

Alma Mater Studiorum - Università di Bologna

---

Dipartimento di Fisica e Astronomia

Corso di Laurea in Astronomia

# Processi di Scattering in Astrofisica

Tesi di Laurea

Presentata da:

**Mattia De Luca**

Relatrice:

**Chiar.ma Prof.ssa  
Marcella Brusa**

---

Sessione IV

Anno Accademico 2024–2025

*A mio nonno.*

# Abstract

Lo *scattering*, inteso come l'insieme dei processi di interazione e diffusione della radiazione ad opera della materia, rappresenta uno dei meccanismi fondamentali dell'astrofisica. Il presente elaborato si propone di analizzarne dal punto di vista analitico le principali caratteristiche, coniugando la trattazione teorica dei fenomeni fondamentali con lo studio delle loro implicazioni su scala cosmica.

Il primo capitolo fornisce una disamina dei processi di diffusione *Thomson*, *Compton* e *inverse Compton*, approfondendo le condizioni fisiche necessarie al loro innesco e le conseguenti modifiche spettrali ed energetiche subite da fotoni e particelle cariche, tipicamente elettroni.

Nella seconda parte del lavoro vengono illustrati alcuni degli scenari astrofisici più significativi in cui lo scattering gioca un ruolo determinante. In particolare, verranno discusse tre applicazioni fondamentali: il fenomeno del *Synchrotron Self-Compton* per la diagnostica dei campi magnetici, l'effetto *Sunyaev-Zel'dovich* come sonda per lo studio degli ammassi di galassie e, infine, il ruolo cruciale dello scattering Thomson nel generare la polarizzazione della radiazione cosmica di fondo.

# Indice

<b>1</b>	<b>Processi di Scattering</b>	<b>1</b>
1.1	Scattering Thomson . . . . .	1
1.1.1	Onda incidente non polarizzata . . . . .	3
1.2	Scattering Compton . . . . .	4
1.2.1	Sezione d'urto Klein-Nishina . . . . .	5
1.3	Inverse Compton Scattering . . . . .	6
1.4	Comptonizzazione . . . . .	8
<b>2</b>	<b>Applicazioni astrofisiche</b>	<b>10</b>
2.1	Synchrotron Self-Compton (SSC) . . . . .	10
2.2	Effetto Sunyaev-Zel'dovich (S-Z) . . . . .	11
2.3	Polarizzazione della Radiazione Cosmica di Fondo . . . . .	13
2.3.1	<i>Superficie di Ultimo Scattering (LSS) e CMB</i> . . . . .	13
2.3.2	<i>Polarizzazione della CMB</i> . . . . .	13

# Capitolo 1

## Processi di Scattering

In primo luogo si esamina il processo elastico dello scattering Thomson, passando poi all'analisi delle diffusioni Compton e inverse Compton, le quali al contrario prevedono trasferimenti di energia rispettivamente da onda a particella e viceversa.

Inoltre viene descritto come questi ultimi due meccanismi influenzino lo spettro di emissione di un corpo, dando luogo al fenomeno della *comptonizzazione*.

### 1.1 Scattering Thomson

Lo *scattering Thomson* è il processo di diffusione di un fotone, o più in generale di un'onda elettromagnetica, a seguito della collisione con una particella carica, libera e non relativistica ( $v \ll c$ ).

Il fotone incidente deve essere poco energetico rispetto alla particella a riposo, ovvero, nel caso dell'elettrone si deve avere che

$$h\nu \ll m_e c^2 \approx 0.511 \text{ MeV} \quad (1.1)$$

tale vincolo rende l'interazione elastica, cioè senza scambi di energia ( $h\nu_f = h\nu_i$ ), limitandola ad una semplice deviazione della traiettoria del fotone.

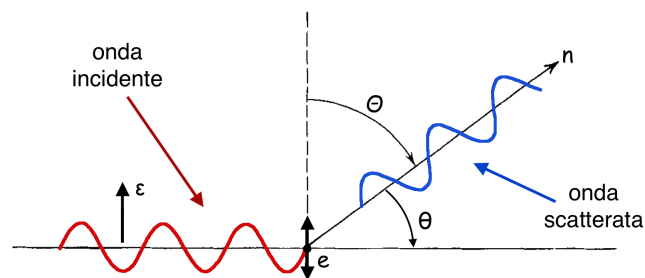


Figura 1.1: *Geometria dello scattering Thomson*

Per una trattazione più approfondita della fisica che regola il fenomeno, ci si pone nel sistema di riferimento della carica, nel nostro caso l'elettrone, in modo tale da poterlo ritenere a riposo, e si considera un'onda polarizzata linearmente in direzione  $\hat{\epsilon}$  incidente su di esso.

La causa principale dello scattering è la componente del campo elettrico dell'onda incidente, che una volta avvenuta l'interazione, accelera la carica nella sua direzione di oscillazione, definita dal versore  $\hat{\epsilon}$  in Figura 1.1.

Nel momento in cui accelera, la carica emette una radiazione elettromagnetica di dipolo, quindi l'onda incidente viene diffusa.

