo, quindi, di stabilire se è possibile individuare un numero finito di generatori del gruppo, anche per superfici geometricamente più complesse del toro e dell'anello. Per fare ciò, siccome la composizione di twist di Dehn non permuta eventuali punture su una superficie, è necessario fornire una nuova definizione di *mapping class group* per questa tipologia di superfici.

Definizione 4.1 (Mapping class group puro). *Sia $S_{g,n}$ una superficie con punture. Il suo mapping class group puro, indicato con $PMCG(S_{g,n})$, è il sottogruppo del $MCG(S_{g,n})$ costituito dagli elementi che fissano singolarmente tutte le punture.*

Pertanto, quello che cerchiamo effettivamente di dimostrare in questo capitolo, è che il *mapping class group puro* di una superficie $S_{g,n}$ è finitamente generato da twist di Dehn relativi a curve semplici chiuse essenziali e non separanti. Per raggiungere tale risultato introduciamo due strumenti essenziali: il complesso delle curve e la successione esatta di Birman.

4.1 Il complesso delle curve

Definizione 4.2 (Complesso delle curve). *Sia S una superficie. Il complesso delle curve della superficie S , denotato $C(S)$, è un complesso simpliciale 1-dimensionale definito come segue:*

1. esiste un vertice in $C(S)$ per ogni classe di isotopia di curve semplici chiuse ed essenziali in S .
2. esiste un arco tra due vertici a e b in $C(S)$ se e solo se $i(a, b) = 0$.

Dalla definizione di complesso delle curve si evince che è possibile confondere le punture e le componenti di bordo della superficie, siccome le curve semplici chiuse che sono omotope a quest'ultime non sono essenziali. Pertanto, in seguito ci occuperemo solo di superfici con punture senza perdere di generalità.

Teorema 4.3. *Se $3g + n \geq 5$, allora $C(S_{g,n})$ è connesso.*

Dimostrazione. Siano a, b due vertici di $C(S_{g,n})$. Dimostriamo la tesi per induzione sul numero di intersezione geometrico tra a e b .

Se $i(a, b) = 0$, allora non c'è nulla da provare. Supponiamo che $i(a, b) = 1$ e consideriamo due rappresentanti α e β in posizione minimale. Un intorno chiuso regolare di $\alpha \cup \beta$ è un toro con una componente di bordo. Indichiamo con c la classe di isotopia di tale componente. Abbiamo così che $i(a, c) = i(b, c) = 0$. Inoltre c è essenziale, poichè se non lo fosse avremmo che $S_{g,n} \cong S_{1,1}$ oppure $S_{g,n} \cong T^2$, e ciò viola la condizione $3g + n \geq 5$. Pertanto, in $C(S_{g,n})$ esistono archi che connettono a, c, b .

Per il passo induttivo assumiamo che $i(a, b) \geq 2$ e che le curve semplici chiuse con numero di intersezione strettamente minore di $i(a, b)$ corrispondano a vertici connessi da archi in $C(S_{g,n})$. Come nel passo precedente, cerchiamo una classe di isotopia c tale che $i(a, c) < i(a, b)$ e $i(b, c) < i(a, b)$. Siano α e β due rappresentanti rispettivamente di a e b in posizione minimale. Orientando tali curve possiamo distinguere due casi, rappresentati in figura 4.1.

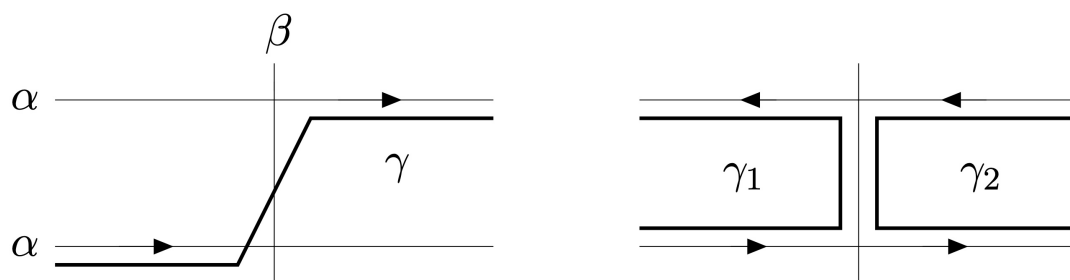


Figura 4.1: I due casi per le curve semplici chiuse orientate α e β .

