

**Alma Mater Studiorum - Università di Bologna**

---

Dipartimento di Fisica e Astronomia  
Corso di Laurea in Astronomia

## **Effetto Doppler e Applicazioni Astrofisiche**

Tesi di laurea

Presentata da:  
**Luca Lavello**

Relatore:  
**Chiar.ma Prof.  
Marcella Brusa**

---

Appello IV  
Anno Accademico 2024-2025

*A chi ha creduto in me  
al posto mio*

# Indice

<b>1</b>	<b>Introduzione</b>	<b>iii</b>
1.1	Formulazione fisica del fenomeno . . . . .	iv
1.1.1	Caso non relativistico . . . . .	iv
1.1.2	Caso relativistico . . . . .	vi
<b>2</b>	<b>Applicazioni astrofisiche</b>	<b>viii</b>
2.1	Linee spettrali e allargamento Doppler . . . . .	viii
2.2	Binarie spettroscopiche . . . . .	xi
2.3	Esopianeti-Metodo della velocità radiale . . . . .	xii
2.4	Redshift . . . . .	xiii
2.4.1	Redshift cosmologico . . . . .	xiv
2.4.2	Redshift gravitazionale . . . . .	xv
2.5	Tomografia Doppler - Macchie stellari . . . . .	xvi
2.5.1	Base teorica . . . . .	xvii

# Capitolo 1

## Introduzione

L'effetto Doppler è un fenomeno fisico che consiste nella variazione apparente della frequenza di un'onda, quando quest'ultima è misurata da un osservatore che si trova in condizione di moto relativo rispetto alla sorgente che la produce.

Si tratta di un evento sperimentabile quotidianamente, per cui l'esempio più comune è quello di un'ambulanza che rivela un suono più acuto in fase di avvicinamento e più grave in fase di allontanamento. L'ambulanza, infatti, sfrutta in maniera pratica questo effetto, emettendo un suono bitonale composto, in Italia, da un Sol ( $392Hz$ ) e un Mi ( $660Hz$ ), che ci permette di comprendere in maniera intuitiva la distanza del mezzo di soccorso e la sua direzione di provenienza, in modo da poter facilitare in piena sicurezza il suo moto, proprio grazie alla diversa percezione dei due toni della sirena durante le diverse fasi dello spostamento.

Il principio fu postulato per la prima volta dal fisico austriaco Christian Andreas Doppler nel 1842, nella sua pubblicazione "Über das farbige Licht der Doppelsterne", ossia "Sul colore delle stelle binarie", a cui seguì, nel 1845, un esperimento ideato dallo stesso Doppler: egli assunse una banda di musicisti a cui assegnò il compito di suonare una nota di La, sul vagone di un treno in movimento, e si posizionò a pochi metri dal binario, con altri fisici e musicisti, per udire la sinfonia che la fisica avrebbe creato. Il risultato fu quello atteso, le corde producevano un musica di circa un semitono più acuta in avvicinamento, e altrettanto più grave dopo che il complesso aveva oltrepassato la sua platea.

Pochi anni dopo, nel 1848, il fisico francese Hippolyte Fizeau, lavorando indipendentemente sull'osservazione delle righe spettrali, dimostrò la teoria anche per le onde elettromagnetiche; per questo motivo l'effetto è noto, seppur meno comunemente, come "Effetto Doppler-Fizeau".

Ad oggi, oltre alle numerose applicazioni astrofisiche di cui si offre in seguito una breve presentazione, l'effetto Doppler ricalca un ruolo tutt'altro che marginale in numerosi aspetti della realtà, dai radar militari e rilevatori di velocità usati dalle forze dell'ordine, fino all'utilizzo in ambito meteorologico e addirittura medico, permettendoci di analizzare approfonditamente il flusso di sangue e la sua viscosità ed evitare conseguenze gravi nel caso di irregolarità.

## 1.1 Formulazione fisica del fenomeno

L'interpretazione concettuale dell'effetto è abbastanza semplice: se è la sorgente a muoversi, al momento dell'emissione essa si troverà in posizioni diverse, producendo un addensamento dei fronti d'onda nella direzione del moto.

Se invece è l'osservatore a spostarsi, ad esempio avvicinandosi alla sorgente, allora esso vede arrivare le creste d'onda a velocità maggiore (come quando si incrociano per strada delle auto provenienti dalla direzione opposta alla nostra, esse sembrano più veloci di quanto effettivamente siano), perciò incontra nell'unità di tempo un numero più elevato di fronti d'onda, rispetto a quanto farebbe in quiete (a parità di tempo, incrociamo più auto muovendoci verso di esse che rimanendo fermi).

Tuttavia, al fine di comprendere il fenomeno in tutte le sue sfaccettature, occorre procedere con una trattazione generale a livello matematico e fisico, nelle diverse situazioni che si possono incontrare.

### 1.1.1 Caso non relativistico

Partendo dalle onde sonore, quando nessuna delle velocità in gioco nel fenomeno è prossima a quella della luce nel vuoto, ci possiamo trovare di fronte a quattro diverse configurazioni:

- *Sorgente in moto e Osservatore a riposo*

Si consideri una sorgente (S) puntiforme che emette onde caratterizzate da frequenza  $\nu_0$ , lunghezza d'onda  $\lambda_0$ , periodo  $\tau_0 = \frac{1}{\nu_0}$  e velocità dell'onda  $v$ , mentre si muove di moto rettilineo uniforme rispetto all'osservatore (O), con velocità  $v_s$ . Ad esempio, se S si sposta nella direzione di O, durante un periodo  $\tau_0$  essa percorre uno spazio pari a  $v_s \cdot \tau_0$ ; perciò, indicando con l'apice le grandezze misurate dall'osservatore, la distanza tra due picchi ricevuti da O è pari a:

$$\lambda' = \lambda_0 - v_s \cdot \tau_0 = \lambda_0 - v_s \cdot \frac{1}{\nu_0} = \frac{\lambda_0 \nu_0 - v_s}{\nu_0} = \frac{v - v_s}{\nu_0}$$

In termini di frequenza:

$$\nu' = \frac{v}{\lambda'} = \nu_0 \left( \frac{v}{v - v_s} \right) \quad (1.1)$$

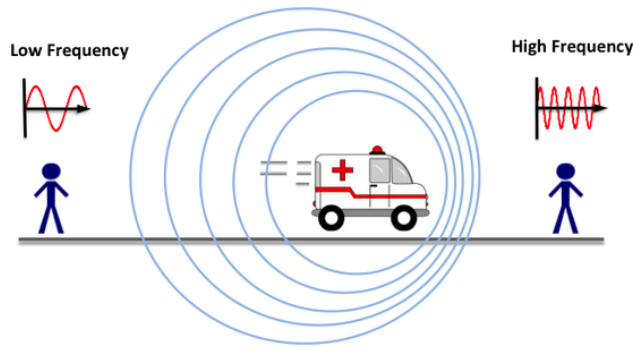
Generalizzando:

$$\lambda' = \frac{v \pm v_s}{\nu_0} \quad , \quad \nu' = \nu_0 \left( \frac{v}{v \pm v_s} \right) \quad , \quad v = \text{cost} \quad (1.2)$$

con il segno + per sorgenti in allontanamento e - in avvicinamento.