La distribuzione di radiazione mediata nel tempo è data da

$$\left\langle \frac{dP}{d\Omega} \right\rangle = \left\langle \ddot{\mathbf{d}}^2 \right\rangle \frac{1}{4\pi c^3} \sin^2 \Theta \quad (1.2)$$

dove  $\ddot{\mathbf{d}}$  è la derivata seconda del momento di dipolo, e contiene al suo interno l'informazione relativa all'accelerazione dell'elettrone  $\ddot{\mathbf{r}}$

$$\ddot{\mathbf{d}} = e\ddot{\mathbf{r}} = \frac{e^2 E_0}{m_e} \hat{\epsilon} \sin \omega_0 t \quad . \quad (1.3)$$

Sostituendo la (1.3) nella (1.2) e ricordando che  $\langle \sin^2 \omega_0 t \rangle = \frac{1}{2}$  si ottiene

$$\left\langle \frac{dP}{d\Omega} \right\rangle = \frac{e^4 E_0^2}{8\pi m_e^2 c^3} \sin^2 \Theta \quad (1.4)$$

dove  $\Theta$  è l'angolo tra la direzione di oscillazione dell'elettrone e la direzione di propagazione dell'onda scatterata, e riveste un ruolo fondamentale all'interno dell'equazione.

Dal momento che il termine  $\sin^2 \Theta$  restituisce un pattern di probabilità *toroidale*, l'equazione spiega che la distribuzione di radiazione cambia a seconda dell'angolo solido  $\Omega$  sotto il quale si sta osservando il fenomeno. Nello specifico, la probabilità di osservare radiazione scatterata in una direzione perpendicolare all'asse di oscillazione dell'elettrone è massima ( $\sin^2 \frac{\pi}{2} = 1$ ), ed è minima parallelamente ad esso ( $\sin^2 0 = 0$ ). L'equazione (1.4) inoltre permette di ricavare la forma generale della *sezione d'urto Thomson*  $\sigma_T$ , difatti può essere riscritta come

$$\left\langle \frac{dP}{d\Omega} \right\rangle = \langle S \rangle \frac{d\sigma}{d\Omega} \quad (1.5)$$

in cui  $\langle S \rangle$  è il vettore di Poynting e descrive il flusso incidente sulla particella

$$\langle S \rangle = \frac{c}{8\pi} E_0^2 \quad (1.6)$$

e  $\frac{d\sigma}{d\Omega}$  è la *sezione d'urto differenziale* per lo scattering nell'angolo solido  $d\Omega$ , ed è definita come

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{pol} = \frac{e^4}{m^2 c^4} \sin^2 \Theta = r_0^2 \sin^2 \Theta \quad (1.7)$$

dove  $r_0 = \frac{e^2}{mc^2}$  è una misura delle dimensioni della carica, nel caso dell'elettrone  $r_0 \approx 2.82 \cdot 10^{-13}$  cm.

La sezione d'urto Thomson si ottiene integrando la sezione d'urto differenziale su tutti gli angoli

$$\sigma_T = \int \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega = \frac{8\pi}{3} r_0^2 \quad (1.8)$$

e per l'elettrone risulta essere

$$\sigma_T = 6.65 \cdot 10^{-25} \text{ cm}^2 \quad . \quad (1.9)$$

Si noti che le sezioni d'urto totale e differenziale non dipendono dalla frequenza, e ciò suggerisce che lo scattering avviene allo stesso modo a tutte le lunghezze d'onda. Tuttavia, la sezione d'urto Thomson è valida solo quando l'onda incidente è poco energetica: se  $h\nu \gtrsim 0.511$  MeV si deve ricorrere alla *sezione d'urto Klein-Nishina*, una sezione d'urto quantistica che verrà approfondita nel paragrafo dedicato allo scattering Compton.

Inoltre, è importante sottolineare che per campi sufficientemente intensi l'elettrone si muove a velocità relativistiche e l'approssimazione di dipolo cessa di essere valida.

### 1.1.1 Onda incidente non polarizzata

Nel caso in cui l'onda incidente non sia polarizzata, essa può essere considerata come una sovrapposizione di due onde polarizzate linearmente, con assi di polarizzazione perpendicolari tra loro.

Supponiamo di avere un'onda polarizzata lungo una direzione  $\hat{e}_1$ , che appartiene al piano formato dalle direzioni di incidenza e di scattering dell'onda ( $\hat{n}$ ), ed un'altra onda polarizzata lungo  $\hat{e}_2$  perpendicolare a tale piano.

In riferimento alla Figura 1.1, poniamo  $\hat{e}_1 \equiv \hat{e}$ , e immaginiamo  $\hat{e}_2$  uscente dal foglio. Dato che  $\Theta$  è l'angolo tra  $\hat{e}_1$  ed  $\hat{n}$ , si ha che l'angolo di scattering sarà  $\theta = \frac{\pi}{2} - \Theta$ , mentre l'angolo tra  $\hat{n}$  ed  $\hat{e}_2$  ovviamente è pari a  $\frac{\pi}{2}$ . Con queste premesse, la sezione d'urto differenziale non è altro che la media delle sezioni d'urto differenziali delle due componenti polarizzate:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{unpol} = \frac{1}{2} \left[ \left(\frac{d\sigma(\Theta)}{d\Omega}\right)_{pol} + \left(\frac{d\sigma(\frac{\pi}{2})}{d\Omega}\right)_{pol} \right] = \frac{1}{2} r_0^2 (1 + \sin^2 \Theta) = \frac{1}{2} r_0^2 (1 + \cos^2 \theta) \quad (1.10)$$

I due termini alla destra dell'uguale si riferiscono rispettivamente alle intensità nelle due direzioni  $\hat{e}_2$  ed  $\hat{e}_1$ .

A questo punto il grado di polarizzazione sarà:

$$\Pi = \frac{I(\hat{e}_2) - I(\hat{e}_1)}{I(\hat{e}_2) + I(\hat{e}_1)} = \frac{1 - \cos^2 \theta}{1 + \cos^2 \theta} \quad (1.11)$$

si può notare come esso dipenda solamente dall'angolo di scattering  $\theta$ . In particolare, si osserverà radiazione non polarizzata per  $\theta = 0$  ( $\Pi = 0$ ), e radiazione completamente polarizzata per  $\theta = \pi/2$  ( $\Pi = 1$ ).