Nella prima situazione, raffigurata a sinistra, i due punti di intersezione hanno lo stesso indice. Possiamo scegliere una curva semplice chiusa γ che segue α , tale che $i(a, c) = 1$, dove c rappresenta la classe di isotopia di γ . Quest'ultima può essere scelta,

inoltre, in modo tale che $i(b, c)$ sia strettamente minore di $i(a, b)$, come nella figura precedente.

Nel caso in cui i due punti di intersezione abbiano indici opposti, consideriamo le due curve γ_1 e γ_2 , indicate a destra nella figura 4.1. Tali curve non possono essere banali, poichè altrimenti α e β formerebbero un bigono e non sarebbero, dunque, in posizione minimale. Se γ_1 e γ_2 fossero omotope a una puntura della superficie, allora avremmo che α è il bordo di un disco con due punti tolti. In tal caso sarebbero analogamente definite due curve γ_3 e γ_4 sull'altra componente connessa delimitata da α . Nuovamente γ_3 e γ_4 potrebbero essere banali e, inoltre, non potrebbero essere omotope a una puntura, altrimenti otterremmo che $S_{g,n} \cong S_{0,4}$, contraddicendo le ipotesi. Dunque almeno una di queste quattro curve è essenziale e scegliamo come c la sua classe. Per costruzione, è evidente che $i(a, c) < i(a, b)$ e $i(b, c) < i(a, b)$. Possiamo così applicare l'ipotesi induttiva. $\square$

Osservazione 4.4. Il teorema precedente può essere riformulato affermando che per ogni coppia di classi di isotopia a e b di curve semplici chiuse in $S_{g,n}$, esiste un insieme di classi di isotopia $a = c_1, \dots, c_k = b$, tali che $i(c_i, c_{i+1}) = 0$ per ogni $i \in \{1, \dots, k-1\}$.

Definizione 4.5 (Complesso delle curve non separanti). *Sia S una superficie. Indichiamo con $N(S)$ il sottocomplesso di $C(S)$ che ha come vertici le classi di isotopia delle curve semplici chiuse e non separanti.*

Teorema 4.6. *Se $g \geq 2$, allora $N(S_{g,n})$ è connesso.*

Dimostrazione. Proviamo prima il teorema per $g \geq 2$ e $n \leq 1$, poi per induzione su n dimostreremo il caso generale. Sia dunque $S \cong S_g$ oppure $S \cong S_{g,1}$. Se a e b sono due classi di isotopia di curve semplici chiuse e non separanti in S , allora per l'osservazione 4.4 esiste una sequenza di classi di isotopia $a = c_1, \dots, c_k = b$ con $i(c_i, c_{i+1}) = 0$. Modifichiamo la sequenza $\{c_i\}$ in modo che sia costituita solo da classi di curve non separanti. Supponiamo che c_i sia separante e indichiamo con γ_i un suo rappresentante. Siano S' e S'' le due componenti di S ottenute tagliando lungo γ_i . Siccome abbiamo supposto che $g \geq 2$ e $n \leq 1$, le due superfici hanno genere positivo, altrimenti c_i non sarebbe essenziale. Se c_{i-1} e c_{i+1} hanno due rappresentanti che giacciono rispettivamente in S' e S'' , allora $i(c_{i-1}, c_{i+1}) = 0$ e possiamo semplicemente rimuovere c_i dalla sequenza. Se, invece, i due rappresentanti si trovano sulla stessa componente, ad esempio S' , allora possiamo sostituire c_i con la classe di isotopia di una curva semplice chiusa e non separante in S' . Ripetendo tale procedimento, otteniamo una sequenza $\{c_i\}$ di classi di isotopia di curve non separanti.

Assumiamo ora che $n \geq 2$ e ragioniamo in modo analogo al caso precedente. Si può però presentare il problema che entrambi i rappresentanti di c_{i-1} e c_{i+1} giacciono sulla stessa superficie S' , e con S'' di genere 0. In tal caso S'' dovrà avere necessariamente almeno due punture, altrimenti c_i non sarebbe essenziale. Pertanto S' avrà genere $g \geq 2$, ma avrà meno punture della superficie originale $S_{g,n}$, quindi, per induzione potremmo trovare una sequenza di classi di isotopia di curve non separanti che connettono c_{i-1} e c_{i+1} in $N(S_{g,n})$. $\square$

Definizione 4.7. Sia S una superficie. Denotiamo con $\widehat{N}(S)$ il complesso simpliciale 1-dimensionale i cui vertici sono le classi di isotopia di curve semplici chiuse essenziali e non separanti in S e in cui esiste un arco tra due classi a e b se e solo se $i(a, b) = 1$.