In questo caso, l'onda ricevuta, in 2D, è visualizzabile come una serie di creste d'onda circolari con il centro spostato verso la direzione del moto, il che porta ad avere fronti d'onda più ravvicinati da un lato e più distanziati dall'altro. Come si può ricavare dalle formule (1.2), osservando una sorgente in avvicinamento si riceve un segnale con lunghezza d'onda inferiore e frequenza maggiore, al contrario, per S in allontanamento si ottiene una lunghezza d'onda maggiore e una frequenza minore, con la velocità dell'onda che rimane invariata (è ciò che avviene quando da bordo strada si sente un veicolo con sirene attive).

## Doppler Effect



**Figura 1.1:** Esempio dell'ambulanza per effetto Doppler con sorgente in moto

- *Osservatore in moto e Sorgente ferma*

Indicando con  $v_o$  la velocità di O, se esso si muove verso S, la velocità dell'onda percepita è:

$$v' = v + v_o$$

ovvero essa sembra più veloce. In questo caso è la lunghezza d'onda della radiazione a rimanere invariata, e si ha:

$$\nu' = \frac{v'}{\lambda_0} = \frac{v + v_o}{\lambda_0} = \frac{v + v_o}{v \cdot \tau_0} = \nu_0 \left( \frac{v + v_o}{v} \right) \quad (1.3)$$

Generalizzando:

$$v' = v \pm v_o \quad e \quad \nu' = \nu_0 \left( \frac{v \pm v_o}{v} \right) \quad , \quad \lambda' = \lambda_0 = cost \quad (1.4)$$

Anche questa volta si osserva una frequenza maggiore se S e O si avvicinano, tuttavia l'espressione da cui si ricava il valore di  $\nu'$  è diversa da (1.1), il che sembrerebbe violare il principio di relatività galileiana. Questo risultato in realtà si ottiene perché nel fenomeno in analisi esiste un sistema di riferimento privilegiato, che è quello in cui il mezzo è fermo e l'onda si propaga con velocità  $v$ , come affrontato nel caso precedente.

- *Sorgente e Osservatore in moto*

Si tratta di una configurazione che prende in considerazione la combinazione delle implicazioni di entrambi i casi precedenti. Essendo S in moto, si avrà un cambiamento di  $\lambda$  e  $\nu$ , mentre lo spostamento di O provoca una variazione di  $v$  e  $\nu$ . Fatte queste considerazioni, risulta, per i due corpi che si avvicinano:

$$\lambda' = \frac{v - v_s}{\nu_0} \quad (1.5)$$

dovuto al moto della sorgente,

$$v' = v + v_o \quad (1.6)$$

per il moto dell'osservatore e infine, dalla combinazione della forma di  $\nu'$  nei due casi:

$$\nu' = \frac{v'}{\lambda'} = \nu_0 \left( \frac{v + v_o}{v - v_s} \right) \quad (1.7)$$

con tutti i segni che si invertono nel caso di O ed S in allontanamento, quindi in generale:

$$\lambda' = \frac{v \mp v_s}{\nu_0} \quad , \quad v' = v \pm v_o \quad , \quad \nu' = \nu_0 \left( \frac{v \pm v_o}{v \mp v_s} \right) \quad (1.8)$$

- *Mezzo in moto*

Le onde sonore, come le altre onde meccaniche, hanno bisogno di un mezzo attraverso cui propagarsi; può avvenire quindi che sia quest'ultimo ad essere in moto rispetto a O e S. Si può avere esperienza di questo evento quando si suona uno strumento musicale all'aria aperta in presenza di forte vento, situazione in cui il moto dell'aria (mezzo) fa sì che un ascoltatore riceva un suono leggermente diverso da quello effettivamente prodotto.

Detta  $v_m$  la velocità del mezzo, l'osservatore "vede" le creste d'onda che si muovono con velocità :

$$v' = v + v_m \quad (1.9)$$

e una lunghezza d'onda dilatata nella direzione del moto del mezzo, della stessa quantità, ovvero:

$$\lambda' = \lambda_0 \cdot \frac{v'}{v} \implies \frac{\lambda'}{v'} = \frac{\lambda_0}{v} \quad (1.10)$$

Al contempo la frequenza rimane costante, infatti:

$$\nu' = \frac{v'}{\lambda'} = \frac{v}{\lambda_0} = \text{cost} \quad (1.11)$$

In generale, quindi:

$$v' = v \pm v_m \quad , \quad \lambda' = \lambda_0 \left( \frac{v \pm v_m}{v} \right) \quad , \quad \nu' = \nu_0 = \text{cost} \quad (1.12)$$

Nelle formule precedenti,  $v_o$  e  $v_s$  sono le componenti della velocità lungo la linea di vista; infatti, in fisica classica, se i moti non possiedono una componente radiale della velocità, l'effetto Doppler non sussiste, implicando che se S si muove perpendicolarmente a O, questo misura un segnale identico a quello emesso.

## 1.1.2 Caso relativistico

La trattazione dell'effetto Doppler va affrontata con un approccio un po' differente nel caso di onde elettromagnetiche. Esse, in primo luogo, non necessitano della presenza di alcun mezzo, poiché possono propagarsi anche nel vuoto, inoltre si muovono ad una velocità  $c$  che, in sistemi di riferimento inerziali, non dipende dallo stato di moto relativo osservatore-sorgente, a causa del *principio di costanza della velocità della luce*, alla base della teoria della relatività ristretta.

Con queste premesse, si potrebbe giungere alla conclusione che per le onde elettromagnetiche l'effetto Doppler non esista. In realtà, a causa delle trasformazioni

relativistiche dello spazio-tempo, anche per queste onde si ha una variazione nella frequenza osservata.