Pertanto, lo scattering Thomson può rendere polarizzata anche un'onda che prima dell'urto non lo era. Come si vedrà nella Sezione 2.3, questa proprietà è essenziale per descrivere il legame tra la diffusione Thomson e la polarizzazione della CMB.

## 1.2 Scattering Compton

Lo *scattering Compton* può essere considerato come il caso limite dell'interazione Thomson, in quanto è il processo nel quale il fotone incidente ha un'energia comparabile o maggiore all'energia della carica a riposo

$$h\nu \gtrsim m_e c^2 \quad . \quad (1.12)$$

Questa tipologia di scattering porta il fotone a cedere parte della sua energia all'elettrone, il quale, dopo l'interazione, non oscillerà più attorno alla sua posizione di equilibrio come nel caso Thomson, ma verrà "sparato via" con un certo angolo dalla direzione di incidenza del fotone.

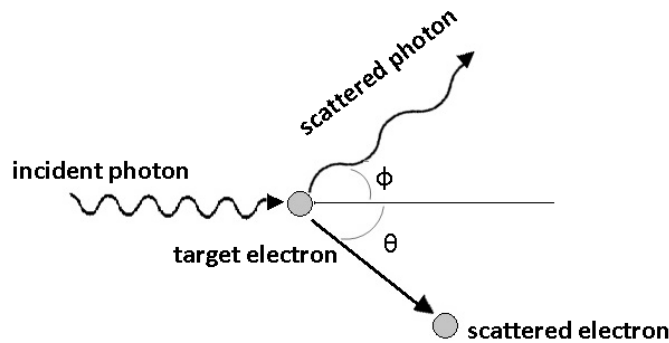


Figura 1.2: *Geometria dello scattering Compton*

Ovviamente, il fotone scatterato avrà un'energia minore di quello incidente, e ciò comporta un aumento di lunghezza d'onda, che può essere quantificato sfruttando le

leggi di conservazione di energia e quantità di moto.

Se si considera un fotone incidente sufficientemente energetico (Hard-X o Gamma) l'energia è conservata secondo l'equazione

$$h\nu_i + m_e c^2 = h\nu_f + \sqrt{p_e^2 c^2 + m_e^2 c^4} \quad (1.13)$$

dove le quantità a sinistra dell'uguale sono nell'ordine l'energia del fotone incidente e dell'elettrone a riposo, mentre a destra si ha l'energia del fotone scatterato e quella dell'elettrone diventato relativistico post-interazione.

La conservazione della quantità di moto invece, porta alla seguente equazione

$$\vec{p}_e = \vec{p}_{\gamma,i} - \vec{p}_{\gamma,f} \quad (1.14)$$

che mostra come l'impulso finale dell'elettrone sia dato dalla differenza tra gli impulsi iniziale e finale del fotone.

A questo punto, una semplice manipolazione algebrica delle due equazioni appena ricavate, permette di definire il cosiddetto *Compton shift*, ossia il guadagno di lunghezza d'onda del fotone che si stava cercando

$$\lambda_f - \lambda_i = \frac{h}{m_e c} (1 - \cos \phi) = \lambda_c (1 - \cos \phi) \quad (1.15)$$

dove  $\phi$  è l'angolo di scattering e  $\lambda_c$  è nota come *lunghezza d'onda Compton*, che per l'elettrone è pari a

$$\lambda_c = \frac{h}{m_e c} = 0.02426 \text{ \AA} \quad (1.16)$$

Il termine  $(1 - \cos \phi)$  indica che qualunque sia l'angolo di scattering, la lunghezza d'onda del fotone diffuso è sempre maggiore di quella del fotone incidente, o al limite uguale nel caso in cui  $\phi$  sia pari a  $2\pi n$  con  $n$  intero ( $\lambda_f \geq \lambda_i$ ).

Dall'equazione (1.13) si può anche ricavare l'energia finale del fotone scatterato

$$h\nu_f = \frac{h\nu_i}{1 + \frac{h\nu_i}{m_e c^2} (1 - \cos \phi)} \quad (1.17)$$

dunque per  $\phi = 0^\circ$  l'energia finale è massima  $h\nu_f = h\nu_i$ , mentre per  $\phi = 180^\circ$  l'energia finale è minima  $h\nu_f = \frac{h\nu_i}{1 + 2\frac{h\nu_i}{m_e c^2}}$ .

### 1.2.1 Sezione d'urto Klein-Nishina

Le alte energie dei fotoni coinvolti nello scattering Compton, per gli effetti dell'elettrodinamica quantistica, portano ad una riduzione della sezione d'urto Thomson.