Lemma 4.8. Se $g \geq 2$ e $n \geq 0$, allora il complesso $\widehat{N}(S_{g,n})$ è connesso.

Dimostrazione. Siano a e b due classi di isotopia di curve semplici chiuse in $S_{g,n}$.

Abbiamo già verificato che esiste una sequenza di classi di isotopia $a = c_1, \dots, c_k = b$ con $i(c_i, c_{i+1}) = 0$ per ogni $i \in \{1, \dots, k-1\}$. Grazie al principio di cambio delle coordinate, per ogni i possiamo trovare una classe di isotopia di curve semplici chiuse e non separanti d_i tale che $i(c_i, d_i) = i(d_i, c_{i+1}) = 1$. La sequenza $a = c_1, d_1, c_2, \dots, c_{k-1}, d_{k-1}, c_k = b$ rappresenta il cammino desiderato in $\widehat{N}(S_{g,n})$. $\square$

Ricordiamo il nostro obiettivo di dimostrare che $PMCG(S_{g,n})$ è generato da finiti twist di Dehn relativi a curve semplici chiuse e non separanti. Il complesso delle curve ci permetterà di ragionare per induzione sul genere g della superficie $S_{g,n}$. Infatti, data $f \in MCG(S_{g,n})$ e a una classe di isotopia di curve semplici chiuse non separanti, il lemma precedente ci consentirà di trovare un prodotto h di twist di Dehn che mandano $f(a)$ in a . Avremo così che $h \circ f$ è un elemento del *mapping class group* di $S_{g-1,n+2}$, dove quest'ultima è la superficie ottenuta tagliando $S_{g,n}$ lungo un rappresentante di a . Dunque possiamo applicare l'ipotesi induttiva su g .

Nella prossima sezione introduciamo la successione esatta di Birman. Questa ci permetterà, invece, di ragionare per induzione sul numero di punture n della superficie $S_{g,n}$. Esiste, infatti, una mappa naturale da $S_{g,n}$ a $S_{g,n-1}$, ottenuta “riempiendo” una puntura, che induce un omomorfismo suriettivo dal $MCG(S_{g,n})$ al $MCG(S_{g,n-1})$. Grazie alla successione esatta di Birman saremo in grado di dimostrare che il nucleo di tale omomorfismo è isomorfo a $\pi_1(S_{g,n-1})$ e che i generatori di quest'ultimo gruppo corrispondono al prodotto finito di twist di Dehn relativi a curve semplici chiuse e non separanti. Questo conclude il passo induttivo su n .

4.2 La successione esatta di Birman

Definizione 4.9 (Omomorfismo *Forget*). *Sia S una superficie, eventualmente con punture, e sia S^* la superficie ottenuta marcando un punto x in S . Allora abbiamo il seguente omomorfismo naturale:*

$$\text{Forget} : MCG(S^*) \rightarrow MCG(S)$$

ottenuto “dimenticando” che x è un punto marcato.

Equivalentemente, se pensiamo a S^* come alla superficie ottenuta da S aggiungendo una puntura, allora *Forget* è l’omomorfismo indotto dall’inclusione $S^* \hookrightarrow S$. Quest’ultimo è suriettivo, infatti, dato un qualsiasi omomorfismo di S possiamo modificarlo tramite isotopia in modo tale che fissi il punto x .

Siamo interessati a studiare il nucleo di tale omomorfismo. Sia $f \in MCG(S^*)$ un elemento del nucleo di *Forget*. Allora, siccome $\text{Forget}(f) = 1$, esiste un’isotopia tra f e l’identità in S . Durante tale isotopia l’immagine del punto x percorre una curva chiusa α basata in x stesso. Mostriamo che, “spingendo” x lungo la curva α^{-1} , saremo in grado di descrivere al meglio la classe $f \in MCG(S^*)$. Definiamo ora una nuova mappa per dare un’idea più precisa di questa “spinta”.

Definizione 4.10 (Omomorfismo *Push*). *Sia α una curva chiusa in S basata in x . Possiamo pensare ad α come a un’isotopia di punti da x in se stesso, che si estende a un’isotopia dell’intera superficie S (questo è il caso 0-dimensionale della proposizione 1.11). Sia ϕ_α l’omeomorfismo di S^* ottenuto alla fine di tale isotopia. Considerando x come un punto marcato, possiamo studiare la classe relativa a ϕ_α nel $MCG(S^*)$, denominata $\text{Push}(\alpha)$. Conseguentemente possiamo definire la mappa*

$$\text{Push} : \pi_1(S, x) \rightarrow MCG(S^*).$$

Un modo informale di pensare a $\text{Push}(\alpha)$ è immaginando di premere sul punto x in S e di spingerlo lungo α trascinando il resto della superficie.