Come nel caso del suono,  $\Delta\nu$  risulta essere funzione della velocità relativa S-O, ma in questo caso, come conseguenza del principio sovracitato, non si riscontra alcun tipo di dipendenza dal fatto che nel sistema di riferimento scelto sia O a muoversi verso S o viceversa.

Ci si ponga nel caso in cui si abbia l'osservatore nell'origine del sistema di riferimento  $S'$ , in moto con velocità  $v$  rispetto al sistema  $S$  in cui è situata la sorgente. Se la velocità relativa è molto minore della velocità della luce, la relazione tra frequenza osservata e propria è la stessa ricavata per le onde sonore nel caso di O in moto rispetto a S:

$$\nu' \sim \nu(1 \pm |\frac{v}{c}|) \quad (1.13)$$

In caso contrario, sia emessa in  $S$  un'onda piana:

$$f = \cos(kx - \omega t) = \cos[2\pi(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{\tau})] = \cos[2\pi(\frac{x}{\lambda} - t \cdot \nu)] \quad (1.14)$$

In  $S'$ , poiché le leggi della fisica sono invarianti per sistemi di riferimento inerziali, l'onda dovrà essere ancora piana:

$$f' = \cos[2\pi(\frac{x'}{\lambda'} - t' \cdot \nu')] \quad (1.15)$$

Per trovare la relazione tra  $\nu$  e  $\nu'$ , si può scrivere l'onda in  $S$  in funzione delle coordinate di  $S'$  attraverso le trasformazioni di Lorentz:

$$f = \cos[2\pi(\frac{\gamma(x' + vt')}{\lambda} - \gamma(t' + \frac{v}{c^2}x') \cdot \nu)] \quad \text{con} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2}}. \quad (1.16)$$

Raccogliendo per  $x'$  e  $t'$ , definendo  $\beta = \frac{v}{c}$  (con  $v$  che è la componente della velocità lungo la linea di vista),  $\nu' = \nu_{oss}$ ,  $\nu = \nu_{em}$  e infine confrontando con (1.15), si ottiene il seguente risultato:

$$\nu_{oss} = \nu_{em} \cdot \sqrt{\frac{1 \pm \beta}{1 \mp \beta}} = \nu_{em} \cdot \sqrt{\frac{c \pm v}{c \mp v}} \quad (1.17)$$

Dove si usa  $+$  al numeratore e  $-$  al denominatore per  $S'$  che si avvicina, e segni invertiti per  $S'$  che si allontana. Anche con questo approccio, si ottiene un aumento della frequenza in caso di avvicinamento e una diminuzione in caso contrario, ma con espressioni diverse da quelle ottenute con le onde del suono.

Al contrario di ciò che avviene in fisica classica, inoltre, nel caso relativistico si hanno delle conseguenze sulla frequenza osservata anche nella circostanza in cui la sorgente e l'osservatore si muovano perpendicolarmente l'una rispetto all'altro.

Questo fenomeno è detto *effetto Doppler trasversale* ed è una diretta conseguenza della dilatazione relativistica dei tempi. L'osservatore percepisce un periodo  $\tau_{oss} = \gamma \cdot \tau$ , con  $\tau$  periodo vero (misurato a riposo in S), quindi:

$$\nu_{oss} = \frac{1}{\tau_{oss}} = \frac{1}{\gamma \cdot \tau} = \nu_{em} \cdot \sqrt{1 - \beta^2} \quad (1.18)$$

che porta alla misura di una frequenza inferiore rispetto a quella emessa.

Si tratta di un avvenimento dimostrato dal punto di vista sperimentale nel corso di diversi decenni del 1900 ed è una delle conferme della dilatazione relativistica del tempo.

## Capitolo 2

# Applicazioni astrofisiche

I ragionamenti fisici e matematici, esplicitati nella prima parte dell'elaborato, sono alla base di una serie di applicazioni pratiche fondamentali per l'attuale comprensione del cosmo e soprattutto dei suoi angoli più remoti e irraggiungibili, che ci permettono di "rivivere" gli istanti iniziali dell'universo.

In effetti, la conoscenza astrofisica deriva fundamentalmente, a meno di informazioni giuntaci tramite onde gravitazionali, neutrini, raggi cosmici e materia extraterrestre che entra in atmosfera, dall'analisi delle onde elettromagnetiche, che essendo per loro natura influenzabili dall'effetto Doppler, rendono quest'ultimo una colonna portante della ricerca. Di seguito sono presentati alcuni degli usi principali di questa teoria.

### 2.1 Linee spettrali e allargamento Doppler

Lo studio dei corpi che emettono radiazione è spesso effettuato tramite analisi spettroscopiche, che forniscono un numero elevato di informazioni riguardanti l'interazione tra radiazione elettromagnetica e materia, rivelando le caratteristiche chimiche e fisiche dell'oggetto osservato.

La radiazione emessa dalle stelle è approssimabile a quella di *Corpo Nero*, la cui distribuzione di intensità di radiazione è data dalla *Legge di Planck*:

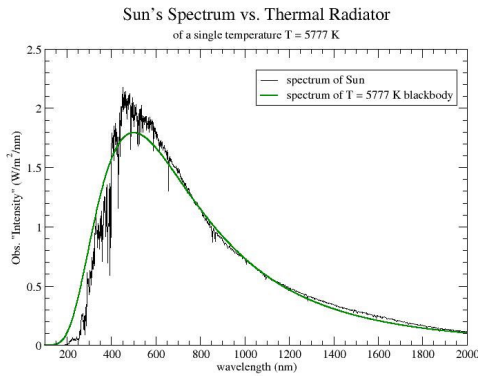
$$I(\nu)d\nu = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} d\nu \quad (2.1)$$

con  $\nu$  frequenza della radiazione,  $h = 6.62607015 \times 10^{-27} \text{erg} \cdot \text{s}$  costante di Planck,  $c$  velocità della luce nel vuoto,  $k = 1.3806 \times 10^{-16} \text{erg} \cdot \text{K}^{-1}$  costante di Boltzmann e  $T$  temperatura del corpo.