In tale regime,  $\sigma_T$  non risulta più adeguata e deve essere sostituita dalla *sezione d'urto Klein-Nishina*  $\sigma_{KN}$ , derivante dalla meccanica quantistica relativistica:

$$\sigma_{KN} = \sigma_T \frac{3}{4} \left[ \frac{1+x}{x^3} \left( \frac{2x(1+x)}{1+2x} - \ln(1+2x) \right) + \frac{1}{2x} \ln(1+2x) - \frac{1+3x}{(1+2x)^2} \right] \quad (1.18)$$

il termine  $x$  è il rapporto tra l'energia del fotone e l'energia della particella ( $x = \frac{h\nu}{m_e c^2}$ ), e permette di distinguere due limiti:

- Limite non relativistico:  $x \ll 1$

$$\sigma_{KN} = \sigma_T \left( 1 - 2x + \frac{26x^2}{5} + \dots \right) \quad (1.19)$$

- Limite relativistico:  $x \gg 1$

$$\sigma_{KN} = \sigma_T \frac{3}{8x} \left( \ln 2x + \frac{1}{2} \right) \quad (1.20)$$

Si può dunque dedurre che se l'energia del fotone incidente è molto minore di quella della particella, la sezione d'urto Klein-Nishina, in prima approssimazione coincide con la sezione d'urto Thomson. D'altro canto all'aumentare dell'energia del fotone, la sezione d'urto Thomson si riduce, diminuendo le probabilità di scattering.

### 1.3 Inverse Compton Scattering

L'*inverse Compton (IC)* è il meccanismo contrario allo scattering Compton. In tale processo è il fotone a guadagnare energia dopo l'interazione con l'elettrone, e ciò avviene quando quest'ultimo è ultra-relativistico ( $v_e \sim c$ ).

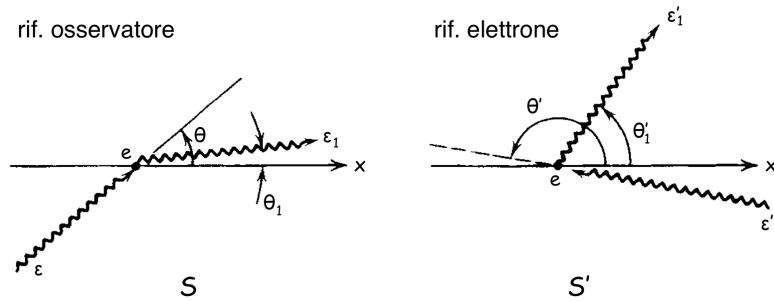


Figura 1.3: *Geometria dell'inverse Compton scattering: a sinistra il sistema di riferimento dell'osservatore, a destra quello dell'elettrone.*

Per poter descrivere il fenomeno, si devono considerare due sistemi di riferimento:

- $S$  sistema di riferimento dell'osservatore, in cui:
  - $\epsilon = h\nu$  energia del fotone incidente;
  - $\epsilon_1 = h\nu_1$  energia del fotone scatterato.
- $S'$  sistema di riferimento dell'elettrone a riposo, in cui:
  - $\epsilon' = h\nu'$  energia del fotone incidente;
  - $\epsilon'_1 = h\nu'_1$  energia del fotone scatterato.

Per l'effetto Doppler relativistico, si ha

$$h\nu' = h\nu\gamma(1 - \beta \cos \theta) \quad \text{in } S' \qquad h\nu_1 = h\nu'_1\gamma(1 + \beta \cos \theta'_1) \quad \text{in } S \quad (1.21)$$

dove  $\theta$  e  $\theta'_1$  indicano l'angolo tra la direzione del moto dell'elettrone e quella del fotone, rispettivamente prima dello scattering (nel sistema dell'osservatore) e dopo l'urto (nel riferimento dell'elettrone). Si noti ora che se  $h\nu \ll m_e c^2$ , nel sistema di riposo dell'elettrone si ha scattering Thomson, e ciò implica che  $h\nu'_1 = h\nu'$ , quindi considerando le equazioni (1.21) si ottiene

$$h\nu_1 = h\nu\gamma^2(1 - \beta \cos \theta)(1 + \beta \cos \theta'_1) \quad . \quad (1.22)$$

Questa equazione mostra che, nel sistema di riferimento dell'osservatore, l'energia del fotone scatterato non solo dipende dall'energia del fotone incidente, ma è fortemente amplificata dalla velocità dell'elettrone tramite il fattore di Lorentz  $\gamma$ . Tale fenomeno è una conseguenza diretta del *beaming* relativistico: per un osservatore in laboratorio, la radiazione non è emessa in modo isotropo, ma risulta concentrata in un cono di semi-apertura angolare  $\sim 1/\gamma$  centrato lungo la direzione del moto della carica.

Pertanto, a  $\gamma$  fissato, l'energia finale del fotone è determinata dalla geometria dell'urto: gli angoli  $\theta$  e  $\theta'_1$  definiscono infatti quanto la traiettoria del fotone si avvicini all'asse di massima emissione del cono, permettendo di distinguere i seguenti regimi energetici:

- $\theta = \pi$  e  $\theta'_1 = 0$ : il fotone passa dal cono di beaming sia prima che dopo l'urto, guadagnando massima energia

$$h\nu_1 = 4\gamma^2 h\nu \quad (1.23)$$

- $\theta = 0$  e  $\theta'_1 = \pi$ : il fotone passa dalla zona di "*dimming*" sia prima che dopo l'urto, riducendo la sua energia

$$h\nu_1 = \frac{h\nu}{4\gamma^2} \quad (1.24)$$

- $\theta = \pi$  e  $\theta'_1 = \pi$  oppure  $\theta = 0$  e  $\theta'_1 = 0$ : il fotone passa prima dal cono di beaming poi dalla zona di dimming o viceversa, mantenendo circa la stessa energia

$$h\nu_1 \approx h\nu \quad (1.25)$$

**Potenza emessa per inverse Compton.** Si prenda una regione in cui è presente un plasma di elettroni relativistici e un campo di radiazione  $E_{rad}$  dovuto ai fotoni, con elettroni e fotoni distribuiti isotropicamente. L'energia netta persa dagli elettroni e convertita in un aumento della radiazione è data da

$$\left(\frac{d\epsilon}{dt}\right)_{IC} = \frac{4}{3}c\sigma_T\gamma^2\beta^2U_{ph} \quad (1.26)$$

dove  $U_{ph} = \langle E_{rad}^2 \rangle$  è la densità di energia iniziale dei fotoni.