Vorremmo che l’omomorfismo *Push* sia ben definito, ovvero che la classe $\text{Push}(\alpha)$ non dipenda dalla scelta dell’estensione dell’isotopia dell’intera superficie e, inoltre, che non dipenda dalla scelta della curva α nella sua classe di isotopia. Tale risultato non è banale ed è verificato dalla successione esatta di Birman: il seguente teorema, infatti, mostra che l’immagine della mappa *Push* è esattamente il nucleo dell’omomorfismo *Forget*.

Teorema 4.11 (Successione esatta di Birman). *Sia S una superficie con $\chi(S) < 0$ e con eventuali punture o componenti di bordo. Sia S^* la superficie ottenuta marcando un*

punto x nella parte interna di S . Allora è esatta la successione

$$1 \longrightarrow \pi_1(S, x) \xrightarrow{Push} MCG(S^*) \xrightarrow{Forget} MCG(S) \longrightarrow 1.$$

Idea della dimostrazione. L'idea consiste nel costruire un fibrato opportuno e ricondurre la successione in questione a un tratto della successione esatta lunga dei gruppi di omotopia. Per una dimostrazione completa si rimanda a [1]. $\square$

Possiamo considerare la restrizione della successione a un qualsiasi sottogruppo del $MCG(S^*)$. Pertanto, nel nostro caso, possiamo sostituire $MCG(S^*)$ con $PMCG(S^*)$ e riformulare la successione esatta di Birman come segue.

$$1 \longrightarrow \pi_1(S_{g,n}) \xrightarrow{Push} PMCG(S_{g,n+1}) \xrightarrow{Forget} PMCG(S_{g,n}) \longrightarrow 1.$$

4.2.1 L'omomorfismo $Push$ in termini di twist di Dehn

Per una curva semplice chiusa α in S basata in x , possiamo fornire una rappresentazione esplicita di $Push(\alpha)$ come segue. Identifichiamo un intorno chiuso regolare di α con l'anello $S^1 \times [0, 2]$ e lo orientiamo come nella definizione di twist di Dehn. Identifichiamo il punto x con il punto $(0, 1)$ dell'anello. Esiste un'isotopia dell'anello data da:

$$F((\theta, r), t) = \begin{cases} (\theta + 2\pi r t, r) & \text{se } 0 \leq r \leq 1 \\ (\theta + 2\pi(2 - r)t, r) & \text{se } 1 \leq r \leq 2 \end{cases}$$

Possiamo estendere F con l'identità per ottenere un'isotopia della superficie S . Quando restringiamo F a $\{x\} \times [0, 1]$, otteniamo $F((0, 1), t) = (2\pi t, 1)$. In altre parole l'isotopia F “spinge” x lungo il cuore dell'anello. L'omeomorfismo ϕ di S^* , indotto da F al tempo $t = 1$, è il prodotto di due twist di Dehn. Più precisamente, identificando il bordo dell'anello $S^1 \times \{0\}$ con una curva semplice chiusa a in S^* , e identificando $S^1 \times 2$ con una curva analoga b , si ha che ϕ è isotopo a $T_a T_b^{-1}$. Un rappresentante di $Push(\alpha)$ è indicato in figura 4.2.

Riassumiamo l'argomentazione precedente nel seguente lemma.

Lemma 4.12. *Sia α una curva semplice chiusa in S che rappresenta un elemento di $\pi_1(S, x)$. Allora abbiamo che*

$$Push([\alpha]) = T_a T_b^{-1},$$

dove a e b sono le classi di isotopia di curve semplici chiuse in S^* , ottenute rispettivamente spostando α a destra e a sinistra sulla superficie, in modo che costituiscano il bordo di un intorno regolare di α stesso omeomorfo a un anello. Le classi d'isotopia a e b sono non separanti in S^* se e solo se α è non separante in S .