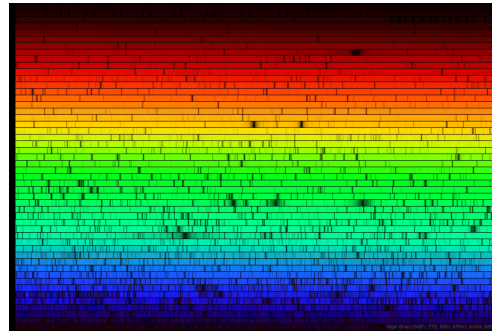
I fotoni prodotti dalle reazioni termonucleari, prima di giungere a noi, devono attraversare lo spazio che ci separa e in primo luogo l'atmosfera del corpo stesso, all'interno della quale sono distribuiti atomi di diversi elementi, i cui elettroni si trovano su livelli energetici ben precisi, a seconda degli stati di eccitazione e ionizzazione. Le abbondanze relative degli atomi nei diversi stati ci sono forniti dall'uso combinato dell'equazione di Boltzmann e della legge di Saha. L'energia trasportata dai fotoni è data da  $E = h\nu$  ed essa può essere ceduta agli atomi attraverso molteplici tipi di interazione, in particolare, se il prodotto  $h\nu$  corrisponde all'energia che separa due livelli energetici di un atomo nell'atmosfera, questo può assorbire il fotone, portando all'eccitazione di un elettrone. Come risultato di questo processo,

che riduce il numero di fotoni presenti nel fascio originale, la radiazione emessa, una volta giunta nello spazio interstellare, sarà variata rispetto a quella iniziale e presenterà una visibile riduzione dell'intensità in corrispondenza di alcune frequenze, dando vita alle cosiddette *righe di assorbimento*.

Una generica curva osservata ha caratteristiche simili alla seguente (figura 2.1(a)), ovviamente con differenze dovute a temperatura, composizione chimica e abbondanza degli elementi, proprietà variabili nelle diverse classi di oggetti osservati:



(a) Confronto tra spettro solare e curva di Corpo Nero a 5777 K



(b) Spettro di assorbimento del Sole

Come si può notare dalla figura (2.1(b)), le righe non sono infinitamente sottili e mostrano peculiarità differenti per quanto riguarda intensità e spessore.

La profondità è proporzionale all'abbondanza atomica nello stato relativo alla specifica transizione dello specifico elemento chimico che genera la riga, ma ci sono anche altri fattori che ne variano la forma, uno di questi è proprio l'effetto Doppler.

Si consideri una nube di gas, ferma rispetto all'osservatore. Al suo interno, a causa del moto di agitazione termica, gli atomi si muovono in direzioni casuali e di conseguenza si osserva una radiazione la cui frequenza, rispetto a quella a riposo, è spostata verso il rosso se la particella si allontana da noi (redshift), e verso il blu se si avvicina (blueshift).

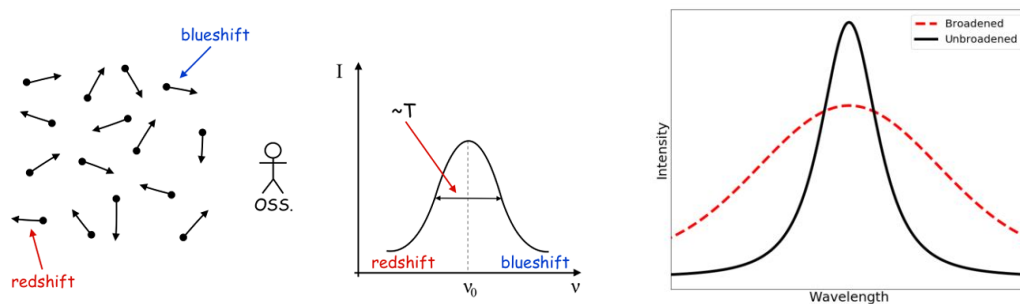


Figura 2.2: Effetto del moto termico delle particelle sulle righe spettrali

Detta  $v_r$  la componente del vettore velocità della singola particella nella direzione della linea di vista (velocità radiale), a causa dell'effetto Doppler (1.3) si ha:

$$\nu_{oss} = \nu_{em} \left(1 + \frac{v_r}{c}\right) \quad (2.2)$$

considerando  $\gamma \sim 1$ . Da cui si ricava:

$$\Delta\nu = \nu_{oss} - \nu_{em} = \nu_{em} \frac{v_r}{c} \quad (2.3)$$

ottenendo così una equazione che, dalle osservazioni spettroscopiche, conoscendo la frequenza a riposo della riga, permette di avere una stima della velocità termica media degli atomi, e conseguentemente, come esplicitato a breve, della temperatura interna:

$$v_r = c \cdot \frac{\nu_{oss} - \nu_{em}}{\nu_{em}} \quad (2.4)$$

L'effetto complessivo è un cambiamento nella forma del profilo della riga, in particolare un suo allargamento e un conseguente abbassamento del picco (figura 2.2), poiché l'energia totale (area sottesa dal profilo della linea) resta invariata e si distribuisce su una gamma più ampia di frequenze (o analogamente, di lunghezze d'onda). Se ci si trova in una condizione di equilibrio termico (approssimazione valida per la maggior parte delle stelle osservate), le velocità sono distribuite secondo una statistica di Maxwell-Boltzmann:

$$N(v_r)dv_r = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} v_r^2 e^{-\frac{mv_r^2}{2kT}} dv_r \quad (2.5)$$

In particolare, in questa situazione vale:

$$\frac{1}{2}mv_r^2 = kT \implies v_r = \sqrt{\frac{2kT}{m}} \quad (2.6)$$

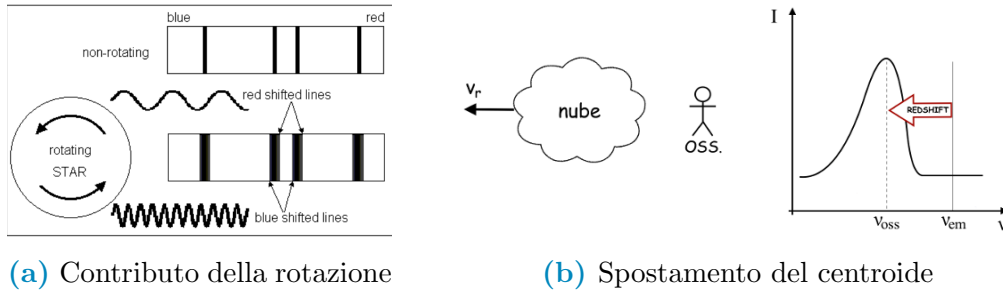
Che è una formula che offre una dipendenza funzionale tra velocità e temperatura. Sostituendo nell'equazione (2.3), si ottiene:

$$\Delta\nu_d = \frac{\nu_{em}}{c} \sqrt{\frac{2kT}{m}} \implies \Delta\nu_d \propto T^{\frac{1}{2}} \quad (2.7)$$