Tale equazione vale in entrambi i sistemi di riferimento  $S$  e  $S'$ , in quanto la potenza emessa è un invariante di Lorentz.

Inoltre, dalla (1.26) è possibile ricavare la massima energia guadagnata dai fotoni mediata su tutti i possibili angoli

$$\langle h\nu_1 \rangle \approx \frac{4}{3}\gamma^2 h\nu \quad (1.27)$$

di conseguenza, se si considerano elettroni con  $\gamma \sim 10^3$ , mediamente l'energia dei fotoni viene incrementata come segue: fotoni Radio  $\xrightarrow{IC}$  fotoni UV; fotoni F-IR  $\xrightarrow{IC}$  fotoni X; fotoni Ottici  $\xrightarrow{IC}$  fotoni  $\gamma$ .

## 1.4 Comptonizzazione

La *comptonizzazione* è il fenomeno che si verifica quando i processi di scattering Compton e inverse Compton modificano lo spettro di emissione di un corpo.

Le condizioni per le quali si osservano cambiamenti sostanziali nello spettro di fotoni seme, possono essere ricavate analizzando il caso in cui questi subiscano scattering multipli da parte di elettroni caldi (ma non relativistici), in equilibrio termico.

Come visto precedentemente, a seguito dello scattering i fotoni possono perdere o guadagnare energia:

$$\left\langle \frac{\Delta h\nu}{h\nu} \right\rangle_{ph} \approx -\frac{h\nu}{m_e c^2} \quad \left\langle \frac{\Delta h\nu}{h\nu} \right\rangle_{ph} \approx \frac{4kT}{m_e c^2} \quad (1.28)$$

la prima equazione rappresenta l'energia trasferita dai fotoni agli elettroni per scattering Compton, mentre la seconda indica quella ceduta dagli elettroni ai fotoni per

inverse Compton.

Nel caso di scattering multipli, l'energia netta trasferita è dunque data dalla combinazione dei due fenomeni

$$\left\langle \frac{\Delta E}{E} \right\rangle = \frac{4kT - h\nu}{m_e c^2} \quad (1.29)$$

l'equazione spiega che per  $4kT \approx h\nu$  non si hanno scambi di energia poiché i due processi si bilanciano, se invece  $4kT \ll h\nu$  o  $4kT \gg h\nu$  comandano rispettivamente gli effetti della diffusione Compton e Compton inverso.

Si esamini ora il caso in cui un fotone attraversi una nube di plasma di dimensione  $D$ , nella quale sono gli effetti dell'inverse Compton a dominare il trasferimento di energia ( $4kT \gg h\nu$ ).

L'energia finale del fotone, dipende dalla profondità ottica della nube  $\tau_e$  e quindi dal numero totale di collisioni subite prima di uscire dalla regione

$$N = \tau_e^2 = \left( \frac{D}{l_{mfp}} \right)^2 \quad (1.30)$$

dove  $D$  è la dimensione della nube e  $l_{mfp} = \frac{1}{n_e \sigma_T}$  è il libero cammino medio del fotone. Tramite semplici passaggi algebrici, si può ottenere l'espressione per l'energia una volta attraversata l'intera regione

$$h\nu = h\nu_0 e^{(4kT/m_e c^2)N} = h\nu_0 e^{4y} \quad (1.31)$$

Il termine  $y$  è il noto *parametro Compton*, ed indica l'efficienza del trasferimento di energia dal plasma termico ai fotoni

$$y = \frac{kT}{m_e c^2} \max(\tau_e, \tau_e^2) \quad (1.32)$$

in particolare se  $\tau_e < 1$  si è nel regime otticamente sottile e  $\max(\tau_e, \tau_e^2) = \tau_e$ , se invece  $\tau_e > 1$  il regime è otticamente spesso e  $\max(\tau_e, \tau_e^2) = \tau_e^2$ .

Tipicamente lo spettro dei fotoni viene modificato significativamente per  $y \gtrsim 1/4$ .

Nel caso in cui l'energia dei fotoni uscenti eguagli l'energia termica del plasma ( $h\nu = 4kT$ ), si è all'equilibrio termico, e lo spettro dei fotoni segue la *distribuzione di Bose-Einstein*

$$u(\nu)d\nu = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \frac{1}{e^{(h\nu/kT)+\mu} - 1} d\nu \quad (1.33)$$

che è molto simile alla densità di energia di corpo nero, ma con il termine esponenziale che dipende dal *potenziale chimico*  $\mu$ . Tale parametro riflette il fatto che l'inverse Compton conserva il numero totale di fotoni, impedendo al sistema di raggiungere un perfetto spettro di corpo nero (che richiederebbe  $\mu = 0$ ).

# Capitolo 2

## Applicazioni astrofisiche

Dopo aver delineato il quadro teorico, il presente capitolo esamina l'impatto dei processi di scattering su larga scala. Attraverso l'analisi del meccanismo Synchrotron Self-Compton, dell'effetto Sunyaev-Zel'dovich e della polarizzazione della radiazione cosmica di fondo, verrà mostrato come lo scattering funga da potente strumento diagnostico per mappare campi magnetici, misurare distanze e indagare le fasi primordiali dell'Universo.