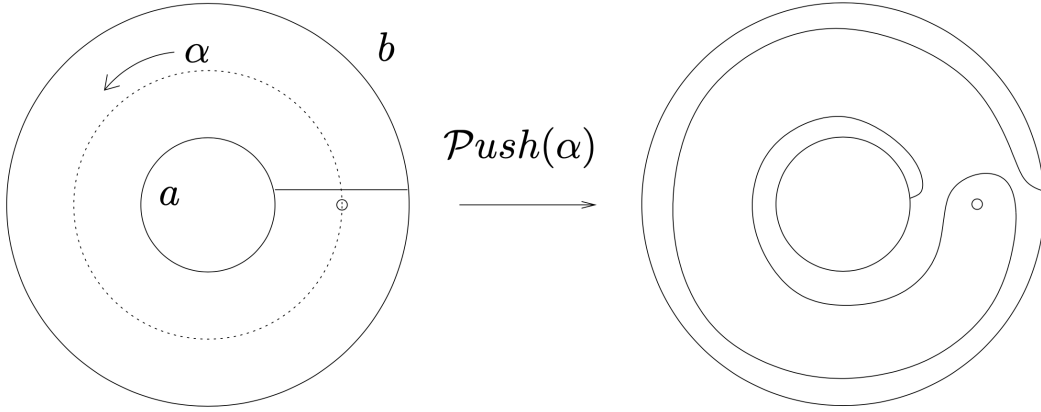


Figura 4.2: Rappresentazione della classe $Push(\alpha)$.

Dalla definizione dell'omomorfismo $Push$ segue direttamente il prossimo risultato.

Lemma 4.13. *Per ogni $h \in PMCG(S^*)$ e per ogni $\alpha \in \pi_1(S, x)$, è soddisfatta*

$$Push(h_*(\alpha)) = hPush(\alpha)h^{-1}.$$

4.2.2 L'omomorfismo di taglio

Grazie alla successione esatta di Birman siamo in grado di definire una nuova successione che ci sarà utile per il nostro obiettivo. Introduciamo prima alcuni concetti fondamentali.

Sia S una superficie e sia α una curva semplice chiusa orientata e non separante in S . Indichiamo con a la classe di isotopia di α . Denotiamo con $MCG(S, a)$ lo stabilizzatore della classe a in $MCG(S)$, ovvero il sottogruppo costituito dagli elementi del *mapping class group* che mandano α in una curva a essa isotopa. Definiamo inoltre con $MCG(S, \vec{a})$ il sottogruppo di $MCG(S, a)$ formato dagli elementi che preservano anche l'orientazione della curva α . Se S è una superficie senza componenti di bordo o punture e $f \in MCG(S, \vec{a})$, allora è sempre possibile scegliere un rappresentante ϕ nella classe di f che fissi la curva α punto per punto. Consideriamo la superficie S_α ottenuta tagliando la superficie S lungo la curva α . Questa ha due componenti di bordo. Identificando ciascuna di tali componenti con il bordo di un disco D^2 , otteniamo una nuova superficie che indichiamo con $S - \alpha$, poichè abbiamo rimosso la curva α dalla superficie. Quest'ultima non ha componenti di bordo e ha due punti marcati in più rispetto alla superficie originale S . L'omeomorfismo ϕ , che fissa α , induce un omeomorfismo naturale della superficie $S - \alpha$. Ciò permette di definire l'omomorfismo $\zeta : MCG(S, \vec{a}) \rightarrow PMCG(S - \alpha)$, detto omomorfismo di taglio. In altre parole, ζ associa a una classe di omeomorfismi che fis-

sano la curva α la classe dell'omeomorfismo indotto sulla superficie ottenuta eliminando la curva.

Proposizione 4.14. *Sia S una superficie chiusa con finiti punti marcati. Sia α una curva semplice chiusa essenziale e non separante in S e a la sua classe di isotopia. Allora l'omomorfismo $\zeta : MCG(S, \vec{a}) \rightarrow PMCG(S - \alpha)$ è ben definito e il suo nucleo è generato dal twist di Dehn T_a relativo alla classe di isotopia di α .*

Come conseguenza della proposizione precedente otteniamo la successione desiderata.

Lemma 4.15. *Sia S una superficie senza componenti di bordo e sia α una curva semplice chiusa essenziale e non separante con classe di isotopia a in S . Allora è esatta la successione*

$$1 \longrightarrow \langle T_a \rangle \longrightarrow MCG(S, \vec{a}) \xrightarrow{\zeta} PMCG(S - \alpha) \longrightarrow 1.$$

Tale risultato ci permette di confondere il *mapping class group* di una superficie con quello della superficie ottenuta eliminando una curva non separante, pertanto costituirà un elemento importante nella dimostrazione del teorema sulla finita generazione del $PMCG(S_{g,n})$.