Ovvero che la larghezza della riga (Doppler width  $\Delta\nu_d$ ) è proporzionale alla temperatura della nube di gas da cui si origina, in particolare, maggiore è la temperatura (e quindi il moto termico), più larga è la riga. Il suo profilo è descritto dalla *line profile function*, o LPF, indicata con  $\Phi(\nu)$ , che nel caso di allargamento Doppler ha la forma:

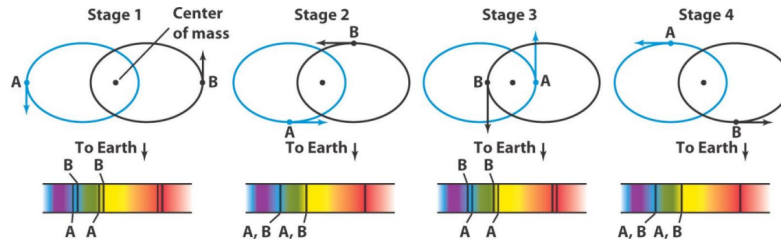
$$\Phi(\nu) = (\Delta\nu_d\sqrt{\pi})^{-1} e^{-\left(\frac{\nu_{oss}-\nu_{em}}{\Delta\nu_d}\right)^2} \quad (2.8)$$

Che è quella di una gaussiana con picco in  $\nu_{em}$  e costante di normalizzazione  $(\Delta\nu_d\sqrt{\pi})^{-1}$ . Oltre al moto random degli atomi, ci sono altri effetti che contribuiscono all'allargamento Doppler: per stelle giganti e supergiganti, oltre alla velocità delle particelle, va presa in considerazione la *velocità di turbolenza* che è causata da moti di gas su larga scala, e in generale, la rotazione stellare va ad accentuare l'effetto Doppler, provocando ulteriore redshift nella porzione in allontanamento e blueshift in avvicinamento. Se invece la nube non è in quiete rispetto all'osservatore, l'effetto Doppler introduce un'altra conseguenza sulla forma della riga. In questo caso, infatti, il centroide  $\nu_{em}$  si sposta verso il rosso se la nube si allontana, e verso il blu se si avvicina. La riga diventa asimmetrica, con l'allargamento Doppler che è accentuato nella direzione di spostamento del centroide e attenuato nella direzione opposta, rendendo il profilo diverso da quello di una gaussiana.



## 2.2 Binarie spettroscopiche

L'effetto di spostamento del centroide, descritto nella parte finale della sezione 2.1, ha permesso negli anni '80 del 1800, di scovare un particolare tipo di sistema binario in cui le stelle non potevano essere risolte separatamente dai telescopi e, in seguito, di comprendere alcune caratteristiche dei loro componenti. In particolare, si notò che ad intervalli regolari, le singole righe spettrali si dividevano in due:



**Figura 2.4:** Separazione delle righe spettrali nelle binarie spettroscopiche

Come visualizzabile dalla formula (2.3), lo spostamento è direttamente proporzionale alla velocità radiale, perciò si ha la maggiore separazione possibile quando un componente si avvicina e l'altro si allontana con velocità parallele alla linea di vista. In questi sistemi, il periodo di variazione dello spettro corrisponde al periodo orbitale, fornendo importanti informazioni sul moto dei due corpi.

La velocità osservata  $v$  è legata a quella reale  $v_0$  attraverso la formula:

$$v = v_0 \sin i \quad (2.9)$$

dove  $i$  è l'angolo tra la linea di vista e la normale al piano orbitale del sistema binario.

Ci si ponga in una situazione approssimata in cui le orbite sono circolari attorno al centro di massa, con raggi  $a_1$  e  $a_2$  e  $a = a_1 + a_2$ , dalla definizione di centro di massa  $m_1 a_1 = m_2 a_2$ , si ottiene:

$$a_1 = \frac{a m_2}{m_1 + m_2} \quad (2.10)$$

La velocità reale del corpo 1 è:

$$v_{0,1} = \frac{2\pi a_1}{P} \quad (2.11)$$

con  $P$  che è il periodo orbitale ricavato dai cambiamenti nello spettro. Sostituendo nell'equazione (2.9), si ricava una nuova formula per la velocità osservata:

$$v_1 = \frac{2\pi a_1 \sin i}{P} \implies v_1 = \frac{2\pi a}{P} \frac{m_2 \sin i}{m_1 + m_2} \quad (2.12)$$

Risolviendo per  $a$  e sostituendo nella terza legge di Keplero, si ottiene l' *equazione di funzione di massa* (mass function equation):

$$\frac{m_2^3 \sin^3 i}{(m_1 + m_2)^2} = \frac{v_1^3 P}{2\pi G} \quad (2.13)$$

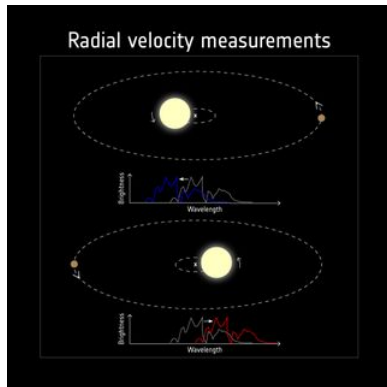
Se si è in grado di osservare le linee di uno solo dei due oggetti, l'equazione (2.13) restituisce la *funzione di massa*, che è l'espressione alla sinistra dell'uguale, e non si possono ottenere i valori delle singole masse, né della massa totale. Se invece le linee di entrambi i corpi sono visibili, e quindi entrambe le velocità disponibili, (2.12) suggerisce che  $\frac{v_1}{v_2} = \frac{a_1}{a_2}$  e dalla definizione di centro di massa si ha  $m_1 = \frac{m_2 v_2}{v_1}$ ; perciò possiamo ottenere  $m_2^3 \sin^3 i$  e  $m_1^3 \sin^3 i$  e di conseguenza, se conosciamo l'inclinazione dell'orbita, il valore delle masse.