### 2.1 Synchrotron Self-Compton (SSC)

L'emissione per sincrotrone è un processo di produzione di radiazione che si ha quando elettroni ultra-relativistici sono in moto in una regione in cui è presente un campo magnetico. A meno di un campo particolarmente intenso, i fotoni emessi sono solitamente poco energetici, quindi se la zona è sufficientemente compatta, questi possono essere scatterati tramite inverse Compton dagli stessi elettroni relativistici che li hanno prodotti.

Questo fenomeno è noto come *Synchrotron Self-Compton*, e consente di determinare il campo magnetico di tale regione.

Come già visto durante la trattazione dell'inverse Compton, l'energia emessa dagli elettroni a seguito dell'interazione è fornita dall'equazione (1.26), di contro, l'energia emessa dagli stessi per sincrotrone nel caso di distribuzione isotropa è:

$$\left(\frac{d\epsilon}{dt}\right)_{sinc} = \frac{4}{3}c\sigma_T\gamma^2\beta^2U_H \quad . \quad (2.1)$$

Si può notare che le espressioni (1.26) e (2.1) sono molto simili nella struttura, e il loro

rapporto si riduce alla seguente equazione

$$\frac{(d\epsilon/dt)_{sinc}}{(d\epsilon/dt)_{IC}} = \frac{U_H}{U_{ph}} \quad (2.2)$$

dove  $U_H = \frac{H^2}{8\pi}$  è la densità di energia del campo magnetico.

Questo risultato rende possibile la determinazione di  $H$ , difatti, se si misura la luminosità in banda Radio e in banda X, dove solitamente si hanno le emissioni per sincrotrone e  $IC$ , e si conosce la densità di energia del campo di radiazione (tipicamente CMB), si ottiene  $U_H$  e quindi una stima del campo magnetico

$$H \approx 2\sqrt{2\pi U_H} \quad . \quad (2.3)$$

## 2.2 Effetto Sunyaev-Zel'dovich (S-Z)

La temperatura della *Radiazione Cosmica di Fondo (CMB)* è pari a  $T_{CMB} = 2.73K$ , di conseguenza i suoi fotoni appartengono alla banda delle microonde, con energie dell'ordine dei  $10^{-3}eV$ .

Se questi attraversano zone in cui sono presenti elettroni molto energetici, come i gas dell'*Intracluster Medium (ICM)*, possono scaldarsi tramite inverse Compton, provocando uno shift a più alte energie dello spettro di corpo nero della CMB.

Questo fenomeno è noto come *effetto Sunyaev-Zel'dovich*, ed è una delle conseguenze più importanti della comptonizzazione in ambito cosmologico.

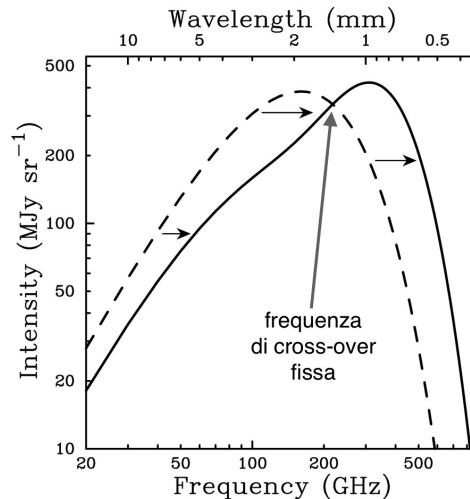


Figura 2.1: *Shift dello spettro di corpo nero causato dall'effetto Sunyaev-Zel'dovich*

Si consideri una nube intergalattica con  $T \approx 10^7 - 10^8 K$ , che emette fotoni X per *bremstrahlung*.

Il confronto tra lo spettro di CMB in direzione della nube, e quello di una regione di riferimento in cui non sono presenti elettroni caldi, rivela una distorsione spettrale caratteristica: il primo oltre a risultare spostato verso frequenze maggiori, mostrerà minore intensità di radiazione nella regione di Rayleigh-Jeans, e maggiore invece nella regione di Wien.

Il grado di distorsione dello spettro, dipende dal *parametro Compton*  $y$ , quindi da temperatura e dimensione della nube, e nel regime di Rayleigh-Jeans vale:

$$\Delta I_\nu = -2yI_\nu \quad . \quad (2.4)$$

Il segno della distorsione cambia ad una determinata frequenza  $\nu_c$ , chiamata *frequenza di cross-over*, oltre la quale l'intensità di radiazione dello spettro shiftato è maggiore

$$\nu_c = 3.83 \frac{T_0}{h} = 3.83 \frac{2.73}{h} \approx 220 \text{ GHz} \quad (2.5)$$

l'effetto netto dunque è l'osservazione di un corpo nero più freddo per  $\nu < \nu_c$ , e più caldo per  $\nu > \nu_c$ .

La Figura 2.2 mostra una serie di immagini dell'ammasso di galassie *Abell 2319*, in sette frequenze diverse, comprese tra 44 GHz e 545 GHz. Risulta evidente che la frequenza di cross-over sia  $\nu_c = 217 \text{ GHz}$ : nei primi quattro frame il segnale è negativo (blu), a dimostrazione del fatto che l'ammasso appare più freddo rispetto al segnale medio di CMB, mentre negli ultimi due frame, oltre i 217 GHz, l'ammasso appare più caldo, e il segnale è positivo (rosso).