4.3 L'azione del Mapping Class Group sul complesso delle curve

L'ultimo passo importante per raggiungere il nostro scopo è considerare l'azione del $MCG(S_{g,n})$ sul complesso delle curve semplici chiuse e non separanti $\widehat{N}(S_{g,n})$. Siccome gli omeomorfismi della superficie mandano curve semplici chiuse non separanti in curve dello stesso tipo e ne preservano il numero di intersezione, allora è ben definita l'azione naturale del *mapping class group* su tale complesso simpliciale.

Un principio generale della teoria geometrica dei gruppi afferma che, se un gruppo G agisce su uno spazio connesso X , allora la struttura dell'azione può permetterci di descrivere un insieme di generatori del gruppo. Il lemma seguente è una versione di tale fatto specifica per i complessi simpliciali unidimensionali, in modo da poterla utilizzare per studiare l'azione di $MCG(S_{g,n})$ su $\widehat{N}(S_{g,n})$.

Lemma 4.16. *Supponiamo che G sia un gruppo che agisca tramite automorfismi simpliciali su un complesso simpliciale X connesso e 1-dimensionale. Supponiamo inoltre che l'azione di G sia transitiva sui vertici e sulle coppie di vertici di X che sono connesse da un arco. Siano v e w due vertici di X che sono connessi da un arco e sia $h \in G$ tale*

che $h(w) = v$. Allora il gruppo G è generato dall'elemento h e dallo stabilizzatore di v in G .

Dimostrazione. Sia $g \in G$. Mostriamo che g è contenuto nel sottogruppo $H < G$ generato dallo stabilizzatore di v e dall'elemento h . Siccome X è connesso, esiste una sequenza di vertici $v = v_0, \dots, v_k = g(v)$ in cui vertici adiacenti sono connessi da un lato. Poichè G agisce transitivamente sui vertici di X , possiamo scegliere degli elementi $g_i \in G$ tali che $g_i(v) = v_i$ per ogni i . Prendiamo come g_0 l'identità e come g_k l'elemento g . Dimostriamo per induzione che $g_i \in H$. Il passo base è banale poichè $g_0 \in H$ per definizione. Supponiamo pertanto che $g_i \in H$ e proviamo che anche g_{i+1} appartiene a H . Componendo con l'elemento g_i^{-1} il lato che connette $v_i = g_i(v)$ e $v_{i+1} = g_{i+1}(v)$, otteniamo il lato tra v e $g_i^{-1}g_{i+1}(v)$. Siccome per ipotesi G agisce transitivamente sulle coppie di vertici di X connessi da un lato, allora esiste un elemento $r \in G$ che manda la coppia $(v, g_i^{-1}g_{i+1}(v))$ nella coppia (v, w) . In particolare r si trova nello stabilizzatore di v e $rg_i^{-1}g_{i+1}(v) = w$. Abbiamo così che $hrg_i^{-1}g_{i+1}(v) = v$, e dunque che $hrg_i^{-1}g_{i+1}$ è anch'esso nello stabilizzatore di v . Conseguentemente $hrg_i^{-1}g_{i+1} \in H$. Poichè h e r si trovano in H per definizione di tale sottogruppo, e poichè anche $g_i \in H$ per ipotesi induttiva, allora $g_{i+1} \in H$. In particolare $g_k = g$ appartiene a H , che era ciò che volevamo mostrare. $\square$

4.4 Il teorema di Dehn-Lickorish

Siamo ora pronti per dimostrare il teorema cardinale di questo capitolo, uno dei risultati più significativi della teoria dei *mapping class group*.

Teorema 4.17. *Sia $S_{g,n}$ una superficie di genere $g \geq 0$ e con $n \geq 0$ punture. Allora il gruppo $PMCG(S_{g,n})$ è generato da un numero finito di twist di Dehn relativi a curve semplici chiuse essenziali e non separanti in $S_{g,n}$.*

Dimostrazione. Come avevamo già anticipato la dimostrazione avviene tramite una doppia induzione sul genere g e sul numero di punture n della superficie. Abbiamo già verificato il teorema nei casi base del toro $T^2 = S_{1,0}$ e del toro con una puntura $S_{1,1}$.