## 2.3 Esopianeti-Metodo della velocità radiale

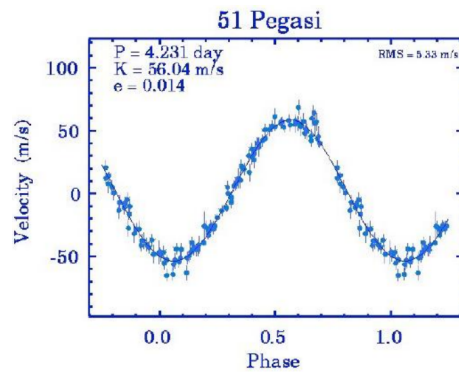
La tecnica della velocità radiale è un metodo di ricerca di pianeti extrasolari, che ha portato alla sua prima scoperta nel 1995, trovando il pianeta *51 Pegasi b*, orbitante la stella 51 Pegasi a 50 anni luce dalla Terra, con un raggio circa 2 volte quello di Giove e periodo orbitale di 4,23 giorni.

Il metodo si basa sul fatto che due corpi che interagiscono gravitazionalmente generino una forza di attrazione reciproca; perciò, la presenza di un pianeta attorno ad una stella porta quest'ultima ad avere un moto orbitale "anomalo" rispetto a quello che essa avrebbe in assenza di un altro corpo.

Come conseguenza, andando ad osservare lo spettro in vari istanti, si nota uno spostamento delle linee spettrali, causato proprio dall'effetto Doppler dovuto al periodico avvicinamento e allontanamento della stella lungo il percorso orbitale, che ci permette di calcolare la sua velocità radiale.



(a) Blueshift e Redshift-stelle binarie



(b) Andamento della velocità radiale di 51 Pegasi

Si considerino una stella di massa  $M_s$  e velocità osservata  $v_s$ , e un pianeta di massa  $M_p$  e periodo di rivoluzione  $P$ . La velocità  $v_s$  è legata a quella reale della stella tramite la formula (2.9) e si ha:

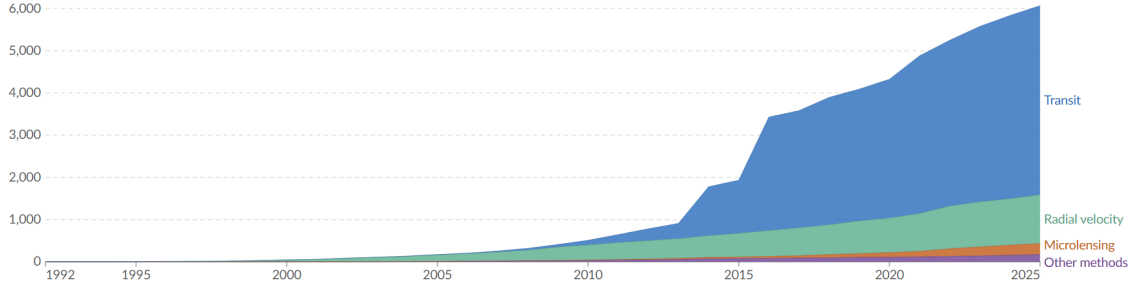
$$M_p^3 \sin^3 i = \frac{M_s^2 v_s^3 P}{2\pi G} \quad (2.14)$$

che fornisce la funzione di massa del pianeta.

Per avere una stima del termine di sinistra (e, conoscendo  $i$ , della massa), è sufficiente a questo punto ricavare una stima di  $M_s$  dalla luminosità  $L$ , la temperatura effettiva  $T_e$  e la posizione nel diagramma HR, il periodo  $P$  dalle osservazioni e la velocità  $v_s$  dallo spostamento delle linee spettrali, tramite la formula:

$$v_s = c \cdot \frac{\nu_{oss} - \nu_{em}}{\nu_{em}}$$

Si tratta della seconda tecnica più efficace (dopo quella del transito), che in un lasso di tempo dal 1995 a fine 2025, ha portato alla scoperta di ben 1158 pianeti extrasolari (su circa 6000 totali).



**Figura 2.6:** Numero di esopianeti scoperti con le diverse tecniche - fonte dei dati: Nasa

Essa presenta tuttavia diverse limitazioni; in primo luogo, affinché si possa sfruttare l'effetto Doppler, è utilizzabile esclusivamente per stelle che presentino una componente di velocità lungo la linea di vista, inoltre può individuare solo pianeti abbastanza massivi da generare un'attrazione gravitazionale sufficientemente forte da causare una variazione osservabile nella posizione del corpo attorno al quale orbitano e quindi uno spostamento apprezzabile delle linee spettrali. Di conseguenza, i bersagli di questo metodo sono solitamente analoghi di Giove e Saturno, con alcuni casi di pianeti di grandezza simile a quella terrestre, che si trovano però in orbite molto vicine alla stella.

## 2.4 Redshift

Il *redshift*, indicato con il simbolo  $z$ , non è altro che lo spostamento verso il rosso della lunghezza d'onda di un segnale emesso da una sorgente in fase di allontanamento dall'osservatore. Partendo dalla formula (1.17) per il Doppler longitudinale tra sorgente e osservatore, nel caso in cui la distanza tra i due sia in aumento, ed esprimendola in funzione della lunghezza d'onda  $\lambda = \frac{c}{\nu}$ , si ottiene:

$$\frac{c}{\lambda_{oss}} = \frac{c}{\lambda_{em}} \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} \implies \lambda_{oss} = \lambda_{em} \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} \quad (2.15)$$

Da cui la definizione formale:

$$z = \frac{\Delta\lambda}{\lambda_{em}} = \frac{\lambda_{oss} - \lambda_{em}}{\lambda_{em}} = \frac{\lambda_{em}(\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} - 1)}{\lambda_{em}} = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} - 1 \quad (2.16)$$

Solitamente espressa nella forma:

$$1 + z = \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}} \quad (2.17)$$

Nel caso in cui il moto della sorgente non avvenga a velocità prossime alla velocità della luce:

$$\beta = \frac{v}{c} \rightarrow 0$$

Si ottiene la formula approssimata:

$$z = \beta = \frac{v}{c} \quad (2.18)$$

Lo spostamento verso il rosso trova la sua origine in diversi fenomeni; uno di questi, già discusso, è la presenza di velocità relativa tra sorgente e osservatore, altri sono rappresentati dall'allontanamento tra i due dovuto all'espansione dell'universo (redshift cosmologico) e dalla presenza di campi gravitazionali (redshift gravitazionale).

## 2.4.1 Redshift cosmologico

Circa 13.8 miliardi di anni fa, il nostro universo ha avuto origine con il Big Bang; questa inizialmente rapidissima espansione ha tuttavia iniziato a rallentare quasi istantaneamente, a causa dell'intervento della forza di gravità, dopo circa  $10^{-43}$  s.