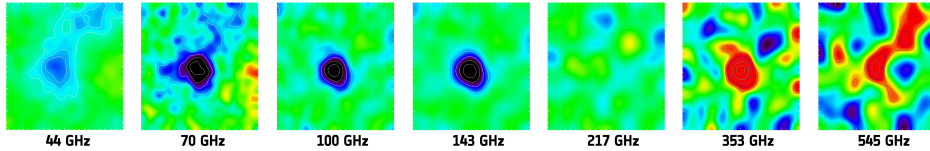


Figura 2.2: *Ammasso di galassie Abell 2319 visto dal satellite PLANCK*

Le distorsioni del segnale della CMB causate dall'effetto S-Z non dipendono dalla distanza, dunque i cambiamenti nello spettro possono essere rilevati anche per oggetti a redshift elevato. Questa importante caratteristica ha permesso al satellite PLANCK di identificare centinaia di ammassi e super-ammassi di galassie dal 2009 al 2013.

**Determinazione delle distanze dei Clusters** L'effetto Sunyaev-Zel'dovich è inoltre uno dei metodi più eleganti per misurare le distanze degli ammassi di galassie, rendendo anche possibile la stima della *costante di Hubble*  $H_0$ .

Più precisamente, se si assume che l'ammasso in questione sia a simmetria sferica, la

combinazione di effetto S-Z e osservazioni dell'emissione di bremsstrahlung termica, tipica dell'*ICM*, consente di determinare  $L$ , dimensione lineare dell'ammasso. Difatti, siccome lo shift dell'effetto S-Z dipende da  $N_e T_e L$  tramite il parametro Compton  $y$ , e l'emissione di bremsstrahlung da  $N_e^2 T_e^{1/2} L^3$ , ricavando  $T_e$  dalla forma dello spettro ci si riconduce ad un sistema di due equazioni in due incognite che permette di stimare  $L$ . A questo punto, dopo aver misurato la dimensione angolare  $\theta$  della sorgente, si ricava tramite semplice trigonometria la distanza del cluster  $d = L/\theta$ .

Una volta misurato il redshift dell'ammasso, e quindi la sua velocità di recessione, è possibile trovare una stima della costante di Hubble tramite la relazione  $H_0 = \frac{v}{d}$ .

## 2.3 Polarizzazione della Radiazione Cosmica di Fondo

### 2.3.1 *Superficie di Ultimo Scattering (LSS) e CMB*

Nelle fasi primordiali, l'Universo era permeato da un plasma denso di elettroni e protoni in equilibrio termico con la radiazione. L'elevata densità di cariche libere rendeva il mezzo opaco, e il cammino libero medio dei fotoni era estremamente ridotto a causa dei continui processi di scattering Thomson.

Con l'espansione e il conseguente raffreddamento del plasma, circa 380.000 anni dopo il Big Bang ( $T \approx 3000$  K), l'energia dei fotoni divenne insufficiente a contrastare il legame elettromagnetico, permettendo la formazione di idrogeno neutro (*Epoca della Ricombinazione*). La drastica riduzione della densità di elettroni liberi portò al disaccoppiamento tra radiazione e materia, rendendo l'Universo trasparente. I fotoni così liberati formano la *Radiazione Cosmica di Fondo* (CMB), e quando si parla di *Superficie di Ultimo Scattering* (LSS) ci si riferisce alla regione spazio-temporale dalla quale questi provengono. La CMB che osserviamo oggi risulta polarizzata proprio a causa degli ultimi eventi di scattering Thomson avvenuti sulla LSS.

Come si vedrà, tale polarizzazione è l'impronta diretta delle anisotropie di quadrupolo presenti nel campo di radiazione primordiale; queste derivano da perturbazioni generate durante l'*Inflazione*, una fase di espansione accelerata avvenuta tra  $10^{-36}$  e  $10^{-32}$  secondi dopo il Big Bang, guidata da un campo scalare detto *Inflatone*.

### 2.3.2 *Polarizzazione della CMB*

Se sulla superficie di ultimo scattering il campo di radiazione fosse stato isotropo (stessa intensità di radiazione in ogni punto dello spazio), la CMB non sarebbe stata polarizzata, per via della perfetta cancellazione delle diverse componenti di polarizzazione.

L'unico scenario che prevede una CMB polarizzata, è quello in cui il campo di radiazione presenti localmente sulla LSS delle anisotropie di quadrupolo nella temperatura (o intensità), ovvero l'elettone deve vedere radiazione calda proveniente da Nord-Sud, e fredda da Est-Ovest. Questa configurazione porta ad una cancellazione incompleta delle componenti di polarizzazione per via della differenza di intensità, e verrà generata radiazione polarizzata lungo l'asse Est-Ovest. L'importanza della polarizzazione della CMB risiede nello studio degli eventi che hanno generato queste anisotropie sulla LSS. Le principali cause sono due, e portano alla generazione di due diverse tipologie di quadrupoli di temperatura, e dunque, a due diversi schemi di polarizzazione:

- **Perturbazioni Scalari:** Si tratta di onde di pressione (oscillazioni acustiche) che inducono una periodica compressione e rarefazione del mezzo lungo la loro direzione di propagazione, generando fluttuazioni di densità nel fluido cosmico. Tale processo comporta un aumento locale della densità di fotoni nelle regioni compresse e una conseguente variazione dell'intensità della radiazione. Si origina così un *momento di quadrupolo scalare*, responsabile della generazione di schemi di polarizzazione noti come **Modi E**.