Iniziamo la prova con il passo induttivo su n . Siano $g \geq 1$ e $n \geq 0$. Assumiamo che il $PMCG(S_{g,n})$ sia generato da un numero finito di twist di Dehn relativi a curve semplici chiuse essenziali e non separanti $\{\alpha_i\}$ in $S_{g,n}$. Vogliamo mostrare che vale lo stesso per il $PMCG(S_{g,n+1})$. Possiamo supporre che $(g, n) \neq (1, 0)$, poichè per il passo base il $MCG(T^2)$ è finitamente generato da twist di Dehn relativi a curve semplici chiuse non

separanti. Pertanto consideriamo solamente i casi in cui $\chi(S_{g,n}) \leq 0$. Questi soddisfano la successione esatta di Birman

$$1 \longrightarrow \pi_1(S_{g,n}) \longrightarrow PMCG(S_{g,n+1}) \longrightarrow PMCG(S_{g,n}) \longrightarrow 1.$$

Siccome $g \geq 1$, abbiamo che il $\pi_1(S_{g,n})$ è finitamente generato da classi di curve semplici chiuse essenziali e non separanti. Per il lemma 4.12 l'immagine di quest'ultime curve è il prodotto di due twist di Dehn relativi a curve con le stesse proprietà. Considerando ciascuno di questi twist individualmente, stiamo iniziando a costruire un insieme di generatori del $PMCG(S_{g,n+1})$. Per completare tale insieme scegliamo un sollevamento a $PMCG(S_{g,n+1})$ per ogni twist di Dehn T_{α_i} generatore del $PMCG(S_{g,n})$. Essendo, però, *Forget* l'omomorfismo indotto dall'inclusione $S_{g,n+1} \hookrightarrow S_{g,n}$, allora per ogni curva semplice chiusa non separante α_i in $S_{g,n}$ esiste una curva non separante in $S_{g,n+1}$ che viene mappata in α_i . Quindi il twist di Dehn T_{α_i} nel $PMCG(S_{g,n})$ ha una preimmagine nel $PMCG(S_{g,n+1})$ che è sempre un twist di Dehn relativo a una curva semplice chiusa non separante in $S_{g,n+1}$. Questo completa il passo induttivo sul numero di punture della superficie.

Procediamo con l'induzione su g . Sia $g \geq 2$, e assumiamo che $PMCG(S_{g-1,n})$ sia finitamente generato da twist di Dehn relativi a curve semplici chiuse essenziali e non separanti per ogni $n \geq 0$. Poichè $\widehat{N}(S_g)$ è connesso per il lemma 4.8 e poichè per il principio di cambio delle coordinate il $MCG(S_g)$ agisce transitivamente sulle coppie ordinate di classi di isotopia di curve con numero di intersezione geometrico uguale a 1 (vedi l'esempio 1.16 nel primo capitolo), possiamo applicare il lemma 4.16 all'azione del $MCG(S_g)$ su $\widehat{N}(S_g)$. Sia a un'arbitraria classe di isotopia di curve semplici chiuse non separanti in S_g e sia b un'altra classe tale che $i(a, b) = 1$. Indichiamo con $MCG(S_g, a)$ lo stabilizzatore di a nel $MCG(S_g)$. Dalla relazione della treccia (proposizione 3.12) segue che $T_b T_a(b) = a$. Pertanto, per il lemma 4.16 il $MCG(S_g)$ è generato dal $MCG(S_g, a)$ insieme ai twist T_a e T_b . Ne consegue che è sufficiente mostrare che il $MCG(S_g, a)$ è finitamente generato da twist di Dehn relativi a curve semplici chiuse essenziali e non separanti. Sia $MCG(S_g, \vec{a})$ il sottogruppo del $MCG(S_g, a)$ costituito da tutti gli elementi che preservano l'orientazione della classe a . Abbiamo così la seguente successione esatta corta.

$$1 \longrightarrow MCG(S_g, \vec{a}) \longrightarrow MCG(S_g, a) \longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longrightarrow 1.$$

Siccome $T_b T_a^2 T_b$ inverte l'orientazione di a (vedi l'osservazione 3.14 del capitolo precedente), esso rappresenta il laterale non banale del $MCG(S_g, \vec{a})$ nel $MCG(S_g, a)$. Rimane perciò da dimostrare che il $MCG(S_g, \vec{a})$ è finitamente generato da twist di Dehn relativi a curve semplici chiuse non separanti in S_g . Dal lemma 4.15 abbiamo la successione

esatta corta

$$1 \longrightarrow \langle T_a \rangle \longrightarrow MCG(S_g, \vec{a}) \xrightarrow{\zeta} PMCG(S_g - \alpha) \longrightarrow 1,$$

dove $S_g - \alpha$ è la superficie ottenuta da S_g rimuovendo un rappresentante α della classe a . Quest'ultima superficie è omeomorfa a $S_{g-1,2}$ per quanto avevamo osservato in precedenza. Possiamo così applicare l'ipotesi induttiva: $PMCG(S_g - \alpha)$ è generato da un numero finito di twist di Dehn relativi a curve semplici chiuse e non separanti. Ciascuno di tali twist ha una preimmagine nel $MCG(S_g, \vec{a})$ che è anch'essa un twist di Dehn relativo a una curva semplice chiusa non separante per lo stesso motivo esposto precedentemente. Dunque il $MCG(S_g, \vec{a})$ è generato da twist di Dehn relativi a curve semplici chiuse non separanti e la prova è conclusa. $\square$

Il caso $n = 0$ del teorema 4.17 costituisce il seguente risultato.