Di nuovo, 5 miliardi di anni fa, il tasso di espansione ha subito una ulteriore variazione, tornando ad accelerare a causa di una forza denominata *energia oscura*.

Prove di questa espansione derivano dall'osservazione dello spettro emesso dalle galassie: mentre l'universo aumenta di dimensioni, esse si separano le une dalle altre e la loro luce si distende, spostandosi verso lunghezze d'onda maggiori e quindi il colore rosso. Il concetto di universo in espansione fu esplorato da numerosi astronomi negli anni '20 del 1900, tra i quali spicca il nome di Edwin Hubble, che fu il primo a comprendere e provare che alcuni dei corpi osservati e ritenuti "nebulose" fossero in realtà galassie indipendenti al di fuori della nostra, e che queste si stessero distanziando da noi.

Per farlo, egli eseguì studi spettroscopici di galassie più e meno lontane e si rese conto di due aspetti principali:

- affinché le onde luminose ricevute raggiungano lunghezze d'onda così elevate deve essere l'universo stesso ad aumentare le sue dimensioni, provocando una maggiore distanza tra sorgente e osservatore;
- il redshift è più prominente per galassie più distanti, suggerendo che più la galassia è lontana e più velocemente essa si sta muovendo.

Di conseguenza, osservando nel rosso e nell'infrarosso, si è in grado di vedere galassie più remote e, poiché oggetti a maggiore distanza richiedono più tempo affinché la loro luce giunga sul nostro pianeta, questo fenomeno permette di studiare la luce delle prime galassie, comprendendone caratteristiche non deducibili dall'osservazione di galassie già evolute e ricavando informazioni sull'universo primordiale.

Si dimostra che la velocità di recessione è direttamente proporzionale alla distanza  $d$  e può essere espressa attraverso la *Legge di Hubble-Lemaître*:

$$v = H_0 \cdot d \quad (2.19)$$

che sostituita nell'equazione (2.18), offre un legame diretto tra il valore del redshift e la distanza del corpo osservato, permettendo, tramite lo studio delle righe spettrali, di ottenere indicazioni fondamentali sulla posizione dei corpi:

$$z = \frac{H_0 \cdot d}{c} \quad (2.20)$$

Il valore della *Costante di Hubble*  $H_0$ , al giorno d'oggi, mostra una incertezza tutt'altro che trascurabile; esso infatti varia a seconda del metodo di calcolo.

Se si utilizzano candele standard locali, ad esempio supernove di tipo Ia, si ottiene  $H_{0,local} \sim 74 \text{ kms}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ . L'inverso della costante ci fornisce un tempo, che è il tempo scala dell'espansione dell'universo, moltiplicando questo valore per  $c$ , si ottiene infine la scala di distanza percorsa dalla luce fino ad oggi, ovvero la dimensione dell'universo osservabile, attorno ai  $4100 \text{ Mpc}$ .

Se la misura avviene invece su scale cosmologiche, utilizzando la CMB (Cosmic Microwave Background), si ottiene  $H_{0,CMB} \sim 67 \text{ kms}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ .

## 2.4.2 Redshift gravitazionale

Il redshift gravitazionale è lo spostamento verso il rosso della lunghezza d'onda di un'onda elettromagnetica dovuto all'attraversamento, da parte di quest'ultima, di un campo gravitazionale molto intenso, causato dalla presenza di un oggetto compatto che incurva lo spazio-tempo e modifica il percorso seguito dalla luce.

L'indebolimento gravitazionale della luce è un effetto già supposto verso la fine del 1700 da alcuni fisici, tra cui Pierre-Simon Laplace, poi correttamente formulato da Albert Einstein nella sua *Teoria della Relatività Generale* (1916). I risultati, ottenuti sperimentalmente tramite osservazioni sia nel sistema solare che all'esterno di esso, sono ancora una volta a conferma delle previsioni del fisico tedesco.

Nell'approssimazione di una massa senza carica, non rotante e sfericamente simmetrica, la formula più utilizzata è:

$$z = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{r_s}{r_e}}} - 1 \quad \text{con} \quad r_s = \frac{2GM}{c^2} \quad (2.21)$$

dove  $r_s$  è denominato *raggio di Schwarzschild*,  $G$  è la costante di gravitazione universale,  $M$  la massa del corpo che provoca lo spostamento verso il rosso e  $r_e$  è la distanza tra il centro di massa del corpo gravitante e il punto di passaggio del fotone. Nel caso in cui  $r_e$  sia sufficientemente grande rispetto a  $r_s$ , si può applicare l'approssimazione newtoniana, che fornisce la formula:

$$z \sim \frac{1}{2} \frac{r_s}{r_e} \sim \frac{GM}{c^2 r_e} \quad (2.22)$$

È importante notare che, in entrambi i casi, la variazione della lunghezza d'onda è tanto maggiore, quanto più massiccio è il corpo che la provoca.

Il redshift gravitazionale, oltre ad essere di fondamentale importanza per la completa comprensione della radiazione elettromagnetica che giunge ai nostri telescopi, ha anche applicazioni pratiche: esso è ad esempio fondamentale per garantire l'accuratezza di tecnologie come il sistema di posizionamento globale (GPS), per cui le correzioni gravitazionali sono necessarie per il funzionamento preciso dei satelliti.

## 2.5 Tomografia Doppler - Macchie stellari

La presenza di strutture non omogenee sulla superficie stellare, come differenze di temperatura e di composizione chimica o la presenza di campi magnetici, può causare caratteristiche distorsioni nelle linee spettrali. A causa dell'effetto Doppler, queste modifiche delle linee si muovono lungo il loro profilo durante la rotazione stellare, permettendo di sfruttarle per ricostruire le componenti superficiali che le generano, per le quali non si possono ottenere informazioni e immagini da misure dirette.