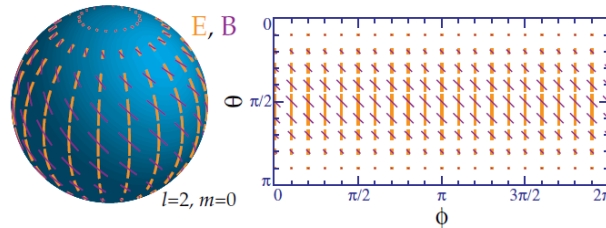


Figura 2.3: *Schema di polarizzazione dovuto ad una perturbazione scalare.*

*In giallo sono rappresentati i Modi E, generati da un momento di quadrupolo scalare  $^1Y_2^0(\theta, \phi)$ , i Modi B in viola verranno approfonditi al prossimo punto.*

- **Perturbazioni Tensoriali:** Si tratta di onde gravitazionali che inducono una deformazione della metrica spazio-temporale in senso trasversale rispetto alla loro direzione di propagazione. Tali increspature producono una periodica dilatazione e contrazione del tessuto dello spazio-tempo, il cui effetto fisico si traduce in un'alternanza tra *redshift* e *blueshift* dei fotoni che attraversano il piano perpendicolare alla traiettoria dell'onda. In funzione dell'orientazione spaziale di queste deformazioni, si distinguono due stati di polarizzazione definiti **plus (+)** e **cross (×)**. Questi simboli descrivono le direzioni lungo le quali avviene lo *stretching*

---

<sup>1</sup> $Y_l^m(\theta, \phi)$  è un'armonica sferica e descrive come la polarizzazione varia sulla LSS: l'indice  $l$  definisce la scala angolare dell'anisotropia, mentre  $m$  ne indica l'orientazione.

dello spazio, ipotizzando che l'onda si propaghi lungo l'asse ortogonale al piano di osservazione. Tale configurazione genera un *momento di quadrupolo tensoriale*: mentre la polarizzazione  $+$  produce pattern di polarizzazione analoghi a quelli indotti dalle perturbazioni scalari (Modi E), la polarizzazione  $\times$  dà origine a schemi noti come **Modi B**.

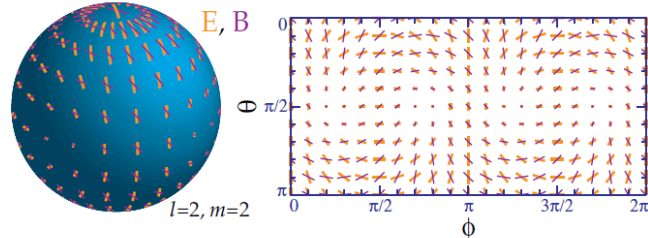


Figura 2.4: *Schema di polarizzazione dovuto ad una perturbazione tensoriale. Il momento di quadrupolo tensoriale ( $Y_2^2(\theta, \phi)$ ) genera sia Modi E (in giallo) che Modi B (in viola).*

I Modi E e B possono essere compresi appieno introducendo il *tensore di polarizzazione*  $P$ , che ha modulo ed orientazione dati da:

$$|P| = \sqrt{Q^2 + U^2} \quad , \quad \alpha = \frac{1}{2} \tan^{-1} \left( \frac{U}{Q} \right) \quad (2.6)$$

dove  $|P|$  è il grado di polarizzazione lineare dell'onda e  $\alpha$  è l'angolo di polarizzazione.

Sia  $|P|$  che  $\alpha$  dipendono dai parametri di Stokes  $Q$  ed  $U$ , i quali data un'onda che si propaga lungo l'asse  $\hat{z}$  indicano rispettivamente la differenza tra la polarizzazione lineare lungo gli assi  $\hat{x}$  e  $\hat{y}$ , e la stessa ma ruotata di  $45^\circ$ .

I segmenti delle Figure 2.3 e 2.4 non sono altro che la rappresentazione grafica del tensore di polarizzazione  $P$  in ogni punto della superficie di ultimo scattering.

In realtà, la lunghezza dei segmenti associati ai Modi B è significativamente inferiore a quella rappresentata graficamente; a differenza dei Modi E, infatti, essi non sono ancora stati rilevati sperimentalmente, in quanto si stima che la loro intensità sia di diversi ordini di grandezza inferiore.

L'eventuale rilevazione dei Modi B primordiali costituirebbe una prova diretta dell'esistenza di un fondo di onde gravitazionali prodotte durante l'Inflazione. Inoltre, la scala energetica di tale epoca è vincolata alla relazione  $V^{1/4} \approx 10^{16} \text{ GeV} (r/0.01)^{1/4}$ , dove  $V$  rappresenta il potenziale dell'Inflatone e  $r$  il rapporto tra la potenza delle perturbazioni tensoriali (responsabili dei Modi B) e scalari prodotte durante questa fase. Pertanto, tale scoperta non solo confermerebbe il modello inflazionario, ma fornirebbe indicazioni fondamentali sulla densità di energia dell'Universo primordiale.

# Bibliografia

- [1] Lezioni di Prof. **D.Dallacasa**, *Processi di Radiazione e MHD*, A.A. 2024/2025
- [2] **Malcolm S. Longair**, *Hight Energy Astrophysics*, Cambridge University Press (2011)
- [3] **G.B. Rybicki, A.P. Lightman**, *Radiative processes in astrophysics*, Springer (1979).
- [4] **G.Ghisellini**, *Radiative Processes in Hight Energy Astrophysics*, Springer (2013)
- [5] **W.Hu**, *W.Hu's Tutorials*: <http://background.uchicago.edu/index.html>
- [6] **W.Hu, M.White**, *A CMB polarization primer*, New Astronomy, 2, 323 (1997).
- [7] **M.Kleban, M.Mirbabayi and M.Porrati**, *Effective Planck mass and the scale of inflation*, Journal of Cosmology and Astroparticle Physics (JCAP), 2016