Teorema 4.18 (Teorema di Dehn-Lickorish). *Per ogni $g \geq 0$ il $MCG(S_g)$ è generato da un numero finito di twist di Dehn relativi a curve semplici chiuse essenziali e non separanti.*

4.4.1 I generatori del Mapping Class Group

È possibile esplicitare il risultato ottenuto dai teoremi precedenti individuando un insieme finito di curve semplici chiuse i cui twist di Dehn generano l'intero *mapping class group* di S_g .

Consideriamo la famiglia di curve semplici chiuse essenziali e non separanti della superficie S_g costituita da $a_1, \dots, a_g, m_1, \dots, m_g, c_1, \dots, c_{g-1}$, rappresentata in figura 4.3. Questo insieme di curve è noto come sistema di Lickorish.

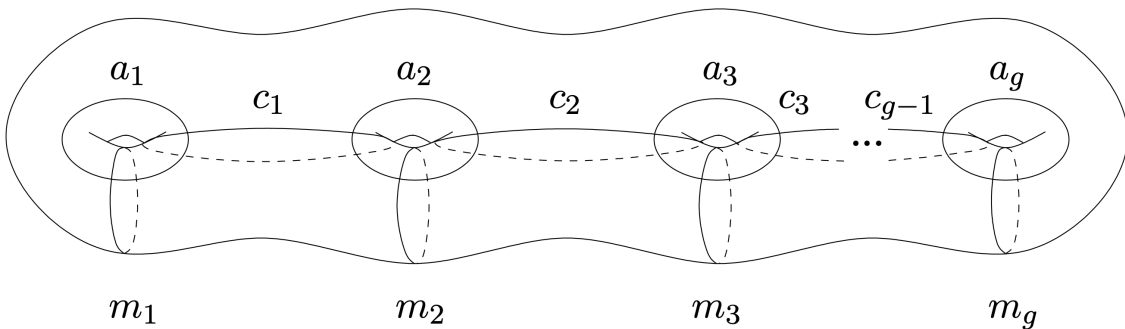


Figura 4.3: Sistema di curve di Lickorish su una superficie di genere g .

Teorema 4.19 (I generatori di Lickorish). *Sia S_g una superficie chiusa orientabile di genere $g \geq 0$. Allora il $MCG(S_g)$ è generato dai twist di Dehn relativi alle classi di isotopia delle curve del sistema di Lickorish.*

Tale risultato, dimostrato dal matematico W. B. R. Lickorish nel 1964, fornisce un insieme esplicito di $3g-1$ generatori del *mapping class group* di S_g e, pertanto, costituisce una delle prime descrizioni fondamentali della struttura algebrica del gruppo.

Successivamente, nel 1979 il matematico Stephen P. Humphries ridusse a $2g+1$ il numero di twist di Dehn necessari per generare il $MCG(S_g)$. Egli dimostrò infatti il seguente risultato.

Teorema 4.20 (I generatori di Humphries). *Sia S_g una superficie di genere $g \geq 2$. Allora il $MCG(S_g)$ è generato dai twist di Dehn relativi alle classi delle curve semplici chiuse essenziali e non separanti $a_1, \dots, a_g, c_1, \dots, c_{g-1}, m_1, m_2$.*

Bibliografia

- [1] Benson Farb e Dan Margalit: *A primer on mapping class groups*. Quinta edizione. Princeton University Press, Princeton e Oxford (2011)
- [2] Matt Clay e Dan Margalit: *Office Hours with a Geometric Group Theorist*. Princeton University Press, Princeton e Oxford (2015)
- [3] Marco Manetti: *Topologia*. Seconda edizione. Sapienza - Università di Roma, Italia (2014)
- [4] Allen Hatcher: *Algebraic topology*. Cambridge University Press, Cambridge (2001)
- [5] Manfredo P. do Carmo: *Differential Geometry of Curves and Surfaces*. Seconda edizione. Englewood Cliffs, New Jersey (2017)