La conoscenza approfondita del campo magnetico di una stella è necessaria per lo sviluppo della ricerca astrofisica, per numerosi aspetti:

- esso influisce sulla dinamica del plasma stellare e sulla formazione di strutture come macchie stellari e brillamenti, eventi che possono influenzare significativamente l'ambiente circostante, con conseguenze riguardo alla possibile abitabilità di alcuni componenti del sistema, come eventuali pianeti.
- il campo magnetico ricopre un ruolo di vitale importanza nell'evoluzione stellare, poiché esso varia in base all'età dell'oggetto e alla sua velocità di rotazione, quindi, conoscendone le caratteristiche, si è in grado di prevedere il ciclo di vita e il possibile stadio finale del corpo preso in esame.
- si ritiene che la generazione del campo magnetico avvenga attraverso il processo di *dinamo stellare*, che è dipendente dalla composizione chimica e dalla rotazione. Studiare questo processo permette di esplorare le differenze tra le diverse classi stellari e comprendere maggiormente i processi di formazione.
- portando l'attenzione al sistema solare, il campo magnetico della nostra stella influenza il vento solare e le interazioni con la magnetosfera terrestre, portando a fenomeni quali aurore e tempeste geomagnetiche, potenzialmente minacciosi per alcune tecnologie moderne e per la sicurezza delle missioni spaziali.

Ovviamente, per avere una comprensione generale del comportamento dei campi magnetici stellari, non possiamo limitarci a conoscere e studiare quello solare, di per certo più semplice da analizzare, ma dobbiamo ampliare la ricerca a stelle anche distanti, la cui superficie non è risolvibile dai telescopi. In questi casi, la tomografia Doppler permette, utilizzando uno spettroscopio ad alta risoluzione, di convertire una serie temporale di profili di linee spettrali, ottenuti durante una rotazione stellare completa, in un'immagine che rappresenta la temperatura, e quindi la luminosità, della superficie stellare. Ottenuta una mappatura con questo metodo, si può poi utilizzare una tecnica di cartografia in luce polarizzata, denominata *imaging Doppler-Zeeman* per ottenere la geometria del campo magnetico. Con questo metodo è stato ad esempio provato che le macchie "calde" e "fredde" presentano polarità magnetiche opposte, rispettivamente negative (o miste) e positive.

## 2.5.1 Base teorica

In generale, le macchie stellari indicano regioni in cui la quantità di radiazione emessa, e quindi la luminosità, è ridotta rispetto alle zone in cui esse sono assenti, generando flessioni in alcune parti della riga. Durante la rotazione della stella, questi cali localizzati si spostano lungo il profilo a causa dell'effetto Doppler, andando ad aumentare di dimensione man mano che le macchie diventano più visibili sul lato della stella osservato (face-on), per poi tornare a diminuire quando esse si muovono verso la parte non osservabile.

L'entità del *Doppler shift* in presenza di uno *spot* è definita da:

$$\Delta\lambda = v_0 \sin i \cos l \sin L \quad (2.23)$$

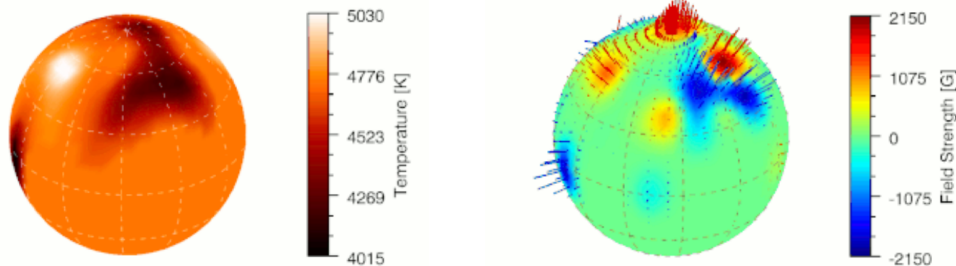
dove  $l$  è la latitudine,  $L$  la longitudine e il fattore  $v_0 \sin i$  la velocità di rotazione lungo la linea di vista ( $i$  è lo stesso di (2.9)). I segni dovuti a macchie a latitudini maggiori saranno visibili nella parte centrale delle righe spettrali. A latitudini molto elevate è possibile che lo *spot* sia sempre visibile e quindi la relativa flessione si muoverà avanti e indietro all'interno del profilo, senza mai sparire, variando di intensità.

Osservando lo spostamento dovuto al Doppler, si può mappare la posizione delle macchie; in seguito, si è in grado di risalire alla temperatura degli spot trovati, sfruttando la dipendenza della luminosità (che negli spot cala) da quest'ultima.

Si tratta di una tecnica estremamente utile, che richiede però il rispetto di due criteri:

- la velocità rotazionale deve essere l'effetto dominante dell'allargamento delle linee, con  $v_0 \sin i = 10 - 100 \text{ km s}^{-1}$ ;
- è preferibile che l'angolo di inclinazione  $i$  abbia un valore compreso tra  $20^\circ$ - $70^\circ$ . Quando  $i \sim 0^\circ$  non si hanno componenti radiali della velocità di rotazione, il che impedisce di sfruttare l'effetto Doppler, mentre per  $i > 70^\circ$ , la linea presenterà una simmetria (dovuta al coseno in (2.23), funzione simmetrica nell'intervallo tra  $-90^\circ$  e  $90^\circ$ ) che impedisce di capire se uno spot si trovi nell'emisfero nord o sud, il che permette comunque di ottenere delle informazioni, ma non una mappatura completa.

Di seguito, due immagini esplicative (dello stesso spot) ottenute da un team del *Leibniz-Institut für Astrophysik* di Potsdam, attraverso lo spettro-polarimetro Pepsi, in Arizona.



(a) Temperatura superficiale di II Pegasi con tomografia doppler

(b) Campo magnetico superficiale di II Pegasi con tecnica Doppler-Zeeman

# Bibliografia

1. C. Mencuccini, V. Silvestrini. Fisica II, Elettromagnetismo-Ottica, terza edizione (1999).
2. T. Padmanabhan. Theoretical Astrophysics, Volume I.
3. H. Karttunen, P. Kroeger, H. Oja, M. Poutanen, K. J. Donner, Springer. Fundamental Astronomy, quinta edizione.
4. Carla e Roberto Fanti. Una finestra sull'Universo Invisibile (2012).
5. Emilio Ceccotti. Appunti del corso di Processi di Radiazione e MHD.
6. Prof. F. R. Ferraro. Slide del corso di Astrofisica Stellare.
7. Prof. F. Pozzi. Appunti del corso di Fisica Generale II, modulo di relatività.
8. Prof. A. Cimatti, Prof. E. M. Moresco. Slide del corso di Astronomia.
9. [Hubble Cosmological Redshift-Nasa](#)
10. [Redshift gravitazionale-Treccani](#)
11. [Imaging Doppler-Media INAF](#)
12. K. G. Strassmeier, T. A. Carroll, I. V. Ilyin. Warm and cool starspots with opposite polarities - a high-resolution Zeeman-Doppler-Imaging study of II Pegasi with PEPSI.